

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

**Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 517.55**

Dovbuş Piotr

APLICAȚII χ -NORMALE

01.01.01 – Analiza matematică

**Autoreferat
al tezei de doctor habilitat
în științe fizico-matematice**

**Chișinău
2004**

Teză a fost elaborată în colectivul de cercetare „Ecuatii diferențiale” al Institutului de Matematică și Informatică al Academiei de Științe a Moldovei

Referenți oficiali:

Andreian-Cazacu Cabiria, Doctor-docent ș. f.-m., prof. univ., Universitatea din București, România.

Colțoiu Mihnea, Dr. ș.f.-m., prof. univ., Institutul de Matematică al Academiei Române, România.

Zelinskii Iurii, D.h. ș. f.-m., c.ș.s., Institutul de Matematică al Academiei de Științe al Ucrainei, Ucraina.

**Susținerea va avea loc la 25 iunie 2004 la ora 16:00,
în ședința Consiliului științific specializat D 30.01.01.01. – 25.12.03,
Universitatea de Stat din Moldova , str. A. Mateevici, 60,
Facultatea de Matematică și Informatică, bl. 4, sala 222.**

Teza de doctorat / Autoreferatul și lucrările științifice în baza cărora se susține teza pot fi consultate la biblioteca Universității de Stat din Moldova.

Autoreferatul a fost expediat la ”21” may 2004

**Secretar științific
al Consiliului științific specializat, Dr. ș. f.-m.**

Perjan Andrei

Autorul Dovbuș Piotr

Actualitatea temei investigate și gradul de studiere al ei. Ideea de a lega cu fiecare funcție f meromorfă în discul unitate $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ familia de funcții olomorfe $F = \{f \circ T, T \in \text{Aut}U\}$, unde $\text{Aut}U$ este grupul automorfismelor conforme ($\equiv$ biolomorfe) ale lui U și de a studia acele funcții la care familia F este normală, a apărut probabil la K. Yosida¹ în an.1934 și s-a discutat la K. Noshiro² în an.1939. Funcțiile, la care familia F asociată cu ele este normală, O. Lehto și K. Virtanen³ le-au numit “funcții normale”.

Articolul lui O. Lehto și K. Virtanen³ publicat în anul 1957 a servit drept imbold pentru dezvoltarea teoriei funcțiilor normale de o variabilă complexă, iar articolele lui F. Bagemihl și W. Seidel⁴, V.I. Gavrilov⁵ și P. Lappan⁶, apărute în perioada anilor 1960-1966 au contribuit la creșterea intensă ulterioară a acestei teorii.

Funcțiile meromorfe normale de o variabilă complexă ($\equiv$ aplicațiile olomorfe normale în sfera lui Riemann) ar putea fi studiate numai în discul unitate, deoarece conform teoremei clasice a lui Riemann, orice domeniu simplu conex în plan, care are mai mult decât un punct de frontieră, este conform echivalent cu discul unitate.

În domeniile omogene ale spațiului $C^n, n > 1$, (adică în domeniile care posedă grup tranzitiv de automorfisme olomorfe) se poate de introdus noțiunea de funcție normală, transferând nemijlocit pe aceste domenii definiția acceptată pentru cazul $n = 1$. Totuși, a studia funcțiile (aplicațiile) normale, astfel definite, nu este prea interesant, întrucât E. Cartan⁷ a arătat că în spațiile complexe de orice dimensiune, mulțimea claselor de echivalență ale domeniilor omogene mărginite este finită.

Mai mult ca atât, după cum s-a dovedit, majoritatea domeniilor în C^n nu au automorfisme biolomorfe diferite de cel identic (de exemplu, rezultatele Burns – Shnider - Wells⁸, publicate

¹ YOSIDA, K. *On class of meromorphic functions*. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1934, vol. 16, no. 3, p. 227-235.

² NOSHIRO, K. *Contributions to the theory of meromorphic functions in the unit circle*. J. Fac. Sci. Hokkaido Uni., 1938, vol.7, p. 149-159.

³ LEHTO, O. And VIRTANEN, K.I. *Boundary behavior and normal meromorphic functions*. Acta Math., 1957, vol. 97, p. 47-65.

⁴ BAGEMIHL, F. And SEIDEL, W. *Sequential and continuous limits of meromorphic functions*. Suomalais. Tiedekat. Toimituks, 1960, Sar. A1, no. 280, 17 p.

BAGEMIHL, F. And SEIDEL, W. *Koebe arcs and Fatou points of normal functions*. Comment. math. Helv., 1961, vol. 36, no. 1, p. 9-18.

⁵ ГАВРИЛОВ, В.И. *О пределах по последовательностям точек нормальных мероморфных функций*. ДАН СССР, 1961, т. 138, н. 1, с. 16-17.

ГАВРИЛОВ, В.И. *О множествах угловых граничных значений нормальных мероморфных функций*. ДАН СССР, 1961, т. 141, н. 3, с. 225-226.

ГАВРИЛОВ, В.И. *Граничное поведение мероморфных в единичном круге функций*. ДАН СССР, 1963, т. 151, н. 1, с. 19-22.

ГАВРИЛОВ, В.И. *О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными*. Матем. сб. 1965, т. 67, н. 3, с. 408-427.

ГАВРИЛОВ, В.И. *О поведении мероморфных функций в окрестности своей существенно особой точки*. ДАН СССР, 1965, т. 162, н. 3, с. 491-494.

ГАВРИЛОВ, В.И. *Мероморфные в единичном круге функции с заданным ростом сферической производной*. Матем. сб. 1966, т. 71, н. 3, с. 396-404.

⁶ LAPPAN, P. *Sums of normal functions and Fatou points*. Michigan Math. J., 1963, vol. 10, no. 3, p. 221-224.

LAPPAN, P. *Some sequential properties of normal and non-normal functions with applications to automorphic functions*. Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1964, vol. 12, no. 2, p. 41-57.

⁷ CARTAN, E. *Sur les domaines bornes, homogenes l'escape de n variables complexes*. Abb. Math. Sem. Humburg. Univ., 1935, vol. 11, p. 116-162.

⁸ BURNS, D. And SHNIDER, S. And WELLS, R. *On deformations of strongly pseudoconvex domains*. Invent. Math., 1978, vol. 46, p. 237-253.

în an.1978, arată că în spațiul funcțiilor care definesc domenii strict pseudoconvexe în C^n , domeniilor cu grupul trivial al automorfismelor biolomorfe le corespunde mulțime peste tot densă de categoria a doua).

Astfel, în mod natural, a apărut problema definirii noțiunii de funcție normală în domeniile generale ale spațiului C^n .

De către articolele⁹ autorului, publicate în an. 1981, a fost pusă baza teoriei funcțiilor normale de mai multe variabile complexe (manuscrisul primului articol a fost depus la redacția revistei deja în luna iunie a anului 1979). În aceste articole autorul pentru prima dată a dat definiția funcției olomorfe normale în domeniile arbitrare ale spațiului C^n , care nu folosea structura de grup a domeniului, a demonstrat *existența* funcțiilor normale în domeniile strict pseudoconvexe ale spațiului C^n și a demonstrat teorema multidimensională a lui Lindelöf despre existența limitei slabadmisibile a funcțiilor normale într-un punct de frontieră fixat, care generalizează atât teorema lui Lindelöf demonstrată de către E.M. Circa pentru funcții olomorfe mărginite de mai multe variabile complexe, cât și teorema lui O. Lehto și K.I.Virtanen, care răspândește teorema lui Lindelöf asupra funcțiilor normale de o variabilă complexă. În publicațiile¹⁰ apărute în anul următor 1982 au fost prelungite cercetările și indicate primele aplicații ale noii teorii la studierea comportării la frontieră a funcțiilor normale și a singularităților la frontieră generate de mulțimile limită ale funcțiilor olomorfe arbitrare de mai multe variabile complexe.

În an. 1983 în Universitatea de Stat din Moscova “M.V.Lomonosov” de către autor a fost susținută teza de doctorat în domeniul teoriei funcțiilor normale de mai multe variabile complexe, iar în SUA a ieșit de sub tipar lucrarea lui J. Cima și S. Krantz¹¹, care dezvoltă ideile autorului. Așa a apărut o direcție nouă în analiza complexă multidimensională, care intens și fructuos se dezvoltă până în prezent.

Despre actualitatea acestei direcții ne mărturisește, în particular, și acel fapt, că în anul 2000 Societatea Matematică Americană în Clasificarea pe Materii Matematice (AMS Subject Index) în compartimentul Holomorphic functions of several complex variables a introdus o rubrică nouă 32A18 Bloch functions, normal functions.

Scopul tezei este de a introduce noțiunea de aplicație χ -normală și de a aplica rezultatele obținute la studierea proprietăților la frontieră ale aplicațiilor olomorfe.

Noutatea științifică a rezultatelor obținute. Este introdusă noțiunea de aplicație χ -normală; este demonstrat că clasele de aplicații normale, definite cu ajutorul normelor Carathéodory, Kobayashi și Bergman, în general, diferă; sunt demonstrate teoremele despre existența limitelor slabadmisibile ale funcțiilor olomorfe de mai multe variabile complexe, este obținută generalizarea teoremei Lindelöf – Lehto – Virtanen pentru cazul aplicațiilor olomorfe, este obținută generalizarea teoremei lui Picard pentru cazul aplicațiilor B -normale, este stabilit

⁹ ДОВБУШ, П.В. Нормальные функции многих комплексных переменных. Вестник МГУ, матем. мех., 1981, н. 1, с. 44-48.

ДОВБУШ, П.В. Теорема Линделёфа в C^n . Вестник МГУ, матем. мех., 1981, н. 6, с. 33-36.

¹⁰ ДОВБУШ, П.В. Граничное поведение нормальных голоморфных функций многих комплексных переменных. ДАН СССР, 1982, т. 263, н. 1, с. 14-17.

ГАВРИЛОВ, В.И. и ДОВБУШ, П.В. Граничные особенности, порождаемые предельными множествами голоморфных функций многих комплексных переменных. ДАН СССР, 1982, т. 265, н. 6, с. 1047-1050.

¹¹ CIMA, J.A. And KRANTZ, S.G. The Lindelöf principle and normal functions of several complex variables. Duke Math. J., 1983, vol. 50, p. 303-328.

criteriul de existență a limitei K -admisibile a aplicațiilor olomorfe în sfera lui Riemann, este obținută o serie de rezultate care generalizează rezultatele unidimensionale ale lui Seidel.

Publicații. Toate rezultatele care se conțin în această teză sunt publicate în lucrările lista cărora este indicată la sfârșitul autoreferatului.

Prima *trecere în revistă a întregii teorii* a aplicațiilor normale¹² este făcută de către autor, împreună cu profesorul V.I. Gavrilov de la Universitatea de Stat din Moscova “M.V. Lomonosov” și este publicată în revista iugoslavă *Mathematica Montisnigry* în an. 2001.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. De către autor este introdusă o direcție nouă de cercetare în analiza complexă multidimensională și ideile expuse au permis de a introduce noțiunea de aplicație χ -normală pe o varietate complexă arbitrară, de a prezice care trebuie să fie domeniile admisibile în teoremele Lindelöf – Lehto – Virtanen și Fatou, de a conștientiza, că comportarea la frontieră a aplicațiilor olomorfe este strâns legată și depinde de domeniul de definiție a aplicației.

Rezultatele tezei prezintă atât interes independent din punctul de vedere a dezvoltării teoriei geometrice a aplicațiilor olomorfe, cât și își pot găsi aplicație în fizica matematică contemporană și în teoria câmpurilor.

Aprobarea rezultatelor. Rezultatele au fost comunicate la seminarele de analiză matematică în Universitatea de Stat din Chișinău și la cinci conferințe internaționale:

International Conference on Mathematics and Informatics, Chișinău, September 19-21, 1996;

International Conference on Complex Analysis and Related topics. The VIIIth Romanian-Finnish seminar. Iași, România, August 22-27, 1999;

The First Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chișinău, Republic of Moldova, 2001;

International Conference on Complex Analysis and Related topics. The IXth Romanian-Finnish seminar. Brașov, România, August 27-31, 2001;

The Vth Congress of Romanian Mathematicians. Pitești, România, June 22 - 28, 2003.

Structura tezei. Teza constă din introducere, două capitole divizate în nouă paragrafe și șase anexe. În lista literaturii – 107 denumiri.

Conținutul tezei. În introducere se expune actualitatea temei, scopul și obiectivele tezei, aprobarea rezultatelor obținute.

În Capitolul I se demonstrează: criteriul de normalitate a familiei de aplicații olomorfe, criteriul de normalitate a aplicației olomorfe pe varietăți omogene, teorema despre limitarea la creștere a funcțiilor olomorfe normale, se introduce noțiunea de aplicație χ -normală. În acest capitol se demonstrează, că în anumite condiții suplimentare mulțimile de măsură Hausdorff $(2n-1)$ -dimensională nulă sunt aparente pentru aplicațiile olomorfe χ -normale, precum și se demonstrează, că clasele de aplicații normale, definite cu ajutorul normelor Carathéodory și Bergman, în genere, diferă de clasa aplicațiilor normale, definite cu ajutorul normei Kobayashi.

În §1 al Capitolului I se introduc notațiile și definițiile de bază folosite în continuare. În §2 al Capitolului I se demonstrează criteriul de normalitate a familiilor de aplicații olomorfe.

Să notăm cu $H(M, N)$ mulțimea tuturor aplicațiilor olomorfe ale varietății complexe M cu norma X_M (aici și în continuare X_M denotă norma Carathéodory sau norma Kobayashi sau norma Bergman a varietății M) în varietatea complexă N cu metrica hermitiană ds_N^2 ; iar cu simbolul $T(M)$ – fibrarea tangentă a varietății M . Fie Y un subspațiu complex relativ compact al

¹² ГАВРИЛОВ, В.И. и ДОВБУШ, П.В. *Нормальные отображения. (Обзор теории)* Mathem. Montisnigri, 2001, т. XIV, с. 5-61.

varietății hermitiene N . Cu simbolul $H(M, Y)$ se notează submulțimea lui $H(M, N)$ astfel încât $f(M) \subset Y$.

Lema 1 (Criteriul lui Marty). Fie M o varietate complexă astfel încât pentru fiecare punct $q \in M$ se va găsi vecinătatea $U_q \subset M$ și constanta $c = c(U_q) > 0$ astfel încât $X_M(p, v) > c(U_p)|v|$ pentru toți $(p, v) \in T(U) \cong U \times C^n$, iar Y - un subspațiu complex relativ compact al varietății hermitiene N cu metrica hermitienă ds_N^2 .

Familia $F \subset H(M, Y)$ este normală pe M atunci și numai atunci când pentru orice compact K din M se va găsi constanta $L(K) > 0$ astfel încât pentru orice aplicație $f \in F$

$$f^* ds_N^2(p, v) \leq L(K) \cdot (X_M(p, v))^2 \text{ pentru toți } (p, v) \in K \times T_p(M),$$

unde $f^* ds_N^2(p, v)$ este proimaginea lui ds_N^2 la aplicația f .

Studiul familiilor normale de funcții olomorfe de mai multe variabile complexe a fost început de către Julia în an. 1927. Diferite criterii de normalitate pentru astfel de familii sunt stabilite în lucrările lui Julia¹³, Nishino¹⁴, Alexander¹⁵, Dovbuș¹⁶ și Timoney¹⁷. Articolul lui Timoney a ieșit de sub tipar înaintea articolului autorului, dar el a fost depus la redacție la 17 octombrie a an. 1979, în timp ce articolul autorului – la 18 iulie a an. 1979.

În §3 al Capitolului I definiția aplicației normale pe varietăți omogene se introduce la fel ca și în cazul unei variabile complexe.

Definiția 1. Fie M o varietate complexă omogenă, iar N o varietate hermitiană conexă. Aplicația $f \in H(M, N)$ se numește normală pe M , dacă este normală familia $F := \{f \circ g, g \in \text{Aut} M\}$.

Criteriul lui Marty ne dă o caracteristică cantitativă a normalității familiei de aplicații olomorfe a varietăților, care permite de a demonstra următorul criteriu de normalitate a aplicației.

Teorema 1. Fie M o varietate complexă omogenă cu norma X_M , astfel încât pentru fiecare punct $q \in M$ se va găsi vecinătatea $U_q \subset M$ și constanta $c = c(U_q) > 0$ astfel încât $X_M(p, v) > c(U_p)|v|$ pentru toți $(p, v) \in T(U) \cong U \times C^n$, iar N o varietate hermitiană compactă cu metrica hermitienă ds_N^2 . Aplicația $f \in H(M, N)$ este normală atunci și numai atunci când se va găsi constanta $L > 0$ astfel încât

$$f^* ds_N^2 \leq L \cdot (X_M)^2 \text{ pe } T(M).$$

În cazul când varietatea M este discul unitate în C , iar varietatea N este dreapta proiectivă complexă unidimensională P^1 , Teorema 1 este întocmai criteriul de normalitate a funcției meromorfe care-i aparține lui Lehto și Virtanen¹⁸.

¹³ JULIA, G. *Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables*. Acta Math., 1926, vol. 47, p. 57-115.

¹⁴ NISHINO, T. *Sur une propriété des familles de fonctions analytiques de deux variables complexes*. J. Math. Kyoto Univ., 1965, vol. 4, p. 255-282.

¹⁵ ALEXANDER, H. *Holomorphic mappings from the ball and polydisc*. Math. Ann., 1974, vol. 209, p. 249-256.

¹⁶ ДОВБУШ, П.В. *Нормальные функции многих комплексных переменных*. Вестник МГУ, матем. мех. 1981, н. 1, с. 44-48.

¹⁷ TIMONEY, R.M. *Bloch function in several complex variables, I*. Bull. London Math. Soc., 1980, vol. 12, no. 37, p. 241-267.

¹⁸ LEHTO, O. And VIRTANEN, K.I. *Boundary behavior and normal meromorphic functions*. Acta Math., 1957, vol. 97, p. 47-65.

Aplicația olomorfă $f:U \rightarrow P^1$ este normală atunci și numai atunci când se va găsi constanta $L > 0$ astfel încât

$$f^* ds_{P^1}^2 \leq L \cdot ds_U^2,$$

unde $f^* ds_{P^1}^2$ este proimaginea lui $ds_{P^1}^2$ la aplicația f .

Această caracteristică geometrică și Teorema 1 ne permite în §4 al Capitolului I să generalizăm noțiunea de aplicație normală pentru cazul varietăților complexe, bazându-ne pe (semi)normele, ce reprezintă generalizări ale metricii Poincaré (Lobachevski).

În această lucrare ne folosim de trei cele mai cunoscute și pe larg aplicate (semi)norme invariante Carathéodory, Kobayashi și Bergman și introducem următoarea definiție a aplicației χ -normale.

Definiția 2. Fie M o varietate complexă, iar N o varietate hermitiană cu metrica hermitiană ds_N^2 . Aplicația $f \in H(M, N)$ se numește χ -normală, dacă se va găsi constanta $L > 0$ astfel încât

$$f^* ds_N^2 \leq L \cdot (X_M)^2 \text{ pe } T(M).$$

O aplicație va fi numită C -normală, B -normală sau K -normală, în dependență de norma pe care o vom folosi-o în Definiția 2 (litera C indică că în Definiția 2 se folosește norma Carathéodory C_M , litera B – norma Bergman B_M , iar litera K – norma Kobayashi K_M).

C -normalitatea funcțiilor olomorfe mărginite rezultă nemijlocit din definiția normei Carathéodory. Deoarece norma Carathéodory este cea mai mică printre normele cercetate în această lucrare, clasa aplicațiilor C -normale este o subclasă a aplicațiilor K -normale și a aplicațiilor B -normale.

În domeniile omogene, precum și în domeniile strict pseudoconvexe, putem vorbi despre aplicații normale fără a specifica norma pe care o folosim la definirea aplicațiilor χ -normale. În primul caz aceasta rezultă din Teorema 1, iar în al doilea – din faptul că normele Carathéodory, Kobayashi și Bergman sunt echivalente.

În §5 al Capitolului I se arată că normalitatea funcției impune o limitare asupra creșterii ei.

Teorema 2. Admitem că funcția f este normală în bila $B = \{z \in C^n : |z| < 1\}$, $n > 1$, și pe mulțimea $\Omega = \{z \in B : |2z_n - 1| < 1, |z| < |1 - z_n|\}$ satisface condiția de creștere

$$|f(z)| < \exp\left(\frac{-1}{(1-|z|)^{1+\varepsilon}}\right)$$

pentru un anumit $\varepsilon > 0$. Atunci $f \equiv 0$.

Dacă funcția $f(z)$ meromorfă în discul unitate U omite trei valori, atunci și familia $F = \{f(g), g \in \text{Aut}U\}$, asociată cu ea de asemenea omite aceste trei valori, dar atunci, conform teoremei lui Montel familia F este normală și deci conform definiției funcția $f(z)$ este normală.

Din rezultatele lui Hahn¹⁹ rezultă că aplicațiile olomorfe pe varietățile hiperbolice și care omit trei valori aparțin clasei aplicațiilor K -normale.

¹⁹ HAHN, K.T. *Non-tangential limit theorems for normal mappings*. Pacific J. Math., 1988, vol. 135, no. 1, p. 57-64.

Această afirmație, în general, încetează a fi adevărată pentru celelalte două clase de aplicații normale introduse în această lucrare. Pentru a ne convinge de acest fapt, mai întâi stabilim condițiile când o aplicație χ -normală arbitrară poate fi prelungită într-un domenii mai mare.

Submulțimea E a domeniului $D \subset C^n$, $n \geq 1$, se numește X -eliminabilă, dacă

$$X_{D \setminus E}(z, v) = X_D(z, v)$$

pentru toți $z \in D \setminus E$ și $v \in C^n$.

În §6 al Capitolului I arătăm că are loc următoarea teoremă despre prelungirea aplicațiilor χ -normale²⁰:

Teorema 3. *Dacă domeniul mărginit D din C^n , $n > 1$, este astfel încât norma X_D este continuă pe $D \times C^n$, iar E este o submulțime X -eliminabilă închisă în D de măsură Hausdorff $H^{2n-1}(E) = 0$, atunci orice aplicație χ -normală în $D \setminus E$ se prelungește la o aplicație χ -normală în D .*

Deoarece norma Bergman B_D este continuă pe $D \times C^n$, iar orice submulțime analitică A în D este submulțime B -eliminabilă în D și are măsura Hausdorff $H^{2n-1}(A) = 0$, din Teorema 3 rezultă că pentru aplicațiile B -normale are loc următoarea teoremă.

Teorema 4. *Fie D un domeniu mărginit în C^n , $n > 1$, iar A o submulțime analitică complexă în D de codimensiunea complexă 1. Atunci orice aplicație $f \in H(D \setminus A, P^1)$ B -normală în $D \setminus A$ se prelungește până la o aplicație $F : D \rightarrow P^1$ B -normală în D .*

Deoarece orice punct $a \in U$ poate fi privit drept o submulțime analitică a lui U de codimensiunea 1, Teorema 4 poate fi privită drept generalizare a teoremei mari a lui Picard, care-i aparține lui Lehto și Virtanen. Pentru a arăta acest fapt se demonstrează

Propoziția 1. *Dacă punctul 0 este o singularitate izolată a funcției f meromorfă în $U_* = U \setminus \{0\}$ și există o funcție pozitivă monoton crescătoare h astfel încât*

$$|z \cdot f'(z)| \leq h(|f(z)|)$$

pentru toate punctele $z \in U_$, atunci f se prelungește la o funcție meromorfă în U .*

Din această propoziție imediat rezultă precizarea teoremei mari a lui Picard, care-i aparține lui Lehto și Virtanen²¹ (în cazul când 0 este singularitate izolată a funcției):

Dacă aplicația $f \in H(U_, P^1)$ este normală în discuri unitate perforate U_* , atunci f se prelungește la o aplicație normală $F \in H(U, P^1)$.*

În cazul unei variabile complexe clasa funcțiilor meromorfe normale reprezintă generalizarea clasei funcțiilor olomorfe mărginite. Aceste funcții posedă multe din proprietățile funcțiilor olomorfe mărginite. O altă situație avem în cazul mai multor variabile complexe – nu toate clasele de funcții normale definite cu ajutorul diferitor norme posedă aceleași proprietăți.

În cazul mai multor variabile complexe funcțiile olomorfe mărginite se prelungesc peste submulțimile de $(2n-1)$ -măsură Hausdorff nulă. Această proprietate o posedă și clasa aplicațiilor C -normale, deoarece norma Carathéodory C_D este continuă pe fibrarea tangentă

²⁰ Întrebărilor despre prelungirea aplicațiilor K -normale le sunt consacrate lucrările

JÄRVI, P. *An extension theorem for normal functions*. Proc. Amer. Math. Soc., 1988, vol. 103, p. 1171-1174.

RIIHENTAU, J. *A nullset for normal functions in several variables*. Proc. Amer. Math. Soc., 1990, vol. 110, no. 4, p. 923-933.

²¹ LEHTO, O. And VIRTANEN, K.I. *Boundary behavior and normal meromorphic functions*. Acta Math., 1957, vol. 97, p. 47-65.

$T(D)$, iar mulțimile închise în D de $(2n-1)$ -măsură Hausdorff nulă sunt C -eliminabile. Astfel în calitate de consecință din Teorema 3 obținem următoarea teoremă.

Teorema 5. Fie D un domeniu mărginit în C^n , $n > 1$, și $E \subset D$ o submulțime închisă în D , astfel încât măsura Hausdorff $H^{2n-1}(E) = 0$. Atunci orice aplicație $f \in H(D \setminus E, P^1)$, C -normală în $D \setminus E$, se prelungește la o aplicație C -normală $F \in H(D, P^1)$.

În rezultatele ce urmează mai jos un rol esențial îl are noțiunea de P -șir. În cazul unei variabile complexe noțiunea de P -șir a fost introdusă de către V.I. Gavrilov²². Ulterior noțiunea de P -șir a fost generalizată pentru cazul mai multor variabile complexe și s-a aplicat la studiul funcțiilor normale și a aplicațiilor normale²³.

Folosind noțiunea de P -șir al aplicației olomorfe demonstrăm următoarea teoremă.

Teorema 6. Fie D un domeniu mărginit în C^n , $n > 1$, și $E \subset D$ o submulțime închisă în D , astfel încât măsura Hausdorff $H^{2n-2}(E) = 0$. Atunci aplicația $f \in H(D \setminus E, P^1)$ K -normală în $D \setminus E$ se prelungește la o aplicație K -normală $F : D \rightarrow P^1$.

Din Teoremele 3,4,5 și 6 obținem următoarea consecință.

Consecința 1. Fie D un domeniu în C^2 care conține originea coordonatelor și fie $A := \{z \in D : z_1 z_2 (z_1 - z_2) = 0\}$. Atunci

- Clasa aplicațiilor K -normale, în genere, nu este subclasă a clasei aplicațiilor B -normale.
- Clasa aplicațiilor C -normale, în genere, este subclasă proprie a clasei aplicațiilor K -normale.
- Raporturile

$$K_{D \setminus A}(z, v) / B_{D \setminus A}(z, v), \quad K_{D \setminus A}(z, v) / C_{D \setminus A}(z, v)$$

sunt nemărginite de sus pe $(D \setminus A) \times C^n$.

În Capitolul II se cercetează comportarea la frontieră a aplicațiilor olomorfe într-un punct de frontieră fixat. Se aduc diverse condiții necesare și suficiente, în care funcțiile (aplicațiile) olomorfe (normale) au limite în raport cu domeniile Stein (slab)admisibile. Pentru aplicația olomorfa arbitrară se demonstrează criteriul de existență a limitei în raport cu domeniile, care depind de proprietățile geometrice ale domeniului de definiție. Pentru cazul aplicațiilor olomorfe ale domeniilor strict pseudoconvexe din C^n în subspațiile complexe relativ compacte ale varietăților hermitiene compacte se demonstrează generalizările a două rezultate ale lui Bagemihl și Seidel, care conțin condiții suficiente asupra funcției și asupra șirului convergent la punctul de frontieră ξ , la îndeplinirea cărora această funcție are aceleași limite în raport cu un anumit continuum asimptotic în punctul ξ și în raport cu acest șir. De asemenea se demonstrează precizarea teoremei lui Lindelöf.

²² ГАВРИЛОВ, В.И. Граничное поведение мероморфных в единичном круге функций. ДАН СССР, 1963, т. 151, н. 1, с. 19-22.

²³ WICKER, F. Generalized Bloch mappings in complex Hilbert space. Canad. J. Math., 1977, vol. 29, p. 299-306.

ДОВБУШ, П.В. Нормальные функции многих комплексных переменных. Вестник МГУ, матем. мех. 1981, н. 1, с. 44-48.

ДОВБУШ, П.В. Граничное поведение нормальных голоморфных функций многих комплексных переменных. ДАН СССР, 1982, т. 263, н. 1, с. 14-17.

НАHN, K.T. Asymptotic behavior of normal mappings of several complex variables. Canad. J. Math., 1984, vol. 36, p. 718-746.

Existența limitelor admisibile (în teorema lui Fatou în $C^n, n > 1$,) a fost descoperită de către Koranyi²⁴ și Stein²⁵; natura complexo-geometrică a acestui fenomen este cercetată de către E.M.Circa²⁶.

Pentru orice punct $\xi \in \partial D$ și orice $\alpha > 0$ fixat *domeniile Stein admisibile clasice*²⁵ se definesc în modul următor:

$$A_\alpha(\xi) = \left\{ z \in D : |(z - \xi, v_\xi)| < (1 + \alpha)\delta_\xi(z), |z - \xi|^2 < \alpha\delta_\xi(z) \right\},$$

unde v_ξ este vectorul unitar al normalei exterioare la ∂D în punctul ξ ; $(\cdot, \cdot)$ este produsul scalar hermitian obișnuit în C^n , iar $\delta_\xi(z) = \min\{\delta(z), d_\xi(z)\}$. Aici $\delta(z) = \inf\{|z - \zeta| : \zeta \in \partial D\}$ este distanța euclidiană de la punctul z până la ∂D , iar $d_\xi(z) = \text{Re}(z - \xi, v_\xi)$ este distanța euclidiană de la punctul z până la planul tangent real $(2n-1)$ -dimensional $T_\xi(\partial D)$ la ∂D în punctul ξ .

Funcția $f : D \rightarrow C$ are în punctul $\xi \in \partial D$ *limita admisibilă* l , adică

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in A_\alpha(\xi)} f(z) = l,$$

dacă pentru orice $\alpha > 0$ și orice șir de puncte $\{z_j\}$ din $A_\alpha(\xi)$, convergent la ξ , $f(z_j) \rightarrow a$ când $j \rightarrow \infty$.

Funcția $f : D \rightarrow C$ are *limita l de-a lungul normalei* v_ξ la ∂D în punctul $\xi \in \partial D$, dacă

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\xi - tv_\xi) = l.$$

Cazul $z = \infty$ în aceste definiții nu se exclude.

Lui Stein²⁵ îi aparține următoarea variantă locală a teoremei lui Fatou.

Teoremă. Pentru orice funcție $f \in H(D)$ și aproape toate punctele $\xi \in \partial D$ următoarele trei condiții sunt echivalente:

- (a) $\lim_{A_\alpha(\xi) \ni z \rightarrow \xi} f(z)$ există;
- (b) $\sup_{z \in A_\alpha(\xi)} |f(z)| < \infty$;
- (c) $\int_{A_\alpha(\xi)} |\nabla_D f(z)| d\Omega < \infty$.

Aici $\nabla_D f(z)$ este gradientul funcției f în raport cu norma Bergman a domeniului D , iar $d\Omega$ este elementul de volum în această normă.

În teoria lui Stein deschizătura domeniului admisibil (mărimea α) este fixată odată pentru totdeauna. De aceea este interesant de a clarifica în ce condiții funcția are limită admisibilă.

În §1 al Capitolului II sunt demonstrate următoarele condiții suficiente de existență a limitei admisibile.

Propoziția 2. Fie D un domeniu în C^n ($n > 1$) cu frontiera C^2 -netedă. Dacă în punctul $\xi \in \partial D$ funcția $f \in H(D)$ are limită finită de-a lungul normalei la ∂D în punctul ξ , iar Ref are limită admisibilă în punctul ξ , atunci f are limită admisibilă în punctul ξ .

²⁴ KORANYI, A. *Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space*. Trans. Amer. Math. Soc. 1969, vol. 135, p. 507-516.

²⁵ STEIN, E.M. *Boundary behavior of holomorphic function of several complex variables*. Mathematical Notes, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1972.

²⁶ ЧИРКА, Е.М. *Теоремы Линделёфа и Фату в C^n* . Матем. сб., 1973, т. 92, н. 4, с. 622-644.

Teorema 7. Fie că funcția olomorfa f este K -normală în domeniul $D \subset C^n$ ($n > 1$) cu frontiera C^2 -netedă. Dacă

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in A_\beta(\xi)} f(z) \text{ există pentru un anumit } \beta > 0,$$

atunci f are limită admisibilă în punctul $\xi \in \partial D$.

Pentru funcțiile olomorfe mărginite de mai multe variabile complexe Teorema 7 pentru prima dată a fost demonstrată de către E.M. Circa²⁶. Trebuie de remarcat că deși Teorema 7 conține rezultatul lui E.M. Circa, noi nu dăm o nouă demonstrație a lui, ci esențial ne bazăm pe el.

Domeniile admisibile $A_\alpha(\xi)$ nu depind de proprietățile geometrice ale domeniului D . De aceea în domeniile arbitrare se introduce noțiunea de domeniu K -admisibil.

Domeniu K -admisibil de deschizătură $\beta > 0$ în punctul $\xi \in \partial D$ se numește domeniul

$$K_\beta(\xi) = \{z \in D : k_D(z, N_\xi) < \beta\}.$$

Aici și în continuare $k_D(z, N_\xi) = \inf \{k_D(z, w), w \in N_\xi\}$.

În domeniile strict pseudoconvexe ale spațiului C^n domeniile $K_\beta(\xi)$ sunt echivalente cu domeniile Stein admisibile clasice $A_\beta(\xi)$ în acel sens, că există constantele pozitive $C_1(\beta)$ și $C_2(\beta)$ astfel încât

$$A_{C_1(\beta)}(\xi) \subseteq K_\beta(\xi) \subseteq A_{C_2(\beta)}(\xi).$$

În teorema lui Fatou pentru domeniile strict pseudoconvexe clasa domeniilor Stein admisibile nu poate fi în esență înlocuită cu o clasă mai largă de mulțimi. În domeniile arbitrare clasa domeniilor K -admisibile este mai largă decât clasa domeniilor Stein admisibile și forma lor depinde de proprietățile geometrice ale domeniului cercetat. De aceea, la prima vedere s-ar părea, că varianta teoremei lui Fatou în formularea căreia se folosesc domeniile K -admisibile²⁷ este mai atrăgătoare decât teorema lui Fatou care-i aparține lui Stein. În teză este adus un exemplu, care ne arată că domeniile Stein admisibile clasice sunt optime în teorema lui Fatou nu numai pentru domenii strict pseudoconvexe, dar și pentru domenii cu frontierele reale-analitice.

Fie N o varietate hermitiană cu metrica hermitiană ds_M^2 . Vom spune că aplicația $f : D \rightarrow N$ are K -limită $l \in \overline{N}$ în punctul $\xi \in \partial D$, adică

$$(K - \lim f)(\xi) = l,$$

dacă pentru orice $\beta > 0$ și pentru orice șir de puncte $\{z_j\}$ din $K_\beta(\xi)$ convergent la ξ , $s_N(f(z_j), l) \rightarrow 0$ când $j \rightarrow \infty$.

Vom spune că aplicația $f : D \rightarrow N$ are în punctul $\xi \in \partial D$ limită radială $l \in N$, dacă

$$\lim_{t \rightarrow 0} s_N(f(\xi - tv_\xi), l) = 0.$$

Pentru a stabili legătura dintre existența limitei radiale și a K -limei a aplicației arbitrare $f \in H(D, N)$ să notăm

$$Q_f(z) = \sup_{v \in C^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\sqrt{ds_N^2(f(z), f_*(v))}}{K_D(z, v)} \right\},$$

²⁷ KRANTZ, S.G. *Invariant metrics and the boundary behavior of holomorphic functions on domains in C^n* . J. Geom. Anal., 1991, vol. 1, no. 2, p. 71-97.

unde $f_* = df$ este diferențiala aplicației f în punctul $z \in D$.

Lehto și Virtanen²⁸ au demonstrat o teoremă conform căreia, dacă funcția f meromorfă în discul unitate U are în punctul $1 \in \partial U$ limită radială, atunci f are în acest punct limită unghiulară atunci și numai atunci când în fiecare unghi $|\arg(1-z)| < \frac{\pi}{2} - \delta$, unde δ este orice număr pozitiv, are loc relația

$$|Q_f(z)| = O(1), \quad (*)$$

unde $O(1)$ este funcție mărginită.

În cazul mai multor variabile complexe mărginirea funcției $|Q_f(z)|$ chiar pe tot domeniul de definiție a aplicației f nu garantează existența K -limitei aplicației f într-un punct de frontieră arbitrar, în care f are limită radială. Funcția $f(z) = z_2^2 / (1 - z_1)$ este mărginită și olomorfă în bila unitate $B = \{z \in C^n : |z| < 1\}$ și deci este normală, dar ea nu are limită K -admisibilă în punctul $(0,1)$.

Totuși pentru $n=1$ în estimăția (*) în cazul existenței limitei de-a lungul normalei partea dreaptă poate fi înlocuită cu $o(1)$. Se dovedește că această estimăție precizată rezolvă problema și pentru $n > 1$.

În §2 al Capitolului II este demonstrat criteriul de existență a K -limitei a aplicației olomorfe.

Teorema 8. *Fie Y este un subspațiu complex relativ compact al varietății hermitiene N cu metrica hermitiană ds_N^2 , iar D un domeniu hiperbolic complet în C^n , $n > 1$, care are normală în punctul $\xi \in \partial D$. Dacă aplicația $f \in H(D, Y)$ are în punctul ξ limită radială $l \in \bar{Y}$, atunci f în punctul ξ are K -limită atunci și numai atunci când*

$$(K - \lim Q_f)(\xi) = 0.$$

Calcululele nemijlocite arată că mulțimea limită a funcției $f(z) = z_2^2 / (1 - z_1)$ cercetată mai sus în raport cu bila B în punctul $(0,1)$ de existență a limitei radiale și de neexistență a limitei K -admisibile este un disc închis de rază mai mare ca unitatea.

Se stabilește că situația poartă un caracter general și în această direcție este demonstrată următoarea propoziție.

Propoziția 3. *Fie D un domeniu strict pseudoconvex în C^n , $n \geq 1$. Dacă funcția f este normală în D și are limită de-a lungul normalei la ∂D în punctul $\xi \in \partial D$, dar nu are în acest punct limită admisibilă, atunci $C(f, \xi)$ conține un anumit disc.*

În anul 1932 de către Seidel²⁹ a fost demonstrată o teoremă în care sunt obținute condițiile suficiente pentru egalitatea a două valori limită ale funcției mărginite și olomorfe în discul unitate U , în raport cu două șiruri diferite de puncte din U .

În anul 1960 Bagemihl și Seidel³⁰ au pus următoarea întrebare: dacă funcția f meromorfă în discul unitate U are limita $l \in P^1$ în raport cu un anumit șir de puncte $\{z_n\}$ convergent la punctul $\xi \in \partial U$, atunci în ce condiții asupra funcției f și asupra șirului $\{z_n\}$ funcția f are aceeași limită l în raport cu un anumit continuum asimptotic în punctul ξ .

²⁸ LEHTO, O. And VIRTANEN, K.I. *Boundary behavior and normal meromorphic functions*. Acta Math., 1957, vol. 97, p. 47-65.

²⁹ SEIDEL, W. *On the cluster values of analytic functions*. Trans. Amer. Math. Soc., 1932, vol. 34, p. 1-21.

³⁰ BAGEMIHL, F. And SEIDEL, W. *Sequential and continuous limits of meromorphic functions*. Suomalais. Tiedekat. Toimituks, 1960, sar. A1, no. 280, 17 p.p.

Răspunzând la această întrebare Bagemihl și Seidel au demonstrat două rezultate, care conțin condițiile suficiente asupra funcției f și asupra șirului $\{z_n\}$ în care așa o coincidență are loc.

În §3 al Capitolului II este demonstrată generalizarea acestor rezultate ale lui Bagemihl și Seidel pentru cazul aplicațiilor olomorfe ale domeniilor strict pseudoconvexe din C^n în subspații complexe relativ compacte ale varietăților hermitiene compacte.

Teorema 9. *Fie D un domeniu strict pseudoconvex în C^n ($n \geq 1$), $\xi \in \partial D$, iar Y este un subspațiu complex relativ compact al varietății hermitiene N cu metrica hermitiană ds_N^2 .*

Admitem că aplicația $f \in H(D, Y)$ normală în D nu primește valoarea $l \in \bar{Y}$ în interiorul domeniului D și că $\{a^m\}$ și $\{b^m\}$ sunt două șiruri de puncte din D astfel încât

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a^m = \xi \in \partial D \text{ și } \lim_{m \rightarrow \infty} b^m = \xi.$$

Dacă distanțele $k_D(a^m, b^m)$ sunt uniform mărginite (adică $k_D(a^m, b^m) < \varepsilon < \infty$ pentru toți $m \geq 1$) și

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_N(f(a^m), l) = 0, \text{ atunci și } \lim_{m \rightarrow \infty} s_N(f(b^m), l) = 0.$$

Dacă D este discul unitate U atunci, după cum se știe, distanța în metrica Kobayashi k_U coincide cu distanța hiperbolică în discul U , de aceea în cazul $n=1$ această teoremă formulată mai sus este întocmai teorema lui Seidel²⁹.

Demonstrația Teoremei 9 este făcută de noi pentru cazul $n > 1$; toată diferența dintre cazul unidimensional și cel multidimensional se conține numai în geometria bilelor în raport cu metrica invariantă standard a lui Kobayashi, care este mai bogată.

Mulțimea $S \subset D$ va fi numită *asimptotică*, dacă S are puncte de limită care-i aparțin lui ∂D ; *asimptotică în punctul ξ* , dacă $\bar{S} \cap \partial D = \{\xi\}$ și *asimptotic netangențială în punctul ξ* , dacă $S \subset \Gamma_\alpha(\xi)$, pentru un anumit $\alpha > 0$, unde

$$\Gamma_\alpha(\xi) = \{z \in D : |z - \xi| < \alpha \delta_\xi(z)\}.$$

Curbă asimptotică în punctul ξ – este curba $\{\gamma(t) : 0 < t \leq 1\} \subset D$, astfel încât $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \xi$.

Teorema 9 permite de a preciza varianta multidimensională a teoremei Lindelöf – Lehto – Virtanen, care-i aparține autorului³¹, în acel caz, când în însăși domeniul aplicația nu primește valoarea limită.

Consecința 2 (Precizarea teoremei Lindelöf – Lehto – Virtanen). *Fie D un domeniu strict pseudoconvex în C^n ($n \geq 1$), $\xi \in \partial D$, iar Y este un subspațiu complex relativ compact al varietății hermitiene N cu metrica hermitiană ds_N^2 . Admitem că aplicația $f \in H(D, Y)$ normală în D nu primește valoarea $l \in \bar{Y}$ în interiorul domeniului D . Dacă curba $\gamma(t) \subset A_\alpha(\xi)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \xi$ și $\lim_{t \rightarrow 0} s_N(f(\gamma(t)), l) = 0$, atunci și*

$$\lim_{A_\alpha(\xi) \ni z \rightarrow \xi} s_N(f(z), l) = 0.$$

Precizarea teoremei Lindelöf – Lehto – Virtanen în domeniile strict pseudoconvexe a fost obținută de către autor³¹, articolul a fost depus la redacție la 23.04.85 și a ieșit de sub tipar în

³¹ ДОВБУШ, П.В. О граничном поведении голоморфных функций многих комплексных переменных. Матем. заметки, 1986, т. 39, с. 360-366.

martie a anului 1986. În cazul bilei această teoremă este demonstrată printr-o altă metodă în articolul lui Ramey³², care a fost depus la redacție la 16.06.86.

Pentru orice punct $\xi \in \partial D$ și orice $\alpha > 0$ și ε , $0 < \varepsilon < 1$, să notăm

$$A_\alpha^\varepsilon(\xi) = \left\{ z \in D : |(z - \xi, v_\xi)| < (1 + \alpha) \delta_\xi(z), |z - \xi|^2 < \alpha \delta_\xi^{1+\varepsilon}(z) \right\}$$

Orice domeniu $A_\alpha^\varepsilon(\xi) \subset A_\alpha(\xi)$, este tangent la planul tangent complex T_ξ^c (tangența mai rea decât cea parabolică), iar în direcția vectorului iv_ξ formează cu T_ξ un unghi mai mic decât π .

Vom spune că aplicația $f \in H(D, Y)$ are limita slabadmisibilă $l \in \bar{Y}$ în punctul $\xi \in \partial D$, dacă pentru toți $\alpha > 0$ și ε , $0 < \varepsilon < 1$,

$$\lim_{A_\alpha^\varepsilon(\xi) \ni z \rightarrow \xi} s_N(f(z), l) = 0.$$

Teorema 10. Fie D un domeniu strict pseudoconvex în C^n ($n \geq 1$), $\xi \in \partial D$, iar Y este un subspațiu complex relativ compact al varietății hermitiene N cu metrica hermitiană ds_N^2 . Dacă aplicația $f \in H(D, Y)$ normală în D are limita $l \in \bar{Y}$ în raport cu un anumit șir de puncte $\{z_m\} \subset A_\alpha^\varepsilon(\xi)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \xi \in \partial D$ astfel încât $\lim_{m \rightarrow \infty} k_D(z_m, z_{m+1}) = 0$, atunci

$$\lim_{A_\alpha^\varepsilon(\xi) \ni z \rightarrow \xi} s_N(f(z), l) = 0.$$

Din această teoremă imediat rezultă teorema lui Lindelöf, demonstrată de către E.M. Circa²⁶ pentru funcții olomorfe mărginite de mai multe variabile complexe și generalizarea teoremei Lindelöf – Lehto – Virtanen³ pentru cazul aplicațiilor normale. Generalizarea teoremei Lindelöf – Lehto – Virtanen pentru cazul funcțiilor olomorfe normale pentru prima dată a fost demonstrată de către autor⁹ în an.1981.

După apariția articolului³³ în an.1981 generalizările teoremei Lehto – Virtanen au fost demonstrate cu implicarea acelorași idei în articolele lui Cima și Krantz (an.1983), Hahn (an.1984, 1988), Aladro (an.1987).

În domeniile pentru oricare două puncte ale cărora există o geodezică complexă (de exemplu, în domeniile strict liniar convexe ale spațiului C^n) are loc următoarea teoremă.

Teorema 11. Fie D un domeniu marginit în C^n ($n \geq 1$), pentru oricare două puncte ale căruia există o geodezică complexă, $\xi \in \partial D$, iar Y este un subspațiu complex relativ compact al varietății hermitiene N cu metrica hermitiană ds_N^2 . Admitem că aplicația $f \in H(D, Y)$ K -normală în D nu primește valoarea $l \in \bar{Y}$ în interiorul domeniului D . Admitem că $\{a_s\}_{s=1}^\infty$ și $\{b_s\}_{s=1}^\infty$ sunt două șiruri de puncte din D astfel încât

$$\lim_{s \rightarrow \infty} a_s = \xi \in \partial D \text{ și } \lim_{s \rightarrow \infty} b_s = \xi.$$

Dacă distanțele $k_D(a_s, b_s)$ sunt uniform mărginite (adică $k_D(a_s, b_s) < \varepsilon < \infty$ pentru toți $s \geq 1$) și

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s_N(f(a_s), l) = 0, \text{ atunci și } \lim_{s \rightarrow \infty} s_N(f(b_s), l) = 0.$$

Consecința 3 (Precizarea teoremei Lindelöf – Lehto – Virtanen). Fie D un domeniu în C^n ($n \geq 1$), pentru oricare două puncte ale căruia există o geodezică complexă, la care în

³² RAMEY, W.C. On the behavior of holomorphic functions near maximum modulus sets. Math. Ann., 1986, vol. 276, p. 137-144.

³³ ДОВБУШ, П.В. Теорема Линделёфа в C^n . Вестник МГУ, матем. мех. 1981, н. 6, с. 33-36.

punctul $\xi \in \partial D$ există normala exterioară, iar Y este un subspațiu complex relativ compact al varietății hermitiene N cu metrica hermitiană ds_N^2 . Admitem că aplicația $f \in H(D, Y)$ normală în D nu primește valoarea $l \in \bar{Y}$ în interiorul domeniului D . Dacă curba $\gamma(t) \subset K_\alpha(\xi)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \xi$ și $\lim_{t \rightarrow 0} s_N(f(\gamma(t)), l) = 0$, atunci și

$$\lim_{K_\alpha(\xi) \ni \gamma \rightarrow \xi} s_N(f(z), l) = 0.$$

În Anexă A este demonstrat criteriul de polinomialitate al funcțiilor întregi de mai multe variabile complexe.

Dacă funcția întreagă $f(z_1, \dots, z_n)$ are dezvoltarea

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z_1, \dots, z_n),$$

în care $P_k(z_1, \dots, z_n)$ sunt *polinoame omogene* în C^n de gradul k , atunci *derivata radială* Rf se definește de formula

$$Rf(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(z).$$

Are loc următorul criteriu radial de polinomialitate al funcțiilor întregi de mai multe variabile complexe:

Teorema 12. *Funcția întreagă f din C^n , $n \geq 1$, este polinom atunci și numai atunci când pentru orice dreaptă complexă $l \subseteq C^n$, care trece prin originea coordonatelor avem*

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{|Rf(l(\lambda))|}{1 + |f(l(\lambda))|^2} < \infty.$$

Publicații la tema tezei

1. ДОВБУШ, П.В. Локальный вариант теоремы Фату. Известия АН МССР, 1983, н. 3, с. 123.
2. ДОВБУШ, П.В. О граничном поведении голоморфных функций многих комплексных переменных. Матем. заметки, 1986, т. 39, с. 360-366.
3. ДОВБУШ, П.В. О существовании допустимых пределов функций многих комплексных переменных. Сибирский матем. журнал, 1987, т. 28, н. 3, с. 73-77.
4. ДОВБУШ, П.В. К теореме Линделёфа в C^n . Украинский матем. журнал, 1988, т. 40, н. 6, с. 796-799.
5. ДОВБУШ, П.В. О допустимых пределах нормальных функций многих комплексных переменных. Матем. заметки, 1991, т. 47, с. 39-44.
6. ДОВБУШ, П.В. О существовании допустимых и слабодопустимых пределов функций многих комплексных переменных. Сибирский матем. журнал, 1992, т. 33, н. 4, с. 212-214.
7. DOVBUSH, P.V. Boundary behavior of normal holomorphic functions of several complex variables. Bul. Acad. Științe Repub. Mold., Mat., 1996, no. 1(20), p. 1-6.
8. DOVBUSH, P.V. About one inequality in the theory of functions. Bul. Acad. Științe Repub. Mold., Mat., 1998, no. 2(27), p. 128-129.
9. DOVBUSH, P.V. A criterion for entire functions to be polynomial. Bul. Acad. Științe Repub. Mold., Mat., 1999, no. 1(29), p. 125-127.
10. ДОВБУШ, П.В. Критерий полиномиальности для целых функций многих комплексных переменных. Матем. заметки, 1999, т. 66, в. 4, с. 500-502.

11. ДОВБУШ, П.В. *Нормальные функции в выпуклых областях пространства C^n* . Mathem. Montisnigri, 2001, т. XIV, с. 79-88.
12. ГАВРИЛОВ, В. И. и ДОВБУШ, П. В. *Нормальные отображения*. Mathem. Montisnigri, 2001, т. XIV, с. 5-61.
13. DOVBUSH, P.V. *About negligible sets for normal mappings of several complex variables*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 2001, vol. 46, no. 1, p. 29-35.
14. DOVBUSH, P.V. *χ -normal mappings*. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2003, no. 3, p. 71-82.
15. DOVBUSH, P.V. *On the existence of K -admissible limits of holomorphic maps*. Opuscula Math., 2003, no. 24, p. 15-20.

Abstract

This thesis is dedicated to the theory of normal mappings. It is introduced the notion of χ -normal mappings, investigated the extension properties of such mappings through exceptional subsets. Some applications to the boundary behavior of holomorphic mappings are given.

Резюме

Диссертация посвящена теории нормальных отображений. Введено понятие χ -нормального отображения, исследованы свойства продолжимости таких отображений через исключительные подмножества. Получен ряд приложений к граничному поведению голоморфных отображений.

