UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

Facultatea de Matematică și Informatică

Cu titlu de manuscris

C.Z.U.: 519.1+515.142.21

CATARANCIUC SERGIU

COMPLEXUL GENERALIZAT DE RELAȚII MULTI-ARE ȘI ASPECTELE APLICATIVE ALE ACESTUIA

112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ ȘI CERCETĂRI OPERAȚIONALE

Autoreferatul tezei de doctor habilitat în științe matematice

CHIȘINĂU, 2015

Teza a fost elaborată în cadrul Departamentului Matematici Aplicate a Universității de Stat din Moldova, Chişinău

Consultant ştiinţific:

SOLTAN Petru*,* doctor habilitat în științe matematice, profesor universitar, academician

Referenţi oficiali:

CIOBANU Mitrofan, doctor habilitat în matematică, profesor universitar, membru titular al Academiei de Ştiinţe a Moldovei;

MIRON Radu*,* doctor docent în matematică, profesor universitar, Iași, membru titular al Academiei Române;

TOMESCU Ioan, doctor docent în matematică, profesor universitar, Bucureşti, membru corespondent al Academiei Române.

Componenţa Consiliului ştiinţific specializat:

MIŞCOI Gheorghe, doctor habilitat în matematică, profesor universitar, membru titular al Academiei de Ştiinţe a Moldovei – **preşedinte CȘS**;
HÂNCU Boris, doctor în matematică, conferențiar universitar – **secretar CȘS**;
LOZOVANU Dumitru, doctor habilitat în matematică, profesor universitar;
VOLOSHIN Vitaly, doctor în matematică, profesor universitar, universitatea Troy, USA
SOLOMON Dumirtu, doctor habilitat în tehnică, conferenţiar cercetător;
CALMUȚCHI Laurențiu, doctor habilitat în matematică, profesor universitar;
CHIRIAC Liubomir, doctor habilitat în matematică, profesor universitar;
GUȚULEAC Emilian, doctor habilitat în tenhică, profesor universitar.

Susţinerea va avea loc la **02 iulie 2015**, **ora 12:00**, în şedinţa Consiliului ştiinţific specializat **DH 30.112.03 - 03** din cadrul Universităţii de Stat din Moldova (str. A. Mateevici 60, Chișinău, MD-2009, Republica Moldova, bloc IV, sala 222/4).

Teza de doctor habilitat şi autoreferatul pot fi consultate la biblioteca Universităţii de Stat din Moldova și pe pagina web a CNAA (www.cnaa.acad.md).

Autoreferatul a fost expediat la **02 iunie 2015**

Secretar ştiinţific al Consiliului ştiinţific specializat, dr. _______________ Hâncu Boris

Consultant științific, dr. hab., prof. univ., academician _______________ Soltan Petru

Autor _____________ Cataranciuc Sergiu

REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea temei. Odată cu dezvoltarea societăţii creşte tot mai mult rolul ştiinţelor exacte, în special a matematicii, pentru soluţionarea problemelor practice, complexitatea cărora avansează în mod continuu. Încercările de a soluţiona diverse probleme de optimizare cu caracter teoretico-aplicativ sunt însoţite, deseori, de procedura de căutare a răspunsului la două întrebări importante:

1. Care dintre structurile matematice cunoscute poate fi folosită în calitate de model pentru descrierea adecvată a procesului studiat ?
2. Care dintre metodele de soluţionare a problemelor, specifice modelului matematic folosit, poate fi utilizată în cazul problemei concrete examinate ?

Este necesar a menţiona că uneori e destul de dificil a gasi răspuns atât la prima cât şi la cea de-a doua întrebare, chestiune legată atât de complexitatea problemei examinate cât şi de posibilităţile reduse pe care le oferă unele modele matematice la capitolul elaborării metodelor eficiente de soluţionare. Din aceste considerente, se recurge la unele variaţii ale modelelor cunoscute sau la folosirea unor metode care oferă o soluţie aproximativă, dar acceptabilă din punct de vedere al scopului urmărit.

În situaţiile când nivelul existent de dezvoltare a structurilor matematice nu permite atingerea scopurilor menţionate mai sus, se caută idei noi, care pot conduce la fondarea unor directii de cercetare, cu dezvoltarea ulterioară a metodelor de rezolvare adecvate aşteptărilor cercetătorului. În fond, după această schemă a apărut şi s-a dezvoltat teoria grafurilor, mai apoi – teoria hipergrafurilor, matroizii etc., chestiuni examinate în primul capitol al lucrării, care este un capitol de sinteză al situaţiei în domeniul dezvoltării la nivel teoretic şi aplicativ a structurilor discrete.

Prima problemă, apărută prin anii 70 ai secolului trecut, care nu a putut fi soluţionată eficient prin metodele disponibile, este legată de căutarea medianei într-un complex de cuburi *n*-dimensionale. Aceasta, precum şi alte probleme din categoria problemelor de optimizare discretă, a condus la căutarea unor structuri noi, corespunzătoare năzuinţelor şi scopurilor cercetătorilor. În rezultat, a fost definită şi studiată structura matematică, numită complex de relaţii multi-are, cu elaborările teoretice corespunzătoare, care sunt expuse în capitolele II-V a lucrării "Complexul generalizat de relaţii multi-are şi aspectele aplicative ale acestuia".

Descrierea situației în domeniul de cercetare și identificarea problemelor de cercetare. De regulă, soluţionarea problemelor de optimizare de genul problemei medianei, a centrului, a fluxului de cost minim etc. este însoţită de construirea unui model matematic adecvat, reprezentat prin una dintre structurile matematice discrete cunoscute, cum ar fi grafurile sau hipergrafurile, cu aplicarea ulterioară a metodelor corespunzătoare pentru obţinerea soluţiei căutate. Deseori ne ciocnim de situaţia când modelele reprezentate prin aceste structuri matematice nu corespund situţiei examinate sau metodele cunoscute conduc spre elaborarea unor algoritmi de soluţionare de o complexitate prea mare. În ambele cazuri suntem puşi în situaţia de a căuta idei noi pentru soluţionarea problemei examinate.

O situaţie similară este legată de calcularea medianei unui complex de cuburi, de care a fost preocupat, prin anii '70 ai secolului trecut, un grup de matematicieni în frunte cu dl academician Petru Soltan. Problema a parvenit dintr-o problemă practică concretă, prin care se cerea de gasit locul optimal de amplasare a gării auto în oraşul Chişinău, în baza unor condiţii prescrise. Folosind grafurile în calitate de model matematic, a fost propusă o metodă eficientă de calcul a medianei complexului de cuburi 2-dimensionale, ceea ce corespundea scopului urmărit la moment. În baza metodei propuse a fost ulterior elaborat un algoritm de complexitate polinomială. Încercările ulterioare de a calcula mediana pentru complexe cu dimensiuni mai mari nu s-au încununat cu succes.

Folosirea în calitate de model a structurilor matematice clasice, cunoscute sub forma de grafuri, hipergrafuri, complexe simpliciale etc., nu au condus la soluţionarea completă a problemei menţionate mai sus.

Grafurile au apărut datorită încercărilor matematicienilor de a rezolva mai multe probleme practice, sau chiar jocuri cu caracter distractiv. Pentru prima dată noţiunea de graf a fost introdusă de către Leonard Euler în legătură cu încercarea de a soluţiona cunoscuta problemă a celor "şapte poduri din Königsberg" [1].

Părinte al teoriei moderne a grafurilor este considerat C. Berge, datorită expunerii sistematizate a acestei direcţii de cercetare în monografia [2] şi dezvoltării ulterioare a teoriei în lucrările [3], [4]. Rezultate semnificative ce ţin de fundamentarea teoriei grafurilor, iar mai apoi şi a hipergrafurilor, se regăsesc în multitudinea de publicaţii apărute pe parcursul ultimilor 40-50 ani. Promotori fideli ai acestei direcţii de cercetare sunt consideraţi F.Harary [5], V.Emelicev [6], I.Tomescu [7], T.Toadere [8], N.Cristofides [9], A.Zykov [10], P.Soltan [11], [12], prin multiple aplicaţii ale rezultatelor obţinute la soluţionare problemelor practice.

Odată cu creşterea complexităţii problemelor examinate, s-a simţit necesitatea generalizării grafurilor. În rezultat a fost definit un obiect nou, numit hipergraf. Se consideră că primele rezultate care au constituit fundamentele teoriei hipergrafurilor aparțin matematicianului Ray Chaudhuri [13] și se referă la generalizarea metodei lanțurilor alternante pentru hipergrafuri. De asemenea, la dezvoltarea acestei teorii au contribuit și alți matematicieni prin rezultatele obținute şi publicate într-un şir de lucrări: Erdos & Hajnal [14], Erdos & Gallai [15], I.Tomescu [16], A.Zykov [10], C.Berge [3, 4].

Ulterior, reieşind din necesităţile cercetărilor teoretico-aplicative, au fost definite şi studiate şi alte structuri, printre care se evidenţiază matroizii şi complexele simpliciale. O figură proeminentă în dezvoltarea teoriei matroizilor este considerat W.T. Tutte, manifestându-se prin obţinerea unor rezultate importante din punct de vedere aplicativ: caracterizarea matroizilor binari, regulari și ai celor grafici; teorema cu privire la reprezentarea unui matroid regulat; dezvoltarea teoriei grupurilor lanțurilor în structuri discrete și a matroizilor respectivi; teorema de omotopie, prin care se generalizează noțiunea de drum într-un graf cu ajutorul matroizilor și se arată că drumurile închise pot fi reprezentate ca compoziție de drumuri elementare, astfel încât omotetic ele sunt echivalente unui drum închis trivial [17], [18]. La dezvoltarea teoriei matroizilor, de asemenea, au contribuit: Henry Crapo [19] (a generalizat și a studiat polinomul Tutte, cunoscut în literatura de specialitate ca polinomul Crapo); Thomas Brylawsky [20] (a obținut rezultate fundamentale la studierea matroizilor Tutte); Paul Seymour [21] (a demonstrat teorema cu privire la descompunerea matroizilor regulați).

În prezenta teză de doctor habilitat se propune o structură nouă - complexul de relaţii multi-are, definită pe produsul cartezian al elementelor unei mulţimi arbitrare, care generalizează structurile clasice menţionate mai sus şi oferă posibilităţi noi pentru soluţionarea problemelor practice. Fiind o structură combinatorială abstractă, pentru efectuarea cercetărilor teoretice se folosesc mai mult metodele caracteristice topologiei algebrice. În topologia algebrică, complexele reprezintă spaţii topologice cu o structură specifică.

Inițial, topologia algebrică era conoscută sub denumirea de topologie combinatorie, ceea ce înseamnă că cercetările se efectuau în baza unui spațiu X de o structură mai simplă. În perioada anilor 1920-1940, s-a pus mai mult accentul pe examinarea spațiilor topologice prin căutarea unei corespondențe dintre acestea și grupurile algebrice. Această situație și a determinat într-un final denumirea actuală de topologie algebrică. Astăzi, topologia algebrică reprezintă o ramură a matematicii ce se ocupă de studierea spaţiilor topologice, prin intermediul obiectelor clasice şi metodelor caracteristice algebrei abstracte [22], [23].

Cercetările ulterioare au condus la obţinerea unor generalizări noi în topologia algebrică abstractă, care completează substanțial domeniul grafurilor, hipergrafurilor, complexelor simpliciale etc. Primele rezultate în această direcție, obţinute de către S. Cataranciuc, P. Soltan, M. Bujac, au fost înregistrate la începutul anilor 2000 și au fost descrise în lucrările [95], [41], [87], [76], [121], [122], care și-au găsit ulterior continuitatea în diverse generalizări și aplicații exprimate prin lucrările [83], [72], [96], [69], [93], [80], [104], [102].

Scopul şi obiectivele cercetării. Prin iniţierea cercetărilor în cadrul tezei de doctor habilitat "*Complexul generalizat de relaţii multi-are şi aspectele aplicative ale acestuia*" s-a urmărit scopul elaborării structurilor matematice discrete şi a metodelor eficiente pentru modelarea şi soluţionarea problemelor de localizare, cunoscute ca problema medianei, problema centrului, precum şi a diverselor variaţii ale acestora. În conformitate cu scopul enunţat au fost stabilite obiectivele cercetării:

- elaborarea unui model matematic discret, bazat pe noţiunea de relaţie multi-ară, ca submulţime a produsului cartezian a unei mulţimi de elemente arbitrare;
- examinarea topologiei relaţiilor multi-are, prin construirea grupurilor de omologii şi coomologii a complexului de relaţii multi-are;
- examinarea complexului de cuburi abstracte, ca caz special al complexului de relaţii multi-are, şi a varietăţilor abstracte respective;
- elaborarea algoritmului eficient pentru soluţionarea problemei medianei pe complexul de cuburi abstracte;
- definirea funcţiei Grundy şi soluţionarea unor jocuri combinatoriale pe complexe de relaţii multi-are.

Metodologia cercetării științifice. Pentru realizarea scopului şi obiectivelor cercetării au fost folosite metode de studiu, caracteristice topologiei algebrice, construind grupurile de omologii şi coomologii ale complexului de relaţii multi-are şi ale complexului de cuburi abstracte. La studierea convexităţii generalizate în complexul de relaţii muti-are au fost folosite metode de studiu din domeniul teoriei convexităţii şi teoriei grafurilor. La soluţionarea problemei medianei pe complexul de cuburi abstrate şi a jocurilor combinatoriale pe complexe de relaţii au fost folosite metode ale optimizării discrete, bazate pe proprietăţile mulţimilor intern stabile, extern stabile, a funcţiei Grundy, generalizări ale caracteristicii Euler.

Noutatea și originalitatea științifică.

- a fost propusă o direcţie nouă de cercetare, determinată de necesitatea studierii proprietăţilor complexului de relaţii multi-are şi aplicării acestuia la soluţionarea problemelor de optimizare discretă;
- a fost dedusă formula recurentă de calculare a numărului ciclomatic pentru un complex de relaţii multi-are cu ajutorul rangurilor grupurilor de omologii;
- a fost generalizată noţiunea de *d*-convexitate pentru spaţiile metrice, determinate de relaţiile *k*-are, $1 \le k \le n$, ale complexului $\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$;
- au fost studiate varietăţile abstracte determinate de un complex de cuburi abstracte, numite varietăți cubice;

- a fost elaborat algoritmul de calcul al medianei într-un complex de cuburi abstracte, fără utilizarea metricii spaţiului respectiv.

Problema științifică importantă soluționată constă în *elaborarea unei structuri matematice* determinate de o familie de relaţii multi-are şi folosite la modelarea proceselor cu acţiune discretă, *care a condus* la obţinerea metodelor eficiente pentru *utilizarea ulterioară* a acestora la soluţionarea problemei de calculare a medianei ponderate, fără a folosi metrica spaţiului, a problemei de comportament a jucătorilor într-un joc combinatorial etc.

În baza rezultatelor obţinute **se propune o direcţie nouă de cercetare** *ce constă în fundamentarea* teoriei complexelor de relaţii multi-are, prin care se generalizează mai multe structuri discrete clasice cunoscute ca grafuri, hipergrafuri, matroizi, complexe de simplexe, *ceea ce a contribuit la* elaborarea modelelor şi metodelor eficiente *în vederea aplicării acestora la* soluţionarea problemelor de optimizare discretă.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. Importanţa teoretică a tezei este determinată de fundamentarea unei direcţii noi de cercetare, generate de studierea topologiei algebrice a relaţiilor multi-are. Pentru soluţionarea problemelor de optimizare discretă a fost propus un model matematic nou, numit complex de relaţii multi-are care generalizează mai multe structuri matematice discrete clasice.

Valoarea aplicativă a lucrării este determinată de rezultatele obţinute în legătură cu dezvoltarea teoriei abstracte a relaţiilor multi-are şi folosirea acestora la elaborarea metodelor eficiente de soluţionare a problemelor de optimizare discretă, reprezentate în teză prin calcularea medianei unui complex de cuburi abstracte şi a soluţionării jocurilor combinatoriale cu ajutorul funcţiei Grundy pe complexe de relaţii.

Rezultate științifice principale înaintate spre susţinere:

Rezultate de ordin teoretic.

- a fost elaborat modelul matematic discret, bazat pe noţiunea de relaţie multi-ară, ca submulţime a produsului cartezian a unei mulţimi de elemente arbitrare;
- a fost studiată topologia relaţiilor multi-are, prin construirea grupurilor de omologii şi coomologii a complexului de relaţii multi-are;
- a fost dedusă formula recurentă de calculare a numărului ciclomatic pentru un complex de relaţii multi-are cu ajutorul rangurilor grupurilor de omologii;
- a fost demonstrat analogul teoremei Poincare-Veblen-Alexander pentru complexe de relaţii multi-are (teorema 2.8.1);
- au fost studiate proprietățile convexității și a învelitoarei convexe în spațiul metric (R^k, d_k^m), determinat de relația *k*-ară a complexului $\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$, $1 \le k \le n$, precum şi

problema restabilirii familiei de submulțimi din R^k, ce reprezintă o convexitate, cunoscând învelitoarea convexă respectivă, și invers (teorema 3.1.2, consecința 3.1.1, teorema 3.1.3);

- au fost caracterizate clasele de grafuri *d*-convex simple, identice după structură, cu determinarea relației dintre rază și diametru în grafurile de tipul $L(G,G_0)$, unde G_0 reprezintă atomul grafului G;
- au fost construite grupurile de omologii ale complexului de cuburi abstracte;
- au fost studiate proprietăţile varietăţilor, determinate de un complex cubic abstract;
- a fost dedusă formula Euler-Poincare pentru complexul de cuburi abstracte;
- au fost determinate condițiile de existență a conturului Euler (*n*-1)-dimensional într-o varietate abstractă, orientabilă și conexă forte;

Rezultate de ordin aplicativ.

- în baza rezultatelor teoretice, ce ţin de studierea topologiei algebrice a relaţiilor multi-are, a fost efectuată clasificarea varietăților abstracte determinate de complexul $\Re^{n+1}=(R^1,R^2,...,R^{n+1})$;
- a fost elaborat algoritmul de calcul al medianei într-un complex de cuburi abstracte, fără utilizarea metricii spaţiului respectiv;
- cu ajutorul funcției Grundy, definite pe complexul de relații $\Re^{n+1}=(R^1,R^2,...,R^{n+1})$, au fost stabilite strategiile de comportare ale participanţilor la un joc combinatorial.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele ştiinţifice, obţinute în legătură cu dezvoltarea teoriei abstracte a relaţiilor multi-are, prezintă interes teoretico-aplicativ manifestat prin faptul că:

- pot servi drept suport pentru iniţierea unor cercetări prin formularea temelor de doctorat în domeniul elaborării modelelor şi metodelor de soluţionare a problemelor din domeniul optimizării discrete;
- pot servi drept suport pentru elaborarea unor cursuri opţionale universitare în cadrul studiilor de licenţă şi de masterat;
- complexul de relaţii multi-are examinat în teză poate servi drept model pentru soluţionarea problemelor practice din sectorul economic, legate de amplasarea unor centre de deservire sau producere;
- pot conduce la elaborarea unor metode eficiente noi de soluţionare a problemelor de optimizare discretă.

Aprobarea rezultatelor științifice. Rezultatele științifice prezentate în teză au fost examinate și aprobate la diverse seminare științifice, printre care: seminarul "Structuri discrete și probleme de optimizare" din cadrul Universităţii de Stat din Moldova, 2000 - 2015; seminarul din cadrul Institutului de Matematică a Academiei Naţionale din Belorusia, 2013; seminarul din cadrul facultăţii de matematică a universităţii Babeş-Bolyai (Cluj-Napoca), 2005, 2008, 2010; seminarul din cadrul facultăţii de matematică a universităţii Ovidius (Constanţa), 2008.

Rezultatele științifice au fost prezentate prin comunicări în plen și în secții la mai multe conferințe, printre care: International Conference „Trends in the Development of the Information and Communication Technology in Education and Management”. Chișinău, March 20-21, 2003; Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chișinău, August 17-19, 2004; “Tiberiu Popoviciu” Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity. Cluj-Napoca, 2005; The 30-th Annual Congres of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA). Chişinău, July 5-10, 2005; The XIV Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60th anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University. Chişinău, August 25-27, 2006; “Tiberiu Popoviciu” Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity. Cluj-Napoca, 2006; International conference KEPT-2007. Knowledge engineering: Principles and techniques. Cluj-Napoca, Babeş-Bolyai University, June 5-7 2007; “Tiberiu Popoviciu” Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity. Cluj-Napoca, 2007; Seventh Workshop on Mathematical Modeling of Environmental and Life Sciences Problems. Constantza, October 22-25, 2008; Conferință științifică „Interferențe universitare – integrare prin cercetare și inovare”. MITRE–2008. Chișinău, October 1-4, 2008; “Tiberiu Popoviciu” Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity. Cluj-Napoca, 2008; Conferință științifică „Interferențe universitare – integrare prin cercetare și inovare”. MITRE–2009. Chișinău, October 8-9, 2009; “Tiberiu Popoviciu” Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity. Cluj-Napoca, 2009; The 33-th Annual Congres of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA). Sibiu, July 02-07, 2009; International Scientific Conference «Discrete mathematics, algebra and their applications». Minsk, October 19-22, 2009; Scientific Conference dedicated to the 80-th anniversary of the foundation of the Tiraspol State University, Chişinău, September 24-25, 2010; The 18th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM – 2010. Iaşi, October 14-17, 2010; Conferință științifică „Interferențe universitare – integrare prin cercetare și inovare”. MITRE–2011. Chișinău, August 22-25, 2011; International Congress on Computer Science: Imformation Systems and technologies, Minsk, 31 octomber – 03 november, 2011; Conferinţa Internaţională “Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale”. Ediţia III. Chișinău, 19-23 martie, 2012; The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics. Dedicated to Academician Mitrofan M. Cioban. CAIM –2012. Chişinău, August 22 – 25, 2012 (***Raport plenar***); The 13th International Conference on Mathematics and its

Applications - ICMA 2012. Timişoara, November 1-3, 2012; The 14-th International Conference of Scientific Papers "Scientific Researgh and Education in the Air Force". Braşov, May 24-26, 2012; Conferinţă ştiinţifică cu participare internaţională „Interferențe universitare – integrare prin cercetare și inovare". Chișinău, 25-26 septembrie, 2012 (***Raport plenar***); The 21st Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM –2013. Bucharest, September 19 – 22, 2013; International Conference"Discrete mathematics, graph theory and their applications" (DIMA-2013). Minsk, November 11-14, 2013 (***Raport plenar***); Conferință științifică „Interferențe universitare – integrare prin cercetare și inovare". MITRE–2013. Chișinău, August 18-22, 2013; The 22st Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM –2014. Bacău, September 18 – 21, 2014 ; Third Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chișinău, August 19-23, 2014; Conferinţa Internaţională "Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale". Ediţia IV. Chișinău, 25-28 martie, 2014.

Publicații la tema tezei. Rezultatele de baza ale tezei au fost publicate în 58 lucrări, lista cărora se anexează la sfârșitul autoreferatului și cuprinde: 3 monografii; 27 articole ştiinţifice recenzate și publicate în 3 țări (Republica Moldova – 16 articole, România – 10 articole, Belorusia – 1 articol); 12 comunicări și rezumate publicate sub formă de teze ale conferințelor științifice internaționale; 2 rapoarte în ședințe plenare ale conferințelor internaționale. Publicații fără coautori - 31 (monografii – 1; articole - 17, dintre care recenzate - 11; teze ale comunicărilor la conferințe științifice - 14).

Cuvinte-cheie: Complex de relaţii multi-are, optimizare discretă, grupuri de omologii, topologie algebrică, cub abstract, quasisimplex, caracteristica Euler-Poincare, spaţiu metric, convexitate, varietăţi abstracte, varietăţi cubice, problema medianei, funcţia Grundy.

Teza este dedicată cercetărilor în următoarele domenii științifice: Optimizare discretă, Topologie algebrică.

Volumul și structura tezei. Teza de doctor habilitat este scrisă în limba română şi constă din Introducere, 5 capitole, Concluzii şi Recomandări, Bibliografia ce numără 309 titluri. Volumul total al tezei este de 289 pagini, dintre care 265 pagini de text de bază.

CONȚINUTUL TEZEI

În **Introducere** este prezentat statutul actual al rezultatelor ce ţin de elaborarea modelelor matematice şi a metodelor de soluţionare a problemelor de optimizare discretă, motivaţia cercetărilor întreprinse, direcţia nouă propusă pentru studiu, scopul şi obiectivele tezei, importanţa şi avantajele investigării, noutatea şi originalitatea ştiinţifică, problemele ştiinţifice soluţionate, rezultatele înaintate spre susţinere, precum şi aprobarea lor.

Capitolul I, Modele matematice şi metode de soluţionare a problemelor de optimizare discretă, conţine o analiză amplă a celor mai importante rezultate ce ţin de direcţia de cercetare, de scopul şi obiectivele tezei. Acest capitol poartă un caracter introductiv și are drept scop examinarea, în mod evolutiv, a principalelor structuri matematice discrete folosite în calitate de modele la soluționarea problemelor practice. Se examinează o serie de proprietăți importante ale acestor structuri, generalizate în capitolele următoare pentru cazul complexelor de relații multi-are. Una dintre cele mai simple structuri matematice discrete, dar cu un potențial enorm de aplicații la examinarea problemelor teoretico-aplicative, este graful. Pornind de la încercările matematicienilor de a soluționa mai multe probleme cu caracter distractiv, într-o perioadă relativ scurtă a fost constituită o direcție nouă de cercetare, cunoscută astăzi ca teoria grafurilor. Rezultatele teoretice obținute au permis eficientizarea cercetărilor în diverse domenii: economie, fizică, informatică, chimie etc. Tot în capitolul I sunt descrise câteva rezultate ce țin de proprietățile arborilor, ale numărului ciclomatic, ale matricei ciclomatice și cociclomatice care ulterior sunt generalizate pentru complexele de relații multi-are și își găsesc utilizare la soluționarea problemelor aplicative, cum ar fi problema medianei, a jocurilor combinatoriale pe structuri discrete etc.

La dezvoltarea teoriei grafurilor au contribuit în mod esențial, începând cu apariția primelor lucrări în sec. XVII–XVIII, mai mulți matematicieni: Leonard Euler (1707-1783), William Hamilton (1788-1856), James Joseph Sylvester (1814-1897), Arthur Cayley (1821-1895), Claude Berge (1926-2002), George David Birkhoff (1884-1944). Încercările de a folosi grafurile în calitate de modele matematice pentru descrierea proceselor fizice, și nu numai, au generat, în timp, necesitatea extinderii și identificării altor structuri matematice, incluse în prezentul studiu care, într-un mod firesc, generalizează grafurile și, la rândul lor, servesc drept pretext pentru o serie de generalizări abstracte, urmate de fundamentarea teoriei abstracte a relațiilor multi-are.

În studierea tuturor structurilor discrete, un rol aparte revine spaţiilor ciclurilor şi cociclurilor, care se regăsesc şi în cazul complexului de relaţii multi-are. Numărul ciclomatic $\nu(G) = m - n + p$ și cel cociclomatic $\rho(G) = n - p$ al unui graf G cu n vârfuri, m muchii şi p componente conexe posedă un şir de proprietăţi importante din punct de vedere teoretico-aplicativ [2], [5], [8]:

P1. *Dacă x și y sunt două vârfuri nonadiacente ale unui graf conex G, iar G' este graful ce se obține din G la adăugarea muchiei (x,y), atunci*:

$$\nu(G') = \nu(G),$$
$$\rho(G') = \rho(G) + 1.$$

P2. *Dacă x și y aparțin componentelor conexe diferite ale grafului G, iar G′ este graful ce se obține din G la adăugarea muchiei (x,y), atunci relația din* **P1** *este adevărată.*

P3. *Numărul ciclomatic al unui graf* $G = (X;U)$ *este egal cu numărul maxim de cicluri independente din G.*

P4. *Un graf G nu conține cicluri dacă și numai dacă* $\nu(G) = 0.$

P5. *Un graf G conține un singur ciclu dacă și numai dacă* $\nu(G) = 1.$

Teorema 1.1.2 [5]. *Dacă B, C și* C^* *sunt, respectiv, matricea de incidență, matricea ciclomatică și matricea cociclomatică ale unui graf cu n vârfuri, m muchii și p componente conexe, atunci rangurile acestor matrice sunt determinate de egalitățile:*

$$r(C) = m - n + p,$$
$$r(B) = r(C^*) = n - p.$$

Numărul ciclomatic al hipergrafului $\mathscr{H} = (X;\mathscr{E})$ se definește ca numărul ciclomatic al reprezentării König $K(\mathscr{H})$ [4], [10]. Notăm prin $\nu(\mathscr{H})$ numărul ciclomatic al hipergrafului $\mathscr{H}$, iar prin $\nu(K(\mathscr{H}))$ $-$ numărul ciclomatic al reprezentării König $K(\mathscr{H})$. Conform [4]:

$$\nu(\mathscr{H}) = \nu(K(\mathscr{H})) = \sum_{E\in\mathscr{E})}(cardE - 1) - cardX + c(\mathscr{H}).$$

Dacă hipergraful $\mathscr{H} = (X;\mathscr{E})$ conține *n* vârfuri și *m* muchii, atunci

$$\nu(\mathscr{H}) = \sum_{E\in\mathscr{E}} cardE - m + n + c(\mathscr{H}).$$

Din această definiție a numărului ciclomatic, precum și din faptul că componentelor conexe și ciclurilor simple ale hipergrafului $\mathscr{H}$ le corespund în mod univoc componente conexe și cicluri simple ale grafului König $K(\mathscr{H})$, rezultă

Teorema 1.1.7 [10]. *Un hipergraf* $\mathscr{H}$ *nu conține cicluri simple sau conține un singur ciclu simplu dacă și numai dacă* $\nu(\mathscr{H}) = 0$ *sau, respectiv,* $\nu(\mathscr{H}) = 1.$

Luând în considerație definiția hipergrafului dual $\mathscr{H}^*$ simplu, se deduc relațiile:

$$\nu(\mathscr{H}^*) = \nu(\mathscr{H});$$
$$\sum_{E\in\mathscr{E}} cardE = \sum_{E^*\in\mathscr{E}^*} cardE^* .$$

Teorema 1.1.8 [10]. *Hipergraful* $\mathscr{H} = (X;\mathscr{E})$ *nu conține cicluri dacă și numai dacă*

$$card \bigcup_{E_j\in\mathscr{E}'} E_j > \sum_{E_j\in\mathscr{E}'}(cardE_j - 1),$$

pentru orice submulțime nonvidă $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$.

O structură combinatorială importantă în optimizare reprezintă matroidul. Teoria matroizilor utilizează într-un mod extensiv terminologia algebrei liniare și teoriei grafurilor datorită faptului că ea reprezintă o abstracție a noțiunilor principale din aceste domenii ale matematicii. Pentru prima dată, noțiunea de matroid a fost introdusă în 1935 de către Whitney în lucrarea [24]. Aproape simultan, în anul 1936, a apărut articolul lui Saunders MacLane cu privire la noțiunea de matroizi în geometria proiectivă. Un an mai târziu, B.L. van der Waerden a examinat legătura dintre dependența algebrică și cea liniară [25]. În 1940, Richard Rado a pus bazele teoriei sistemelor independente în contextul dezvoltării teoriei transversalelor.

Definiția 1.1.9 [26]. *Perechea* $(X;\mathcal{E})$ *ce posedă proprietățile:*

1. $\varnothing \neq \mathcal{E}$;
2. *dacă* $A \in \mathcal{E}$ *și* $B \subset A$, *atunci* $B \in \mathcal{E}$;
3. *dacă* $A, B \in \mathcal{E}$ *și* $cardA > cardB$, *atunci există un element* $x \in A \setminus B$, *încât* $B \bigcup \{x\} \in \mathcal{E}$,

se numește matroid și se notează prin $M = (X;\mathcal{E})$.

Importanța matroizilor în optimizarea discretă este determinată și de faptul că pe astfel de structuri putem rezolva în mod eficient un șir de probleme importante, aplicând algoritmul Greedy, cu ajutorul căruia găsim soluția optimă, dacă modelul matematic respectiv este un matroid. Formulăm următoarea problemă de optimizare discretă:

Fie $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *o mulțime finită de elemente pe care este definită funcția* $\varphi : X \to R^+$. *Numărul* $\varphi(x)$ *se numește* **pondere** *a elementului* $x \in X$. *Formăm o familie de submulțimi din X, notată prin* $\mathcal{E}$. Să se determine mulțimea $A \in \mathcal{E}$, pentru care

$$\varphi(A) = \max_{Y \in \mathcal{E}} \varphi(Y),$$

unde $\varphi(Y)$ *reprezintă ponderea mulțimii* $Y \in \mathcal{E}$: $\varphi(Y) = \sum_{y \in Y} \varphi(y)$.

Fără a pierde din generalitate, pentru elementele mulțimii X, vom considera $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) \geq \ldots \geq \varphi(x_n)$.

La soluționarea acestei probleme poate fi folosit un algoritm eficient – algoritmul Greedy. Considerând inițial $A = \varnothing$, iterativ, la mulțimea A se adaugă primul element x_i din X, pentru care $A \cup \{x_i\} \in \mathcal{E}$. Evident, complexitatea algoritmului Greedy este liniară $-$ $O(n)$ (fără a lua în calcul procedura de sortare a elementelor din X în raport cu ponderile acestora $-$ $O(n \log n)$, și verificarea condiției $A \cup \{x_i\} \in \mathcal{E}$ [26], [27]).

Soluția obținută prin aplicarea algoritmului Greedy nu totdeauna poate fi cea optimală. Aceasta depinde de faptul dacă perechea $(X;\mathcal{E})$ reprezintă un matroid sau nu.

Teorema 1.1.12 [26]. *Dacă* $M = (X;\mathcal{E})$ *este un matroid, atunci pentru orice funcție a ponderilor* $\varphi : X \to R^+$ *algoritmul Greedy determină mulțimea* $A \in \mathcal{E}$ *de pondere maximă.*

Dacă $M=(X;\mathcal{E})$ nu este matroid, atunci totdeauna poate fi găsită o funcție $\varphi: X \to R^+$, pentru care mulțimea găsită prin aplicarea algoritmului Greedy nu este de pondere maximă.

Dualitatea în matematică reprezintă un instrument puternic pentru analizarea și soluționarea problemelor de optimizare. Deseori, obținerea soluției optimale poate fi privită ca un proces elegant, trecând la studierea modelului dual al problemei respective. Posibilități suplimentare în acest sens oferă matroizii duali.

Fie A o afirmație referitoare la matroidul M. Dacă în această afirmație înlocuim fiecare noțiune referitoare la matroid prin conoțiunea respectivă, atunci obținem o afirmație duală celei inițiale. Prin urmare, este adevărată afirmația:

Principiul dualității. *Dacă o afirmație este adevărată pentru orice matroid, atunci și afirmația duală este adevărată pentru orice matroid.*

Pornind de la definiția matroidului, în lucrările [27], [28] se demonstrează un șir de proprietăți importante care ușor pot fi extinse în baza principiului dualității. Printre aceste proprietăți menționăm:

a) *o submulțime de elemente ale unui matroid este dependentă dacă și numai dacă intersecția acesteia cu fiecare cobază nu este vidă;*

b) *o submulțime de elemente ale unui matroid este codependentă dacă și numai dacă intersecția acesteia cu fiecare bază nu este vidă;*

c) *pentru orice mulțime independentă nevidă $Y \subset X$ a matroidului $M=(X;\mathcal{E})$ există cociclu C^* încât $card(Y \bigcap C^*)=1$;*

d) *pentru orice ciclu C și orice cociclu C^* este adevărată relația:*

$$card(C \bigcap C^*) \neq 1;$$

e) *submulțimea de elemente $Y \subseteq X$ a unui matroid $M=(X;\mathcal{E})$ este ciclu dacă și numai dacă Y este mulțimea minimală dintre toate submulțimile nevide din X ce posedă proprietatea $card(Y \bigcap C^*) \neq 1$, pentru orice cociclu C^*.*

Metode eficiente pentru studierea complexelor de relaţii multi-are oferă topologia algebrică. Aceasta din urmă reprezintă o ramură a matematicii ce se ocupă de studierea spaţiilor topologice, prin intermediul obiectelor clasice şi a metodelor caracteristice algebrei abstracte [22], [23]. Ea oferă posibilitatea de a folosi modele, reprezentate prin structuri matematice uşor perceptibile, pentru examinarea proprietăţilor topologice ale spaţiilor continui. Obiectul de studiu al topologiei algebrice îl constituie structurile algebrice şi proprietăţile lor, iar scopul principal se reduce la determinarea invarianţilor algebrici, folosiţi pentru clasificarea spaţiilor topologice, cu o exactitate de omeomorfism. În această direcţie au fost efectuate cercetări impunătoare, care se regăsesc în monografii recent apărute [29], [30]. Rezultate majore ce ţin de fundamentarea teoretică a topologiei algebrice au fost determinate de introducerea unor structuri algebrice, care au condus la dezvoltarea direcţiilor importante de cercetare, ce se manifestă prin:

- Construirea grupurilor de omotopie, care se folosesc, în mod special, pentru clasificarea spaţiilor topologice. Intuitiv, grupurile de omotopie oferă informaţie cu privire la forma de bază, sau găurile spaţiului respectiv. Cel mai simplu grup de omotopie ar fi grupul fundamental, care oferă informaţie referitoare la buclele spaţiului topologic.
- Construirea omologiilor, care reprezintă o procedură generală de asociere a unui şir de grupuri abeliene, numite invarianţi algebrici, cu un obiect matematic, prin intermediul căruia se face studiul spaţiului topologic.
- Construirea coomologiilor, care reprezintă un studiu abstract al colanţurilor, cociclurilor şi cofrontierelor. Construirea coomologiilor poate fi considerată drept o procedură duală celei de construire a omologiilor, şi reprezintă o metodă de atribuire unui spaţiu topologic a invarianţilor algebrici de o structură mai fină decât invarianţii obţinuţi prin construirea omologiilor.
- Construirea varietăţilor. Varietatea reprezintă un spaţiu topologic comod pentru examinare, din anumite considerente, care posedă proprietatea: pentru orice punct există o vecinătate, omeomorfă cu spaţiul euclidian *n*-dimensional.
- Construirea complexelor. În topologia algebrică, complexele reprezintă spaţii topologice cu o structură specifică. Din acest punct de vedere, un rol primordial îi revine complexului simplicial [22], pe care nu-l vom confunda cu complexul simplicial abstract, examinat în continuare în capitolul II.

Capitolul II, Relaţii multi-are şi grupuri de omologii abstracte, conţine rezultate ce constituie fundamentarea teoretică a direcţiei de cercetare, determinate de complexul de relaţii multi-are. Noţiunea de complex generalizat de relaţii multi-are asupra unei mulţimi arbitrare de elemente a fost pentru prima dată prezentată în lucrarea [83], construind ulterior grupurile de omologii peste grupul numerelor întregi. Rezultatele de bază sunt publicate în lucrările [65], [67], [76], [105], [118], [122].

Fie date o mulţime finită de elemente $X = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, care este o submulţime dintr-o mulţime M , $card M \leq \infty$, unde M nu este clasă, şi şirul $X = X^1, X^2, ..., X^{n+1}$, $n \geq 1$, de produse carteziene [31], [32] a mulţimii X . Orice submulţime nevidă $R^m \subset X^m$, $1 \leq m \leq n+1$ se numeşte relaţie m-ară a elementelor din X (mulţimea $R^1 \subset X^1$ reprezintă o submulţime de elemente din X) [33]. Luând în consideraţie cele spuse, o relaţie m-ară R^m este o familie de succesiuni ordonate, numite cortegii, formate din a câte m elemente din X . Cortegiul $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}) \in R^m$ poate să conţină şi repetări ale unor elemente din X. Pentru un astfel de cortegiu, orice subcortegiu $(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_l})$, $1 \le l \le m$, ce păstrează ordinea elementelor din $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m})$ se numeşte ***subcortegiu ereditar***.

Definiţia 2.1.1. *Familia finită de relaţii* $\{R^1, R^2, ..., R^{n+1}\}$, *care satisface condiţiile*:

I. $R^1 = X^1 = X$,

II. $R^{n+1} \neq \varnothing$,

III. *orice subşir ereditar* $(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_l})$, $1 \le l \le m, \le n+1$, *din* $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}) \in R^m$ *aparţine relaţiei* l*-are* R^l,

se numeşte ***complex generalizat*** **(***G-complex***)** ***de relaţii multi-are*** *şi se notează*:

$$\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1}).$$

Complexul generalizat de relaţii poate fi privit şi ca un complex de quasisimplexe abstracte.

Definiţia 2.3.4. *Un cortegiu* $(x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_m}) \in R^{m+1}$ *al G-complexului de relaţii multi-are* $\mathcal{K}^n = \mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$ *se va numi* ***quasisimplex abstract cu dimensiunea m*** *şi se va nota prin* $Q^m = (x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_m})$, *iar familia de quasisimplexe cu dimensiunea m – prin* $\mathcal{Q}^m$, *0≤m≤n.*

Pentru complexul $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$, echivalent cu complexul de quasisimplexe $\mathcal{QK}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, ..., \mathcal{Q}^n)$ definim caracteristica Euler $\chi(\mathcal{K}^n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i$, unde $\alpha_i = card\, \mathcal{Q}^i$, $0 \le i \le n$.

Construind lanţurile şi ciclurile *m*-dimensionale ale unui *G*-complex de relaţii multi-are $\mathcal{QK}^n$ se formează mulţimile:

$\mathcal{L}^m(\Delta)$ - grup al Δ-lanţurilor m-dimensionale din $\mathcal{QK}^n$;

$\mathcal{Z}^m(\Delta)$ - grup al Δ-ciclurilor m-dimensionale din $\mathcal{QK}^n$, subgrup al grupului $\mathcal{L}^m(\Delta)$;

$\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$ - grup al Δ-ciclurilor m-dimensionale şi Δ-omoloage cu 0 în raport cu operaţia aditivă, care este subgrup al lui $\mathcal{Z}^m(\Delta)$.

Definiţia 2.6.1. *Grupul factor* $\mathcal{Z}^m(\Delta)/\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$ *al unui G-complex de relaţii multi-are se* numeşte ***grup*** *al* Δ*-omologiilor (al omologiilor directe) cu dimensiunea m peste grupul* Z *şi se* *notează prin* $\Delta^m(\mathcal{K}^n)$, *0≤m≤n. Rangurile acestor grupuri se numesc* **numere Betti**. *În lucrările* [34] $-$ [37], *aceste grupuri se notează prin* $H_m(\mathcal{K}^n)$, $0 \le m \le n$.

În mod similar se construiesc şi grupurile de ∇-omologii $\nabla_m(\mathcal{K}^n)$, 0≤*m*≤*n*. În termenii grupurilor de Δ-omologii şi ∇-omologii se formulează un şir de rezultate ce ţin de proprietăţile complexului studiat:

Teorema 2.6.3. *Pentru orice* ∇*-lanţ* $L^m \in \nabla\mathcal{L}^m$ *al G-complexului de relaţii multi-are* $\mathcal{K}^n$ *are loc următoarea egalitate:*

$$\nabla\nabla L^m = 0, 0 \le m \le n.$$

Teorema 2.6.4. *Dacă G-complexul de relaţii multi-are* $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, ..., \mathcal{Q}^n)$ *este conex, atunci* $\Delta^0(\mathcal{K}^n)$ *este izomorf cu grupul numerelor întregi* Z.

Remarca 2.6.4. *Dacă* $\mathcal{K}_1^n, \mathcal{K}_2^n, ..., \mathcal{K}_q^n$ *pentru un G-complex de relaţii multi-are* $\mathcal{K}^n$ *are loc egalitatea* (2.1), *atunci*:

$$\Delta^m(\mathcal{K}^n) \cong \Delta^m(\mathcal{K}_1^n) \oplus \Delta^m(\mathcal{K}_2^n) \oplus ... \oplus \Delta^m(\mathcal{K}_q^n),$$

unde 0≤*m*≤*n, şi dacă m*=0, *atunci*:

$$\Delta^0(\mathcal{K}^n) \cong \underbrace{Z \oplus Z \oplus ... \oplus Z}_{q\ ori}.$$

Dacă notăm prin $\rho^m = \rho(\Delta^m(\mathcal{K}^n))$ rangurile grupurilor de omologii ale complexului $\mathcal{K}^n$, 0≤*m*≤*n* , atunci are loc

Teorema 2.6.5. *Pentru orice G-complex de relaţii multi-are* $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, ..., \mathcal{Q}^n)$ *are loc egalitatea:*

$$\chi(\mathcal{K}^n) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \rho^m = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha_i .$$

Definiţia 2.6.10. *Fie dat* G*-complexul* $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, ..., \mathcal{Q}^n)$. *Să examinăm complexul* $\mathcal{K}_d^n = (\mathcal{Q}_d^n, \mathcal{Q}_d^{n-1}, ..., \mathcal{Q}_d^0)$, *unde fiecare quasisimplex abstract* Q_i^m, *cu dimensiunea m, e considerat un complex celular* [35] *cu dimensiunea n-m, notat prin* $Q_{d_i}^{n-m}$, *pe când totalitatea acestor complexe cu dimensiunea n-m – prin* $\mathcal{Q}_d^{n-m}, 0 \le m \le n, i \in \Lambda_m$, *desigur, respectând incidenţele. Complexul abstract* $\mathcal{K}_d^n$ *se numeşte* **dualul complexului** $\mathcal{K}^n$.

De exemplu, un simplex 0-dimensional incident la *n* fațete (simplexe) (*n*-1)-dimensionale ale unui simplex *n*-dimensional reprezintă un CW cu dimensiunea *n* în forma unui simplex *n*-dimensional, având ca celule mulţimea tuturor faţetelor acestuia, inclusiv cea improprie.

Menţionăm că complexul dual $\mathcal{K}_d^n$ al lui $\mathcal{K}^n$ este un complex celular (CW) conex.

Fie

$$H_d^0(\mathcal{K}_d^n, Z),\, H_d^1(\mathcal{K}_d^n, Z), \ldots, H_d^n(\mathcal{K}_d^n, Z)$$

şirul grupurilor de omologii directe ale lui $\mathcal{K}_d^n$.

Teorema 2.6.6. *Pentru complexul* $\mathcal{K}^n$ *sunt adevărate relaţiile*:

$$\nabla_0(\mathcal{K}^n, Z) \cong H_d^0(\mathcal{K}_d^n, Z),$$

$$\nabla_1(\mathcal{K}^n, Z) \cong H_d^1(\mathcal{K}_d^n, Z),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\nabla_n(\mathcal{K}^n, Z) \cong H_d^n(\mathcal{K}_d^n, Z)$$

În baza acestei teoreme obţinem că teorema Kolmogorov-Alexander [35], [38] cu privire la dualitatea grupurilor de omologii şi coomologii pentru spaţii topologice rămâne valabilă şi în cazul complexului generalizat de relaţii multi-are $\mathcal{K}^n$. Astfel, obţinem

Teorema 2.6.7. *Pentru complexul* $\mathcal{K}^n$ *sunt adevărate următoarele egalităţi*:

$$\Delta^0(\mathcal{K}^n, Z) \cong \nabla_n(\mathcal{K}^n, Z),$$

$$\Delta^1(\mathcal{K}^n, Z) \cong \nabla_{n-1}(\mathcal{K}^n, Z),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^n(\mathcal{K}^n, Z) \cong \nabla_0(\mathcal{K}^n, Z).$$

În paragraful 2.5 se defineşte Δ-ciclul m-dimensional al unui G-complex de relații multi-are $\mathcal{K}^n$, interpretat ca un subcomplex conex din $\mathcal{K}^n$ în care orice quasisimplex $Q^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}$ este fațetă comună pentru exact două quasisimplexe m-dimensionale ale Δ-ciclului, orientate respectiv. Un astfel de Δ-ciclu ar mai putea fi numit Δ-ciclu sferic elementar cu dimensiunea m. În caz general, când un Δ-ciclu m-dimensional conex și orientat este format din mai multe Δ-cicluri sferice elementare, fiecare quasisimplex $Q^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}$ al acestui ciclu este fațetă comună pentru un număr par de quasisimplexe abstracte m-dimensionale. Mulțimea acestor cicluri o vom nota prin $\tilde{\zeta}^m(\Delta)$. Împreună cu grupurile de cicluri $\mathcal{Z}^m(\Delta)$ și $\tilde{\mathcal{Z}}^m(\Delta)$, studiate în paragraful 2.5 şi paragraful 2.6, obținem relația $\mathcal{Z}^m(\Delta) \subseteq \tilde{\mathcal{Z}}^m(\Delta) \subseteq \tilde{\zeta}(\Delta)$. În lucrare se deduce formula de calcul a Δ-ciclurilor m-dimensionale din $\mathcal{K}^n$. Pe mulțimea $\tilde{\zeta}^m(\Delta)$ definim funcția univocă:

$$f_m : \tilde{\zeta}^m(\Delta) \to R^{\alpha_m},$$

ce posedă proprietatea: pentru orice ciclu $\tilde{\xi}^m(\Delta) \in \tilde{\zeta}^m(\Delta)$ are loc egalitatea

$$f_m(\tilde{\xi}^m(\Delta)) = (p_1^m - t_1^m, p_2^m - t_2^m, ..., p_j^m - t_j^m, ..., p_{\alpha_m}^m - t_{\alpha_m}^m),$$

unde p_j^m inidcă de câte ori quasisimplexul Q_j^m apare în ciclul $\tilde{\zeta}^m(\Delta)$ cu semn pozitiv, iar t_j^m –cu semn negativ. Vom nota diferența $p_j^m - t_j^m$ prin $\tilde{c}_j^m$. Obținem vectorul:

$$f_m(\tilde{\xi}^m(\Delta)) = (\tilde{c}_1^m, \tilde{c}_2^m, ..., \tilde{c}_{\alpha_m}^m),\ 1 \le m \le n.$$

Definiția 2.7.1. *Vectorul* $f_m(\tilde{\xi}^m(\Delta))$ *se numește vector* Δ*-ciclic cu dimensiunea m a complexului de relații multi-are* $\mathcal{K}^n$ *și se va nota prin* $\tilde{C}^m(\Delta) = f_m(\tilde{\xi}^m(\Delta)) \in \mathcal{R}^{\alpha_m}$.

Definiţia 2.7.2. *Pentru complexul* 0*-dimensional de relaţii* $\mathcal{K}^0 = \left(\mathcal{Q}^0 = X, \varnothing, ..., \varnothing\right)$, *numărul maxim de* Δ*-cicluri* 0*-dimensionale, adică* $card\mathcal{Q}^0$*, se numeşte număr ciclomatic* 0*-dimensional al lui* $\mathcal{K}^0$*, care se notează prin* $v_0\left(\mathcal{K}^0\right) = \rho_0$.

Examinăm complexul 1-dimensional $\mathcal{K}^1 = \left(\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1\right)$ care poate fi considerat un graf cu numărul de vârfuri egal cu $card\mathcal{Q}^0$ şi numărul de arce egal cu $card\mathcal{Q}^1$. Pentru acest complex notăm: $\alpha_0 = card\mathcal{Q}^0 = n$; $\alpha_1 = card\mathcal{Q}^1 = m$; ρ_0 - rangul grupului de omologii $\Delta^0\left(\mathcal{K}^1\right)$, fie $\rho_0 = p$. Dacă $\mathcal{K}^1$ este conex, atunci se consideră $p = 1$; ρ_1 - rangul grupului de omologii $\Delta^1\left(\mathcal{K}^n\right)$ şi reprezintă numărul de Δ-cicluri independente 1-dimensionale din $\mathcal{K}^n$. Are loc egalitatea $\alpha_0 - \alpha_1 = \rho_0 = p$, sau, $\rho_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + \rho_0$. Dacă notăm ρ_1 prin $v_1\left(\mathcal{K}^1\right)$, atunci:

$$v_1\left(\mathcal{K}^1\right) = m - n + p.$$

Numărul $v_1\left(\mathcal{K}^1\right)$ se numeşte număr ciclomatic al grafului $\mathcal{K}^1 = \left(\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1\right) = \left(X, R^2\right)$. În cazul când $\mathcal{K}^1$ nu e conex şi este reprezentat ca o reuniune de complexe 1-dimensionale conexe şi disjuncte:

$$\mathcal{K}^1 = \mathcal{K}_1^1 \cup \mathcal{K}_2^1 \cup ... \cup \mathcal{K}_t^1 \cup \mathcal{K}^0,$$

unde $\mathcal{K}^0 = X' \subset X$, $\mathcal{K}_i^1 \cap X' = \varnothing$, $\mathcal{K}_i^1 \cap \mathcal{K}_j^1 = \varnothing$, $i \ne j$, $i, j = 1,2,...,t$, obţinem egalitatea:

$$v\left(\mathcal{K}^1\right) = \rho_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + \rho_0 + t = m - n + \rho_0\left(\mathcal{K}^0\right) + t.$$

Examinăm numerele ciclomatice în cazul *G*-complexelor de relaţii multi-are cu dimensiunea $n > 1$. Acestea sunt o generalizare a numărului ciclomatic cunoscut din teoria grafurilor. Fie $\mathcal{K}^n$ un complex de relaţii multi-are, reprezentat ca o reuniune de complexe disjuncte:

$$\mathcal{K}^n = \mathcal{K}^{n_1} \cup \mathcal{K}^{n_2} \cup ... \cup \mathcal{K}^{n_r},$$

unde $\max\{n_1, n_2, ..., n_r\} = n \ge 2$. Din teorema 2.6.1, ca rezultat al unor transformări, obţinem:

$$(-1)^n \rho_n = \sum_{m=n}^{0} (-1)^{n-m} \alpha_m + \sum_{m=n-1}^{0} (-1)^{n-m} \rho_m.$$

Definiţia 2.7.3. *Pentru un G-complex de relaţii multi-are* $\mathcal{K}^n$*, numărul* ρ_n *din partea stângă a relaţiei* de mai sus *se numeşte număr ciclomatic* n*-dimensional al complexului* $\mathcal{K}^n$ *şi se notează prin* $v_n\left(\mathcal{K}^n\right)$.

Formula recurentă pentru calcularea numerelor ciclomatice ale unui *G*-complex de relaţii multi-are $\mathcal{K}^n$ este:

$$v_m\left(\mathcal{K}^n\right)=\sum_{i=m}^{0}(-1)^{m-i}\alpha_i\left(K^n\right)+\sum_{i=m-1}^{0}(-1)^{m-i}v_i\left(K^n\right).$$

La finalul capitolului II, se construieşte matricea ciclomatică a complexului de relaţii multi-are, se studiază anumite proprietăţi şi se demonstreză teorema 2.8.1, care reprezintă o generalizare a teoremei Poincare-Veblen-Alexander formulată în lucrările [36], [39].

Prin rezultatele din **Capitolul III, Convexitatea în complexul de relaţii multi-are**, se continuă ciclul de investigaţii, efectuate de către discipolii academicianului P. Soltan, în legătură cu introducerea la momentul respectiv a noţiunii de *d*-convexitate. Rezultatele obţinute au fost publicate în lucrările [66], [73], [75], [90], [91], [97], [114]. Generalizând noţiunea de lanţ m-dimensional în complexul $\Re^{n+1}$, se generalizează noţiunea de mulţime d-convexă, cunoscută din teoria grafurilor [12], [60], se studiază mai multe proprietăţi ale acesteia, exprimate prin teoremele 3.1.6 – 3.1.8.

Grafurile, fiind un caz particular al complexului de relații multi-are și o structură relativ simplă pentru studiu, servesc drept suport pentru studierea diverselor aspecte legate de proprietățile mulțimilor convexe în spații metrice discrete.

Folosim noţiunea de convexitate şi învelitoare convexă, forrmulate de către F.Levi [47]. Fie $\mathcal{P}(X)$ familia tuturor submulţimilor unei mulțimi arbitrare X. Alegem o subfamilie $\Phi\subset\mathcal{P}(X)$.

Definiţia 3.1.1. *Familia de mulţimi* $\Phi\subset\mathcal{P}(X)$ *ce posedă proprietăţile:*

a) $X\in\Phi$;
b) dacă $A_1, A_2\in\Phi$, *atunci* $A_1\cap A_2\in\Phi$,

se numeşte convexitate în X. *Perechea* (X,Φ) *se numeşte spaţiu convex, iar elementele din* Φ *– mulţimi convexe.*

Definiţia 3.1.2. *Aplicaţia* $\varphi:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$, *care satisface relaţiile:*

a) $A\subseteq\varphi(A)$, *pentru orice submulţime* $A\subset X$;

b) $\varphi(\varphi(A))=\varphi(A)$, *pentru orice submulţime* $A\subset X$;

c) $\varphi(A)\subseteq\varphi(B)$, *pentru oricare două submulţimi* $A,B\in\mathcal{P}(X)$ *încât* $A\subset B$, *se numeşte învelitoare convexă în spaţiul* X. *Mulţimea* $\varphi(A)$, $A \subset R^k$, *se numeşte învelitoare convexă a lui* A *şi se notează prin* d_k^m*-conv*(A).

Examinăm spaţiul, elementele căruia sunt toate cortegiile complexului $\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$. Se defineşte noțiunea de lanț care diferă de cea a lanțului liniar, formulată în definiția 2.1.4, însă pare a fi mai firească în contextul celor examinate în continuare. Fie r_i^k, r_j^k două elemente arbitrare ale relaţiei k-are R^k.

Definiţia 3.1.3. *Şirul de cortegii* $r_{t_1}^m, r_{t_2}^m, ..., r_{t_s}^m$ *ale relaţiei m-are* R^m *ce posedă proprietăţile:*

1) $r_i^k \subset r_{t_1}^m$, $r_j^k \subset r_{t_s}^m$, $1 \le k < m$;

2) $r_{t_p}^m \cap r_{t_{p+1}}^m \in R^l$, $k \le l < m$, *pentru orice* $1 \le p \le s-1$,

se numeşte k*-lanţ* m*-dimensional cu extremităţile în* r_i^k, r_j^k *şi se notează prin* ${}^kL^m(r_i^k, r_j^k)$, $1 \le k < m \le n+1$. *Numărul* s *se numeşte lungime a acestui lanţ.*

În cazul complexului de relaţii multi-are $\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$ vom considera că fiecare relaţie k-ară R^k, $1 \le k \le n$, determină un spaţiu, elemente ale căruia sunt cortegiile din R^k. Pe fiecare astfel de spaţiu vom defini convexitatea în conformitate cu definiţia 3.1.1, folosind *k*-lanţurile m-dimensionale, introduse prin definiția 3.1.3, $k < m \le n+1$. Definim următoarele două noţiuni:

1. ***k-Lanţ m-dimensional minim*** ce uneşte două elemente cu aceeaşi dimensiune $r_i^k, r_j^k \in R^k$, $1 \le k < m \le n+1$. Astfel se va numi (k,m)-lanţul ${}^kL^m\left(r_i^k, r_j^k\right)$ cu cea mai mică lungime, ce leagă cortegiile $r_i^k, r_j^k \in R^k$.

2. ***Funcţia distanţei*** $d_k^m : R^k \times R^k \to N$. Astfel se va numi funcţia ce pune în corespondenţă oricăror două cortegii r_i^k, r_j^k cu aceeaşi dimensiune k din $\Re^{n+1}$ un număr egal cu lungimea k-lanţului *m*-dimensional minim, $1 \le k < m \le n+1$.

Lema 3.1.2. *Funcţia* $d_k^m : R^k \times R^k \to N$, *încât* $d_k^m(r_i^k, r_j^k)$ *reprezintă un număr, egal cu lungimea* (k,m)*-lanţului minim cu extremităţile în* $r_i^k, r_j^k \in R^k$, *posedă proprietăţile*:

a) $d_k^m(r_i^k, r_j^k) \ge 0$, *pentru oricare două elemente* $r_i^k, r_j^k \in R^k$ *şi* $d_k^m(r_i^k, r_j^k) = 0$ *dacă şi numai dacă* $r_i^k = r_j^k$;

b) $d_k^m(r_i^k, r_j^k) = d_k^m(r_j^k, r_i^k)$, *pentru oricare două elemente* $r_i^k, r_j^k \in R^k$;

c) $d_k^m(r_i^k, r_j^k) \le d_k^m(r_i^k, r_t^k) + d_k^m(r_t^k, r_j^k)$, *pentru oricare trei elemente* $r_i^k, r_j^k, r_t^k \in R^k$.

Pentru cortegiile $r_i^k, r_j^k \in R^k$, vom numi ***k-segment metric m-dimensional*** mulţimea:

$$\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m = \{r_l^k \in R^k : d_k^m(r_i^k, r_j^k) = d_k^m(r_i^k, r_l^k) + d_k^m(r_l^k, r_j^k)\},$$

unde $1 \le k < m \le n+1$.

Notăm prin D^k familia tuturor mulţimilor $A \subset R^k$ ce posedă proprietatea: pentru oricare două cortegii k-dimensionale $r_i^k, r_j^k \in R^k$ este respectată incluziunea $\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset A$.

Teorema 3.1.1. *Famila* D^k *reprezintă o convexitate în* R^k.

Elementele familiei D^k le vom numi mulţimi (k, m)-conexe. În baza convexităţii D^k, pe mulţimea tuturor submulţimilor $\mathcal{P}(R^k)$ a spaţiului R^k, definim o aplicaţie $\varphi : \mathcal{P}(R^k) \to \mathcal{P}(R^k)$.

Teorema 3.1.2. *Aplicaţia* $\varphi : \mathcal{P}(R^k) \to \mathcal{P}(R^k)$ *care pune în corespondenţă fiecărui element* $A \in \mathcal{P}(R^k)$ *o mulţime* (k, m) *-convexă minimă din* D^k, *ce conţine mulţimea A, reprezintă o învelitoare convexă.*

Consecinţa 3.1.1. *În cazul unui complex de relații multi-are* $\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$, *convexitatea* $D^k = \{B \in \mathcal{P}(R^k) : \langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset B, pentru\ \forall\ r_i^k, r_j^k \in B\}$ *determină în mod univoc învelitoarea convexă* $\varphi : \mathcal{P}(R^k) \to \mathcal{P}(R^k)$, *încât* $\varphi(A) = B$, *unde* B *este o mulţime* (k, m)*-convexă minimă din* D^k, *ce conţine mulţimea* A, $1 \le k < n+1$.

În studierea mulţimilor convexe un rol decisiv revine punctelor extremale.

Definitia 3.1.5. *Elementul* $r \in A$ *se numește punct extremal al mulțimii* $A \subset R^k$, *dacă* $r \notin d_k^m - conv(A \setminus \{r\})$. *Mulțimea tuturor elementelor extremale din A se noteaza prin extA.*

Punctele extremale joacă un rol important în studierea proprietăţilor mulţimilor convexe, fapt confirrmat prin următoarele teoreme:

Teorema 3.1.4. *Dacă este definită convexitatea* D^k, *iar A este o submulțime din* R^k *atinci sunt adevărate afirmaţiile:*

1. $r \in extA$, *dacă și numai dacă există un r-suport* A_r, *al punctului* $r \in R^k$, *încât* $A \setminus \{z\} \subset A_r$;
2. $A = d_k^m - conv(extA)$, *dacă și numai dacă pentru orice element* $r \in A$ *și orice r-suport* A_r *are loc relația* $(R^k \setminus A_r) \bigcap extA \ne \varnothing$.

Teorema 3.1.5. Pentru orice submulțime $A \subset R^k$ are loc egalitatea:

$$extA = \bigcap \{B \subset A : d_k^m - convB = d_k^m - convA\}$$

Teorema 3.1.6. *Pentru orice multime* $A \subset R^k$ *are loc inegalitatea* $diamP(A) \leq 2 \cdot diamA.$, *unde* $P(A) = A \cup (\bigcup_{r_i^k, r_j^k \in A} \langle r_i^k, r_j^k \rangle_m)$.

Teorema 3.1.7. *Pentru orice submulţime* $A \subset R^k$ *sunt echivalente afirmaţiile:*

1. $diam(d_k^m - convA) = diamA$;

2. diamP(A)=diamA.

În paragrafele 3.2 şi 3.3 ale capitolului III se examinează convexitatea în cazul grafurilor, caz particular al complexului de relaţii multi-are. Sunt continuate cercetările ce ţin de studierea grafurilor *d*-convex simple, realizate de către autor în anii 80 ai secolului trecut şi care îşi găsesc aplicaţii la soluţionarea unor probleme aplicative în domeniul militar, în telecomunicaţii, economie etc. Astfel se numesc grafurile ce nu conţin mulţimi *d*-convexe *A*, pentru care $3 \leq cardA \leq n-1$, unde *n* este numărul de vârfuri din graf.

Prezintă interes grafurile *d*-convex simple ce aparţin următoarelor clase:

1. $\mathscr{A}$ - grafurile ce nu conţin cicluri de lungimea trei şi fiecare vârf al acestora este dominat de un alt vârf;

2. $\mathscr{F}$ - grafurile ce nu conţin cicluri de lungimea trei şi subgrafuri F (a se vedea figura 3.1);

3. $\mathscr{P}$ - grafurile planare;

4. $\mathscr{H}_1$ - grafurile modular ereditare [61]. Astfel se numesc grafurile în care orice ciclu izometric este de lungimea patru;

5. $\mathscr{H}_2$ - grafurile cordale. Acestea sunt grafurile bipartite, în care orice ciclu generat este de lungimea patru [62];

6. $\mathscr{H}_3$ - grafurile ereditare după distanţă. Astfel sunt numite grafurile G în care orice subgraf conex, generat de o submulţime de vârfuri $A \subset X_G$, este izometric în G [63], [64].

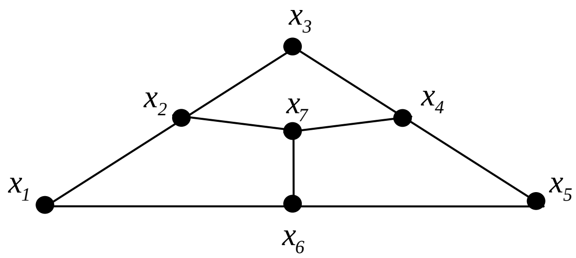

Figura 3.1. *Graful* F

Grafurile *d*-convex simple din clasele respective posedă aceeaşi structură. Asupra lor se definesc câteva operaţii care se comportă ca operaţii algebrice pe mulţimile respective, chestiuni demonstrate prin teoremele 3.2.6 - 3.2.11.

În ultimul paragraf al capitolului III se studiază convexitatea în grafurile orientate. La general vorbind, în aceste grafuri distanţă nu posedă proprietatea comutativă, adică funcţia distanţei este o *pseudo-metrică*. Se examinează grafuri orientate tare conexe, în care se consideră mulţimea $<\overrightarrow{x,y}>=\{z \in X : d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)\}$ numită *d*-segment, orientat de la *x* spre *y*. Mulțimea $A \subseteq X$ se numește *d*-convexă în graful $\vec{G}=(X,\vec{U})$*, dacă pentru oricare două vârfuri* $x, y \in A$*, luate în ordinea indicată, are loc relația* $<\overrightarrow{x,y}>\subset A$. *Graful orientat și conex forte* $\vec{G}=(X,\vec{U})$ *se numește* ***d-convex simplu*** *dacă nu conține mulțimi d-convexe* $A \subset X$ *, încât* $1< cardA < cardX$.

Teorema 3.3.1. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $\vec{G}=(X,\vec{U})$ *este un graf d-convex simplu orientat*;

2. $d-conv(\{x,y\})=X$ *, pentru oricare două vârfuri distincte* $x, y \in X$;

3. $d-conv(\{x,y\})=X$ *, pentru oricare două vârfuri adiacente* $x, y \in X$.

În continuare se construieşte o clasă specială $\mathscr{D}$ de grafuri orientate *d*-convex simple şi se demonstrează următoarea

Teorema 3.3.3. *Un graf orientat și tare conex* $\vec{G}=(X,\vec{U}), cardX \geq 3,$ *este d-convex simplu, dacă și numai dacă* $\vec{G} \in \mathscr{D}$.

La finele acestui capitol, similar cazului grafurilor neorientate, se examinează nişte operaţii algebrice, în clasa grafurilor orientate *d*-convex simple, prin teoremele 3.3.4 – 3.3.9.

Capitolul IV, Complexe de cuburi abstracte, este dedicat studierii unor proprietăţi speciale ale complexului de cuburi abstracte, folosite ulterior în capitolul V pentru soluţionarea unor probleme de ordin teoretico-aplicativ. Folosind simplexele abstracte, printr-o procedură iterativă se definește cubul abstract p -dimensional, $p \geq 0$ (a se vedea definiția 4.1.2), cu ajutorul căruia se construiește complexul de cuburi abstracte. Cercetările ce țin de studierea cubului și a complexului respectiv sunt reflectate în mai multe lucrări publicate pe parcursul ultimilor ani [45], [72], [69], [90], [79], [98]. Complexele de cuburi servesc drept instrument eficient în dezvoltarea unor compartimente ale topologiei combinatorice. Rezultate importante au fost obținute atât la nivel teoretic, legate de construirea omologiilor cubice, a caracteristicii Euler, de studierea proprietăților varietăților determinate de complexul cubic abstract [70], [85], [108], [111], precum și la nivel aplicativ, prin soluționarea unor probleme practice, printre care un rol aparte revine problemelor de amplasare [81], [99], [116], [117].

Definiţia 4.2.1. *Familia nonvidă şi finită de cuburi abstracte* $\Im^n = \{I^m, 0 \le m \le n\}$, *ce verifică proprietăţile:*

1. *pentru oricare două cuburi abstracte* $I^s, I^t \in \Im^n, 0 \le s, t \le n,$ *are loc relația* $I^s \bigcap I^t = \varnothing$ *sau* $I^s \bigcap I^t \in \Im^n$*;*
2. *orice faţetă* I^k *a cubului* m *–dimensional* $I^m \in \Im^n$, $0 \le k < m \le n$, *este element al familiei* $\Im^n$*;*
3. *în* $\Im^n$ *există cel puţin un cub* n *–dimensional* I^n,

se numeşte ***complex cubic abstract cu dimensiunea n***.

Folosind o tehnică similară celei folosite în cazul complexului de relaţii multi-are, pentru complexul de cuburi abstracte se construiesc grupurile de □-omologii

$$\square^0(\Im^n, Z), \square^1(\Im^n, Z), \ldots, \square^n(\Im^n, Z),$$

şi grupurile de $\Diamond$-omoloagii

$$\Diamond^0(\Im^n, Z), \Diamond^1(\Im^n, Z), \ldots, \Diamond^n(\Im^n, Z),$$

fiind studiate proprietăţi ale complexului $\Im^n$ prin intermediul teoremelor 4.2.5 şi 4.2.6.

Complexele de cuburi servesc drept suport pentru studierea varităţilor speciale, proprietăţile căroră se folosesc la soluţionarea problemei medianei, studiate în capitolul V. Însă, mai întâi sunt studiate varietăţile, determinate de complexul generalizat de relaţii multi-are.

Fie $\Re^{n+1} = \mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, ..., \mathcal{Q}^n)$ un G -complex de relaţii multi-are cu familiile de quasisimplexe $\mathcal{Q}^m = \{Q_1^m, Q_2^m, ..., Q_{\alpha_m}^m\}$, $0 \le m \le n$.

Definiţia 4.4.2. G -c*omplexul de relaţii multi-are* $\mathcal{K}^n$ *ce posedă proprietăţile:*

a) *orice quasisimplex cu dimensiunea* $n-1$ *este o faţetă comună exact pentru două quasisimplexe abstracte cu dimensiunea* n *din* $\mathcal{K}^n$*;*

b) *pentru oricare două quasisimplexe* n*-dimensionale distincte* Q_i^n *şi* Q_j^n *din* $\mathcal{K}^n$ *există o succesiune de quasisimplexe n-dimensionale* $Q_{i_1}^n = Q_i^n, Q_{i_2}^n, ..., Q_{i_q}^n = Q_j^n$, $k \ge 2$, *încât* $Q_{i_k}^n \bigcap Q_{i_{k+1}}^n \in \mathcal{Q}^{n-1}$, $1 \le k \le q-1$*;*

c) *pentru orice quasisimplex m-dimensional* Q^m *din complexul* $\mathcal{K}^n$ *există un quasisimplex n-dimensional* Q^n, *încât* Q^m *este o faţetă a lui* Q^n, $0 \le m \le n-1$*;*

d) *dacă* Q_i^n *şi* Q_j^n *sunt două quasisimplexe distincte din* $\mathcal{K}^n$, *cu intersecţia* $Q_i^n \bigcap Q_j^n = Q^m$, *atunci există un şir de quasisimplexe* $Q_1^n = Q_i^n, Q_2^n, ..., Q_k^n = Q_j^n$ *cu proprietatea din b), ce respectă relaţia:*

$$Q^m = Q^n_{i_1} \cap Q^n_{i_2} \cap \ldots \cap Q^n_{i_q}, \quad 0 \le m \le n-1,$$

se numeşte ***varietate abstractă degenerată*** *cu dimensiunea* n.

Varietatea abstractă determinată de G-complexul de relaţii multi-are $\mathcal{K}^n$ o vom nota prin $\mathcal{VD}^n$. Din prima condiţie a definiţiei 4.4.2 rezultă că orice quasisimplex n-dimensional din $\mathcal{K}^n$ participă doar o singură dată la construirea varietăţii $\mathcal{VD}^n$. Varietatea m-dimensională $\mathcal{VD}^m, 0 \le m \le n-1$, determinată de subcomplexul $\mathcal{K}^m \subset \mathcal{K}^n$, se numeşte subvarietate a lui $\mathcal{VD}^n$, folosind notaţia $\mathcal{VD}^m \subset \mathcal{VD}^n$.

Mulţimea tuturor faţetelor unui quasisimplex n-dimensional Q^n formează un complex de relaţii multi-are. Subcomplexul determinat de toate faţetele din Q^n cu dimensiunea $(n-1)$ îl vom numi frontieră-complex a lui Q^n şi îl vom nota prin $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$.

Teorema 4.4.1. *Complexul de relaţii* $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$ *este o varietate abstractă* $(n-1)$*-dimensională degenerată fără borduri.*

Definiţia 4.4.3. *Varietatea* $\mathcal{VD}^n$ *se numeşte orientabilă dacă conţine un* Δ*-ciclu* n*-dimensional. În caz contrar,* $\mathcal{VD}^n$ *se numeşte varietate nonorientabilă.*

Teorema 4.4.2. *Dacă* Q^n *este un quasisimplex abstract cu toate faţetele orientate pozitiv, atunci frontiera-complex a acestuia reprezintă o varietate abstractă* $(n-1)$*-dimensională degenerată şi orientabilă.*

Fie $\mathcal{VD}^n$ o varietate abstractă, orientabilă şi fără borduri, determinată de G-complexul $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, ..., \mathcal{Q}^n)$, iar $\chi(\mathcal{VD}^n)$ – caracteristica Euler a lui $\mathcal{VD}^n$ (caracteristica Euler a complexului $\mathcal{K}^n$ se numeşte caracteristică Euler şi a varietăţii respective $\mathcal{VD}^n$).

Definiţia 4.4.4. *Dacă caracteristica Euler a unei varietăţi abstracte degenerate, orientabile şi fără borduri* $\mathcal{VD}^n$ *satisface relaţia:*

$$\chi(\mathcal{VD}^n) = \begin{cases} 0, \text{ în cazul când } n \text{ este impar}, \\ 2, \text{ în cazul când } n \text{ este par}, \end{cases}$$

atunci $\mathcal{VD}^n$ *se numeşte* ***varietate sferică abstractă degenerată*** n*-dimensională, notată prin* Σ^n.

Pentru complexul de relaţii se generalizează noţiunea de contur Euler, cunoscută din teoria grafurilor. Fie $\mathcal{Q}^m$ familia tuturor quasisimplexelor m-dimensionale ale G-complexului $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, ..., \mathcal{Q}^n)$, $card\mathcal{Q}^m = \beta_m$, $1 \le m \le n$.

Definiţia 4.4.7. *Succesiunea de quasisimplexe* m*-dimensionale din complexul* $\mathcal{K}^n$ *ce posedă proprietăţile*:

a) *fiecare quasisimplex al familiei* $\mathscr{Q}^m$ *se întâlneşte în această succesiune exact o singură dată;*

b) *oricare două quasisimplexe vecine ale succesiunii reprezintă în intersecţie un element din* $\mathscr{Q}^{m-1}$*;*

c) *intersecţia primului şi ultimului element al succesiunii reprezintă un quasisimplex* $(m-1)$*-dimensional,*

se numeşte ciclu Euler m *-dimensional al varietăţii* $\mathscr{VQ}^n = \mathscr{K}^n$ *. Dacă simplexele din succesiune sunt coerente, atunci această succesiune se numeşte* ***contur Euler*** m*-dimensional.*

Ţinând cont de faptul că simplexele abstracte servesc drept „cărămizi" pentru construirea cubului abstract n-dimensional, în cele ce urmează vom defini noţiunea de varietate cubică şi vom efectua unele cercetări ce ţin de existenţa conturului Euler al acesteia. Chestiunea respectivă e importantă, în special, la soluţionarea unor probleme cu caracter aplicativ. Astfel, în lucrările [72], [120] se examinează un dispozitiv abstract, funcţionarea căruia parvine din existenţa conturului Euler a unei varietăţi cubice, ce serveşte drept generalizare a maşinii Tiuring clasice.

Fie $\mathfrak{I}^n$ un complex de cuburi abstracte definit în paragraful 4.2, iar $\mathscr{T}^m$ – familia de cuburi abstracte m-dimensionale a acestuia, $0 \le m \le n$.

Definiţia 4.4.8. *Complexul* n*-dimensional de cuburi abstracte* $\mathfrak{I}^n$ *ce verifică proprietăţile:*

a) *orice cub* $(n-1)$ *-dimensional* $I^n \in \mathscr{T}^n$ *este faţetă exact pentru două cuburi* n *-dimensionale din* $\mathfrak{I}^n$*;*

b) *pentru oricare două cuburi* n*-dimensionale* $I_i^n, I_j^n \in \mathscr{T}^n$*, în* $\mathfrak{I}^n$ *există succesiunea de cuburi* n *-dimensionale* $I_{i_1}^n = I_i^n, I_{i_2}^n, ..., I_{i_q}^n = I_j^n$ *, cu proprietatea:* $I_{i_r}^n \cap I_{i_{r+1}}^n \in \mathscr{T}^{n-1}$ *,* $0 \le r \le q-1$*;*

c) *pentru orice cub* p *-dimensional* $I^p \in \mathscr{T}^p$*, în complexul* $\mathfrak{I}^n$ *există cub* n*-dimensional* I^n*, încât* I^p *este una dintre faţetele proprii ale lui* I^n*,* $0 \le p \le n-1$*;*

d) *pentru oricare două cuburi* n *-dimensionale distincte* $I_i^n, I_j^n \in J^n$ *, cu intersecţia* $I_i^n \cap I_j^n = I^p$ *,* $0 \le p \le n-1$ *, în* J^n *există o succesiune de cuburi abstracte* n *-dimensionale* $I_{i_1}^n = I_i^n, I_{i_2}^n, ..., I_{iq}^n = I_j^n$ *ce posedă proprietatea:* $\bigcap_{s=1}^{q} I_{i_s} = I_p$ *,*

se numeşte ***varietate cubică abstractă*** n*-dimensională, notată prin* V_c^n*.*

Fie acum V_c^n o varietate cubică orientabilă, adică în V_c^n există un lanţ cubic m-dimensional $L^m \in \mathscr{L}^m$ încât $\square L^m = 0$. Vom spune că o varietate cubică V_c^n este ***totalmente coerentă*** dacă toate cuburile n-dimensionale ale acesteia au aceeaşi orientare.

Teorema 4.4.6. *Orice varietate cubică* V_c^n *este totalmente coerentă.*

Teorema 4.4.7. *Dacă* V_c^n *este o varietate cubică abstractă cu dimensiunea* n *pară, atunci aceasta admite un* □*-contur Euler cu dimensiunea* $(n-1)$.

În baza rezultatelor obţinute în legătură cu studierea varietăţilor cubice abstracte se demonstrează un rezultat important (teoreme 4.5.3) ce ţine de complexele cubice omogene, folosit în capitolul V la soluţionarea problemei medianei.

Definiția 4.5.3. *Un complex de cuburi abstract-convexe* $\Im^n$, *ce satisface condițiile:*

a) dacă I^p, $0 \le p \le n$, *este un element al lui* $\Im^n$, *atunci și orice fațetă* $I^k \subset I^p$, $0 \le k < p$, *este un element din* $\Im^n$;

b) pentru fiecare două cuburi I^{p_1} *și* I^{p_2} *din* $\Im^n$ *intersecția* $I^{p_1} \cap I^{p_2}$ *este vidă sau reprezintă un element din* $\Im^n$, $0 \le p_1, p_2 \le n$;

c) orice cub abstract I^k *din* $\Im^n$, $0 \le k \le n$, *aparține cel puțin unui cub* I^n *din* $\Im^n$;

d) oricare două subcomplexe minimale $\Im_1^n$ *și* $\Im_2^n$ *din* $\Im^n$, *care verifică condițiile a)-c) și* $\Im_1^n \cup \Im_2^n = \Im^n$, *posedă proprietatea: intersecția* $\Im_1^n \cap \Im_2^n$ *reprezintă un subcomplex* $\Im^p \subset \Im^n$, *cu dimensiunea* $p = n-1$;

e) grupul de omologii de rangul zero este izomorf cu grupul Z, $\square^0(\Im^n, Z) \cong Z$;

f) grupurile de omologii de rangul $1,2,3,\dots,n$ *sunt izomorfe* cu zero,

se numește ***complex absract omogen*** n*-dimensional și se notează prin* $\Im_A^n$.

Definiția 4.5.5. *Varietatea cubică orientabilă* $V_c^{n,p}$, *determinată de complexul de cuburi abstracte* $\Im^n = \{\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^n\}$, *se numeşte* ***sferă abstractă*** n*-dimensională, dacă satisface una din egalitățile:*

$$\chi(V_c^{n,p}) = 2, \textit{ pentru } n-par,$$

$$\chi(V_c^{n,p}) = 0, \textit{ pentru } n-impar, \tag{4.31}$$

și se notează prin $\mathfrak{S}^n = V_c^{n,p}$,

Teorema 4.5.1. *Dacă* $\Im_A^n$ *este un complex cubic* n*-dimensional abstract și omogen, atunci frontiera acestuia* $\mathbf{bd}\Im_A^n$ *reprezintă o sferă abstractă* $(n-1)$ *-dimensională* $\mathfrak{S}^{n-1}$.

Teorema 4.5.3. *Dacă* $\mathfrak{S}^{n-1}$ *este o sferă abstractă determinată de frontiera* $\mathbf{bd}\Im_A^n$ a unui complex omogen $\Im_A^n$ de cuburi abstract-convexe, *atunci aceasta dispune de cel puțin un cub (vârf)* $I^0 \in \mathcal{T}^0$, *ce aparține exact la* n *cuburi* 1*-dimensionale (muchii).*

Capitolul V, Aplicaţii ale complexelor de relaţii multi-are, se referă la descrierea unor metode de soluţionare a problemelor cu caracter teoretico-aplicativ, elaborate în baza rezultatelor obţinute la studierea complexului de relaţii multi-are. Rezultatele respective au fost prezentate în lucrările [71], [74], [77] – [79], [86] – [89], [92], [94], [100].

În primul paragraf al capitolului se arată în ce mod rezultatele ce ţin de studierea complexului de relaţii pot fi folosite pentru clasificarea varietăţilor abstracte degenerate examinate în capitolul precedent IV. Se demonstrează proprietăți ale varietăților determinate de complexul de relații multi-are.

Definiția 5.1.3. *Varietatea degenerată* $\mathscr{VD}^n$ *din care sunt eliminate* p_n *vacuumuri* n*-dimensionale,* p_{n-1} *vacuumuri* $(n-1)$*-dimensionale, ...,* p_1 *vacuumuri* 1*-dimensionale, se numește varietate degenerată cu* p_n *borduri* n*-dimensionale,* p_{n-1} *borduri* $(n-1)$*-dimensionale, ...,* p_1 *borduri* 1*-dimensionale.*

Prin teoremele 5.1.1 – 5.1.3 se examinează proprietăţi speciale ale acestor varietăţi, folosite la demonstraţia teoremei de clasificare a acestora – teorema 5.1.4.

Capitolul următor, capitolul 5.2, conţine rezultate importante ce se referă la soluţionarea problemei medianei într-un complex de cuburi abstracte. Fie $\Im_A^n$ un complex cubic abstract omogen, însă considerat de acum nonorientat. Conform teoremei 4.5.1, frontiera $\mathbf{bd}\Im_A^n$ este o sferă $(n-1)$-dimensională cubiliată $\mathscr{S}^{n-1}$. Fie $\mathbf{st}(I^0)\mathscr{S}^{n-1}$ – steaua vârfului I^0 calculată pe sfera $\mathscr{S}^{n-1}$.

Se examinează problema calculării medianei unui complex special de cuburi abstracte, considerând că vârfurile complexului $\Im_A^n$ se iau dintr-un spaţiu metric discret, reprezentat printr-o mulţime oarecare M .

Definiția 5.2.2. *Un complex abstract* n*-dimensional, omogen și neorientat* $\Im_A^n$*, care satisface condițiile:*

1) orice cub $I^k \in \mathbf{int}\Im_A^n$ *aparține cel puțin la* 2^{n-k} *cuburi* n*-dimensionale din* $\Im_A^n$*,* $0 \le k \le n$*;*

2) dacă I^0 *este un vârf din* $\mathbf{bd}\Im_A^n$*, căruia îi sunt incidente exact* n *arce ale lui* $\mathbf{bd}\Im_A^n$*, iar steaua* $\mathbf{st}(I^0)$ $\mathbf{bd}\Im_A^n$ *conține exact* n *cuburi* $(n-1)$*-dimensionale ale lui* $\mathbf{bd}\Im_A^n$*, atunci cubul* n*-dimensional* I^n*, determinat de această stea, aparține complexului* $\Im_A^n$*,*

se numește ***arbore omogen*** n***-dimensional****. Notăm acest arbore prin* A^n *.*

Considerăm funcţia $p:\mathscr{V}^0 \to R^+$ şi lungimile muchiilor din clasele de muchii paralele $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,...,\mathscr{E}_m$, definite în capitolul IV, egale, respectiv, cu numerele $d_1,d_2,...,d_m$, unde $d_i > 0$, pentru $1 \le i \le m$. Pentru oricare două cuburi 0-dimensionale $I^0_{\lambda_i}, I^0_{\lambda_j} \in \mathfrak{S}^0$ definim numărul întreg nenegetiv $d(I^0_{\lambda_i}, I^0_{\lambda_j}) = t_1 d_1 + t_2 d_2 + .. + t_m d_m$, unde $t_i = 0$ (sau $t_i = 1$) dacă lanţul ce uneşte vârfurile $I^0_{\lambda_i}, I^0_{\lambda_j} \in \mathfrak{S}^0$ trece de un număr par (sau impar) de ori prin muchiile complexului $\Im^n_A$, ce aparţin clasei $\mathscr{C}_i$, $1 \le i \le m$.

Teorema 5.2.1. *Relaţia* $d(I^0_{\lambda_i}, I^0_{\lambda_j}) = t_1 d_1 + t_2 d_2 + .. + t_m d_m$, *reprezintă metrica Hamming.*

Mediana complexului A^n coincide cu mediana grafului ce reprezintă scheletul 1-dimensional din A^n, chestiune demonstrată prin

Teorema 5.2.5. *Un vârf* x_* *al grafului* $G = (X_G; U_G) = sk(1)A^n(1)$ *este mediană în* G *dacă și numai dacă acest vârf reprezintă în arborele* $A^n(1)$ *intersecția a* n *transversale mediană* $(n-1)$*-dimensionale.*

Calcularea medianei complexului A^n se face prin aplicarea următorului algoritm:

I. Fie $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\} = \mathfrak{S}^0$.

II. Determinăm clasele de muchii paralele în arborele $A^n(1)$. Fie avem m clase de muchii paralele: $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, ..., \mathscr{C}_m$.

III. Fixăm un vârf arbitrar din X , de exemplu x_1, şi îi punem în corespondenţă cortegiul $x_1 = (0,0,...0)$, format din m zerouri.

IV. Pentru oricare alt vârf $x_i \in X$ alegem un lanţ arbitrar $L^1(x_1, x_i)$.

V. Vârfului x_i i se pune în corespondenţă cortegiul $x_i = (\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2, ..., \varepsilon_i^m)$, considerând $\varepsilon_i^j = 1$, dacă lanţul $L^1(x_1, x_i)$ trece de un număr impar de ori prin muchiile clasei $\mathscr{C}_j$, şi $\varepsilon_i^j = 0$, dacă acest număr este par, $i \in \overline{1, n}$.

Formăm matricea M , liniile căreia reprezintă cortegiile corespunzătoare vârfurilor $x_i \in X$:

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathscr{C}_1 & \mathscr{C}_2 & \dots & \mathscr{C}_m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^m \\ \varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_n^1 & \varepsilon_n^2 & \dots & \varepsilon_n^m \end{pmatrix} \end{array}.$$

VI. Calculăm un cortegiu nou $r^* = (r_1^*, r_2^*, ..., r_m^*)$, folosind elementele din M şi ponderile $p(x_i)$ ale vârfurilor din X , $1 \le i \le n$, conform regulilor:

$$r_j = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^j p(x_i) > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p(x_i), \\ 0, \text{ dacă } \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^j p(x_i) < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p(x_i), \\ 0 \text{ sau } 1 \text{ (indiferent), dacă } \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^j p(x_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p(x_i). \end{cases}$$

VII. Din teorema 5.2.4 demonstrată în teză rezultă că, cortegiul r^* aparţine matricei M. Acestui cortegiu îi corespunde un element x^*, apartenenţa căruia complexului A^n este asigurată de teorema 5.2.5. Prin urmare, x^* este din A^n şi reprezintă mediana acestui complex.

Ultimul paragraf al lucrării se referă la o aplicaţie netrivială a funcţiei Grundy, definite pe complexul de relaţii multi-are, la determinarea strategiilor de comportare a participanţilor într-un joc combinatorial.

Considerăm complexul de relații multi-are, reprezentat ca un complex de simplexe abstracte $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, ..., \mathcal{Q}^n)$ și aplicația $\Gamma : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$, definită în paragraful 5.4, ce pune în corespondenţă oricărui element din $\mathcal{K}^n$ o submulţime din vecinătatea acestuia.

Definiția 5.4.9. *Aplicația univocă $g : \mathcal{K}^n \to N_0$, definită pentru orice simplex abstract m-dimensional Q^m din $\mathcal{K}^n$ prin relația $g(Q^m) = \min\{N_o \setminus g(\Gamma(Q^m))\}$, unde $g(\Gamma(Q^m))$ reprezintă mulțimea valorilor aplicaţiei g pentru toate simplexele din $\Gamma(Q^m)$, se numeşte funcţie Grundy.*

Funcția Grundy poate fi folosită la studierea mulțimilor intern stabile într-un complex simplicial $\mathcal{K}^n$. De exemplu, ușor deducem că este adevărată afirmația: *dacă F este o mulțime de simplexe intern stabilă în $\mathcal{K}^n$*, atunci, pentru oricare două simplexe abstracte $Q', Q'' \in F$, *are loc egalitatea* $g(Q') = g(Q'')$. Există o dependență directă între numărul de mulțimi intern stabile din $\mathcal{K}^n$ și funcția Grundy, care poate fi exprimată prin

Teorema 5.4.7. *Numărul minim de mulțimi intern stabile într-un complex de relații multi-are $\mathcal{K}^n$ este egal cu $\gamma \in N$ dacă şi numai dacă are loc egalitatea:*

$$\max_{Q \in \mathcal{K}^n} g(Q) = \gamma - 1.$$

Definim pe $\mathcal{K}^n$ un joc cu doi participanţi A şi B, care poate fi privit ca o generalizare a jocului chinezesc NIM, cunoscut prin impactul său asupra unor rezultate fundamentale în matematică. În special, acesta a jucat un rol esenţial în demonstraţia teoremei Sprague – Grundy, considerată drept una dintre teoremele clasice ale teoriei jocurilor şi folosită la determinarea strategiei de câştig în jocurile combinatoriale. Diverse generalizări şi interpretări ale jocului NIM se întâlnesc în lucrările mai multor matematicieni, cum ar fi Claud Berge [2], [3] şi Charles Bouton [40]:

Descrierea jocului:

1) *Fie dat un complex de simplexe abstracte* $\mathcal{K}^n$. *În mod arbitrar, se alege un simplex* m*-dimensional* $Q^m \in \mathcal{Q}^m$, $0 \le m \le n$.

2) *Jucătorul* A *alege un simplex din* $\Gamma(Q^m)$. *Fie acesta este simplexul* Q^{m_1}, $0 \le m_1 \le n$. *(Dacă* $\Gamma(Q^m) = \varnothing$, *atunci se consideră că jucătorul* A *a pierdut şi jocul a luat sfârşit).*

3) *Jucătorul* B *alege un simplex* $Q^{m_2} \in \Gamma(Q^{m_1})$. *De asemenea, se consideră că dacă* $\Gamma(Q^{m_1}) = \varnothing$, *atunci jocul a luat sfârşit şi jucătorul* B *este în pierdere.*

4) *Jucătorii continuă alegerea simplexelor noi până când lucrul acesta este posibil. Evident, deoarece* $\mathcal{K}^n$ *este un complex finit, jocul va avea un sfârşit.*

În jocul descris, s-ar cere de răspuns la întrebarea: *în ce condiţii jucătorul A va ieşi învingător?*

Soluţia jocului se caută cu ajutorul unor traectorii construite în $\mathcal{K}^n$ şi este reglementată de teoremelec 5.4.8 – 5.4.10.

Definiția 5.4.10. *Succesiunea de simplexe* $Q^{m_0}, Q^{m_1}, ..., Q^{m_r}$ *a complexului* $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, ..., \mathcal{Q}^n)$ *ce posedă proprietățile:*

a) $Q^{m_{i+1}} \in \Gamma\left(Q^{m_i}\right)$, $0 \le i \le r-1$;

b) Q^{m_i} *și* $Q^{m_{i+1}}$, $0 \le \mathrm{i} \le \mathrm{r}-1$, *sunt simplexe* (t,q)*-coerente, determinate de condiţiile adiţionale relațiilor* (5.29) *și* (5.30)*;*

c) dacă simplexele $Q^{m_{i+1}}$ *și* $Q^{m_{i-j}}$, $0 \le j \le i-1$, *sunt intersectate de către simplexul* $Q^{m_{i+1,i-j}}$, *atunci* $Q^{m_{i+1}}$ *și* $Q^{m_{i-j}}$ *nu aparțin lui* $Q^{m_{i+1,i-j}}$,

se numește ***traiectorie*** *a complexului* $\mathcal{K}^n$ *și se notează prin* $T(o,r)$.

Vom spune că traiectoria $T(0,r)$ este o ***traiectorie maximală***, determinată de relația Γ, dacă se îndeplinesc următoarele condiții:

a) $\Gamma(Q^{m_r}) = \varnothing$;

b) nu există simplex Q în $\mathcal{K}^n$, încât $Q^{m_0} \in \Gamma(Q)$ și șirul $Q, Q^{m_0}, Q^{m_1}, ..., Q^{m_t}$ ar satisface condițiile definiției 5.4.10.

Traiectoria $T(0,r)$ se va numi ***traiectorie-contur***, determinată de aplicația Γ, dacă $Q^{m_0} = Q^{m_r}$. Traiectoria contur o vom nota prin $T_C(0,r)$.

Teorema 5.4.8. *Dacă* g *este funcția Grundy a unui complex* $\mathcal{K}^n$, *determinată de aplicația* $\Gamma : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$, *definită prin relația* (5.31), *atunci mulțimea tuturor simplexelor* Q *din* $\mathcal{K}^n$, *pentru care este adevărată egalitatea* $g(Q) = 0$, *reprezintă nucleul complexului* $\mathcal{K}^n$.

Teorema 5.4.9. *Dacă în complexul* $\mathcal{K}^n$ *există o traiectorie-contur* $T(0,r)$, *determinată de aplicația* Γ *și pentru orice simplex* Q^m *al acestui complex există traiectorie* $T(0,r)$ *ce leagă* Q *cu careva simplex din* $T_c(0,r)$, *atunci în jocul combinatorial definit pe acest complex, jucătorii își pot determina comportamentul astfel încât niciunul dintre ei nu va pierde.*

Teorema 5.4.10. *Într-un joc combinatorial, determinat de aplicația (5.31), jucătorul* A *nu va pierde dacă va reuși să construiască funcția Grundy pe acest complex și să aleagă simplexul* Q *pentru care* $g(Q) = 0$.

TOTALIZĂRI

Prin lucrarea de față se propune o direcție de cercetare, determinată de studierea unei structuri discrete noi, numite complex de relații multi-are care generalizează astfel de structuri discrete clasice cum ar fi grafurile, hipergrafurile, matroizii etc. Introducerea complexului de relații multi-are a fost determinată de necesitatea soluționării unor probleme cu caracter teoretico-aplicativ, pentru care modele tradiționale sub formă de grafuri sau hipergrafuri și metodele de soluționare nu permiteau obținerea unor rezultate acceptabile. Odată cu primele rezultate ce țin de fundamentarea teoretică a direcției propuse de cercetare, au fost create premizele elaborării unor metode care, mai tărziu, au dat rezultate bune la soluționarea problemelor, examinate sub diferite aspecte o perioadă îndelungată de timp de către mai mulți matematicieni. O parte dintre aceste probleme sunt descrise în ultimul capitol al lucrării, unde se propune soluționarea acestora prin aplicarea elaborărilor teoretice expuse în capitolele II-IV.

Definirea relaţiilor multi-are pe produsul cartezian al unei mulţimi de elemente *X* permite generalizarea unor rezultate ce țin de examinarea complexului obișnuit de relații multi-are (fără bucle), obținute de autor în lucrările [122], [104], [102], şi este mai firească din punct de vedere teoretico-aplicativ. Noţiunea de complex generalizat de relaţii multi-are asupra unei mulţimi arbitrare de elemente (a se vedea definiția 2.1.1) a fost pentru prima dată prezentată în lucrarea [83]. Ulterior au fost studiate proprietățile acestei structuri, au fost construite grupurile de omologii peste grupul numerelor întregi, au fost găsite aplicații netriviale ale acestor rezultate.. Prima lucrare care reprezintă un studiu integru în domeniu, ce poate fi considerată și drept o lucrare de sinteză, a fost publicată în anul 2010 (a se vedea lucrarea [68]).

Precum s-a menționat mai sus, complexul propus prin definiția 2.1.1, generalizează mai multe noţiuni clasice, printre care şi noţiunea de graf orientat şi finit, definit cu ajutorul relaţiilor binare [3], însă lipsit de bucle, chestiune care, precum demonstrează aplicaţiile, nicidecum nu poate fi neglijată [2]. Complexul definit în lucrarea [41] este o structură discretă și finită care necesită examinări suplimentare, necesare pentru soluţionarea unor probleme atât teoretice, cât şi practice. Respectiva structură matematică posedă un şir de proprietăţi ce ţin de obiectul de studiu al geometriei combinatorice discrete [42]. Din aceste considerente e firesc, pe de o parte, de studiat impactul topologiei relaţiilor multi-are asupra acelor obiecte de cercetare, unde situaţia menţionată poate fi interpretată, bunăoară, cu ajutorul următoarelor familii de obiecte: a) sistemul Q de quasigrupuri cu n operaţii algebrice; b) sistemul Q de n grupuri cu n elemente independente şi cu o singură operaţie algebrică [43], c) sistemul de mulţimi nuanţate [44], etc. Mai exact, ar fi curios de studiat ce ar prezenta o varietate abstractă, multidimensională, orientabilă şi fără borduri [45] determinată de obiectele menţionate. Pe de altă parte, prin intermediul relaţiilor multi-are ar putea fi modelate şi studiate multiple procese dintr-un şir de domenii aplicative. Bunăoară ar prezenta un interes deosebit de a studia structurile propuse în prezenta lucrare pentru interpretarea diferitor formule, procese din chimie (menționăm că orice formulă din chimie poate fi interpretată ca un complex generalizat de relaţii multi-are [46]). Precum au arătat cercetările ulterioare, rezultatele cărora, în mare măsură, sunt expuse în capitolele II-V, complexul de relații multi-are în forma lui abstractă conduce la aplicări nontriviale în procesul de transmitere şi receptare a informaţiei [102], în formarea unei baze de date finite oricât de mare, în criptografie şi la indicarea unei clase de grafuri, elementele căreia pot fi scufundate în scheletul 1-dimensional al cubului multidimensional din R_1^n (spaţiul vectorial n-dimensional cu norma $\|x\| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$), pe când aceasta din urmă chestiune permite a prezenta un algoritm de calculare a medianei (punctul lui Toricelli) grafurilor marcate şi ponderate, fără a utiliza metrica spaţiului respectiv [11], [12].

O chestiune importantă, care nu poate fi ocolită, vorbind despre examinarea structurilor discrete în calitate de modele matematice pentru soluţionarea problemelor practice, ţine de studierea convexităţii. Aceasta se datorează faptului că o serie de probleme de optimizare nu sunt altceva decât probleme de optimizare convexă pe modele concrete. Cu toate că convexitatea este considerată drept una din noţiunile fundamentale ale matematicii, despre care se cunosc proprietăţi şi exemple multiple de aplicare, aceasta reapare periodic sub forma unor variaţii sau generalizări, ce merită a fi studiate datorită importanţei teoretico-aplicative a acestora.

Definiţia generală a noţiunii de convexitate, precum şi de învelitoare convexă, a fost dată pentru prima dată în lucrarea [47] de către F. Levi. Primele rezultate obţinute au pus bazele unei noi direcţii de cercetare în matematică, dezvoltate în continuare de către J.W.Elliss [241], P.C.Hammer [49] – [51], D.C.Kay & E.W.Womble [52], G.Sierksma [53], [54]. În prezent sunt cunoscute diverse modele de convexitate, apărute în legătură cu necesitatea soluţionării unor probleme cu caracter teoretico-aplicativ, care se regăsesc în lucrările a mai multor matematicieni cunoscuţi: P.Soltan [12], [55], I.Serghienco [56], [57], M.Covaliov [58], [59], V.Soltan [60] etc. Printre modelele reuşite ale convexităţii, cu aplicaţii nontriviale în practică, se evidenţiază *d*-convexitatea. Generalizând noţiunea de lanţ, cunoscută din teoria grafurilor, pentru complexul de relaţiii multi-are $\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$, spaţiile metrice (R^k, d_k^m), $1 \le k < m \le n+1$. Convexitatea şi învelitoarea convexă în fiecare dintre aceste spaţii metrice, definite în baza lanţurilor *m*-dimensionale ale complexului $\Re^{n+1}$, se incadrează în teoria generală, iniţiată prin cercetările lui F. Levi [47], iar proprietăţile specifice complexului de relaţii multi-are permit soluţionarea eficientă a unor probleme dificile. Anume corelaţia dintre proprietăţile unei astfel de convexităţi şi specificul grafurilor, ca caz particular al complexului $\Re^{n+1}$, a contribuit la obţinerea rezultatelor importante de caracterizare a grafurilor, în care învelitoarea convexă a două vârfuri neadiacente reprezintă toată mulţimea de vârfuri din graf. Astfel de grafuri sunt cunoscute ca grafuri *d*-convex simple (sau quasisimple)

Un alt aspect legat de studierea complexelor de relaţii constă în elaborarea unei metodologii noi de studiu al cubului abstract, reprezentat prin simplexe abstracte. Rezultatele obţinute prin construirea omologiilor complexului de cuburi oferă posibilităţi speciale de examinare a varietăţilor abstracte, determinate de complexele cubice menţionate. Proprietăţile complexelor de cuburi abstracte şi a varietăţilor cubice respective oferă posibilităţi de rezolvare eficientă a problemei medianei. În ultimul capitol al lucrării este descris un algoritm de calcul al medianei unui complex cubic fără a recurge la folosirea metricii.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Studiul realizat în prezenta lucrare conduce la următoarele concluzii și recomandări.

Concluzii generale asupra rezultatelor obținute. Problemele examinate în teza de doctor habilitat "*Complexul generalizat de relații multi-are și aspectele aplicative ale acestuia*" fac parte de direcția de cercetare din matematică ce ține de elaborarea modelelor și metodelor corespunzătoare pentru soluționarea problemelor teoretico-aplicative din diverse domenii ale activității umane: economie, tehnică sociologie, fizică, chimie, informatică etc. Rezultatele teoretice obținute în legătură cu studierea complexului de relații, precum și aplicații acestuia la studierea unor probleme de ordin aplicativ, conduc la următoarele concluzii:

1. A fost creată o direcţie nouă de cercetare ce constă în fundamentarea teoriei complexelor de relaţii multi-are, prin care se generalizează mai multe structuri discrete clasice cunoscute ca grafuri, hipergrafuri, matroizi, complexe de simplexe, ceea ce a contribuit la elaborarea modelelor şi metodelor eficiente în vederea aplicării acestora la soluţionarea problemelor de optimizare discretă.
2. A fost elaborată o nouă structură matematică discretă determinată de o familie de relaţii multi-are pentru modelarea proceselor cu acţiune discretă, care a condus la obţinerea metodelor eficiente pentru utilizarea ulterioară a acestora la soluţionarea problemei de calculare a medianei ponderate, fără a folosi metrica spaţiului, a problemei de comportament a jucătorilor într-un joc combinatorial etc.
3. Au fost studiate proprietăţi importante ale complexului de relaţii multi-are cu ajutorul grupurilor de omologii şi coomologii ale acestuia. Rezultatele respective au demonstrat eficienţa folosirii metodelor de studiu ale topologiei algebrice pentru examinarea structurilor discrete. Această situaţie a permis efectuarea cercetărilor la un nivel calitativ nou pentru astfel de structuri. Grupurile de omologii construite reprezintă un instrument eficient, folosit la determinarea structurii complexului de cuburi, pentru care problema medianei se rezolvă în mod eficient fără a apela la metrica spațiului respectiv;
4. Folosirea rangurilor grupurilor de omologii ale complexului de relaţii multi-are a permis deducerea unei formule eficiente de calcul a numărului ciclomatic, chestiune importantă pentru stabilirea proprietăţilor combinatoriale ale unui astfel de complex, necesare la soluţionarea problemelor applicative. Calcularea numerelor ciclomatice se face printr-o formulă recurentă, folosind rangurile grupurilor de omologii ale complexului;
5. Pentru complexul de relaţii multi-are a fost demonstrat analogul teoremei Poincare-Veblen-Alexander (teorema 2.8.1), cunoscută în legătură cu examinarea contururilor unui graf orientat. Rezultatul respectiv reprezintă un instrument eficient care a fost folosit pentru studierea ciclurilor *m*-dimensionale şi construirea matricei ciclomatice ale complexului de relaţii multi-are;
6. Prin extinderea noțiunii de lanț *m*-dimensional și introducerea noțiunii de (*k*,*m*)-convexitate, în cadrul teoriei complexelor de relații multi-are a fost conturată o direcție nouă de cercetare – *convexitatea în complexul de relaţii multi-are*, legată de studierea proprietăților mulțimilor (*k*,*m*)-convexe cu aplicarea ulterioară acestora la soluționarea problemelor cu caracter teoretico-aplicativ;

7. Rezultatele obținute în legătură cu studierea grafurilor *d*-convex simple servesc drept imbold pentru extinderea cercetărilor, în scopul caracterizării complexelor cu o familie prescrisă de mulțimi (*k*,*m*)-convexe.
8. Prin complexul de cuburi abstracte a fost studiat un caz special al complexului de relații multi-are, important pentru soluționarea problemelor practice, ceea ce generează o direcție aparte de cercetare prin aplicarea metodelor topologiei algebrice;
9. A fost dedusă formula Euler-Poincare pentru un complex de cuburi abstracte. Formula respectivă a servit drept instrument eficient pentru examinarea proprietăților varietăților, determinate de un astfel de complex, și clasificarea ulterioară a acestora.
10. Folosind complexul generalizat de relații multi-are în calitate de structură matematică ce determină o varietate degenerată abstractă orientabilă, fără borduri și conexă forte, au fost determinate condițiile în care aceasta reprezintă o varietate sferică. Acest rezultat a fost folosit ulterior pentru obținerea clasificării varietăților abstracte degenerate, reprezentate printr-un șir de varietăți cu $p \geq 0$ găuri, obținute în mod constructiv.
11. Folosind proprietățile varietăților determinate de un complex de cuburi abstracte, au fost obținute proprietăți importante cu referire la frontiera complexului omogen de cuburi *n*-dimensionale care, la rândul său, este o varietate (*n*-1)-dimensională. În baza proprietăților respective au fost determinate condițiile, respectarea cărora asigură calcularea medianei unui complex cubic și această mediană aparține complexului respectiv;
12. Rezultatele teoretice obținute la studierea complexelor de cuburi abstracte și a varietăților determinate de aceste complexe, au fost folosite la elaborarea unui algoritm eficient de calculare a medianei care nu depinde de metrica spațiului respectiv. Algoritmul respectiv a fost generalizat pentru cazul unui sistem arbitrar de ponderi ale vîrfurilor complexului de cuburi abstracte și nu depinde de lungimile muchiilor ce formează o clasă de muchii paralele din complex;

Recomandări. Ţinem să menţionăm că rezultatele prezentate în teză servesc drept imbold pentru efectuarea cercetărilor ulterioare, legate de studierea obiectului definit ca complex de relaţii multi-are. În viziunea autorului prezinţă interes, pentru examinările ulterioare, unele aspecte legate de dezvoltarea teoretico-aplicativă a direcţiei propuse de cercetare:

1. de examinat, în ce mod se modifică teoria elaborată în teză în cazul unui complex infinit de relaţii multi-are;
2. de studiat complexul de cuburi abstracte prin introducerea unei operaţii speciale de triangulare generalizată a cuburilor. Ce s-ar întâmpla în acest caz cu grupurile de omologii ale complexului?;

3. de definit o convexitate generală pe complexul de relaţii multi-are şi de stabilit legătura acesteia cu convexităţile definite în fiecare dintre spaţiile metrice (R^k, d_k^m);

4. de verificat, în ce măsură se respectă rezultatele obţinute la studierea complexului de cuburi abstracte în cazul unor alte tipuri de complexe, de exemplu, în cazul unui complex de poliedre abstracte.

BIBLIOGRAFIE

1. Euler L. *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita.* Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 4:140–160, 1758. (*Prezentată la Academia din Sankt Petersburg la 6 aprilie 1752, Opera Omnia 1(26): 94–108*). În engleză: Proof of Some Notable Properties with wich Solids Enclosed by Plane Faces are Endowed.)
2. Berge C. *Theorie des graphes et ses applications*. DUNOD, Paris, 1958.
3. Berge C. *Graphs and hypergraphs*. New-York: Elsevier, 1973.
4. Berge G. *Hypergraphs: combinatorics of finite sets*. North-Holland, Amsterdam, 1989. 267p.
5. Harary Frank. *Graph Theory*. Addison-Wesley Pub. Co., 1969. 274p.
6. Cataranciuc S., Holban M.The Pico's formula generalization. Computer Science Journal of Moldova, vol.**15**, no.1(43), 2007, p.54–73.
7. Tomescu I. *Sur le probléme du colorage des graphes généralisés*. C. R. Acad. Sci. (Paris) 267: 6 (1968), p. 250-252.
8. Teodor Toadere. *Grafe: teorie, algoritmi și aplicații* Cluj-Napoca: Editura Albastră, 2009. 197p.
9. Christofides Nicos. *GRAPH THEORY: An Algorithmic Approach*. Academic Press, Incorporated, 1975 - Algorithms. 400 p.
10. Герман Л.Ф., Зыков А.А., Замбицкий Д.К., Присакару К.Ф., Лазовану Д.Д. *Графы, гиперграфы и дискретные оптимизационные задачи.* Кишинев: Штиинца, 1982. 199с.
11. Soltan P. *Prelegeri selectate din teoria grafurilor*. Chișinău: USM, 2001.
12. Солтан П.С., Замбицкий Д.К., Присакару К.Ф. Экстремальные задачи на графах и алгоритмах и алгоритмы их решения. Кишинев, Штиинца, 1973. 87 с.
13. Ray-Chaudhury D.K. *An algorithm for a maximum cover of an abstract complex*. Canad. J. Math., 15:1, 1963, p. 11-24.
14. Erdős P., Hajnal A. *On cromatic number og graphs and set-systems*. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 17:1-2, 1966, p. 61-99.
15. Erdős P., Gallai T. *On the minimal number of vertices representing the edges of a graph*. Publ. Math. Instit. Hungar. Acad. Sci., 6(1961), p. 181-203.
16. Kariv O., Hakimi S. *An algorithmic approach to network Location Problems. The p-medians.* SIAM Journal on Applied Mathematics, 37-3 (1979), p. 513-538.
17. Tutte W.T. *A homotopy theorem for matroids. I*. Transactions of the American Mathematical Society 88: 144–160, 1958.
18. Tutte W.T. *A homotopy theorem for matroids. II*. Transactions of the American Mathematical Society 88: 161–174, 1958.
19. Crapo Henry H. *The Tutte polynomial*. Aequationes Mathematicae vol.**3**, nr.3, 1969, p.211-229.
20. Brylawski Thomas H. *A decomposition for combinatorial geometries*. Transactions of the American Mathematical Society (Amer. Mathematical Society), vol.171,1972, p.235-282.

21. Seymour Paul D. *Decomposition of regular matroids*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 28 (3), 1980, p.305-359.
22. Greenberg, Marvin J. and John R. Harper. *Algebraic Topology: A First Course*, Mathematics Lecture Note Series, 58, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. 311 p.
23. Maunder, C. R. F. *Algebraic Topology*. London: Van Nostrand Reinhold, 1970. 375 p.
24. Whitney Hassler. *On the abstract properties of linear dependence*. American Journal of Mathematics (The Johns Hopkins University Press) 57 (3): 509-533, 1935, p. 55-79.
25. Van der Waerden B. L. *Moderne Algebra*, 1937.
26. Oxley James J. *Matroid theory*. Oxford graduate texts in mathematics. Oxford University Press, 2006.
27. Wilson R.J. *An introduction to matroid theory*. The American Mathematical Monthly, vol.80, no.5 (May, 1973), p.500-525.
28. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. *Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы*. СПб.:Издательство "Лань", 2010. 368с.
29. Hatcher Allen. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 553 p.
30. Tammo tom Dieck T. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS). Zurich, 2008. 567 p.
31. Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*. Москва, Наука, 1968. 431с.
32. Lang S. *Algebra*. Revised third edition, New York: Springer, 2002.
33. Kőnig Dénes. *Gráfok és mátrixok*. Matematikai és Fizikai Lapok, 1931, vol. **38**, p.116-119.
34. Alexandroff P., Hopf H. *Topology*. Vol. **I**. Berlin: Springer, 1935.
35. Hilton P.I., Wylie S. *Homology Theory: An introduction to Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1960.
36. Понтрягин Л. С. *Основы комбинаторной топологии*. Москва, 1986. 120с.
37. Rotman J.J. *An introduction to algebraic topology*. New-York: Springer-Verlag, 1998.
38. Болтянский В.Г. *Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей*. Тр. МИАН СССР, **47**, Москва: Изд-во АН СССР, 1955. 199с.
39. Cooper L. *Location-allocation problems.* Operations Research, 11(1963), p. 331-344.
40. Bouton C.L. *Nim, a game with a complete mathematical theory*. Annals of Mathematics, 23(1/4), 1901/02, p.35-39.
41. Soltan P. *On the Homologies of Multy-ary relations and Oriented Hipergraphs*. Studii în metode de analiză numerică și optimizare, vol. **2**, nr. 1(3). Chișinău, 2000, p. 60-81.
42. Kenmoshi Yukiko, Atsushi Ismiya, Ichikawa Akira. *Discrete combinatorial geometry*. Pattern Recognition, vol. **30**, 1997, no. 10, p. 1719-1728.
43. *Математическая Энциклопедия*. т.3, 1982.
44. Moisil Grigore. *Lecții despre logica raționamentului nuanțat*. București: Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1975. 160 p.
45. Bujac M. *Clasificarea varietăților abstracte orientabile multidimensionale fără borduri.* Analele Științifice ale USM. Seria „Științe fizico-matematice”. Chișinau, 2003, p.247-250.
46. *Chemical applications of topology and graph theory*, edited by R.B.King. Elsevier, 1983.
47. Levi F. *On Helly's theorem and the axioms of convexity*. J. Indian Math. Soc., 1951, 15, Part A, p. 65-76.
48. Ellis J.W. *A general set-separation theorem*. Duke Math. J., 1952, 19, p.417-421.
49. Hammer P.C. *General topology, symmetry and convexity*. Trans. Wisconsin Acad. Sci., Arts and Letters, 1956, 44, p. 221-225.
50. Hammer P. *Semispaces and the topology of convexity*. In: Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 1963, 7, p. 305-316.
51. Hammer P. *Isotonic spaces in convexity*. In: Proc. Colloq. Convexity, Copenhagen 1965., Copenhagen 1967, p. 132-141.

52. Kay D. Womble E. *Axiomatic convexity theory and relationships between the Caratheodory, Helly and Radon numbers*. Pacif. J. Math., 1971, 38, nr. 2, p. 471-485.
53. Sierksma G. *Axiomatic convexity theory and the convexproduct-structures*. Doct. Diss., Univ. of Groningen, 1976, 113p.
54. Sierksma G. *Relationships between Caratheodory, Helly and Exchange numbers of convexity spaces*. Nieuw arch. wisk., 1977, 25, nr. 3, p. 115-132.
55. Болтянский В., Солтан П. *Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств*. Кишинев: Штиинца, 279с.
56. Сергиенко И.В. *Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации*. Киев: Наукова Думка, 1988, 472с.
57. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Roshchin M.A. *Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации*. Киев: Наукова Думка, 1980, 275с.
58. Ковалев М.М. *Матроиды в дискретной оптимизации*. 2003, 224с.
59. Ковалев М.М. *Градиентные методы максимизации выпуклых функций на дискретных структурах*. Кибернетика, 1985. N 6, с.77-85.
60. Солтан В.П. *Введение в аксиоматическую теорию выпуклости*. 1984. Кишинев: штиинца. 222с.
61. Bandelt H. *Hereditary-Modular Graphs*. Combinatorica, 1988, vol.**8**, n-2, p.149-157.
62. Golumbic M., Gross P. *Perfect Elimination and Bipartite Chordal Graphs*. J. Graph Theory, 1978, vol.**2**, p.155-163.
63. Howorka E. *A Characterization of Distance-Hereditary Graphs*. Quart. J. Math., 1977, vol.**28**, n-2, p.417-420.
64. Bandelt H., Mulder H. *Distance-Hereditary Graphs,* J. Combinat. Theory, 1986, vol.**41**, n-2, p.182-208.

LISTA PUBLICAȚIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI
(apărute după susținerea tezei de doctor)

a) Monografii:

65. Cataranciuc S. *Topologia algebrică a relațiilor multi-are*. Chişinău: CEP USM, 2015. 228p.
66. Cataranciuc S., Sur N. *Grafuri d-convex simple şi quasisimple.* Chişinău: CEP USM, 2009. 201p.
67. Bulat M., Cataranciuc S., Zgureanu A. *Mulțimi de relații multi-are și criptarea informației*. Chişinău: CEP USM, 2013. 200p.

b) Articole de sinteză

68. **Cataranciuc S., Soltan P. *Abstract complexes, their homologies and applications*. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Seria Matematica. Chișinău, 2010, nr. 2(63), p. 31-58.**
69. **Cataranciuc S., Soltan P. *Complex of abstract cubes and median problem*. Computer Science Journal of Moldova, vol.19, no.1(55), 2011, p. 38-63.**
70. **Cataranciuc S., Hâncu B., Soltan P. *Realizări în studierea structurilor matematice moderne.* Analele ştiinţifice ale Universităţii de Stat din Moldova. Seria „Ştiinţe reale”. Lucrări de sinteză. Chişinău, 2006, p. 214-228.**

c) Articole în reviste recenzate de circulație internațională

71. **Cataranciuc S. *Median calculation for heterogenous complex of abstract cubes*. Computer Science Journal of Moldova. vol.21, 2013, no.1(61), p. 120-141.**

72. **Cataranciuc S., Bujac M., Soltan P.** ***On the Division in Cubes of Abstract Manifolds*****. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Seria Matematica, nr. 2(51). Chişinău, 2006, p. 29-34.**
73. **Cataranciuc S., Sur N.** ***Involving d-convex simple and quasi-simple planar graphs in*** $\boldsymbol{R^3}$**. Computer Science Journal of Moldova, vol.13, no. 2(38), 2005, p. 151-167.**
74. **Cataranciuc S., Bujac-Leisz M., Soltan P.** ***The Euler tour of n-dimensional manifold with positive genus*****. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, 2008, nr. 2(57), p.110-113.**
75. **Cataranciuc S., Sur N.** ***About directed d-convex simple graphs.*** **Computer Science Journal of Moldova, vol.16, no.3(48), 2008, p. 323-346.**
76. **Cataranciuc S., Vicol N.** ***The general complex of multi-ary relations.*** **Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 2. Cluj-Napoca, 2004, p. 107-118.**
77. **Cataranciuc S., Scripnic M., Soltan P.** ***A metric space with independent median*****. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 3. Cluj-Napoca, 2005, p. 3-12.**
78. **Cataranciuc S.** ***An algorithm for determination of the median independent on the metric of the space.*** **Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 4. Cluj-Napoca, 2006, p. 13-22.**
79. **Cataranciuc S., Bujac M., Soltan P.** ***The Problem of Existence of the n-Dimensional Directed Euler Tour of Cubic Manifold with Pozitiv Genus.*** **Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 5. Cluj-Napoca, 2007, p. 55-58.**
80. **Cataranciuc S., Soltan P.** ***The generalized complex of multi-ary relations and its homology.*** **Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 6, Cluj-Napoca, 2008, p. 17-44.**
81. **Cataranciuc S., Soltan P.** ***The median of the n-dimensioanal abstract tree.*** **Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 7. Cluj-Napoca, 2009, p. 33-46.**
82. **Cataranciuc S., Zgureanu A.** ***Encryption Systems Based on Multidimensional Matrixes.*** **Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol.8. Cluj-Napoca, România, 2010, p.3-14.**

d) Articole în reviste naționale recenzate

83. **Cataranciuc S.** ***G-complex de relaţii multi-are*****. Analele ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe fizico-matematice". Chişinău, 2006, p. 119-122.**
84. **Cataranciuc S., Zgureanu A.** ***Matricele de relaţii multi-are şi numerele prime în criptarea informaţiei.*** **Studia Universitatis. Seria:Ştiinţe exacte şi economice, 2012, nr.7(57), p.12-16.**
85. **Cataranciuc S.** ***Transversale într-un complex de cuburi abstracte.*** **Studia Universitatis. Seria: Ştiinţe exacte şi economice. 2011, nr.2(42), p. 34-43.**
86. **Cataranciuc S.** ***Varietăți abstracte multidimensionale degenerate.*** **Studia Universitatis. Seria: Ştiinţe exacte şi economice. 2013, nr.2(62), p. 10-22.**
87. **Cataranciuc S., Soltan P.** ***A simple games of a complex of multi-ary relations.*** **Analele Facultăţii Matematică şi Informatică, vol.3, nr.1(1). Chişinău, 2001, p.59-76.**
88. **Cataranciuc S.** ***Modelul matematic al problemei de determinare a mulţimii stabile interior maxime.*** **Analele Facultăţii de Matematică şi Informatică, Universitatea de Stat din Moldova, vol. 5. Chişinău, 2003, p.69-75.**
89. **Cataranciuc S.** ***The special metrics of the abstract cubic complex.*** **Studia Universitatis. Seria:Ştiinţe exacte şi economice, 2008, nr.3(13), p.39-43.**

e) Articole în culegeri naționale

90. Cataranciuc S., Prisacaru Ch. *Cercetări în domeniul topologiei combinatorice, mulţimilor convexe, teoriei grafurilor, hipergrafurilor şi aplicaţiilor acestora.* Elemente de istorie a matematicii şi matematica în Republica Moldova. Chişinău, 2006, p. 327-345.
91. Cataranciuc S. *Estimări ale numărului de muchii și mulțimi d-convexe într-un graf d-convex quasi-simplu planar*. Culegere de lucrări științifice în memoria prof. univ. V.A.Zolotarevschi "Ecuații Integrale și Modelarea Problemelor Aplicative" (EIMPA - 2005). Chișinău, 2006, vol. I, p. 37-38.

f) Articole în culegeri ale conferințelor internaționale (Proceedings)

92. **Cataranciuc S. *The cubical abstract tree and its median.* Mathematical modelling of invironmental and life sciences problems. București: Ed. Acad. Române, 2010, p.157-166.**
93. **Cataranciuc S. *The stables set of a G-complex of multi-ary relations and its applications.* KEPT-2007. Knowledge engineering: Principles and techniques, vol. I. Cluj-Napoca: Babeş-Bolyai University, 2007, p. 269-273.**
94. **Cataranciuc S. *The complex of parallelepipeds and the 3-dimensional tree*. The 33-rd Annual Congres of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA), Proceedings, Sibiu, Romania, July 02-07, 2009, vol. II, p. 293-296.**
95. Cataranciuc S., Soltan P. *Hipergrafuri și omologiile lor*. International Conference „Trends in the Development of the Information and Communication Technology in Education and Management". March 20-21, 2003. Chișinău, p.294-300.
96. **Cataranciuc S., Scripnic M., Soltan P. *About the median does not depend on the space metric*. The 30-th Annual Congres of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA), Proceedings. Chişinău, July 5-10, 2005, p. 58-61.**
97. Cataranciuc S., Soltan P., Gherman L., Cepoi V. *Convexitatea generalizată şi aplicaţiile ei.* Lucrările conferinței pregătitoare pentru Congresul matematicienilor români de pretutindeni. Bucureşti, 23-25 noiembrie, 1990, p.145-154.
98. Cataranciuc S. *Metrica complexului cubic abstract.* Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale. Materialele conferinţei internaţionale. Chişinău, 19-21 martie 2008, p. 205-210.
99. **Cataranciuc S. *Задача Вебера для n-мерного кубического комплекса со взвешенными вершинами.* Proceedings of the International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies. Minsk, Oct.'31 – Nov.'3, 2011, vol.2, p. 288 - 291.**
100. Cataranciuc S. *Coloring of the Simplicial Complex and the Grundy Function.* The 14-th International Conference of Scientific Papers „Scientific Research and Education in the Air Force". PROCEEDINGS. Braşov, România, May 24-26, 2012, p. 515-519.
101. Cataranciuc S. *Convexitatea simplă a grafurilor orientate.* Conferinţa Internaţională „Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale". Ediţia III. Chişinău, 19-23 martie, 2012, p. 9-19.
102. Cataranciuc S. *Arbori de relații multi-are.* Conferința Internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale". Ediţia IV. Chişinău, 25-28 martie 2014. Proceedings, vol. I, p. 56-65.

g) Articole în culegeri ale conferințelor naționale (Proceedings)

103. Cataranciuc S. *Euler characteristic of abstract cubes complex.* Proceedings of the Third Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chişinău, August 19-23, 2014, p.330-333.

h) Teze ale comunicărilor științifice la conferințe internaționale

104. Cataranciuc S. *The abstract complex of multidimensional relations.* Sevent Workshop on Mathematical Modeling of Environmental and Life Sciences Problems. Constantza, 22-25 october 2008, p.11-12.
105. Cataranciuc S., Soltan P. *The generalized complex of multi-ary relations and its application aspects.* International Scientific Conference «Дискретная математика, алгебра и их приложения». 19-22 oct., 2009, Minsk, Belorusia, p.162-163.
106. Cataranciuc S. *Location problem for a complex of abstract n-polytops.* The 21st Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2013, 19-22 september, 2013. Bucharest, Romania, Book of abstracts, p.79.
107. Cataranciuc S. *Median's calculation of the complex of abstract cubes.* The 18th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM - 2010, Oct. 14-17, 2010. Iași, p.22-23.
108. Cataranciuc S. *Homogeneous complex of n-dimensional abstract cubes and Grundy function.* Mathematics & Information Technologies: Research and Education, International Conference MITRE-2011. Chişinău, 2011, august 22-25, p. 28-29.
109. Cataranciuc S. *Optimal strategy in a simple game on a simplicial complex.* The 13th International Conference on Mathematics and its Applications - ICMA 2012, Abstracts, November 1-3, 2012, „Politehnica" University of Timişoara, p. 17.
110. Cataranciuc S. *The median calculation for a EBP-graph.* Int. conf. „Discrete mathematics, graph theory and their applications (DIMA-2013)". Minsk, Belorusia, november 11-14, 2013, p.44-45.
111. Cataranciuc S. *Convexity in a complex of abstract cubes.* Mathematics & Information Technologies: Research and Education, International Conference MITRE-2013. Chişinău, 2013, august 28-22, p. 26-27.
112. Cataranciuc S. *Location problems into complexes of cubes with weighted vertexes.* The 20th conference on applied and industrial mathematics (dedicated to academician M. Ciobanu), Chișinău, august 22-25, 2012, p. 61-62.
113. Cataranciuc S. *Homogeneous complex of n-dimensional abstract cubes and Grundy function.* Mathematics & Information Technologies: Research and Education, International Conference MITRE-2011. Chişinău, 2011, august 22-25, p. 28-29
114. Cataranciuc S., Istrati V. *m-convex and ap-convex sets in indirected graphs*. Mathematics & Information Technologies: Research and Education, International Conference MITRE-2013. Chişinău, 2013, august 28-22, p. 27-28.
115. Cataranciuc S. *Distance function of n-dimensional abstract cubes complex.* The 22nd conference on applied and industrial mathematics. CAIM - 2014, September 18-21, 2014. Bacău, p.50.

i)Teze ale comunicărilor științifice la conferințe naționale

116. Cataranciuc S. *A median of the abstract homogeneous cubical complexe.* Mathematics and Informatic Technologies: Research and Education. Chişinău, 2009, p.38-39.
117. Cataranciuc S. *n-Dimensional Homogeneous Tree on Abstract A-normal Cubes.* Actual problems of mathematics and informatics. Scientific Conference dedicated to the 80-th anniversary of the foundation of the Tiraspol State University, 24-25 sept., 2010, p.68-69.
118. Cataranciuc S. *About connectivity of general complexes of multi-ary relations.* The XIVth Conference on applied and industrial mathematics. (Satelite Conference of ICM 2006). Chișinău, August 17-19, 2006, p. 94-95.
119. Cataranciuc S., Vicol N. *Convexitatea în grafuri neorientate*. Bilanțul activității științifice USM, 2003, p.104-106.
120. Bujac M., Cataranciuc S., Soltan P. *On the proprieties of Multidimensional Torus*. The XIV Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60th anniversary

of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University (CAIM – 2006). Chişinău, 2006, p. 66-70.

121. Cataranciuc S., Soltan P. *About the automorfism of cellular complex and it fixed element.* Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chişinău, August 17-19, 2004, p.87-90.

122. Cataranciuc S., Vicol N. *Ciclomatic numbers of a class of complex of multi-ary relation*. Sec. Conf. of Math-l Soc. of Rep. of Moldova. Chişinău, August 17-19, 2004, p.316-319.

ADNOTARE

la teza "***Complexul generalizat de relații multi-are și aspectele aplicative ale acestuia***", înaintată de către Sergiu Cataranciuc pentru obținerea titlului de doctor habilitat în științe matematice la specialitatea 112.03 – Cibernetică Matematică și Cercetări Operaționale

Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Moldova, Chişinău, în anul 2015.

Structura tezei. Teza este scrisă în limba română şi cuprinde: introducere cinci capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie din 309 titluri şi 12 figuri. Rezultatele obţinute sunt publicate în 58 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte cheie. Complex de relaţii multi-are, optimizare discretă, grupuri de omologii, topologie algebrică, cub abstract, quasisimplex, caracteristica Euler-Poincare, spaţiu metric, convexitate, varietăţi abstracte, varietăţi cubice, problema medianei, funcţia Grundy.

Domeniul de studiu. Optimizare discretă.

Scopul şi obiectivele lucrării. Elaborarea unei structuri matematice discrete şi a metodelor eficiente pentru modelarea şi soluţionarea problemelor de localizare, cunoscute ca problema medianei, problema centrului, precum şi a diverselor variaţii ale acestora. Obiective: elaborarea unui model matematic discret nou, bazat pe noţiunea de relaţie multi-ară, ca submulţime a produsului cartezian a unei mulţimi de elemente arbitrare; examinarea topologiei relaţiilor multi-are, prin intermediul structurii discrete, numite complex de relaţii multi-are; examinarea complexului de cuburi abstracte, ca caz special al complexului de relaţii multi-are, şi a varietăţilor abstracte respective; elaborarea algoritmului eficient pentru soluţionarea problemei medianei pe complexul de cuburi abstracte; generalizarea funcţiei Grundy şi soluţionarea unor jocuri combinatoriale pe complexe de relaţii multi-are.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică se exprimă prin faptul că: a fost propusă o direcţie nouă de cercetare, determinată de necesitatea studierii proprietăţilor complexului de relaţii multi-are şi aplicării acestuia la soluţionarea problemelor de optimizare discretă; a fost dedusă formula recurentă de calculare a numărului ciclomatic pentru un complex de relaţii multi-are cu ajutorul rangurilor grupurilor de omologii; a fost generalizată noţiunea de *d*-convexitate pentru spaţiile metrice, determinate de relaţiile *k*-are, $1 \leq k \leq n$, ale complexului $\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$; a fost elaborat algoritmului de calcul a medianei într-un complex de cuburi abstracte.

Rezultate principial noi pentru ştiinţă şi practică. A fost elaborată o structură matematică discretă nouă - complexul de relaţii muti-are. Au fost folosite metode de studiu, caracteristice topologiei algebrice, prin construirea grupurilor de omologii. A fost elaborată metoda de calcul a medianei fără utilizarea metricii spaţiului.

Direcţia nouă de cercetare propusă *constă în fundamentarea* teoriei complexelor de relaţii multi-are care generalizează mai multe structuri discrete clasice, *ceea ce a contribuit la* elaborarea modelelor şi metodelor eficiente *în vederea aplicării acestora la* soluţionarea problemelor de optimizare discretă.

Importanţa teoretică a lucrării este determinată de fundamentarea unei direcţii noi de cercetare, generate de studierea topologiei algebrice a relaţiilor multi-are. Pentru soluţionarea problemelor de optimizare discretă a fost propus un model matematic nou, numit complex de relaţii multi-are care generalizează mai multe structuri matematice discrete clasice.

Valoarea aplicativă a lucrării. A fost elaborată metoda de calcul a medianei fără a utiliza metrica spaţiului pentru un complex de cuburi abstracte. Cu ajutorul funcţiei Grundy s-a propus metoda de soluţionare a jocurilor combinatoriale.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele obţinute pot servi drept suport pentru iniţierea unor cercetări de doctorat, pentru elaborarea unor cursuri opţionale universitare în cadrul studiilor de licenţă şi de masterat, precum şi pentru soluţionarea problemelor practice din sectorul economic, legate de amplasarea unor centre de deservire sau producere;

АННОТАЦИЯ

диссертационной работы “***Обобщенный комплекс многомерных отношений и его прикладные аспекты***”, представленной автором Катаранчук Сергей на соискание ученой степени доктора хабилитат математических наук по специальности 112.03 – Математическая Кибернетика и Исследование Операций

Диссертация выполнена в Молдавском Государственном Университете, Кишинев, 2015.

Структура работы: Диссертация написана на румынском языке и содержит введение, пять глав, заключение с рекомендациями, список цитированной литературы из 309 названий и 12 фигур. Полученные результаты опубликованы в 58 научных работах.

Ключевые слова: Комплекс многомерных отношений, дискретная оптимизация, группы гомологий, абстрактный куб, квазисимплекс, характеристика Эйлера-Пуанкаре, метрическое пространство, выпуклость, абстрактные многообразия, медиана, функция Гранди.

Область исследования: Дискретная оптимизация.

Цель исследования: Разработка дискретной математической структуры и эффективных методов для моделирования и решения задач о размещении медианы, центра, а также различных их вариаций; построение новой математической модели, основанной на многомерных отношениях, определенных на декартовом произведении множества элементов; изучение топологии многомерных отношенияй с помощью дискретной структуры, называемой комплексом многомерных отношений; изучение комплекса абстрактных кубов, как частного случая комплекса многомерных отношений и соответствующего ему многобразия; разработка эффективного алгоритма для решения задачи о медиане на комплексе абстрактных кубов; обобщение функции Гранди с последующим ее применением для решения комбинаторных игр на комплексе многомерных отношений;

Научная новизна и оригинальность выражается в том что: было предложено новое направление для исследования, обусловленное необходимостью изучения свойств комплекса многомерных отношений и его использования для решения задач дискретной оптимизации; была выведена рекурентная формула для вычисления цикломатического числа для комплекса многомерных отношений, используя ранги групп гомологий; было обобщено понятие d-выпуклости для метрических пространств, заданных k-мерными отношениями комплекса $\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$, $1 \le k \le n$; был разработан алгоритм для вычисления медианы комплекса абстрактных кубов.

Принципиально новые результаты для науки и практики: Определена и изучена новая математическая структура - комплекс многомерных отношений. Были использованы методы и структуры алгебраической топологии с привлечением групп гомологий. Разработан метод нахождения медианы, без использования метрики пространства.

Новое предлагаемое направление для исследования: Развитие теории комплекса многомерных отношений, обобщающий ряд классических дискретных структур, на основе которой разработаны новые модели и методы с последующим применением для решения задач дискретной оптимизации.

Теоретическая ценность работы определена новым направлением для исследования, обусловленным изучением алгебраической топологией многомерных отношений.Для решения задач дискретной оптимизации, разработана математическая структура, обобщающая классические дискретные структуры.

Практическая ценность работы: Разработан метод вычисления медианы комплекса абстрактных кубов, без использования метрики пространства. Используя функцию Гради, предложен метод решения комбинаторных игр.

Внедрение научных результатов: Полученные результаты могут лечь в основу выбора тем для обучения а докторантуре. Также, могут быть использованы в учебном процессе на факультете и для решения задач народного хозяйства.

ANNOTATION

of the thesis "***The generalized complex of multi-ary relations and its applicative aspects***", prezented by Cataranciuc Sergiu for obtaining the Doctor Habilitat degree in Mathematics, specialty 112.03 – Mathematical Cybernetics and Operations Research

The thesis has been elaborated in Chişinău, Moldova State University, in 2015.

Thesis structure: The thesis is written in Romanian and contains an introduction, five chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography of 309 titles and 12 figures. The results are published in 58 scientific papers.

Keywords: Complex of multi-ary relations, discrete optimization, homology groups, abstract cube, quasi simplex, Euler-Poincare characteristic, metric space, convexity, abstract manifolds, a median, Grundy function.

Field of study of the thesis: Discrete optimization.

The aim of research: Development of the discrete mathematical structures and effective methods for modeling and solving the problems of placing the median, the center, as well as their different variations; elaboration and development of the new mathematical model based on multi-ary relations defined on the Cartesian product of a set of elements; the study of the topology of multi-ary relations with the help of discrete structures named a complex of multi-ary relations; the studying the complex of abstract cubes, as a particular case of the complex of multi-ary relations and the corresponding manifold; the development of an efficient algorithm for solving the median problem on a complex of abstract cubes; the generalization of Grundy function followed by its application to combinatorial games on a complex of multi-ary relations;

The scientific novelty and originality is reflected in the following: it was proposed a new direction for research conditioned by the necessity of study the properties of complex of multi-ary relations and its application for solving discrete optimization problems; it was derived recursively formula for calculating cyclomatic number for the complex of multi-ary relations using the ranks of the homology groups; it was generalized the concept of *d*-convexity for metric spaces defined by *k*-ary relations, $1 \leq k \leq n$, of the complex $\Re^{n+1} = (R^1, R^2, ..., R^{n+1})$; it was developed an algorithm for calculating the median of the complex of abstract cubes.

Fundamentally new results for science and practice: It was identified and examined a new mathematical structure - the complex of multi-ary relations. The methods and structures of algebraic topology involving the homology groups have been used. The method for determining the median without the use of the space metrics has been elaborated.

New direction proposed for research: The development of the theory of complex of multi-ary relations, that generalizes a number of classical discrete structures, based on which are developed new models and methods for their continued use to solve the discrete optimization problems.

The theoretical significance of the work is determined by the foundation of a new direction for research, generated by the study of algebraic topology of multi-ary relations. To solve discrete optimization problems, the new mathematical structure that generalizes the classical known discrete structures have been proposed.

The applicative value of the paper: The method of calculating the median of the complex of abstract cubes without the use of the space metrics has been elaborated. Using the generalized Grandy function, the method for solving combinatorial games has been proposed.

The implementation of scientific results: The results might provide a basis for selecting the themes for doctoral studies. Also they may be employed in the educational process at the faculty of Mathematics and Computer Science as well as for solving some real economic problems.

CATARANCIUC SERGIU

COMPLEXUL GENERALIZAT DE RELAȚII MULTI-ARE ȘI ASPECTELE APLICATIVE ALE ACESTUIA

112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ ȘI CERCETĂRI OPERAȚIONALE

Autoreferatul tezei de doctor habilitat în științe matematice

Aprobat spre tipar: 01.06.2015	Formatul hârtiei $60x84^{1}/_{16}$
Hârtie ofset. Tipar ofset	Tirajul 70 ex.
Coli de tipar: 2,75	Comanda nr. 290

Centrul Editorial-Polighrafic al USM

str. Alexe Mateevici, nr. 60, Chișinău, MD 2009