

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

Facultatea de Matematică și Informatică

Cu titlu de manuscris

C.Z.U.: 519.1+515.142.21

CATARANCIUC SERGIU

**COMPLEXUL GENERALIZAT DE RELAȚII MULTI-ARE ȘI
ASPECTELE APLICATIVE ALE ACESTUIA**

**112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ
ȘI CERCETĂRI OPERAȚIONALE**

Teză de doctor habilitat în științe matematice

Consultant științific:

Soltan Petru,
academician, doctor habilitat în
științe matematice, profesor universitar

Autorul:

CHIȘINĂU, 2015

© Cataranciuc Sergiu, 2015

C U P R I N S

ADNOTĂRI	5
LISTA ABREVIERILOR ȘI NOTAȚIILOR	8
INTRODUCERE	10
1. STRUCTURI MATEMATICE DISCRETE ȘI ROLUL ACESTORA ÎN SOLUȚIONAREA PROBLEMELOR TEORETICO-APLICATIVE.....	22
1.1. Evoluția structurilor discrete.....	22
1.2. Transversale	42
1.3. Metode de studiu ale topologiei algebrice.....	47
1.4. Concluzii la capitolul 1	50
2. RELAȚII MULTI-ARE ȘI GRUPURI DE OMOLOGII ABSTRACTE	52
2.1. Complexul de relații multi-are.....	53
2.2. Arbori.....	59
2.3. Reprezentarea complexului de relații multi-are prin quasisimplexe abstracte	74
2.4. Orientarea quasisimplexelor și matricele de incidență	77
2.5. Lanțuri și cicluri m -dimensionale.....	82
2.6. Omologiile G -complexului de relații multi-are	85
2.7. Numărul ciclotomic al complexului de relații multi-are	92
2.8. Matricea ciclotomică.....	97
2.9. Concluzii la capitolul 2	103
3. CONVEXITATEA ÎN COMPLEXUL DE RELAȚII MULTI-ARE	105
3.1. Noțiunile de convexitate și învelitoare convexă.....	105
3.2. Convexitatea în grafurile neorientate	121
3.3. Convexitatea în grafurile orientate	141
3.4. Concluzii la capitolul 3	156
4. COMPLEXE DE CUBURI ABSTRACTE.....	158
4.1. Cubul abstract n -dimensional.....	158
4.2. Complexe de cuburi abstracte	166
4.3. Caracteristica Euler.....	175
4.4. Varietăți abstracte	184

4.5. Complexe omogene și transversale n -dimensionale.....	193
4.6. Concluzii la capitolul 4	207
5. APLICAȚII ALE COMPLEXELOR DE RELAȚII MULTI-ARE	209
5.1. Clasificarea varietăților abstracte	209
5.2. Mediana complexului de cuburi abstracte	222
5.3. Algoritmul de calculare a mediane pentru un arbore cubic n -dimensional	235
5.4. Funcția Grundy și jocuri combinatoriale într-un complex de relații multi-are	240
5.5. Concluzii la capitolul 5	259
CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI	262
BIBLIOGRAFIE	265
DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII.....	283
CURRICULUM VITAE	284

ADNOTARE

la teza “*Complexul generalizat de relații multi-are și aspectele aplicative ale acestuia*”, înaintată de către Sergiu Cataranciuc pentru obținerea titlului de doctor habilitat în științe matematice la specialitatea 112.03 – Cibernetică Matematică și Cercetări Operaționale

Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, în anul 2015.

Structura tezei. Teza este scrisă în limba română și cuprinde: introducere cinci capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie din 309 titluri și 12 figuri. Rezultatele obținute sunt publicate în 58 lucrări științifice.

Cuvinte cheie. Complex de relații multi-are, optimizare discretă, grupuri de omologii, topologie algebrică, cub abstract, quasisimplex, caracteristica Euler-Poincare, spațiu metric, convexitate, varietăți abstracte, varietăți cubice, problema medianei, funcția Grundy.

Domeniul de studiu. Optimizare discretă.

Scopul și obiectivele lucrării. Elaborarea unei structuri matematice discrete și a metodelor eficiente pentru modelarea și soluționarea problemelor de localizare, cunoscute ca problema medianei, problema centrului, precum și a diverselor variații ale acestora. Obiective: elaborarea unui model matematic discret nou, bazat pe noțiunea de relație multi-ară, ca submulțime a produsului cartezian a unei mulțimi de elemente arbitrare; examinarea topologiei relațiilor multi-are, prin intermediul structurii discrete, numite complex de relații multi-are; examinarea complexului de cuburi abstracte, ca caz special al complexului de relații multi-are, și a varietăților abstracte respective; elaborarea algoritmului eficient pentru soluționarea problemei medianei pe complexul de cuburi abstracte; generalizarea funcției Grundy și soluționarea unor jocuri combinatoriale pe complexe de relații multi-are.

Noutatea și originalitatea științifică se exprimă prin faptul că: a fost propusă o direcție nouă de cercetare, determinată de necesitatea studierii proprietăților complexului de relații multi-are și aplicării acestuia la soluționarea problemelor de optimizare discretă; a fost dedusă formula recurentă de calculare a numărului ciclotomic pentru un complex de relații multi-are cu ajutorul rangurilor grupurilor de omologii; a fost generalizată noțiunea de d -convexitate pentru spațiile metrice, determinate de relațiile k -are, $1 \leq k \leq n$, ale complexului $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$; a fost elaborat algoritmului de calcul a medianei într-un complex de cuburi abstracte.

Rezultate principial noi pentru știință și practică. A fost elaborată o structură matematică discretă nouă - complexul de relații muti-are. Au fost folosite metode de studiu, caracteristice topologiei algebrice, prin construirea grupurilor de omologii. A fost elaborată metoda de calcul a medianei fără utilizarea metricii spațiului.

Direcția nouă de cercetare propusă constă în fundamentarea teoriei complexelor de relații multi-are care generalizează mai multe structuri discrete clasice, *ceea ce a contribuit la elaborarea modelelor și metodelor eficiente în vederea aplicării acestora la soluționarea problemelor de optimizare discretă.*

Importanța teoretică a lucrării este determinată de fundamentarea unei direcții noi de cercetare, generate de studierea topologiei algebrice a relațiilor multi-are. Pentru soluționarea problemelor de optimizare discretă a fost propus un model matematic nou, numit complex de relații multi-are care generalizează mai multe structuri matematice discrete clasice.

Valoarea aplicativă a lucrării. A fost elaborată metoda de calcul a medianei fără a utiliza metrica spațiului pentru un complex de cuburi abstracte. Cu ajutorul funcției Grundy s-a propus metoda de soluționare a jocurilor combinatoriale.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele obținute pot servi drept suport pentru inițierea unor cercetări de doctorat, pentru elaborarea unor cursuri opționale universitare în cadrul studiilor de licență și de masterat, precum și pentru soluționarea problemelor practice din sectorul economic, legate de amplasarea unor centre de deservire sau producere;

АННОТАЦИЯ

диссертационной работы “*Обобщенный комплекс многомерных отношений и его прикладные аспекты*”, представленной автором Катаранчук Сергей на соискание ученой степени доктора habilitation математических наук по специальности 112.03 – Математическая Кибернетика и Исследование Операций

Диссертация выполнена в Молдавском Государственном Университете, Кишинев, 2015.

Структура работы: Диссертация написана на румынском языке и содержит введение, пять глав, заключение с рекомендациями, список цитированной литературы из 309 названий и 12 фигур. Полученные результаты опубликованы в 58 научных работах.

Ключевые слова: Комплекс многомерных отношений, дискретная оптимизация, группы гомологий, абстрактный куб, квазисимплекс, характеристика Эйлера-Пуанкаре, метрическое пространство, выпуклость, абстрактные многообразия, медиана, функция Гранди.

Область исследования: Дискретная оптимизация.

Цель исследования: Разработка дискретной математической структуры и эффективных методов для моделирования и решения задач о размещении медианы, центра, а также различных их вариаций; построение новой математической модели, основанной на многомерных отношениях, определенных на декартовом произведении множества элементов; изучение топологии многомерных отношений с помощью дискретной структуры, называемой комплексом многомерных отношений; изучение комплекса абстрактных кубов, как частного случая комплекса многомерных отношений и соответствующего ему многообразия; разработка эффективного алгоритма для решения задачи о медиане на комплексе абстрактных кубов; обобщение функции Гранди с последующим ее применением для решения комбинаторных игр на комплексе многомерных отношений;

Научная новизна и оригинальность выражается в том что: было предложено новое направление для исследования, обусловленное необходимостью изучения свойств комплекса многомерных отношений и его использования для решения задач дискретной оптимизации; была выведена рекуррентная формула для вычисления цикломатического числа для комплекса многомерных отношений, используя ранги групп гомологий; было обобщено понятие d -выпуклости для метрических пространств, заданных k -мерными отношениями комплекса $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$, $1 \leq k \leq n$; был разработан алгоритм для вычисления медианы комплекса абстрактных кубов.

Принципиально новые результаты для науки и практики: Определена и изучена новая математическая структура - комплекс многомерных отношений. Были использованы методы и структуры алгебраической топологии с привлечением групп гомологий. Разработан метод нахождения медианы, без использования метрики пространства.

Новое предлагаемое направление для исследования: Развитие теории комплекса многомерных отношений, обобщающий ряд классических дискретных структур, на основе которой разработаны новые модели и методы с последующим применением для решения задач дискретной оптимизации.

Теоретическая ценность работы определена новым направлением для исследования, обусловленным изучением алгебраической топологией многомерных отношений. Для решения задач дискретной оптимизации, разработана математическая структура, обобщающая классические дискретные структуры.

Практическая ценность работы: Разработан метод вычисления медианы комплекса абстрактных кубов, без использования метрики пространства. Используя функцию Гранди, предложен метод решения комбинаторных игр.

Внедрение научных результатов: Полученные результаты могут лечь в основу выбора тем для обучения а докторантуре. Также, могут быть использованы в учебном процессе на факультете и для решения задач народного хозяйства.

ANNOTATION

of the thesis “*The generalized complex of multi-ary relations and its applicative aspects*”, presented by Cataranciuc Sergiu for obtaining the Doctor Habilitat degree in Mathematics, specialty 112.03 – Mathematical Cybernetics and Operations Research

The thesis has been elaborated in Chişinău, Moldova State University, in 2015.

Thesis structure: The thesis is written in Romanian and contains an introduction, five chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography of 309 titles and 12 figures. The results are published in 58 scientific papers.

Keywords: Complex of multi-ary relations, discrete optimization, homology groups, abstract cube, quasi simplex, Euler-Poincare characteristic, metric space, convexity, abstract manifolds, a median, Grundy function.

Field of study of the thesis: Discrete optimization.

The aim of research: Development of the discrete mathematical structures and effective methods for modeling and solving the problems of placing the median, the center, as well as their different variations; elaboration and development of the new mathematical model based on multi-ary relations defined on the Cartesian product of a set of elements; the study of the topology of multi-ary relations with the help of discrete structures named a complex of multi-ary relations; the studying the complex of abstract cubes, as a particular case of the complex of multi-ary relations and the corresponding manifold; the development of an efficient algorithm for solving the median problem on a complex of abstract cubes; the generalization of Grundy function followed by its application to combinatorial games on a complex of multi-ary relations;

The scientific novelty and originality is reflected in the following: it was proposed a new direction for research conditioned by the necessity of study the properties of complex of multi-ary relations and its application for solving discrete optimization problems; it was derived recursively formula for calculating cyclomatic number for the complex of multi-ary relations using the ranks of the homology groups; it was generalized the concept of d -convexity for metric spaces defined by k -ary relations, $1 \leq k \leq n$, of the complex $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$; it was developed an algorithm for calculating the median of the complex of abstract cubes.

Fundamentally new results for science and practice: It was identified and examined a new mathematical structure - the complex of multi-ary relations. The methods and structures of algebraic topology involving the homology groups have been used. The method for determining the median without the use of the space metrics has been elaborated.

New direction proposed for research: The development of the theory of complex of multi-ary relations, that generalizes a number of classical discrete structures, based on which are developed new models and methods for their continued use to solve the discrete optimization problems.

The theoretical significance of the work is determined by the foundation of a new direction for research, generated by the study of algebraic topology of multi-ary relations. To solve discrete optimization problems, the new mathematical structure that generalizes the classical known discrete structures have been proposed.

The applicative value of the paper: The method of calculating the median of the complex of abstract cubes without the use of the space metrics has been elaborated. Using the generalized Grundy function, the method for solving combinatorial games has been proposed.

The implementation of scientific results: The results might provide a basis for selecting the themes for doctoral studies. Also they may be employed in the educational process at the faculty of Mathematics and Computer Science as well as for solving some real economic problems.

LISTA ABREVIERILOR ȘI NOTAȚIILOR

$\Gamma : A \rightarrow B$ – aplicație multivocă a elementelor mulțimii A în mulțimea B ;

$G = (X; \Gamma)$ – graf neorientat, determinat de mulțimea de vârfuri X și aplicația multivocă

$$\Gamma : X \rightarrow X;$$

$\nu(G)$ – numărul cicromatic al grafului $G = (X; \Gamma)$;

$\rho(G)$ – numărul cocicromatic al grafului $G = (X; \Gamma)$;

$\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ – hipergraf cu mulțimile de vârfuri X și muchii $\mathcal{E}$;

$\mathcal{H}^* = (X^*, \mathcal{E}^*)$ – hipergraf dual al hipergrafului $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$;

$c(\mathcal{H})$ – numărul de componente conexe ale hipergrafului $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$;

$\nu(\mathcal{H})$ – numărul cicromatic al hipergrafului $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$;

$\tau(\mathcal{F})$ – cardinalul transversalei minime a familiei de mulțimi $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_p, \dots\}$;

$\mathfrak{R}^{n+1} = \{R^1, R^2, \dots, R^{n+1}\}$ – complex de relații multi-are;

$Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ – quasisimplex abstract, determinat de cortegiul ordonat de elemente

$$(x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m});$$

$\mathcal{Q}^m = \{Q_1^m, Q_2^m, \dots, Q_{\beta_m}^m\}$ – familie de quasisimplexe abstracte m -dimensionale;

$\overset{\circ}{Q}_i^m$ – vacuum al quasisimplexului $Q_i^m \in \mathcal{Q}^m$;

$\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ – complex generalizat de quasisimplexe abstracte (G -complex de relații multi-are);

$\mathcal{Z}^m(\Delta)$ – grup al Δ -ciclurilor m -dimensionale ale unui complex de relații multi-are;

$\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$ – grup al Δ -ciclurilor m -dimensionale ale unui complex de relații multi-are,

Δ -omoloage cu 0;

$\mathcal{Z}^m(\nabla)$ – grup al ∇ -ciclurilor m -dimensionale ale unui complex de relații multi-are;

$\mathcal{Z}_0^m(\nabla)$ – grup al ∇ -ciclurilor m -dimensionale ale unui complex de relații multi-are,

∇ -omoloage cu 0;

$\mathfrak{Z}^n = \{\mathfrak{Q}^0, \mathfrak{Q}^1, \dots, \mathfrak{Q}^n\}$ – complex n -dimensional de cuburi abstracte (complex cubic);

$\mathfrak{Z}_A^n$ – complex omogen n -dimensional de cuburi abstracte;

$\mathfrak{Q}^m = \{I_1^m, I_2^m, \dots, I_{\beta_m}^m\}$ – familia de cuburi abstracte cu dimensiunea m , a complexului $\mathfrak{Z}^n$,

$$0 \leq m \leq n, \beta_m = \text{card} \mathfrak{Q}^m;$$

V^n – varietate abstractă n -dimensională;

V_t^n – varietate abstractă n -dimensională cu t borduri;

ΔQ^m – Δ -frontiera quasisimplexului $Q^m \in \mathfrak{Q}^m$;

z^m – Δ -ciclu m -dimensional;

$\mathfrak{X}^m(\square)$ – grup al $\square$ -ciclurilor m -dimensionale ale unui complex cubic abstract;

$\mathfrak{X}_0^m(\square)$ – grup al $\square$ -ciclurilor m -dimensionale ale unui complex cubic abstract $\mathfrak{I}^n$,
 $\square$ -omoloage cu 0;

$\mathfrak{X}^m(\diamond)$ – grup al cociclurilor ($\diamond$ -ciclurilor) m -dimensionale ale unui complex cubic abstract;

$\mathfrak{X}_0^m(\diamond)$ – grup al cociclurilor ($\diamond$ -ciclurilor) m -dimensionale ale unui complex cubic abstract,
 $\diamond$ -omoloage cu 0;

$V_c^{n,p}$ – varietate cubică n -dimensională, determinată de un complex de cuburi abstracte

$\mathfrak{I}^n = \{\mathfrak{V}^0, \mathfrak{V}^1, \dots, \mathfrak{V}^n\}$ de genul p ;

$\mathbf{sk}(k)V_c^{n,p}$ – scheletul cu dimensiunea k al varietății cubice $V_c^{n,p}$;

V_Δ^n – varietate determinată de un complex de simplexe abstracte $\mathcal{K}^n = \{S^0, S^1, \dots, S^n\}$;

$\mathfrak{S}^n$ – sferă abstractă n -dimensională;

$\diamond^m(\mathfrak{I}^m, Z)$ – grup al coomologiilor cu dimensiunea m peste grupul numerelor întregi Z în
complexul de cuburi abstracte $\mathfrak{I}^n = \{\mathfrak{V}^0, \mathfrak{V}^1, \dots, \mathfrak{V}^n\}$, $0 \leq m \leq n$;

$\chi(W) = C_0 - C_1 + C_2 - \dots + (-1)^p C_p$ – caracteristica Euler-Poincare a unui complex celular W ,
unde C_i reprezintă numărul de celule din W cu dimensiunea i , $0 \leq i \leq p$;

$\mathcal{E}$ – clasă de muchii paralele într-un complex de cuburi abstracte $\mathfrak{I}^n = \{\mathfrak{V}^0, \mathfrak{V}^1, \dots, \mathfrak{V}^n\}$;

$\mathcal{V}(T_i^n)$ – vacuum al transversalei T_i^n într-un complex de cuburi abstracte
 $\mathfrak{I}^n = \{\mathfrak{V}^0, \mathfrak{V}^1, \dots, \mathfrak{V}^n\}$;

$\mathfrak{I}(I^n)$ – complex cubic n -dimensional, determinat de familia de fațete a cubului I^n ;

$\sum^{n+1}(x, \varepsilon)$ – sfera-corp în spațiul euclidian E^{n+1} cu centrul în punctul $x \in E^{n+1}$ și raza $\varepsilon > 0$;

$\mathcal{D}^n$ – varietate abstractă degenerată cu dimensiunea n ;

INTRODUCERE

Actualitatea și importanța temei investigate este determinată de rolul modelelor și metodelor matematice folosite la examinarea diferitor procese de ordin social-economic, și nu numai. Încercările de a soluționa diverse probleme cu caracter teoretico-aplicativ sunt însoțite, deseori, de procedura de căutare a răspunsului la două întrebări importante:

1. Care dintre structurile matematice cunoscute poate fi folosită în calitate de model pentru descrierea adecvată a procesului studiat ?
2. Care dintre metodele de soluționare a problemelor, specifice modelului matematic folosit, poate fi utilizată în cazul problemei concrete examinate ?

Este necesar a menționa că uneori e destul de dificil a găsi răspuns atât la prima cât și la cea de-a doua întrebare, chestiune legată atât de complexitatea problemei examinate cât și de posibilitățile reduse pe care le oferă unele modele matematice la capitolul elaborării metodelor eficiente de soluționare. Din aceste considerente, se recurge la unele variații ale modelelor cunoscute sau la folosirea unor metode care oferă o soluție aproximativă, dar acceptabilă din punct de vedere al scopului urmărit.

În situațiile când nivelul existent de dezvoltare a structurilor matematice nu permite atingerea scopurilor menționate mai sus, se caută idei noi, care pot conduce la fondarea unor direcții de cercetare, cu dezvoltarea ulterioară a metodelor de rezolvare adecvate așteptărilor cercetătorului. În fond, după această schemă a apărut și s-a dezvoltat teoria grafurilor, mai apoi – teoria hipergrafurilor, matroizii etc., chestiuni examinate în primul capitol al lucrării, care este un capitol de sinteză al situației în domeniul dezvoltării la nivel teoretic și aplicativ a structurilor discrete.

Prima problemă, apărută prin anii 70 ai secolului trecut, care nu a putut fi soluționată eficient prin metodele disponibile, este legată de căutarea medianei într-un complex de cuburi n -dimensionale. Aceasta, precum și alte probleme din categoria problemelor de optimizare discretă, a condus la căutarea unor structuri noi, corespunzătoare năzuințelor și scopurilor cercetătorilor. În rezultat, a fost definită și studiată structura matematică, numită complex de relații multi-are, cu elaborările teoretice corespunzătoare, care sunt expuse în capitolele II-V a prezentei lucrări.

Scopul și obiectivele cercetării.

Prin inițierea cercetărilor în cadrul tezei de doctor habilitat “Complexul generalizat de relații multi-are și aspectele aplicative ale acestuia” s-a urmărit scopul elaborării unei structuri matematice discrete și a metodelor eficiente pentru modelarea și soluționarea problemelor de

localizare, cunoscute ca problema medianei, problema centrului, precum și a diverselor variații ale acestora. În conformitate cu scopul enunțat au fost stabilite obiectivele cercetării:

- elaborarea unui model matematic discret nou, bazat pe noțiunea de relație multi-ară, ca submulțime a produsului cartezian a unei mulțimi de elemente arbitrare;
- examinarea topologiei relațiilor multi-are, prin construirea grupurilor de omologii și coomologii a complexului de relații multi-are;
- examinarea complexului de cuburi abstracte, drept un caz special al complexului de relații multi-are, și a varietăților abstracte respective;
- elaborarea algoritmului eficient pentru soluționarea problemei medianei pe complexul de cuburi abstracte;
- generalizarea funcției Grundy și soluționarea unor jocuri combinatoriale pe complexe de relații multi-are.

Noutatea științifică a rezultatelor obținute. Rezultatele științifice prezentate în lucrare sunt rodul cercetărilor efectuate în ultimii 15 ani în legătură cu încercarea de a obține metode eficiente de soluționare a unor probleme cunoscute, cu caracter aplicativ, pentru care metodele și modelele tradiționale, folosite anterior, s-au dovedit a fi ineficiente. Această situație a determinat direcția cercetărilor, îndreptate spre căutarea unor modele matematice noi, care ar descrie în mod adecvat problemele examinate și ar oferi posibilități noi de elaborare a unor metode noi de soluționare. În rezultat, s-a propus o structură discretă nouă, definită pe produsul cartezian al unei mulțimi de elemente, numită complex de relații multi-are. Fundamentarea teoretică a direcției de cercetare, determinate de acest complex, a oferit instrumentariul necesar pentru elaborarea unor metode noi ce pot fi aplicate la soluționarea problemelor de optimizare discretă. Astfel, noutatea științifică constă în ***Fundamentarea teoretică a direcției de cercetare, determinată de o structură discretă nouă, numită complex de relații multi-are cu elaborarea metodelor eficiente de soluționare a problemelor aplicative.*** Complexul de relații, proprietățile căruia sunt studiate în lucrare, generalizează structuri discrete clasice, precum ar fi grafurile, hipergrafurile etc. Toate rezultatele științifice obținute sunt noi, acoperă mai multe rezultate importante cunoscute pentru alte structuri discrete, și au fost publicate în reviste de specialitate . Noutatea și originalitatea științifică se exprimă prin faptul că:

- a fost propusă o direcție nouă de cercetare, determinată de necesitatea studierii proprietăților complexului de relații multi-are și aplicării acestuia la soluționarea problemelor de optimizare discretă;
- a fost dedusă formula recurentă de calculare a numărului ciclomatic pentru un complex de relații multi-are cu ajutorul rangurilor grupurilor de omologii;

- a fost generalizată noțiunea de d -convexitate pentru spațiile metrice, determinate de relațiile k -are, $1 \leq k \leq n$, ale complexului $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$;
- au fost studiate varietățile abstracte, determinate de un complex cubic abstract;
- a fost elaborat algoritmul de calcul al medianei într-un complex de cuburi abstracte, fără utilizarea metricii spațiului respectiv

Problema științifică importantă soluționată constă în *elaborarea unei structuri matematice* determinate de o familie de relații multi-are și folosite la modelarea proceselor cu acțiune discretă, *care a condus* la obținerea metodelor eficiente pentru *utilizarea ulterioară* a acestora la soluționarea problemei de calculare a medianei ponderate, fără a folosi metrica spațiului, a problemei de comportament al jucătorilor într-un joc combinatorial etc.

În baza rezultatelor obținute **se propune o direcție nouă de cercetare** ce constă în *fundamentarea* teoriei complexelor de relații multi-are, prin care se generalizează mai multe structuri discrete clasice cunoscute ca grafuri, hipergrafuri, matroizi, complexe de simplexe, *ceea ce a contribuit la* elaborarea modelelor și metodelor eficiente *în vederea aplicării acestora la* soluționarea problemelor de optimizare discretă.

Rezultate principal noi pentru știință și practică.

Sunt obținute rezultate importante în legătură cu studierea unei structuri matematice discrete noi – complexul de relații multi-are. La elaborarea unor metode de examinare a problemelor cu caracter teoretico-aplicativ se folosesc proprietățile complexului de cuburi abstracte, studiate în baza complexului de relații multi-are. Rezultate principal noi, expuse în teză sunt:

a) de ordin teoretic.

- a fost elaborat modelul matematic discret, bazat pe noțiunea de relație multi-ară, ca submulțime a produsului cartezian a unei mulțimi de elemente arbitrare;
- a fost studiată topologia relațiilor multi-are, prin construirea grupurilor de omologii și coomologii a complexului de relații multi-are;
- a fost dedusă formula recurentă de calculare a numărului ciclomantic pentru un complex de relații multi-are cu ajutorul rangurilor grupurilor de omologii;
- a fost demonstrat analogul teoremei Poincare-Veblen-Alexander pentru complexe de relații multi-are (teorema 2.8.1);
- au fost studiate proprietățile convexității și a învelitoarei convexe în spațiul metric (R^k, d_k^m) , determinat de relația k -ară a complexului $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$, $1 \leq k \leq n$, precum și problema restabilirii familiei de submulțimi din R^k , ce reprezintă o convexitate, cunoscând învelitoarea convexă respectivă, și invers (teorema 3.1.2, consecința 3.1.1, teorema 3.1.3);

- au fost caracterizate clasele de grafuri d -convex simple, identice după structură, cu determinarea relației dintre rază și diametru în astfel de grafuri;
- au fost construite grupurile de omologii ale complexului de cuburi abstracte;
- au fost studiate proprietățile varietăților, determinate de un complex cubic abstract;
- a fost dedusă formula Euler-Poincare pentru complexul de cuburi abstracte;
- au fost determinate condițiile de existență a conturului Euler $(n-1)$ -dimensional într-o varietate abstractă, orientabilă și conexă forte;

b) de ordin aplicativ.

- în baza rezultatelor teoretice, ce țin de studierea topologiei algebrice a relațiilor multi-are, a fost efectuată clasificarea varietăților abstracte determinate de complexul $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$;
- a fost elaborat algoritmul de calcul al medianei într-un complex de cuburi abstracte, fără utilizarea metricii spațiului respectiv;
- cu ajutorul funcției Grundy, definite pe complexul de relații $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$, au fost stabilite strategiile de comportare ale participanților la un joc combinatorial.

Importanța teoretică și valoarea aplicativă a tezei. Importanța teoretică a tezei este determinată de fundamentarea unei direcții noi de cercetare, generate de studierea topologiei algebrice a relațiilor multi-are. Pentru soluționarea problemelor de optimizare discretă a fost propus un model matematic nou, numit complex de relații multi-are care generalizează mai multe structuri matematice discrete clasice.

Valoarea aplicativă a lucrării este determinată de rezultatele obținute în legătură cu dezvoltarea teoriei abstracte a relațiilor multi-are și folosirea acestora la elaborarea metodelor eficiente de soluționare a problemelor de optimizare discretă, reprezentate în teză prin calcularea medianei unui complex de cuburi abstracte și a soluționării jocurilor combinatoriale cu ajutorul funcției Grundy pe complexe de relații.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele științifice, obținute în legătură cu dezvoltarea teoriei abstracte a relațiilor multi-are, prezintă interes teoretico-aplicativ manifestat prin faptul că:

- pot servi drept suport pentru inițierea unor cercetări prin formularea temelor de doctorat în domeniul elaborării modelelor și metodelor de soluționare a problemelor din domeniul optimizării discrete;
- pot servi drept suport pentru elaborarea unor cursuri opționale universitare în cadrul studiilor de licență și de masterat;

- complexul de relații multi-are examinat în teză poate servi drept model pentru soluționarea problemelor practice din sectorul economic, legate de amplasarea unor centre de deservire sau producere;

- pot conduce la elaborarea unor metode noi eficiente de soluționare a problemelor de optimizare discretă.

Aprobarea rezultatelor științifice. Rezultatele științifice de bază, obținute de către autor și reflectate în prezenta lucrare, au fost publicate în 58 de lucrări (a se vedea referințele [17]-[23], [129], [130], [141]-[172], [174]-[182], [184], [263], [267], [295]), apărute după susținerea tezei de doctor în științe matematice și înalt apreciate de către specialiști [306], dintre care:

18 teze ale comunicărilor la conferințe științifice naționale și internaționale;

37 articole publicate în reviste științifice din țară și peste hotare sau Anale ale conferințelor științifice (recenzate – 27, dintre care 11 - în alte țări; articole de un singur autor - 14);

3 monografii.

Rezultatele investigațiilor au fost prezentate și discutate la un șir de conferințe științifice:

- 1) International Conference „Trends in the Development of the Information and Communication Technology in Education and Management”. Chișinău, March 20-21, 2003.
- 2) Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chișinău, August 17-19, 2004.
- 3) “Tiberiu Popoviciu” Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity. Cluj-Napoca, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009.
- 4) The 30-th Annual Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA). Chișinău, July 5-10, 2005.
- 5) The XIV Conference on Applied and Industrial Mathematics. Dedicated to the 60th anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University. CAIM–2006. Chișinău, August 25-27, 2006.
- 6) International conference KEPT-2007. Knowledge engineering: Principles and techniques. Cluj-Napoca, Babeș-Bolyai University, June 5-7 2007.
- 7) Seventh Workshop on Mathematical Modeling of Environmental and Life Sciences Problems. Constantza, October 22-25, 2008.
- 8) Conferință științifică „Interferențe universitare – integrare prin cercetare și inovare”. MITRE–2008. Chișinău (October 1-4, 2008; August 22-25, 2011; August 18-22, 2013).
- 9) Conferință științifică „Interferențe universitare – integrare prin cercetare și inovare”. MITRE–2009. Chișinău, October 8-9, 2009.

- 10)** The 33-th Annual Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA). Sibiu, July 02-07, 2009.
- 11)** International Scientific Conference «Discrete mathematics, algebra and their applications». Minsk, October 19-22, 2009.
- 12)** Scientific Conference dedicated to the 80-th anniversary of the foundation of the Tiraspol State University, Chişinău, September 24-25, 2010.
- 13)** The 18th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM –2010. Iaşi, October 14-17, 2010.
- 14)** International Congress on Computer Science: Information Systems and technologies, Minsk, 31 octomber – 03 november, 2011.
- 15)** Conferinţa Internaţională “Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale”. Ediţia III. Chişinău, 19-23 martie, 2012.
- 16)** The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics. Dedicated to Academician Mitrofan M. Cioban. CAIM –2012. Chişinău, August 22 – 25, 2012.
- 17)** The 13th International Conference on Mathematics and its Applications - ICMA 2012. Timişoara, November 1-3, 2012.
- 18)** The 14-th International Conference of Scientific Papers “Scientific Research and Education in the Air Force”. Braşov, May 24-26, 2012.
- 19)** Conferinţă ştiinţifică cu participare internaţională „Interferenţe universitare – integrare prin cercetare şi inovare”. Chişinău, 25-26 septembrie, 2012.
- 20)** The 21st Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM –2013. Bucharest, September 19 – 22, 2013.
- 21)** International Conference "Discrete mathematics, graph theory and their applications" (DIMA-2013). Minsk, November 11-14, 2013.
- 22)** The 22st Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM –2014. Bacău, September 18 – 21, 2014.
- 23)** Third Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chişinău, August 19-23, 2014.
- 24)** Conferinţa Internaţională “Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale”. Ediţia IV. Chişinău, 25-28 martie, 2014.

Articolele ştiinţifice au fost publicate în reviste de specialitate din ţară şi peste hotare, precum şi în Anale (Proceedings) ale confrerinţelor:

- 1) Analele științifice ale USM. Seria „Științe fizico-matematice” (vol. 3, nr.1(1), 2001; vol.5, 2003; 2006).
- 2) Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Seria Matematica (2006, nr. 2(51); 2010, nr. 2(63); 2008, nr. 2(57)).
- 3) Computer Science Journal of Moldova (vol.19, no.1(55), 2011; vol.13, no.2(38), 2005; vol.16, no.3(48), 2008; vol.21, 2013, no.1(61)).
- 4) Mathematical modelling of invironmental and life sciences problems. București: Editura Academiei Române, 2010.
- 5) KEPT-2007. Knowledge engineering: Principles and techniques, vol. I. Cluj-Napoca: Babeș-Bolyai University, 2007.
- 6) Annals of Tiberiu Popoviciu, Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity Cluj-Napoca, România (vol. 2, 2004; vol. 3, 2005; vol.4, 2006; vol. 5, 2007; vol. 6, 2008; vol. 7, 2009).
- 7) Analele științifice ale Universității de Stat din Moldova. Seria „Științe reale”. Lucrări de sinteză. Chișinău, 2006.
- 8) Studia Universitatis. Seria: Științe exacte și economice (2011, nr.2(42) ; 2012, nr.7(57); 2013, nr.2(62)).
- 9) Lucrările conferinței pregătitoare pentru Congresul matematicienilor români. București, 1992.
- 10) Proceedings of the International Conference „Trends in the Development of the Information and Communication Technology in Education and Management”. March 20-21, 2003.
- 11) Proceedings of the 30-th Annual Congres of the American Romanian Academy of Arts and Sciences, (July 5-10, 2005; July 02-07, 2009).
- 12) Proceedings of the XIV Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60th anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University. Chișinău, 2006.
- 13) Proceedings of the Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. August 17-19, 2004.
- 14) Proceedings of the International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies. Minsk, Oct.’31 – Nov.’3, 2011
- 15) Proceedings of the International Conference „Mathematical modeling, optimization and information technology” (2012, 2014).

- 16) Proceedings of the 14-th International Conference of Scientific Papers „Scientific Research and Education in the Air Force”, Braşov, România, May 24-26, 2012.

Monografii publicate:

- 1) Cataranciuc S., Sur N. *Grafuri d-convex simple şi quasisimple*. Monografie. Chişinău: CEP USM, 2009. 201p. [164].
- 2) Bulat M., Cataranciuc S., Zgureanu A. *Mulţimi de relaţii multi-are şi criptarea informaţiei*. Monografie. Chişinău: CEP USM, 2013. 200p. [181].
- 3) Cataranciuc S. *Topologia algebrică a relaţiilor multi-are*. Monografie. Chişinău: CEP USM, 2015. 228p. [295].

Referitor la rezultatele cercetărilor ştiinţifice au fost ținute comunicări în plen la trei conferinţe (o conferinţă de rang naţional şi două – de rang internaţional):

- 1) The 20th conference on applied and industrial mathematics (dedicated to academician M. Ciobanu), Chişinău, August 22-25, 2012 (Plenar communication: “*Algebraic topology of the multi-ary relations and its applications*”).
- 2) Interferenţe universitare – integrare prin cercetare şi inovare (Conferinţă ştiinţifică cu participare internaţională), Chişinău, 25-26 septembrie, 2012 (Comunicare în plen: “*Structuri matematice şi rolul acestora în soluţionarea problemelor practice*”).
- 3) International Conference "Discrete mathematics, graph theory and their applications" (DIMA-2013), Minsk, Belorusia, 11-14 november, 2013. (Plenar communication: “*Algebraic topology of the multi-ary relations*”).

Sumarul compartimentelor tezei. Teza este structurată în cinci capitole, în care sunt descrise aspectele topologico-algebrice ale relaţiilor multi-are, examinate prin prisma unei structuri matematice noi, numită complex de relaţii multi-are, precum şi unele derivate ale acestei structuri, ce conduc la soluţionarea a mai multor probleme cu caracter aplicativ. Pe lângă cele cinci capitole menţionate, lucrarea conţine concluzii generale şi recomandări, adnotările în limbile română, rusă şi engleză, precum şi o listă bibliografică ce cuprinde 309 titluri. În total volumul tezei constituie 291 pagini, dintre care 265 pagini de text de bază.

În Introducere, sunt formulate scopul şi obiectivele tezei, este argumentată actualitatea temei de cercetare. Se formulează problema ştiinţifică abordată cu menţionarea importanţei teoretice şi a valorii practice a lucrării. Este dată o analiză succintă a publicaţiilor la tema tezei. Se încheie acest compartiment cu o sinteză a conţinutului lucrării.

Primul capitol al tezei poartă un caracter introductiv şi are drept scop examinarea, în mod evolutiv, a principalelor structuri matematice discrete folosite în calitate de modele la soluţionarea problemelor practice. Se examinează o serie de proprietăţi importante ale acestor

structuri, generalizate în capitolele următoare pentru cazul complexelor de relații multi-are. Una dintre cele mai simple structuri matematice discrete, dar cu un potențial enorm de aplicații la examinarea problemelor teoretico-aplicative, este graful. Pornind de la încercările matematicienilor de a soluționa mai multe probleme cu caracter distractiv, într-o perioadă relativ scurtă a fost constituită o direcție nouă de cercetare, cunoscută astăzi ca teoria grafurilor. Rezultatele teoretice obținute au permis eficientizarea cercetărilor în diverse domenii: economie, fizică, informatică, chimie etc. Tot în capitolul 1 sunt descrise câteva rezultate ce țin de proprietățile arborilor, ale numărului ciclomatic, ale matricei ciclomatice și cociclomatice care ulterior sunt generalizate pentru complexe de relații multi-are și își găsesc utilizare la soluționarea problemelor aplicative, cum ar fi problema medianei, a jocurilor combinatoriale pe structuri discrete etc.

La dezvoltarea teoriei grafurilor au contribuit în mod esențial, începând cu apariția primelor lucrări în sec. XVII–XVIII, mai mulți matematicieni: Leonard Euler (1707-1783), William Hamilton (1788-1856), James Joseph Sylvester (1814-1897), Arthur Cayley (1821-1895), Claude Berge (1926-2002), George David Birkhoff (1884-1944). Încercările de a folosi grafurile în calitate de modele matematice pentru descrierea proceselor fizice, și nu numai [2], [7], au generat, în timp, necesitatea extinderii și identificării altor structuri matematice [3], [16] incluse în prezentul studiu care, într-un mod firesc, generalizează grafurile și, la rândul lor, servesc drept pretext pentru generalizări abstracte, urmate de fundamentarea teoriei relațiilor multi-are.

Nucleul tezei îl constituie **Capitolul 2**, în care sunt expuse rezultatele de bază ce țin de examinarea topologiei relațiilor multi-are și care își găsesc continuare în capitolele ce urmează prin definirea și studierea unui complex special, numit complex de cuburi abstracte, important pentru soluționarea unor probleme cu caracter teoretico-aplicativ. Obiectul de studiu al capitolului 2 este așa-numitul complex de relații multi-are, pentru care au fost definite noțiunile de bază și studiate proprietățile acestora în mai multe lucrări [17], [145], [146], [149], [163], [182]. Pornind de la un complex simplu de relații [58], [146], [149] și urmărind, în mod firesc, scopul de a soluționa în caz general o serie de probleme practice, se definește noțiunea de complex generalizat de relații multi-are pe produsul cartezian de ordin $k = 1, 2, \dots, n$ al unei mulțimi de elemente $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Pentru complexul de relații $\mathfrak{R}^{n+1} = \{R^1, R^2, \dots, R^{n+1}\}$ se definește noțiunea de k -conexitate, $1 \leq k \leq n$, încât conexitatea simplă, cunoscută din teoria grafurilor, devine un caz particular al acesteia. Printre complexe k -conexe, un loc aparte le revine complexelor-arbori în care orice subcomplex conține cel puțin un cortegiu suspendat. În cazul complexelor-arbori sunt obținute

mai multe rezultate importante ce se referă la problema acoperirii minime și la problema construirii mulțimii intern stabile maxime, interpretate prin teoremele 2.2.3 - 2.2.5.

Pornind de la faptul că lanțurile și ciclurile m -dimensionale într-un complex de relații multi-are formează grupuri comutative, se definesc grupurile de omologii directe și grupurile de coomologii. Sunt demonstrate câteva proprietăți importante ce țin de grupurile de omologii și coomologii, precum și corelațiile dintre ele (a se vedea teorema 2.6.4-2.6.7), care sunt utile pentru examinările ulterioare.

Acest capitol se încheie cu studierea numărului ciclomatic al complexului generalizat de relații multi-are și a proprietăților matricei ciclomatice. A fost obținut un rezultat fundamental, care reprezintă analogul teoremei Poincare-Veblen-Alexander [52], [68] (teorema 2.8.1).

Capitolul III ține de efectuarea unor investigații, legate de extinderea noțiunii de convexitate asupra complexelor de relații multi-are cu studierea proprietăților respective. Apărută inițial în spațiul euclidian, convexitatea a generat un șir de rezultate teoretice de valoare, care au constituit bazele unei direcții importante de cercetare în matematică, cunoscută astăzi ca optimizare convexă [235], [237]. Fundamentarea teoriei mulțimilor convexe a contribuit la elaborarea metodelor eficiente de soluționare a problemelor de optimizare convexă, descrise în multiple manuale și monografii de specialitate [233], [234], [236]. În cazul structurilor discrete, pe parcursul ultimilor 30 ani au fost obținute rezultate ce țin de proprietățile mulțimilor convexe. În special, acestea se referă la structurile reprezentate prin grafuri [138], [140], [141], [164]. Studierea grafurilor cu o familie redusă de mulțimi convexe, numite grafuri d -convex simple, a condus la demonstrarea unor teoreme importante privind structura acestor grafuri, în caz general, precum și teoreme de caracterizări eficiente ale diferitelor clase de grafuri d -convex simple [131]-[137], [139], [147], [157], [174].

În primul paragraf al capitolului 3 se definește noțiunea de convexitatea și învelitoare convexă pe mulțimea elementelor relației k -are R^k a complexului $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$. Cu ajutorul funcției distanței $d_k^m : R^k \times R^k \rightarrow N$, $1 \leq k < m \leq n+1$, introdusă prin lema 3.1.2, se definește noțiunea de convexitate în R^k și se demonstrează că aceasta determină în mod univoc o învelitoare convexă, și invers (a se vedea teoremele 3.1.2 și 3.1.3). Definind un operator P , care permite construirea iterativă a învelitoarei convexe a unei mulțimi $A \subset R^k$, prin teoremele 3.1.6-3.1.8 se stabilesc proprietăți importante ale acestui operator și ale mulțimilor convexe din spațiul metric (R^k, d_k^m) .

În paragrafele 3.2 și 3.3 sunt studiate grafurile neorientate și, respectiv, cele orientate, în care învelitoare convexă a oricăror două vârfuri neadiacente, privită ca o procedură iterativă de

aplicare a operatorului de construire a acesteea, coincide cu mulțimea tuturor vârfurilor grafului. Grafurile respective se numesc d -convex simple și au fost studiate în mai multe lucrări [133], [134], [136]-[139], [147], [157], [164], [263].

În **Capitolul 4** se studiază complexe de cuburi abstracte, ca un caz special al complexelor de relații multi-are. Folosind simplexele abstracte în calitate de „cărămizi”, se definește mai întâi cubul abstract n -dimensional, precum și un șir de proprietăți cu caracter combinatorial al acestuia, folosite în cercetările ulterioare. Pentru aceste cuburi se definesc un șir de noțiuni cu proprietăți importante, folosite la examinarea complexelor respective.

Investigațiile din capitolul 4 sunt importante din mai multe considerente. E de menționat faptul că complexe de cuburi servesc drept instrument eficient în dezvoltarea unor compartimente ale topologiei combinatorice, fiind folosite la construirea invarianților topologici prin aplicarea metodelor combinatorice de studiu. Structurile combinatorice construite cu ajutorul cuburilor abstracte n -dimensionale se întâlnesc în teoria modernă a topologiei algebrice. Totodată, acestea se regăsesc și într-un șir de aplicații datorită faptului că o serie de structuri întâlnite în diverse ramuri ale matematicii conduc la studierea unor spații speciale cu o divizare specifică în cuburi.

Aplicând o tehnică similară celei folosite în cazul complexelor de relații multi-are, pentru un complex cubic abstract se construiesc grupurile de omologii și cele de coomologii.

În cazul complexului de cuburi abstracte, un rol aparte îi revine studierii caracteristicii Euler, întâlnită în literatura de specialitate și sub denumirea de caracteristică Euler-Poincare. Aceasta este folosită frecvent în topologia algebrică și combinatorica poliedrelor, reprezentând un invariant topologic, ce descrie forma și structura spațiului. Pentru o varietate multidimensională, privită ca un spațiu topologic, caracteristica Euler-Poincare se calculează cu ajutorul rangurilor grupurilor de omologii. În cazul complexului de cuburi abstracte, privit și ca o varietate abstractă, se stabilește legătura dintre suma alternantă a cardinalelor mulțimilor de cuburi abstracte m -dimensionale și suma alternantă a rangurilor grupurilor de omologii.

O atenție specială se acordă studierii varietăților abstracte, determinate de complexe de relații multi-are, reprezentate, la rândul lor, prin complexe de quasisimplexe sau complexe de cuburi abstracte. Chestiune importantă atât prin faptul că varietatea este considerată drept una dintre noțiunile fundamentale ale matematicii, cu ajutorul căreia se concretizează și se generalizează noțiunea de suprafață pentru dimensiuni oricât de mari, cât și prin aceea că varietatea abstractă apare într-un mod surprinzător în soluționarea unor probleme practice pe structuri discrete, examinate ulterior.

În **Capitolul 5** sunt examinate unele aplicații ale complexului de relații multi-are la soluționarea diferitor probleme. Sunt descrise metode eficiente de rezolvare a problemelor cu caracter aplicativ. Complexele de relații multi-are, precum și unele variații ale acestora, de exemplu, complexele cubice, servesc drept modele matematice eficiente pentru soluționarea a mai multor probleme cu caracter teoretico-aplicativ, precum ar fi: determinarea numărului cromatic al unui complex de relații [175], determinarea mulțimilor intern stabile [143], [154] și a strategiilor de comportare a jucătorilor într-un joc combinatorial [176], clasificarea varietăților abstracte [177], calcularea medianei în cazul complexelor de cuburi abstracte [169], [184] și unele generalizări ale acestora reprezentate prin complexe speciale de politoape n -dimensionale [165], [178], elaborarea metodelor de criptare a informației [167], [181] etc.

Proprietățile complexului de relații multi-are, studiate prin intermediul complexului de quasisimplexe și cel de cuburi abstracte în capitolele precedente, oferă posibilitatea generalizării rezultatelor ce țin de clasificarea varietăților, descrise în lucrările [15], [19], [23], [153], [156], [177]. Apariția buclor (a se vedea definiția 5.1.3) într-un complex abstract, determinată de repetările elementelor în cortegiile ce corespund quasisimplexelor, conduce la necesitatea studierii varietății sferice degenerate de genul p .

Problema calculării medianei mereu a trezit un interes sporit al cercetătorilor, datorită multiplelor aplicații practice ale acesteia. Deoarece, în caz general, calcularea medianei prin metode clasice devine o problemă dificilă, iar pentru diferite variații ale acesteia obținem chiar probleme din clasa celor NP-complete [86], [226], deseori se recurge la elaborarea unor metode aproximative [183] sau la construirea metodelor eficiente și exacte de calcul, aplicabile în cazul structurilor matematice speciale [151], [165], [169], [172], ce pot servi, la rândul lor, drept model la examinarea problemelor practice. În paragrafele 5.2 și 5.3 se demonstrează existența unui algoritm eficient de calculare a medianei, fără a utiliza metrica.

În paragraful 5.4 se examinează un joc combinatorial cu doi participanți, care este o generalizare a cunoscutului joc Nim. Pentru determinarea modului de comportament al jucătorilor, pe complexul de relații se construiește o funcție specială – funcția Grundy. Se arată că jucătorul ce reușește să construiască această funcție și să aleagă simplexul Q pentru care $g(Q)=0$, nu va pierde în jocul respectiv.

Teza de doctor habilitat conține o listă de surse bibliografice, prezentată la sfârșitul lucrării, care are atribuție directă la tematica abordată. Aceasta nu este aranjată în ordine alfabetică, fiind completată treptat, pe măsura acumulării materialului inclus în lucrare, ceea ce, sperăm, nicidecum nu influențează, în ansamblu, valoarea științifică a tezei.

1. STRUCTURI MATEMATICE DISCRETE ȘI ROLUL ACESTORA ÎN SOLUȚIONAREA PROBLEMELOR TEORETICO-APLICATIVE

Primul capitol conține descrierea, în ordine cronologică, a etapelor de dezvoltare a structurilor discrete și folosirea acestora, în calitate de model matematic, la soluționarea diverselor probleme cu caracter aplicativ și reprezintă un capitol de sinteză în domeniul temei de cercetare a tezei. Sunt descrise rezultatele care au contribuit esențial la dezvoltarea teoriilor respective, precum și interconexiunea dintre acestea prin abordările teoretice ale problemelor practice.

Se analizează aportul a mai mulți matematicieni la studierea primelor structuri matematice discrete și folosirii acestora la soluționarea diverselor probleme practice. În mod special se menționează rolul în dezvoltarea teoriilor respective pe care l-au avut Leonard Euler, William Hamilton, James Joseph Sylvester, Arthur Cayley, Claude Berge, George David Birkhoff.

Încercările de a folosi structurile discrete în calitate de modele matematice pentru descrierea proceselor fizice, și nu numai, au generat, în timp, necesitatea identificării altor structuri matematice, incluse în prezentul studiu care, într-un mod firesc, le generalizează pe cele clasice și servesc drept pretext pentru o serie de generalizări abstracte, urmate de fundamentarea teoriei relațiilor multi-are, examinate în capitolele de bază ale prezentei lucrări.

1.1. Evoluția structurilor discrete

În cele ce urmează vom analiza etapele de dezvoltare a structurilor discrete, apărute odată cu necesitatea soluționării diverselor probleme de ordin teoretico-aplicativ. Aceste structuri, precum s-a adevărit, nu pot fi aplicate asupra unor probleme practice. Unele dintre acestea se examinează în ultimul capitol al tezei. Problemele respective au și constituit acel imbold, care ne-a impus să ne gândim asupra elaborării și generalizării structurilor discrete cunoscute pentru modelarea și soluționarea cu succes a acestora. Într-un final a fost definită o structură matematică, numită complex de relații multi-are, iar prin construirea grupurilor de omologii și studierea proprietăților respective s-au pus bazele teoriei respective, care și constituie conținutul de bază al prezentei lucrări.

Orice structură discretă, folosită drept model matematic la soluționarea problemelor de optimizare, se definește în baza unei oarecare mulțimi – noțiune bine cunoscută și care se regăsește în diferite interpretări în multiple lucrări (la dezvoltarea teoriei mulțimilor și diverselor aplicații ale acestora au contribuit lucrările clasice ale matematicienilor Georg Cantor [72] și Bertrand Russell [73], [74], dar și lucrările mai noi ale lui P. Alexandrov [113], în legătură cu

încercarea reușită a acestuia de a fundamenta teoria generală a dimensiunilor și studierii spațiilor topologice. Primele studii ce se referă la teoria mulțimilor au fost efectuate de către Bernard Bolzano și publicate în 1851, introducând astfel noțiunea de mulțime și corespondență biunivocă. Ceva mai târziu, în perioada anilor 1872-1884, Georg Cantor a publicat mai multe lucrări în care au fost de acum expuse în mod sistematic rezultatele de bază ale teoriei mulțimilor. Anume datorită acestor sistematizări dânsul și este considerat fondator al teoriei mulțimilor.

Grafuri

La fel ca și multe alte domenii ale matematicii, grafurile au apărut datorită încercărilor matematicienilor de a rezolva mai multe probleme practice, sau chiar jocuri cu caracter distractiv. Pentru prima dată noțiunea de graf a fost introdusă de către Leonard Euler în legătură cu încercarea de a soluționa cunoscuta problemă a celor “șapte poduri din Königsberg” [190].

Părinte al teoriei moderne a grafurilor este considerat C. Berge, datorită expunerii sistematizate a acestei direcții de cercetare în monografia [302] și dezvoltării ulterioare a teoriei în lucrările [5], [6]. Rezultate semnificative ce țin de fundamentarea teoriei grafurilor, iar mai apoi și a hipergrafurilor, se regăsesc în multitudinea de publicații apărute pe parcursul ultimilor 40-50 ani. Promotori fideli ai acestei direcții de cercetare sunt considerați F. Harary [80], V. Emelichev [45], I. Tomescu [65], T. Toader [82], N. Cristofides [116], A. Zâkov [87], P. Soltan [59], [60].

Încercarea de a soluționa probleme practice prin utilizarea grafurilor în calitate de model matematic a contribuit, la rândul său, la dezvoltarea și a altor domenii de cercetare, precum și vice-versa. În studierea grafurilor un rol aparte l-au jucat matricele unimodulare întâlnite, desigur, și în alte domenii ale matematicii. Conform [46], o matrice se numește total unimodulară dacă determinantul oricărui minor al acesteia este egal cu +1, 0 sau -1. Aceasta înseamnă că într-o matrice total unimodulară fiecare element este egal cu +1, 0 sau -1, deoarece fiecare element poate fi considerat drept minor de ordinul unu. În lucrarea [77] este demonstrat un rezultat important ce ține de caracterizarea acestor matrici: Dacă A este o matrice formată din elementele 0, +1, -1, iar fiecare coloană a acesteia conține cel mult două elemente diferite de zero, atunci A este o matrice total unimodulară dacă și numai dacă mulțimea liniilor din A poate fi divizată în două submulțimi S_1 și S_2 , cu respectarea condițiilor:

- 1) dacă două elemente, diferite de zero, ale unei coloane sunt de același semn, atunci un element aparține liniei din S_1 , iar celălalt – liniei din S_2 .

- 2) dacă două elemente, diferite de zero, ale unei coloane sunt de semne opuse, atunci ambele aparțin liniilor din S_1 sau ambele aparțin liniilor din S_2 .

Din rezultatul respectiv rezultă două consecințe importante cu referire la matricele de incidență a grafurilor orientate și cele neorientate.

A. *Matricea de incidență a unui graf orientat este total unimodulară.*

B. *Matricea de incidență a unui graf neorientat este total unimodulară dacă și numai dacă graful este bipartit [78].*

E de remarcat faptul că matricele total unimodulare joacă un rol important în diverse domenii ale matematicii și își găsesc aplicații la soluționarea a mai multor probleme de ordin teoretico-aplicativ:

a) Programarea în numere întregi. Dacă A este o matrice total unimodulară, iar b este un vector cu coordonate întregi, atunci ecuația $AX = b$ admite soluții de bază în numere întregi. Aceasta, la rândul său, înseamnă că sistemul de ecuații liniare, reprezentat în forma matriceală $AX = b$, poate fi rezolvat prin aplicarea directă a metodei simplex;

b) Crearea planurilor de învățământ prin utilizarea rețelelor semantice. Organizarea eficientă a procesului de studii depinde de corelația dintre disciplinele predate. Una dintre problemele planurilor de studii la diferite specialități constă deseori în neglijarea continuității conținuturilor disciplinelor predate, precum și corelația majoră între disciplinele înrudite. Pentru soluționarea rapidă și eficientă a problemei menționate, adesea se recurge la construirea rețelelor semantice, sistemelor expert, etc. [79]. Rețelele se modelează cu ajutorul unui graf orientat, matricea de incidență a căruia A este total unimodulară. Pentru aceste rețele se rezolvă ecuația matriceală

$$A \cdot C^T = O,$$

unde $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ este un vector ce reprezintă un contur sau o sumă de contururi ale grafului model, având coordonatele numere întregi, iar C^T – transpusul acestuia. Din sistemul fundamental de soluții al ecuației $A \cdot C^T = 0$ se construiește soluția problemei formulate inițial în lucrarea[79].

c) Amplasarea optimă a punctelor de deservire. Deseori pentru deservirea unor centre unite într-o rețea (rețea de drumuri, rețea informațională, etc.) este necesar de a determina locul optim de amplasare a unor servicii (spitale, depozite, stații telefonice, etc.). Astfel de probleme sunt cunoscute ca probleme de amplasare. Pentru soluționarea lor se recurge la modelul matematic reprezentat printr-un graf, de regulă orientat. Soluția căutată este nu altceva decât o mediană sau centru al acestui graf care, la rândul său, se determină prin rezolvarea sistemului de ecuații

liniare $A \cdot X = b$, unde A este matricea de incidență a grafului. Necunoscutele x_i , ce formează vectorul X , sunt numere întregi. Luând în considerație afirmația A formulată mai sus, rezultă că pentru rezolvarea sistemului respectiv de ecuații se recurge la metoda simplex [114].

Necesitatea soluționării unor probleme de optimizare, cunoscute în literatura de specialitate ca probleme de parcurgere, au condus la introducerea noțiunilor de lanț, ciclu, precum și a diverselor generalizări ale acestora, care au impulsionat dezvoltarea aspectului aplicativ al teoriei grafurilor [57], [80], [82].

În cazul unui graf neorientat $G = (X; U)$ putem defini două spații vectoriale legate de G (cele expuse în continuare ușor pot fi reprezentate și pentru cazul grafului orientat $G = (X; \Gamma)$). Este vorba de spațiul ciclurilor și spațiul cociclurilor. Ambele spații se definesc peste câmpul a două numere, 0 și 1, notat prin $F_2 = \{0, 1\}$. Considerăm variabilele ξ_i ce primesc doar valori din F_2 . Combinația liniară $\sum \xi_i x_i$ a vârfurilor grafului $G = (X; U)$ se numește 0-lanț (lanț cu dimensiunea zero [113]), iar combinația muchiilor $\sum \xi_j u_j$ se numește 1-lanț (lanț cu dimensiunea unu).

Menționăm că, astfel interpretată, noțiunea de 0-lanț și 1-lanț generalizează noțiunea de lanț, întâlnită la Claude Berge [57], Frank Harary [80] și alți matematicieni, folosit la elaborarea a algoritmilor de soluționare a problemelor de parcurgere.

Definim funcția φ care pune în corespondență fiecărui 1-lanț un lanț cu dimensiunea zero și satisface condițiile:

- 1) φ este liniară;
- 2) dacă $u = (x, y)$ este o muchie a grafului G , atunci $\varphi(u) = x + y$.

Totodată definim și cofuncția Φ , care pune în corespondență fiecărui 0-lanț un lanț cu dimensiunea unu (1-lanț) și satisface condițiile:

- 1) Φ este liniară;
- 2) $\Phi x = \sum_{i=1}^m \xi_i u_i$, unde $\xi_i = 1$, dacă și numai dacă muchia $u_i = U$ este incidentă vârfului x .

Un lanț 1-dimensional l pentru care $\varphi(l) = 0$ se numește vector ciclic al grafului. Se poate observa că orice lanț simplu (lanțul ce nu conține muchii ale grafului mai mult decât o singură dată [80], [302]) este vector ciclic al grafului. Mulțimea tuturor astfel de vectori formează un spațiu vectorial peste câmpul F_2 , numit *spațiu al ciclurilor* grafului G [302]. Astfel de spații apar la studierea și a altor structuri discrete. Baza spațiului ciclurilor grafului G , formată doar din ciclurile simple din G , se numește *bază de cicluri* a grafului respectiv.

Fie $\{l_1^1, l_2^1, \dots, l_k^1\}$ o mulțime de cicluri simple ale grafului G . Orice vector ciclic L^1 se prezintă astfel: $L^1 = \sum_{i=1}^k \xi_i l_i^1$. Prin urmare, baza de cicluri a unui graf $G = (X; U)$ este mulțimea maximală de cicluri simple independente din G .

Noțiunea de ciclu într-un graf permite a defini noțiunea de cociclu, legată cu o noțiune fundamentală în teoria grafurilor – noțiunea de tăietură [80], [302] cunoscută și cu ocazia soluționării a multor probleme de optimizare. Astfel, conform [302], se numește tăietură orice submulțime de muchii a grafului $G = (X; U)$, la eliminarea cărora se obține un graf nonconex, iar tăietura minimală se numește cociclu al grafului. Printre problemele, la soluționarea cărora noțiunile respective au jucat un rol decisiv se numără problema fluxului maxim într-o rețea precum și diverse generalizări ale acesteia. O contribuție esențială la soluționarea problemei menționate au avut-o matematicienii L.R.Ford & D.R.Fulkerson [287], [288].

Fie G un graf în care n , m și p reprezintă numărul de vârfuri de muchii și, respectiv, de componente conexe din G . Definim numărul ciclomatic $\nu(G) = m - n + p$ și numărul cociclomatic $\rho(G) = n - p$ al acestui graf [80], [82], [302]. Aceste numere reprezintă dimensiunile spațiilor vectoriale, definite mai sus. Printre cele mai importante proprietăți, din punct de vedere teoretico-aplicativ, ale lui $\nu(G)$ și $\rho(G)$ se evidențiază:

P1. Dacă x și y sunt două vârfuri nonadiacente ale unui graf conex G , iar G' este graful ce se obține din G la adăugarea muchiei (x, y) , atunci

$$\begin{aligned}\nu(G') &= \nu(G), \\ \rho(G') &= \rho(G) + 1.\end{aligned}$$

P2. Dacă x și y aparțin componentelor conexe diferite ale grafului G , iar G' este graful ce se obține din G la adăugarea muchiei (x, y) , atunci relația din **P1** este adevărată.

P3. Numărul ciclomatic al unui graf $G = (X; U)$ este egal cu numărul maxim de cicluri independente din G .

P4. Un graf G nu conține cicluri dacă și numai dacă $\nu(G) = 0$.

P5. Un graf G conține un singur ciclu dacă și numai dacă $\nu(G) = 1$.

Fie μ un ciclu simplu al grafului nonorientat G cu mulțimea de muchii $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Acestui ciclu îi punem în corespondență un cortegiu din m elemente, în care elementul cu numărul j este egal cu 1 dacă și numai dacă $u_j = 1$. Având $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ ca familie a tuturor ciclurilor simple din G , putem construi o matrice C cu dimensiunea $r \times m$ și elementele:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u_j \in z_i, \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Matricea C se numește matrice *ciclomatică*.

Pornind de la definiția matricei de incidență B și a matricei ciclomatrice C a grafului G , simplu se demonstrează egalitatea [5]:

$$C \cdot B^T = 0 \pmod{2}.$$

Similar matricei ciclomatrice se definește și matricea cociclomatică C^* , în care liniile corespund cociclurilor grafului, iar elementele acesteia sunt

$$c_{ij}^* = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u_j \in i, \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Precum s-a constatat (a se vedea lucrarea [80]), rangurile matricelor indicate mai sus se calculează în dependență de parametrii m , n , și p , chestiune importantă la studierea spațiilor ciclurilor și cociclurilor. Conform celor demonstrate în [80], dacă B , C și C^* sunt, respectiv, matricea de incidență, matricea ciclomatică și matricea cociclomatică ale unui graf cu n vârfuri, m muchii și p componente conexe, atunci rangurile acestor matrice sunt determinate de egalitățile:

$$\begin{aligned} r(C) &= m - n + p, \\ r(B) &= r(C^*) = n - p. \end{aligned}$$

Un rol aparte în teoria grafurilor revine arborilor, importanța cărora la soluționarea problemelor practice este incontestabilă. Anume, în baza proprietăților acestor structuri matematice a fost posibilă examinarea eficientă a renumitelor probleme clasice: calcularea arborelui Steiner [290, 291], determinarea circuitelor Kirchhoff într-o schemă electrică [292], reprezentarea structurilor de date în informatică cu ajutorul arborilor de căutare [289]. E necesar de menționat că cercetările lui Kirchhoff cu privire la construirea arborilor parțiali ai unui graf au contribuit esențial la dezvoltarea unei direcții importante de cercetare în teoria grafurilor.

Arbore se numește un graf conex ce nu conține cicluri simple [45], [80], [82]. Evident, dacă avem un graf conex G , ce nu este arbore, atunci eliminând câte o muchie, astfel încât aceasta să aparțină unui ciclu simplu, putem obține un arbore, care se numește arbore parțial al lui G .

Fie T unul dintre arborii parțiali ai grafului G . Vom stabili o legătură între arborele T și baza spațiului ciclurilor grafului. Orice muchie din G ce nu aparține lui T se va numi coardă a arborelui parțial T . Orice subgraf din G , format din T și o coardă arbitrară, conține un singur ciclu simplu. Mulțimea tuturor astfel de cicluri este liniar independentă, deoarece fiecare din aceste cicluri conține o muchie (coarda respectivă) ce nu aparține celorlalte cicluri. Un rezultat important din punct de vedere teoretic afirmă: *Numărul ciclomatic al unui graf conex G este egal cu numărul de coarde al arborelui parțial din G .* Rezultatul respectiv apare și în legătură

cu soluționarea unor probleme de ordin practic. De exemplu, acesta este util la determinarea arborilor parțiali ai unui graf neorientat.

Ținând cont de faptul că numărul de muchii al oricărui arbore parțial al grafului $G = (X; U)$, $\text{card}X = n$, $\text{card}U = m$, este $n-1$, rezultă că numărul de coarde va fi $m-(n-1)$. Prin urmare pentru numărul ciclomantic al grafului obținem:

$$\nu(G) = m - n + 1.$$

În aceste condiții, rezultatul descris mai sus poate fi reformulat în modul următor: *numărul cociclomantic al unui graf conex neorientat $G = (X; U)$ este egal cu numărul de muchii al oricărui arbore parțial*. Corectitudinea afirmației imediat rezultă din faptul că orice cociclu conține exact o singură muchie a unui arbore parțial din G .

Hipergrafuri

Precum a arătat practica, grafurile au devenit un instrument eficient pentru modelarea și soluționarea problemelor de optimizare (și nu numai). Totuși, foarte repede s-a observat că, pentru unele probleme, folosirea aparatului teoriei grafurilor generează anumite dificultăți, ceea ce a condus la definirea unei noi structuri matematice – hipergraful, considerat drept o generalizare a grafului neorientat, în care muchiile sunt reprezentate prin submulțimi ale mulțimii de vârfuri din X . Necesitatea unei structuri noi, mai generale decât grafurile, a fost multiplu argumentată în mai multe lucrări. Una dintre ultimele articole în favoarea acestei idei este [16]. Dezvoltarea teoriei hipergrafurilor a pornit de la încercările de a generaliza mai multe rezultate din literatura de specialitate, ce țin de soluționarea problemelor aplicative ale teoriei grafurilor, precum ar fi:

- determinarea submulțimii minime de muchii ce conține vârfurile din X ;
- determinarea submulțimii maxime de muchii disjuncte două câte două în raport cu mulțimea de vârfuri X ;
- determinarea submulțimii minime de vârfuri ce formează o acoperire a mulțimii de hipermuchii.

Se consideră că primele rezultate care au constituit fundamentele teoriei hipergrafurilor aparțin matematicianului Ray Chaudhuri [83] și se referă la generalizarea metodei lanțurilor alternante pentru hipergrafuri, folosite mai apoi și pentru diverse probleme examinate pe grafuri. De asemenea, la dezvoltarea acestei teorii au contribuit și alți matematicieni prin rezultatele obținute și publicate într-un șir de lucrări: Erdos & Hajnal [85], Erdos & Gallai [84], I.Tomescu [297], A.Zykov [87], C.Berge [5], [6].

În conformitate cu cele expuse de către C.Berge în lucrarea [6], se *consideră* hipergraf determinat de o mulțime finită de elemente $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, familia $\mathcal{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ de submulțimi din X ce posedă proprietățile:

a) $E_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, m,$

b) $\bigcup_{i=1}^m E_i = X.$

Constatăm că anume această definiție a hipergrafului poate fi întâlnită în multiple lucrări științifice. Ca și în cazul grafurilor, elementele mulțimii X se numesc vârfuri, iar submulțimile $E_1, E_2, \dots, E_m \subset X$ se numesc muchii (hipermuchii) ale hipergrafului. Hipergraful cu mulțimea de vârfuri X și familia de submulțimi $\mathcal{E}$ se notează $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$.

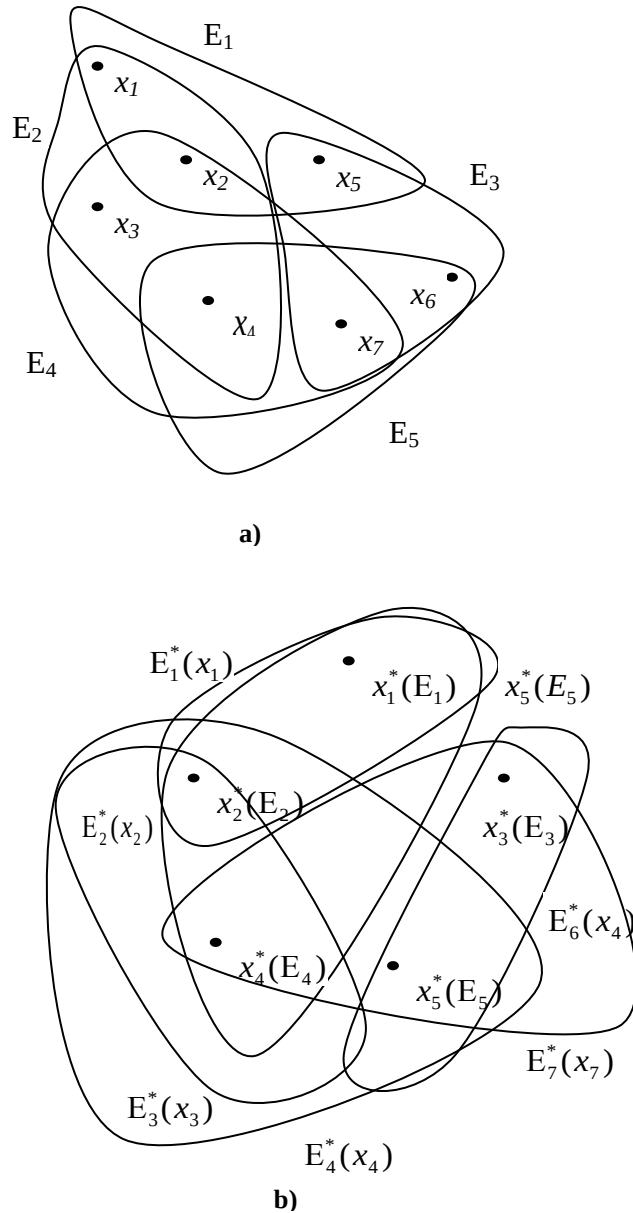


Fig. 1.1. Hipergraful H și dualul acestuia H^*

Urmând principiul dualității, deseori folosit în matematică, de rând cu noțiunea de hipergraf se operează și cu dualul acestuia [6]: *Hipergraful $\mathcal{H}^* = (X^*, \mathcal{E}^*)$ se numește dualul hipergrafului $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ dacă:*

a) $X^* = \mathcal{E}$;

b) $\mathcal{E}^* = X$;

c) *dacă E^* este o muchie din $\mathcal{H}^*$ ce corespunde vârfului x al hipergrafului $\mathcal{H}$, iar x^* este un vârf din $\mathcal{H}^*$ ce corespunde muchiei E a hipergrafului $\mathcal{H}$, atunci $\varphi(x, E) \Leftrightarrow \varphi(x^*, E^*)$.*

Dacă examinăm atent definițiile hipergrafului $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ și a dualului acestuia $\mathcal{H}^* = (X^*, \mathcal{E}^*)$, atunci observăm că are loc egalitatea $(\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}$. În figura 1.3 este reprezentat hipergraful $\mathcal{H}$ cu mulțimea de vârfuri $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ și mulțimea de muchii $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ și hipergraful dual $\mathcal{H}^*$ cu mulțimile $X^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*\}$, $\mathcal{E}^* = \{E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^*, E_5^*, E_6^*, E_7^*\}$, pentru care avem următoarea corespondență:

$$x_i^* \leftrightarrow E_i, \quad 1 \leq i \leq 5,$$

$$E_j^* \leftrightarrow x_j, \quad 1 \leq j \leq 7.$$

Notățiile $E_i^*(x_i)$, $1 \leq i \leq 5$, și $x_j^*(E_j)$, $1 \leq j \leq 7$, folosite în figura 1.b, înseamnă că muchia E_i^* din hipergraful dual $\mathcal{H}^*$ corespunde vârfului x_i din $\mathcal{H}$, iar vârful x_j^* din hipergraful $\mathcal{H}^*$ corespunde muchiei E_j din $\mathcal{H}$.

Numărul de muchii incidente unui vârf x al hipergrafului $\mathcal{H}$ se numește *grad* al vârfului x , iar numărul de vârfuri incidente muchiei u se numește *grad* al muchiei u .

Dacă $A(\mathcal{H})$ este matricea de incidență a unui hipergraf $\mathcal{H}$ [6], atunci este adevărată egalitatea:

$$A^T(\mathcal{H}) = A(\mathcal{H}^*),$$

unde $A^T(\mathcal{H})$ este matricea transpusă a matricei $A(\mathcal{H})$.

În teoria hipergrafurilor, la fel ca și în cazul grafurilor, este importantă problema existenței și construirii unui hipergraf, cunoscând doar unele proprietăți ale acestuia. În acest context, un rol aparte îi revine problemei restabilirii hipergrafului în baza gradelor vârfurilor $x_i \in X$ și a muchiilor $E_j \in \mathcal{E}$.

Să notăm prin $d(x_i)$ gradul vârfului x_i , $1 \leq i \leq n$.

Din punct de vedere teoretic prezintă interes un rezultat ce ține de existența hipergrafurilor [88], [89]: Pentru șirurile de numere întregi $r_1, r_2, \dots, r_m$ și $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ există un hipergraf $\mathcal{H}$ cu mulțimea de vârfuri $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și cu mulțimea de muchii $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$, încât $d_{\mathcal{H}}(x_i) = d_i, 1 \leq i \leq n$, și $\text{card } E_j = r_j, 1 \leq j \leq m$, dacă și numai dacă

$$1) \sum_{j=1}^m \min\{r_j, k\} \geq d_1 + d_2 + \dots + d_k \quad (k < n),$$

$$2) \sum_{j=1}^m r_j = d_1 + d_2 + \dots + d_n.$$

În cazul hipergrafurilor, noțiunile de lanț și ciclu diferă puțin de noțiunile respective în grafuri, dat fiind specificul acestei structuri matematice și, deseori, unii cercetători folosesc diverse variații ale acestora în cercetările sale [293]. Rolul lanțurilor și ciclurilor în cazul hipergrafurilor este nu mai prejos decât în cazul grafurilor. Astfel, conform [6], [45], succesiunea μ , ce conține doar vârfuri și muchii ale hipergrafului $\mathcal{H} = (X; \mathcal{E})$ și posedă proprietățile:

- a) oricare două elemente vecine din μ nu aparțin aceleiași mulțimi X sau $\mathcal{E}$;
- b) oricare două elemente vecine din μ sunt incidente,

se numește lanț al hipergrafului $\mathcal{H}$. Primul și ultimul element din μ se numesc extremități ale lanțului. Lanțul ce nu conține repetări ale elementelor hipergrafului se numește lanț simplu.

Conform acestei definiții, extremități ale unui lanț pot fi atât vârfurile, cât și muchiile hipergrafului. Un hipergraf se consideră conex dacă și numai dacă oricare două vârfuri ale sale pot fi unite printr-un lanț simplu.

Relația „două elemente ale hipergrafului sunt legate cel puțin printr-un lanț” este o relație de echivalență. Clasele de echivalență, determinate de această relație, formează o divizare a mulțimii elementelor hipergrafului $\mathcal{H}$ care, la rândul său, generează subhipergrafuri conexe, numite componente conexe ale lui $\mathcal{H}$. Numărul componentelor conexe din $\mathcal{H}$ se notează prin $c(\mathcal{H})$. Dacă ținem cont de modul în care se construiește hipergrafului dual, obținem:

$$c(\mathcal{H}^*) = c(\mathcal{H}).$$

În cazul hipergrafurilor are loc analogul teoremei Menger, cunoscută pentru grafurile neorientate [80], [302], chestiune importantă pentru majoritatea problemelor atât de ordin teoretic cât și de ordin practic. Astfel [6], un hipergraf $\mathcal{H}$ conține k lanțuri simple disjuncte ce unesc două elemente nonincidente a, b din $\mathcal{H}$ dacă și numai dacă după eliminarea din $\mathcal{H}$ a oricăror $q < k$ elemente, distincte de a și b , se obține un hipergraf în care există lanț simplu ce unește elementele a și b .

Menționăm că eliminarea muchiilor se face prin păstrarea în $\mathcal{H}$ a vârfurilor incidente lor. Același lucru are loc și în cazul eliminării vârfurilor. Doar la eliminarea tuturor vârfurilor ce formează o muchie E se lichidează și muchia respectivă (conform definiției, hipergraful nu conține muchii vide, adică fără vârfuri). Ca și în cazul grafurilor, pentru un hipergraf se introduce noțiunea de ciclu și ciclu simplu [6]: *lanțul μ , extremitățile căruia coincid se numește ciclu. Ciclul ce nu conține repetări ale elementelor hipergrafului, cu excepția extremităților sale, se numește ciclu simplu.*

Pentru orice hipergraf $\mathcal{H} = (X; \mathcal{E})$ poate fi construit un graf neorientat, graful König, notat prin $K(\mathcal{H})$. Vârfurile grafului $K(\mathcal{H})$ corespund mulțimii $X \cup \mathcal{E}$, iar mulțimea de muchii este

$$U = \{(x, E) : x \in X, E \in \mathcal{E}, \text{ și } \varphi(x, E) \text{ în } \mathcal{H}\}.$$

Graful $K(\mathcal{H})$ se mai numește reprezentare König a hipergrafului $\mathcal{H}$. Observăm că $K(\mathcal{H})$ este un graf bipartit.

Reprezentarea König a hipergrafului $\mathcal{H} = (X; \mathcal{E})$, cu $\text{card} X = 12$, $\text{card } \mathcal{E} = 7$, din figura 1.2a, este dată în figura 1.2b.

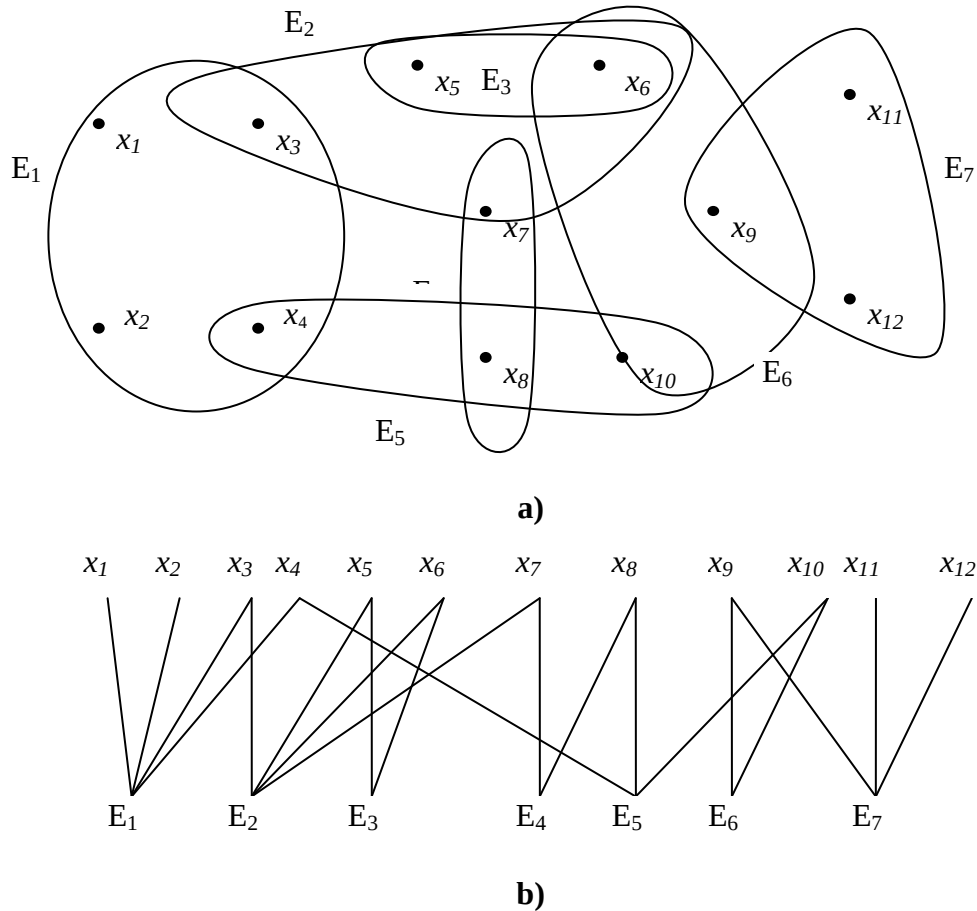


Fig. 1.2. a) Hipergraful $\mathcal{H}$ și b) reprezentarea König $K(\mathcal{H})$ a acestuia

Numărul ciclomatic al hipergrafului $\mathcal{H} = (X; \mathcal{E})$ se definește ca numărul ciclomatic al reprezentării König $K(\mathcal{H})$ [6], [87]. Notăm prin $\nu(\mathcal{H})$ numărul ciclomatic al hipergrafului $\mathcal{H}$, iar prin $\nu(K(\mathcal{H}))$ – numărul ciclomatic al reprezentării König $K(\mathcal{H})$ a acestui hipergraf. Conform [6]:

$$\nu(\mathcal{H}) = \nu(K(\mathcal{H})) = \sum_{E \in \mathcal{E}} (\text{card} E - 1) - \text{card} X + c(\mathcal{H}).$$

Dacă hipergraful $\mathcal{H} = (X; \mathcal{E})$ conține n vârfuri și m muchii, atunci

$$\nu(\mathcal{H}) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \text{card} E - m + n + c(\mathcal{H}).$$

Luând în considerație această formulă de calcul a numărului ciclomatic, precum și faptul că componentelor conexe și ciclurilor simple ale hipergrafului $\mathcal{H}$ le corespund în mod univoc componente conexe și cicluri simple ale grafului König $K(\mathcal{H})$, ușor deducem condițiile în care un hipergraf nu conține cicluri simple: un hipergraf $\mathcal{H}$ nu conține cicluri simple sau conține un singur ciclu simplu dacă și numai dacă $\nu(\mathcal{H}) = 0$ sau, respectiv, $\nu(\mathcal{H}) = 1$.

Dacă apelăm acum la hipergraful dual $\mathcal{H}^*$, obținem relațiile:

$$\begin{aligned} \nu(\mathcal{H}^*) &= \nu(\mathcal{H}); \\ \sum_{E \in \mathcal{E}} \text{card} E &= \sum_{E^* \in \mathcal{E}^*} \text{card} E^*. \end{aligned}$$

Printre matematicienii care au contribuit în mod esențial la studierea spațiului ciclurilor unui hipergraf se evidențiază A.Zzkov și L.Lovasz. În lucrarea [87] se demonstrează că un hipergraf $\mathcal{H} = (X; \mathcal{E})$ nu conține cicluri dacă și numai dacă

$$\text{card} \bigcup_{E_j \in \mathcal{E}'} E_j > \sum_{E_j \in \mathcal{E}} (\text{card} E_j - 1),$$

pentru orice submulțime nonvidă $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$.

Aplicând acest rezultat pentru hipergraful dual $\mathcal{H}^*$ obținem afirmația duală: Hipergraful $\mathcal{H} = (X; \mathcal{E})$ nu conține cicluri dacă și numai dacă pentru orice submulțime nonvidă $X' \subseteq X$ are loc inegalitatea

$$\text{card} \bigcup_{x \in X'} \mathcal{E}(x) > \sum_{x \in X'} (\text{card} \mathcal{E}(x) - 1),$$

unde $\mathcal{E}(x)$ este mulțimea muchiilor hipergrafului, incidente vârfului x .

Un alt rezultat ce ține de existența ciclurilor într-un hipergraf a fost obținut de către L.Lovasz în legătură cu încercarea de a clasifica hipergrafurile arborescente. Astfel, în lucrarea [90] se arată că *dacă hipergraful $\mathcal{H} = (X; \mathcal{E})$ nu conține cicluri cu lungimea $l \geq 3$ și sunt satisfăcute condițiile*

a) $\text{card } E \geq 2$, pentru $\forall E \in \mathcal{E}$;

b) $\text{card}(E_i \cap E_j) \leq 2$, pentru $\forall E_i, E_j \in \mathcal{E}, i \neq j$,

atunci

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} (\text{card } E - 2) = \text{card } X - c(\mathcal{H}) - \mu(\mathcal{H}),$$

unde $\mu(\mathcal{H})$ reprezintă numărul de blocuri ale lui $\mathcal{H}$, care nu sunt vârfuri izolate.

Este necesar de menționat că, în teoria hipergrafurilor, numărul ciclomatic $\nu(\mathcal{H})$ joacă un rol nu mai puțin important decât în teoria grafurilor. În cazul unui hipergraf, eliminarea unui element al său influențează numărul ciclomatic la fel ca și eliminarea vârfurilor în cazul unui graf. Din aceste considerente, este mai dificil de stabilit niște proprietăți ale lui $\nu(\mathcal{H})$, similare celor cunoscute pentru grafuri.

Matroizi

În combinatorică, matroidul este o structură matematică ce generalizează noțiunea de independență liniară din spațiile vectoriale. Teoria matroizilor utilizează într-un mod extensiv terminologia algebrei liniare și teoriei grafurilor datorită faptului că ea reprezintă o abstracție a noțiunilor principale din aceste domenii ale matematicii.

Pentru prima dată, noțiunea de matroid a fost introdusă în 1935 de către Whitney în lucrarea [94]. Aproape simultan, în anul 1936, a apărut articolul lui Saunders MacLane [95] cu privire la noțiunea de matroizi în geometria proiectivă. Un an mai târziu, B.L. van der Waerden a examinat legătura dintre dependența algebrică și cea liniară [96]. În 1940, Richard Rado a pus bazele teoriei sistemelor independente în contextul dezvoltării teoriei transversalelor.

O figură proeminentă în domeniul teoriei matroizilor este considerat W.T. Tutte, care a publicat în anii 50 ai secolului trecut un șir de lucrări fundamentale [97], [98], [99]. Printre rezultatele importante obținute de Tutte, care au avut o influență considerabilă asupra dezvoltării unor compartimente importante ale matematicii moderne, menționăm: caracterizarea matroizilor binari, regulari și a celor grafici; teorema cu privire la reprezentarea unui matroid regulat; dezvoltarea teoriei grupurilor lanțurilor în structuri discrete și a matroizilor respectivi; teorema de omotopie, prin care se generalizează noțiunea de drum într-un graf cu ajutorul matroizilor și se arată că drumurile închise pot fi reprezentate ca compoziție de drumuri elementare, astfel încât omotetic ele sunt echivalente unui drum închis trivial [100], [101]. La dezvoltarea teoriei matroizilor, de asemenea, au contribuit: Henry Crapo [102] (a generalizat și a studiat polinomul Tutte, cunoscut în literatura de specialitate ca polinomul Crapo); Thomas Brylawsky [103] (a

obținut rezultate fundamentale la studierea matroizilor Tutte („dicromate”)); Paul Seymour [104] (a demonstrat teorema cu privire la descompunerea matroizilor regulați).

Prima lucrare fundamentală în care au fost clasificate și sistematizate toate rezultatele ce țin de dezvoltarea teoriei matroizilor este cea a lui Dominic Welsh [105]. Monografia lui Welsh a fost completată cu rezultate noi și reeditată de mai multe ori, ultima ediție fiind din anul 2010 [106].

În prezent sunt folosite mai multe definiții echivalente ale noțiunii de matroid. Mai des se întâlnesc definițiile formulate în termenii mulțimilor independente, ai mulțimilor închise, ai bazelor, circuitelor, etc.

În conformitate cu [92], noțiunea de matroid se definește ca o familie specială $\mathcal{E}$ de submulțimi a unei mulțimi finite de elemente X , considerate independente:

Perechea $(X; \mathcal{E})$ ce posedă proprietățile:

1. $\emptyset \neq \mathcal{E}$;
2. dacă $A \in \mathcal{E}$ și $B \subset A$, atunci $B \in \mathcal{E}$;
3. dacă $A, B \in \mathcal{E}$ și $\text{card} A > \text{card} B$, atunci există un element $x \in A \setminus B$, încât $B \cup \{x\} \in \mathcal{E}$,

se numește matroid și se notează prin $M = (X; \mathcal{E})$. Familia $\mathcal{E}$ se numește familie de mulțimi independente.

În mai multe surse bibliografice, definiția matroidului poate fi întâlnită și în termenii ciclurilor [92], [97], [108] (menționăm că aceste interpretări ale matroidului sunt echivalente):

Perechea $(X; \mathcal{C})$, unde X este o mulțime arbitrară de elemente, iar $\mathcal{C}$ – o familie nevidă a submulțimilor din X , numite cicluri, care posedă proprietățile:

1. orice ciclu nu este submulțime a altui ciclu;
2. dacă $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ și $x \in C_1 \cap C_2$, atunci $C_1 \cap C_2 \setminus \{x\}$ conține ciclu,

se numește matroid.

În lucrările [92], [97], [99], [105]-[108] sunt descrise proprietățile de bază ale matroizilor, importante din punct de vedere al fundamentării teoretice a unor metode de soluționare a problemelor de ordin teoretico-aplicativ. Se introduc noțiuni noi pentru studierea acestei structuri matematice, printre care noțiunea de bază și rang a matroidului [92], [106]: *mulțimea de elemente $B \subset X$ a unui matroid $M = (X; \mathcal{E})$ se numește submulțime independentă a mulțimii $A \subset X$, dacă*

- 1) $B \subset A$;
- 2) $B \in \mathcal{E}$;
- 3) pentru $\forall C \in \mathcal{E}$, unde $C \subset A$, rezultă $C \subset B$.

Conform celor stabilite deja în literatura de specialitate, familia tuturor submulțimilor independente maximale ale unei mulțimi $A \subset X$ se va nota prin $\hat{A}$.

Din punct de veder teoretic sunt importante cercetările asupra matroidizilor, în care aceștea sunt examinați în contextul unor proprietăți ale familiei submulțimilor independente maximale. Conform [106], condiția: *dacă $A, B \in \mathcal{E}$ și $\text{card}A > \text{card}B$, atunci există un element $x \in A \setminus B$, încât $B \cup \{x\} \in \mathcal{E}$* , din definiția de mai sus a matroidului este echivalentă cu următoarea: *dacă $A \subset X$ și $B, C \in \hat{A}$, atunci $\text{card}B = \text{card}C$* .

Din cele expuse rezultă că matroidul este *perechea de mulțimi $(X; \mathcal{E})$ ce respectă condițiile:*

1. $\emptyset \neq \mathcal{E}$;
2. dacă $A \in \mathcal{E}$ și $B \subset A$, atunci $B \in \mathcal{E}$;
3. dacă $A \subset X$ și $B, C \in \hat{A}$, atunci $\text{card}B = \text{card}C$.

În calitate de mulțime A , menționată în definiția mulțimii independente, poate figura însuși mulțimea X . Pentru X totdeauna există mulțime independentă maximală $B \subset X$. O astfel de mulțime se numește bază a matroidului $M = (X; \mathcal{E})$. În legătură cu aceasta este important următorul rezultat: *pentru orice matroid $M = (X; \mathcal{E})$ este adevărată egalitatea: $\hat{X} \neq \emptyset$* [92]. Vom prezenta în continuare o demonstrație a acestei afirmații, diferită de cea din lucrarea menționată, dar mai accesibilă pentru aplicațiile practice ulterioare.

Pornind de la o mulțime $B \neq \emptyset$, vom construi iterativ o bază a matroidului $M = (X; \mathcal{E})$:

- a) considerăm un element $x \in X \setminus B$, pentru care se respectă condiția $B \cup \{x\} \in \mathcal{E}$.

Dacă astfel de element nu există, atunci mulțimea obținută B este bază a matroidului $M = (X; \mathcal{E})$;

- b) exindem mulțimea B , incluzând în ea elementul x . Pentru mulțimea formată B repetăm punctul a).

Ca rezultat al aplicării pașilor a) și b), obținem o mulțime $B \neq \emptyset$, care formează o bază pentru M . Într-adevăr, să notăm prin $B_0, B_1, \dots, B_K = B$ șirul de mulțimi, construite iterativ, precum s-a indicat mai sus (evident, $B \neq \emptyset$ și $B_i \in \mathcal{E}$, $0 \leq i \leq K$). Să presupunem că în rezultat am obținut mulțimea B , care nu este maximal independentă ($B \notin \hat{X}$). Atunci există $B' \subset X$, $B' \neq B$, ce respectă condițiile: $B' \subset B$; $B' \in \mathcal{E}$. Alegem în continuare o submulțime $B'' \subset B'$, încât $\text{card}B'' = \text{card}B + 1$, $B \subset B''$ și $B'' \in \mathcal{E}$. Fie $x \in B' \setminus B$. Conform celor examinate mai sus (punctul a) și b)), rezultă că la o iterație i am avut: $B_{i-1} \cup \{x\} \notin \mathcal{E}$. Însă din $x \in B''$ și $B_{i-1} \in B''$ rezultă $B_{i-1} \cup \{x\} \in \mathcal{E}$. Contradicția obținută demonstrează afirmația $\hat{X} \neq \emptyset$.

Din teorema demonstrată rezultă că toate bazele unui matroid au același cardinal.

Fie $A \subset X$ o mulțime de elemente a matroidului $M = (X; \mathcal{E})$. Cardinalul submulțimii independente maximale a mulțimii A se numește rang al acestei mulțimi și se notează prin $r(A)$. Astfel, $r(A) = \max_{Y \subset A, Y \in \mathcal{E}} \{\text{card} Y\}$.

Numărul $r = r(M) = r(X)$ se numește **rang** al matroidului $M = (X; \mathcal{E})$. În lucrarea [107] sunt enumerate mai multe relații ce țin de estimarea numerică a rangului unui matroid: Pentru oricare două elemente $x, y \in X$ și oricare două mulțimi $A, B \in \mathcal{E}$ ale matroidului $M = (X; \mathcal{E})$ sunt verificate relațiile:

- a) $0 \leq r(A) \leq \text{card} A$ și $r(A) = \text{card} A \Leftrightarrow A \in \mathcal{E}$;
- b) dacă $\text{card} A \leq \text{card} B$, atunci $r(A) \leq r(B)$;
- c) $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$;
- d) $r(A) \leq r(A \cup \{x\}) \leq r(A) + 1$;
- e) dacă $r(A \cup \{x\}) = r(A \cup \{y\}) = r(A)$, atunci $r(A \cup \{x, y\}) = r(A)$.

Importanța matroidurilor în optimizarea discretă, pe lângă cele menționate anterior, mai este determinată și de faptul că pe astfel de structuri putem rezolva în mod eficient un șir de probleme importante, aplicând algoritmul Greedy, cu ajutorul căruia găsim soluția optimă, dacă modelul matematic respectiv este un matroid. În cazul când acesta nu este matroid, determinarea soluției examinări speciale. Formulăm următoarea problemă de optimizare discretă:

Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o mulțime finită de elemente pe care este definită funcția $\varphi: X \rightarrow R^+$. Numărul $\varphi(x)$ se numește pondere a elementului $x \in X$. Formăm o familie de submulțimi din X , notată prin $\mathcal{E}$. Să se determine mulțimea $A \in \mathcal{E}$, pentru care

$$\varphi(A) = \max_{Y \in \mathcal{E}} \varphi(Y),$$

unde $\varphi(Y)$ reprezintă ponderea mulțimii $Y \in \mathcal{E}$: $\varphi(Y) = \sum_{y \in Y} \varphi(y)$.

Fără a pierde din generalitate, pentru elementele mulțimii X , vom considera $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) \geq \dots \geq \varphi(x_n)$.

La soluționarea acestei probleme poate fi folosit un algoritm eficient – algoritmul Greedy. Considerând inițial $A = \emptyset$, iterativ, la mulțimea A se adaugă câte un element x_i din X , pentru care $A \cup \{x_i\} \in \mathcal{E}$. Evident, complexitatea algoritmului Greedy este liniară – $O(n)$ (fără a lua în calcul procedura de sortare a elementelor din X în raport cu ponderile acestora – $O(n \log n)$, și verificarea condiției $A \cup \{x_i\} \in \mathcal{E}$ [92], [107]).

Soluția obținută prin aplicarea algoritmului Greedy nu totdeauna poate fi cea optimală. Aceasta depinde de faptul dacă perechea $(X; \mathcal{E})$ reprezintă un matroid sau nu. În legătură cu problema formulată mai sus, e necesar de menționat un rezultat, demonstrația căruia se regăsește integral în lucrarea [92]: *dacă $M = (X; \mathcal{E})$ este un matroid, atunci pentru orice funcție a ponderilor $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ algoritmul Greedy determină mulțimea $A \in \mathcal{E}$ de pondere maximă. Dacă $M = (X; \mathcal{E})$ nu este matroid, atunci totdeauna poate fi găsită o funcție $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^+$, pentru care mulțimea găsită prin aplicarea algoritmului Greedy nu este de pondere maximă.*

Dualitatea în matematică reprezintă un instrument puternic pentru analizarea și soluționarea problemelor de optimizare. (Aici ar fi suficient să ne amintim de dualitatea în programarea liniară.) Deseori, obținerea soluției optimale poate fi privită ca un proces elegant, trecând la studierea modelului dual al problemei respective. Posibilități suplimentare în acest sens oferă matroidii duali.

Fie $M = (X; \mathcal{E})$ un matroid. Pentru submulțimea $A \subset X$ a matroidului $M = (X; \mathcal{E})$ vom nota prin $\bar{A}$ complementara acesteia, adică $\bar{A} = X \setminus A$. Dacă B_s este familia tuturor bazelor matroidului M , iar $B \in B_s$ – una dintre baze, atunci mulțimea $\bar{B}$ se va numi **cobază** a lui M . Familia tuturor cobazelor le vom nota prin B_{s^*} . Această familie posedă proprietățile [108]:

1. $B_{s^*} \neq \emptyset$;
2. dacă $\bar{B}_1, \bar{B}_2 \in B_{s^*}$ și $\bar{B}_1 \neq \bar{B}_2$, atunci $\bar{B}_1 \not\subseteq \bar{B}_2$ și $\bar{B}_2 \not\subseteq \bar{B}_1$;
3. dacă $\bar{B}_1, \bar{B}_2 \in B_{s^*}$, atunci pentru oricare element $b_1 \in \bar{B}_1$ există un element $b_2 \in \bar{B}_2$, încât $(\bar{B}_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\} \in B_{s^*}$.

Luând în considerație cele menționate mai sus constatăm că, familia cobazelor B_{s^*} definește pe mulțimea X un matroid, în care cobazele matroidului inițial M joacă rolul bazelor. Acest matroid se numește matroid dual al matroidului M și se notează prin M^* . Evident, dualul matroidului dual coincide cu matroidul inițial, adică $(M^*)^* = M$.

Mulțimile dependente și cele independente ale matroidului M se numesc mulțimi codependente și, respectiv, coindpendente în matroidul dual M^* . Dacă $r(M)$ și $r^*(M^*)$ sunt rangurile matroidelor M și M^* , atunci $r(M) + r^*(M^*) = \text{card}X$.

Fie A o afirmație referitoare la matroidul M . Dacă în această afirmație înlocuim fiecare noțiune referitoare la matroid prin conoțiunea respectivă, atunci obținem o afirmație duală celei inițiale. Prin urmare, este adevărată afirmația:

Principiul dualității. *Dacă o afirmație este adevărată pentru orice matroid, atunci și afirmația duală este adevărată pentru orice matroid.*

Pornind de la definiția matroidului, în lucrările [107], [108] se demonstrează un șir de proprietăți importante care ușor pot fi extinse în baza principiului dualității. Printre aceste proprietăți menționăm:

- a) o submulțime de elemente ale unui matroid este dependentă dacă și numai dacă intersecția acesteia cu fiecare cobază nu este vidă;
- b) o submulțime de elemente ale unui matroid este codependentă dacă și numai dacă intersecția acesteia cu fiecare bază nu este vidă;
- c) pentru orice mulțime independentă nevidă $Y \subset X$ a matroidului $M = (X; \mathcal{E})$ există cociclu C^* încât $\text{card}(Y \cap C^*) = 1$;
- d) pentru orice ciclu C și orice cociclu C^* este adevărată relația:

$$\text{card}(C \cap C^*) \neq 1;$$

- e) submulțimea de elemente $Y \subseteq X$ a unui matroid $M = (X; \mathcal{E})$ este ciclu dacă și numai dacă Y este mulțimea minimală dintre toate submulțimile nevide din X ce posedă proprietatea:

$$\text{card}(Y \cap C^*) \neq 1,$$

pentru orice cociclu C^* .

Dacă în calitate de bază unică a matroidului $M = (X; \mathcal{E})$, $|X| \neq \emptyset$, se alege însăși mulțimea X , atunci obținem un matroid, numit *matroid liber* (sau, în unele surse, *matroid discret*) pe mulțimea X . Matroidul dual al acestuia se numește matroid trivial [107].

Matroizii reprezintă structuri matematice eficiente la studierea diferitelor proprietăți ale grafurilor și hipergrafurilor. Oricărui graf i se poate asocia un matroid. De exemplu, dacă G este un graf conex cu n vârfuri și m muchii, atunci construim un matroid $M(G) = (X; \mathcal{E})$, în care mulțimea X reprezintă mulțimea de muchii ale grafului G . Baze ale acestui matroid vor fi toate submulțimile din X , care reprezintă în G un arbore parțial. Rangul acestui matroid este $r(M) = n - 1$ și coincide cu rangul grafului G . Corangul matroidului $r^*(M) = m - n + 1$ coincide cu numărul cicromatic al grafului G .

Fie B o bază a matroidului $M(G)$. Cobaza respectivă $\bar{B}$ se mai numește coarbore parțial. Aceasta reprezintă mulțimea de muchii ce trebuie eliminată din G pentru a obține un arbore parțial. O submulțime de elemente din $M(G)$ este codependentă dacă și numai dacă eliminarea muchiilor respective acestei mulțimi din G mărește numărul de componente conexe ale grafului

G (a se vedea proprietatea 2 menționată anterior). Astfel, mulțimile codependente ale matroidului $M(G)$ reprezintă o tăietură în graful G (ciclu), ceea ce înseamnă că ciclurile și tăieturile unui graf sunt noțiuni reciproc duale. Matroidul dual $M^*(G)$ al matroidului $M(G)$ se numește matroid al tăieturilor grafului G . Ușor se verifică afirmația: *pentru un arbore T , matroidul $M(T)$ este liber, iar matroidul $M^*(T)$ este trivial.*

Complexe de simplexe

Vom defini mai întâi noțiunea de simplex în spațiul vectorial R^n . Elementele spațiului le vom numi *puncte*. Alegem în R^n punctele $a_0, a_1, \dots, a_r$, încât vectorii $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_r - a_0$ să fie liniar independenți. În conformitate cu rezultatele cunoscute în domeniu [108], [305], drept simplex r -dimensional în R^n este considerată mulțimea de puncte

$$S^r = [a_0, a_1, \dots, a_r] = \left\{ x \in R^n : x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r, \lambda_j \geq 0, 0 \leq j \leq r, \sum_{j=0}^r \lambda_j = 1 \right\}$$

Vom conveni, mulțimea vidă să se numească simplex cu dimensiunea (-1) [112].

Punctele $a_0, a_1, \dots, a_r$ se numesc vârfuri ale simplexului $S^r = [a_0, a_1, \dots, a_r]$, iar $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – coordonate *baricentrice* ale punctului $x \in S^r$. Conform celor menționate mai sus, rezultă că un simplex r -dimensional este o mulțime închisă și convexă din R^n . Punctul $x_c \in S^r$, coordonatele baricentrice ale căruia sunt $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_r = \frac{1}{r+1}$, se numește centru al simplexului S^r . (Conform definiției simplexului [112], la schimbarea cu locurile a punctelor $a_0, a_1, \dots, a_r$ obținem același simplex S^r .)

În spațiul vectorial R^n , un simplex r -dimensional poate fi interpretat ca o învelitoare convexă [111] a $r+1$ puncte ce nu aparțin unui subspațiu cu dimensiunea $r-1$, ceea ce ar însemna că acesta este un poliedru în subspațiul R^n . Similar poliedrelor, pentru un simplex se definește noțiunea de fațetă: *Dacă $a_0, a_1, \dots, a_r$ sunt vârfurile unui simplex S^r , atunci orice simplex de forma $[a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$ pentru care $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, 2, \dots, r\}$, se numește fațetă a lui S^r . Fațetele 0-dimensionale ale unui simplex sunt vârfuri ale acestuia.*

Ținând cont de această definiție determinăm:

$$a) F_q(S^r) = C_{r+1}^{q+1} = \frac{(r+1)!}{(q+1)! \cdot (r-q)!} - \text{numărul de fațete cu dimensiunea } q \text{ a unui simplex } r-$$

dimensional S^r , $0 \leq q \leq r$;

b) $F(S^r) = \sum_{q=0}^r F_q(S^r) = 2^{r+1}$ – numărul tuturor fațetelor simplexului S^r .

Vom nota prin $\mathcal{T}$ o familie de simplexe arbitrare cu dimensiunea r din spațiul $R^n, 0 \leq r \leq n$:

$$\mathcal{T} = \{S_\alpha^r : \alpha \in I_r, 0 \leq r \leq n\},$$

unde I_r este mulțimea indicilor simplexelor r -dimensionale din $\mathcal{T}$. O astfel de familie $\mathcal{T}$ determină un complex simplicial, dacă se respectă proprietățile:

- 1) intersecția oricăror două simplexe din $\mathcal{T}$ este vidă sau reprezintă un simplex din $\mathcal{T}$;
- 2) dacă $S_\alpha^r \in \mathcal{T}$, atunci toate fațetele simplexului S_α^r sunt elemente ale familiei $\mathcal{T}$,

Dimensiunea maximă a simplexelor din $\mathcal{T}$ se numește dimensiune a complexului și se notează prin $\dim \mathcal{T}$. În calitate de cel mai simplu complex simplicial cu dimensiunea r , $0 \leq r \leq n$, poate servi orice simplex S^r împreună cu toate fețele sale.

Fie $a_0, a_1, \dots, a_r$ vârfurile unui simplex S^r . Dacă fixăm o ordine oarecare ale celor $r+1$ vârfuri din S^r , atunci se spune că S^r este un simplex orientat. Numărul de orientări posibile ale lui S^r este $(r+1)!$ și coincide cu numărul de permutări ale primelor $r+1$ numere naturale.

Se consideră că două simplexe r -dimensionale $S_1^r = [a_0, a_1, \dots, a_r]$ și $S_2^r = [a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_r}]$ sunt orientate la fel dacă permutarea

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & r \\ j_0 & j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

este pară [108], [305]. Dacă permutarea este impară, atunci simplexele S_1^r și S_2^r sunt considerate de orientări diferite. În acest caz scriem $S_1^r = \varepsilon^P S_2^r$, unde ε^P reprezintă paritatea permutării P .

Pe mulțimea tuturor simplexelor r -dimensionale și orientate ale unui complex simplicial $\mathcal{K}$ definim o funcție Ψ^r cu valori întregi, ce posedă proprietatea:

$$\Psi^r(-S^r) = -\Psi^r(+S^r). \quad (1.5)$$

Această funcție se numește lanț r -dimensional al complexului $\mathcal{K}$ [305].

Formal, un lanț r -dimensional din $\mathcal{K}$ poate fi definit ca o combinație liniară de tipul

$$\sigma^r = \sum_{\alpha} g_{\alpha} \cdot A_{\alpha}^r \quad (1.6)$$

unde A_{α}^r sunt simplexele r -dimensionale ale complexului $\mathcal{K}$, iar coeficienții g_{α} – elementele unui grup oarecare G . Se consideră că doar un număr finit de coeficienți sunt diferiți de elementul neutru al grupului menționat G [108].

Drept lanț 0-dimensional Ψ^0 poate fi considerată orice funcție cu valori întregi, definită pe mulțimea de vârfuri a complexului $\mathcal{K}$. Suma tuturor valorilor funcției Ψ^0 , calculată în vâfurile lui $\mathcal{K}$, se numește indice al lanțului Ψ^0 și se notează prin $I(\Psi^0)$.

Fără a depune un efort special, constatăm că familia tuturor lanțurilor r -dimensionale ale unui complex simplicial $\mathcal{K}$ formează un grup abelian în raport cu operația de adunare, definind suma a două lanțuri ca sumă obișnuită a funcțiilor respective.

Fie $S_1^r, S_2^r, \dots, S_t^r$ simplexele r -dimensionale orientate ale complexului simplicial $\mathcal{K}$. Lanțul Ψ^r ce primește valoarea zero pentru toate simplexele, cu excepția unui simplex S_i^r , pentru care $\Psi^r(S_i^r)=1$, se va nota prin însuși simplexul respectiv S_i^r . Astfel, orice lanț Ψ^r poate fi reprezentat prin combinația liniară: $\Psi^r = \alpha_1 S_1^r + \alpha_2 S_2^r + \dots + \alpha_t S_t^r$.

Reprezentările lanțului r -dimensional în forma (1.5) și (1.6) sunt echivalente.

În capitolul 2 vom vedea că un complex de relații multi-are poate fi interpretat și ca un complex simplicial abstract, la studierea căruia pot fi folosite unele metode de studiu pentru complexe simpliciale clasice examinate în [108], [305], însă diferă de ultimele după structură

1.2. Transversale

Transversala este o noțiune luată din teoria mulțimilor care se regăsește, practic, în toate direcțiile de cercetare ale matematicii discrete. Se folosește, de asemenea, în logică și algebra liniară.

În cazul unei familii $\mathcal{F}$ de mulțimi, transversala T este o mulțime nouă ce conține câte un element din fiecare mulțime a familiei în cauză. Dacă mulțimile familiei $\mathcal{F}$ sunt disjuncte, atunci fiecare element al transversalei aparține exact unei mulțimi din $\mathcal{F}$. În caz contrar, elementele din T nu numai că sunt diferite [91], [294].

Transversala unei familii finite $\mathcal{F}$ formează o bază a așa-numitului matroid transversal, iar mulțimile independente ale acestui matroid formează o transversală parțială [304].

Definiția transversalei

Fie W o familie arbitrară de elemente, nu neapărat finită, iar $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_p, \dots\}$ – o familie de submulțimi din W . O submulțime $B \subset W$ se numește transversală a familiei $\mathcal{F}$ dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

$$a) \quad B \subset \bigcup_{A_i \in \mathcal{F}} A_i;$$

b) $\text{card}(A_i \cap B) = 1$, pentru $\forall A_i \in \mathcal{F}$.

Astfel este interpretată noțiunea de transversală în lucrările [91], [92]

Menționăm că, transversala B nu este neapărat element al familiei $\mathcal{F}$. În cazul când mulțimile familiei $\mathcal{F}$ sunt disjuncte două câte două, atunci fiecărui element al transversalei îi corespunde exact o mulțime din $\mathcal{F}$.

În caz general, mulțimile $A_i \in \mathcal{F}$ nu sunt disjuncte. Aceasta ne impune să generalizăm noțiunea de transversală [91], înlocuind condiția b) prin următoarea:

$$\text{card}(A_i \cap B) \geq 1 \text{ pentru orice mulțime } A_i \in \mathcal{F}.$$

Cardinalul transversalei minime a familiei $\mathcal{F}$ se notează prin $\tau(\mathcal{F})$.

În cazul când familia $\mathcal{F}$ și mulțimile A_i sunt finite, putem folosi o metodă simplă și eficientă de determinare a transversalei lui $\mathcal{F}$, elaborată de către X. Mary, care este bazată pe utilizarea unor rezultate din algebra booleană [93]. Ba mai mult, prin această metodă se calculează toate transversalele familiei $\mathcal{F}$. Conform metodei, procedăm în modul următor:

- 1) Fiecărui element din mulțimea $\bigcup_{A_i \in \mathcal{F}} A_i$ i se atribuie o variabilă ce poate primi una din valorile 0 sau 1;
- 2) Pentru fiecare mulțime A_i a familiei $\mathcal{F}$ construim disjuncția variabilelor ce reprezintă elementele din A_i ;
- 3) Formăm conjuncția tuturor disjuncțiilor obținute;
- 4) Folosind legea distributivă a conjuncției în raport cu disjuncția, precum și legile de absorbție, obținem forma normală disjunctivă minimă. Această formă disjunctivă este unică, iar conjuncțiile elementare respective reprezintă transversalele familiei $\mathcal{F}$.

Exemplu. Fie pentru mulțimea $W = \{1,2,3,4,5,6\}$ formăm familia de submulțimi $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, unde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1,2\}, \quad A_2 = \{2,3,5\}, \\ A_3 &= \{1,4,5\}, \quad A_4 = \{3,4,5,6\}. \end{aligned}$$

Elementelor mulțimii-reuniune $\bigcup_{A_i \in \mathcal{F}} A_i = \{1,2,3,4,5,6\} \subset W$ le punem în corespondență variabilele $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (considerăm că variabila x_i corespunde elementului i din reuniunea indicată, $1 \leq i \leq 6$).

După aplicarea pasului 2 și 3 al metodei descrise mai sus, obținem:

$$(x_1 \vee x_2) \& (x_2 \vee x_3 \vee x_5) \& (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \& (x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6).$$

Procedând în conformitate cu cele descrise în punctul 4 obținem forma normal disjunctivă minimă:

$$x_1 \& x_3 \vee x_1 \& x_5 \vee x_2 \& x_4 \vee x_2 \& x_5 \vee x_1 \& x_2 \& x_6.$$

Prin urmare, pentru familia de mulțimi $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ există cinci transversale:

$$B_1 = \{1, 3\},$$

$$B_2 = \{1, 5\},$$

$$B_3 = \{2, 4\},$$

$$B_4 = \{2, 5\},$$

$$B_5 = \{1, 2, 6\}.$$

În conformitate cu cele din [93], o familia $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}, n \geq 1$, se numește independentă, dacă există o permutare $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ a mulțimilor din $\mathcal{F}$, încât:

$$A_{i_k} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_{i_j} \neq \emptyset, 1 \leq k \leq n.$$

(Se consideră $\bigcup_{j=1}^0 A_{i_j} = \emptyset$). Familia vidă se consideră independentă.

Dacă $\mathcal{F}$ este o familie independentă, atunci și orice subfamilie din $\mathcal{F}$ este independentă. Evident, dacă $\mathcal{F}$ nu este independent, atunci ea conține cel puțin o submulțime independentă. Numărul maxim de mulțimi din $\mathcal{F}$ ce formează o subfamilie independentă se numește rang al familiei și se notează prin $\rho(\mathcal{F})$.

Fie $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p$ toate subfamiliile minimale, care nu sunt independente, ale familiei $\mathcal{F}$. Vom privi $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq p$, drept mulțimi, elemente ale cărora sunt $A_1, A_2, \dots, A_n$. Formăm familia $\mathcal{G} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p\}$. În acest caz există o legătură între noțiunile de transversală și independență, studiată în [87]: Subfamilia $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ este independentă dacă și numai dacă complementara $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$ reprezintă o transversală pentru $\mathcal{G}$.

Din această afirmație rezultă relația $\rho(\mathcal{F}) = n - \tau(\mathcal{G})$.

Transversala în hipergrafuri

Deoarece un hipergraf poate fi privit ca o familie de submulțimi ale unei mulțimi date X , noțiunile definite mai sus sunt aplicabile și în cazul hipergrafurilor.

Astfel, rang $\rho(\mathcal{H})$ al unui hipergraf finit $\mathcal{H} = (X; \mathcal{E})$ se numește rangul familiei tuturor muchiilor, privite drept submulțimi de vârfuri, incidente muchiilor respective. Cu alte cuvinte:

$$\rho(\mathcal{H}) = \rho(\{X(E) : E \in \mathcal{E}\}),$$

ceea ce înseamnă că din muchiile mulțimii $\mathcal{E}$ putem construi o succesiune din ρ muchii $E_1, E_2, \dots, E_\rho$, încât:

$$X(E_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} X(E_j) \neq \emptyset.$$

Pentru $\forall k = 1, 2, \dots, \rho$. În [87] se menționează că o astfel de succesiune, cu mai mult decât ρ muchii, nu poate fi construită. Fixând câte un vârf x_k în fiecare mulțime $X(E_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} X(E_j) \neq \emptyset$, formăm matricea de incidență $A(\mathcal{H})$ a hipergrafului, în care primele ρ linii corespund vârfurilor alese $x_1, x_2, \dots, x_\rho$, iar primele ρ coloane – muchiilor $E_1, E_2, \dots, E_\rho$. Matricea $A(\mathcal{H})$ va avea următoarea formă:

$$A(\mathcal{H}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\rho} & a_{1,\rho+1} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2\rho} & a_{2,\rho+1} & \dots & a_{2m} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3\rho} & a_{3,\rho+1} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{\rho,\rho+1} & \dots & a_{\rho,m} \\ a_{\rho+1,1} & & & \dots & a_{\rho+1,\rho} & a_{\rho+1,\rho+1} & \dots & a_{\rho+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,\rho} & a_{n,\rho+1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Matricea $A(\mathcal{H})$ se numește matrice ρ -triunghiulară. Determinarea mulțimii stabile maxime a unui hipergraf $\mathcal{H}^*$, pentru care este cunoscută matricea de incidență A , precum și calcularea rangului $\rho(\mathcal{H})$, se face prin reducerea matricei A la matricea $A(\mathcal{H})$ cu ajutorul unui șir de permutări ale liniilor și coloanelor din A . Problema în cauză își găsește mai multe aplicații practice, de exemplu, la soluționarea sistemelor mari de ecuații liniare.

Vorbind despre hipergraful $\mathcal{H}$ și dualul acestuia $\mathcal{H}^*$, putem stabili relația dintre rangurile acestora. Pentru rangurile hipergrafului $\mathcal{H}$ și $\mathcal{H}^*$ are loc o relație importantă, demonstrată în [5], și anume: $\rho(\mathcal{H}) = \rho(\mathcal{H}^*)$.

Corectitudinea afirmației poate fi ușor demonstrată prin aplicarea următoarelor operații:

- construim matricea ρ -triunghiulară $A(\mathcal{H})$ a hipergrafului $\mathcal{H}$;
- în matricea $A(\mathcal{H})$ facem permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho \\ \rho & \rho-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ a primelor ρ linii;
- în matricea obținută facem permutarea primelor ρ coloane;

d) facem transpunerea matricei obținute. Aceasta din urmă va reprezenta matricea ρ -triunghiulară a hipergrafului dual $\mathcal{H}^*$.

Conform a)-d), rezultă inegalitatea: $\rho(\mathcal{H}^*) \geq \rho(\mathcal{H})$. Deoarece $(\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}$, obținem $\rho(\mathcal{H}) \geq \rho(\mathcal{H}^*)$. Din ultimele două inegalități rezultă egalitatea menționată mai sus.

Matroizi transversali

Pentru a examina noțiunea de matroid transversal, vom porni de la un graf bipartit [5] $G = (X_1, X_2; U)$, în care X_1 și X_2 reprezintă cele două partiții ale mulțimii de vârfuri. Pentru o submulțime arbitrară de vârfuri $A \subseteq X_1$ definim vecinătatea acestora $\Gamma(A) = \bigcup_{a \in A} \{b \in X_2 : (a, b) \in U\}$. Se cunoaște că funcția $f : \mathcal{P}(X_1) \rightarrow N \cup \{0\}$, unde $\mathcal{P}(X_1)$ este familia tuturor submulțimilor mulțimii X_1 , iar $f(A) = \text{card}(\Gamma(A))$ este o funcție monotonă semimodulară [109] și $f(\emptyset) = 0$.

În baza teoremei lui Edmonds cu privire la funcțiile monotone semimodulare, examinate în lucrarea [108], rezultă că funcția indicată $f : \mathcal{P}(X_1) \rightarrow N \cup \{0\}$ definește un matroid M_f pe mulțimea X_1 , cu familia tuturor mulțimilor independente $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X_1)$, considerând că submulțimea $A \subseteq X_1$ este independentă dacă și numai dacă $\text{card} Y < f(Y)$, pentru $\forall Y \subseteq A$. În matroidul construit rangul submulțimii $A \subseteq X_1$ se calculează:

$$r(A) = \min_{Y \subseteq A} (f(Y) + \text{card}(A \setminus Y)).$$

Notăm acest matroid prin $T(X_1 / X_2; \varepsilon)$. Matroidul, izomorf lui $T(X_1 / X_2; \varepsilon)$, se numește matroid transversal [109]. Similar cu matroidul $M_f(X) = T(X_1 / X_2; \varepsilon)$ definim matroidul $M_g(X_2) = T(X_2 / X_1; \varepsilon)$, folosind funcția $g : \mathcal{P}(X_2) \rightarrow N \cup \{0\}$, unde $g(B) = \Gamma(X_2)$, pentru $\forall B \in \mathcal{P}(X_2)$.

Fie P un cuplaj în graful bipartit $G = (X_1, X_2; U)$ [76]. Notăm prin $X_1(P)$ și $X_2(P)$ submulțimile de vârfuri din X_1 și, respectiv, X_2 , care sunt extremități ale cuplajului P . O submulțime de vârfuri $A \subseteq X_1$ se numește transversală parțială în X_1 dacă în graful bipartit $G = (X_1, X_2; U)$ există un cuplaj $P \subseteq U$ încât $A = X_1(P)$. Transversala parțială în graful bipartit depinde de construirea unei funcții speciale: submulțimea de vârfuri $A \subseteq X_1$ a unui graf bipartit $G = (X_1, X_2; U)$ este transversală parțială în X_1 dacă și numai dacă există o aplicație injectivă $\varphi : A \rightarrow X_2$ încât $(a, \varphi(a)) \in U$, pentru orice element $a \in A$ [109].

Printre rezultatele principale ce țin de existența transversalelor parțiale într-un graf bipartit, un loc aparte îi revine teoremei Holl [110], demonstrată în anul 1935, conform căreia o submulțime de vârfuri $A \subseteq X_1$ a unui graf bipartit $G = (X_1, X_2; U)$ este transversală parțială în X_1 dacă și numai dacă pentru orice $Y \in A$ se respectă inegalitatea: $\text{card}Y \leq \text{card}(\Gamma(Y))$.

Din această afirmație rezultă un șir de proprietăți importante ale matroizilor transversali:

- 1) familia transversalelor parțiale în X_1 coincide cu familia mulțimilor independente ale matroidului $T(X_1 / X_2; \varepsilon)$, precum și ale matroidului $T(X_2 / X_1; \varepsilon)$;
- 2) rangurile matroizilor $T(X_1 / X_2; \varepsilon)$ și $T(X_2 / X_1; \varepsilon)$ coincid și sunt egale cu cardinalul cuplajului maxim din graful bipartit $G = (X_1, X_2; U)$;
- 3) toate transferurile maxime în X_1 și în X_2 au același cardinal. În același timp, menționăm că cuplajurile maxime ale unui graf bipartit nu posedă în mod obligatoriu o astfel de proprietate;
- 4) într-un graf bipartit $G = (X_1, X_2; U)$ există transversală parțială în X_1 de cardinalul $k, 0 \leq k \leq \text{card}X_2$ dacă și numai dacă pentru orice $B \subseteq X_2$ are loc inegalitatea: $\text{card}B + t - \text{card}X_2 \leq \text{card}(\Gamma(B))$;
- 5) pentru graful bipartit $G = (X_1, X_2; U)$ există transversală în X_1 dacă și numai dacă pentru orice submulțime $B \subseteq X_2$ are loc inegalitatea $\text{card}B \leq \text{card}(\Gamma(B))$. (Menționăm că transversala parțială A în X_1 se numește transversală în X_1 a grafului $G = (X_1, X_2; U)$ dacă $\text{card}A = \text{card}X_2$ [110]).

1.3. Metode de studiu ale topologiei algebrice

Topologia algebrică (TA) reprezintă o ramură a matematicii ce se ocupă de studierea spațiilor topologice, prin intermediul obiectelor clasice și a metodelor caracteristice algebrei abstracte [219], [221], ceea ce asigură o interconexiune strânsă între matematica continuă și cea discretă. Ea oferă posibilitatea de a folosi modele, reprezentate prin structuri matematice ușor perceptibile, pentru examinarea proprietăților topologice ale spațiilor continue. Obiectul de studiu al TA îl constituie structurile algebrice și proprietățile lor, iar scopul principal se reduce la determinarea invariantilor algebrici, folosiți pentru clasificarea spațiilor topologice, cu o exactitate de omeomorfism. În această direcție au fost efectuate cercetări impunătoare, care se regăsesc în monografiile recent apărute [220], [222]. Rezultate majore ce țin de fundamentarea teoretică a TA au fost determinate de introducerea unor structuri algebrice, care au condus la dezvoltarea direcțiilor importante de cercetare, ce se manifestă prin:

- Construirea grupurilor de omotopie, care se folosesc, în mod special, pentru clasificarea spațiilor topologice. Intuitiv, grupurile de omotopie oferă informație cu privire la forma de bază, sau găurile spațiului respectiv. Cel mai simplu grup de omotopie ar fi grupul fundamental, care oferă informație referitoare la bucele spațiului topologic.
- Construirea omologiilor, care reprezintă o procedură generală de asociere a unui șir de grupuri abeliene, numite invarianți algebrici, cu un obiect matematic, prin intermediul căruia se face studiul spațiului topologic.
- Construirea coomologiilor, care reprezintă un studiu abstract al colanțurilor, cociclurilor și cofrontierelor. Construirea coomologiilor poate fi considerată drept o procedură duală celei de construire a omologiilor, și reprezintă o metodă de atribuire unui spațiu topologic a invarianților algebrici de o structură mai fină decât invarianții obținuți prin construirea omologiilor.
- Construirea varietăților. Varietatea reprezintă un spațiu topologic comod pentru examinare, din anumite considerente, care posedă proprietatea: pentru orice punct există o vecinătate, omeomorfă cu spațiul euclidian n -dimensional.
- Construirea complexelor. În topologia algebrică, complexe reprezintă spații topologice cu o structură specifică. Din acest punct de vedere, un rol primordial îi revine complexului simplicial [219], pe care nu-l vom confunda cu complexul simplicial abstract, examinat în continuare (a se vedea capitolul 2).

Rezultatele cercetărilor ce țin de studierea structurilor menționate au fost expuse într-un șir de lucrări științifice importante, iar printre cele apărute în ultimii ani pot fi menționate lucrările [222], [223], [224], [307]. Inițial, TA era cunoscută sub denumirea de topologie combinatorie, ceea ce înseamnă că cercetările se efectuau în baza unui spațiu X de o structură mai simplă. În perioada anilor 1920-1940, s-a pus mai mult accentul pe examinarea spațiilor topologice prin căutarea unei corespondențe dintre acestea și grupurile algebrice. Această situație și a determinat într-un final denumirea actuală de topologie algebrică. Totuși, denumirea de topologie combinatorie se mai întrebuințează uneori pentru a accentua caracterul algoritmic în cercetare, bazat pe ideea de descompunere a spațiului.

Prin aspectul algebric al cercetărilor din domeniul TA se stabilește o corespondență dintre spații și grupuri, respectând relația de omeomorfism al spațiilor. Situația respectivă permite formularea rezultatelor cu privire la proprietățile spațiilor topologice în termenii grupurilor, ceea ce facilitează tehnica demonstrațiilor. În această ordine de idei, se evidențiază două căi posibile de dezvoltare a TA: folosirea teoriei omotopiei sau construirea grupurilor de omologii și

coomologii. Grupurile de omologii și coomologii sunt grupuri abeliene și, precum s-a adeverit, reprezintă un instrument eficient de cercetare. Astfel grupuri vor fi construite și pentru complexul de relații multi-are în capitolul 2.

În prezenta lucrare sunt descrise rezultatele fundamentale ce țin de dezvoltarea teoretică a topologiei algebrice a relațiilor multi-are, pornind de la definirea și studierea unei structuri discrete noi, numită complex de relații multi-are. Instrumentul de lucru folosit sunt grupurile de omologii și coomologii, atât în cazul complexului de relații, cât și în cazul derivatelor acestuia.

Rezultatele teoretice obținute au fost impulsionate, în mare măsură, de încercările a mai multor matematicieni din anturajul școlii domnului Academician Petru Soltan de a soluționa un șir de probleme importante din punct de vedere practic sau de a generaliza unele metode elaborate de ei pentru probleme în spații cu dimensiuni mici. Studiarea acestor probleme pornește de la mijlocul anilor '60 ai secolului trecut, iar obținerea unor rezultate fundamentale în ce privește generalizarea metodelor de soluționare a acestora era îngreunată de metodologia de cercetare, folosită în perioada respectivă.

Cercetările ulterioare au condus la dobândirea unor generalizări noi în topologia algebrică abstractă, care completează substanțial domeniul grafurilor, hipergrafurilor, complexelor simpliciale etc. Primele rezultate în această direcție au fost înregistrate la începutul anilor 2000 și au fost descrise în lucrările [18], [58], [142], [144]-[146], care și-au găsit ulterior continuitate în diverse generalizări și aplicații [17], [19], [20], [129], [154], [158], [159], [181].

Rezultatele principale din teză au fost publicate în monografia „Topologia algebrică a relațiilor multi-are” [295] care este o lucrare integră ce ține de fundamentarea teoretică a direcției de cercetare, determinată de complexul de relații multi-are. Pornind de la construirea grupurilor de omologii directe și coomologii peste grupul aditiv al numerelor întregi $\mathbb{Z}$, se studiază proprietățile topologice ale complexului, se generalizează un șir de teoreme formulate și demonstrate în cazul unor structuri discrete clasice, cum ar fi grafurile, hipergrafurile, matroizii etc. E de menționat faptul că aceste cercetări au condus la obținerea unor rezultate neașteptate, cu perspective promițătoare în elaborarea metodelor originale de soluționare a problemelor practice. Astfel, a devenit posibilă rezolvarea unor probleme mai vechi, printre care, în mod special, putem menționa problema calculării medianei unui complex abstract de cuburi abstracte.

Din cele descrise în capitolul I rezultă că la baza structurilor matematice discrete se află o teorie bine fundamentată, orientată spre utilizarea unor metode avansate de cercetare. Aceasta crează premisele folosirii structurilor respective în calitate de modele pentru soluționarea diverselor probleme cu caracter teoretico-aplicativ. Luând în considerație elaborările teoretice din domeniul teoriei grafurilor, a hipergrafurilor, a matroizilor, complexelor simpliciale, precum

și metodele accesibile de soluționare a problemelor aplicative, prin intermediul tezei de doctor habilitat se propune **examinarea următoarei probleme științifice:**

Elaborarea unei structuri matematice determinate de o familie de relații multi-are și folosite la modelarea proceselor cu acțiuni discretă, care a condus la obținerea metodelor eficiente pentru utilizarea ulterioară a acestora la soluționarea problemei de calculare a medianei ponderate, fără a folosi metrica spațiului, a problemei de comportament a jucătorilor într-un joc combinatorial etc.

În legătură cu problema formulată se urmărește scopul elaborării unei structuri matematice discrete care ar servi drept model eficient pentru soluționarea problemelor de localizare, precum și ale altor probleme importante din punct de vedere teoretico-aplicativ, care se încadrează în sistemul de studiu propus. În conformitate cu scopul enunțat au fost stabilite obiectivele cercetării:

- elaborarea unui model matematic discret nou, bazat pe noțiunea de relație multi-ară, ca submulțime a produsului cartezian a unei mulțimi de elemente arbitrare;
- examinarea topologiei relațiilor multi-are, prin construirea grupurilor de omologii și coomologii a complexului de relații multi-are;
- examinarea complexului de cuburi abstracte, în calitate de caz special al complexului de relații multi-are, și a varietăților abstracte respective;
- elaborarea algoritmului eficient pentru soluționarea problemei medianei pe complexul de cuburi abstracte;
- generalizarea funcției Grundy și soluționarea unor jocuri combinatoriale pe complexe de relații multi-are.

1.4. Concluzii la capitolul 1

În capitolul I a fost realizată o analiză succintă a situației actuale în domeniul dezvoltării structurilor matematice discrete și folosirii acestora pentru soluționarea problemelor de ordin teoretico-aplicativ. A fost formulată problema științifică care se propune a fi examinată în teză. Reieșind din problema formulată, au fost determinate scopul și obiectivele de cercetare.

În acest capitol sunt descrise rezultatele principale cu referire la structurile discrete clasice, reprezentate prin grafuri, hipergrafuri, matroizi, complexe simpliceale, sunt examinate metode de soluționare a problemelor, caracteristice domeniilor în cauză. Este menționat aportul a mai multor matematicieni la dezvoltarea cercetărilor legate de studierea structurilor matematice discrete. În mod special se menționează rolul în dezvoltarea teoriilor respective pe care l-au avut Leonard Euler, William Hamilton, James Joseph Sylvester, Arthur Cayley, Claude Berge,

George David Birkhoff. În baza analizei situației în domeniul dezvoltării teoretico-aplicative a structurilor matematice discrete putem face următoarele concluzii:

1. În domeniul structurilor matematice discrete a fost elaborată o puternică bază teoretică, necesară pentru continuarea cercetărilor, în legătură cu necesitatea soluționării problemelor teoretico-aplicative;
2. Structurile discrete examinate pot fi privite ca familii de relații cu proprietăți speciale, definite pe elementele unei mulțimi. Această situație crează premisele elaborării unei structuri matematice discrete noi, care ar însuma în sine proprietățile structurilor cunoscute și care ar oferi posibilități noi pentru soluționarea problemelor;
3. Pentru structurile matematice reprezentate sub forma de grafuri sau hipergrafuri se cunoaște aspectul aplicativ al teoriei, care se reduce la un set mare de algoritmi de soluționare a problemelor practice, bazați pe metode eficiente. Totodată, utilizarea acestor structuri, în unele cazuri, devine dificilă datorită complexității problemelor examinate (e vorba de problemele NP-complete);
4. La soluționarea unor probleme pe structurile discrete examinate pot fi folosite metode ale topologiei algebrice, ceea ce oferă posibilități suplimentare în vederea determinării unor metode eficiente în cazul problemelor importante, chiar dacă acestea sunt din categoria problemelor dificile;
5. Apare necesitatea elaborării și studierii unor noi concepte de structuri discrete, capabile să rezolve în mod eficient probleme aplicative ce țin de amplasarea unor centre de deservire, transmitere și recepționare a unor volume mari de informație, studierea comportării jucătorilor în jocuri antagoniste etc.

2. RELAȚII MULTI-ARE ȘI GRUPURI DE OMOLOGII ABSTRACTE

Topologia relațiilor multi-are, desigur, ține de cea algebrică [32], [56], [61], [62], însă reprezintă o ramură a acesteia care este mai accesibilă decât examinările moderne înalt abstractizate și pur teoretice. Rezultatele expuse în continuare reprezintă rodul investigațiilor efectuate pe parcursul a circa zece ani, căutând nu numai aspecte de ordin practic, dar și aplicații nontriviale, și doar obținându-le s-a reușit fundamentarea teoretică a direcției de cercetare, legată de studierea unei structuri matematice discrete noi. Începutul a pornit de la complexul de relații multi-are, pentru care cortegiul de elemente al unei astfel de relații nu permitea repetarea elementelor [18], [58]. Acel complex este un complex celular abstract, însă cel studiat în continuare este mai operabil.

Definirea relațiilor multi-are pe produsul cartezian al unei mulțimi de elemente X permite generalizarea unor rezultate anterioare [58] și este mai firească din punct de vedere teoretico-aplicativ. Noțiunea de complex generalizat de relații multi-are asupra unei mulțimi arbitrare de elemente a fost pentru prima dată prezentată în lucrarea [17], construind ulterior grupurile de omologii peste grupul numerelor întregi.

Acest complex generalizează mai multe noțiuni clasice, printre care și noțiunea de graf orientat și finit, definit cu ajutorul relațiilor binare [5], însă lipsit de bucle, chestiune care, precum demonstrează aplicațiile, nicidecum nu poate fi neglijată [302]. Complexul definit în lucrarea [58] este o structură discretă, finită și fără bucle care necesită examinări suplimentare la studierea și soluționarea unor probleme atât teoretice, cât și practice. Respectiva structură matematică posedă un șir de proprietăți ce țin de obiectul de studiu al geometriei combinatorice discrete [37]. Din aceste considerente ar fi firesc, pe de o parte, de studiat impactul topologiei relațiilor multi-are asupra acelor obiecte de cercetare, unde situația menționată poate fi interpretată, bunăoară, cu ajutorul următoarelor familii de obiecte: a) sistemul Q de **quasigrupuri** cu n operații algebrice; b) sistemul Q de n grupuri cu n elemente independente și cu o singură operație algebrică [64], c) sistemul de mulțimi nuanțate [47], etc. Mai exact, ar fi curios de studiat ce ar prezenta o varietate abstractă, multidimensională, orientabilă și fără borduri [15] determinată de obiectele menționate. Pe de altă parte, prin intermediul relațiilor multi-are ar putea fi modelate și studiate multiple procese dintr-un șir de domenii aplicative. De exemplu, formula apei, H_2O , poate fi interpretată ca un element dintr-o relație ternară $\{(H, H, O)\}$ care nu se încadrează în complexul obișnuit de relații multi-are: în tripletul $\{(H, H, O)\}$ se repetă elementul H (a se vedea [58]). Toate cele spuse mai sus conduc la

necesitatea extinderii noțiunii de complex de relații multi-are, examinat inițial în lucrările [18], [58], [145], prin introducerea noțiunii de complex de relații multi-are mai general. În acest caz, orice formulă din chimie poate fi interpretată ca un complex generalizat de relații multi-are [25]. Sunt și alte chestiuni la care se referă acest complex. Anticipând expunerea examinărilor, repetăm că acest obiect în forma lui abstractă conduce la aplicări nontriviale în procesul de transmitere și receptare a informației [19], [153], în formarea unei baze de date finite oricât de mare [23], [156], în criptografie [152], [167], [181] și la indicarea unei clase de grafuri, elementele căreia pot fi scufundate în scheletul 1-dimensional al cubului multidimensional din R_1^n (spațiul vectorial n -dimensional cu norma $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$), pe când aceasta din urmă chestiune permite a prezenta un algoritm de calculare a medianei (punctul lui Toricelli) grafurilor marcate și ponderate, fără a utiliza metrica spațiului respectiv [59], [60].

2.1. Complexul de relații multi-are

Fie date o mulțime finită de elemente $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, care este o submulțime dintr-o mulțime M , $\text{card}M \leq \infty$, unde M nu este clasă, și șirul $X = X^1, X^2, \dots, X^{n+1}$, $n \geq 1$, de produse carteziane [40], [42,] a mulțimii X . Orice submulțime nevidă $R^m \subset X^m$, $1 \leq m \leq n+1$ se numește relație m -ară a elementelor din X (mulțimea $R^1 \subset X^1$ reprezintă o submulțime de elemente din X) [239]. Luând în considerație cele spuse, o relație m -ară R^m este o familie de succesiuni ordonate, numite cortegii, formate din a câte m elemente din X . Cortegiul $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) \in R^m$ poate să conțină și repetări ale unor elemente din X . Pentru un astfel de cortegiu, orice subcortegiu $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l})$, $1 \leq l \leq m$, ce păstrează ordinea elementelor din $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$ se numește **subcortegiu ereditar**.

Definiția 2.1.1. Familia finită de relații $\{R^1, R^2, \dots, R^{n+1}\}$, care satisface condițiile:

- I. $R^1 = X^1 = X$,
- II. $R^{n+1} \neq \emptyset$,
- III. orice subșir ereditar $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l})$, $1 \leq l \leq m, \leq n+1$, din $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) \in R^m$ aparține relației l -are R^l ,

se numește **complex generalizat (G-complex) de relații multi-are** și se notează:

$$\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1}).$$

Din definiția 2.1.1 rezultă că mulțimea R^m a complexului generalizat de relații $\mathfrak{R}^{n+1}$ nu este vidă pentru orice $1 \leq m \leq n+1$. Elementele relației R^1 , vom obișnui să le mai numim vârfuri, iar pe cele ale relației R^2 – muchii.

Studierea complexului generalizat de relații multi-are prezintă interes prin faptul că acesta acoperă un șir de noțiuni clasice, precum ar fi grafurile [5], [12], [302] hipergrafurile [5], [6], [71], matroizii [9], [10], [66], complexe simpliceale [115], [305] etc., chiar dacă acesta poate fi interpretat ca un caz particular al **complexului celular** [32] **abstract** (CW). Aceste structuri matematice servesc drept modele eficiente pentru soluționarea unui șir de probleme teoretice și aplicative [28], [29], [43], [46], [50], [53]. Se cere de menționat că acest obiect $\mathfrak{R}^{n+1}$ are prioritate față de cele menționate. Astfel, față de complexul celular (CW), acesta este format din cărămizi elementare, poate cu deformări nonizomorfe, precum sunt quasimplexele abstracte (așa-numitele **bucle** finit dimensionale; a se vedea mai jos). Să considerăm complexul generalizat de relații $\mathfrak{R}^2 = (R^1; R^2)$. Este evident că un astfel de complex reprezintă un **graf orientat** [11], [12], [302] (a se vedea definiția 2.1.1). Această situație permite să considerăm complexul generalizat de relații $\mathfrak{R}^{n+1}$ drept un **hipergraf orientat și ereditar** (conform lui C.Berge [6]), noțiune întâlnită mai rar în literatura de specialitate și care reprezintă o structură distinctă de noțiunea cunoscută de hipergraf [5], [6], [45], [71]. Vom descrie în continuare o procedură care permite să obținem noțiunea de hipergraf în formă de complex generalizat și așa-zisele cicluri ale hipergrafului într-o formă mai firească, decât cea cunoscută, pornind de la noțiunea de hipergraf orientat [65], transformat într-un complex de simplexe abstracte.

Definiția 2.1.2. *Dacă avem două G -complexe de relații multi-are $\mathfrak{R}_1^{m+1} = (R_1^1, R_1^2, \dots, R_1^{m+1})$ și $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$, $1 \leq m \leq n$, încât au loc relațiile $R_1^l \subset R^l$, pentru orice l , $1 \leq l \leq m+1$, atunci $\mathfrak{R}_1^{m+1}$ se numește **G -subcomplex** al lui $\mathfrak{R}^{n+1}$. În cazul când $\mathfrak{R}_1^{m+1} = (R_1^1 = R^1, R_1^2 = R^2, \dots, R_1^{m+1} = R^{m+1})$, atunci subcomplexul $\mathfrak{R}_1^{m+1}$ se numește **schelet** al lui $\mathfrak{R}^{n+1}$ și se notează prin $sk(m+1)\mathfrak{R}^{n+1}$.*

Observăm că, scheletul 2-dimensional $sk(2)\mathfrak{R}^{n+1}$ al oricărui G -complex de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, este un graf orientat [6]. Acest complex poate fi reprezentat prin perechea $\mathfrak{R}^2 = (X; R^2)$, determinată de mulțimea de vârfuri X și relația binară R^2 , care poate conține și elemente de tipul (x, x) , numite **bucle** [5], [45], [302], chestiune cu care, în relații de ordin mai mare decât doi, ne vom confrunta ulterior. Acestea joacă un rol important la clasificarea varietăților, examinate în paragraful 4.1 al tezei.

Fie în complexul $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$ sunt fixate două elemente distincte $x_i, x_j \in R^1$.

Definiția 2.1.3. Șirul ordonat $r_1^m, r_2^m, \dots, r_s^m$ al elementelor distincte din R^m , $2 \leq m \leq n+1$, ce posedă proprietățile:

- 1) $x_i \in r_1^m, x_j \in r_s^m$;
- 2) $r_k^m \cap r_{k+1}^m \in R^{m-1}, 1 \leq k \leq s-1$,

se numește lanț liniar cu dimensiunea m ce leagă elementele $x_i, x_j \in R^1$, fiind notat prin $l^m(x_i, x_j)$. Complexul de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$ se numește m -conex dacă pentru oricare două elemente $x_i, x_j \in R^1$, există lanț liniar m -dimensional $l^m(x_i, x_j)$.

În cazul $m=1$, complexul $\mathfrak{R}^{n+1}$ se va numi **complex slab conex** sau simplu – complex conex. În cazul $m=n+1$, complexul $\mathfrak{R}^{n+1}$ se va numi **complex conex forte**.

Teorema 2.1.1. Dacă $\mathfrak{R}^{n+1}$ este un complex m -conex, atunci acesta este și k -conex, $2 \leq k \leq m \leq n+1$.

Demonstrație. Pentru a demonstra afirmația, e suficient de arătat că, dacă în complexul $\mathfrak{R}^{n+1}$ pentru elementele distincte $x_p, x_t \in R^1$ există lanț m -dimensional $l^m(x_p, x_t)$, atunci putem construi și un lanț $(m-1)$ -dimensional $l^{m-1}(x_p, x_t)$. Fie $l^m(x_p, x_t) = (r_1^m, r_2^m, \dots, r_s^m)$ un astfel de lanț ce respectă condițiile:

$$r_i^m \cap r_{i-1}^m = r_{i-1}^{m-1},$$

$$r_i^m \cap r_{i+1}^m = r_{i+1}^{m-1},$$

pentru $1 < i < s$ (elementele $r_{i_1}^{m-1}$ și $r_{i_q}^{m-1}$ există conform definiției 2.1.3). În baza definiției complexului generalizat de relații multi-are (a se vedea definiția 2.1.1), în $\mathfrak{R}^{n+1}$ există șirul de elemente $r_{i_1}^{m-1}, r_{i_2}^{m-1}, \dots, r_{i_q}^{m-1}$ ce aparțin lui r_i^m , cu proprietatea $r_{i_j}^{m-1} \cap r_{i_{j+1}}^{m-1} \in R^{m-2}, 1 \leq j < q$.

În cazul $i=1$, există șirul $r_{1_1}^{m-1}, r_{1_2}^{m-1}, \dots, r_{1_q}^{m-1}$ cu proprietățile:

$$a) x_p \in r_{1_1}^{m-1},$$

$$b) r_1^m \cap r_2^m = r_{1_q}^{m-1} = r_{2_1}^{m-1},$$

iar în cazul $i=s$, există șirul $r_{s_1}^{m-1}, r_{s_2}^{m-1}, \dots, r_{s_q}^{m-1}$ cu proprietățile:

$$a) r_{s-1}^m \cap r_s^m = r_{s_1}^{m-1} = r_{(s-1)_q}^{m-1},$$

$$b) x_t \in r_{s_1}^{m-1}.$$

Astfel, construim şirul

$$r_{1_1}^{m-1}, r_{1_2}^{m-1}, \dots, r_{1_q}^{m-1} = r_{2_1}^{m-1}, r_{2_2}^{m-1}, \dots, r_{(s-1)_q}^{m-1} = r_{s_1}^{m-1}, \dots, r_{s_q}^{m-1},$$

care este lanţ cu dimensiunea $(m-1)$, ce leagă elementele $x_p, x_t \in R^1$. Deci $\mathfrak{R}^{n+1}$ este m -conex.

Definiţia 2.1.4. *G-complexul de relaţii multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$ se numeşte **conex**, dacă pentru oricare două elemente $x_i, x_j \in R^1$, există şirul $x_i = x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_s} = x_j$ de elemente din R^1 , încât cel puţin una dintre perechile $(x_{t_r}, x_{t_{r+1}})$ şi $(x_{t_{r+1}}, x_{t_r})$ aparţine relaţiei R^2 pentru orice valoare a lui $r = 1, 2, \dots, s-1$. Şirul de perechi $(x_{t_1}, x_{t_2}), (x_{t_2}, x_{t_3}), \dots, (x_{t_{s-1}}, x_{t_s})$ se numeşte **lanţ liniar** cu dimensiunea unu, ce leagă elementele x_i şi x_j , iar înşişi x_i, x_j se numesc **extremităţi** ale acestui lanţ.*

Notăm lanţul 1-dimensional, ce leagă elementele x_i şi x_j prin $L^1(x_i, x_j)$. În viitor, vom recurge şi la reprezentarea algebrică a acestuia.

Definiţia 2.1.5. *Dacă sunt date două G-complexe de relaţii multi-are $\mathfrak{R}^{n_1+1} = (R_1^1, R_1^2, \dots, R_1^{n_1+1})$ şi $\mathfrak{R}^{n_2+1} = (R_2^1, R_2^2, \dots, R_2^{n_2+1})$, $n_1 \leq n_2$, atunci*

$$\mathfrak{R}^{n+1} = \mathfrak{R}^{n_1+1} \cup \mathfrak{R}^{n_2+1} = (R_1^1 \cup R_2^1, \dots, R_1^{n_1+1} \cup R_2^{n_2+1}, R_2^{n_1+2}, \dots, R_2^{n_2+1})$$

*se numeşte **reuniune**, iar*

$$\mathfrak{R}^{m+1} = \mathfrak{R}^{n_1+1} \cap \mathfrak{R}^{n_2+1} = (R_1^1 \cap R_2^1, \dots, R_1^{n_1+1} \cap R_2^{n_2+1})$$

*se numeşte **intersecţie** a acestor G-complexe.*

Conform [40], [41], lesne se verifică că atât reuniunea, cât şi intersecţia a două G-complexe de relaţii multi-are sunt, de asemenea, G-complexe de relaţii multi-are.

Dacă în cazul unui G-complex de relaţii multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (R_1^1, R_1^2, \dots, R_1^{n+1})$ are loc egalitatea $R_1^1 = \emptyset$ şi, prin urmare, $R_1^2 = \dots = R_1^{n+1} = \emptyset$, atunci $\mathfrak{R}^{n+1}$ se numeşte **complex vid**. Două G-complexe de relaţii multi-are, intersecţia cărora este vidă, se numesc **disjuncte**.

Teorema 2.1.2. *G-complexul de relaţii multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$ este conex dacă şi numai dacă nu conţine două G-subcomplexe nonvide de relaţii multi-are $\mathfrak{R}^{n_1+1}$ şi $\mathfrak{R}^{n_2+1}$ care sunt disjuncte şi satisfac egalitatea:*

$$\mathfrak{R}^{n+1} = \mathfrak{R}^{n_1+1} \cup \mathfrak{R}^{n_2+1}.$$

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $\mathfrak{R}^{n+1} = (R_1^1, R_1^2, \dots, R_1^{n+1})$ un G-complex conex de relaţii multi-are şi un element arbitrar $x \in R_1^1 = X$. Vom nota prin R'_x mulţimea tuturor elementelor x' din X pentru care există cel puţin un lanţ $L^1(x, x')$ ce leagă fiecare dintre elementele indicate x'

cu $x \in R_1^1 = X$. Constatăm că dacă un element, de exemplu x_{i_j} , al şirului ordonat $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, \dots, x_{i_m}) \in R^m, 1 \leq m \leq n+1$, este din mulţimea R'_x , atunci şi orice alt element al acestui şir este din R'_x . În aşa mod formăm G -subcomplexul de relaţii multi-are $\mathfrak{R}^{n_1+1} = (R_1^1, R_1^2, \dots, R_1^{n_1+1})$ încât orice succesiune de elemente $(x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_{m_1}})$ din $R_1^{m_1}$, $1 \leq m_1 \leq n_1 + 1$, conţine un element x' pentru care există lanţul cu dimensiunea unu $L^1(x, x')$ ce leagă elementele x şi x' .

Construim al doilea G -subcomplex de relaţii $\mathfrak{R}^{n_2+1} = (R_2^1, R_2^2, \dots, R_2^{n_2+1})$ din $\mathfrak{R}^{n+1}$, pentru care $R_2^{m_2} = R^{m_2} \setminus R_1^{m_2}$, $m_2 = 1, 2, \dots, n_2 + 1$. Sunt evidente egalităţile:

$$R_2^1 = \emptyset, R_2^2 = \emptyset, \dots, R_2^{m_2+1} = \emptyset,$$

deoarece, în caz contrar, obţinem contradicţie cu conexitatea complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$. Prin urmare $\mathfrak{R}^{n_2+1}$ este vid.

Întrucât elementul $x \in X$ a fost ales în mod arbitrar, rezultă că în $\mathfrak{R}^{n+1}$ nu există două G -subcomplexe nonvide şi disjuncte, precum este indicat în teoremă.

Suficienţa. Fie $\mathfrak{R}^{n+1}$ nu conţine două G -subcomplexe de relaţii multi-are nonvide şi disjuncte $\mathfrak{R}^{n_1+1}$ şi $\mathfrak{R}^{n_2+1}$, care satisfac condiţia din teoremă şi, totuşi, $\mathfrak{R}^{n+1}$ nu este conex. În mod similar celor descrise în prima parte a demonstraţiei teoremei, construim G -subcomplexele nonvide şi disjuncte $\mathfrak{R}^{n_1+1}$ şi $\mathfrak{R}^{n_2+1}$, încât $\mathfrak{R}^{n+1} = \mathfrak{R}^{n_1+1} \cup \mathfrak{R}^{n_2+1}$. Aceasta din urmă contrazice condiţia teoremei.

Remarca 2.1.1. Să fixăm acum un element arbitrar $\bar{x} \in X$. Vom nota prin $\bar{X}$ submulţimea tuturor elementelor $x' \in X$, inclusiv $\bar{x}$, pentru care există cel puţin un lanţ $L^1(\bar{x}, x')$ în R^{n+1} . Pentru $\bar{X}$ construim şirul de produse carteziane: $\bar{X}^1 = \bar{X}, \bar{X}^2, \dots, \bar{X}^{m+1}, \dots$, unde $\bar{X}^{m+1} = \bar{X}^m \cdot \bar{X}$, $m \geq 1$, şi formăm mulţimile:

$$\bar{R}^m = \bar{X}^m \cap R^m, m = 1, 2, \dots, n+1.$$

Fie $n_1 \leq n$ valoarea maximă a indicelui, pentru care este satisfăcută relaţia $\bar{R}^{n_1+1} = \emptyset$.

Uşor ne putem convinge că mulţimile de relaţii $\bar{R}^1, \bar{R}^2, \dots, \bar{R}^{n_1+1}$ satisfac condiţiile I-III din definiţia 2.1.1 şi, prin urmare, această familie reprezintă un complex generalizat de relaţii multi-are.

Definiţia 2.1.6. G -complexul de relaţii multi-are $\mathfrak{R}_x^{n_1+1} = (\bar{R}^1, \bar{R}^2, \dots, \bar{R}^{n_1+1})$ se numeşte **componentă conexă** a complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$.

De fapt, orice element $\bar{x} \in \bar{R}^1$ determină în $\mathfrak{R}^{n+1}$ aceeași componentă conexă. Prin urmare, indicele $\bar{x}$ din notația $\mathfrak{R}_{\bar{x}}^{n_1+1}$ poate fi omis și atunci componeta conexă o vom nota simplu prin $\mathfrak{R}^{n_1+1}$. Evident, $\mathfrak{R}^{n_1+1} \subset \mathfrak{R}^{n+1}$, adică $\mathfrak{R}^{n_1+1}$ este un G -subcomplex al lui $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Teorema 2.1.3. *Dacă $\{\mathfrak{R}^{n_1+1}, \mathfrak{R}^{n_2+1}, \dots, \mathfrak{R}^{n_q+1}\}$ reprezintă familia tuturor componentelor conexe și distincte două câte două ale G -complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$, atunci se verifică relațiile:*

$$R^{n_1+1} = R^{n_1+1} \cup R^{n_2+1} \cup \dots \cup R^{n_q+1}, \quad (2.1)$$

unde $R^{n_i+1} \cap R^{n_j+1} = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, q$.

Demonstrație. Ținând cont de modul de construire a componentei conexe, ce conține un element dat $\bar{x} \in X$, rezultă că are loc includerea:

$$\mathfrak{R}^{n+1} \subset \mathfrak{R}^{n_1+1} \cup \mathfrak{R}^{n_2+1} \cup \dots \cup \mathfrak{R}^{n_q+1}.$$

Totodată, deoarece componentele conexe sunt, la rândul lor, niște G -subcomplexe de relații multi-are ale lui $\mathfrak{R}^{n+1}$, obținem:

$$\mathfrak{R}^{n_1+1} \cup \mathfrak{R}^{n_2+1} \cup \dots \cup \mathfrak{R}^{n_q+1} \subset \mathfrak{R}^{n+1}.$$

Din aceste două relații rezultă egalitatea (2.1).

Să presupunem acum că există două componente conexe $\mathfrak{R}^{n_i+1}$ și $\mathfrak{R}^{n_j+1}$, $i \neq j$, încât este adevărată relația $\mathfrak{R}^{n_i+1} \cap \mathfrak{R}^{n_j+1} \neq \emptyset$.

În acest caz, constatăm că pentru orice element $x \in R_i^1$ și orice element $y \in R_j^1$ în $\mathfrak{R}^{n+1}$ există un lanț $L^1(x, y)$. Prin urmare, $\mathfrak{R}^{n_i+1} \subset \mathfrak{R}^{n_j+1}$, și invers. Deci $\mathfrak{R}^{n_i+1} = \mathfrak{R}^{n_j+1}$. Obținem contradicție cu condițiile teoremei. Aceasta înseamnă că presupunerea $\mathfrak{R}^{n_i+1} \cap \mathfrak{R}^{n_j+1} \neq \emptyset$ este falsă.

Definiția 2.1.7. *Complexul generalizat de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$ se numește **local complet** dacă pentru orice $1 \leq m \leq n+1$ și orice cortegiu $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) \in R^m$, relația R^m conține și toate cortegiile ce corespund celor $m!$ permutări ale elementelor $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$.*

Drept exemplu de complex generalizat (G -complex) de relații multi-are local complet servește orice graf orientat și simetric [4], [45]. Un astfel de graf, privit ca G -complex de relații, îl vom nota prin $\mathfrak{R}^2 = (R^1, R^2)$, unde R^2 este o relație binară și simetrică definită pe mulțimea de elemente din R^1 . (Grafurile orientate de tipul $\mathfrak{R}^2 = (R^1, R^2)$ au fost examinate de către matematicianul francez C. Berj în lucrările [5], [302].) De asemenea, un G -complex de relații

multi-are local complet poate fi considerat G -complex construit pe familia produselor carteziane a mulțimii X , adică:

$$\mathfrak{R}^{n+1} = (X = X^1, X^2, \dots, X^{n+1}).$$

Urmărind scopul declarat în titlul lucrării, prin analogie cu cele cunoscute din literatura clasică în domeniul topologiei combinatorice și algebrei topologice [1], [8], [27], [39], [51], [52], [56], [63], [70], [300], [301], [303], [305] vom folosi în continuare și alte notații și noțiuni echivalente celor menționate în cazul complexului de relații multi-are și proprietățile acestuia, care prezintă interes sub aspect aplicativ.

2.2. Arbori

Noțiunea de arbore, cunoscută în teoria grafurilor ca graf conex ce nu conține cicluri, nu poate fi extinsă și asupra complexului de relații multi-are din cauza structurii acestuia. În acest paragraf vom generaliza noțiunea de arbore pornind de la următoarea caracteristică: un graf neorientat este arbore dacă și numai dacă orice subgraf al său conține cel puțin un vârf de grad unu.

Un complex generalizat n -dimensional de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = \{R^1, R^2, \dots, R^{n+1}\}$ poate fi privit ca o familie de cortegii cu lungimea l , $1 \leq l \leq n+1$, cu proprietățile caracteristice unui complex, menționate în definiția 2.1.1. Definim, în mod tradițional, pe familia de cortegii, percepute totodată și ca mulțimi de elemente, operațiile de reuniune, intersecție, incluziune și diferență, notate, respectiv, prin $\cup$, $\cap$, $\subset$ și $\setminus$. Astfel, pentru cortegiile $c_1 = (x_1, x_5, x_9, x_3, x_4)$, $c_2 = (x_9, x_5, x_3, x_7)$, $c_3 = (x_4, x_5, x_3)$, privite ca elemente ale complexului de relații multi-re, în rezultatul aplicării operațiilor menționate obținem:

$$c_1 \cup c_2 = (x_1, x_5, x_9, x_3, x_4, x_7),$$

$$c_1 \cap c_2 = (x_3, x_5, x_9),$$

$$c_3 \subset c_1, \quad c_1 \setminus c_2 = \emptyset.$$

Vom spune că un cortegiu $c' \in \mathfrak{R}^{n+1}$ este maximal, dacă în $\mathfrak{R}^{n+1}$ nu există un alt cortegiu c'' încât $c' \subset c''$.

Definiția 2.2.1. Cortegiul $\hat{c} \in \mathfrak{R}^{n+1}$, ce posedă proprietățile:

- 1) $\hat{c}$ este cortegiu maximal în $\mathfrak{R}^{n+1}$;
- 2) în $\hat{c}$ există un subcortegiu c^0 , încât pentru orice cortegiu maximal c din $\mathfrak{R}^{n+1}$ are loc relația $c \cap \hat{c} \subset c^0$;

3) în $\mathfrak{R}^{n+1}$ există cortegiu maximal $\tilde{c}$, $\tilde{c} \neq \hat{c}$, cu proprietatea $\tilde{c} \cap \hat{c} = c^0$,
 se numește **cortegiu suspendat** al complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$. Cortegiul $\tilde{c}$ se numește **cortegiu suport** pentru $\hat{c}$ și se notează prin $\tilde{c}(\hat{c})$.

Din definiție rezultă că un cortegiu suspendat $\hat{c}$ conține cel puțin două elemente din X . Elementul $x \in X$, care aparține doar unui cortegiu maximal al complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$, se numește **vârf suspendat**.

Consecința 2.2.1. Orice cortegiu suspendat din $\mathfrak{R}^{n+1}$ conține cel puțin un vârf suspendat.

Un cortegiu suspendat $\hat{c} \in \mathfrak{R}^{n+1}$ poate avea mai multe suporturi, chestiune ce rezultă din faptul că cortegiul respectiv conține cel puțin două elemente. El va avea doar un singur suport dacă e format exact din două elemente. Notăm prin $S(\hat{c})$ mulțimea tuturor suporturilor cortegiului $\hat{c}$.

Teorema 2.2.1. Dacă $\hat{c}$ este un cortegiu suspendat din $\mathfrak{R}^{n+1}$, atunci în $\hat{c}$ există un element din X ce nu aparține altor cortegii maxime din complexul $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Demonstrație. Fie $\hat{c} = (x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_m})$, $1 \leq m \leq n$, un cortegiu suspendat din $\mathfrak{R}^{n+1}$ și orice element x_{i_j} din $\hat{c}$, $0 \leq j \leq m$, mai aparține încă cel puțin unui cortegiu maximal $c \neq \hat{c}$.

Conform condiției 2 din definiția 2.2.1, are loc relația $x_{i_j} \in c^0$ și pentru orice cortegiu suport $\tilde{c}(\hat{c}) \in S(\hat{c})$ avem: $x_{i_j} \in \tilde{c}(\hat{c}) \cap \hat{c} \subset c^0$. Aceasta din urmă conduce la contradicție cu faptul că $\hat{c} = (x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_m})$ este cortegiu maximal în $\mathfrak{R}^{n+1}$ (a se vedea condiția 1 din definiția 2.2.1).

Definiția 2.2.2. Complexul de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = \{R^1, R^2, \dots, R^{n+1}\}$ se numește **arbore** dacă orice subcomplex al său conține cel puțin un cortegiu suspendat.

Teorema 2.2.2. Dacă complexul de relații $\mathfrak{R}^{n+1} = \{R^1, R^2, \dots, R^{n+1}\}$ este arbore cu cel puțin două cortegii maxime distincte, atunci $\mathfrak{R}^{n+1}$ conține cel puțin două cortegii suspendate.

Demonstrație. Notăm prin ζ familia tuturor cortegiilor maxime din R^{n+1} și definim pe această familie funcția $\varphi: \zeta \times \zeta \rightarrow N$, unde $\varphi(c_i, c_j)$ este egal cu numărul minim de elemente din ζ ce formează șirul $c_i = c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_{q-1}}, c_{k_q} = c_j$ cu proprietatea $c_{k_t} \cap c_{k_{t+1}} \neq \emptyset$, $\forall 1 \leq t \leq q-1$.

Ușor se verifică că funcția φ posedă proprietățile metricii:

- a) $\varphi(c_i, c_j) \geq 0$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq \text{card} \zeta$ și $\varphi(x_i, x_j) = 0$ dacă și numai dacă $c_i = c_j$;
- b) $\varphi(c_i, c_j) = \varphi(c_j, c_i)$, pentru oricare două elemente $c_i, c_j \in \zeta$;
- c) $\varphi(c_i, c_j) \leq \varphi(c_i, c_s) + \varphi(c_s, c_j)$ pentru oricare trei elemente c_i, c_j, c_s din ζ .

Astfel, prin funcția $\varphi: \zeta \times \zeta \rightarrow N$ se definește distanța dintre cortegiile maximale ale complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$. Numărul q reprezintă dinstanța dintre elementele $c_i, c_j \in \zeta$.

Alegem în ζ două cortegii c' și c'' ce se află la distanță maximă. Examinăm șirul

$$c' = c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_{q-1}}, c_{k_q} = c'' . \quad (2.2)$$

Conform celor menționate, obținem egalitatea: $c_{k_i} \cap c_{k_{i+j}} = \emptyset$, pentru orice $2 \leq j \leq q-i$, $1 \leq i \leq q-2$. Să presupunem că cel puțin unul dintre cortegiile c', c'' , de exemplu c'' , nu este cortegiu suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$. Atunci în ζ există cel puțin încă un cortegiu c''' , diferit de cele indicate anterior. Deoarece c', c'' sunt cortegii la distanță maximă, rezultă că dinstanța între c' și c''' este determinată de un alt șir de cortegii

$$c' = c_{s_1}, c_{s_2}, \dots, c_{s_{r-1}}, c_{s_r} = c''' . \quad (2.3)$$

În aceste condiții, reuniunea șirurilor (2.2) și (2.3) conține o submulțime $\zeta' \subset \zeta$ care formează un ciclu și fiecare cortegiu în acest ciclu nu este cortegiu suspendat. Ba mai mult, subcomplexul de relații, determinat de ζ' , nu conține cortegii suspendate. Aceasta vine în contradicție cu faptul că $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore, cea ce demonstrează afirmația teoremei.

Pentru complexe de relații multi-are are loc o generalizare a teoremei König, care a mai fost studiată și pentru alte structuri discrete [118]-[122]. Importanța acestui rezultat este determinată, în primul rând, de aplicațiile la soluționarea multiplelor probleme, cum ar fi problema cuplajului și acoperirii cu vârfuri pentru grafurile bipartite [238], [239].

Definiția 2.2.3. *Submulțimea $A \subset R^1$ formează o acoperire cu vârfuri a complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$ dacă orice cortegiu maximal $c \in \zeta$ conține cel puțin un element din A . Acoperirea se numește minimală dacă aceasta nu conține o altă acoperire cu vârfuri a complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$, și se numește minimă dacă conține cel mai mic număr de vârfuri printre toate acoperirile din $\mathfrak{R}^{n+1}$. Cardinalul acoperirii minime a complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$ se va nota prin $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1})$.*

Definiția 2.2.4. *Submulțimea $\zeta' \subset \zeta$, ce posedă proprietatea $c' \cap c'' = \emptyset$, pentru oricare două cortegii maximale $c', c'' \in \zeta'$, se numește intern stabilă. Mulțimea intern stabilă se numește maximală dacă aceasta nu se conține într-o anumită mulțime intern stabilă $\zeta'' \neq \zeta'$, și se numește mulțime intern stabilă maximă dacă ea conține un număr maxim de cortegii din ζ . Cardinalul mulțimii intern stabile maxime a complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$ se va nota prin $\beta(\mathfrak{R}^{n+1})$.*

În cele ce urmează, mulțimea intern stabilă o vom numi și mulțime de cortegii independente.

Conform teoremei lui König, dacă G este un graf bipartit, atunci are loc egalitatea: $\alpha(G) = \beta(G)$, unde $\alpha(G)$ reprezintă cardinalul acoperirii minime cu vârfuri pentru G , iar

$\beta(G)$ este numărul maxim de muchii independente (mulțimea respectivă de muchii se mai numește cuplaj maxim al grafului bipartit [45], [123], [302]).

Teorema lui König poate fi formulată și în cazul complexelor de relații multi-are, când acestea sunt arbori cu o proprietăți speciale. Vom defini, mai întâi noțiunea de α – stabilitate.

Definiția 2.2.5. *Complexul de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$ se numește α -stabil dacă toate acoperirile minimale din $\mathfrak{R}^{n+1}$ conțin același număr de elemente.*

Fie c un cortegiu maximal din $\mathfrak{R}^{n+1}$. Vom nota prin $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus c$ subcomplexul ce se obține din $\mathfrak{R}^{n+1}$ la eliminarea cortegiului c și a tuturor cortegiilor ereditare ale acestuia. Menționăm că, în caz general, complexul $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus c$ ar putea să nu mai fie complex de relații de aceeași dimensiune cu complexul $\mathfrak{R}^{n+1}$. Desigur, pornind de la definiția complexului de relații multi-are (a se vedea definiția 2.1.1), vom ține cont de faptul că, acele elemente ale cortegiului c care sunt și elemente ale altor cortegii maximale din $\mathfrak{R}^{n+1}$, se păstrează în complexul $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus c$. Celelalte elemente din c se elimină odată cu eliminarea cortegiului propriu-zis.

Lema 2.2.1. *Dacă $\tilde{c}(\hat{c})$ este cortegiul suport al unui cortegiu suspendat $\hat{c}$ al complexului α -stabil de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$, atunci sunt adevărate următoarele afirmații:*

1. $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}) = \begin{cases} \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) - 1, & \text{dacă în } \mathfrak{R}^{n+1} \text{ există acoperire minimă ce} \\ & \text{conține vârf suspendat din } \hat{c}, \\ \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}), & \text{în caz contrar,} \end{cases}$
2. $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})) = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1})$.

Demonstrație. Conform definiției 2.2.3, în orice complex de relații multi-are există acoperire cu vârfuri. Prin urmare, există atât acoperiri minimale cât și minime. Deoarece $\mathfrak{R}^{n+1}$ este complex α -stabil, orice acoperire minimală este și minimă. Fie $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = k \geq 1$, iar A – o acoperire minimă cu vârfuri în $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1})$. Ușor se verifică afirmația: pentru orice cortegiu maximal $\hat{c}$ din $\mathfrak{R}^{n+1}$ are loc inegalitatea:

$$\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}) \leq \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}). \quad (2.4)$$

Corectitudinea afirmației rezultă din faptul că, dacă într-un complex de relații multi-are cunoaștem o acoperire de vârfuri B și un cortegiu maximal $\hat{c}$, atunci la eliminarea din B a vârfurilor suspendate din $\hat{c}$, dacă acestea din urmă există, obținem o mulțime nouă ce formează acoperire de vârfuri pentru $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}$. Observăm că, dacă B este acoperire minimă și conține vârf suspendat din $\hat{c}$, atunci ea nu mai conține și alte vârfuri din $\hat{c}$. Să trecem la demonstrarea celor două afirmații ale lemei.

1) Evident, pentru complexul $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}$ are loc inegalitatea:

$$\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}) \geq k - 1. \quad (2.5)$$

Într-adevăr, dacă admitem contrariul, atunci în $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}$ există o acoperire cu vârfuri de cardinal cel mult $k-2$. Adăugând la această mulțime un vârf suspendat din $\hat{c}$, existența căruia este garantată de teorema 2.2.1, obținem acoperire cu vârfuri pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$ care conține cel mult $k-1$ elemente. Aceasta contrazice faptul că $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = k$. Prin urmare, ținând cont de relațiile (2.4) și (2.5), pentru $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}$ se respectă una dintre relațiile:

$$\text{a) } \alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}) = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) - 1,$$

$$\text{b) } \alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}) = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}).$$

a) Să admitem că A este acoperirea minimă cu vârfuri în $\mathfrak{R}^{n+1}$, care conține un vârf suspendat $x \in \hat{c}$. Deoarece x nu acoperă alte cortegii maxime din $\mathfrak{R}^{n+1}$ decât cortegiul $\hat{c}$, rezultă că mulțimea $A \setminus \{x\}$ este o acoperire cu vârfuri pentru $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}$. Atunci, ținând cont de faptul că $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) \leq \text{card}(A \setminus \{x\})$ și în baza relației (2.5), obținem egalitatea $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}) = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) - 1$.

b) Să presupunem totuși că în $\mathfrak{R}^{n+1}$ orice acoperire minimă A nu conține vârfuri suspendate din $\hat{c}$. Dacă A rămâne acoperire minimă și pentru $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}$, atunci egalitatea $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}) = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1})$ este demonstrată. Dacă A este o acoperire cu vârfuri pentru $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}$, însă nu și minimă, atunci în $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c}$ există o acoperire B , cardinalul căreia este $k-1$ (ținem cont de relația (2.5)). Alegem un vârf suspendat $x \in \hat{c}$. Evident, mulțimea $B \cup \{x\}$ formează o acoperire pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$ și $\text{card}(B \cup \{x\}) = k$. Deoarece $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = k$, rezultă că $B \cup \{x\}$ este acoperire minimă cu vârfuri pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$, chestiune evidentă în virtutea definițiilor respective. Aceasta vine în contradicție cu presupunerea noastră.

Din cele două cazuri examinate a) și b) rezultă afirmația lemei cu privire la valoarea lui $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \hat{c})$ – prima afirmație a lemei.

2) Fie A acoperirea minimă a complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$. În rolul lui A poate fi orice mulțime ce formează acoperire minimală de vârfuri. În $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ există acoperire minimă A' . Deci $\text{card} A' = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c}))$. În baza relației (2.4), are loc inegalitatea:

$$\text{card} A' \leq \text{card} A = k.$$

Acoperirea cu vârfuri A' conține cel puțin un vârf y din $\hat{c}$. Dacă $y \in \hat{c} \cap \tilde{c}(\hat{c})$, atunci A' formează acoperire cu vârfuri și pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$. Aceasta implică relația:

$$\text{card}A' = \text{card}A = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}).$$

Dacă y este vârf suspendat al cortegiului $\hat{c}$ în complexul $\mathfrak{R}^{n+1}$, atunci înlocuim acest vârf cu un vârf $z \in \hat{c} \cap \tilde{c}(\hat{c})$, existența căruia rezultă din definițiile cortegiului suspendat $\hat{c}$ și a cortegiului suport $\tilde{c}(\hat{c})$. Ca rezultat, pentru $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ obținem o acoperire cu vârfuri $B = (A' \setminus \{y\}) \cup \{z\}$, care este acoperire cu vârfuri și pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$. Din aceleași considerente, ca și în cazul examinat mai sus, obținem:

$$\text{card}A' = \text{card}B = \text{card}A = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}).$$

Prin urmare, în cazul unui cortegiu suport $\tilde{c}(\hat{c})$ este adevărată egalitatea:

$$\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})) = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}).$$

Vom stabili, în continuare, o relație importantă ce leagă cele două numere, definite anterior, pentru un complex α -stabil $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Teorema 2.2.3. *Dacă complexul de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore α -stabil, atunci este adevărată egalitatea: $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \beta(\mathfrak{R}^{n+1})$.*

Demonstrație. Fie $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore și $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = k$. Notăm prin $\zeta = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ familia tuturor cortegiilor maxime din $\mathfrak{R}^{n+1}$. Vom demonstra afirmația teoremei folosind metoda inducției matematice în raport cu cardinalul lui ζ .

Ușor se verifică că, în cazul $r = 1, 2$, afirmația teoremei este adevărată. Fie $\text{card}\zeta = r \geq 3$. Deoarece $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore, conform teoremei 2.2.2, acesta conține un cortegiu suspendat $\hat{c}$. Conform definiției 2.2.1, pentru $\hat{c}$ există cortegiul suport $\tilde{c}(\hat{c})$. În baza lemei 2.2.1, are loc egalitatea:

$$\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})) = k.$$

Conform inducției, pentru $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ are loc egalitatea:

$$\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})) = \beta(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})),$$

ceea ce înseamnă că în $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ există k cortegii maxime independente. Evident, aceste cortegii formează o mulțime intern stabilă și în $\mathfrak{R}^{n+1}$. Prin urmare:

$$\beta(\mathfrak{R}^{n+1}) \geq \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}). \quad (2.6)$$

Să demonstrăm că în $\mathfrak{R}^{n+1}$ are loc și inegalitatea inversă. Fie A acoperirea minimă cu vârfuri a arborelui $\mathfrak{R}^{n+1}$. În ζ există o submulțime $\zeta' \subset \zeta$ care este mulțime maximă intern stabilă pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$, adică:

$$\text{card}\zeta' = \beta(\mathfrak{R}^{n+1}).$$

Deoarece fiecare dintre cortegiile familiei ζ' conține cel puțin un element din A , rezultă inegalitatea:

$$\beta(\mathfrak{R}^{n+1}) \leq \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}). \quad (2.7)$$

Din relațiile (2.3) și (2.7) obținem afirmația din teoremă:

$$\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \beta(\mathfrak{R}^{n+1}).$$

Teorema 2.2.4. *Pentru un complex de relații multi-are α -stabil $\mathfrak{R}^{n+1}$, cu mulțimea maximă intern stabilă $\zeta^* = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$, sunt adevărate afirmațiile:*

- 1) *dacă $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \beta(\mathfrak{R}^{n+1})$, atunci orice vârf al complexului aparține exact unui cortegiu din mulțimea ζ^* ;*
- 2) *dacă $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore, atunci orice mulțime maximală intern stabilă B , cu proprietatea $\text{card} B = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1})$, conține toate cortegiile suspendate din $\mathfrak{R}^{n+1}$;*
- 3) *dacă $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore, atunci orice mulțime maximală intern stabilă B , cu proprietatea $\text{card} B = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1})$, nu conține nici un cortegiu suport din $\mathfrak{R}^{n+1}$;*
- 4) *dacă $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore α -stabil și $\tilde{c}(\hat{c})$ este cortegiu suport al cortegiului suspendat $\hat{c}$ din $\mathfrak{R}^{n+1}$, atunci complexul $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ este, de asemenea, α -stabil.*

Demonstrație. Mai întâi, menționăm că, deoarece $\zeta^* = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ este o mulțime maximă intern stabilă, are loc egalitatea:

$$\text{card} \zeta^* = \beta(\mathfrak{R}^{n+1}).$$

1. În baza condiției $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \beta(\mathfrak{R}^{n+1})$ obținem egalitatea $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \text{card} \zeta^* = k$, iar datorită faptului că $\mathfrak{R}^{n+1}$ este un complex α -stabil, rezultă că orice acoperire minimală cu vârfuri în $\mathfrak{R}^{n+1}$ conține k elemente. Pentru a demonstra prima afirmație a teoremei 2.2.4 vom presupune contrariul. Alegem un vârf arbitrar x al complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$ și admitem că nici un cortegiu din ζ^* nu-l conține pe x . (Prima afirmație ar mai însemna că, familia respectivă de cortegii conține toate vârfurile.)

În aceste condiții demonstrăm, mai întâi, că în $\mathfrak{R}^{n+1}$ există acoperire minimală cu vârfuri care conține vârful x . Fie ζ familia tuturor cortegiilor maxime din $\mathfrak{R}^{n+1}$. Ținând cont de definiția 2.1.1, complexul $\mathfrak{R}^{n+1}$ este determinat în mod univoc de ζ . Notăm prin c_x cortegiul maximal din ζ ce-l conține pe x , iar prin $c_1(c_x), c_2(c_x), \dots, c_p(c_x)$ – acele cortegii din ζ care au intersecție nevidă cu c_x , $p \leq \text{card} \zeta$. Construim o familie nouă de cortegii maxime ζ' , care se

obține din ζ prin eliminarea cortegiului c_x și înlocuirea cortegiilor $c_i(c_x)$ prin cortegiile $c'_i(c_x) = c_i(c_x) \setminus c_x$, $1 \leq i \leq p$. Evident, $c'_i(c_x) \neq \emptyset$, $0 \leq i \leq p$, însă nu toate vor fi cortegii maximale. Deci, $\text{card}\zeta' = \text{card}\zeta - 1$.

Notăm prin ζ'' familia tuturor cortegiilor maximale din ζ' , iar prin $\mathfrak{R}(\zeta'')$ complexul de relații determinat de ζ'' . Fie A' mulțimea minimală de vârfuri din $\mathfrak{R}(\zeta'')$, care formează o acoperire a tuturor cortegiilor din ζ' . Astfel, vor fi acoperite toate cortegiile maximale, dar și acele cortegii din ζ' care nu sunt maximale, însă au fost obținute din $c_i(c_x)$, $1 \leq i \leq p$, prin operația menționată mai sus. În complexul inițial $\mathfrak{R}^{n+1}$, mulțimea A' acoperă toate cortegiile maximale cu excepția lui c_x . Aceasta rezultă din cele examinate și definiția noțiunii de acoperire. Formând mulțimea $A = A' \cup \{x\}$, obținem o acoperire minimală cu vârfuri a complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Fie A acoperirea minimală ce conține vârful x . Această mulțime conține cel puțin câte un vârf din fiecare cortegiu din ζ^* . Deoarece $\text{card}\zeta^* = k$, iar conform presupunerii, vârful x nu aparține cortegiilor din ζ^* , obținem inegalitatea:

$$\text{card}A \geq \text{card}\zeta^* + 1,$$

ceea ce vine în contradicție cu faptul că $\mathfrak{R}^{n+1}$ este complex α -stabil și $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = k$. Prin urmare, afirmația 1 din teoremă este demonstrată.

2. Fie $\mathfrak{R}^{n+1}$ un arbore. Alegem o mulțime maximală intern stabilă B cu $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1})$ elemente. În conformitate cu afirmația 1, fiecare vârf din $\mathfrak{R}^{n+1}$ trebuie să aparțină exact unui cortegiu din B . Să admitem că un anumit cortegiu suspendat $\hat{c}$ nu aparține mulțimii B . Atunci vârful suspendat $x \in \hat{c}$ nu aparține nici unui cortegiu din B . Contradicția obținută demonstrează afirmația 2 din teoremă.

3. Conform afirmației 2, o mulțime maximală intern stabilă B conține toate cortegiile suspendate ale complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$. Să admitem că cortegiul suport al unui cortegiu suspendat aparține mulțimii B . Atunci în B vor fi două cortegii maximale cu intersecție nevidă. Contradicție cu definiția mulțimii intern stabile.

4. Fie $\hat{\zeta} = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ mulțimea tuturor cortegiilor maximale din $\mathfrak{R}^{n+1}$. Amintim că, la eliminarea din $\mathfrak{R}^{n+1}$ a unui cortegiu suspendat, se obține un complex nou cu un număr mai mic de vârfuri. Vom demonstra afirmația 4 a teoremei folosind metoda inducției matematice în raport cu numărul n de vârfuri ale arborelui. Evident, în cazul $n=1$, afirmația din teoremă este

adevărată. Admitem că afirmația e adevărată pentru orice arbore α -stabil cu $n \leq s$ vârfuri și vom examina un arbore α -stabil cu $s+1$ vârfuri, unde $s \geq 1$.

Conform definiției 2.2.3, în $\mathfrak{R}^{n+1}$ există acoperire minimală A . Deoarece arborele este α -stabil, toate acoperirile minimale conțin același număr de vârfuri (a se vedea definiția 2.2.5). Aceasta din urmă permite să considerăm adevărată egalitatea: $\text{card}A = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = k$. În arborele $\mathfrak{R}^{n+1}$ alegem cortegiul suspendat $\hat{c}$ și examinăm complexul $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$. Conform afirmației 2 din lema 2.2.1, are loc egalitatea:

$$\text{card}A = k = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})).$$

Alegem în mod arbitrar o mulțime minimală de vârfuri A' a complexului $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$. Vom arăta că $\text{card}A' = k$, ceea ce ar însemna că $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ este arbore α -stabil. Mulțimea A' poate să conțină sau să nu conțină vârfuri din cortegiul-suport $\tilde{c}(\hat{c})$.

Dacă A' conține cel puțin un vârf din cortegiul $\tilde{c}(\hat{c})$, atunci A' formează acoperire cu vârfuri și pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$ și atunci, $\text{card}A' = k$.

Fie mulțimea A' nu conține elemente ce aparțin cortegiului-suport $\tilde{c}(\hat{c})$. Pentru a demonstra egalitatea $\text{card}A' = k$, vom presupune contrariul. Fie $\text{card}A' > k$. (Menționăm că, deoarece $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})) = k$, inegalitatea $\text{card}A' < k$ nu e posibilă.)

Vom demonstra mai întâi că, în aceste condiții, în $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ există cel puțin un vârf x cu proprietățile:

- a) $x \notin A'$;
- b) x nu se află printre vârfurile cortegiului $\tilde{c}(\hat{c})$ ce se păstrează în complexul $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$.

Dacă notăm prin $\mathcal{V}(\mathfrak{R}^{n+1})$ mulțimea tuturor vârfurilor complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$, atunci condițiile a) și b) semnifică: $\exists x \in \mathcal{V}(\mathfrak{R}^{n+1}) \setminus (A' \cup \tilde{c}(\hat{c}))$.

Presupunem contrariul, ceea ce înseamnă că $\mathcal{V}(\mathfrak{R}^{n+1}) = A' \cup \tilde{c}(\hat{c})$. Menționăm că pentru orice vârf $y \in A'$ în complexul $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ există un cortegiu maximal $c(y)$ care nu mai conține alte elemente din A' . Într-adevăr, dacă un astfel de cortegiu $c(y)$ nu există, atunci $A \setminus \{y\}$, de asemenea, formează acoperirea cu vârfuri pentru $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$, ceea ce vine în contradicție cu condiția că A' este acoperire minimă.

Deoarece $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore, conform teoremei 2.2.3, are loc egalitatea $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \beta(\mathfrak{R}^{n+1})$. Din afirmația 3 a teoremei rezultă că $\tilde{c}(\hat{c}) \notin \zeta^*$, iar din presupunerea $\text{card}A' > k$ rezultă că există cel puțin un cortegiu $c_j \in \zeta^*$ pentru care se respectă relația:

$$\text{card}(A' \cap c_j) \geq 2,$$

ceea ce implică egalitatea:

$$c_j \setminus \tilde{c}(\hat{c}) = c_j \cap A'.$$

Fie $c_j \cap A' = \{z_1, z_2, \dots, z_h\}$, $h \geq 2$. Conform celor demonstrate mai sus, există h cortegii maximale $c(z_1), c(z_2), \dots, c(z_h)$, încât:

$$c(z_i) \setminus \tilde{c}(\hat{c}) = \{z_i\}, \quad 1 \leq i \leq h.$$

Examinăm, în continuare, subcomplexul din $\mathfrak{R}^{n+1}$, generat de cortegiile maximale $c_j, \tilde{c}(\hat{c}), c(z_1), \dots, c(z_h)$. Conform teoremei 2.2.2, complexul obținut conține cel puțin două cortegii maximale suspendate și, prin urmare, cel puțin două vârfuri suspendate. Ținând cont de modul în care s-a construit acest complex, rezultă că doar cortegiul $\tilde{c}(\hat{c})$ conține vârf suspendat. Contradicția obținută demonstrează existența în complexul $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ a unui vârf x ce posedă proprietățile a) și b) indicate mai sus.

Vom demonstra acum că presupunerea $\text{card} A' > k$ este greșită, ceea ce va însemna corectitudinea afirmației teoremei.

Eliminăm vârfurile x din arborele $\mathfrak{R}^{n+1}$. Ca rezultat, unele cortegii maximale din $\mathfrak{R}^{n+1}$ ar putea să dispară. Notăm complexul obținut prin $\mathfrak{R}'$, iar prin $\zeta' = \{c'_1, c'_2, \dots, c'_s\}$ – mulțimea tuturor cortegiilor maximale din $\mathfrak{R}'$, $\text{card} \zeta' = s \leq t = \text{card} \hat{\zeta}$. Complexul $\mathfrak{R}'$ posedă proprietățile:

I. Orice componentă conexă din $\mathfrak{R}'$ este arbore. Într-adevăr, alegem în $\mathfrak{R}'$ un subcomplex arbitrar $\mathfrak{R}'_0$ cu mulțimea de cortegii maximale distincte $\{c'_{1_0}, c'_{2_0}, \dots, c'_{r_0}\}$, $r_0 \leq t$. Deoarece $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore, rezultă că subcomplexul acestuia, determinat de cortegiile maximale ce corespund cortegiilor $c'_{1_0}, c'_{2_0}, \dots, c'_{r_0}$, conține un cortegiu suspendat $\hat{c}$. Ținând cont de modul de alegere a vârfurilor x , rezultă că în $\mathfrak{R}'_0$ acestui cortegiu îi corespunde cortegiul $\hat{c}'$ care, de asemenea, este suspendat, precum și cortegiu suport $\tilde{c}(\hat{c}')$. Conform definiției 2.2.2, aceasta înseamnă că orice componentă conexă din $\mathfrak{R}'$ este arbore.

II. Orice acoperire minimală cu vârfuri a complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$, ce nu conține vârfurile x , rămâne acoperire minimală și pentru $\mathfrak{R}'$. Menționăm că, din cele demonstrate anterior cu privire la existența vârfurilor x rezultă că în $\mathfrak{R}^{n+1}$ există acoperiri minimale menționate. Totodată, orice acoperire minimală cu vârfuri din $\mathfrak{R}'$ este acoperire minimală și pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$. Deoarece $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore α -stabil, rezultă că și $\mathfrak{R}'$ este α -stabil. Ba mai mult, are loc egalitatea:

$$\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \alpha(\mathfrak{R}') = k.$$

Din proprietățile I și II rezultă că, fără a pierde din generalitate, e suficient să examinăm doar cazul când $\mathfrak{R}'$ este arbore, adică e format dintr-o singură componentă conexă. (Aici e necesar de menționat faptul că, într-un arbore $\mathfrak{R}^{n+1}$ orice element $x \in X = \mathfrak{R}'$ aparține cel puțin unui cortegiu maximal ce conține cel puțin două elemente din X .)

Să notăm acum prin $\mathfrak{R}''$ arborele ce se obține din $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{C}(\hat{c})$ la eliminarea vârfului x . Observăm că, doar cu excepția cortegiului $\tilde{C}(\hat{c})$, toate cortegiile maximale din $\mathfrak{R}'$ coincid cu cortegiile maximale din $\mathfrak{R}''$. Deoarece $x \in \mathcal{V}(\mathfrak{R}^{n+1}) \setminus (A' \cup \tilde{C}(\hat{c}))$, rezultă că arborele $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^{n+1} \setminus x$ conține cortegiul $\tilde{C}(\hat{c})$.

Dacă într-un complex de relații $\mathfrak{R}^{n+1}$ există acoperire cu vârfuri ce conține un vârf suspendat, atunci înlocuind acest vârf cu un vârf nesuspendat al aceluiași cortegiu, obținem din nou o acoperire cu vârfuri a complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$. Această situație permite să trecem de la studierea unei acoperiri ce conține vârfuri suspendate la o acoperire ce nu conține astfel de vârfuri, iar cardinalul ultimei nu depășește cardinalul mulțimii inițiale.

Prin urmare, la construirea complexelor $\mathfrak{R}'$ și $\mathfrak{R}''$, elementul x poate fi ales în așa mod încât acesta posedă nu numai proprietățile demonstrate a) și b), însă mai este și un vârf suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$. Examinăm cazurile:

1) x este vârf suspendat și aparține unui cortegiu $c \neq \hat{c}$. Împreună cu condiția $x \notin \tilde{C}(\hat{c})$, aceasta înseamnă că mulțimea ce formează acoperire minimală în $\mathfrak{R}'$, va forma acoperire minimală și în $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{C}(\hat{c})$. Deoarece $\mathfrak{R}'$ este α -stabil, rezultă că și $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{C}(\hat{c})$ este α -stabil.

2) x este vârf suspendat în $\hat{c}$, însă în $\hat{c}$ mai există și alte vârfuri suspendate. Atunci $\tilde{C}(\hat{c})$ rămâne cortegiu-suport pentru $\hat{c} - x$ în complexul $\mathfrak{R}'$. În rezultat, din aceleași considerente ca și în primul caz, obținem că $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{C}(\hat{c})$ este α -stabil.

3) x este unicul vârf suspendat în $\hat{c}$. Reeșind din definiția arborelui, precum și din faptul că $\mathfrak{R}^{n+1}$ este α -stabil, deducem că în complex mai există cel puțin un cortegiu suspendat, diferit de $\hat{c}$. Aceasta ne permite să luăm în calitate de x vârful din acest cortegiu. Prin raționamente similare, ajungem la concluzia că $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{C}(\hat{c})$ este α -stabil.

Prin urmare, și cea de-a patra afirmație a teoremei este edevărată.

Lema 2.2.2. *Dacă complexul de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$ cu mulțimea de cortegii maximale ζ posedă proprietățile:*

- a) $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore;
- b) $\text{card } \zeta \geq 2$;

c) $\mathfrak{R}^{n+1}$ este α -stabil;

d) $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = k$ și în $\mathfrak{R}^{n+1}$ există exact k cortegii suspendate,

atunci orice cortegiu din ζ care nu este suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$ nu conține vârfuri suspendate.

Demonstrație. Condiția $\text{card } \zeta \geq 2$ este determinată de definiția 2.2.1.

Deoarece $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore, conform teoremei 2.2.3 este adevărată egalitatea $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = \beta(\mathfrak{R}^{n+1})$. Prin urmare, în $\mathfrak{R}^{n+1}$ există mulțime maximală intern stabilă cu $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1})$ elemente. Fie $\zeta^* = \{c_1^*, c_2^*, \dots, c_k^*\}$ mulțimea maximală intern stabilă. În baza afirmației 1 din teorema 2.2.4, toate vârfurile arborelui $\mathfrak{R}^{n+1}$ aparțin cortegiilor din ζ^* . Conform afirmației 2 din teorema 2.2.4, toate cortegiile din ζ^* sunt cortegii suspendate, deoarece $\mathfrak{R}^{n+1}$ conține exact k cortegii suspendate (conform proprietății d). Ca consecință, din cele menționate rezultă că, un cortegiu nesuspendat din $\mathfrak{R}^{n+1}$ nu conține vârfuri suspendate.

Teorema 2.2.5. Dacă $\mathfrak{R}^{n+1}$ este un arbore α -stabil cu mulțimea de cortegii maximale ζ , $\text{card } \zeta \geq 3$, și $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = k$, atunci $\mathfrak{R}^{n+1}$ conține exact k cortegii suspendate.

Demonstrație. Fie $\text{card } \zeta = q \geq 3$. Vom demonstra afirmația din teoremă prin metoda inducției matematice în raport cu numărul q de cortegii maximale din $\mathfrak{R}^{n+1}$. Condiția $q \geq 3$ este determinată de faptul că pentru $q = 1$ nu avem cortegiu suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$ (a se vedea definiția 2.2.1), iar pentru $q = 2$, arborele respectiv nu ar fi α -stabil (într-un astfel de arbore există mulțime minimală de acoperire din două vârfuri și există mulțime minimală cu un singur vârf – a se vedea figura 2.1).

Fie $q = 3$. Unicul arbore care în acest caz satisface condițiile teoremei este determinat de trei cortegii maximale c_1, c_2, c_3 ce posedă proprietățile: $c_1 \cap c_3 = \emptyset$, $1 \leq \text{card}(c_1 \cap c_2) < \text{card } c_1$, $1 \leq \text{card}(c_3 \cap c_2) < \text{card } c_3$, $(c_1 \cap c_2) \cup (c_3 \cap c_2) = c_2$. Atunci $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = 2$ și $\mathfrak{R}^{n+1}$ conține doar două cortegii suspendate.

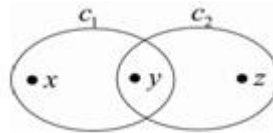


Fig. 2.1. Cazul $\text{card } \zeta \geq 3$. Cel puțin vârfurile x și y sunt vârfuri suspendate.
Mulțimi minimale de acoperire: $\{y\}, \{x, z\}$.

Vom examina în continuare cazul general $q > 3$. Alegem în $\mathfrak{R}^{n+1}$ un cortegiu suport $\tilde{c}(\hat{c})$ al unui cortegiu suspendat $\hat{c}$. Menționăm că cortegiul $\tilde{c}(\hat{c})$ nu poate fi și cortegiu suspendat,

deoarece în caz contrar vom obține în $\mathfrak{R}^{n+1}$ o mulțime intern stabilă ce conține ambele cortegii $\hat{c}$ și $\tilde{c}(\hat{c})$ (a se vedea demonstrația lemei 2.2.2).

Complexul $\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})$ este α -stabil, conform afirmației 4 din teorema 2.2.4, și $\alpha(\mathfrak{R}^{n+1} \setminus \tilde{c}(\hat{c})) = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1}) = k$, conform afirmației 2 din lema 2.2.1. Prin urmare, complexul $\mathfrak{R}^{n+1} / \tilde{c}(\hat{c})$ satisface condițiile teoremei (chiar dacă $\mathfrak{R}^{n+1} / \tilde{c}(\hat{c})$ nu este conex, atunci fiecare componentă conexă este arbore). Conform inducției matematice, în $\mathfrak{R}^{n+1} / \tilde{c}(\hat{c})$ există exact k cortegii suspendate. Dacă c este un cortegiu suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$, atunci conform lemei 2.2.2, acesta rămâne cortegiu suspendat și în $\mathfrak{R}^{n+1} / \tilde{c}(\hat{c})$ (rezultă din cele expuse anterior). Pentru a demonstra teorema, acum este suficient să arătăm că fiecare din cele k cortegii suspendate din $\mathfrak{R}^{n+1} / \tilde{c}(\hat{c})$ este cortegiu suspendat și în $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Pentru comoditate, în cele ce urmează vom nota $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^{n+1} / \tilde{c}(\hat{c})$. Fie $c_1^s, c_2^s, \dots, c_k^s$ cortegiile suspendate din $\mathfrak{R}'$, iar $c'_1, c'_2, \dots, c'_m$ – celelalte cortegii din $\mathfrak{R}'$. În $\mathfrak{R}^{n+1}$, în afară de aceste cortegii mai există doar cortegiul $\tilde{c}(\hat{c})$. Examinăm în continuare două cazuri, în dependență de numărul de cortegii suport din $\mathfrak{R}^{n+1}$.

A) În $\mathfrak{R}^{n+1}$ nu există alte cortegii suport afară de $\tilde{c}(\hat{c})$. Să presupunem că doar primele t cortegii $c_1^s, c_2^s, \dots, c_t^s$ sunt cortegii suspendate și în $\mathfrak{R}^{n+1}$ $t < m$. Excludem aceste cortegii din $\mathfrak{R}^{n+1}$. Obținem un complex nou $\mathfrak{R}'_t$, determinat de celelalte cortegii din ζ . În complexul $\mathfrak{R}'_t$ fiecare componentă conexă este arbore (a se vedea definiția 2.2.2). Prin urmare, $\mathfrak{R}'_t$ conține cel puțin două cortegii suspendate (conform teoremei 2.2.2).

Cortegiile $c'_1, c'_2, \dots, c'_m$ nu au vârfuri suspendate în $\mathfrak{R}^{n+1}$, deoarece conform inducției, acestea nu au astfel de vârfuri în $\mathfrak{R}'$. În complexul $\mathfrak{R}''$ aceste cortegii, de asemenea, nu conțin vârfuri libere (se ține cont de faptul că $\tilde{c}(\hat{c})$ este unicul cortegiu suport din $\mathfrak{R}^{n+1}$ și, deci, $c'_j \cap c_i^s \subseteq \tilde{c}(\hat{c}) \cap c_i^s$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq t$).

Prin urmare, nici unul dintre cortegiile $c'_1, c'_2, \dots, c'_m$ nu poate fi cortegiu suspendat în $\mathfrak{R}'_t$. Deoarece în $\mathfrak{R}'_t$ fiecare componentă conexă este arbore, rezultă că cel puțin unul dintre cortegiile $c_{t+1}^s, \dots, c_k^s$ este suspendat. Fie acesta este cortegiul c_k^s , ceea ce implică existența cortegiului suport $\tilde{c}(c_k^s)$ în $\mathfrak{R}'_t$. Luând în considerație faptul că în $\mathfrak{R}^{n+1}$ toate cortegiile suspendate nu se intersectează două câte două, obținem următoarele:

$$a) \quad c_k^s \cap \tilde{c}(c_k^s) = c'_0 \neq \emptyset;$$

b) $c \cap c_k^s \subset c'_0$, pentru orice cortegiu din $\mathfrak{R}^{n+1}$, care diferă de c_k^s .

Aceasta înseamnă că c_k^s este cortegiu suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$, ceea ce vine în contradicție cu presupunerea că cortegiile $c_{t+1}^s, \dots, c_k^s$ nu sunt cortegii suspendate în $\mathfrak{R}^{n+1}$. Prin urmare, în primul caz (cazul A), afirmația teoremei este adevărată.

B) Să presupunem că complexul $\mathfrak{R}^{n+1}$ conține cel puțin două cortegii suport. Fie, pe lângă cortegiul $\tilde{c}(\hat{c})$ în $\mathfrak{R}^{n+1}$, mai există un cortegiu suport c' . Din demonstrația lemei 2.2.2 rezultă că $\{c_1^s, c_2^s, \dots, c_k^s\}$ este o mulțime maximală intern stabilă, de unde obținem: $c' \neq c_i^s, 1 \leq i \leq k$. Să demonstrăm că fiecare dintre cortegiile $c_1^s, c_2^s, \dots, c_k^s$ este suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$. Alegem în mod aleator unul dintre aceste cortegii, de exemplu c_1^s .

Deoarece c_1^s este cortegiu suspendat în $\mathfrak{R}'$, există un cortegiu suport $\tilde{c}(c_1^s)$. Vom nota prin $\mathfrak{R}''$ complexul ce se obține din $\mathfrak{R}^{n+1}$ la eliminarea cortegiului c' . Mulțimea $\{c_1^s, c_2^s, \dots, c_k^s\}$ rămâne mulțime maximală intern stabilă și pentru $\mathfrak{R}''$. Conform inducției matematice, obținem că c_1^s este cortegiu suspendat în $\mathfrak{R}''$. Prin urmare, în $\mathfrak{R}''$ există cortegiul suport $\tilde{c}_2(c_1^s)$. Din cele expuse mai sus rezultă:

- a) în complexul $\mathfrak{R}'$ există cortegiul suport $\tilde{c}_1(c_1^s)$;
- b) în complexul $\mathfrak{R}''$ există cortegiul suport $\tilde{c}_2(c_1^s)$;
- c) $c' \cap c_1^s \subseteq \tilde{c}_1(c_1^s)$;
- d) $c(c_1^s) \cap c_1^s \subseteq c_2 \cap c_1^s$.

Pentru a demonstra că c_1^s rămâne cortegiul suspendat și în $\mathfrak{R}^{n+1}$, vom examina în continuare trei cazuri.

1) $\tilde{c}_1(c_1^s)$ și c' sunt cortegii distincte. Atunci $\tilde{c}_1(c_1^s)$ este un cortegiu din $\mathfrak{R}''$, iar din condiția b) rezultă: $\tilde{c}_1(c_1^s) \subseteq \tilde{c}_2(\hat{c})$. Aceasta din urmă conduce la concluzia: c_1^s este un cortegiu suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$, cu cortegiul suport $\tilde{c}_2(c_1^s)$.

2) $\tilde{c}_2(c_1^s)$ și $\hat{c}$ sunt cortegii distincte. În mod similar cu cazul precedent, obținem că c_1^s este cortegiu suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$ cu cortegiul suport $\tilde{c}_1(c_1^s)$.

3) Fie perechile de cortegii $\tilde{c}_1(c_1^s)$, c' și $\tilde{c}_2(c_1^s)$, $\hat{c}$ coincid, adică sunt adevărate egalitățile: $\tilde{c}_1(c_1^s) = c'$, $\tilde{c}_2(c_1^s) = \hat{c}$. Dacă în aceste condiții presupunem că c_1^s nu este cortegiul suspendat în $\mathfrak{R}^{n+1}$, atunci datorită relațiilor a) – d), obținem:

$$3.a) \quad \tilde{c}(\hat{c}) \cap c_1^s \not\subset c' \cap c_1^s;$$

$$3.b) \quad c' \cap c_1^s \not\subset \tilde{c}(\hat{c}) \cap c_1^s;$$

$$3.c) \quad c \cap c_1^s \subseteq (\tilde{c}(\hat{c}) \cap c') \cap c_1^s, \text{ pentru orice cortegiu } c \in \zeta, \text{ diferit de } \tilde{c}(\hat{c}), c', c_1^s.$$

Aceste relații determină existența a două vârfuri a și b în $\mathfrak{R}^{n+1}$ cu proprietățile:

$$a \in \tilde{c}(\hat{c}) \cap c_1^s \text{ și } a \notin c',$$

$$b \in c' \cap c_1^s \text{ și } b \notin \tilde{c}(\hat{c}).$$

Dacă prin $\mathfrak{X}$ am notat mulțimea tuturor vârfurilor din $\mathfrak{R}^{n+1}$, atunci prin $\mathfrak{X}(\tilde{c}(\hat{c}), c', c_1^s)$ vom nota mulțimea vârfurilor cortegiilor $\tilde{c}(\hat{c})$, c' și c_1^s . Fie $\mathfrak{R}'''$ complexul care se obține din $\mathfrak{R}^{n+1}$ la eliminarea celor trei cortegii menționate. Să arătăm că în condițiile create, pentru orice cortegiu c din $\mathfrak{R}'''$ are loc relația $c \not\subset \tilde{c}(\hat{c}) \cup c'$. Admitem totuși că un astfel de cortegiu c există. Notăm prin $\mathfrak{R}_1$ complexul ce se obține din $\mathfrak{R}^{n+1}$ la eliminarea cortegiilor $\tilde{c}(\hat{c})$, c' , c_1^s și c . Complexul $\mathfrak{R}_1$ satisface condițiile teoremei 2.2.1. Prin urmare, putem afirma că în $\mathfrak{R}_1$ există cel puțin două cortegii suspendate. Deoarece conform presupunerii, cortegiul c satisface relația $c \subset \tilde{c}(\hat{c}) \cup c'$, rezultă că c nu conține vârfuri suspendate, ceea ce înseamnă că acest cortegiu nu poate figura printre cortegiile suspendate. Din condițiile 3.a) și 3.b) rezultă că $\tilde{c}_1(c_1^s)$ nu poate fi cortegiu suspendat, deoarece în caz contrar cortegiul c trebuie să fie cortegiu suport pentru $\tilde{c}(\hat{c})$ și c' . Ca rezultat obținem $\tilde{c}(\hat{c}) \cap c_1^s \subseteq c \cap c_1^s$. Aceasta din urmă conduce la relația $a \in c$, ceea ce vine în contradicție cu condițiile 3.a) și 3.b) indicate mai sus.

Din cele examinate rezultă că $\tilde{c}(\hat{c})$ și c' sunt cortegiile suspendate în $\mathfrak{R}_1$. Să-l examinăm pe $\tilde{c}(\hat{c})$. Dacă c' este cortegiu suport pentru $\tilde{c}(\hat{c})$, atunci $c_1^s \cap \tilde{c}(\hat{c}) \subseteq c' \cap \tilde{c}(\hat{c}) \subseteq c'$, ceea ce este în contradicție cu relațiile 3.a) și 3.b). Dacă c este cortegiu suport pentru $\tilde{c}(\hat{c})$, atunci $c_1^s \cap \tilde{c}(\hat{c}) \subseteq c \cap \tilde{c}(\hat{c})$, adică $a \in c$, ceea ce iarăși contrazice relațiilor 3.a) – 3.b). Din motive similare, cortegiile $\tilde{c}(\hat{c})$ și c nu pot fi cortegii suport pentru c' . În consecință, aceasta ar însemna că c_1^s este cortegiu suport și pentru $\tilde{c}(\hat{c})$, și pentru c' , de unde: $c \cap \tilde{c}(\hat{c}) \subseteq c_1^s \cap \tilde{c}(\hat{c})$ și $c \cap c' \subseteq c_1^s \cap c'$. Aceasta conduce la relația $c \subset c_1^s$, ceea ce nu poate fi.

Astfel s-a demonstrat că în $\mathfrak{R}'''$ și în $\mathfrak{R}^{n+1}$ orice cortegiu diferit de $\tilde{c}(\hat{c})$ și c' conține cel puțin un vârf ce nu este în $\tilde{c}(\hat{c})$, c' . Datorită relațiilor 3.a) – 3.b), putem astfel să afirmăm că în $\mathfrak{R}^{n+1}$, în orice cortegiu $c \neq \tilde{c}(\hat{c})$, c' , există vârf ce nu aparține lui c_1^s . Prin urmare, în $\mathfrak{R}'''$ există acoperire minimală A cu vârfuri ce nu conține vârfuri din $\tilde{c}(\hat{c})$, c' și c_1^s . Are loc relația:

$cardA \geq k - 1$ ($k - 1$ reprezintă numărul de cortegii independente din $\mathfrak{R}^m$). Ca rezultat, mulțimea $A \cup \{a, b\}$ este acoperire minimală pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$ cu cel puțin $k + 1$ vârfuri. Aceasta vine în contradicție cu faptul că $\mathfrak{R}^{n+1}$ este arbore α -stabil și $k = \alpha(\mathfrak{R}^{n+1})$. Contradicția obținută demonstrează că cortegiul suspendat din $\mathfrak{R}'$ este suspendat și pentru $\mathfrak{R}^{n+1}$. Deci $\mathfrak{R}^{n+1}$ conține exact k cortegii suspendate.

2.3. Reprezentarea complexului de relații multi-are prin quasisimplexe abstracte

Definind noțiunea de G-complex de relații multi-are (a se vedea definiția 2.1.1), nu au fost impuse anumite restricții asupra cortegiilor de elemente din care este format $\mathfrak{R}^{n+1}$. Totuși, din punct de vedere intuitiv, uneori este mai comod de a studia unele proprietăți și noțiuni noi legate de relațiile multi-are, pornind de la un caz special al complexului – când cortegiile din care acesta e format nu conțin repetări de elemente. Folosind cortegiile fără repetări ale elementelor, vom interpreta complexul de relații ca o familie de simplexe abstracte obișnuite și apoi vom vorbi despre $\mathfrak{R}^{n+1}$ ca un complex de quasisimplexe. Astfel de complexe le generalizează pe cele studiate de către V. Boltyanski [305], I. Saveliev [115], etc., fiind determinate de produsul cartezian a unei mulțimi de elemente.

Definiția 2.3.1. Cortegiul $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in R^{m+1}$, elementele căruia sunt distincte două câte două, se va numi **simplex abstract cu dimensiunea m** și se va nota prin $s_i^m = (x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in R^{m+1}$, $m = \dim s_i^m$. Orice cortegiu de elemente $(x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_l}) \in R^{l+1}$ care este un subșir ereditar din s_i^m se va numi **fațetă** cu dimensiunea l a simplexului s_i^m și se va nota prin $s_j^l = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_l})$, $s_j^l \subset s_i^m$. Fațetele cu dimensiunea zero se vor numi vârfuri, iar cele cu dimensiunea unu – muchii ale simplexului s_i^m .

Dacă $\mathfrak{R}^{n+1}$ este finit și orice cortegiu din R^m , $1 \leq m \leq n + 1$, respectă definiția 2.3.1, atunci $\mathfrak{R}^{n+1}$ este un complex de relații multi-are examinat în [17], [18], [44]. Vom aminti câteva aspecte suplimentare din examinările acestui caz particular ale lui $\mathfrak{R}^{n+1}$, utile pentru cele ulterioare. Atragem atenția cititorului că, complexul infinit de relații multi-are necesită cercetări suplimentare și nu constituie obiectul de studiu al prezentei lucrări.

Mulțimea tuturor simplexelor m – dimensionale, determinate de elementele relației R^{m+1} , o vom nota prin $S^m = \{s_1^m, s_2^m, \dots, s_{\alpha_m}^m\}$, $\alpha_m = card S^m = card R^{m+1}$, $0 \leq m \leq n$. Mulțimea simplexelor 0-dimensionale reprezintă mulțimea de vârfuri ale lui $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Este clar că o submulțime formată din $m+1$ elemente din X , distincte două câte două, pot genera mai multe simplexe abstracte cu dimensiunea m . Numărul maxim al acestora coincide cu numărul de permutări diferite ale acelor $m+1$ elemente, adică $(m+1)!$. Prin urmare, simplexele abstracte distincte cu dimensiunea m „întinse” pe $m+1$ vârfuri din X , ni le putem imagina drept niște membrane ce înfășoară aceste vârfuri.

În cele ce urmează, vom nota prin S^m mulțimea tuturor simplexelor cu dimensiunea m , determinate de cortegiile din R^{m+1} .

Astfel, complexul de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (X = X^1, X^2, \dots, X^{n+1})$ poate fi reprezentat și în modul următor:

$$(S^0, S^1, \dots, S^n) = \mathcal{K}^n, \quad (2.8)$$

considerând:

$$S^0 = R^1, S^1 = R^2, \dots, S^n = R^{n+1}$$

și păstrând pentru $\mathcal{K}^n$ aceeași denumire de *complex*. Numărul n se numește **dimensiune** a lui $\mathcal{K}^n$ și se notează $n = \dim \mathcal{K}^n$. Prin urmare, are loc egalitatea $sk(m+1)\mathfrak{R}^{n+1} = sk(m)\mathcal{K}^n$, $1 \leq m \leq n$.

Fie $s_i^m \in S^m$ un simplex abstract cu dimensiunea m . Vom generaliza noțiunea de *stea*, cunoscută din [33], [301].

Definiția 2.3.2. *Mulțimea tuturor simplexelor din $\mathcal{K}^n$ cu dimensiunea mai mare decât m , pentru care s_i^m este fațetă comună, se numește **stea** a simplexului s_i^m , $0 \leq m \leq n$, și se va nota prin $st s_i^m$.*

Fie $\mathcal{W}$ o mulțime de simplexe din $\mathcal{K}^n$, iar s_i – un simplex arbitrar al acestuia. Prin analogie cu literatura clasică, vom spune că s_i este incident mulțimii $\mathcal{W}$, dacă în $\mathcal{W}$ există cel puțin un simplex ce conține cel puțin o fațetă comună cu s_i . Astfel, orice simplex al stelei $st s_i^m$ este incident lui s_i^m .

Remarca 2.3.1. *Complexul de relații $\mathcal{K}^n$ nu este un **complex simplicial abstract** [32], deoarece același set de vârfuri poate determina mai multe simplexe abstracte.*

Ținând cont de analogiile de mai sus, un complex de relații multi-are va fi reprezentat în cele ce urmează prin una dintre următoarele două variante echivalente [57].

$$\mathcal{K}^n = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1}) = \mathfrak{R}^{n+1},$$

$$\mathcal{K}^n = (S^0, S^1, \dots, S^n),$$

unde S^m reprezintă familia de simplexe m – dimensionale din $\mathcal{K}^n$, $0 \leq m \leq n$, $\alpha_m = \text{card } S^m$.

Definiția 2.3.3 [4], [303]. Pentru complexul de relații $\mathfrak{R}^{n+1} = \mathcal{K}^n = (S^0, S^1, \dots, S^n)$ definim funcția cu valori întregi:

$$\chi(\mathcal{K}^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i, \quad (2.9)$$

numită **caracteristica Euler** a complexului $\mathcal{K}^n$, unde $\alpha_i = \text{card } S^i$, $0 \leq i \leq n$.

Acum vom generaliza noțiunea de simplex, acceptând cortegiile ce admit repetări ale elementelor din X . Fie $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$ complexul generalizat de relații, definit în 2.1.

Definiția 2.3.4. Un cortegiu $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in R^{m+1}$ al G -complexului de relații multi-are $\mathcal{K}^n = \mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$ se va numi **quasisimplex abstract cu dimensiunea m** și se va nota prin $Q^m = (x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$, iar familia de quasisimplexe cu dimensiunea m – prin $\mathfrak{Q}^m$, $0 \leq m \leq n$.

Conform definiției 2.1.1, un cortegiu $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ din relația R^{m+1} poate avea mai multe elemente ce coincid. De exemplu, e posibil ca lui R^{m+1} să-i aparțină chiar și cortegiul $(x_{i_j}, x_{i_j}, \dots, x_{i_j})$ cu un singur element $x_{i_j} \in X$, repetat de $m+1$ ori, care reprezintă o generalizare a buclei din teoria grafurilor [5]. Aici se va păstra noțiunea de **bucă cu mai multe dimensiuni**. Însă, generalizând, buclele acestea pot avea și forme mai complicate. Problema clasificării buclelor pentru un cortegiu $(x_{i_0}, \dots, x_{i_m}) \in R^{m+1}$, $1 \leq m \leq n$, se face prin intermediul noțiunii de izomorfism și ține de un obiect de studiu aparte. Buclele complexului pot servi drept instrument eficient pentru clasificarea unor tipuri de varietăți abstracte [177]. Cele menționate mai sus ne impune a considera

Remarca 2.3.2. Orice simplex abstract reprezintă un quasisimplex, însă nu orice quasisimplex este simplex abstract. Cortegiul $(x_{i_1}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ nu este simplex abstract, deoarece elementul x_{i_1} figurează în acest cortegiu de cel puțin două ori.

Un quasisimplex abstract vom obișnui uneori să-l mai numim simplex degenerat, care diferă de simplexul obișnuit prin prezența buclelor, menționate mai sus.

Definiția 2.3.5. Quasisimplexul $Q^l = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_l}) \in \mathfrak{Q}^l$, care este un subșir ereditar al quasisimplexului $Q^m = (x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in \mathfrak{Q}^m$ se va numi **quasifațetă** cu dimensiunea l a quasisimplexului Q^m .

Fațeta lui Q^m , $1 \leq m \leq n$, evident, reprezintă la fel un quasisimplex (vezi definiția 2.3.4).

Luând în considerație formula de calcul a caracteristicii Euler menționată în definiția 2.3.3, în mod trivial se demonstrează următoarele două teoreme:

Teorema 2.3.1. *Dacă $\mathcal{K}^{n_1}$ și $\mathcal{K}^{n_2}$ sunt două subcomplexe de relații multi-are ale complexului $\mathcal{K}^n$, atunci*

$$\chi(\mathcal{K}^{n_1} \cup \mathcal{K}^{n_2}) = \chi(\mathcal{K}^{n_1}) + \chi(\mathcal{K}^{n_2}) - \chi(\mathcal{K}^{n_1} \cap \mathcal{K}^{n_2}).$$

Teorema 2.3.2. *Dacă șirul $\mathcal{K}^{n_1}, \mathcal{K}^{n_2}, \dots, \mathcal{K}^{n_q}$ reprezintă toate componentele conexe ale complexului $\mathcal{K}^n$, atunci*

$$\chi(\mathcal{K}^n) = \sum_{i=0}^q \chi(\mathcal{K}^i). \quad (2.10)$$

Menționăm că relațiile multi-are $R^1, R^2, \dots, R^n, R^{n+1}$, ce reprezintă G -complexul de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$ (a se vedea definiția 2.1.1), sunt familii de quasisimplexe abstracte cu dimensiunile $0, 1, \dots, n$, pe care le notăm prin $\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n$. În cele ce urmează, G -complexul de relații $\mathfrak{R}^{n+1}$ reprezentat prin quasisimplexe, îl vom numi complex de quasisimplexe abstracte și, pentru a-l deosebi de complexul simplu, studiat mai sus, îl vom nota prin $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$.

2.4. Orientarea quasisimplexelor și matricele de incidență

Fie $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ un G -complex de relații multi-are și $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$, $j \in \Lambda_m$, un quasisimplex arbitrar, reprezentat $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$, $0 \leq m \leq n$. Se consideră:

$$\Lambda_m = \text{card } \mathcal{Q}^m, m = 0, 1, \dots, n.$$

Pentru succesiunea de indici $(j_0, j_1, \dots, j_m)$ vom nota prin $t(j_0, j_1, \dots, j_m)$ numărul tuturor inversiunilor [40] cortegiului dat. Menționăm că, dacă $j_r > j_s$, unde $s > r$, și după j_r mai sunt indici egali cu j_s , atunci numărul de inversiuni crește cu numărul respectiv.

Definiția 2.4.1. *Dacă pentru quasisimplexul $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ numărul $t(j_0, j_1, \dots, j_m)$ este **par**, atunci Q_j^m se numește quasisimplex **orientat pozitiv** și se va nota prin $+Q_j^m$, iar dacă $t(j_0, j_1, \dots, j_m)$ este **impar**, atunci Q_j^m se va numi quasisimplex **orientat negativ** și se va nota prin $-Q_j^m$. Quasisimplexul orientat $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ se va nota:*

$$Q_j^m = [x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}].$$

Astfel, orice permutare a elementelor $(x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ reprezintă un quasisimplex m -dimensional orientat. În total sunt $(m+1)!$ astfel de simplexe. Fiecare quasisimplex orientat $Q_j^m = [x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}]$ se caracterizează prin *topul său* – vârful x_{j_0} , și *baza*, reprezentată prin quasisimplexul orientat $[x_{j_1}, \dots, x_{j_m}]$.

Dacă pentru quasisimplexul orientat $Q_j^m = [x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}]$ cunoaștem orientarea acestuia, atunci vom folosi notația: $Q_j^m = \xi_j(m) \cdot [x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}]$, unde $\xi_j(m) = +1$, în cazul când quasisimplexul este orientat pozitiv, și $\xi_j(m) = -1$, în cazul când acesta este orientat negativ.

Fie $Q_{j_k}^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}$ un quasisimplex cu dimensiunea $m-1$, care se obține din quasisimplexul $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ prin eliminarea unui vârf x_{j_k} . Prin urmare, $Q_{j_k}^{m-1}$ este o quasifațetă a simplexului Q_j^m , opusă vârfului x_{j_k} . Acest quasisimplex poate fi notat și astfel:

$$Q_{j_k}^{m-1} = [x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}].$$

Evident, nu orice fațetă a unui quasisimplex poate servi drept bază a acestuia, însă putem construi un alt quasisimplex cu baza respectivă. Dacă x_{j_k} nu este topul quasisimplexului Q_j^m , adică $x_{j_k} \neq x_{j_0}$, atunci quasisimplexul cu baza $Q_{j_k}^{m-1} = [x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}]$ se va nota prin $x_{j_k} \rightarrow Q_{j_k}^{m-1}$.

Definiția 2.4.2. Două quasisimplexe $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ și $Q_i^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}$, dintre care Q_i^{m-1} este quasifațetă a quasisimplexului Q_j^m , opusă unui vârf x_{j_k} din Q_j^m , adică $Q_i^{m-1} = Q_{j_k}^{m-1}$, se numesc x_{j_k} -coerente, dacă quasisimplexele Q_j^m și $x_{j_k} \rightarrow Q_{j_k}^{m-1}$ sunt orientate la fel, adică ambele sunt orientate pozitiv sau ambele sunt orientate negativ.

În cazul când contextul nu o cere, quasisimplexele Q_j^m și $Q_{j_k}^{m-1}$ le vom numi quasisimplexe coerente, fără a indica vârful x_{j_k} .

Menționăm că, în conformitate cu regula de determinare a semnului, toate simplexele cu dimensiunea zero se consideră orientate pozitiv, chestiune întâlnită în literatură sub diverse aspecte [52], [57], [300], [305].

Nu vom extinde aici noțiunea de coerență asupra quasisimplexelor, dimensiunile cărora diferă mai mult decât cu o unitate.

Definiția 2.4.3. Se numește coeficient de Δ -incidență a quasisimplexului $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$, $0 \leq m \leq n$, în raport cu quasisimplexul $Q_i^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}$, numărul

$$\varepsilon_j^i(m, \Delta) = \begin{cases} +1, & \text{dacă } Q_j^m \text{ și } Q_i^{m-1} \text{ sunt quasisimplexe coerente,} \\ -1, & \text{dacă } Q_j^m \text{ și } Q_i^{m-1} \text{ sunt quasisimplexe noncoerente,} \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

unde $i \in \Lambda_{m-1} = \text{card } \mathcal{Q}^{m-1}$, $j \in \Lambda_m = \text{card } \mathcal{Q}^m$.

Observăm că egalitatea $\varepsilon_j^i(m, \Delta) = 0$ are loc doar în cazul când Q_i^{m-1} nu e fațetă pentru Q_j^m .

Coeficientul de Δ -incidență a două quasisimplexe orientate Q_j^m și Q_i^{m-1} , în ordinea indicată, se va nota:

$$[Q_j^m : Q_i^{m-1}] = \varepsilon_j^i(m, \Delta).$$

Dacă Q_j^m este quasisimplexul reprezentat de elementele $x_0, x_1, \dots, x_m$, și anume $Q_j^m = [x_0, x_1, \dots, x_m]$, iar $Q_{j_k}^{m-1} = [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m]$, atunci ușor putem constata că are loc egalitatea:

$$\varepsilon_j^{j_k}(m, \Delta) = [Q_j^m : Q_{j_k}^{m-1}] = (-1)^k,$$

care rezultă nemijlocit din relația:

$$Q_j^m = [x_0, x_1, \dots, x_m] = (-1)^k [x_k, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m].$$

Apelând la semnele $\xi_j(m)$ și $\xi_{j_k}(m-1)$ ale orientărilor celor două quasisimplexe Q_j^m și $Q_{j_k}^{m-1}$, ultima egalitate se transcrie:

$$\xi_j(m) = (-1)^k \xi_{j_k}(m-1), \quad 0 \leq k \leq m,$$

sau

$$\xi_j(m) = \varepsilon_j^{j_k}(m, \Delta) \xi_{j_k}(m-1).$$

Să demonstrăm câteva proprietăți ale coeficienților de Δ -incidență:

P1: Dacă $Q_{j_k}^{m-1}$ este fațeta quasisimplexului $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$, opusă vârfului x_{j_k} ,

$0 \leq k \leq m$, atunci pentru orice orientare a lui Q_j^m este adevărată egalitatea:

$$[-Q_j^m : Q_{j_k}^{m-1}] = [Q_j^m : (-1)Q_{j_k}^{m-1}] = -[Q_j^m : Q_{j_k}^{m-1}].$$

Demonstrație. Prima parte a acestei egalități rezultă din faptul că dacă $\varepsilon_j^{j_k}$ este coeficientul de Δ -incidență a simplexului Q_j^m în raport cu simplexul $Q_{j_k}^{m-1}$, adică între $\xi_j(m)$, $\xi_{j_k}(m-1)$ și $\varepsilon_j^{j_k}(m, \Delta)$ are loc relația $\xi_j(m) = \varepsilon_j^{j_k}(m, \Delta) \xi_{j_k}(m-1)$, atunci $-\xi_j(m) = -\varepsilon_j^{j_k}(m, \Delta) \xi_{j_k}(m-1)$. Cea de-a doua parte a egalității rezultă din faptul că semnele de orientare a quasisimplexelor $-Q_{j_k}^{m-1} = -[x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}]$ și $-(x_{j_k} \rightarrow Q_{j_k}^{m-1}) = -[x_{j_k}, x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}]$ coincid.

P2. Dacă $Q_0^{m-1} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ și $Q_1^{m-1} = (x_0, x_2, \dots, x_m)$ sunt fațetele quasisimplexului $Q_j^m = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)$, orientate într-un anumit mod, atunci pentru orice orientare a lui Q_j^m este adevărată egalitatea:

$$[Q_j^m : Q_1^{m-1}] = -[Q_j^m : Q_0^{m-1}].$$

Demonstrație. Conform proprietății P1, avem relațiile:

$$[-Q_j^m : Q_0^{m-1}] = -[Q_j^m : Q_0^{m-1}],$$

$$[-Q_j^m : Q_1^{m-1}] = -[Q_j^m : Q_1^{m-1}],$$

ceea ce înseamnă că pentru a demonstra proprietatea P1 e suficient să examinăm orientarea $Q_j^m = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_m]$. Anterior s-a menționat că pentru un quasisimplex Q_j^m și fațeta acestuia $Q_{j_k}^{m-1}$ are loc egalitatea:

$$\varepsilon_j^{j_k}(m, \Delta) = [Q_j^m : Q_{j_k}^{m-1}] = (-1)^k.$$

Prin urmare, obținem:

$$[Q_j^m : Q_0^{m-1}] = 1 \text{ și } [Q_j^m : Q_1^{m-1}] = -1,$$

ceea ce demonstrează cea de-a doua proprietate enunțată pentru coeficienții de Δ -incidență.

Fie acum Q^{m-2} o fațetă $(m-2)$ -dimensională a quasisimplexului $Q_j^m = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)$, orientată în mod arbitrar. Alegem în Q_j^m două fațete $(m-1)$ -dimensionale $Q_0^{m-1} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ și $Q_1^{m-1} = (x_0, x_2, \dots, x_m)$, pe care le orientăm astfel încât să aibă loc egalitățile:

$$[Q_0^{m-1} : Q^{m-2}] = 1,$$

$$[Q_1^{m-1} : Q^{m-2}] = 1.$$

Ușor ne convingem de corectitudinea relației:

$$[Q_j^m : Q_0^{m-1}] + [Q_j^m : Q_1^{m-1}] = 0,$$

care rezultă din egalitatea:

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_m] : [x_1, \dots, x_m] = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_m] : [x_0, x_2, \dots, x_m] = +1.$$

Formula $[Q_j^m : Q_0^{m-1}] + [Q_j^m : Q_1^{m-1}] = 0$ poate fi generalizată în cazul orientărilor arbitrare ale quasisimplexelor Q_j^m , Q_0^{m-1} , Q_1^{m-1} și Q^{m-2} , și anume:

$$[Q_j^m : Q_0^{m-1}] \cdot [Q_0^{m-1} : Q^{m-2}] + [Q_j^m : Q_1^{m-1}] \cdot [Q_1^{m-1} : Q^{m-2}] = 0,$$

iar în cazul unui complex complet de quasisimplexe abstracte, această formulă primește următoarea interpretare:

$$\sum_{Q_i^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}} [Q_j^m : Q_i^{m-1}] \cdot [Q_i^{m-1} : Q^{m-2}] = 0.$$

De rând cu noțiunea de incidență, numită uneori Δ -incidență, pentru complexul de quasisimplexe vom folosi și noțiunea de ∇ -incidență, respectiv de coeficient de ∇ -incidență.

Definiția 2.4.4. Se numește coeficient de ∇ -incidență a quasisimplexului $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$, $0 \leq m \leq n$, în raport cu quasisimplexul $Q_l^{m+1} \in \mathcal{Q}^{m+1}$, numărul

$$\varepsilon_j^l(m, \nabla) = \begin{cases} +1, & \text{dacă } Q_j^m \text{ și } Q_l^{m+1} \text{ sunt quasisimplexe coerente,} \\ -1, & \text{dacă } Q_j^m \text{ și } Q_l^{m+1} \text{ sunt quasisimplexe noncoerente,} \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

unde $j \in \Lambda_{m-1} = \text{card } \mathcal{Q}^m$, $l \in \Lambda_{m+1} = \text{card } \mathcal{Q}^{m+1}$.

Coeficientul de ∇ -incidență a quasisimplexelor Q_j^m și Q_l^{m+1} , în ordinea indicată, se va nota:

$$[Q_j^m : Q_l^{m+1}] = \varepsilon_j^l(m, \nabla).$$

În cazul coeficienților de Δ -incidență și ∇ -incidență ușor se verifică următoarele relații:

$$\varepsilon_j^i(m, \Delta) = \varepsilon_i^j(m-1, \nabla), \quad \text{unde } 1 \leq m \leq n,$$

$$\varepsilon_j^l(m, \nabla) = \varepsilon_l^j(m+1, \Delta), \quad \text{unde } 0 \leq m \leq n-1$$

și $i \in \Lambda_{m-1} = \text{card } \mathcal{Q}^{m-1}$, $j \in \Lambda_m = \text{card } \mathcal{Q}^m$, $l \in \Lambda_l = \text{card } \mathcal{Q}^l$.

Noțiunile de Δ -incidență și ∇ -incidență se mai întâlnesc în literatura de specialitate în legătură cu studierea diferitelor obiecte matematice [35], [56] [300], [305].

Remarca 2.4.1. Simbolurile Δ și ∇ sunt împrumutate din lucrările [35], [305] și, în opinia noastră, sunt mai comode pentru expunerea ulterioară.

Remarca 2.4.2. Coeficientul de incidență $[Q_j^m : Q_i^{m-1}]$ al quasisimplexelor $Q_j^m = [x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}]$ și $Q_i^{m-1} = [x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-1}}]$, unde $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-1}}$ este un șir format din elementele lui Q_j^m , dar nu este un subșir ereditar al succesiunii $[x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}]$, este egal cu zero. Quasisimplexul Q_i^{m-1} nu este quasifațetă a quasisimplexului $Q_j^m = [x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}]$.

Definiția 2.4.5. Pentru un G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ construim următoarele două matrice:

I^{00} . $I^m(\Delta) = (\varepsilon_j^i(m, \Delta))$, unde i și j indică numărul de ordine al liniei și, respectiv, al coloanei matricei $I^m(\Delta)$, $i \in \Lambda_{m-1}$, $j \in \Lambda_m$, $1 \leq m \leq n$, numită **matrice de Δ -incidență cu dimensiunea m** .

2^{00} . $I^m(\nabla) = (\varepsilon_j^l(m, \nabla))$, unde l și j indică numărul de ordine al liniei și, respectiv, al coloanei matricei $I^m(\nabla)$, iar $j \in \Lambda_m, l \in \Lambda_{m+1}, 0 \leq m \leq n-1$, numită **matrice de ∇ -incidență cu dimensiunea m** .

Menționăm că, deoarece mulțimea X , în baza căreia se definește G -complexul de relații multi-are, este o mulțime finită, matricele $I^m(\Delta)$ și $I^m(\nabla)$ sunt și ele finite (a se vedea definiția 2.1.1). În condițiile unui complex infinit de relații multi-are (adică în cazul când X este o mulțime infinită), evident, matricele respective vor fi infinite. (Studiul acestui complex depășește scopul prezentei lucrări.)

Afirmația 2.4.1. Pentru un complex generalizat de relații $\mathcal{X}^n$, perechile de matrici $I^m(\Delta), I^{m-1}(\nabla), 1 \leq m \leq n$, precum și $I^m(\nabla), I^{m+1}(\Delta), 0 \leq m \leq n-1$, sunt transpuse, adică:

$$\begin{aligned}(I^m(\Delta))^* &= I^{m-1}(\nabla), \\ (I^m(\nabla))^* &= I^{m+1}(\Delta).\end{aligned}$$

2.5. Lanțuri și cicluri m -dimensionale

Fie date un G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ și grupul aditiv al numerelor întregi Z . Prin analogie cu definiția 2.3.2, pentru quasisimplexul $Q_j^m \in \mathcal{X}^n$ vom introduce noțiunea de **quasistea** a lui Q_j^m ca o totalitate de quasisimplexe din $\mathcal{X}^n$ pentru care Q_j^m este quasifațetă a acestora și se va nota prin **qst** (Q_j^m) , $0 \leq m \leq n$. În cazul unui quasisimplex $Q_j^n \in \mathcal{Q}^n$, mulțimea **qst** Q_j^n este vidă.

Quasisimplexul $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ conține $m+1$ fațete $(m-1)$ -dimensionale, pe care le vom nota $Q_{\beta_0}^{m-1}, Q_{\beta_1}^{m-1}, \dots, Q_{\beta_m}^{m-1}$. Considerăm că în quasistea **qst** Q_j^m există anumite t quasisimplexe $(m+1)$ -dimensionale, pentru care Q_j^m este fațetă ereditară, și vom nota aceste quasisimplexe prin $Q_{\gamma_1}^{m+1}, Q_{\gamma_2}^{m+1}, \dots, Q_{\gamma_t}^{m+1}$, $t \geq 1$, $0 \leq m \leq n-1$. Existența quasistei nevide pentru quasisimplexul $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ este garantată de definiția complexului generalizat de relații.

Definiția 2.5.1. Vom numi, respectiv, Δ -frontieră (frontieră algebrică) și ∇ -frontieră (cofrontieră) a unui quasisimplex $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ următoarele sume:

$$\Delta q_j^m = \varepsilon_j^{\beta_0}(m, \Delta) Q_{\beta_0}^{m-1} + \varepsilon_j^{\beta_1}(m, \Delta) Q_{\beta_1}^{m-1} + \dots + \varepsilon_j^{\beta_m}(m, \Delta) Q_{\beta_m}^{m-1}, \quad (2.11)$$

unde $1 \leq m \leq n$, $j \in \Lambda_m$, și

$$\nabla Q_j^m = \varepsilon_j^{\gamma_1}(m, \nabla)Q_{\gamma_1}^{m+1} + \varepsilon_j^{\gamma_2}(m, \nabla)Q_{\gamma_2}^{m+1} + \dots + \varepsilon_j^{\gamma_t}(m, \nabla)Q_{\gamma_t}^{m+1}, \quad (2.12)$$

unde $0 \leq m \leq n-1$, $j \in \Lambda_m$. Vom nota Δ -frontiera quasisimplexului Q_j^m prin ΔQ_j^m , iar ∇ -frontiera acestuia prin ∇Q_j^m , $0 \leq m \leq n$.

Pentru orice quasisimplex $Q_i^0 \in \mathfrak{Q}^0$ și orice quasisimplex $Q_j^n \in \mathfrak{Q}^n$ vom considera :

$$\Delta Q_i^0 = 0, \text{ și } \nabla Q_j^n = 0,$$

unde $i \in \Lambda_0 = \text{card } X$, $j \in \Lambda_n = \text{card } \mathfrak{Q}^n$.

Formulele (2.11) și (2.12) ar putea fi scrise mai simplu. De exemplu, fie quasisimplexul $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ reprezentat prin indicii respectivi:

$$Q_j^m = (j_0, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m),$$

iar quasifațeta $(m-1)$ -dimensională $Q_{j_k}^{m-1}$ a lui Q_j^m este fațeta opusă vârfului j_k , $0 \leq k \leq m$.

Atunci, în baza definiției cu privire la coerența quasisimplexelor Q_j^m și $(-1)^k Q_{j_k}^{m-1}$, unde $(-1)^k = \varepsilon_j^k(m, \Delta)$, suma (2.11) poate fi scrisă în modul următor:

$$\Delta Q_j^m = (-1)^0 Q_{\beta_0}^{m-1} + (-1)^1 Q_{\beta_1}^{m-1} + \dots + (-1)^k Q_{\beta_k}^{m-1} + \dots + (-1)^m Q_{\beta_m}^{m-1}. \quad (2.11')$$

La fel ca și în [32], [52], se demonstrează că $\Delta \Delta Q_j^m = 0$, $\nabla \nabla Q_j^m = 0$, pentru orice quasisimplex $Q_j^m \in \mathfrak{Q}^m$, $0 \leq m \leq n$.

Alți coeficienți de Δ -incidență, care nu figurează în suma (2.11'), conform definiției 2.4.2, sunt egali cu zero.

Avantajele formulelor (2.11) și (2.12) vor fi aplicate în continuare. Fie acum $f: \mathfrak{X}^n \rightarrow Z$ o aplicație univocă a complexului de relații $\mathfrak{X}^n$ în grupul numerelor întregi. În cazul unui simplex $Q^m \in \mathfrak{Q}^m$, orientat negativ (a se vedea definiția 2.4.1), vom conveni să scriem $f(-Q^m) = -f(Q^m)$. Să notăm $f(Q_i^m) = p_i$, unde $p_i \in Z$ pentru orice $Q_i^m \in \mathfrak{Q}^m$. Pentru simplitate și pentru a ține cont de proimaginea lui p_i , în loc de $f(Q_i^m) = p_i$ vom scrie $p_i Q_i^m$, $0 \leq m \leq n$.

Definiția 2.5.2. Pentru familia de quasisimplexe $\mathfrak{Q}^m = \{Q_1^m, Q_2^m, \dots, Q_{\alpha_m}^m\}$, $0 \leq m \leq n$, suma finită

$$p_1 Q_1^m + p_2 Q_2^m + \dots + p_{\alpha_m} Q_{\alpha_m}^m \quad (2.13)$$

se va numi **lanț m-dimensional** al G -complexului de relații $\mathfrak{X}^n$ și se va nota prin L^m , pe când mulțimea tuturor lanțurilor L^m se va nota prin $\mathcal{L}^m$, $0 \leq m \leq n$.

Fie $L_1^m = \sum_{Q_i^m \in \mathfrak{Q}^m} p_i Q_i^m$ și $L_2^m = \sum_{Q_i^m \in \mathfrak{Q}^m} t_i Q_i^m$ două lanțuri m -dimensionale ale G -complexului de relații $\mathfrak{X}^n$.

Definiția 2.5.3. *Relația*

$$L_1^m + L_2^m = \sum_{Q_i^m \in \mathfrak{Q}^m} (p_i + t_i) Q_i^m \quad (2.14)$$

se numește **sumă a lanțurilor** L_1^m și L_2^m .

Este evidentă

Teorema 2.5.1. *Mulțimea $\mathcal{L}^m$ a tuturor lanțurilor m -dimensionale a unui G -complex de relații multi-are $\mathfrak{X}^n$ cu operația de adunare, definită prin relația (2.14), formează un grup comutativ.*

Grupul Δ -lanțurilor m -dimensionale se va nota prin $\Delta\mathcal{L}^m$.

Definiția 2.5.4. *Pentru un lanț m -dimensional și finit $L^m \in \mathcal{L}^m$, $0 \leq m \leq n$, expresia*

$$\Delta L^m = \sum_{Q_i^m \in \mathfrak{Q}^m} p_i \Delta Q_i^m \quad (2.15)$$

se va numi **Δ -frontieră algebrică** a lanțului L^m .

În cazul $m=0$, conform definiției 2.5.1, rezultă că $\Delta L^0 = 0$.

Ținând cont de cele menționate mai sus, orice lanț $L^m \in \mathcal{L}^m$ se va mai numi și Δ -lanț.

În literatura clasică se mai aplică și terminologia menționată în [32].

Remarca 2.5.1. *Operația de definire a Δ -frontierei algebrice a unui Δ -lanț $L^m \in \mathcal{L}^m$ este un omomorfism [40]:*

$$\Delta(m): \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^{m-1}, 0 \leq m \leq n.$$

Este firesc să numim acest omomorfism **Δ -omomorfism**. Aceasta este necesar, deoarece vom mai utiliza un alt omomorfism, care are o semnificație diferită de cea a Δ -omomorfismului. Δ -Omomorfismul menționat poate fi obținut prin aplicarea operației respective de creare a Δ -frontierei pentru quasisimplexul Q_i^m (a se vedea relația (2.11')) și considerând $\Delta Q_i^m = L^{m-1} \in \mathcal{L}^{m-1}$, $0 \leq m \leq n$. Vom nota prin $Im\Delta(m)$ imaginea, iar prin $Kern\Delta(m)$ – nucleul omomorfismului $\Delta(m)$ [40].

Teorema 2.5.2. *Pentru orice lanț $L^m \in \mathcal{L}^m$ se verifică egalitatea $\Delta\Delta L^m = 0$, $m = 0, 1, \dots, n$.*

Demonstrația acestei teoreme se face exact ca în [32], aplicând relația cunoscută $\Delta\Delta Q_i^m = 0$ (a se vedea definiția 2.5.1).

Din demonstrația teoremei 2.5.2, este lesne a deduce

Consecința 2.5.1. Pentru un G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n$ are loc egalitatea:

$$I^{m-1}(\Delta) \cdot I^n(\Delta) = 0, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (2.16)$$

Definiția 2.5.5. Lanțul $L^m \in \mathcal{L}^m$ cu proprietatea $\Delta L^m = 0$ se numește Δ -ciclu cu dimensiunea m al G -complexului $\mathcal{X}^n$ și se notează prin $Z^m(\Delta) = L^m$, $0 \leq m \leq n$.

Desigur, operația de adunare a lanțurilor, definită prin relația (2.14), se răsfrânge și asupra ciclurilor, în baza definiției 2.5.5. Este evidentă

Teorema 2.5.3. Mulțimea tuturor Δ -ciclurilor m -dimensionale în raport cu operația de adunare a Δ -lanțurilor formează un subgrup comutativ al grupului $\mathcal{L}^m$.

Vom nota subgrupul Δ -ciclurilor din $\Delta\mathcal{L}^m$ prin $\mathcal{Z}^m(\Delta)$, $0 \leq m \leq n$. Acest grup se va folosi în paragraful 2.6, la definirea omologiilor complexului.

Definiția 2.5.6. Dacă există două Δ -lanțuri $L^m \in \mathcal{L}^m$ și $L^{m+1} \in \mathcal{L}^{m+1}$ cu proprietățile:

a) $L^m = \Delta L^{m+1}$,

b) $\Delta L^m = 0$,

atunci L^m se numește Δ -ciclu cu dimensiunea m , Δ -omolog cu 0. În acest caz vom folosi notația $L^m = Z^m(\Delta) \approx 0$. Două Δ -cicluri $Z_1^m(\Delta)$ și $Z_2^m(\Delta)$ care aparțin lui $\mathcal{Z}^m(\Delta)$ se numesc Δ -omoloage dacă $Z_1^m(\Delta) - Z_2^m(\Delta) \sim 0$, $0 \leq m \leq n$ [59], [63], [70], [300], [305].

Faptul că ΔL^m reprezintă un Δ -ciclu omolog cu 0 ilustrează situația că în $\mathcal{X}^n$ lanțul ΔL^m mărginește în scheletul m -dimensional al lui $\mathcal{X}^n$ un G -subcomplex al lui $\mathbf{sk}(m)\mathcal{X}^n$.

Este evidentă

Teorema 2.5.4. Mulțimea tuturor Δ -ciclurilor m -dimensionale și Δ -omoloage cu 0 în raport cu operația aditivă, definită în $\Delta\mathcal{L}^m$, formează un subgrup al grupului $\mathcal{Z}^m(\Delta)$. Vom nota acest subgrup prin $\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$.

Existența grupului $\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$ rezultă din teorema 2.5.2. Este evidentă relația $Z_0^n(\Delta) \sim 0$ (într-un G -complex de relații $\mathcal{X}^n$ nu există Δ -lanțuri cu dimensiunea $n+1$).

2.6. Omologiile G -complexului de relații multi-are

Definiția 2.6.1. Grupul factor $\mathcal{Z}^m(\Delta)/\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$ al unui G -complex de relații multi-are se numește **grup** al Δ -omologiilor (al omologiilor directe) cu dimensiunea m peste grupul Z și se notează prin $\Delta^m(\mathcal{X}^n)$, $0 \leq m \leq n$. Rangurile acestor grupuri se numesc **numere Betti**. În lucrările [32], [52], [56], [300] aceste grupuri se notează prin $H_m(\mathcal{X}^n)$, $0 \leq m \leq n$.

Deoarece grupurile Δ -omologiilor sunt construite peste grupul numerelor întregi Z , vom obișnui să mai folosim și notațiile: $\Delta^m(\mathcal{X}^n, Z)$, $0 \leq m \leq n$ (respectiv, $H_m(\mathcal{X}^n, Z)$, $0 \leq m \leq n$).

E firesc a scrie și astfel [32]:

$$\Delta^m(\mathcal{X}^n) = \text{Kern}\Delta(m) / \text{Im}\Delta(m), 1 \leq m \leq n.$$

Scopul nostru urmărește a îngusta noțiunea complexului de relații, însă nu într-atât cum e făcută în [58], [59], ci precum e definit în [17]. Merită să menționăm că toate rezultatele pot fi generalizate și în cazul unui complex de relații mai general, asupra dimensiunii căruia nu se impune nicio restricție (prin analogie, a se vedea [54], [55]).

În conformitate cu rezultatele clasice, vorbind despre omologiile unei structuri matematice, de rând cu grupurile de Δ -omologii se studiază și grupurile de coomologii [32], [305]. Aplicând grupul numerelor întregi Z vom forma aceste grupuri pentru G -complexul de relații $\mathcal{X}^n$.

Simplificând notațiile, introducem noțiunea de ∇ -lanț (**colanț**), care coincide cu noțiunea de lanț cu dimensiunea respectivă.

Definiția 2.6.2. Pentru un ∇ -lanț $L^m \in \mathcal{L}^m$, $0 \leq m \leq n$, egalitatea:

$$\nabla L^m = \sum_{Q_i^m \in \mathcal{Q}^m} p_i \nabla Q_i^m$$

se numește ∇ -**frontieră algebrică (cofrontieră)** a lanțului ∇L^m . În cazul $m = n$ avem $\nabla L^n = 0$.

Remarca 2.6.1. Operația de formare a ∇ -frontierei a ∇ -lanțului $L^m \in \mathcal{L}^m$ reprezintă un ∇ -omomorfism:

$$\nabla(m): \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^{m+1}, 0 \leq m \leq n-1.$$

Notăm prin $\text{Im}\nabla(m)$ imaginea, iar prin $\text{Kern}\nabla(m)$ – nucleul ∇ -omorfismului $\nabla(m)$.

Definiția 2.6.3. ∇ -lanțul $L^m \in \mathcal{L}^m$, cu proprietatea $\nabla L^m = 0$, se numește ∇ -**ciclu** cu dimensiunea m a G -complexului de relații $\mathcal{X}^n$ și se va nota prin $Z^m(\nabla) = L^m$, $0 \leq m \leq n$.

În cazul $m = n$ avem egalitatea $\nabla L^n = 0$. Deci, conform definiției 2.6.2, lanțul L^n este un ∇ -ciclu cu dimensiunea n .

Folosind operația de adunare a ∇ -lanțurilor, obținem

Teorema 2.6.1. Mulțimea tuturor ∇ -ciclurilor m -dimensionale în raport cu operația de adunare a ∇ -lanțurilor formează un subgrup comutativ al grupului $\mathcal{L}^m$.

Notăm subgrupul ∇ -ciclurilor din $\nabla\mathcal{L}^m$ prin $\mathcal{Z}^m(\nabla)$, $0 \leq m \leq n$.

Definiția 2.6.4. Dacă există două ∇ -lanțuri $L^m \in \mathcal{L}^m$ și $L^{m-1} \in \mathcal{L}^{m-1}$ cu proprietățile

a) $L^m = \nabla L^{m-1}$;

b) $\nabla L^m = 0$,

atunci L^m se numește ∇ -ciclu cu dimensiunea m , ∇ -omolog cu 0. În acest caz se va utiliza notația (obișnuită) [32]:

$$L^m = Z^m(\nabla) \sim 0.$$

Două cicluri $Z_1^m(\nabla)$ și $Z_2^m(\nabla)$ din $\mathfrak{X}^m(\nabla)$ se vor numi ∇ -omoloage dacă:

$$Z_1^m(\nabla) - Z_2^m(\nabla) \sim 0, 1 \leq m \leq n.$$

Ținând cont de definiția clasică a grupului [188], ușor se poate de demonstrat următoarea

Teorema 2.6.2. Mulțimea tuturor ∇ -ciclurilor m -dimensionale și ∇ -omoloage cu zero, în raport cu operația de adunare definită în $\nabla\mathcal{L}^m$, formează un subgrup al grupului $\mathfrak{X}^m(\nabla)$ și se va nota prin $\mathfrak{X}_0^m(\nabla)$.

Definiția 2.6.5. Grupul factor $\mathfrak{X}^m(\nabla)/\mathfrak{X}_0^m(\nabla)$ al G -complexului de relații multi-are $\mathfrak{X}^n$ se va numi grup al ∇ -omologiilor (mai simplu – coomologii) cu dimensiunea m peste grupul numerelor întregi Z , fiind notat prin $\nabla_m(\mathfrak{X}^n)$, $0 \leq m \leq n$.

Remarca 2.6.2. Amintim că $\nabla_m(\mathfrak{X}^n)$, $0 \leq m \leq n$, este definit, considerând că ∇ -lanțurile din $\mathfrak{X}^n$ sunt finite.

Evident, putem scrie și astfel: $\nabla_m(\mathfrak{X}^n) = \text{Kern}\nabla(m)/\text{Im}\nabla(m)$, $0 \leq m \leq n$.

Să ne amintim acum că existența grupurilor $\mathfrak{X}_0^m(\nabla)$, $0 \leq m \leq n$, a unui G -complex de relații multi-are rezultă din egalitatea $\Delta\Delta L^m = 0$, $0 \leq m \leq n$. Această situație generează necesitatea de a formula câteva rezultate suplimentare.

Teorema 2.6.3. Pentru orice ∇ -lanț $L^m \in \nabla\mathcal{L}^m$ al G -complexului de relații multi-are $\mathfrak{X}^n$ are loc următoarea egalitate:

$$\nabla\nabla L^m = 0, 0 \leq m \leq n.$$

Demonstrația teoremei se face exact ca în [32], aplicând relația cunoscută $\nabla\nabla q_i^m = 0$ (a se vedea definiția 2.5.1 și consecințele ei).

Remarca 2.6.3. Pentru grupurile de omologii directe și coomologii ale unui G -complex de relații multi-are $\mathfrak{X}^n$, procedura de orientare a quasisimplexelor sale este o problemă auxiliară și nu depinde de structura acestor grupuri [32], [52], [305].

Definiția 2.6.6. Un G -complex de relații multi-are $\mathfrak{X}^n$, $n \geq 1$, se numește acicilic dacă:

$$\Delta^1(\mathfrak{X}^n) = \Delta^2(\mathfrak{X}^n) = \dots = \Delta^n(\mathfrak{X}^n) \cong 0.$$

Pentru a formula următoarea teoremă, vom avea nevoie de unele noțiuni clasice (a se vedea [52], [305]) și vom demonstra o leamnă auxiliară. Rezultatele respective vor permite interpretarea unor proprietăți ale complexului în termenii grupurilor de omologii.

Fie $\mathcal{Q}^0 = \{Q_1^0, Q_2^0, \dots, Q_{\alpha_0}^0\}$ familia de quasisimplexe 0-dimensionale ale G -complexului de relații multi-are, iar $L^0 = p_1 Q_1^0 + p_2 Q_2^0 + \dots + p_{\alpha_0} Q_{\alpha_0}^0$ un Δ -lanț arbitrar din $\Delta\mathcal{L}^0$.

Definiția 2.6.7. Operatorul

$$I : \mathcal{L}^0 \rightarrow Z$$

ce posedă proprietatea $I(L^0) = p_1 + p_2 + \dots + p_{\alpha_0}$, pentru orice lanț $L^0 \in \mathcal{L}^0$, se numește **indice** al Δ -lanțului L^0 .

Este evident că pentru oricare două Δ -lanțuri arbitrare $L_1^0, L_2^0 \in \mathcal{L}^0$ are loc relația:

$$I(L_1^0 + L_2^0) = I(L_1^0) + I(L_2^0). \quad (2.17)$$

Lema 2.6.1. Dacă ΔL^0 este grupul Δ -lanțurilor 0-dimensionale al G -complexului conex de relații multi-are $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$, atunci orice lanț $L^0 \in \Delta L^0$ este omolog lui 0 dacă și numai dacă $I(L^0) = 0$.

Demonstrație. Fie $Q^1 \in \mathcal{Q}^1$ un quasisimplex arbitrar, orientat pozitiv, reprezentat prin perechea $Q^1 = (Q_i^0, Q_j^0)$, unde $Q_i^0, Q_j^0 \in \mathcal{Q}^0, i \neq j$. În acest caz $\Delta(p \cdot Q^1) = p\Delta Q_j^0 - p\Delta Q_i^0$ și, prin urmare, vom avea $I(\Delta(p \cdot Q^1)) = 0$. În conformitate cu relația (2.17), pentru orice $Z^0(\Delta) \in \mathcal{X}^0(\Delta)$ obținem $I(\Delta Z^0(\Delta)) = 0$. Deci condiția necesară din lema are loc.

Să demonstrăm acum afirmația inversă. Din conexitatea G -complexului $\mathcal{X}^n$ rezultă că pentru oricare două quasisimplexe $Q_i^0, Q_j^0 \in \mathcal{Q}^0$ există o astfel de succesiune de quasisimplexe 1-dimensionale $Q_{i_1}^1, Q_{i_2}^1, \dots, Q_{i_t}^1$ încât $Q_{i_1}^1$ și $Q_{i_{t-1}}^1$ sunt adiacente și originea lui $Q_{i_1}^1$ coincide cu Q_i^0 , iar extremitatea lui $Q_{i_t}^1$ coincide cu Q_j^0 . Mai mult ca atât, elementele acestei succesiuni pot fi orientate în așa mod încât acestea toate să fie de orientare pozitivă la prezentarea prin Δ -lanțul $L^1 = pQ_{i_1}^1 + pQ_{i_2}^1 + \dots + pQ_{i_t}^1$, unde $p \in Z$ și este, la fel, pozitiv. Observăm că $\Delta L^1 = pQ_j^0 - pQ_i^0$. Astfel, conform relației (2.17), $pQ_j^0 \sim pQ_i^0$. Aceasta la rândul său conduce la relația $L^1 \in \mathcal{L}^1$, ceea ce înseamnă că Δ -lanțul este omologic cu pQ_i^0 . Atunci, deoarece L^1 este omologic cu pQ_i^0 , obținem $I(L^1) = p$. Astfel avem relația $L^1 \sim I(L^1)Q_i^0$, de unde și rezultă că $I(L^1) = 0$. Deci $L^1 \sim 0$.

Deoarece afirmația ce urmează imediat este clasică și se demonstrează în mod abstract, doar o vom aminti.

Teorema 2.6.4. Dacă G -complexul de relații multi-are $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ este conex, atunci $\Delta^0(\mathcal{X}^n)$ este izomorf cu grupul numerelor întregi Z .

Remarca 2.6.4. Dacă pentru un G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n$ are loc egalitatea (2.1), atunci:

$$\Delta^m(\mathcal{X}^n) \cong \Delta^m(\mathcal{X}_1^n) \oplus \Delta^m(\mathcal{X}_2^n) \oplus \dots \oplus \Delta^m(\mathcal{X}_q^n),$$

unde $0 \leq m \leq n$, și dacă $m=0$, atunci:

$$\Delta^0(\mathcal{X}^n) \cong \underbrace{Z \oplus Z \oplus \dots \oplus Z}_{q \text{ ori}}. \quad (2.18)$$

Definiția 2.6.8. Un G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n$, conex și aciclic, se va numi **n -arbore orientat de relații multi-are**.

Importanța acestei noțiuni se va resimți în cercetările ulterioare, când se vor elabora lucrările referitor la cele menționate la începutul acestui capitol. Pentru $n=1$, construcția respectivă reprezintă un graf orientat, conex și fără cicluri. Deci, dacă $\mathcal{X}^1$ este conex, atunci acesta reprezintă un arbore orientat [302].

Definiția 2.6.9. Dacă $\mathcal{X}^n$ este un G -complex local complet de relații multi-are și este transformat într-un complex quasisimplicial abstract, atunci $\mathcal{X}^n$ se va numi **G -complex simetric de relații multi-are**.

În caz de necesitate, fiecare element din $\mathcal{Q}^m$, $0 \leq m \leq n$, poate fi orientat în conformitate cu definiția 2.4.1.

În paragraful 2.3 a fost introdusă noțiunea de caracteristica Euler a complexului de relații multi-are $\mathcal{X}^n$. Importanța acestei caracteristici este bine cunoscută prin aplicațiile sale teoretico-aplicative [52], [60]. Fie $\rho(\Delta^m(\mathcal{X}^n))$ rangul grupului $\Delta^m(\mathcal{X}^n)$ al lui $\mathcal{X}^n$, iar

$$\chi(\mathcal{X}^n) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \alpha_m \quad (2.19)$$

este caracteristica lui Euler (a se vedea relația (2.9)), unde de acum α_m înseamnă numărul quasisimplexelor cu dimensiunea m ale G -complexului $\mathcal{X}^n$, $0 \leq m \leq n$. În cele ce urmează, din considerente de comoditate, în loc de $\rho(\Delta^m(\mathcal{X}^n))$ vom folosi notația ρ^m .

Atunci, conform (2.19), are loc un rezultat analog celui obținut de către Poincare și Kolmogorov [63], [305].

Teorema 2.6.5 (Euler-Kolmogorov). Pentru orice G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ are loc egalitatea:

$$\chi(\mathcal{X}^n) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \rho^m. \quad (2.19')$$

Demonstrația se face exact în mod abstract ca și în lucrările [52], [58].

La finele acestui paragraf propunem o definiție și o afirmație importantă.

Definiția 2.6.10. Fie dat G -complexul $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$. Să examinăm complexul $\mathcal{K}_d^n = (\mathcal{Q}_d^n, \mathcal{Q}_d^{n-1}, \dots, \mathcal{Q}_d^0)$, unde fiecare quasisimplex abstract Q_i^m , cu dimensiunea m , e considerat un complex celular [32] cu dimensiunea $n-m$, notat prin $Q_{d_i}^{n-m}$, pe când totalitatea acestor complexe cu dimensiunea $n-m$ – prin $\mathcal{Q}_d^{n-m}$, $0 \leq m \leq n, i \in \Lambda_m$, desigur, respectând incidențele. Complexul abstract $\mathcal{K}_d^n$ se numește **dualul complexului** $\mathcal{K}^n$.

De exemplu, un simplex 0-dimensional incident la n fațete (simplexe) $(n-1)$ -dimensionale ale unui simplex n -dimensional reprezintă un CW cu dimensiunea n în forma unui simplex n -dimensional, având ca celule mulțimea tuturor fațetelor acestuia, inclusiv cea improprie (interiorul simplexului n -dimensional).

Consecința 2.6.1. Complexul dual $\mathcal{K}_d^n$ al complexului $\mathcal{K}^n$ este un complex celular (CW) conex.

Fie

$$H_d^0(\mathcal{K}_d^n, Z), H_d^1(\mathcal{K}_d^n, Z), \dots, H_d^n(\mathcal{K}_d^n, Z) \quad (2.20)$$

șirul grupurilor de omologii directe ale lui $\mathcal{K}_d^n$.

Dacă examinăm mai atent șirul (2.20), imediat rezultă:

Teorema 2.6.6. Pentru complexul $\mathcal{K}^n$ sunt adevărate relațiile:

$$\begin{aligned} \nabla_0(\mathcal{K}^n, Z) &\cong H_d^0(\mathcal{K}_d^n, Z), \\ \nabla_1(\mathcal{K}^n, Z) &\cong H_d^1(\mathcal{K}_d^n, Z), \\ &\dots\dots\dots \\ \nabla_n(\mathcal{K}^n, Z) &\cong H_d^n(\mathcal{K}_d^n, Z) \end{aligned} \quad (2.21)$$

În baza acestei teoreme obținem că teorema Kolmogorov-Alexander [32], [305] cu privire la dualitatea grupurilor de omologii și coomologii pentru spații topologice rămâne valabilă și în cazul complexului generalizat de relații multi-are $\mathcal{K}^n$. Astfel, obținem

Teorema 2.6.7. Pentru complexul $\mathcal{K}^n$ sunt adevărate următoarele egalități:

$$\begin{aligned} \Delta^0(\mathcal{K}^n, Z) &\cong \nabla_n(\mathcal{K}^n, Z), \\ \Delta^1(\mathcal{K}^n, Z) &\cong \nabla_{n-1}(\mathcal{K}^n, Z), \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^n(\mathcal{K}^n, Z) &\cong \nabla_0(\mathcal{K}^n, Z). \end{aligned} \quad (2.21')$$

Remarca 2.6.5. E posibil a nu utiliza CW, însă pentru aceasta era necesar a defini ce reprezintă un poliedru abstract n -dimensional (frontiera căruia este o sferă abstractă cu

dimensiunea $(n-1)$), chestiune migăloasă, pe care în limitele acestei lucrări nu o vom atinge. În cele ce urmează o să ne intereseze doar definiția cubului abstract n -dimensional, folosit la soluționarea unor probleme cu caracter aplicativ – chestiuni examinate în capitolele IV și V.

Fie Z grupul numerelor întregi și G un grup comutativ arbitrar. Se cunoaște [32] că dacă grupul G admite un număr finit p de elemente generatoare, atunci:

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_p \oplus D_1 \oplus D_1 \oplus \dots \oplus D_r, \quad (2.22)$$

unde G_i , $1 \leq i \leq p$, și D_j , $1 \leq j \leq r$, sunt subgrupuri ciclice din G , însă finite, cu perioada c_j și divizorul c_{j+1} . Numerele $\rho, c_1, c_2, \dots, c_r$ reprezintă un sistem complet de invarianți ai grupului G , raportați la automorfismele sale. Numărul ρ este rangul grupului G . Coeficienții $c_1, c_2, \dots, c_r$ se vor numi coeficienți de torsiune a lui G .

Prin urmare, grupurile de Δ -omologii $\Delta^m(\mathcal{K}^n)$ ale complexului de relații multi-are $\mathcal{K}^n$ ar putea să conțină un sistem complet de invarianți ai grupului G , raportat la autormorfismele sale. În cele ce urmează vom construi alte grupuri de Δ -omologii ale complexului $\mathcal{K}^n$, numite grupuri ale Δ -omologiilor diluate [32], care nu conțin coeficienți de torsiune, însă sunt importante din punct de vedere al folosirii acestora la obținerea unor proprietăți noi ale lui $\mathcal{K}^n$. Astfel, omologiile directe, coomologiile și omologiile diluate formează un suport teoretic necesar pentru dezvoltarea noii direcții de cercetare legate de studierea relațiilor multi-are.

Fie $\mathcal{K}^m(\Delta)$ grupul Δ -ciclurilor peste grupul numerelor întregi Z al complexului $\mathcal{K}^n$.

Definiția 2.6.11. Două cicluri $Z_1^m(\Delta), Z_2^m(\Delta) \in \mathcal{K}^m(\Delta)$ se numesc cicluri diluate, Δ -omoloage cu 0, dacă $\exists a \in Z, |a| > 1$, încât $a(Z_1^m(\Delta) - Z_2^m(\Delta)) \sim 0$.

În cazul a două cicluri diluate și Δ -omoloage $Z_1^m(\Delta), Z_2^m(\Delta)$, vom folosi notația $Z_1^m(\Delta) \approx Z_2^m(\Delta)$, $0 \leq m \leq n$. Ușor se verifică că mulțimea ciclurilor diluate m -dimensionale și Δ -omoloage cu 0, în raport cu operația de adunare, formează un subgrup al grupului ciclurilor diluate $\tilde{\mathcal{K}}^m(\Delta)$, pe care îl vom nota prin $\tilde{\mathcal{K}}_0^m(\Delta)$.

Definiția 2.6.12. Grupul factor $\mathcal{K}^m(\Delta) / \tilde{\mathcal{K}}_0^m(\Delta)$ se numește grup al Δ -omologiilor diluate cu dimensiunea m al complexului $\mathcal{K}^n$ și se notează prin $\tilde{\Delta}^m(\mathcal{K}^n)$, $0 \leq m \leq n$.

Notăm prin $\tilde{\rho}_m$ rangurile grupurilor $\tilde{\Delta}^m(\mathcal{K}^n)$, $0 \leq m \leq n$.

Lema 2.6.2. Pentru grupurile de omologii $\Delta^m(\mathcal{K}^n)$ și $\tilde{\Delta}^m(\mathcal{K}^n)$ ale unui G -complex de relații multi-are $\mathcal{K}^n$ se respectă egalitatea:

$$\rho_m = \tilde{\rho}_m, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Atât grupul $\Delta^m(\mathcal{X}^n)$, cât și $\tilde{\Delta}^m(\mathcal{X}^n)$, $0 \leq m \leq n$, posedă același număr de subgrupuri independente și izomorfe cu grupul numerelor întregi Z , $0 \leq m \leq n$. Luând în considerație relațiile (2.19), (2.19'), precum și lema 2.6.1, obținem

Lema 2.6.3. Pentru un G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n$ este adevărată egalitatea:

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \alpha_m = \sum_{m=0}^n (-1)^m \tilde{\rho}_m. \quad (2.23)$$

În cele ce urmează, vom studia reprezentarea geometrică a grupurilor $\tilde{\Delta}^m(\mathcal{X}^n)$, $0 \leq m \leq n$, precum și legătura cu Δ -ciclurile complexului $\mathcal{X}^n$, prin introducerea numărului cicromatic m -dimensional pentru $\mathcal{X}^n$.

2.7. Numărul cicromatic al complexului de relații multi-are

În paragraful 2.5 a fost definit Δ -ciclul m -dimensional al unui G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n$, interpretat ca un subcomplex conex din $\mathcal{X}^n$ în care orice quasisimplex $Q^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}$ este fațetă comună pentru exact două quasisimplexe m -dimensionale ale Δ -ciclului, orientate respectiv. Un astfel de Δ -ciclu ar mai putea fi numit Δ -ciclu sferic elementar cu dimensiunea m . În caz general, când un Δ -ciclu m -dimensional conex și orientat este format din mai multe Δ -cicluri sferice elementare, fiecare quasisimplex $Q^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}$ al acestui ciclu este fațetă comună pentru un număr par de quasisimplexe m -dimensionale. Mulțimea acestor cicluri o vom nota prin $\tilde{\zeta}^m(\Delta)$. Împreună cu grupurile de cicluri $\mathcal{X}^m(\Delta)$ și $\tilde{\mathcal{X}}^m(\Delta)$, studiate în paragraful 2.5 și paragraful 2.6, obținem relația $\mathcal{X}^m(\Delta) \subseteq \tilde{\mathcal{X}}^m(\Delta) \subseteq \tilde{\zeta}^m(\Delta)$. Desigur, prezintă interes problema determinării unei formule de calcul a Δ -ciclurilor m -dimensionale din $\mathcal{X}^n$. Vom examina unele aspecte ale acestei probleme. Totodată, vom considera că elementele mulțimii $\tilde{\zeta}^m(\Delta)$ posedă proprietatea:

P: Orice Δ -ciclu din $\tilde{\zeta}^m(\Delta)$ nu mărginește nici un set de simplexe cu dimensiunea $m+1$ din complexul $\mathcal{X}^n$.

Fie $\mathcal{Q}^m = \{Q_1^m, Q_2^m, \dots, Q_{\alpha_m}^m\}$ mulțimea tuturor quasisimplexelor m -dimensionale ale complexului $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$, iar R^{α_m} – spațiul vectorial cu dimensiunea α_m peste câmpul numerelor reale R . Pe mulțimea $\tilde{\zeta}^m(\Delta)$ definim funcția univocă:

$$f_m : \tilde{\zeta}^m(\Delta) \rightarrow R^{\alpha_m},$$

ce posedă proprietatea: pentru orice ciclu $\tilde{\xi}^m(\Delta) \in \tilde{\zeta}^m(\Delta)$ are loc egalitatea

$$f_m(\tilde{\xi}^m(\Delta)) = (p_1^m - t_1^m, p_2^m - t_2^m, \dots, p_j^m - t_j^m, \dots, p_{\alpha_m}^m - t_{\alpha_m}^m),$$

unde p_j^m indică de câte ori quasisimplexul Q_j^m apare în ciclul $\tilde{\zeta}^m(\Delta)$ cu semn pozitiv, iar t_j^m – cu semn negativ. Vom nota diferența $p_j^m - t_j^m$ prin $\tilde{c}_j^m$. Obținem vectorul:

$$f_m(\tilde{\xi}^m(\Delta)) = (\tilde{c}_1^m, \tilde{c}_2^m, \dots, \tilde{c}_{\alpha_m}^m), \quad 1 \leq m \leq n.$$

Pentru $m = 0$ avem un caz aparte, mai puțin important, care nu va fi examinat în cele expuse în continuare.

Definiția 2.7.1. Vectorul $f_m(\tilde{\xi}^m(\Delta))$ se numește vector Δ -ciclic cu dimensiunea m a complexului de relații multi-are $\mathcal{X}^n$ și se va nota prin $\tilde{C}^m(\Delta) = f_m(\tilde{\xi}^m(\Delta)) \in \mathcal{R}^{\alpha_m}$.

Setul de vectori Δ -ciclici conține o bază $\tilde{B}^m \subset \mathcal{R}^{\alpha_m}$, care determină în $\mathcal{R}^{\alpha_m}$ un subspațiu. Vom nota acest subspațiu prin $R(\Delta, m)$.

Fie acum $\tilde{G}^m(\Delta)$ mulțimea tuturor vectorilor cu coordonate în numere întregi din $R(\Delta, m)$.

Teorema 2.7.1. Mulțimea de vectori $\tilde{G}^m(\Delta) \subset \mathcal{R}^{\alpha_m}$, în raport cu operația de adunare, reprezintă un grup aditiv și multiplicativ, izomorf grupului Δ -omologiilor diluate $\tilde{\Delta}^m(\mathcal{X}^n)$ cu rangul $\tilde{\rho}_m$, și are loc relația:

$$\tilde{\rho}_m = \text{card} \tilde{B}_m, \quad 1 \leq m \leq n.$$

Demonstrație. Mai întâi vom demonstra că între elementele grupurilor $\tilde{G}^m(\Delta)$ și $\tilde{\Delta}^m(\mathcal{X}^n)$, $1 \leq m \leq n$, există o corespondență biunivocă.

Faptul că $\tilde{G}^m(\Delta)$ reprezintă un grup al vectorilor Δ -ciclurilor din $R(\Delta, m) \subset \mathcal{R}^{\alpha_m}$ se verifică simplu, conștientizând că elementele din $\tilde{G}^m(\Delta)$ formează în $R(\Delta, m)$ o rețea de vectori cu coordonate întregi care, la rândul său, formează un grup aditiv și multiplicativ [41], [124]. Deoarece $\tilde{B}_m \subset \tilde{G}^m(\Delta)$, rezultă că orice element din $\tilde{G}^m(\Delta)$ poate fi reprezentat ca o combinație liniară a vectorilor bazei $\tilde{B}_m$. Luând în considerație modul în care a fost definită anterior funcția $f_m : \tilde{\zeta}^m(\Delta) \rightarrow \mathcal{R}^{\alpha_m}$, rezultă relația: $f_m(\tilde{\zeta}^m(\Delta)) \in \tilde{G}^m(\Delta)$.

Fie $\tilde{B}_m = \{\tilde{C}_1^m(\Delta), \tilde{C}_2^m(\Delta), \dots, \tilde{C}_{t_m}^m(\Delta)\}$. Atunci, pentru orice element $\tilde{C}^m(\Delta) \in \tilde{G}^m(\Delta)$ are loc egalitatea:

$$\tilde{C}^m(\Delta) = \alpha_1^m \tilde{C}_1^m(\Delta) + \alpha_2^m \tilde{C}_2^m(\Delta) + \dots + \alpha_{t_m}^m \tilde{C}_{t_m}^m(\Delta),$$

unde $\alpha_j^m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq t_m$. Prin urmare, orice element $\tilde{C}^m(\Delta) \in \tilde{G}^m(\Delta)$ poate fi reprezentat astfel:

$$\tilde{C}^m(\Delta) = (\alpha_1^m \tilde{b}_1^m, \alpha_2^m \tilde{b}_2^m, \dots, \alpha_{t_m}^m \tilde{b}_{t_m}^m).$$

Să examinăm acum aplicația inversă:

$$f_m^{-1} : \tilde{C}^m(\Delta) \rightarrow \tilde{\mathcal{Z}}^m(\Delta).$$

Considerăm mulțimea $\tilde{\mathcal{Z}}^m(\Delta)$ împreună cu toate combinațiile posibile ale elementelor sale. Notăm această mulțime prin $\mathcal{G}^m(\Delta)$. Extindem aplicația f^{-1} peste rețeaua vectorilor m -dimensionali cu coordonate întregi din $R(\Delta, m) \subset R^{\alpha_m}$. Notăm aplicația extinsă prin $\tilde{f}^{-1}$, cu valori în $\mathcal{G}^m(\Delta)$:

$$f_m^{-1} : \tilde{G}^m(\Delta) \rightarrow \mathcal{G}^m(\Delta), \quad 1 \leq m \leq n. \quad (2.24)$$

Fie, în virtutea acestei aplicații avem:

$$\begin{aligned} g_1^m \tilde{\xi}_1^m(\Delta) \cup g_2^m \tilde{\xi}_2^m(\Delta) \cup \dots \cup g_t^m \tilde{\xi}_t^m(\Delta) = \\ = f_m^{-1}(g_1^m \tilde{C}_1^m + g_2^m \tilde{C}_2^m + \dots + g_t^m \tilde{C}_t^m), \end{aligned} \quad (2.25)$$

unde $g_j^m \tilde{C}_j^m$ presupune interpretarea formală a faptului că Δ -ciclul m -dimensional $\tilde{C}_j^m$ este folosit de g_j^m ori. Dacă examinăm partea stângă a relației (2.25) ca o expresie algebrică formală, ținând cont de aplicația complexului $\mathcal{X}^n$ în grupul numerelor naturale Z (a se vedea paragraful 2.6 și relația (2.13)), atunci aceasta este echivalentă unui Δ -lanț, cunoscut din cercetările efectuate în paragraful 2.5:

$$L^m = g_1^m z_1^m(\Delta) + g_2^m z_2^m(\Delta) + \dots + g_t^m z_t^m(\Delta),$$

unde $g_j^m \in Z$, $1 \leq j \leq t$, $L \neq 0$ și $\Delta L^m = 0$. Aceasta conduce la concluzia că aplicația (2.24) este biunivocă și extinderea aplicației $f_m : \tilde{\mathcal{Z}}^m(\Delta) \rightarrow R^{\alpha_m}$ asupra familiei $\mathcal{G}^m(\Delta)$ reprezintă inversa aplicației (2.24). Notăm prin $\tilde{f}_m$ extinderea aplicației f_m . În baza aplicațiilor $f_m, f_m^{-1}, \tilde{f}_m$ ușor deducem existența unei aplicații biunivoce între elementele din $\tilde{\mathcal{Z}}^m(\Delta)$ și mulțimea Δ -ciclurilor m -dimensionale cu proprietatea: pentru orice ciclu $z^m(\Delta) \in \Delta^m(\mathcal{X}^n)$ există un Δ -lanț $L^m \in \mathcal{L}^m$ încât $\Delta L^m = 0$, adică $z^m(\Delta) = L^m$.

Prin urmare, există relația biunivocă între $\tilde{\Delta}^m(\mathcal{X}^m)$ și $\tilde{G}^m(\Delta)$, ceea ce implică corectitudinea relației din teoremă:

$$\tilde{\rho}_m = \text{card} \tilde{B}_m.$$

În cele ce urmează, elementele din grupul aditiv $\mathcal{G}^m(\Delta)$ le vom numi Δ -cicluri netriviiale m -dimensionale, $1 \leq m \leq n$. Să examinăm cardinalul mulțimii $\mathcal{G}^m(\Delta)$. Pornim de la egalitatea:

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \alpha_m = \sum_{m=0}^n (-1)^m \rho_m \quad (2.26)$$

care este rezultatul aplicării relațiilor (2.19) și (2.19').

Examinăm complexul 1-dimensional $\mathcal{K}^1 = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1)$ care, precum s-a menționat anterior, poate fi considerat un graf cu numărul de vârfuri egal cu $\text{card}\mathcal{Q}^0$ și numărul de arce egal cu $\text{card}\mathcal{Q}^1$. Pentru formula (2.23) avem:

$$\alpha_0 = \text{card}\mathcal{Q}^0 = n;$$

$$\alpha_1 = \text{card}\mathcal{Q}^1 = m;$$

ρ_0 este rangul grupului de omologii $\Delta^0(\mathcal{K}^1)$, fie $\rho_0 = p$. Dacă $\mathcal{K}^1$ este conex, atunci se consideră $p = 1$;

ρ_1 este rangul grupului de omologii $\Delta^1(\mathcal{K}^n)$ și reprezintă numărul de Δ -cicluri independente 1-dimensionale din $\mathcal{K}^n$.

Prin urmare, putem scrie:

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \rho_0 = p$$

sau

$$\rho_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + \rho_0.$$

Dacă notăm ρ_1 prin $v_1(\mathcal{K}^1)$, atunci:

$$v_1(\mathcal{K}^1) = m - n + p.$$

Pentru cazul grafului (complexului 1-dimensional) conex obținem:

$$v_1(\mathcal{K}^1) = m - n + 1.$$

Numărul $v_1(\mathcal{K}^1)$ se numește număr cicromatic al grafului $\mathcal{K}^1 = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1) = (X, R^2)$. În cazul când $\mathcal{K}^1$ nu e conex și este reprezentat ca o reuniune de complexe 1-dimensionale conexe și disjuncte:

$$\mathcal{K}^1 = \mathcal{K}_1^1 \cup \mathcal{K}_2^1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_t^1 \cup \mathcal{K}^0,$$

unde $\mathcal{K}^0 = X' \subset X$, $\mathcal{K}_i^1 \cap X' = \emptyset$, $\mathcal{K}_i^1 \cap \mathcal{K}_j^1 = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, t$, obținem egalitatea:

$$v(\mathcal{K}^1) = \rho_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + \rho_0 + t = m - n + \rho_0(\mathcal{K}^0) + t. \quad (2.27)$$

Aici t exprimă numărul componentelor conexe în $\mathcal{K}^1$. Deoarece, conform celor menționate în paragraful 2.5, $\Delta^0(\mathcal{K}^n) \cong Z$, în cazul complexului conex, iar rangul ρ_0 al grupului Z este egal cu 1, în cele din urmă obținem:

$$\rho(\mathcal{K}^1) = \rho_0(\mathcal{K}^0) + t = \rho_0.$$

Definiția 2.7.2. Pentru complexul 0-dimensional de relații $\mathcal{K}^0 = (\mathcal{Q}^0 = X, \emptyset, \dots, \emptyset)$, numărul maxim de Δ -cicluri 0-dimensionale, adică $\text{card}\mathcal{Q}^0$, se numește număr ciclotomic 0-dimensional al lui $\mathcal{K}^0$, care se notează prin $v_0(\mathcal{K}^0) = \rho_0$.

În cazul complexului 1-dimensional $\mathcal{K}^1 = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1)$, cu o submulțime de simplexe 0-dimensionale $\mathcal{Q}_1^0 \subset \mathcal{Q}^0$, două câte două izolate, numărul $v(\mathcal{K}^1)$, exprimat prin relația (2.27), se numește număr ciclotomic 1-dimensional, iar $\rho_0 = \text{card}\mathcal{Q}_1^0 + 1$ este numărul ciclotomic 0-dimensional al complexului $\mathcal{K}^1$.

Să examinăm numerele ciclotomice în cazul G -complexelor de relații multi-are cu dimensiunea $n > 1$. Acestea sunt o generalizare a numărului ciclotomic cunoscut din teoria grafurilor. Fie $\mathcal{K}^n$ un complex de relații multi-are, reprezentat ca o reuniune de complexe disjuncte:

$$\mathcal{K}^n = \mathcal{K}^{n_1} \cup \mathcal{K}^{n_2} \cup \dots \cup \mathcal{K}^{n_r}, \quad (2.28)$$

unde $\max\{n_1, n_2, \dots, n_r\} = n \geq 2$. Din relația (2.26), ca rezultat al unor transformări elementare, obținem:

$$(-1)^n \rho_n = \sum_{m=n}^0 (-1)^{n-m} \alpha_m + \sum_{m=n-1}^0 (-1)^{n-m} \rho_m. \quad (2.29)$$

Definiția 2.7.3. Pentru un G -complex de relații multi-are $\mathcal{K}^n$, numărul ρ_n din partea stângă a relației (2.29) se numește număr ciclotomic n -dimensional al complexului $\mathcal{K}^n$ și se notează prin $v_n(\mathcal{K}^n)$.

În baza formulei (2.26), pentru complexul $\mathcal{K}^n$ putem calcula toate numerele ciclotomice $v_0(\mathcal{K}^n), v_1(\mathcal{K}^n), \dots, v_n(\mathcal{K}^n)$. Într-adevăr, din (2.26) ușor deducem:

$$(-1)^m \rho_m = \sum_{i=n}^0 (-1)^i \alpha_i + \sum_{i=0}^0 (-1)^i \rho_i \quad (2.30)$$

sau

$$\rho_m = \sum_{i=m}^0 (-1)^{m-i} \alpha_i + \sum_{i=m-1}^0 (-1)^{m-i} \rho_i.$$

Astfel, obținem formula recurentă pentru calcularea numerelor ciclotomice ale unui G -complex de relații multi-are $\mathcal{K}^n$:

$$v_m(\mathcal{K}^n) = \sum_{i=m}^0 (-1)^{m-i} \alpha_i(K^n) + \sum_{i=m-1}^0 (-1)^{m-i} v_i(K^n), \quad (2.31)$$

pentru $0 \leq m \leq n$.

Numerele ciclomatice joacă un rol important în soluționarea problemelor cu caracter aplicativ. Vom analiza în continuare câteva dintre aceste aplicații. Înlocuim grupul de numere întregi Z printr-un grup aditiv și multiplicativ Z_2 , format de cele două clase minimale și nenegative obținute prin divizarea la 2 a numerelor din Z . Vom nota prin C_2 câmpul format în baza lui Z_2 și construim un alt grup multiplicativ, necesar pentru formularea unei teoreme de tip clasic, precum și unele rezultate cu aspect practic.

2.8. Matricea ciclomatică

Fie $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ un complex n -dimensional de relații multi-are în care sunt determinate următoarele:

- $\tilde{\xi}^m(\Delta)$ – mulțimea Δ -ciclurilor m -dimensionale, descrise anterior;
- C_2 – câmpul format în baza grupului Z_2 ;
- $I_2^m(\Delta)$ – matricea de Δ -incidență peste câmpul C_2 ;
- $R_2^{\alpha_m}$ – spațiul liniar peste câmpul C_2 ;
- Aplicația $\Psi_m^2: \tilde{\xi}^m(\Delta) \rightarrow R_2^{\alpha_m}$ cu proprietatea: pentru orice element $\tilde{\xi}^m(\Delta)$ din $\tilde{\xi}^m(\Delta)$, vectorul $\tilde{C}^m = \Psi_m^2(\tilde{\xi}^m(\Delta)) = (\tilde{c}_1^m, \tilde{c}_2^m, \dots, \tilde{c}_{\alpha_m}^m)$ are coordonatele 0 sau 1 în dependență de faptul dacă ciclul $\tilde{\xi}^m(\Delta)$ conține quasisimplexul Q_j^m de un număr par sau impar de ori.

Pentru orice G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n$ are loc analogul teoremei Poincare-Veblen-Alexander [52], [125].

Teorema 2.8.1. *Pentru orice G -complex de relații multi-are $\mathcal{X}^n$, cu proprietățile menționate mai sus, este adevărată egalitatea:*

$$I_2^m(\Delta)C_*^m = 0,$$

unde C_*^m este vectorul transpus vectorului $\tilde{C}^m = (\tilde{c}_1^m, \tilde{c}_2^m, \dots, \tilde{c}_{\alpha_m}^m)$, dacă și numai dacă are loc relația:

$$\tilde{C}^m = \Psi_m^2(\tilde{\xi}^m(\Delta)) \in R_2^{\alpha_m}.$$

Pentru a demonstra această teoremă, vom avea nevoie de anumite rezultate ajutătoare.

Definim pe complexul $\mathcal{X}^n$ aplicația:

$$f_2: \mathcal{X}^n \rightarrow Z,$$

încât pentru orice quasisimplex Q^m din $\mathfrak{X}^n$ are loc una dintre relațiile:

$$f_2(Q^m) = 0 \quad \text{sau} \quad f_2(Q^m) = 1.$$

Pentru o înțelegere intuitivă adecvată, în locul notației $f_2(Q^m) = 0$ (sau $f_2(Q^m) = 1$) vom obișnui să scriem $1 \cdot q^m$ sau $0 \cdot q^m$. Astfel, putem descrie un Δ -lanț m -dimensional peste câmpul Z_2 în modul următor:

$$L^m(2) = \alpha_1^m q_1^m + \alpha_2^m q_2^m + \dots + \alpha_{\alpha_m}^m q_{\alpha_m}^m,$$

unde $\alpha_i^m \in \{0,1\}$.

În cazul a două Δ -lanțuri:

$$L_1^m = \alpha_1^m q_1^m + \alpha_2^m q_2^m + \dots + \alpha_{\alpha_m}^m q_{\alpha_m}^m,$$

$$L_2^m = b_1^m q_1^m + b_2^m q_2^m + \dots + b_{\alpha_m}^m q_{\alpha_m}^m,$$

definim operația de adunare în modul următor:

$$L^m(2) + L_2^m = (\alpha_1^m \oplus b_1^m) q_1^m + (\alpha_2^m \oplus b_2^m) q_2^m + \dots + (\alpha_{\alpha_m}^m \oplus b_{\alpha_m}^m) q_{\alpha_m}^m, \quad (2.32)$$

unde prin $\oplus$ se notează operația de adunare în grupul Z_2 , $0 \leq m \leq n$. Ușor se verifică că mulțimea tuturor Δ -lanțurilor m -dimensionale în raport cu operația de adunare formează un grup pe care îl vom nota prin $\mathcal{L}^m(2)$, $0 \leq m \leq n$.

În mod similar celor examinate în paragraful 2.5, definim noțiunea de Δ -frontieră $\Delta L^m(2)$ a Δ -lanțului $L^m(2)$:

$$\Delta L^m(2) = \alpha_1^m Q_1^m \oplus \alpha_2^m Q_2^m \oplus \dots \oplus \alpha_{\alpha_m}^m Q_{\alpha_m}^m,$$

unde

$$\Delta q_i^m = 1 \cdot Q_{i_1}^{m-1} \oplus 1 \cdot Q_{i_2}^{m-1} \oplus \dots \oplus 1 \cdot Q_{i_{\alpha_{m+1}}}^{m-1},$$

iar $Q_{i_1}^{m-1}, Q_{i_2}^{m-1}, \dots, Q_{i_{\alpha_{m+1}}}^{m-1}$ sunt fațetele cu dimensiunea $m-1$ ale quasisimplexului Q_i^m , $1 \leq i \leq \alpha_m$, $\alpha_m = \text{card } \mathfrak{Q}^m$.

Dacă $\Delta L^m(2) = 0$, atunci $L^m(2)$ se va numi Δ -ciclu m -dimensional al complexului $\mathfrak{X}^n$, fiind notat prin $Z^m(\Delta, 2)$, $0 \leq m \leq n$. Prin definiție, vom considera orice element din $\mathfrak{Q}^0$ ca un Δ -ciclu al complexului $\mathfrak{X}^n$. Dacă $\mathfrak{Z}^m(\Delta, 2)$ reprezintă mulțimea tuturor Δ -ciclurilor m -dimensionale din $\mathfrak{X}^n$, atunci aceasta formează un subgrup al grupului $\mathcal{L}^m(2)$, $0 \leq m \leq n$.

În mod similar cu cele descrise în paragraful 2.6, în cazul complexului de relații multi-are $\mathfrak{X}^n = (\mathfrak{Q}^0, \mathfrak{Q}^1, \dots, \mathfrak{Q}^n)$ se formează:

$\mathcal{X}_0^m(\Delta, 2)$ – mulțimea tuturor Δ -ciclurilor din $\mathcal{X}^m(\Delta, 2)$ care sunt omoloage cu 0. Evident,

$\mathcal{X}_0^m(\Delta, 2)$ este un subgrup al grupului $\mathcal{X}^m(\Delta, 2)$.

$\Delta_2^m(K^n) = \mathcal{X}^m(\Delta, 2) / \mathcal{X}_0^m(\Delta, 2)$ – grupul Δ -omologiilor peste câmpul Z_2 , $0 \leq m \leq n$.

Grupul $\Delta_2^m(\mathcal{X}^n)$, conform relației (2.18), poate fi reprezentat în modul următor:

$$\Delta_2^m(\mathcal{X}^n) = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_r,$$

unde D_i , $1 \leq i \leq r$, este un subgrup ciclic finit din $\Delta_2^m(\mathcal{X}^n)$ de rangul doi. Dacă notăm prin p_2^m rangurile Δ -omologiilor $\Delta_2^m(\mathcal{X}^n)$, $0 \leq m \leq n$, atunci obținem următoarea interpretare a caracteristicii Euler:

$$\chi(\mathcal{X}^n) = \sum_{m=0}^n (-1)^m p_2^m(\mathcal{X}^n). \quad (2.33)$$

Numerele $p_2^0, p_2^1, \dots, p_2^n$ se numesc coeficienții Betty după modulul 2 pentru grupurile de omologii $\Delta_2^0(\mathcal{X}^n), \Delta_2^1(\mathcal{X}^n), \dots, \Delta_2^n(\mathcal{X}^n)$. Folosind expresiile (2.13) și (2.33) pentru caracteristica Euler, obținem o relație similară cu (2.30) din paragraful 2.7, și anume:

$$(-1)^m p_2^m = \sum_{i=0}^r (-1)^i \alpha_i + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i p_2^i + \sum_{i=m+1}^n (-1)^i p_2^i, \quad 0 \leq m \leq n. \quad (2.34)$$

Definiția 2.8.1. Numărul p_2^m din partea stângă a relației (2.34) se numește număr ciclomatic după modulul 2 cu dimensiunea m , $0 \leq m \leq n$, și se notează prin $v_2^m(\mathcal{X}^n)$.

Astfel, în baza relației (2.34), putem scrie:

$$v_2^m(\mathcal{X}^n) = \sum_{i=m}^0 (-1)^{n-i} \alpha_i(\mathcal{X}^n) + \sum_{i=m-1}^0 (-1)^{m-i} v_2^i(\mathcal{X}^n), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (2.35)$$

În paragraful 2.1 a fost definită noțiunea de schelet m -dimensional al G -complexului de relații multi-are (a se vedea definiția 2.1.2). Pentru complexul $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ vom nota prin $\overline{\mathcal{X}}^n$ scheletul 1-dimensional. Acesta din urmă apare la soluționarea a mai multor probleme cu aspect practic, dat fiind faptul că $\overline{\mathcal{X}}^n$ s-a dovedit a fi o structură matematică eficientă, deseori folosită la modelarea diferitelor procese.

Să examinăm matricea de incidență a scheletului $\overline{\mathcal{X}}^n$ peste câmpul C_2 , pe care o notăm prin $\bar{I}_2^m(\Delta) = (\alpha_j^i)_{\alpha_{m-1}\alpha_m}, 1 \leq m \leq n$. Rezolvăm ecuația:

$$\bar{I}_2^m(\Delta)x^* = 0,$$

unde $x^* \in R_2^{\alpha_m}$. Obținem sistemul de ecuații omogene cu operațiile de adunare și înmulțire definite în C_2 :

(2.36)

Judecând ca și în cazul teoremei 2.7.1, obținem egalitatea:

(2.37)

unde $B_m(2)$ este baza familiei de vectori $\Psi_m^2(\tilde{\zeta}^m(\Delta)) \subset R_2^{\alpha_m}$.

fundamentale ce determină în $R_2^{\alpha_m}$ un subspațiu cu dimensiunea $\alpha_m - v_2^m$. Astfel de soluții pot fi:

(2.38)

coordonate.)

Vom reprezenta soluțiile (2.38) prin matricea transpusă:

$$(2.39)$$

Definiția 2.8.2. Matricea (2.39) se numește matrice ciclomatică peste câmpul C_2 pentru scheletul m -dimensional al G -complexului de relații multi-are $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$.

Revenim acum la demonstrația teoremei 2.8.1.

Demonstrație.

I. Fie $\tilde{c}^m = (\tilde{c}_1^m, \tilde{c}_2^m, \dots, \tilde{c}_{\alpha_m}^m)$ un vector arbitrar din $R_2^{\alpha_m}$ ce verifică relația:

$$\tilde{c}^m \in \Psi_m^2(\tilde{\xi}^m(\Delta)) \subset R_2^{\alpha_m}.$$

Să arătăm că, în aceste condiții, vectorul transpus c_*^m satisface egalitatea:

$$I_2^m(\Delta) \cdot c_*^m = 0.$$

Pentru a demonstra afirmația e suficient să o facem pentru un Δ -ciclu simplu (ciclu ce nu conține repetări de elemente) și conex $\tilde{\xi}^m(\Delta) \in \tilde{\xi}^m(\Delta)$ (în cazul unui ciclu arbitrar se face descompunerea acestuia în cicluri simple cu examinările ulterioare respective). Un astfel de ciclu generează un subcomplex conex în scheletul m -dimensional $sk^m(\mathcal{X}^n)$. Să notăm acest subcomplex prin $\mathcal{X}(\tilde{\xi}^m(\Delta))$, iar prin $\Delta_2^0, \Delta_2^1, \dots, \Delta_2^m$ – grupurile de Δ -omologii ale lui $\mathcal{X}(\tilde{\xi}^m(\Delta))$. Aceste grupuri posedă proprietățile:

$$\Delta_2^0 \cong \mathbb{Z}, \quad \Delta_2^1 = \Delta_2^2 = \Delta_2^{m-1} = 0, \quad \Delta_2^m \cong \mathbb{Z},$$

iar caracteristica Euler $\chi(\mathcal{X}(\tilde{\xi}^m(\Delta)))$ satisface egalitatea:

$$\chi(\mathcal{X}(\tilde{\xi}^m(\Delta))) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \text{ este impar,} \\ 2, & \text{dacă } m \text{ este par.} \end{cases}$$

Orice alt Δ -ciclu $\tilde{\xi}_k^m(\Delta)$ conex, însă nu și simplu, poate fi reprezentat ca o reuniune obișnuită de Δ -cicluri simple și conexe de aceeași dimensiune:

$$\tilde{\xi}_k^m(\Delta) = \tilde{\xi}_{k_1}^m(\Delta) \cup \tilde{\xi}_{k_2}^m(\Delta) \cup \dots \cup \tilde{\xi}_{k_t}^m(\Delta).$$

Notăm prin $\bar{I}_2^m(\Delta)$ matricea de incidență a scheletului m -dimensional respectiv. Atunci, produsul scalar al vectorului

$$\tilde{c}^m = \psi_m^2(\tilde{\xi}_k^m(\Delta)) = (\tilde{c}_1^m, \tilde{c}_2^m, \dots, \tilde{c}_j^m, \dots, \tilde{c}_{\alpha_m}^m)$$

la vectorul linie $\varepsilon^i(m, \Delta)$ al matricei $\bar{I}_2^m(\Delta)$ va fi:

$$\langle \tilde{c}^m, \varepsilon^i(m, \Delta) \rangle = \tilde{c}_1^m \varepsilon_1^i(m, \Delta) \oplus \tilde{c}_2^m \varepsilon_2^i(m, \Delta) \oplus \dots \oplus \tilde{c}_j^m \varepsilon_j^i(m, \Delta) \oplus \dots \oplus \tilde{c}_{\alpha_m}^m \varepsilon_{\alpha_m}^i(m, \Delta). \quad (2.40)$$

Avem două posibilități:

- a) Δ -ciclul studiat conține un quasisimplex $(m-1)$ -dimensional care este fațetă comună exact pentru două quasisimplexe m -dimensionale din ciclu. Prin urmare, în acest caz, produsul scalar (2.40) este egal cu 0;

b) nu se respectă condiția cu referire la Δ -ciclu, indicată în punctul precedent. În aceste condiții, deoarece ciclul respectiv nu conține quasisimplexe $(m-1)$ -dimensionale, vom avea:

$$\varepsilon_j^i(m, \Delta) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \tilde{c}_j^m = 1, \\ 1, & \text{dacă } \tilde{c}_j^m = 0. \end{cases}$$

Prin urmare, și în acest caz produsul scalar (2.40) este egal cu 0.

II. Fie $\tilde{c}^m = (\tilde{c}_1^m, \tilde{c}_2^m, \dots, \tilde{c}_{\alpha_m}^m)$ vectorul, transpusul căruia satisface egalitatea din teoremă:

$$I_2^m(\Delta) \cdot c_*^m = 0.$$

Totodată, vectorul $\tilde{c}^m = (\tilde{c}_1^m, \tilde{c}_2^m, \dots, \tilde{c}_{\alpha_m}^m)$ se reprezintă printr-o combinație liniară a vectorilor $\bar{c}_1^m, \bar{c}_2^m, \dots, \bar{c}_{\alpha_m - v_2^m}^m$, care formează sistemul (2.38). Prin urmare, pentru a demonstra condiția necesară a teoremei, rămâne să demonstrăm că fiecare dintre vectorii $\bar{c}_k^m, 1 \leq k \leq \alpha_m - v_2^m$ se reprezintă printr-o combinație liniară a Δ -ciclurilor (vectori din $R_2^{\alpha_m}$).

Examinăm mulțimea $\bar{\mathcal{Q}}^m$ a tuturor quasisimplexelor m -dimensionale q_k^m din $\mathcal{Q}^m$, pentru care ultimele v_2^m coordonate ale vectorului $\tilde{c}_k^m$, corespunzător lui q_k^m , sunt diferite de 0. Fie $\bar{c}_k^m = (c_{k_1}^m, c_{k_2}^m, \dots, c_{k_{\alpha_m}}^m)$, $1 \leq k \leq \alpha_m - v_2^m$. Deoarece fiecare dintre produsele $c_{k_j}^m \cdot \varepsilon_j^i(m, \Delta)$, $1 \leq i \leq \alpha_{m-1}$, primește valoarea 0 sau 1 și $\langle \tilde{c}^m \cdot \varepsilon^i(m, \Delta) \rangle = 0$, rezultă că $\langle \tilde{c}^m \cdot \varepsilon^i(m, \Delta) \rangle$ conține un număr par de unități.

Fie

$$\langle \tilde{c}^m \cdot \varepsilon^i(m, \Delta) \rangle = \tilde{c}_1^m \cdot \varepsilon_1^i(m, \Delta) + \tilde{c}_2^m \cdot \varepsilon_2^i(m, \Delta) + \dots + \tilde{c}_{\alpha_m}^m \cdot \varepsilon_{\alpha_m}^i(m, \Delta) \quad (2.41)$$

Din cele menționate mai sus, referitor la produsul $\langle \tilde{c}^m \cdot \varepsilon^i(m, \Delta) \rangle$, rezultă că există un număr par de indici j în suma (2.41), fie $j_1, j_2, \dots, j_{2t}$, încât simplexele $\bar{q}_{j_1}^m, \bar{q}_{j_2}^m, \dots, \bar{q}_{j_{2t}}^m$, sunt incidente cu fațeta proprie q_i^{m-1} a quasisimplexului $\bar{q}_k^m$. Notăm prin $\bar{\mathcal{X}}(\bar{\mathcal{Q}}^m)$ și $\mathcal{X}(\mathcal{Q}^m)$ subcomplexele din $\mathcal{X}^n$, generate de mulțimile $\bar{\mathcal{Q}}^m$ și, respectiv, $\mathcal{Q}^m$. Evident, este adevărată relația: $\bar{\mathcal{X}}(\bar{\mathcal{Q}}^m) \subset \mathcal{X}(\mathcal{Q}^m)$. Complexul $\bar{\mathcal{X}}(\bar{\mathcal{Q}}^m)$ poate avea mai multe componente conexe. Fie aceste componente sunt:

$$\bar{\mathcal{X}}(\bar{\mathcal{Q}}_{k_1}^m), \bar{\mathcal{X}}(\bar{\mathcal{Q}}_{k_2}^m), \dots, \bar{\mathcal{X}}(\bar{\mathcal{Q}}_{k_r}^m).$$

Fiecare dintre complexele $\bar{\mathcal{X}}(\bar{\mathcal{Q}}_{k_t}^m)$, $1 \leq t \leq r$, reprezintă un Δ -ciclu topologic, de tipul Euler. Notăm aceste Δ -cicluri (conexe și discriptive) prin $\tilde{\xi}_1^m(\Delta), \tilde{\xi}_2^m(\Delta), \dots, \tilde{\xi}_r^m(\Delta)$. Are loc egalitatea:

$$\bar{c}_k^m = \Psi_m^2(\tilde{\xi}_1^m(\Delta)) + \Psi_m^2(\tilde{\xi}_2^m(\Delta)) + \dots + \Psi_m^2(\tilde{\xi}_r^m(\Delta)),$$

de unde, în baza celor menționate mai sus, obținem:

$$\bar{c}_k^m \in {}^m\Psi_m^2(\tilde{\zeta}^m(\Delta)) \subset R_2^{\alpha_m}.$$

Consecința 2.8.1. Pentru matricea de Δ -incidență $\bar{I}_2^m(\Delta)$ a scheletului m -dimensional $sk^m(\mathcal{X}^n)$ al G -complexului de relații multi-are $\mathcal{X}^n$ și matricea $\tilde{C}_2^m$, peste câmpul C_2 , are loc egalitatea:

$$\bar{I}_2^m(\Delta) \cdot \tilde{C}_2^m = 0, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Demonstrația consecinței rezultă imediat din teorema 2.8.1.

Consecința 2.8.2. Pentru matricea de Δ -incidență $\bar{I}_2^m(\Delta)$ a scheletului m -dimensional $sk^m(\mathcal{X}^n)$ al G -complexului de relații multi-are $\mathcal{X}^n$ și matricea $\tilde{C}_2^m$, peste câmpul C_2 , are loc egalitatea:

$$(\bar{I}_2^m(\Delta))^* \cdot (\tilde{C}_2^m)^* = 0, \quad 0 \leq m \leq n,$$

unde $(\bar{I}_2^m(\Delta))^*$ este transpusa matricei $\bar{I}_2^m(\Delta)$, iar $(\tilde{C}_2^m)^*$ este transpusa matricei $\tilde{C}_2^m$.

2.9. Concluzii la capitolul 2

În rezultatul studiului efectuat a fost construită o structură matematică discretă nouă, numită complex de relații multi-are, care generalizează structurile discrete clasice, cum ar fi grafurile, hipergrafurile, complexe simpliciale etc. Capitolul 2 conține un șir de rezultate ce constituie fundamentul teoretic al direcției de cercetare, determinate de aspectul topologic al relațiilor multi-are. Pornind de la definiția propriu-zisă a complexului de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$, construit pe produsele carteziane ale unei mulțimi de elemente $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} = R^1$, se studiază proprietățile de bază ale acestei structuri, necesare pentru cercetările ulterioare.

Generalizând noțiunea de lanț și ciclu, cunoscute pentru structuri matematice mai simple, cum ar fi grafurile, se construiesc grupurile de omologii și coomologii ale complexului $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$. În termenii grupurilor de omologii se obțin rezultate importante ce țin de structura complexelor de relații multi-are, conexitatea acestora, calcularea numărului ciclotomic și cociclotomic etc.

De asemenea, se studiază un caz particular al complexului de relații multi-are, numit arbore. Arborii reprezintă acele modele matematice pentru care pot fi elaborate metode eficiente de soluționare a problemelor practice.

În baza celor descrise în capitolul 2, constatăm obținerea unor rezultate principiale pentru dezvoltarea în continuare a teoriei complexului de relații multi-are:

- au fost construite grupurile de omologii și coomologii;
- a fost stabilită legătura dintre grupurile de omologii ale unui complex de relații multi-are și dualul acestuia;
- a fost demonstrată teorema Kolmogorov-Alexander cu privire la dualitatea grupurilor de omologii și coomologii în cazul complexului de relații multi-are;
- a fost dedusă formula recurentă pentru calcularea numerelor ciclomatice;
- au fost demonstrate proprietăți importante ale arborelui α – stabil;
- a fost demonstrat analogul teoremei Poincare-Veblen-Alexander.

Ținând cont de examinările din capitolul 2 deducem următoarele concluzii:

1. Prin construirea complexului de relații multi-are care, la rândul său, generalizează mai multe structuri discrete clasice, cum ar fi grafurile, hipergrafurile, complexe simpliceale etc., a fost propusă o nouă structură discretă ce poate fi folosită în calitate de model matematic la examinarea și soluționarea problemelor teoretico-aplicative;
2. Folosirea grupurilor de omologii și coomologii la determinarea proprietăților complexului de relații multi-are denotă posibilitatea aplicării metodelor de studiu ale topologiei algebrice pentru examinarea structurilor discrete. Această situație a permis efectuarea cercetărilor la un nivel calitativ nou pentru astfel de structuri;
3. Folosirea rangurilor grupurilor de omologii ale complexului de relații multi-are a permis deducerea unei formule eficiente de calcul a numărului ciclomatic, chestiune importantă pentru stabilirea proprietăților combinatoriale ale unui astfel de complex, necesare la soluționarea problemelor aplicative;
4. Demonstrarea analogului teoremei Poincare-Veblen-Alexander (teorema 2.8.1), cunoscută în legătură cu examinarea conturilor unui graf orientat, reprezintă un instrument efficient care a fost folosit pentru studierea ciclurilor m -dimensionale ale complexului de relații multi-are și construirea matricei ciclomatice a complexului respectiv;
5. Studiul arborilor, drept caz special al complexului de relații multi-are, a permis obținerea unor rezultate ce țin de acoperirile minime cu vârfuri ale complexului și mulțimile intern stabile din $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$, care generalizează rezultate cunoscute din teoria grafurilor. Rezultatele ce țin de studierea cortegiilor suspendate pot fi utile la elaborarea unor algoritmi iterativi de soluționare a problemelor combinatoriale pe arbori.

3. CONVEXITATEA ÎN COMPLEXUL DE RELAȚII MULTI-ARE

Odată cu definirea noțiunii de lanț într-un complex de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$ (a se vedea definiția 2.1.4), putem considera acest complex drept un spațiu metric $(X = R^1, d)$ cu funcția distanței $d : R^1 \times R^1 \rightarrow N$. Generalizând în continuare noțiunea de lanț m -dimensional în $\mathfrak{R}^{n+1}$ (a se vedea paragraful 3.1) care permite, la rândul său, generalizarea noțiunii de mulțime d -convexă, cunoscută din teoria grafurilor [60], [111], se studiază mai multe proprietăți ale acesteia, exprimate prin teoremele 3.1.6 – 3.1.8. Se studiază mulțimile convexe definind noțiunea de k -segment metric m -dimensional.

Grafurile, fiind un caz particular al complexului de relații multi-are și având o structură relativ simplă pentru studiu, servesc drept suport la studierea diverselor aspecte legate de proprietățile mulțimilor convexe în spații metrice discrete.

În paragrafele 3.2 și 3.3 sunt studiate grafurile neorientate și, respectiv, cele orientate, în care învelitoarea convexă a oricăror două vârfuri neadiacente, privită ca o procedură iterativă de aplicare a operatorului de construire a acesteea (a se vedea paragraful 3.1), coincide cu mulțimea tuturor vârfurilor grafului. Grafurile respective se numesc d -convex simple și au fost studiate în mai multe lucrări [133], [134], [136]-[139], [147], [157], [164], [263].

Noțiunea de distanță în cazul unui graf orientat nu se comportă ca o metrică (nu are loc proprietatea comutativă). Această situație impune necesitatea studierii grafurilor orientate cu proprietăți speciale. Specificul noțiunii de convexitate în cazul grafurilor orientate este ilucidat în paragraful 3.3. Se definesc mai multe operații asupra grafurilor d -convex simple orientate, care se comportă ca operații algebrice.

3.1. Noțiunile de convexitate și învelitoare convexă

Definiția generală a noțiunii de convexitate, precum și de învelitoare convexă, a fost dată pentru prima dată în lucrarea [240] de către F. Levi. Primele rezultate obținute au pus bazele unei noi direcții de cercetare în matematică, dezvoltate în continuare de către J.W.Ellis [241], P.C.Hammer [242]-[244], D.C.Kay & E.W.Womble [245], G.Sierksma [246], [247]. În prezent sunt cunoscute diverse modele de convexitate, apărute în legătură cu necesitatea soluționării unor probleme cu caracter teoretico-aplicativ, care se regăsesc în lucrările a mai multor matematicieni cunoscuți pe mapamond: P.Soltan [60], [248], I.Serghienko [249], [250], M.Covaliov [251], [252], V.Soltan [111] etc.

Începem cu definiția convexității formulată de către F. Levi [240]. Fie $\mathcal{P}(X)$ familia tuturor submulțimilor unei mulțimi arbitrare X . Alegem o subfamilie $\Phi \subset \mathcal{P}(X)$.

Definiția 3.1.1. Familia de mulțimi $\Phi \subset \mathcal{P}(X)$ ce posedă proprietățile:

- a) $X \in \Phi$;
- b) dacă $A_1, A_2 \in \Phi$, atunci $A_1 \cap A_2 \in \Phi$,

se numește convexitate în X . Perechea (X, Φ) se numește spațiu convex, iar elementele din Φ – mulțimi convexe.

Conform acestei definiții, pentru orice mulțime de elemente X poate fi indicată o familie de submulțimi care formează o convexitate în X . De exemplu, în spațiul liniar familia tuturor sferelor cu centrul în originea sistemului de coordonate este o convexitate. Evident, în cazul spațiului liniar, convexitate respectivă nu este unică.

Ținând cont de definiția 3.1.1 putem afirma că, dacă Φ este o convexitate într-un spațiu X , atunci orice submulțime $A \subset X$ aparține cel puțin unei mulțimi convexe din Φ . Aceasta, la rândul său, înseamnă că în X există o mulțime convexă minimală ce conține submulțimea $A \subset X$. Mulțimea respectivă se mai numește învelitoare convexă a lui A . Vom prezenta aici definiția noțiunii de învelitoare convexă, împrumutată din lucrarea [240], chiar dacă în literatura de specialitate se întâlnesc și alte variații echivalente ale acesteia [60], [111], [245], [245].

Definiția 3.1.2. Aplicația $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, care satisface relațiile:

- a) $A \subseteq \varphi(A)$, pentru orice submulțime $A \subset X$;
- b) $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$, pentru orice submulțime $A \subset X$;
- c) $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$, pentru oricare două submulțimi $A, B \in \mathcal{P}(X)$ încât $A \subset B$,

se numește învelitoare convexă în spațiul X .

***k*-Lanț *m*-dimensional într-un complex de relații multi-are**

Vom examina acum spațiul, elementele căruia sunt toate cortegiile complexului conex $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$. Cu alte cuvinte, vom examina spațiul determinat de reuniunea $\bigcup_{i=1}^{n+1} R^i$. Pentru a defini în acest spațiu o convexitate vom defini noțiunea de lanț care diferă de cea a lanțului liniar (a se vedea definiția 2.1.4), însă pare a fi mai firească în contextul celor examinate în continuare. Fie r_i^k, r_j^k două elemente arbitrare ale relației *k*-are R^k . Evident, pentru r_i^k, r_j^k totdeauna putem construi un șir ω format din elementele complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$, ce posedă următoarele două proprietăți:

a) primul și ultimul element din ω coincid cu r_i^k și, respectiv, r_j^k ;

b) oricare două elemente vecine ale acestui șir au intersecție nevidă.

Astfel de șiruri sunt prea generale și nu pot fi utile pentru examinarea unor particularități ale complexului de relații multi-are.

Definiția 3.1.3. Șirul de cortegii $r_{t_1}^m, r_{t_2}^m, \dots, r_{t_s}^m$ ale relației m -are R^m ce posedă proprietățile:

$$1) r_i^k \subset r_{t_1}^m, r_j^k \subset r_{t_s}^m, 1 \leq k < m;$$

$$2) r_{t_p}^m \cap r_{t_{p+1}}^m \in R^l, k \leq l < m, \text{ pentru orice } 1 \leq p \leq s-1,$$

se numește k -lanț m -dimensional cu extremitățile în r_i^k, r_j^k și se notează prin ${}^kL^m(r_i^k, r_j^k)$, $1 \leq k < m \leq n+1$. Numărul s se numește lungime a acestui lanț.

Uneori vom obișnui să folosim pentru lanțul ${}^kL^m(r_i^k, r_j^k)$ denumirea de (k, m) -lanț. Ușor ne convingem că (k, m) -lanțul reprezintă o generalizare a noțiunii de lanț, cunoscută din teoria grafurilor [5], [302].

Lema 3.1.1. Dacă șirul $r_{t_1}^m, r_{t_2}^m, \dots, r_{t_s}^m$ reprezintă un (k, m) -lanț ce unește două subcortegii ereditare $r_i^k \subset r_{t_1}^m$ și $r_j^k \subset r_{t_s}^m$, atunci în $\mathfrak{R}^{n+1}$ există (h, m) -lanț ce unește oricare două subcortegii ereditare din $r_{t_1}^m$ și $r_{t_s}^m$, ce conțin câte h elemente fiecare, $1 \leq k < m$, $1 \leq h < k$.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă în cazul k -lanțului m -dimensional ${}^kL^m(r_i^k, r_j^k) = (r_{t_1}^m, r_{t_2}^m, \dots, r_{t_s}^m)$ alegem subcortegiile ereditare $r_1^h \subset r_{t_1}^m$, $r_2^h \subset r_{t_s}^m$, încât $r_1^h \not\subset r_{t_1}^m \cap r_{t_2}^m$ și $r_2^h \not\subset r_{t_{s-1}}^m \cap r_{t_s}^m$, atunci putem considera justă relația ${}^kL^m(r_i^k, r_j^k) = (r_{t_1}^m, r_{t_2}^m, \dots, r_{t_s}^m) = {}^hL^m(r_1^h, r_2^h)$. În cazul când, de exemplu, $r_1^h \subset r_{t_1}^m \cap r_{t_2}^m$, iar $r_2^h \not\subset r_{t_{s-1}}^m \cap r_{t_s}^m$, putem considera lanțul ${}^hL^m(r_1^h, r_2^h) = (r_{t_2}^m, \dots, r_{t_s}^m)$. Celelalte două cazuri rămase:

$$a) r_1^h \not\subset r_{t_1}^m \cap r_{t_2}^m \text{ și } r_2^h \subset r_{t_{s-1}}^m \cap r_{t_s}^m;$$

$$b) r_1^h \not\subset r_{t_1}^m \cap r_{t_2}^m \text{ și } r_2^h \not\subset r_{t_{s-1}}^m \cap r_{t_s}^m$$

se examinează în mod similar.

Remarca 3.1.1. Din existența k -lanțului m -dimensional ${}^kL^m(r_i^k, r_j^k) = (r_{t_1}^m, r_{t_2}^m, \dots, r_{t_s}^m)$ nu rezultă existența unui (h, m) -lanț ce unește două subcortegii ereditare $r_1^h \subset r_{t_1}^m$ și $r_2^h \subset r_{t_s}^m$, $1 \leq k < m$, $k+1 \leq h < m$.

Definiția 3.1.4. *Dacă pentru oricare două elemente r_i^k, r_j^k ale complexului $\mathfrak{R}^{n+1}$ există cel puțin un k -lanț m -dimensional ce le unește atunci $\mathfrak{R}^{n+1}$ se numește complex (k, m) -conex.*

Conform definiției 3.1.4, orice complex conex de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$, definit în capitolul 2 (a se vedea definiția 2.1.1), poate fi considerat și complex $(1, 1)$ -conex.

Folosind k -lanțurile m -dimensionale ce leagă perechile de elemente cu aceeași dimensiune $k, 0 \leq k \leq m$, ale unui complex de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$, vom defini noțiunea de convexitate și învelitoare convexă pentru acest complex. Ba mai mult vom arăta că o convexitate în $\mathfrak{R}^{n+1}$ determină în mod univoc o învelitoare convexă, și invers – orice învelitoare convexă determină în mod univoc o convexitate în $\mathfrak{R}^{n+1}$.

k -Segment metric m -dimensional într-un complex de relații multi-are

Teoria generală a convexității într-un spațiu arbitrar X a fost fundamentată, pornind de la definiția 3.1.1, prin efortul a mai multor matematicieni. În mod esențial au contribuit la dezvoltarea acestei direcții de cercetare în matematică savanți cu renume cum ar fi J.W.Ellis [241], P.C.Hammer [242]-[244], J.Eckhoff [259], D.C.Kay & E.W.Womble [245], K.E.Jamison [260], G.Sierksa [246], [247], van de Vel & L.J.Marcel [261], M.Krein & V.Smulian [262] etc. Totodată, au fost studiate și diverse modele de convexitate, printre care un rol aparte îi revine d -convexității. Pentru prima dată mulțimile d -convexe au fost examinate în lucrarea [253] de către K.Menger. Mai târziu, această noțiune a fost „redescoperită” din nou de mai multe ori în lucrările altor matematicieni, în legătură cu încercarea acestora de a soluționa diverse probleme cu caracter atât teoretic cât și practic: J. de Groot [254], A.Alexandrov & V.Zalgaller [255], F.Toranzos [256], E.Soetens [257], P.Soltan & Ch.Prisăcaru [214]. Fiind introdusă în mod independent în geometrie, topologie, analiză funcțională și teoria grafurilor, d -convexitatea s-a dovedit a fi un model reușit al convexității, care și-a adus aportul la soluționarea unor probleme importante cu caracter aplicativ [60], [141], [258].

În cazul complexului de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$ vom considera că fiecare relație k -ară $R^k, 1 \leq k \leq n$, determină un spațiu, elemente ale căruia sunt cortegiile din R^k . Pe fiecare astfel de spațiu vom defini convexitatea în conformitate cu definiția 3.1.1, folosind k -lanțurile m -dimensionale, introduse prin definiția 3.1.3, $k < m \leq n+1$. Cele expuse în continuare reprezintă o extindere a ideilor prezentate în monografia [164]. Pentru cercetările ulterioare vom avea nevoie de următoarele două noțiuni:

1. ***k*-Lanț *m*-dimensional minim** ce unește două elemente cu aceeași dimensiune $r_i^k, r_j^k \in R^k$, $1 \leq k < m \leq n+1$. Astfel se va numi (k, m) -lanțul ${}^k L^m(r_i^k, r_j^k)$ cu cea mai mică lungime, ce leagă cortegiile $r_i^k, r_j^k \in R^k$.

2. ***Funcția distanței*** $d_k^m : R^k \times R^k \rightarrow N$. Astfel se va numi funcția ce pune în corespondență oricăror două cortegii r_i^k, r_j^k cu aceeași dimensiune k din $\mathfrak{R}^{n+1}$ un număr egal cu lungimea k -lanțului m -dimensional minim, $1 \leq k < m \leq n+1$. Pentru a demonstra că funcția d_k^m reprezintă o distanță în spațiul R^k , vom arăta că aceasta posedă proprietățile unei metrici, definite în R^k . (În cazul când între elementele r_i^k, r_j^k nu există (k, m) -lanț, se consideră $d_k^m(r_i^k, r_j^k) = +\infty$).

Lema 3.1.2. *Funcția $d_k^m : R^k \times R^k \rightarrow N$, încât $d_k^m(r_i^k, r_j^k)$ reprezintă un număr, egal cu lungimea (k, m) -lanțului minim cu extremitățile în $r_i^k, r_j^k \in R^k$, posedă proprietățile:*

- a) $d_k^m(r_i^k, r_j^k) \geq 0$, pentru oricare două elemente $r_i^k, r_j^k \in R^k$ și $d_k^m(r_i^k, r_j^k) = 0$ dacă și numai dacă $r_i^k = r_j^k$;
- b) $d_k^m(r_i^k, r_j^k) = d_k^m(r_j^k, r_i^k)$, pentru oricare două elemente $r_i^k, r_j^k \in R^k$;
- c) $d_k^m(r_i^k, r_j^k) \leq d_k^m(r_i^k, r_t^k) + d_k^m(r_t^k, r_j^k)$, pentru oricare trei elemente $r_i^k, r_j^k, r_t^k \in R^k$.

Demonstrație. Corectitudinea afirmației a) din lema se verifică prin aplicarea noțiunii de lungime a unui k -lanț m -dimensional (a se vedea definiția 3.1.3).

Reieșind din definiția (k, m) -lanțului ${}^k L^m(r_i^k, r_j^k)$ rezultă că dacă șirul $r_{t_1}^m, r_{t_2}^m, \dots, r_{t_s}^m$ leagă cortegiul $r_i^k \subset r_{t_1}^m$ cu cortegiul $r_j^k \subset r_{t_s}^m$, atunci șirul $r_{t_s}^m, r_{t_{s-1}}^m, \dots, r_{t_2}^m, r_{t_1}^m$ leagă cortegiul $r_j^k \subset r_{t_s}^m$ cu cortegiul $r_i^k \subset r_{t_1}^m$. Aceasta înseamnă respectarea condiției b) din lema 3.1.2.

Să fixăm acum trei cortegii arbitrare r_i^k, r_j^k, r_t^k cu dimensiunea k din $\mathfrak{R}^{n+1}$. Dacă între r_i^k, r_j^k nu există (k, m) -lanț ${}^k L^m(r_i^k, r_j^k)$, atunci inegalitatea c) din lema 3.1.2 este adevărată. Să admitem că între cortegiile r_i^k și r_j^k există (k, m) -lanțul minim ${}^k L^m(r_i^k, r_j^k) = (r_{q_1}^m, r_{q_2}^m, \dots, r_{q_\alpha}^m)$.

De asemenea, considerăm că există lanțurile minime:

$${}^k L^m(r_i^k, r_t^k) = (r_{d_1}^m, r_{d_2}^m, \dots, r_{d_\beta}^m),$$

$${}^k L^m(r_t^k, r_j^k) = (r_{e_1}^m, r_{e_2}^m, \dots, r_{e_\gamma}^m).$$

În caz că cel puțin unul dintre lanțurile ${}^k L^m(r_i^k, r_t^k)$, ${}^k L^m(r_t^k, r_j^k)$ nu există, lungimea acestuia se consideră egală cu $+\infty$, de unde rezultă corectitudinea proprietății c) din lema 3.1.2.

Dacă $\alpha \leq \beta + \gamma$, atunci proprietatea c) este demonstrată. Fie $\alpha > \beta + \gamma$. Deoarece $r_t^k \subset r_{d_\beta}^m$, ca una dintre extremitățile lanțului ${}^k L^m(r_i^k, r_t^k)$, obținem $r_{d_\beta}^m \cap r_{e_1}^m \in R^i$, $k \leq i < m$.

Aceasta înseamnă că șirul de cortegii $(r_{d_1}^m, r_{d_2}^m, \dots, r_{d_\beta}^m, r_{e_1}^m, r_{e_2}^m, \dots, r_{e_\gamma}^m)$ reprezintă, la rândul său, un k -lanț m -dimensional cu extremitățile în r_i^k, r_j^k , lungimea căruia este $\beta + \gamma < \alpha$. Obținem contradicție cu faptul că ${}^k L^m(r_i^k, r_j^k) = (r_{q_1}^m, r_{q_2}^m, \dots, r_{q_\alpha}^m)$ este un k -lanț m -dimensional minim. Contradicția obținută demonstrează proprietatea c) și, odată cu aceasta, lema 3.1.2. ■

În baza lemei demonstrate, constatăm că pentru un complex de realții multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$ putem defini spațiile metrice (R^k, d_k^m) , $1 \leq k < m \leq n+1$.

Pentru cortegiile $r_i^k, r_j^k \in R^k$, vom numi ***k-segment metric m-dimensional*** mulțimea:

$$\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m = \{r_l^k \in R^k : d_k^m(r_i^k, r_j^k) = d_k^m(r_i^k, r_l^k) + d_k^m(r_l^k, r_j^k)\},$$

unde $1 \leq k < m \leq n+1$. Se mai spune că segmentul metric $\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m$ leagă cortegiile r_i^k, r_j^k , numite și extremități ale acestui segment.

Convexitatea determinată de funcția distanței d_k^m

Notăm prin D^k familia tuturor mulțimilor $A \subset R^k$ ce posedă proprietatea: pentru oricare două cortegii k -dimensionale $r_i^k, r_j^k \in R^k$ este respectată incluziunea $\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset A$.

Teorema 3.1.1. *Familia D^k reprezintă o convexitate în R^k .*

Demonstrație. Observăm mai întâi că este adevărată relația $R^k \in D^k$. Să examinăm acum intersecția oricăror două mulțimi $A, B \in D^k$. Dacă avem două elemente $r_i^k, r_j^k \in A \cap B$, atunci deoarece fiecare dintre mulțimile A și B este din D^k , obținem:

$$\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset A;$$

$$\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset B.$$

Prin urmare, $\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset A \cap B$, ceea ce înseamnă că $A \cap B$ e o mulțime din D^k .

Din cele demonstrate rezultă că familia D^k posedă proprietățile din definiția 3.1.1. Deci D^k este o convexitate în R^k , $1 \leq k < m \leq n+1$. ■

Elementele familiei D^k le vom numi mulțimi (k, m) -convexe ale complexului de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Vom arăta în continuare că în baza convexității D^k , pe mulțimea tuturor submulțimilor $\mathcal{P}(R^k)$ a spațiului R^k , putem defini o aplicație $\varphi: \mathcal{P}(R^k) \rightarrow \mathcal{P}(R^k)$ care reprezintă o învelitoare convexă în R^k .

Învelitoarea convexă determinată de convexitatea complexului de relații multi-are

Teorema 3.1.2. *Aplicația $\varphi: \mathcal{P}(R^k) \rightarrow \mathcal{P}(R^k)$ care pune în corespondență fiecărui element $A \in \mathcal{P}(R^k)$ o mulțime (k, m) -convexă minimă din D^k , ce conține mulțimea A , reprezintă o învelitoare convexă.*

Demonstrație. Fie dată convexitatea:

$$D^k = \{B \in \mathcal{P}(R^k) : \langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset B, \text{ pentru } \forall r_i^k, r_j^k \in B\} \subset \mathcal{P}(R^k),$$

definită mai sus, și $\varphi: \mathcal{P}(R^k) \rightarrow \mathcal{P}(R^k)$ – aplicația ce satisface condițiile teoremei. Menționăm că, orice mulțime (k, m) -convexă minimă ce conține o mulțime arbitrară $A \in \mathcal{P}(R^k)$ se obține prin intersecția tuturor mulțimilor (k, m) -convexe, ce conțin mulțimea A . Prin urmare, putem considera corectă egalitatea:

$$\varphi(A) = \bigcap \{B \in D^k : A \subset B\}, \quad (3.1)$$

pentru orice mulțime $A \in \mathcal{P}(R^k)$.

Pentru a demonstra teorema e suficient să demonstrăm că aplicația ce respectă condiția (3.1) posedă proprietățile caracteristice unei metrici (a se vedea definiția 3.1.2).

a) Dacă A este o submulțime arbitrară din R^k , atunci incluziunea $A \subseteq \varphi(A)$ este evidentă, dat fiind faptul că $\varphi(A)$ respectă condiția (3.1).

b) Egalitatea $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$ rezultă din faptul că $\varphi(A) \in D^k$, reprezentând intersecția unor mulțimi din D^k (a se vedea teorema 3.1.1).

c) Pentru a demonstra că aplicația φ satisface și cea de-a treia relație din definiția 3.1.2, vom considera două mulțimi arbitrare A și B din D^k ce respectă condiția $A \subset B$. Conform relației (3.1) obținem:

$$\varphi(A) = \bigcap \{E \in D^k : A \subseteq E\}.$$

O mulțime $E \in D^k$ ce conține A ar putea, la rândul său, să conțină mulțimea B sau nu. Aceasta înseamnă că este adevărată incluziunea:

$$\bigcap \{E \in D^k : A \subset E\} \subset (\bigcap \{E \in D^k : A \subset E \text{ și } B \not\subset E\}) \cup$$

$$\begin{aligned} & \cup (\cap \{E \in D^k : B \subset E\}) \subset \\ & \subset (\cap \{F \in D^k : B \subset F\}) = \varphi(B). \end{aligned}$$

Prin urmare $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.

Din cele demonstrate rezultă că, dacă aplicația $\varphi: \mathcal{P}(R^k) \rightarrow \mathcal{P}(R^k)$ satisface relația 3.1, atunci aceasta reprezintă o învelitoare convexă în R^k ■

Prin teorema 3.1.2 s-a demonstrat că, cunoscând familia de mulțimi (k, m) -convexe într-un complex de relații multi-are, putem, în baza acestuia, să definim învelitoare convexă.

Consecința 3.1.1. În cazul unui complex de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$, convexitatea

$$D^k = \{B \in \mathcal{P}(R^k) : \langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset B, \text{ pentru } \forall r_i^k, r_j^k \in B\}$$

determină în mod univoc învelitoarea convexă $\varphi: \mathcal{P}(R^k) \rightarrow \mathcal{P}(R^k)$, încât

$$\varphi(A) = B,$$

unde B este o mulțime (k, m) -convexă minimă din D^k , ce conține mulțimea A , $1 \leq k < n+1$.

Demonstrație. Să admitem că cu ajutorul convexității D^k putem defini două învelitori convexe φ și φ' . În aceste condiții $\varphi(B) = B$, dacă și numai dacă $\varphi'(B) = B$.

Pentru o mulțime arbitrară $B \in \mathcal{P}(R^k)$ obținem egalitatea:

$$\varphi'(\varphi(B)) = \varphi(B),$$

ceea ce înseamnă respectarea relației:

$$\varphi'(B) \subset \varphi'(\varphi(B)) = \varphi(B).$$

În mod analog obținem:

$$\varphi(B) \subset \varphi(\varphi'(B)) = \varphi'(B).$$

Din cele demonstrate rezultă că $\varphi(B) = \varphi'(B)$, pentru orice submulțime $B \in \mathcal{P}(R^k)$. Prin urmare, $\varphi = \varphi'$. ■

O procedură iterativă de construire a învelitoarei convexe

În cele ce urmează, mulțimea $\varphi(A)$ a unei submulțimi arbitrare de cortegii $A \subset R^k$ se va numi învelitoare convexă a lui A și se va nota prin $d_k^m\text{-conv}(A)$. Descriem o procedură iterativă de constituire a învelitoarei convexe $d_k^m\text{-conv}(A)$.

I. Inițial considerăm $A_0 = A$.

II. Fie a fost construită mulțimea $A_q, q \geq 0$. Pentru fiecare două elemente distincte

$r_i^k, r_j^k \in A_q$, determinăm k -segmentul metric m -dimensional $\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m$. Construim mulțimea:

$$A_{q+1} = A_q \cup \left(\bigcup_{r_i^k, r_j^k \in A_q} \langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \right).$$

III. Dacă $A_{q+1} \neq A_q$, atunci pentru A_{q+1} repetăm operația aplicată asupra mulțimii A_q la pasul II.

IV. Dacă $A_{q+1} = A_q$, atunci considerăm $d_k^m\text{-conv}(A) = A_q$.

Prin aplicarea procedurii iterative, descrise cu ajutorul pașilor I-IV, se face o extindere a mulțimii de cortegii $A \in \mathcal{P}(A)$, prin adăugarea tuturor k -segmentelor metrice m -dimensionale cu extremitățile în elementele $r_i^k, r_j^k \in A$. În cele ce urmează, această procedură o vom nota:

$$P(A) = A \cup \left(\bigcup_{r_i^k, r_j^k \in A} \langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \right).$$

Deoarece $A \subset \left(\bigcup_{r_i^k, r_j^k \in A} \langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \right)$, putem scrie $P(A) = \bigcup_{r_i^k, r_j^k \in A} \langle r_i^k, r_j^k \rangle_m$.

Folosind această operație de extindere a mulțimii A , construirea învelitoarei convexe $d_k^m\text{-conv}(A)$ poate fi asociată cu construirea șirului:

$$P_0(A) \subset P_1(A) \subset P_2(A) \subset \dots \subset P_q(A) = P_{q+1}(A),$$

unde $P_0(A) = A$,

$$P_s(A) = P(P_{s-1}(A)), \quad s = 1, 2, 3, \dots, q+1.$$

În aceste condiții $d_k^m\text{-conv}(A) = P_q(A)$.

Considerăm acum aplicația $\hat{\phi}: \mathcal{P}(R^k) \rightarrow \mathcal{P}(R^k)$. În conformitate cu această aplicație, unei mulțimi $A \in \mathcal{P}(R^k)$ i se pune în corespondență mulțimea convexă $d_k^m\text{-conv}(A)$, construită prin aplicarea procedurii iterative, descrise mai sus.

Lema 3.1.3. *Aplicația $\hat{\phi}$ este o învelitoare convexă în R^k .*

Demonstrație. Pentru a demonstra lema 3.1.3 vom arăta că aplicația $\hat{\phi}$ verifică proprietățile învelitoarei convexe din definiția 3.1.2.

a) Fie A o submulțime arbitrară de elemente din R^k . Dacă pentru oricare două elemente $r_i^k, r_j^k \in A$ se respectă relația $\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset A$, atunci, în baza procedurii iterative descrise mai sus, are loc egalitatea:

$$A = d_k^m - \text{conv}(A).$$

În caz contrar se construiește șirul de mulțimi

$$A = P_0(A) \subset P_1(A) \subset \dots \subset P_q(A) = d_k^m - \text{conv}(A), \quad (3.2)$$

de unde rezultă că prima proprietate a învelitoarei convexe, indicată în definiția 3.1.2, se respectă.

Să verificăm cea de-a doua proprietate.

b) În conformitate cu procedura iterativă descrisă mai sus, pentru submulțimea de cortegii $A \in R^k$ formăm șirul (3.2). Prin urmare:

$$\varphi(A) = d_k^m - \text{conv}(A) = P_q(A),$$

ceea ce înseamnă că pentru oricare două elemente $r_i^k, r_j^k \in P_q(A)$ se respectă relația:

$$\langle r_i^k, r_j^k \rangle_m \subset P_q(A),$$

de unde facem concluzia:

$$d_k^m - \text{conv}(A_q) = d_k^m - \text{conv}(A).$$

În rezultat obținem:

$$d_k^m - \text{conv}(d_k^m - \text{conv}(A)) = d_k^m - \text{conv}(A).$$

c) Fie A și B două mulțimi din $\mathcal{P}(R^k)$ cu proprietatea $A \subset B$.

Deoarece oricare două elemente r_i^k, r_j^k din A aparțin și mulțimii B , construirea învelitoarelor convexe pentru A și B poate fi reprezentată prin una dintre schemele:

$$\begin{array}{ccccccc} P_0(A) & \subset & P_1(A) & \subset & \dots & \subset & P_q(A) = d_k^m - \text{conv}(A) \\ \cap & & \cap & & & & \cap \\ P_0(B) & \subset & P_1(B) & \subset & \dots & \subset & P_q(B) \subset P_{q+1}(B) \subset \dots \subset P_t(B) = d_k^m - \text{conv}(B) \end{array} \quad (3.3)$$

sau

$$\begin{array}{ccccccc} P_0(A) & \subset & P_1(A) & \subset & \dots & \subset & P_q(A) \subset P_{q+1}(A) \subset \dots \subset P_t(A) = d_k^m - \text{conv}(A) \\ \cap & & \cap & & & & \cap \\ P_0(B) & \subset & P_1(B) & \subset & \dots & \subset & P_q(B) = d_k^m - \text{conv}(B) \end{array} \quad (3.4)$$

În fiecare dintre aceste două scheme relațiile $P_i(A) \subset P_i(B)$, $0 \leq i \leq q$, sunt evidente, dat fiind faptul că oricare două elemente distincte din $P_i(A)$ aparțin și mulțimii $P_i(B)$.

În cazul schemei (3.3) obținem șirul de incluziuni

$$P_q(A) \subset P_q(B) \subset P_{q+1}(B) \subset \dots \subset P_t(B),$$

de unde obținem:

$$d_k^m - \text{conv}(A) \subset d_k^m - \text{conv}(B).$$

Realizarea schemei (3.4) ar însemna că este adevărată relația:

$$d_k^m - \text{conv}(A) \subset P_0(B) = B.$$

Într-adevăr, în condițiile schemei (3.4) avem situația când învelitoarea convexă a mulțimii A nu depășește mulțimea B , deoarece se presupune că numărul de pași aplicați la construirea învelitoarei convexe a mulțimii A este mai mare decât numărul de pași necesari la construirea învelitoarei convexe a mulțimii B , ceea ce conduce la concluzia $q = 1$. Prin urmare, și în cazul schemei (3.4) se realizează incluziunea:

$$d_k^m - \text{conv}(A) \subset d_k^m - \text{conv}(B).$$

Prin urmare, și cea de-a treia proprietate din definiția 3.1.2 se respectă, ceea ce înseamnă că $\hat{\phi}$ este o învelitoare convexă. ■

Prin aplicația $\hat{\phi}$ am stabilit un alt mod de atribuire a învelitoarei convexe unei mulțimi $A \in \mathcal{P}(R^k)$ însă, conform consecinței 3.1.1, aplicația $\hat{\phi}$ și aplicația ϕ din teorema 3.1.2 coincid.

Să examinăm învelitoarea convexă, descrisă prin aplicația $\hat{\phi}$.

Teorema 3.1.3. *Învelitoarea convexă $\hat{\phi}$ definește în mod univoc o convexitate D^k în mulțimea de cortegii k -dimensionali ai complexului $R^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$ în modul următor: D^k este formată din toate mulțimile $A \subset R^k$, pentru care șirul (3.2) este format dintr-un singur element $P_0(A)$.*

Demonstrație. Pentru a demonstra afirmația din teoremă e suficient a demonstra că familia $D^k = \{A \subset R^k : P_0(A) = P_1(A)\}$ satisface condițiile definiției 3.1.1. Menționăm că relația $R^k \in D^k$ este evidentă. Ne vom axa pe demonstrarea celei de-a doua condiție din definiția 3.1.1.

Alegem două mulțimi arbitrare A și B din D^k . Pentru aceste mulțimi este evidentă relația:

$$\hat{\phi}(A \cap B) \subset \hat{\phi}(A) \cap \hat{\phi}(B). \quad (3.5)$$

Deoarece, precum s-a menționat mai sus,

$$D^k = \{A \subset R^k : P_0(A) = P_1(A)\},$$

obținem

$$\hat{\phi}(A) \cap \hat{\phi}(B) = A \cap B. \quad (3.6)$$

Din relațiile (3.5) și (3.6) rezultă:

$$\hat{\phi}(A \cap B) \subset A \cap B \quad (3.7)$$

În baza proprietății a) a învelitoarei convexe (a se vedea definiția 3.1.2) deducem:

$$A \cap B \subset \hat{\varphi}(A \cap B). \quad (3.8)$$

La rândul său, relațiile (3.7) și (3.8) implică egalitatea:

$$\hat{\varphi}(A \cap B) = A \cap B.$$

În baza relației $D^k = \{A \subset R^k : P_0(A) = P_1(A)\}$ deducem că are loc relația $A \cap B \in D^k$.

Prin urmare D^k reprezintă o convexitate în complexul de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$.

Să demonstrăm acum unicitatea convexității, determinate de $\hat{\varphi}$. Admitem contrariul. Fie mai există o convexitate $\hat{D}^k$, determinată de învelitoarea convexă $\hat{\varphi}$ conform relației $\hat{D}^k = \{A \subset R^k : \hat{\varphi}(A) = A\}$. Egalitatea $\hat{D}^k = D^k$ rezultă din faptul că $\hat{\varphi}(A) = A$ dacă și numai dacă $A \in D^k$. ■

Elemente extreme în R^k

Să revenim la spațiul metric (R^k, d_k^m) , construit în baza relației k -are R^k a complexului $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$, $1 \leq k < m \leq n+1$. Ținând cont de cele descrise anterior, acest spațiu mai poate fi numit (k, m) -convex. Mulțimilor convexe din spațiul (R^k, d_k^m) le sunt caracteristice principalele proprietăți cunoscute ale mulțimilor ce aparțin unei convexități construite în conformitate cu definiția 3.1.1. Diverse aplicații ale acestora la soluționarea problemelor teoretico-aplicative se regăsesc în multiple surse bibliografice (a se vedea, de exemplu, [111], [141], [148], [234]-[237], [261], [273], [278], [279]).

Un rol important în examinarea unor probleme practice revine așa-numitelor elemente extreme (drept exemplu poate servi problema divizării unei figuri plane rectangulare în părți d -convexe, apărută la una dintre uzinele din Minsk și soluționată în anii 70 ai secolului trecut de către discipolii academicianului P. Soltan [248]). Rezultate analoage celor expuse în [243], [278], pentru complexul de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$, sunt exprimate prin cele două teoreme ce vor urma (teoremele 3.1.4 și 3.1.5).

Definim, mai întâi, noțiunea de element extremal al unei mulțimi convexe și de r -suport convex a unui element $r \in R^k$.

Definiția 3.1.5. Elementul $r \in A$ se numește *punct extremal* al mulțimii $A \subset R^k$, dacă $r \notin d_k^m - \text{conv}(A \setminus \{r\})$. Mulțimea tuturor elementelor extreme din A se notează prin $\text{ext}A$.

Definiția 3.1.6. Mulțimea maximal convexă $A \in \mathcal{P}(R^k)$ ce nu conține elementul $r \in R^k$ se numește r -supot convex în R^k și se notează prin A_r .

Este clar că, un element $r \in R^k$ nu determină în mod univoc r -suportul convex A_r . De asemenea, o mulțime convexă maximală A din D^k servește drept r -suport convex pentru orice element $r \in R^k \setminus A$.

Dacă ținem cont de definiția convexității D^k determinate de funcția distanței d_k^m și a învelitoarei convexe respective (a se vedea consecința 3.1.1), ușor ne convingem de corectitudinea următoarei afirmații.

Lema 3.1.4. Pentru orice submulțime $A \subset B$, $A \in D^k$, $B \subset R^k$, există o mulțime convexă maximală C , care satisface condiția $A \subset C \subset B$. Mulțimea C este unică, dacă și numai dacă mulțimea $\bigcup \{F \in D^k : A \subset F \subset B\}$ este convexă.

Teorema 3.1.4. Dacă este definită convexitatea D^k , iar A este o submulțime din R^k atunci sunt adevărate afirmațiile:

1. $r \in \text{ext}A$, dacă și numai dacă există un r -suport A_r , al punctului $r \in R^k$, încât $A \setminus \{r\} \subset A_r$;
2. $A = d_k^m - \text{conv}(\text{ext}A)$, dacă și numai dacă pentru orice element $r \in A$ și orice r -suport A_r are loc relația:

$$(R^k \setminus A_r) \cap \text{ext}A \neq \emptyset.$$

Demonstrație. 1. Dacă $r \in \text{ext}A$, atunci conform definiției 3.1.5 are loc relația $r \notin d_k^m - \text{conv}(A \setminus \{r\})$. În baza lemei 3.1.4 există un r -suport A_r , încât $d_k^m - \text{conv}(A \setminus \{r\}) \subset A_r$. Atunci $A \setminus \{r\} \subset A_r$. Invers, dacă există un punct $r \in R^k$ și $A \setminus \{r\} \subset A_r$, atunci $d_k^m - \text{conv}(A \setminus \{r\}) \subset A_r$. Prin urmare, $r \notin d_k^m - \text{conv}(A \setminus \{r\})$, adică $r \in \text{ext}A$.

2. Fie $A = d_k^m - \text{conv}(\text{ext}A)$, $r \in A$, iar A_r este r -suportul respectiv. Dacă $\text{ext}A \subset A_r$, atunci $A = d_k^m - \text{conv}(\text{ext}A) \subset d_k^m - \text{conv}(A_r) = A_r$, ceea ce ar însemna că $r \notin A$. Prin urmare, $\text{ext}A \not\subset A_r$. Invers, fie că există un punct $r \in A \setminus d_k^m - \text{conv}(\text{ext}A)$. Atunci există un r -suport A_r , pentru care are loc relația $d_k^m - \text{conv}(\text{ext}A) \subset A_r$. Această situație implică relația:

$$\text{ext}A \cap (R^k \setminus A_r) = \emptyset$$

care este imposibilă. ■

Teorema 3.1.5. Pentru orice submulțime $A \subset R^k$ are loc egalitatea:

$$\text{ext}A = \bigcap \{B \subset A : d_k^m - \text{conv}B = d_k^m - \text{conv}A\}.$$

Demonstrație. Fie $C = \bigcap \{B \subset A : d_k^m - \text{conv}B = d_k^m - \text{conv}A\}$. Dacă $x \in A \setminus C$, atunci există o submulțime $B \subset A$ pentru care are loc egalitatea $d_k^m - \text{conv}B = d_k^m - \text{conv}A$ și care nu conține punctul x . Aceasta implica relațiile:

$$B \subset A \setminus \{x\},$$

$$x \in d_k^m - \text{conv}B \subset d_k^m - \text{conv}(A \setminus \{x\}),$$

care implică $x \notin \text{ext}A$.

Invers, fie $x \notin \text{ext}A$. Atunci $x \in d_k^m - \text{conv}(A \setminus \{x\})$. În aceste condiții avem:

$$A = (A \setminus \{x\}) \cup \{x\} \subset d_k^m - \text{conv}(A \setminus \{x\}).$$

Luând în considerație cele obținute, deducem:

$$C \subset A \setminus \{x\} \text{ și } x \notin C. \blacksquare$$

Rezultatul obținut prin intermediul teoremei 3.1.5 permite să considerăm că pentru orice submulțime $A \subset X$ este adevărată relația:

$$\text{ext}(d_k^m - \text{conv}A) \subset \text{ext}A.$$

Proprietățile operatorului P

La finele acestui paragraf, folosind o tehnică similară cu cea expusă în [111], [279], vom demonstra unele proprietăți ale operatorului P , definit anterior și folosit la construirea învelitoarei convexe. Notăm prin $\text{diam}A$ distanța maximă dintre elementele mulțimii $A \subset R^k$.

Teorema 3.1.6. Pentru orice mulțime $A \subset R^k$ are loc inegalitatea:

$$\text{diam}P(A) \leq 2 \cdot \text{diam}A.$$

Demonstrație. Fie y_1 și y_2 două elemente oarecare din $P(A)$. Pentru ele există $x_i, z_i \in A$, $i = 1, 2$, încât:

$$d_k^m(x_i, y_i) + d_k^m(y_i, z_i) = d_k^m(x_i, z_i), \quad i = 1, 2.$$

Să considerăm acele puncte $x_i, z_i \in A$, $i = 1, 2$, pentru care:

$$d_k^m(x_i, y_i) \leq \frac{1}{2} \cdot d_k^m(x_i, z_i), \quad i = 1, 2,$$

În rezultat obținem:

$$\begin{aligned} d_k^m(y_1, y_2) &\leq d_k^m(y_1, x_1) + d_k^m(x_1, x_2) + d_k^m(x_2, y_2) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot d_k^m(x_1, z_1) + d_k^m(x_1, x_2) + \frac{1}{2} \cdot d_k^m(x_2, z_2) \leq 2 \cdot \text{diam}A, \end{aligned}$$

de unde deducem:

$$\text{diam}P(A) = \max\{d_k^m(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in P(A)\} \leq 2 \cdot \text{diam}A. \blacksquare$$

Cunoaștem că într-un spațiu liniar normat X , pentru orice mulțime $A \subset X$ are loc egalitatea:

$$\text{diam}(d - \text{conv}A) = \text{diam}A.$$

Un rezultat similar poate fi stabilit, prin intermediul operatorului P , și în cazul învelitoarelor d_k^m -convexe.

Teorema 3.1.7. Pentru orice submulțime $A \subset R^k$ sunt echivalente afirmațiile:

1. $\text{diam}(d_k^m - \text{conv}A) = \text{diam}A$;
2. $\text{diam}P(A) = \text{diam}A$.

Demonstrație. Precum ușor se verifică, corectitudinea implicației $1 \Rightarrow 2$ rezultă din șirul de relații $A \subset P(A) \subset (\bigcup d - \text{conv}A)$.

Aplicând la inducția matematică, pentru $k = 1, 2, \dots$, în baza condiției 2 se obține:

$$\text{diam}P_k(A) = \text{diam}A.$$

Dacă $x, y \in d_k^m - \text{conv}A$, atunci există două numere $r \leq s$, încât $x \in P_r(A)$ și $y \in P_s(A)$.

Prin urmare, $x, y \in P_s(A)$ și atunci :

$$d_k^m(x, y) \leq \text{diam}P_s(A) = \text{diam}A.$$

Aceasta, la rândul său, înseamnă că $\text{diam}(d_k^m - \text{conv}A) = \text{diam}A$. $\blacksquare$

În legătură cu teorema 3.1.7, trebuie de menționat următorul rezultat

Lema 3.1.5. Pentru oricare două elemente $x, z \in R^k$ este adevărată următoarea egalitate:

$$\text{diam}(\langle x, z \rangle) = d_k^m(x, z).$$

Demonstrație. Se consideră două puncte $y_1, y_2 \in \langle x, z \rangle$. Pentru ele se poate scrie:

$$d_k^m(x, y_1) + d_k^m(y_1, z) = d_k^m(x, y_2) + d_k^m(y_2, z) = d_k^m(x, z).$$

Fie $\gamma = d_k^m(x, y_i)$ și $\delta = d_k^m(y_i, z)$, $i = 1, 2$. Deoarece $\gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 = 2d_k^m(x, z)$, atunci unul dintre numerele $\gamma_1 + \delta_1$ sau $\gamma_2 + \delta_2$ nu depășește numărul $d_k^m(x, z)$.

Să admitem că $\gamma_1 + \delta_1 \leq d(x, z)$, ceea ce conduce la relația:

$$d_k^m(y_1, y_2) \leq d_k^m(y_1, x) + d_k^m(x, y_2) = \gamma_1 + \delta_1 \leq d_k^m(x, z).$$

Din aceste considerente:

$$\text{diam}(\langle x, z \rangle) = d_k^m(x, z). \blacksquare$$

Atragem atenția că, respectarea condiției 2 din teorema 3.1.7 este legată și de noțiunea de mulțime diametral maximală, introdusă prima dată în lucrarea [277] de către Jessen.

Definiția 3.1.7. O mulțime $B \subset R^k$ se numește **diametral maximală**, dacă pentru orice element $z \in R^k \setminus B$ are loc inegalitatea:

$$\text{diam}(\{z\} \cup B) > \text{diam}B.$$

Teorema 3.1.8. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\text{diam}(d_k^m - \text{conv}A) = \text{diam}A$, pentru orice mulțime $A \subset R^k$;
2. orice mulțime diametral maximală din R^k este d_k^m -convexă.

Demonstrație. Dacă o mulțime A din R^k este diametral maximală, atunci din relația $A \subset d_k^m - \text{conv}A$ și afirmația 1 din teoremă, se obține că $d_k^m - \text{conv}A = A$, adică A este mulțime d_k^m -convexă. Aceasta demonstrează implicația $1 \Rightarrow 2$.

În continuare se va demonstra implicația $2 \Rightarrow 1$. Mai întâi vom arăta că pentru orice mulțime $A \subset R^k$ există o mulțime diametral maximală $B \subset R^k$ cu proprietățile:

$$A \subset B \text{ și } \text{diam}A = \text{diam}B. \quad (3.9)$$

Pentru aceasta examinăm familia de mulțimi:

$$\mathcal{F} = \{C \subset X : A \subset C, \text{diam}C = \text{diam}A\}.$$

$\mathcal{F}$ nu este vidă, deoarece $A \in \mathcal{F}$. Se observă cu ușurință că pentru orice șir de mulțimi ordonate în raport cu operația de includere

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_\lambda \subset \dots \subset \mathcal{F},$$

mulțimea $\bigcup_\lambda F_\lambda$ aparține, de asemenea, familiei $\mathcal{F}$. Totodată familia $\mathcal{F}$ conține cel puțin un element maximal B (a se vedea lema lui Zorn, cunoscută și ca lema lui Kuratowski-Zorn, cu privire la existența elementului maximal într-o mulțime ordonată [275], [276]). Ținând cont de componența familiei $\mathcal{F}$ se observă că B este o mulțime diametral maximală, pentru care are loc relația 3.9.

În baza celei de-a doua afirmații din teoremă, deducem că mulțimea B este d_k^m -convexă.

Prin urmare $d_k^m - \text{conv}A \subset B$, de unde rezultă inegalitatea:

$$\text{diam}(d_k^m - \text{conv}A) \leq \text{diam}B = \text{diam}A. \blacksquare$$

3.2. Convexitatea în grafurile neorientate

Printre structurile discrete în raport cu care au fost obținute mai multe rezultate importante ce țin de studierea mulțimilor convexe se numără grafurile neorientate. Acestea din urmă reprezintă, de fapt, un caz particular al complexelor $\mathfrak{R}^{n+1} = (R^1, R^2, \dots, R^{n+1})$ în care relația R^m este formată din șiruri neordonate a câte m elemente fiecare, luate din X . În aceste condiții, dacă $G = (X, U)$ este un graf neorientat cu mulțimea de vârfuri X și mulțimea de muchii U , atunci putem considera $G = \mathfrak{R}^2 = (R^1, R^2)$.

Vom spune că o mulțime de vârfuri $A \subset X$ este d -convexă în graful G dacă împreună cu oricare două vârfuri $x, y \in X$ ea conține toate vârfurile ce aparțin tuturor lanțurilor de lungime minimă cu extremitățile în X și Y . Printre grafurile ce prezintă interes din punct de vedere al convexității se evidențiază grafurile d -convex simple. Acestea se bucură de o proprietate, importantă la soluționarea unor probleme cu caracter aplicativ: învelitoarea convexă a oricăror două vârfuri neadiacente coincide cu mulțimea X a tuturor vârfurilor grafului $G = \mathfrak{R}^2 = (R^1, R^2)$. Un graf neorientat G fără triunghiuri se numește d -convex simplu dacă nu conține mulțimi d -convexe $A \neq X$, care generează un subgraf necomplet în G . Pentru prima dată grafurile d -convex simple au fost studiate de către S.Rao și S.Hebbare [264], [265], care s-au limitat la o clasă specială de grafuri. Ceva mai târziu s-a făcut o încercare de a descrie structura grafurilor d -convex simple în caz general [266], însă rezultatul de bază din articolul menționat s-a dovedit a fi greșit [267]. Ulterior au fost studiate diferite clase de grafuri d -convex simple, fiind obținute rezultate interesante cu privire la structura acestora, utilă la elaborarea unor algoritmi eficienți de soluționare a problemelor practice [131]-[140], [147], [164], [263].

Teorema 3.2.1. *Pentru orice graf neorientat $G = (X, U)$ sunt echivalente afirmațiile:*

1. orice submulțime $A \subset X$, care nu generează în G un subgraf complet, nu este mulțime d -convexă;
2. $d - \text{conv}(\{x, y\}) = X$, pentru oricare două vârfuri neadiacente $x, y \in X$;
3. $d - \text{conv}(\{x, y\}) = X$, pentru oricare două vârfuri $x, y \in X$ aflate la distanța doi în G .

Demonstrație: Evident afirmația 1 implică afirmația 2 și reciproc. Afirmația 3 este un caz particular al afirmației 2.

Astfel, demonstrația teoremei 3.2.1 se reduce la verificarea implicației $3 \Rightarrow 2$. Pentru demonstrația corectitudinii acestei implicații vom verifica respectarea egalității $d - \text{conv}(\{x, z_2\}) = X$, pentru oricare două vârfuri neadiacente din X .

Fie două vârfuri neadiacente $x, y \in X$, iar $[x, z_1, z_2, \dots, z_k, y]$ – lanțul de lungime minimă, care le unește. Evident $\{x, z_1, z_2, \dots, z_k, y\} \subset d\text{-conv}(\{x, y\})$. Conform afirmației 3, este adevărată egalitatea $d\text{-conv}(\{x, z_2\}) = X$. Atunci următoarele două relații:

$$d\text{-conv}(\{x, z_2\}) = X,$$

$$\{x, z_2\} \subset \{x, z_1, z_2, \dots, z_k, y\} \subset d\text{-conv}(\{x, y\}),$$

implică egalitatea $d\text{-conv}(\{x, z_2\}) = X$, ceea ce demonstrează implicația $3 \Rightarrow 2$.

Atragem atenția că prin teorema demonstrată se face referință la grafurile d -convex simple, deoarece un astfel de graf satisface condițiile 2 și 3 din teoremă.

Se cunosc clase de grafuri, convexitatea simplă a cărora este determinată de lipsa mulțimilor d -convexe de un anumit cardinal [265], [267]. Această situație nu este valabilă și în caz general, fapt confirmat prin următoarele două teoreme.

Teorema 3.2.2. *Dacă A este o mulțime d -convexă proprie a grafului conex $G = (X, U)$, $\text{card}X = n$, în care nu există mulțimi d -convexe din trei vârfuri, atunci $4 \leq \text{card}A \leq [n/2]$.*

Demonstrație: Fie A o mulțime d -convexă proprie a grafului G , care satisface condițiile teoremei. Cum G este conex, rezultă că există două vârfuri adiacente $x \in A, y \in X \setminus A$. Deoarece A este o mulțime d -convexă, rezultă că A generează în G un subgraf conex. Examinăm în A un lanț $[x = z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = t]$ de lungime minimă, care leagă vârful x cu un vârf oarecare $t \neq x$. Din condițiile teoremei rezultă că în $X \setminus A$ nu există nici un vârf, care să fie adiacent cu două vârfuri diferite din A . Fie că primele $k \geq 1$, vârfuri din lanțul menționat mai sus sunt adiacente respectiv cu vârfurile $y = v_1, v_2, \dots, v_k \in X \setminus A$. Conform condițiilor teoremei, pentru orice triplet de vârfuri $\{v_k, z_k, z_{k+1}\}$ există vârful $p, p \neq z_k$, care este adiacent cu v_k, z_{k+1} . Dacă $p \in A$, atunci $v_k \in \langle p, z_k \rangle$, de unde avem $v_k \in A$, ceea ce contrazice condiția $v_k \in X \setminus A$. Rezultă că $p \in X \setminus A$ și $p \neq v_i$ pentru orice $i = \overline{1, k}$. Prin urmare și pentru vârful v_{k+1} al acestui lanț există un vârf din $X \setminus A$ adiacent cu el. Din cele demonstrate rezultă că pentru orice vârf din lanț, inclusiv pentru t , în $X \setminus A$ există un vârf adiacent cu el. Aceasta înseamnă că toate vârfurile din A sunt adiacente cu vârfuri diferite din $X \setminus A$. Deci $4 \leq \text{card}A \leq [n/2]$.

În cele ce urmează, vom nota prin D_k familia tuturor mulțimilor d -convexe din graful $G = (X; U)$, cardinalul cărora este $k, 1 \leq k \leq n$.

Teorema 3.2.3. *Dacă A este o mulțime d -convexă proprie a grafului conex $G = (X; U)$, $\text{card}X = n$, în care $D_k = \emptyset, 3 \leq k < [n/2] - 1$, atunci $k + 1 \leq \text{card}A \leq [n/2] - 1$.*

Demonstrație: Fie A o mulțime d -convexă proprie a grafului G , care satisface condițiile teoremei. Cum $D_3 = \emptyset$, în A există lanțul $[x, y, z]$ de lungimea trei. Conform teoremei în G există vârful $v, v \neq y$, adiacent cu x, z . Vârful v este din A și $v \sim y$. Deci, rezultă că vârfurile x, y, z și v generează un ciclu de lungimea patru. Analogic teoremei 3.2.2, se poate de arătat că în $X \setminus A$ există lanțul $[x', y', z', v']$, vârfurile căruia sunt adiacente respectiv cu x, y, z, v , deci $x' \sim x, y' \sim y, z' \sim z, v' \sim v$. Conform condițiilor teoremei, în G nu există mulțimi d -convexe de cardinal patru. Prin urmare, pentru mulțimea $\{x', y', z', v'\}$ există vârful t , adiacent cu y și x' sau cu x și y' .

Fie $t \sim y, x'$ (cazul $t \sim x, y'$ se examinează în mod analog). Dacă $t \in A$ atunci $x' \in \langle x, t \rangle$, de unde $x' \in A$, ceea ce contrazice celor demonstrate mai sus. Deci $t \in X \setminus A$. Din faptul că A este mulțime d -convexă și $D_3 = \emptyset$ rezultă că, vârful t nu este adiacent cu nici un alt vârf din A . Din raționamente analogice cu cele de mai sus, pentru mulțimea $\{v, z, v', z'\}$ există un vârf, care este adiacent cu v și z' sau cu z și v' . Nici unul din vârfurile examinate până acum nu poate fi în rolul acestuia, deoarece în caz contrar s-ar obține contradicție cu condițiile teoremei. Deci acest vârf este unul nou, notat prin s . În acest caz fiecare dintre vârfurile unei perechi de garfuri $\{x, v\}, \{y, z\}, \{x, z\}$ sau $\{y, v\}$ este adiacent cu două vârfuri din $X \setminus A$, restul vârfurilor din A fiind adiacente vârfurilor distincte din $X \setminus A$ (a se vedea demonstrația teoremei 3.2.2). Astfel, obținem inegalitatea $k + 1 \leq \text{card}A \leq [n/2] - 1$.

Studierea structurii unor clase de grafuri d -convex simple este legată de noțiunea de atom al grafului neorientat.

Atomul unui graf local finit

Vom examina grafurile în care vecinătatea oricărui vârf este finită, numindu-le grafuri local finite și vom nota prin $\Gamma(x)$ vecinătatea vârfului $x \in X$ a unui astfel de graf $G = (X; U)$.

Definiția 3.2.1. Se spune că vârful u domină vârful v în graful G , dacă

$$\Gamma(u) \supseteq \Gamma(v).$$

Dacă

$$\Gamma(u) = \Gamma(v),$$

atunci vârfurile u și v se numesc vârfuri copii.

Notăm prin $\mathcal{A}$ mulțimea tuturor grafurilor fără cicluri de lungimea 3, în care orice vârf este dominat de un careva alt vârf.

Teorema 3.2.4. *Dacă G este un graf din clasa $\mathcal{A}$, atunci G este d -convex simplu.*

Demonstrație: Presupunem contrariul și examinăm mulțimea d -convexă proprie $A \notin D_1 \cup D_2$ a grafului $G \in \mathcal{A}$. Evident, există vârfurile adiacente $x \in A$ și $y \notin A$. Fie x' vârful ce domină x . Deoarece în G nu există cicluri de lungimea trei, rezultă că $y \in \langle x, x' \rangle$, ceea ce conduce la concluzia $x' \notin A$. Vârful x sau este adiacent tuturor vârfurilor din A , sau în A există lanțul $[x, u, v]$ de lungimea doi. În primul caz obținem că $(A \setminus \{x\}) \subset \Gamma(x')$ și, deoarece A conține nu mai puțin de trei vârfuri, vom avea: $x' \in A$. În cazul al doilea, dacă u' domină vârful u , atunci $u' \sim x, x', v$, ceea ce implică relațiile $u' \in \langle u, v \rangle \subset A$ și $x' \in \langle u, v' \rangle \subset A$, situație imposibilă, în baza celor descrise mai sus.

Definiția 3.2.2. [139] *Submulțimea de vârfuri D se numește dominantă în graful $G = (X, U)$, dacă pentru $\forall x \in X \setminus D, \exists y \in D$, încât y domină x .*

Conform definiției 3.2.2, putem considera că orice vârf $x \in X$ este dominat de el însuși.

Dacă în graful arbitrar $G = (X, U)$ mulțimea D este dominantă, atunci D este o mulțime extern stabilă în G (mulțimea $A \subset X$ a grafului $G = (X, U)$ se numește extern stabilă dacă $\forall z \in X \setminus A, \exists t \in A$, încât $t \sim z$ [268], [269]).

Într-adevăr, fie $z \in X \setminus D$ un vârf arbitrar și în D nu există nici un vârf adiacent cu z . Din definiția mulțimii D se deduce existența vârfului $t \in D$, care domină z și $\Gamma(t) \subset X \setminus D$. Fie $p \in \Gamma(t)$, atunci în D există vârful w , care domină p , adică $\Gamma(p) \subseteq \Gamma(w)$. Rezultă că $z \in \Gamma(w)$, ceea ce contrazice presupunerea despre z . Deci D e o mulțime extern stabilă în G .

Teorema 3.2.5. *Toate mulțimile dominante ale grafului local finit G , care sunt minimale în raport cu operația de incluziune, generează subgrafuri izomorfe.*

Demonstrație: Să considerăm mulțimile:

$$S = \{x \in X : \forall y \in X \Rightarrow \Gamma(x) \not\subset \Gamma(y)\},$$

$$R = \{x \in X \setminus S : \forall y \in X \Rightarrow \Gamma(x) \not\subset \Gamma(y)\}.$$

Deoarece G este un graf local finit, orice vârf $z \notin S$ este dominat de un vârf din mulțimea $R \cup S$. Într-adevăr, cum $z \notin S$, în G sau există vârful y , pentru care $\Gamma(z) \subset \Gamma(y)$, sau există vârful v , pentru care $\Gamma(z) = \Gamma(y)$. În primul caz, din faptul că G este local finit rezultă că reuniunea $R \cup S$ conține un vârf ce domină z , iar în al doilea z este dominat de v . Conform definiției 3.2.2, orice vârf din S se domină pe sine însuși. Astfel, orice mulțime dominantă din G se conține în $R \cup S$ și conține, la rândul său, în întregime mulțimea S . Pentru orice $x \in R$ formăm mulțimea $R(x) = \{x\} \cup \{y \in R : \Gamma(x) = \Gamma(y)\}$. Dacă $x \in R$, atunci are loc egalitatea

$\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset$, sau $\Gamma(x) = \Gamma(y)$. Rezultă că R este divizată în clase de echivalență $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, unde Λ este un număr cardinal, și fiecare mulțime dominantă trebuie să conțină cel puțin câte un vârf din fiecare clasă R_λ . De aici rezultă că fiecare mulțime dominantă, minimală după incluziune, conține mulțimea S și câte un vârf din fiecare clasă R_λ .

Fie D_1 și D_2 două mulțimi din G dominante minimale după incluziune.

$$\text{Definim aplicația bijectivă } \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in S \\ R_\lambda \cap M_2, & \text{dacă } x \in R_\lambda \cap M_1 \end{cases}$$

Vom arăta că această aplicație determină izomorfismul grafurilor $G(M_1)$ și $G(M_2)$. Fie (x, y) o muchie a grafului $G(M_1)$ și $\psi(x) = x'$, iar $\psi(y) = y'$. Dacă $x, y \in S$, atunci $x' = x$ și $y' = y$. Dacă $x \in S$ și $y \notin S$, atunci $x' = x$ și $\Gamma(y) = \Gamma(y')$, de unde $x \in \Gamma(y')$. Dacă $x, y \notin S$, atunci $\Gamma(x) = \Gamma(x')$ și $\Gamma(y) = \Gamma(y')$. Cum $x \sim y$, rezultă că $x \sim y'$, dar atunci $x' \sim y'$. Aceasta din urmă demonstrează corectitudinea afirmației din teorema 3.2.5.

Așadar, toate mulțimile dominante ale grafului local finit G , care sunt minimale în raport cu operația de incluziune, generează unul și același subgraf G_0 , care în continuare se va numi *atomul* grafului G .

Operații asupra grafurilor d -convex simple

Vom descrie o clasă specială $\mathcal{G}$ de grafuri neorientate, examinate în monografia [164] și necesară pentru investigațiile ce vor urma:

I. Clasei $\mathcal{G}$ îi aparțin toate grafurile $G_0 = (X_{G_0}, U_{G_0})$, unde:

$$X_{G_0} = \{u, v, x_1, x_2, \dots, x_n\}, n \geq 1,$$

$$U_{G_0} = \{(u, x_j), (v, x_j) : j = 1, 2, \dots, n\}.$$

II. În baza grafului $G_{i-1}, (i \geq 1)$ se construiește graful $G_i = (X_{G_i}, U_{G_i})$:

$$X_{G_i} = X_{G_{i-1}} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_m\}, m \geq 1,$$

$$U_{G_i} = U_{G_{i-1}} \cup \{(a, b) : a, b \in X_{G_i}, \text{ nu ambele aparțin lui } X_{G_{i-1}} \text{ și se respectă condițiile:}$$

a) Pentru orice vârf y_i , există două vârfuri distincte $p, q \in X_{G_i}$, încât se respectă condiția: $y_i \in d - \text{conv}(\{p, q\})$;

b) Pentru orice două vârfuri $a, b \in X_{G_i}$, aflate la distanța doi în G_i , există două vârfuri distincte $p, q \in X_{G_{i-1}}$, încât sunt satisfăcute relațiile:

1. p și q sunt diferite de a și b ;
2. $d_{G_{i-1}}(p, q) = 2$;
3. $p, q \in d - \text{conv}(\{a, b\})$.

c) Graful G_i nu conține triunghiuri}.

III. În $\mathcal{G}$ nu sunt alte grafuri, în afară de graiurile descrise în **I** și **II**.

Clasa descrisă de grafuri neorientate $\mathcal{G}$ este o reuniune de familii de grafuri, obținute recursiv în conformitate cu procedurile descrise mai sus:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \dots \cup \mathcal{G}_i \cup \dots,$$

unde $\mathcal{G}_0$ reprezintă toate grafurile $G_0 = (X_{G_0}, U_{G_0})$, descrise la pasul I de construire a clasei $\mathcal{G}$, iar $\mathcal{G}_i, i \geq 1$, reprezintă familia tuturor grafurilor ce se obțin din grafuri oarecare din $\mathcal{G}_{i-1}$ cu aplicarea operației II.

Teorema 3.2.6 [164]. *Un graf neorientat $G = (X; U)$ este d -convex simplu, dacă și numai dacă $G \in \mathcal{G}$.*

Cu toate că teorema formulată reprezintă o caracterizare a convexității simple a grafurilor neorientate, totuși ea oferă prea puțină informație cu privire la proprietățile acestora. De exemplu, e greu să ne imaginăm care ar fi structura grafurilor d -convex simple, chestiune importantă la elaborarea unor metode de soluționare a problemelor de optimizare. Rezultate interesante, în această ordine de idei, au fost obținute studiind anumite clase de grafuri. Pentru a prezenta rezultatele respective vom avea nevoie de careva investigații suplimentare. Vom continua, definind, mai întâi, câteva operații speciale pe grafurile d -convex simple și studiind proprietățile acestora. (O informație mai amplă, cu referire la operațiile ce vor urma, poate fi găsită în monografia [164].)

Fie $G_1 = (X_1, U_1)$ și $G_2 = (X_2, U_2)$ două grafuri neorientate și conexe, în care există câte o pereche de vârfuri copii: x_1, x_2 în G_1 și y_1, y_2 în G_2 . Notăm prin $G = M_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(G_1, G_2)$ graful obținut din G_1 și G_2 în urma contopirii vârfului x_1 cu y_1 și a vârfului x_2 cu y_2 . Ușor se verifică că sunt adevărate relațiile:

$$\begin{aligned} \text{card}X_G &= \text{card}X_1 + \text{card}X_2 - 2, \\ U_G &= U_1 \cup U_2. \end{aligned}$$

Teorema 3.2.7. *Dacă G_1 și G_2 sunt două grafuri d -convex simple, în care există câte o pereche de vârfuri copii $x_1, x_2 \in X_{G_1}$ și $y_1, y_2 \in X_{G_2}$, atunci graful $G = M_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(G_1, G_2)$ este, de asemenea, d -convex simplu.*

Demonstrație: Considerăm G_1 și G_2 două grafuri d -convex simple, ce satisfac condițiile impuse în teoremă. Vom arăta că graful $G = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}^{x_1=y_1} (G_1, G_2)$ poate fi obținut din graful G_1 în urma adăugării mulțimilor $X_{G_2} \setminus \{y_1, y_2\}$ și U_{G_2} de vârfuri și respectiv de muchii, cu respectarea condițiilor II din descrierea clasei $\mathcal{G}$ (a se vedea teorema 3.2.6). Considerând $G_{i-1} = G_1$ și $G_i = G$, vom arăta că G poate fi obținut din G_1 cu respectarea condiției II. Luând în considerație că perechile de vârfuri alese sunt copii, precum și construcția grafului $G = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}^{x_1=y_1} (G_1, G_2)$, rezultă că muchii noi atât între vârfurile grafului G_1 , cât și între vârfurile grafului G_2 , nu se adaugă. De aici deducem că în graful G nu s-au format triunghiuri, deci condiția II c) este satisfăcută.

Învelitoarea d -convexă în G a vârfurilor $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ conține, conform teoremei 3.2.1, toate vârfurile grafului G_1 , deoarece x_1, x_2 sunt două vârfuri aflate la distanța doi în graful d -convex simplu G_1 . Totodată învelitoarea convexă conține toate vârfurile grafului G_2 , deoarece y_1, y_2 sunt două vârfuri aflate la distanța doi în graful d -convex simplu G_2 .

Referitor la celelalte vârfuri din G se constată că:

a) pentru orice $y_i \in X_{G_2}$, există vârfurile $x_1 = y_1, x_2 = y_2 \in X_{G_1}$, încât:

$$y_i \in d - \text{conv}(\{y_1, y_2\}) = d - \text{conv}(\{x_1, x_2\});$$

b) pentru oricare două vârfuri $a, b \in X_{G_1}$ aflate la distanța doi în G , există două vârfuri distincte $x_1, x_2 \in X_{G_1}$, încât:

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2;$$

$$x_1 \text{ și } x_2 \text{ sunt diferite de } a \text{ și } b;$$

$$d_{G_1}(x_1, x_2) = d_{G_2}(y_1, y_2) = d_G(x_1, x_2) = 2;$$

$$x_1, x_2 \in d - \text{conv}(\{a, b\});$$

Deci $G = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}^{x_1=y_1} (G_1, G_2) \in \mathcal{G}$.

Conform teoremei 3.2.6, aceasta înseamnă că graful G este d -convex simplu.

Din teorema demonstrată rezultă că operația M , definită pe mulțimea de grafuri d -convex simple, este o operație algebrică. Pe lângă operația definită M vom mai defini altele două operații numite operație de multiplicare și operație de suprimare a vârfurilor.

Fie v un vârf oarecare a grafului $G = (X; U)$. Operația ce constă în adăugarea unui vârf nou, notat prin $\tilde{v}$, care este copie a vârfului v o vom numi operație de multiplicare și o vom nota prin G^{++} .

Teorema 3.2.8. *Dacă $G=(X;U)$, $\text{card}X > 3$, este un graf d -convex simplu, atunci G^{++} este de asemenea un graf d -convex simplu.*

Demonstrație: Fie $G=(X;U)$ un graf d -convex simplu neorientat. Conform teoremei 3.2.6 acest graf aparține clasei $\mathcal{G}$.

Alegem un vârf arbitrar $v \in X$ și formăm, în conformitate cu cele descrise anterior, graful G^{++} . Fie, de asemenea, x și y două vârfuri arbitrare din $X_{G^{++}}$, iar $d - \text{conv}_{G^{++}}(\{x, y\})$ - învelitoarea convexă respectivă. Datorită faptului că vârfurile v și $\tilde{v}$ sunt vârfuri copii în graful G^{++} rezultă că dacă $v \in d - \text{conv}_{G^{++}}(\{x, y\})$, atunci și $\tilde{v} \in d - \text{conv}_{G^{++}}(\{x, y\})$, și invers. Mai mult ca atât, dacă x și y sunt două vârfuri distincte din $X_{G^{++}}$, diferite de vârfurile $v, \tilde{v}$, atunci $v \in d - \text{conv}_{G^{++}}(\{x, y\})$, deoarece graful G este d -convex simplu (ținem cont de faptul că are loc relația $d(x, y) \geq 2$). Prin urmare, și vârfurile $\tilde{v}$ este din $d - \text{conv}_{G^{++}}(\{x, y\})$. Însă d -segmentul $\langle v, \tilde{v} \rangle_{G^{++}}$ conține toate vârfurile din $\Gamma(v)$. Deoarece graful G este d -convex simplu și $\text{card}X > 3$, rezultă că acest graf nu conține vârfuri suspendate. Prin urmare, $\text{card}(\Gamma(v)) \geq 2$. Astfel se obține că în $\Gamma(v)$ se conțin cel puțin două vârfuri din G , distanța dintre care este doi în graful G^{++} . Învelitoarea convexă a acestor vârfuri va conține toate vârfurile grafului G . De aici rezultă veridicitatea relației:

$$d - \text{conv}_{G^{++}}(\{v, \tilde{v}\}) = X_{G^{++}},$$

ceea ce implică egalitatea:

$$d - \text{conv}_{G^{++}}(\{x, y\}) = X_{G^{++}}.$$

Astfel obținem că învelitoarea d -convexă a oricăror două vârfuri distincte din G^{++} , diferite de v și $\tilde{v}$, conține toate vârfurile grafului G^{++} .

Alegem un vârf oarecare y din G^{++} , diferit de vârfurile v și $\tilde{v}$. Învelitoarea convexă a mulțimii $\{y, v\}$ în G va conține toate vârfurile, cel puțin ale unui lanț de lungime minimă ce trece prin v și y , care, la rândul său, va conține vârfuri din G , situate la distanța doi și în graful G^{++} . Învelitoarea convexă a acestora va conține toate vârfurile grafului G . Prin urmare, $d - \text{conv}_{G^{++}}(\{v, y\}) = X_{G^{++}}$. Deoarece vârfurile v și $\tilde{v}$ sunt vârfuri copii, are loc egalitatea $\langle v, y \rangle = \langle \tilde{v}, y \rangle$, de unde rezultă:

$$d - \text{conv}_{G^{++}}(\{v, y\}) = d - \text{conv}_{G^{++}}(\{\tilde{v}, y\}) = X_{G^{++}}.$$

Aceasta și înseamnă că graful G^{++} este d -convex simplu.

Clase speciale de grafuri d -convex simple

Noțiunea de atom al unui graf local finit joacă un rol decisiv la studierea structurii a mai multor clase de grafuri d -convex simple neorientate. Pentru a descrie structura acestor grafuri, vom folosi operația specială, notată prin $CL_2(G)$.

Fie G_1 și G_2 două copii ale unui graf neorientat $G = (X; U)$.

Vârfurile $x_1 \in X(G_1)$, $x_2 \in X(G_2)$ se numesc vârfuri *corespondente* dacă au aceeași preimagine în G . Urmând [133], notăm prin $L_2(G)$ graful obținut din G_1 și G_2 în felul următor: pentru fiecare vârf $x_1 \in X_{G_1}$ adăugăm toate muchiile de la x_1 spre toate vârfurile din vecinătatea vârfului corespondent lui $\Gamma(x_2)$. Dacă unele dintre perechile de vârfuri corespondente se vor mai uni cu vârfuri noi de grad doi, atunci graful obținut se notează prin $CL_2(G)$.

Fie T un arbore oarecare cu cel puțin trei vârfuri, iar T_0 – copia subarborelui lui T , generat de toate vârfurile nesuspendate. Prin $L(T, T_0)$ notăm graful care se obține din T și T_0 în felul următor: pentru fiecare vârf $z \in X_{T_0}$ se adăugă toate muchiile de la z spre toate vârfurile din vecinătatea vârfului corespondent lui $\Gamma(\bar{z})$, $\bar{z} \in T$.

Apelând la cele menționate în lucrările [133], [139] a fost studiată convexitatea simplă a mai multor clase de grafuri:

1. $\mathcal{A}$ - grafurile ce nu conțin cicluri de lungimea trei și fiecare vârf al acestora este dominat de un alt vârf;
2. $\mathcal{F}$ - grafurile ce nu conțin cicluri de lungimea trei și subgrafuri F (a se vedea figura 3.1);
3. $\mathcal{P}$ - grafurile planare;
4. $\mathcal{H}_1$ - grafurile modular ereditare [270]. Astfel se numesc grafurile în care orice ciclu izometric este de lungimea patru;
5. $\mathcal{H}_2$ - grafurile cordale. Acestea sunt grafurile bipartite, în care orice ciclu generat este de lungimea patru [271];
6. $\mathcal{H}_3$ - grafurile ereditare după distanță. Astfel sunt numite grafurile G în care orice subgraf conex, generat de o submulțime de vârfuri $A \subset X_G$, este izometric în G [272], [273].

Menționăm că fiecare dintre grafurile claselor $\mathcal{H}_i$, $1 \leq i \leq 3$, nu conțin subgrafuri generate de tipul F (a se vedea figura 3.1).

Fie $S\mathcal{F}, S\mathcal{P}, S\mathcal{H}_1, S\mathcal{H}_2, S\mathcal{H}_3$ mulțimile de grafuri d -convex simple ce aparțin claselor $\mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{H}_i$, $1 \leq i \leq 3$, descrise mai sus.

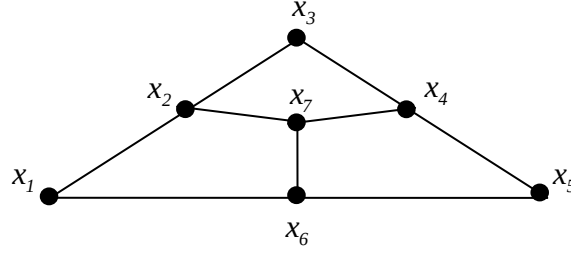


Fig. 3.1. Graful F

Caracterizarea constructivă a grafurilor ce aparțin mulțimilor $S_{\mathcal{F}}, S_{\mathcal{P}}, S_{\mathcal{H}_1}, S_{\mathcal{H}_2}, S_{\mathcal{H}_3}$ a fost făcută în lucrările [131], [133], [139], [164]:

Teorema 3.2.9. *Dacă $G = (X; U)$ este un graf local finit, atunci:*

1. $G \in \mathcal{A}$, *dacă și numai dacă $G = L(\Gamma, \Gamma_0)$, unde Γ este un graf conex fără cicluri de lungimea trei, iar Γ_0 este atomul lui Γ ;*
2. $G \in S_{\mathcal{F}}$, *dacă și numai dacă $G = L(\Gamma, \Gamma_0)$, unde $G \in \mathcal{F}$, iar Γ_0 este atomul lui Γ ;*
3. *graful G cu un număr cel mult numărabil de vârfuri aparține clasei $S_{\mathcal{P}}$, dacă și numai dacă $G = L(\Gamma, \Gamma_0)$, unde Γ este un arbore, iar Γ_0 este subarborele generat de vârfurile nesuspendate din Γ ;*
4. $G \in S_{\mathcal{H}_i}$, *dacă și numai dacă $G = L(\Gamma, \Gamma_0)$, unde $\Gamma \in \mathcal{H}_i$, $i=1,2,3$, iar Γ_0 este atomul lui Γ ;*

Între clasele menționate de grafuri d -convex simple, precum rezultă din definițiile respective și teorema 3.2.9, are loc șirul de implicații:

$$S_{\mathcal{P}} \subset S_{\mathcal{H}_3} \subset S_{\mathcal{H}_2} \subset S_{\mathcal{H}_1} \subset S_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{A}.$$

Să studiem în continuare grafurile neorientate, caracterizate în teorema 3.2.9., folosind în acest scop operațiile definite în compartimentul 3.2.2. Vom arăta, mai întâi, că operația M este operație algebrică pe fiecare din cele șase clase de grafuri d -convex simple.

Din teorema 3.2.9 și operația L rezultă că grafurile claselor $S_{\mathcal{F}}, S_{\mathcal{P}}, S_{\mathcal{H}_1}, S_{\mathcal{H}_2}, S_{\mathcal{H}_3}, \mathcal{A}$ au cel puțin câte o pereche de vârfuri copii. Prin urmare, asupra oricăror două grafuri ce aparțin uneia dintre clasele menționate putem aplica operația M . Operația respectivă posedă proprietăți importante, examinate în [164]. Următoarea teoremă indică modul de interacțiune a grafurilor fiecărei clase în parte, prin intermediul operației M .

Teorema 3.2.10. *Pentru oricare două grafuri local finite G_1 și G_2 sunt adevărate afirmațiile:*

1. *dacă $G_1, G_2 \in \mathcal{A}$, atunci $G = M(G_1, G_2) \in \mathcal{A}$;*
2. *dacă $G_1, G_2 \in S_{\mathcal{F}}$, atunci $G = M(G_1, G_2) \in S_{\mathcal{F}}$;*

3. dacă $G_1, G_2 \in \mathcal{S}\mathcal{H}_i$, atunci $G = M(G_1, G_2) \in \mathcal{S}\mathcal{H}_i, i = 1, 2, 3$;
4. dacă $G_1, G_2 \in \mathcal{S}\mathcal{F}$, atunci $G = M(G_1, G_2) \in \mathcal{S}\mathcal{F}$;
5. dacă G_1, G_2 sunt două grafuri d -convex simple bipartite, în care există câte o pereche de vârfuri copii, atunci $G = M(G_1, G_2)$ este de asemenea d -convex simplu și bipartit.

Demonstrație:

1. Fie $G_1, G_2 \in \mathcal{A}$. Din modul de definire a clasei $\mathcal{A}$ rezultă că atât în graful G_1 , cât și în graful G_2 , fiecare vârf este dominat de un altul. Alegem o pereche de vârfuri copii x_1, x_2 din G_1 , și o pereche de vârfuri copii y_1, y_2 din G_2 . Considerăm graful $G = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}^{}(G_1, G_2)$ format în conformitate cu cele descrise anterior. Fie că în urma contopirii vârfurilor x_1 cu y_1 și x_2 cu y_2 , în G se formează două vârfuri noi z_1 și z_2 , respectiv. Pentru aceste vârfuri sunt adevărate următoarele două relații:

$$\begin{aligned}\Gamma_G(z_1) &= \Gamma_{G_1}(x_1) \cup \Gamma_{G_2}(y_1); \\ \Gamma_G(z_2) &= \Gamma_{G_1}(x_2) \cup \Gamma_{G_2}(y_2).\end{aligned}$$

Cum x_1, x_2 și y_1, y_2 sunt perechi de vârfuri copii, rezultă că:

$$\Gamma_G(z_1) = \Gamma_G(z_2)$$

Astfel, z_1, z_2 sunt vârfuri copii în G , deci putem considera că ele se domină reciproc.

Fie $v \in X_G$ un vârf arbitrar distinct de vârfurile z_1, z_2 . În acest caz sau $v \in X_{G_1}$ sau $v \in X_{G_2}$. Fie că $v \in X_{G_1}$ (cazul $v \in X_{G_2}$ se demonstrează în mod analogic). Deoarece $G_1 \in \mathcal{A}$, rezultă că vârfurile v are în graful G_1 un dominant w . Dacă w nu coincide în G_1 cu nici unul dintre vârfurile x_1 sau x_2 , atunci w este dominant pentru v și în graful G , iar dacă nu coincide cu unul dintre vârfurile x_1 sau x_2 , atunci în graful G dominant pentru vârfurile v este z_1 sau z_2 . Astfel am obținut că orice vârf $v \in X_G$ are un vârf dominant în G . Deci $G = M(G_1, G_2) \in \mathcal{A}$.

2. Fie $G_1, G_2 \in \mathcal{S}\mathcal{F}$. Conform teoremei 3.2.9 există două grafuri $\Gamma^1, \Gamma^2 \in \mathcal{F}$, încât au loc egalitățile $G_1 = L(\Gamma^1, \Gamma_0^1)$ și $G_2 = L(\Gamma^2, \Gamma_0^2)$. Examinăm graful $G = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}^{}(G_1, G_2)$ construit în conformitate cu cele descrise anterior.

Fără a pierde din generalitate, putem considera că $x_1 \in X_{\Gamma^1}$, iar $x_2 \in X_{\Gamma_0^1}$. Într-adevăr, vârfurile x_1 și x_2 nu pot aparține, simultan, mulțimii $X_{\Gamma_0^1}$, deoarece aceasta este o mulțime de vârfuri dominantă minimă, iar x_1, x_2 sunt vârfuri copii. Dacă vârfurile x_1 și x_2 aparțin mulțimii $X_{\Gamma_0^1}$, atunci în Γ_0^1 există vârfurile x_3 , care este din aceeași clasă de echivalență cu x_1 și x_2 . În acest

caz, în calitate de atom al grafului Γ^1 se consideră graful care diferă de Γ_0^1 printr-un singur vârf, și anume, în loc de x_3 în atomul nou participă vârful x_2 . Vom păstra aceeași notație Γ_0^1 pentru atomul nou. Raționamente analoage permit să se considere că $y_1 \in X_{\Gamma^2}$ și $y_2 \in X_{\Gamma_0^2}$.

Astfel, obținem că în graful $G = M_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(G_1, G_2)$, subgraful Γ^1 este unit cu Γ^2 , în urma contopirii vârfurilor x_1 cu y_1 , iar Γ_0^1 este unit cu Γ_0^2 , în urma contopirii vârfurilor x_2 cu y_2 . Fie Γ subgraful din $G = M_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(G_1, G_2)$ generat de submulțimea de vârfuri $X_{\Gamma^1} \cup X_{\Gamma^2}$, iar Γ_0 – subgraful generat de mulțimea de vârfuri $X_{\Gamma_0^1} \cup X_{\Gamma_0^2}$. Din modul de construire a grafurilor Γ și Γ_0 obținem că Γ_0 este atom pentru Γ și $G = M_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(L(\Gamma^1, \Gamma_0^1), L(\Gamma^2, \Gamma_0^2)) = L(\Gamma, \Gamma_0)$.

În aceste condiții, pentru a demonstra teorema, e suficient de arătat, conform teoremei 3.2.9, că $\Gamma \in \mathcal{F}$. Într-adevăr, graful Γ nu conține cicluri de lungimea trei, deoarece grafurile Γ^1 și $\Gamma^2 \in \mathcal{F}$ nu conțin astfel de cicluri, iar în urma contopirii vârfurilor x_1 și y_1 cicluri noi nu se formează. De asemenea, Γ^1 și Γ^2 nu conțin subgrafuri de tipul F , deoarece ele nu conțin astfel de subgrafuri, iar în urma contopirii vârfurilor x_1 și y_1 toate subgrafurile noi formate au un punct de articulație $x_1 = y_1$, deci nu pot conține F . Astfel obținem că $\Gamma \in \mathcal{F}$. De aici rezultă egalitatea $G = M(G_1, G_2) \in S\mathcal{F}$.

3. Fie $G_1, G_2 \in S\mathcal{H}_i$. Conform teoremei 3.2.9 există două grafuri $\Gamma^1, \Gamma^2 \in \mathcal{H}_i$, încât $G_1 = L(\Gamma^1, \Gamma_0^1)$ și $G_2 = L(\Gamma^2, \Gamma_0^2)$. Examinăm graful $G = M_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(G_1, G_2)$ construit în conformitate cu cele descrise anterior.

Raționamente analoage punctului precedent, permit să considerăm că $x_1 \in X_{\Gamma^1}, x_2 \in X_{\Gamma_0^1}$ și $y_1 \in X_{\Gamma^2}, y_2 \in X_{\Gamma_0^2}$. De asemenea, dacă notăm prin Γ subgraful din $G = M_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(G_1, G_2)$, generat de submulțimea de vârfuri $X_{\Gamma^1} \cup X_{\Gamma^2}$, iar prin Γ_0 – subgraful generat de mulțimea de vârfuri $X_{\Gamma_0^1} \cup X_{\Gamma_0^2}$, atunci Γ_0 este atom pentru Γ și are loc egalitatea:

$$G = M_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(L(\Gamma^1, \Gamma_0^1), L(\Gamma^2, \Gamma_0^2)) = L(\Gamma, \Gamma_0).$$

În aceste condiții, pentru a demonstra afirmația teoremei, e suficient de arătat că, $G = M(G_1, G_2) \in S\mathcal{H}_i, i = 1, 2, 3$, conform teoremei 3.2.9 (ceea ce va însemna că graful examinat este d -convex simplu). Examinăm următoarele trei cazuri:

a) $i = 1$, adică $\Gamma \in \mathcal{H}_1$. În acest caz graful Γ conține numai cicluri izometrice de lungimea patru, deoarece grafurile $\Gamma^1, \Gamma^2 \in \mathcal{H}_1$ conțin astfel de cicluri, iar în rezultatul contopirii

vârfurilor x_1 și y_1 cicluri noi nu se formează. Deci $\Gamma \in \mathcal{H}_1$ și, prin urmare, $G = M(G_1, G_2) \in S\mathcal{H}_1$;

b) $i = 2$, adică $\Gamma \in \mathcal{H}_2$. În acest caz graful Γ conține numai cicluri generate de lungimea patru, deoarece grafurile $\Gamma^1, \Gamma^2 \in \mathcal{H}_2$ conțin astfel de cicluri, iar în rezultatul contopirii vârfurilor x_1 și y_1 cicluri noi nu se formează. Din aceleași considerente, graful Γ este și bipartit. Deci $\Gamma^2 \in \mathcal{H}_2$ și, prin urmare, $G = M(G_1, G_2) \in S\mathcal{H}_2$;

c) $i = 3$, adică $\Gamma \in \mathcal{H}_3$. În acest caz graful Γ nu conține cicluri de lungimea trei, deoarece grafurile $\Gamma^1, \Gamma^2 \in \mathcal{H}_3$ nu conțin astfel de cicluri și ca rezultat al contopirii vârfurilor x_1 și y_1 cicluri noi nu se formează. De asemenea, ele conțin doar subgrafuri generate conexe care sunt izometrice, dat fiind faptul că grafurile Γ^1 și Γ^2 conțin astfel de subgrafuri, iar în urma contopirii vârfurilor x_1 și y_1 toate subgrafurile nou formate au un punct de articulație $z = x_1 = y_1$. Deci, dacă $v, w \in \Gamma^1$, atunci $d_\Gamma(v, w) = d_{\Gamma^1}(v, w)$. În mod analogic obținem că dacă $v, w \in \Gamma^2$, atunci $d_\Gamma(v, w) = d_{\Gamma^2}(v, w)$, iar dacă $v \in \Gamma^1, w \in \Gamma^2$, atunci toate lanțurile de la v la w trec prin vârful z și deci are loc egalitatea $d_\Gamma(v, w) = d_{\Gamma^1}(v, z) + d_{\Gamma^2}(z, w)$.

Din aceste relații rezultă că graful Γ conține numai subgrafuri generate conexe izometrice. Deci $\Gamma \in \mathcal{H}_3$ și, prin urmare, $G = M(G_1, G_2) \in S\mathcal{H}_3$.

4. Fie $G_1, G_2 \in S\mathcal{P}$. Conform teoremei 3.2.9, există doi arbori Γ^1 și Γ^2 , încât $G_1 = L(\Gamma^1, \Gamma_0^1)$ și $G_2 = L(\Gamma^2, \Gamma_0^2)$. Examinăm graful $G = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}^{\Gamma^1, \Gamma^2}(G_1, G_2)$ construit în conformitate cu cele descrise anterior.

Raționamente analoage punctelor precedente ale acestei teoreme, permit a considera că $x_1 \in X_{\Gamma^1}, x_2 \in X_{\Gamma_0^1}$ și $y_1 \in X_{\Gamma^2}, y_2 \in X_{\Gamma_0^2}$. În graful $G = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}^{\Gamma^1, \Gamma^2}(G_1, G_2)$ notăm prin Γ subgraful generat de submulțimea de vârfuri $X_{\Gamma^1} \cup X_{\Gamma^2}$, iar prin Γ_0 subgraful generat de mulțimea de vârfuri $X_{\Gamma_0^1} \cup X_{\Gamma_0^2}$. Atunci Γ_0 este atom pentru Γ și are loc egalitatea:

$$G = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}^{\Gamma^1, \Gamma^2}(L(\Gamma^1, \Gamma_0^1), L(\Gamma^2, \Gamma_0^2)) = L(\Gamma, \Gamma_0).$$

În aceste condiții, e suficient de arătat, conform teoremei 3.2.9, că graful Γ este un arbore. Într-adevăr, graful Γ nu conține cicluri, fiindcă grafurile Γ^1 și Γ^2 , fiind arbori, nu conțin cicluri, iar ca rezultat al contopirii vârfurilor x_1 și x_2 cicluri noi nu se formează. Deci graful Γ este un graf conex și fără cicluri, adică este un arbore. Prin urmare, se obține că graful $G = M(G_1, G_2) \in S\mathcal{P}$;

5. Fie G_1 și G_2 două grafuri d -convex simple bipartite, care satisfac condițiile teoremei. Examinăm graful $G = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}^{x_1=y_1} (G_1, G_2)$ construit în conformitate cu cele descrise anterior. Graful G este d -convex simplu, deoarece M este o operație algebrică pe mulțimea grafurilor d -convex simple $\mathcal{G}$ (a se vedea teorema 3.2.7). Rămâne să demonstrăm că G este un graf bipartit. Grafurile G_1 și G_2 sunt bipartite, deci mulțimile lor de vârfuri pot fi divizate în submulțimi disjuncte și intern stabile $X_{G_1} = V_1 \cup V_2$ și $X_{G_2} = W_1 \cup W_2$, respectiv. Cum perechile de vârfuri x_1, x_2 și y_1, y_2 sunt perechi de vârfuri copii, rezultă că $x_1 \sim x_2$ și $y_1 \sim y_2$. Mai mult, $d_{G_1}(x_1, x_2) = 2$ și $d_{G_2}(y_1, y_2) = 2$. Toate acestea implică faptul că perechea de vârfuri x_1, x_2 aparține uneia și aceleiași partiții de vârfuri a grafului G_1 , de exemplu mulțimii V_1 , iar perechea de vârfuri y_1, y_2 aparține uneia și aceleiași partiții de vârfuri a grafului G_2 , de exemplu mulțimii W_1 . Prin urmare, în graful G mulțimile $V_1 \cup W_1$ și $V_2 \cup W_2$ sunt intern stabile, iar $X_G = (V_1 \cup W_1) \cup (V_2 \cup W_2)$.

Prin urmare, graful $G = M(G_1, G_2)$ este d -convex simplu bipartit.

Referitor la operația de multiplicare, definirea în compartimentul 3.2.2, este adevărată următoarea

Teorema 3.2.11. *Pentru oricare graf local finit $G = (X; U)$ sunt adevărate afirmațiile:*

1. *dacă $G \in \mathcal{A}$, atunci $G^{++} \in \mathcal{A}$;*
2. *dacă $G \in S\mathcal{F}$, atunci $G^{++} \in S\mathcal{F}$;*
3. *dacă $G \in S\mathcal{H}_i$, atunci $G^{++} \in S\mathcal{H}_i, i = 1, 2, 3$;*
4. *dacă G este un graf d -convex simplu bipartit, atunci G^{++} este de asemenea d -convex simplu și bipartit.*

Demonstrație. Fie G un graf finit, ce aparține uneia din clasele $\mathcal{A}, S\mathcal{F}, S\mathcal{H}_i, i = 1, 2, 3$, sau mulțimii de grafuri d -convex simple bipartite. În conformitate cu cele descrise anterior, se formează graful G^{++} , în care vârful arbitrar $v \in X_G$ are o copie nouă $\tilde{v}$. Conform teoremei 3.2.8, graful G^{++} de asemenea este d -convex simplu. Prin urmare rămâne să demonstrăm că, graful G^{++} aparține aceleiași clase, căreia îi aparține graful ce stă la baza formării lui G^{++} .

1. Fie $G \in \mathcal{A}$, deci G este un graf în care orice vârf este dominat de un altul. Graful G^{++} , de asemenea, nu conține vârfuri nedominate, deoarece vârfurile v și $\tilde{v}$ se domină reciproc, iar restul vârfurilor au rămas dominate de aceleași vârfuri, de care erau dominate în graful G . Prin urmare $G^{++} \in \mathcal{A}$.

2. Fie $G \in S\mathcal{F}$, deci G este un graf ce nu conține triunghiuri și subgrafuri generate de tipul F (a se vedea figura 3.1). Graful G^{++} , de asemenea, nu conține nici triunghiuri (deoarece este d -convex simplu), nici subgrafuri de tipul F . Într-adevăr, dacă presupunem că graful G^{++} conține un subgraf generat izomorf cu graful F , atunci acest subgraf ar fi obligat să conțină vârful nou $\tilde{v}$, deci dacă în acest subgraf se înlocuiește vârful $\tilde{v}$ cu copia sa v , se obține un subgraf generat al grafului inițial G , izomorf cu graful F , ceea ce contravine condiției $G \in S\mathcal{F}$. Prin urmare $G^{++} \in S\mathcal{F}$.

3. Fie $G \in S\mathcal{H}_i, i = 1, 2, 3$. Se analizează fiecare caz în parte.

a) $i = 1$. Deoarece $G \in S\mathcal{H}_1$, rezultă că acest graf conține numai cicluri izometrice de lungimea patru. În urma multiplicării vârfului v , toate ciclurile noi formate, ce trec prin $\tilde{v}$, sunt izomorfe aceluiași cicluri din G , dar care trec prin v . Prin urmare $G^{++} \in S\mathcal{H}_1$;

b) $i = 2$. Deoarece $G \in S\mathcal{H}_2$, rezultă că acest graf conține numai cicluri generate de lungimea patru. În urma multiplicării vârfului v , toate ciclurile noi formate, ce trec prin $\tilde{v}$, sunt izomorfe aceluiași cicluri din G , dar care trec prin v . Prin urmare $G^{++} \in S\mathcal{H}_2$;

c) $i = 3$. Deoarece $G \in S\mathcal{H}_3$, rezultă că grafurile G și G^{++} nu conțin cicluri de lungimea trei, fiind grafuri d -convex simple. De asemenea ele conțin doar subgrafuri generate conexe care sunt izometrice, deoarece fiecare subgraf conex nou, generat de o submulțime care conține vârful $\tilde{v}$, este izomorf aceluiași subgraf din G , în care vârful $\tilde{v}$ este înlocuit prin copia sa v . Prin urmare $G^{++} \in S\mathcal{H}_3$.

4. Fie G un graf d -convex simplu și bipartit. Deci G nu conține cicluri de lungime impară. Graful G^{++} de asemenea nu conține cicluri de lungime impară deoarece, ca rezultat al multiplicării vârfului v , toate ciclurile nou formate ce trec prin $\tilde{v}$ sunt izomorfe aceluiași cicluri, din G , dar care trec prin v . Prin urmare G^{++} este un graf bipartit.

Remarca 3.1.2. În virtutea afirmației 4 din teorema 3.2.11, pentru un graf planar d -convex simplu are loc același rezultat, deoarece un astfel de graf este și bipartit.

Raza și diametrul în grafurile d -convex simple $L(G, G_0)$

Ținând cont de cele examinate în compartimentul 3.2.1, pentru orice graf local finit conex putem construi graful $L(G, G_0)$, unde G_0 este atomul lui G .

În $L(G, G_0)$ alegem un vârf arbitrar $v \in X_{L(G, G_0)}$ și notăm:

$$v^0 = \begin{cases} v, & \text{dacă } v \in X_G, \\ \tilde{v}, & \text{dacă } v \in X_{G_0}, \end{cases}$$

unde $\tilde{v}$ este copia vârfului v .

Din construcția atomului G_0 , se cunoaște că dacă $v \in X_{G_0}$, atunci $\tilde{v} \in X_G$. Prin urmare pentru orice vârf $v \in X_{L(G,G_0)}$ rezultă că $v^0 \in X_G$.

Teorema 3.2.12. *Dacă, G este un graf conex ce nu conține cicluri de lungimea trei, iar $u, v \in X_{L(G,G_0)}$ sunt două vârfuri oarecare din $L(G,G_0)$, atunci:*

$$d_{L(G,G_0)}(u, v) = d_G(u^0, v^0).$$

Demonstrație: Fie u și v două vârfuri din $L(G,G_0)$. Graful G este subgraf al grafului $L(G,G_0)$, ceea ce implică inegalitatea $d_{L(G,G_0)}(u, v) \leq d_G(u^0, v^0)$.

Dacă $d_{L(G,G_0)}(u, v) < d_G(u^0, v^0)$, iar l este un lanț de lungime minimă în graful $L(G,G_0)$, ce unește vârfurile u și v ,

$$l = (u = x_1, x_2, \dots, x_t = v),$$

atunci în graful G , există lanțul

$$l^0 = (u^0 = x_1^0, x_2^0, \dots, x_t^0 = v^0),$$

care este de aceeași lungime cu lanțul l . Astfel s-a ajuns la o contradicție, ceea ce înseamnă că presupunerea e greșită. Prin urmare $d_{L(G,G_0)}(u, v) = d_G(u^0, v^0)$.

Fie $G = (X; U)$ un graf neorientat, iar $x \in X$ un vârf arbitrar din G . În cele ce urmează vom apela la noțiunile de excentricitate $l(x)$ a vârfului x , rază și diametrul ale grafului, notate prin $r[G], d[G]$ respectiv, și de vârf central, definite în [264]. Mulțimea tuturor vârfurilor centrale ale unui graf G va fi notată prin $c[G]$.

Teorema 3.2.13. *Dacă G este un graf conex ce nu conține cicluri de lungimea trei, iar $L(G,G_0)$ graful d -convex simplu obținut din G , atunci sunt adevărate egalitățile:*

$$r[L(G,G_0)] = r[G];$$

$$d[L(G,G_0)] = d[G];$$

$$c[L(G,G_0)] = c[G] \cup \{x \in G_0 : x \text{ este copia unui vârf din } c[G]\}.$$

Demonstrație. Fie $G = (X_G; U_G)$ un graf conex cu mulțimea de vârfuri $X_G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, iar $L(G,G_0)$ – graful d -convex simplu, obținut din G , cu mulțimea de vârfuri $X_{L(G,G_0)} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

Pentru a demonstra afirmația teoremei, vom demonstra mai întâi egalitatea:

$$e_{L(G,G_0)}(v) = e_G(v^0), \forall v \in X_{L(G,G_0)} \quad (3.10)$$

Fie $v \in X_{L(G,G_0)}$, iar $v^0 \in X_G$ – vârful definit la începutul paragrafului. Atunci sunt adevărate egalitățile:

$$\begin{aligned} e_{L(G,G_0)}(v) &= \max\{d_{L(G,G_0)}(v, x_1), d_{L(G,G_0)}(v, x_2), \dots, d_{L(G,G_0)}(v, x_n), d_{L(G,G_0)}(v, y_1), \\ d_{L(G,G_0)}(v, y_2), \dots, d_{L(G,G_0)}(v, y_k), \dots\} &= \max\{d_{L(G,G_0)}(v^0, x_1), d_{L(G,G_0)}(v^0, x_2), \dots, d_{L(G,G_0)}(v^0, x_n), \\ d_{L(G,G_0)}(v^0, y_1), d_{L(G,G_0)}(v^0, y_2), \dots, d_{L(G,G_0)}(v^0, y_k), \dots\} &= e_G(v^0) \end{aligned}$$

La efectuarea acestor transformări a fost utilizată teorema 3.2.12. Acum cu ajutorul relației (3.10) se vor demonstra cele trei relații din teoremă.

$$\begin{aligned} 1. \quad r[L(G, G_0)] &= \min\{e_{L(G,G_0)}(x_1), \dots, e_{L(G,G_0)}(x_n), e_{L(G,G_0)}(y_1), \dots, e_{L(G,G_0)}(y_k)\} = \\ &= \min\{e_G(x_1), e_G(x_2), \dots, e_G(x_n), e_G(y_1^0), e_G(y_2^0), \dots, e_G(y_k^0)\} = \\ &= \min\{e_G(x_1), e_G(x_2), \dots, e_G(x_n)\} = r[G]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad d[L(G, G_0)] &= \max\{e_{L(G,G_0)}(x_1), \dots, e_{L(G,G_0)}(x_n), e_{L(G,G_0)}(y_1), \dots, e_{L(G,G_0)}(y_k)\} = \\ &= \max\{e_G(x_1), e_G(x_2), \dots, e_G(x_n), e_G(y_1^0), e_G(y_2^0), \dots, e_G(y_k^0)\} = \\ &= \max\{e_G(x_1), e_G(x_2), \dots, e_G(x_n)\} = d[G]. \end{aligned}$$

3. Fie $y \in c[L(G, G_0)]$ un vârf central în $L(G, G_0)$. Atunci $e_{L(G,G_0)}(y) = r[L(G, G_0)]$, ceea ce, împreună cu punctele precedente, implică relația $e_G(y^0) = r[G]$. Sunt posibile două cazuri:
a) $y \in G$. Atunci $y^0 = y$, de unde avem $e_G(y) = r[G]$, adică $y \in c[G]$; b) $y \in G_0$. Astfel, rezultă că pentru y există vârful copie y^0 încât:

$$y^0 \in c[G], \text{ deci } y \in \{x \in G_0 : x \text{ este copia unui vârf din } c[G]\}.$$

În orice caz se obține:

$$y \in c[G] \cup \{x \in G_0 : x \text{ este copia unui vârf din } c[G]\},$$

ceea ce implică relația:

$$c[L(G, G_0)] \subseteq c[G] \cup \{x \in G_0 : x \text{ este copia unui vârf din } c[G]\}.$$

Fie acum $y \in c[G] \cup \{x \in G_0 : x \text{ este copia unui vârf din } c[G]\}$. Aceasta înseamnă că are loc unul din două cazuri:

$$(a) \quad y \in c[G]. \text{ Atunci } e_G(y) = r[G]. \text{ Această egalitate implică } e_{L(G,G_0)}(y) = r[L(G, G_0)].$$

Cum $y \in [G]$, rezultă că $y = y^0$. Astfel, $e_{L(G,G_0)}(y) = r[L(G, G_0)]$, de unde $y \in c[L(G, G_0)]$.

(b) $y \in \{x \in G_0 : x \text{ este copia unui vârf din } c[G]\}$. Prin urmare $y^0 \in c[G]$ sau $e_G(y^0) = r[G]$, ceea ce, conform raționamentelor precedente, implică $y^0 \in c[L(G, G_0)]$. Deoarece vârfurile y, y^0 sunt vârfuri copii în $L(G, G_0)$, obținem $y \in c[L(G, G_0)]$. Astfel, constatăm că este adevărată incluziunea inversă:

$$c[L(G, G_0)] \supseteq c[G] \cup \{x \in G_0 : x \text{ este copia unui vârf din } c[G]\}.$$

Din cele examinate rezultă că și cea de-a treia egalitate din teorema 3.2.13 este adevărată.

Amplasarea grafurilor d -convex simple planare în spațiul R^3

Conform celor descrise mai sus, un graf conex $G = (X, U)$ poate fi asociat cu un spațiu metric discret (X_G, d) , unde $d(x, y)$ reprezintă lungimea minimă a lanțurilor cu extremitățile în x și y . De rând cu spațiul (X_G, d) vom examina un alt spațiu X' , în care este definită o metrică cu valori întregi ρ . Este cunoscut faptul că independent de metrica ρ , întotdeauna există un graf $G = (X, U)$ astfel încât $X' \subseteq X$ și distanța dintre vârfurile submulțimii X' în G coincide cu distanța ρ a acelorași elemente în spațiul X' [280]. În acest caz se spune că metrica ρ este *scufundată* în graful G sau că metrica ρ este *realizată* în graful G . Mai multe rezultate, referitoare la realizarea metricii în grafiuri speciale, sunt expuse în lucrările [281], [282].

În legătură cu cele spuse, prezintă interes și studierea problemei inverse. Se spune că graful $G = (X, U)$ este *scufundat (realizat, amplasat)* în spațiul metric $(X'; \rho)$, dacă există o aplicație $\varphi : X \rightarrow X'$, astfel încât orice două vârfuri adiacente x, y în G au în calitate de imagini două elemente $\varphi(x)$ și $\varphi(y)$ din X' care sunt situate unul de altul la distanța $\rho = 1$. Cu alte cuvinte, vârfurile adiacente ale grafului G se transformă în elemente situate la distanța unu ale spațiului X' . Dimensiunea minimală a spațiului Euclidian, în care poate fi scufundat graful G se numește *dimensiunea de amplasare (scufundare)* a grafului G și se notează prin $gim G$. Problema în cauză poate fi formulată în modul următor: pentru un graf $G = (X, U)$ să se determine dimensiunea de scufundare a lui. Evident, în legătură cu această problemă se poate vorbi și despre elaborarea unor algoritmi, care ar permite calcularea dimensiunii de scufundare a grafiurilor neorientate.

În cazul unui graf arbitrar, problema formulată este destul de complicată. Diverse aspecte ale acestora au fost examinate de către mai mulți matematicieni, iar unele rezultate pot fi găsite în lucrările [283]-[286]. În continuare, vom aduce un rezultat ce ține de scufundarea grafurilor d -convex simple planare în spațiul euclidian R^3 .

Fie T un arbore cu cel puțin trei vârfuri și T_0 un subgraf al lui T , care constă din toate vârfurile și muchiile lui T , cu excepția celor suspendate.

Așadar, fiecare vârf nesuspendat x din T , are în T_0 un singur vârf corespondent $\tilde{x}$ și fiecare vârf din T_0 are un singur vârf corespondent lui în T . Fie $L(T, T_0)$ graful d -convex simplu obținut din T și T_0 . În graful $L(T, T_0)$ fiecare vârf de grad egal cu cel puțin trei are un singur vârf copie. Mai mult, I acest graf nu are vârfuri suspendate. Conform teoremei 3.5.3, punct 4, un graf G cu cel puțin trei vârfuri este din P dacă și numai dacă $G = L(T, T_0)$. Astfel teorema 3.5.3 determină structura grafurilor d -convex simple planare, structură care va fi utilizată în procesul căutării dimensiunii de scufundare a acestor grafuri.

Fie, acum, $G = (X, U)$, $\text{card}X \geq 5$, un graf d -convex simplu planar. În acest caz G are cel puțin un vârf x de grad cel puțin trei, care are o copie $\tilde{x}$. Fie $\Gamma(x) = \Gamma(\tilde{x}) = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_\rho\}$, $\rho \geq 3$. Dacă s-ar presupune că $\text{gim} G = 2$, atunci elementele din mulțimea $\Gamma(x)$ ar fi plasate pe un cerc de rază 1 cu centrul într-un punct, care ar fi corespondentul vârfului x . Într-adevăr din condiție, pentru a scufunda un graf într-un spațiu, în cazul dat în plan, care este spațiul Euclidian cu dimensiunea 2, este nevoie ea vârfurile adiacente să se transforme în puncte ale spațiului la distanța 1, iar toate vârfurile din $\Gamma(x)$ sunt adiacente lui x . Pe de altă parte, din aceleași considerente, aceleași vârfuri ar trebui să se afle pe cercul de rază 1 cu centrul în punctul, care ar corespunde vârfului $\tilde{x}$. Aceasta înseamnă că în R^2 ar trebui să se ducă două cercuri diferite, ambele de rază unu, care să se intersecteze în ρ puncte, $\rho \geq 3$, ceea ce este imposibil. Astfel s-a obținut că $\text{gim}G \geq 3$. Să arătăm că $\text{gim}G = 3$.

Teorema 3.2.14. *Dacă $G = (X, U)$, este un graf d -convex simplu planar atunci $\text{gim}G = 3$.*

Demonstrație. Din motive evidente, considerăm $\text{card}X \geq 5$. Conform teoremei 3.2.9, pentru G există un arbore T , încât $G = L(T, T_0)$. Vom demonstra teorema prin metoda inducției matematice după numărul de vârfuri $n = \text{card}X \geq 5$.

Fie $n = 5$. Unicul graf d -convex simplu planar cu 5 vârfuri este graful bipartit complet graf $K_{2,3}$. Alegem în R^3 două puncte A, B la o distanță arbitrară, dar mai mică decât 2. Construim două sfere de raza unu, cu centrele în A și B . Intersecția acestor sfere este un cerc C . Fixăm pe cercul C trei puncte D_1, D_2, D_3 . Vârfurile copii x și $\tilde{x}$ de grad 3 ale grafului $K_{2,3}$ le plasăm în punctele A și B , iar celelalte – în D_1, D_2, D_3 . Ducem segmente ce unesc x și $\tilde{x}$ cu y_1, y_2, y_3 respectiv, lungimea cărora este 1. Astfel s-a obținut amplasarea acestui graf în R^3 .

Să presupune, acum, că afirmația teoremei este adevărată pentru orice graf d -convex simplu planar G cu $n \leq k, k \geq 5$ vârfuri.

Examinăm cazul $n = k + 1$. Notăm prin $\deg_T x$ și $\deg_G x$ gradul unui vârf x în arborele T și în graful $G = L(T, T_0)$, respectiv. Fie x, y două vârfuri adiacente din T , încât $\deg_T x = 1$. Atunci $\deg_G x = 2$. Atunci, deoarece graful G are cel puțin 5 vârfuri, rezultă că $\deg_T y \geq 2$. Examinăm următoarele două cazuri.

I. $\deg_T y \geq 3$. Dacă se elimină vârful suspendat x din T , atunci se obține un arbore T' , în care y nu este un vârf suspendat. Prin urmare arborele T'_0 trebuie să coincidă cu arborele T_0 . Conform teoremei 3.2.9, graful $G' = L(T', T_0)$ este d -convex simplu și planar. Deoarece G' are exact cu un vârf mai puțin decât G , în baza inducției matematice, se obține că $\text{gim}G = 3$. Fie $\tilde{y}$ copia vârfului y și imaginea lui în T_0 . Atunci în G' aceste două vârfuri sunt, de asemenea, copii unul pentru celălalt și deci vecinătățile lor coincid. Fie $\Gamma(y) = \{w_1, w_2, \dots, w_\rho\} = \Gamma(\tilde{y}), \rho \geq 3$. În urma scufundării grafului G' în R^3 , vârfurile din $\Gamma(y)$ sunt plasate pe cercul, care se află la intersecția celor două sfere de rază 1, cu centrele în y și $\tilde{y}$. Cum pe acest cerc se conține o infinitate de puncte, iar grafurile studiate sunt finite, atunci aici poate fi găsit un punct, în care nu se află nici unul dintre vârfurile grafului G' . Dacă se plasează în acest punct vârful x , atunci distanțele de la el spre y și y' , care sunt centrele sferelor, sunt egale cu 1. În urma acestei proceduri s-a obținut o amplasare a grafului inițial G în R^3 , deci rezultă că $\text{gim}G = 3$.

II. $\deg_T y = 2$. Așadar, în T există un vârf $z \neq x$, care este adiacent cu y . Cum G are cel puțin 5 vârfuri, rezultă că $\deg_T z \geq 2$. Aceasta înseamnă că arborele T_0 conține vârfurile $\tilde{y}$ și $\tilde{z}$, care sunt vârfuri copii și imagini ale vârfurilor y și z . Deci, în graful G sunt adevărate relațiile:

$$\Gamma(y) = \Gamma(\tilde{y}), \text{card}\Gamma(y) \geq 3,$$

$$\Gamma(z) = \Gamma(\tilde{z}), \text{card}\Gamma(z) \geq 3.$$

În urma eliminării vârfului x din T , se obține un arbore nou T' , în care y este un vârf suspendat ($\deg_{T'} y = 1$). În acest caz arborele T'_0 , care se obține din T' în urma eliminării tuturor vârfurilor suspendate, diferă de arborele T_0 printr-un singur vârf $\tilde{y}$. Adică $T' = T - x, T'_0 = T_0 - \tilde{y}$. Graful $G' = L(T', T_0)$ are cu două vârfuri mai puțin decât graful G și deci din presupunerea inducției matematice $\text{gim}G' = 3$. Deoarece $\text{card}\Gamma(z) \geq 3$, atunci în urma amplasării grafului G' în R^3 , mulțimea de vârfuri $\Gamma(z)$ este plasată pe cercul, care se află la intersecția celor două sfere de rază 1 cu centrele în z și $\tilde{z}$. Pe acest cerc poate fi plasat, de

asemenea, și vârful $\tilde{y}$ (vârful y este deja pe acest cerc, ca vârf al grafului G'). Cum y și $\tilde{y}$ sunt plasate pe un cerc de diametrul mai mic decât 2, intersecția a două sfere unitare cu centrele în y și $\tilde{y}$ reprezintă un cerc nou, pe care poate fi plasat vârful x . În urma acestei proceduri se obține o amplasare a grafului inițial G în R^3 , ceea ce înseamnă că $\text{gim}G = 3$. ■

3.3. Convexitatea în grafurile orientate

În acest paragraph vom examina, noțiunea de convexitate în cazul grafurilor orientate. Vom considera că grafurile nu conțin bucle și arce multiple. Un graf orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$ poate fi considerat drept complex 2-dimensional de relații multi-are $\mathfrak{R}^2 = (R^1 = X, R^2)$. Să vedem, în ce măsură rezultatele obținute pentru structurile neorientate pot fi extinse și asupra structurilor orientate. Vom începe cu definirea și studierea mulțimilor d -convexe.

Mulțimi d -convexe în grafuri orientate

Graful orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$ se numește tare conex, sau conex forte, dacă pentru oricare două vârfuri $x, y \in X$ există cel puțin un drum ce pornește din vârful x spre vârful y și cel puțin un drum ce pornește din vârful y spre vârful x (ne vom folosi de terminologia clasică introdusă de către C. Berge pentru grafurile orientate în lucrarea [302]). Fie $D = (x = z_0, z_1, \dots, z_p = y)$ un drum ce pornește din x spre y . În acest caz se va mai spune că drumul D leagă vârfurile x și y în ordinea indicată; x și y se numesc extremități ale lui D . Numarul p se numește lungime a drumului

$$D = (x = z_0, z_1, \dots, z_p = y)$$

și se va scrie $l(D)=p$.

Fie $\mathcal{D}(x, y)$ familia tuturor drumurilor din $\vec{G}$ ce leagă vârfurile x și y . Lungimea celui mai scurt drum din $\mathcal{D}(x, y)$ se numește distanță dintre x și y și se notează prin $d(x, y)$. Astfel

$$d(x, y) = \min_{D \in \mathcal{D}(x, y)} \{l(D)\} .$$

În cazul când între două vârfuri $x, y \in X$ nu există nici un drum, se va considera că distanța dintre aceste vârfuri este $d(x, y)=\infty$.

Precum ușor se poate de observat, astfel introdusă noțiunea de distanță nu posedă proprietatea comutativă, adică, la general vorbind, se respect relația:

$$d(x, y) \neq d(y, x).$$

Prin urmare, în cazul grafurilor orientate, distanța definită mai sus este o funcție $d : X \times X \rightarrow N$, ce posedă doar două dintre proprietățile metricii, și anume:

1. $d(x, y) \geq 0$ pentru oricare două vârfuri $x, y \in X$ și $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$;
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, pentru oricare trei vârfuri $x, y, z \in X$.

Aceasta înseamnă că, de fapt, funcția distanței $d : X \times X \rightarrow N$ este o *pseudo-metrică* în graful orientat $\vec{G}$.

Mulțimea $\vec{< x, y >} = \{z \in X : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$ se numește *d-segment orientat* de la x spre y . Noțiunea de *d-segment orientat* $\vec{< x, y >}$ are sens doar în cazul când în graful $\vec{G}$ există cel puțin un drum ce leagă x cu y . Din aceste considerente, în continuare se vor studia doar grafuri conexe forte.

Definiția 3.3.1. Mulțimea $A \subseteq X$ se numește *d-convexă* în graful $\vec{G} = (X, \vec{U})$, dacă pentru oricare două vârfuri $x, y \in A$, luate în ordinea indicată, are loc relația $\vec{< x, y >} \subset A$.

Conform definiției 3.3.1 orice graf orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$ conține mulțimi *d-convexe*. Observăm, că într-un graf orientat orice mulțime A , pentru care $\text{card}A = 0$ sau $\text{card}A = 1$, este *d-convexă*. Aici, spre deosebire de cazul grafului neorientat, două vârfuri adiacente nu generează neapărat o mulțime convexă.

Într-un graf orientat arbitrar mulțimile $\vec{< x, y >}$ și $\vec{< y, x >}$ nu neapărat coincid. Fie A o submulțime arbitrară de vârfuri din graful $\vec{G} = (X, \vec{U})$. Conform definiției 3.3.1, dacă A este o mulțime *d-convexă*, atunci ambele *d-segmente orientate* $\vec{< x, y >}$ și $\vec{< y, x >}$ aparțin mulțimii A . Prin urmare, reuniunea $\vec{< x, y >} \cup \vec{< y, x >}$, care conține toate vârfurile cel puțin ale unui contur, ce trece prin vârfurile x și y , de asemenea, aparține mulțimii A . Ba mai mult, mulțimea $\vec{< x, y >} \cup \vec{< y, x >}$ conține vârfurile tuturor conturilor de lungime minima, care trec prin x și y .

Lema 3.3.1. Dacă A și B sunt două mulțimi *d-convexe* ale unui graf orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$, atunci intersecția lor $A \cap B$ este, de asemenea, o mulțime *d-convexă* în $\vec{G}$.

Demonstrație. Fie $\vec{G} = (X, \vec{U})$ un graf orientat, iar A și B două mulțimi *d-convexe* ale acestuia. Dacă $\text{card}(A \cap B) \leq 1$, atunci, în baza definiției 3.3.1, afirmația lemei este adevărată.

Să admitem că $\text{card}(A \cap B) \geq 2$, și fie x, y două vârfuri arbitrare din $A \cap B$. Deoarece A și B sunt mulțimi d -convexe, obținem:

$$\overrightarrow{\langle x, y \rangle} \subseteq A,$$

$$\overrightarrow{\langle x, y \rangle} \subseteq B,$$

ceea ce implică relația $\overrightarrow{\langle x, y \rangle} \subseteq A \cap B$. Deci $A \cap B$ este o mulțime d -convexă în $\vec{G}$.

Prin analogie cu varianta clasică a noțiunii de învelitoare d -convexă [60], [111], [264], în cazul grafurilor orientate se definește următoarea noțiune.

Definiție 3.3.2. *Intersecția tuturor mulțimilor d -convexe ale unui graf orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$, ce conține o submulțime de vârfuri $B \subseteq X$, se numește **învelitoare d -convexă** a mulțimii B și se notează prin **$d\text{-conv}(B)$** .*

Observăm că, definiția noțiunii de d -convexitate în cazul grafului orientat este similară cu cea a grafului neorientat.

Dacă $B \subseteq X$ este o mulțime d -convexă în $\vec{G}$, atunci $d\text{-conv}(B) = B$. Pentru o submulțime arbitrară de vârfuri definim următoarea operație:

$$P(S) = \bigcup_{x, y \in S} \overrightarrow{\langle x, y \rangle}.$$

Cu ajutorul acestei operații, învelitoarea d -convexă a unei submulțimi de vârfuri B a grafului orientat poate fi descrisă în mod iterativ, similar cazului grafului neorientat, în modul următor:

$$B_0 = B,$$

$$B_1 = \bigcup_{x, y \in B_0} \overrightarrow{\langle x, y \rangle} = P(B_0),$$

$$B_2 = \bigcup_{x, y \in B_1} \overrightarrow{\langle x, y \rangle} = P(B_1) = P(P(B_0)) = P^2(B_0) \text{ și } P(B_1) \neq B_1,$$

.....

$$B_{q-1} = \bigcup_{x, y \in B_{q-2}} \overrightarrow{\langle x, y \rangle} = P(B_{q-2}) = P^{q-1}(B_0) \text{ și } P(B_1) \neq B_1,$$

$$B_q = \bigcup_{x, y \in B_{q-1}} \overrightarrow{\langle x, y \rangle} = B_{q-1} = d\text{-conv}(B).$$

Astfel, constuirea învelitoarei convexe $d\text{-conv}(B)$ se reduce la construirea unui șir de mulțimi:

$$B = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_{q-1} = B_q,$$

unde $B_i, 1 \leq i \leq q$, se construiesc în conformitate cu aplicarea operației P , descrise anterior. În cazul grafurilor infinite, șirul, construit iterativ prin aplicarea operației respective, poate fi infinit. Atunci învelitoarea convexă a mulțimii B se obține cu ajutorul relației:

$$d - \text{conv}(B) = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i.$$

În baza definiției 3.3.2, pentru învelitoarea d -convexe obținem relațiile:

1. $d - \text{conv}(\emptyset) = \emptyset$;
2. $d - \text{conv}(\{x\}) = \{x\}$;
3. $d - \text{conv}(X) = X$;
4. $A \subseteq d - \text{conv}(A)$;
5. $d - \text{conv}(d - \text{conv}(A)) = d - \text{conv}(A)$.

În baza relațiilor menționate (1-5), se poate spune că noțiunea de d -convexitate pentru cazul grafurilor orientate se încadrează în axiomatica teoriei generale a convexității [114].

Grafuri d -convex simple orientate

În cazul grafurilor neorientate orice submulțime de vârfuri $A \neq X$, care generează un subgraf complet, precum și mulțimea tuturor vârfurilor X , sunt d -convexe. Același lucru se poate spune și în cazul grafurilor orientate. Mulțimile, care sunt d -convexe în orice graf orientat, sunt: mulțimea vidă, mulțimile alcătuite dintr-un singur vârf, mulțimile care generează un subgraf complet și mulțimea tuturor vârfurilor X . Aceasta se datorează faptului că d -convexitatea, examinată în grafurile orientate, este o generalizare a noțiunii de d -convexitate definită în paragraful 3.2 pentru grafurile neorientate, și acest lucru va fi arătat mai jos. În continuare, mulțimile menționate se vor numi mulțimi d -convexe triviale în grafurile orientate.

Definiția 3.3.3. *Graful orientat și conex forte $\vec{G} = (X, \vec{U})$ se numește **d -convex simplu** dacă nu conține mulțimi d -convexe $A \subset X$, încât $1 < \text{card}A < \text{card}X$.*

Din definiție rezultă că într-un graf d -convex simplu orientat, cu cel puțin trei vârfuri, între oricare două vârfuri poate exista doar unul dintre cele două arce posibile. Într-adevăr, dacă între două vârfuri x și y ar exista ambele arce (x, y) și (y, x) , atunci $A = \{x, y\}$ ar fi o mulțime d -convexă, ceea ce contrazice definiția grafului d -convex simplu. Această remarcă, la rândul său, înseamnă că toate grafurile d -convex simple sunt antisimetrice.

Teorema 3.3.1. *Următoarele afirmații sunt echivalente*

1. $\vec{G} = (X, \vec{U})$ este un graf d -convex simplu orientat;
2. $d - \text{conv}(\{x, y\}) = X$, pentru oricare două vârfuri distincte $x, y \in X$;
3. $d - \text{conv}(\{x, y\}) = X$, pentru oricare două vârfuri adiacente $x, y \in X$.

Demonstrație. $1 \rightarrow 2$. Pentru a demonstra afirmația teoremei, vom verifica șirul de implicații: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Fie $\vec{G} = (X, \vec{U})$ un graf d -convex simplu orientat. În baza definiției 3.3.3, acest graf nu conține submulțimi d -convexe cu mai mult de un vârf sau cu mai puțin decât $\text{card}X$ vârfuri. Din cele spuse rezultă că $d - \text{conv}(\{x, y\}) = X$ pentru oricare două vârfuri distincte $x, y \in X$.

$2 \Rightarrow 3$. Relația $d - \text{conv}(\{x, y\}) = X$ are loc pentru oricare două vârfuri distinct $x, y \in X$, adică și pentru oricare două vârfuri adiacente, ceea ce înseamnă corectitudinea afirmației 3.

$3 \Rightarrow 1$. Fie pentru oricare două vârfuri adiacente $x, y \in X$ are loc egalitatea menționată în teoremă, însă graful $\vec{G}$ nu este d -convex simplu. Aceasta înseamnă că în $\vec{G}$ există o mulțime d -convexă $A \subset X$, încât $1 < \text{card}A < \text{card}X$. Deoarece $\text{card}A > 1$, rezultă că în A există două vârfuri distincte p și q încât $\langle p, q \rangle \subset A$. Aceasta, la rândul său, implică existența în A a două vârfuri adiacente x și y . Deoarece A este o mulțime d -convexă, rezultă că este adevărată relația $d - \text{conv}(\{x, y\}) \subseteq A$. Pe de altă parte, în baza condiției 3 din teoremă, se obținem egalitatea $d - \text{conv}(\{x, y\}) = X$. Prin urmare, $A = X$. Aceasta vine în contradicție cu presupunerea $1 < \text{card}A < \text{card}X$. Deci graful $\vec{G}$ este d -convex simplu.

Descrierea recursivă a grafurilor d -convex simple orientate

În cele ce urmează vom studia o clasă specială de grafuri orientate $\mathcal{D}$, pe care o descriem în mod recursiv precum urmează:

I. Clasei $\mathcal{D}$ îi aparțin toate grafurile $\vec{G}_0 = (X_{\vec{G}_0}, U_{\vec{G}_0})$, unde :

$$X_{\vec{G}_0} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, n \geq 3,$$

$$U_{\vec{G}_0} = \{(x_n, x_1)\} \cup \{(x_i, x_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, n-1\},$$

Adică $\vec{G}_0$ este un contur elementar cu n vârfuri;

II. În baza grafului $G_{i-1}, i \geq 1$, construim graful $\vec{G}_i = (X_{\vec{G}_i}, U_{\vec{G}_i})$, unde :

$$X_{\vec{G}_i} = X_{\vec{G}_{i-1}} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_m\}, m \geq 1,$$

$$U_{\vec{G}_i} = U_{\vec{G}_{i-1}} \cup \{(a, b) : a, b \in X_{\vec{G}_i}, \text{ dar nu ambele sunt din } X_{\vec{G}_{i-1}}, \text{ încât se respectă condițiile:}$$

a) Pentru orice vârf y_i există vârfurile distincte $p, q \in X_{\vec{G}_i}$, încât $y_i \in d - \text{conv}(\{p, q\})$;

b) Pentru oricare două vârfuri adiacente $a, b \in X_{\vec{G}_i}$ există vârfurile distincte $p, q \in X_{\vec{G}_{i-1}}$,

încât sunt satisfăcute relațiile:

$$1. \quad p, q \in d - \text{conv}(\{a, b\});$$

$$2. \quad d_{\vec{G}_{i-1}}(p, q) = d_{\vec{G}_i}(p, q);$$

$$3. \quad d_{\vec{G}_{i-1}}(q, p) = d_{\vec{G}_i}(q, p);$$

III. În $\mathcal{D}$ nu se conțin alte grafuri, în afară de grafurile descrise în mod iterativ la pașii I și II.

Clasa de grafuri orientate $\mathcal{D}$ este o reuniune de familii de grafuri, obținute recursiv în conformitate cu procedurile descrise anterior:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_i \cup \dots,$$

unde $\mathcal{D}_0$ reprezintă toate grafurile $\vec{G}_0 = (X_{\vec{G}_0}, U_{\vec{G}_0})$, descrise la pasul I de construire a clasei

$\mathcal{D}$, iar $\mathcal{D}_i, i \geq 1$, reprezintă familia tuturor grafurilor ce se obțin dintr-un graf oarecare din $\mathcal{D}_{i-1}$, la aplicarea operației II.

Teorema 3.3.2. Toate grafurile clasei $\mathcal{D}$ sunt d -convex simple.

Demonstrație. Să demonstrăm că $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_i, \dots$ sunt familii de grafuri d -convex simple orientate, aplicând metoda inducției matematice în raport cu indicile $i = 0, 1, 2, \dots$.

În cazul $i = 0$, orice graf $\vec{G}_0 = (X_{\vec{G}_0}, U_{\vec{G}_0})$ din $\mathcal{D}_0$ este d -convex simplu, fiind un contur elementar cu $n \geq 3$ vârfuri.

Vom demonstra că $\mathcal{D}_i, i \geq 1$, este o familie de grafuri d -convex simple, în condițiile când toate grafurile din $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_{i-1}$ posedă această proprietate. Se alege în mod arbitrar un

graf $\vec{G}_i \in \mathcal{D}_i$ cu $n \geq 3$ vârfuri. Fie $\vec{G}_i = (X_{\vec{G}_i}, U_{\vec{G}_i})$ se obține dintr-un graf oarecare $\vec{G}_{i-1} \in \mathcal{D}_{i-1}$

la aplicarea operației II de construire a clasei $\mathcal{D}_i$. Conform teoremei 3.3.1, pentru a demonstra

că $\vec{G}_i$ este d -convex simplu, este necesar de domonstrat că pentru orice două vârfuri adiacente $a, b \in X_{\vec{G}_i}$ are loc relația $d_{\vec{G}_i} - \text{conv}(\{a, b\}) = X_{\vec{G}_i}$. Fie între a și b există arcul $(a, b) \in U_{\vec{G}_i}$.

Conform condiției IIb) din descrierea clasei $\mathcal{D}_i$, există vârfuri distincte $p, q \in d - \text{conv}(\{a, b\})$.

Aceasta implică relația $d - \text{conv}(\{p, q\}) = d - \text{conv}(\{a, b\})$, în graful $\vec{G}_i$.

Deoarece, conform inducției, $\vec{G}_{i-1}$ este d -convex simplu și în procesul construirii grafului $\vec{G}_i$ nu s-au adăugat arce noi între vârfurile din $\vec{G}_{i-1}$, iar distanțele dintre p și q s-au păstrat neschimbate în $\vec{G}_i$ (condiția IIb), rezultă că:

$$X_{\vec{G}_i} \subset d - \text{conv}(\{p, q\}) \subset d - \text{conv}(\{a, b\}),$$

în graful $\vec{G}_i$.

Din condiția IIa) se obține:

$$X_{\vec{G}_{i-1}} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_m\} = X_{\vec{G}_i} \subset d - \text{conv}(\{a, b\}).$$

Deoarece incluziunea inversă este evidentă, obținem relația $X_{\vec{G}_i} = d - \text{conv}(\{a, b\})$, în graful $\vec{G}_i$. Aceasta conduce la concluzia că $\mathcal{D}_i$ este o familie de grafuri d -convex simple.

Teorema 3.3.3. *Un graf orientat și tare conex $\vec{G} = (X, \vec{U})$, $\text{card}X \geq 3$, este d -convex simplu, dacă și numai dacă $\vec{G} \in \mathcal{D}$.*

Demonstrație. *Necesitatea.* Deoarece $\text{card}X \geq 3$, rezultă că în $\vec{G}$ există două vârfuri distincte u și v . Ținând cont de faptul că graful examinat este conex forte, există cel puțin un contur ce trece prin aceste vârfuri, ceea ce conduce la faptul că în $\vec{G}$ există cel puțin un contur elementar de lungime minimă $\mathcal{S} = [z_0, z_1, \dots, z_p, z_{p+1} = z_0]$. Prin urmare, în $\vec{G}$ nu există arce care ar uni două vârfuri distincte z_i, z_j , unde $i - j > 1$. Notăm prin $\vec{G}_0 = (X_{\vec{G}_0}, \vec{U}_{\vec{G}_0})$ subgraful generat de mulțimea de vârfuri $\{z_0, z_1, \dots, z_p, z_{p+1}\}$, iar prin $\vec{G}_1$ – însuși graful $\vec{G}$. Se verifică nemijlocit că $\vec{G}_1$ poate fi obținut nemijlocit din $\vec{G}_0$ prin adăugarea mulțimilor de vârfuri

$X \setminus X_{\vec{G}_0}$ și de arce $\vec{U} \setminus \vec{U}_{\vec{G}_0}$), respectând condiția II din descrierea clasei de grafuri $\mathcal{D}$. Prin urmare $\vec{G} \in \mathcal{D}$.

Suficiența rezultă nemijlocit din teorema 3.3.2.

Operații asupra grafurilor *d-convex simple orientate*

Fie x_1, x_2 și y_1, y_2 două perechi de vârfuri neadiacente din grafurile orientate $\vec{G}_1 = (X_1, \vec{U}_1)$ și, respectiv, $\vec{G}_2 = (X_2, \vec{U}_2)$. Prin analogie cu cazul grafurilor neorientate (a se vedea paragraful 3.2), notăm prin $\vec{G} = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}(\vec{G}_1, \vec{G}_2)$ graful obținut din $\vec{G}_1$ și $\vec{G}_2$ în rezultatul contopirii vârfurilor x_1 cu y_1 și x_2 cu y_2 . Precum ușor se verifică, pentru $\vec{G} = M_{x_1=y_1, x_2=y_2}(\vec{G}_1, \vec{G}_2)$ sunt adevărate relațiile:

$$\text{card}X_{\vec{G}} = \text{card}X_1 + \text{card}X_2 - 2,$$

$$\vec{U}_{\vec{G}} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2.$$

Într-un graf orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$, mulțimea tuturor succesorilor unui vârf x o vom nota prin $\Gamma^+(x) = \{y \in X : (x, y) \in \vec{U}\}$, iar a tuturor predecesorilor – prin $\Gamma^-(x) = \{y \in X : (y, x) \in \vec{U}\}$, notații obișnuite în literatura de specialitate [5], [12], [78], [80], [123], [302]. Vârful, care nu are predecesori se va numi vârf *sursă*, iar vârful care nu are succesori – vârf *destinație*.

Fie $\mathcal{P}(p, q; r), r > 0$, graful orientat în care este fixat un vârf sursă p , un vârf destinație q și care satisface condițiile:

1. în $\mathcal{P}$ există drumuri ce leagă vârfurile p cu vârfurile q ;
2. orice vârf și orice arc din $\mathcal{P}$ aparțin cel puțin unui drum ce leagă p și q ;
3. toate drumurile, ce leagă vârfurile p și q , au aceeași lungime $r > 0$;
4. alte vârfuri sau arce în $\mathcal{P}$ nu sunt.

Evident, vârfurile p și q într-un astfel de graf nu sunt adiacente.

Teorema 3.3.4. Pentru oricare două grafuri orientate $\mathcal{P}_1(p_1, q_1; r_1)$ și $\mathcal{P}_2(p_2, q_2; r_2)$, graful $\vec{G} = M_{p_1=q_2, q_1=p_2}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ este *d-convex simplu*.

Demonstrație. Fie condițiile teoremei sunt satisfăcute. În graful $\vec{G}$ toate contururile elementare au aceeași lungime, egală cu $r_1 + r_2$, și trec prin vârfurile $p_1 = q_2$, $q_1 = p_2$. Mai mult,

orice vârf al grafului $\vec{G}$ aparține cel puțin unui contur de acest tip. Prin urmare, $\vec{G}$ este un graf tare conex, în care pentru orice două vârfuri $x, y \in X_{\vec{G}}$ avem: $p_1 = q_2, q_1 = p_2 \in \langle x, y \rangle \cup \langle y, x \rangle$. Dacă mai ținem cont de faptul că $d - conv(\{p_1 = q_2, q_1 = p_2\}) = \langle p_1, q_2 \rangle \cup \langle q_1, p_2 \rangle = X_{\vec{G}}$, atunci obținem că $\vec{G}$ este un graf d -convex simplu.

Atragem atenția că teorema se demonstrează pentru grafuri orientate arbitrare ce satisfac cele patru proprietăți de mai sus. Ușor ne putem convinge că și printre grafurile d -convex simple există de acelea ce posedă proprietățile menționate. Operația M , definită mai sus, oferă mai multe metode de construire a grafurilor d -convex simple orientate, examinate minuțios în monografia [164] (a se vedea paragraful 6.3 din monografia menționată). Totodată, remarcăm că M reprezintă o operație algebrică pe mulțimea grafurilor d -convex simple orientate, chestiune confirmată prin teorema 6.3.3 din [164].

Vom examina, în continuare, și alte operații asupra grafurilor d -convex simple orientate. Pentru aceasta vom avea nevoie de următoarea

Definiția 3.3.4. Două vârfuri u și v ale unui graf orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$ se numesc vârfuri copii în $\vec{G}$, dacă se respectă egalitățile:

$$\Gamma^+(u) = \Gamma^+(v) \quad \text{și} \quad \Gamma^-(u) = \Gamma^-(v).$$

În condițiile când:

$$\Gamma^+(u) = \Gamma^-(v) \quad \text{și} \quad \Gamma^-(u) = \Gamma^+(v),$$

vârfurile u și v se numesc vârfuri **anticopii**.

Fie dat un graf d -convex simplu orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$ și un vârf oarecare v din $\vec{G}$. Formăm graful $\vec{G}^{++}$ din $\vec{G}$ prin adăugarea unui vârf copie pentru v , notat prin $\tilde{v}$.

Teorema 3.3.5. Dacă $\vec{G} = (X, \vec{U})$, $\text{card}X \geq 3$, este un graf d -convex simplu, atunci $\vec{G}^{++}$ este, deasemenea, un graf d -convex simplu.

Demonstrație. În baza teoremei 3.3.3, graful $\vec{G} = (X, \vec{U})$ aparține clasei $\mathcal{D}$. Alegem un vârf arbitrar $v \in X$ și conform celor descrise anterior formăm graful $\vec{G}^{++}$. Deoarece $\vec{G}$ este graf d -convex simplu, acesta conține două vârfuri neadiacente $x, y \in X_{\vec{G}^{++}}$ încât $v, \tilde{v} \in d - conv_{\vec{G}^{++}}(\{x, y\})$. Ba mai mult, mulțimea $\langle v, \tilde{v} \rangle_{\vec{G}^{++}} \cup \langle \tilde{v}, v \rangle_{\vec{G}^{++}}$ conține toate

vârfurile cel puțin ale unui contur de lungime minimă ce trece prin v . Acest contur va conține vârfuri din $\vec{G}$, distanțele dintre care au rămas aceleași în graful $\vec{G}^{++}$. Însă învelitoarea d -convexă a acestor vârfuri va conține toate vârfurile grafului $\vec{G}$. De aici rezultă că $d - conv_{\vec{G}^{++}}(\{v, \tilde{v}\}) = X_{\vec{G}^{++}}$, de unde: $d - conv_{\vec{G}^{++}}(\{x, y\}) = X_{\vec{G}^{++}}$.

Astfel se obține că învelitoarea d -convexă a oricăror două vârfuri arbitrare și distincte din $\vec{G}^{++}$, diferite de v și $\tilde{v}$, conține toate vârfurile grafului $\vec{G}^{++}$.

Fie acum y un vârf arbitrar din $\vec{G}^{++}$ diferit de vârfurile v și $\tilde{v}$. Învelitoarea d -convexă a mulțimii $\{y, v\}$ în $\vec{G}$ va conține toate vârfurile cel puțin ale unui contur de lungime minimă ce trece prin v și y , care la rândul său va conține vârfuri din $\vec{G}$, distanțele dintre care au rămas aceleași în $\vec{G}^{++}$. Învelitoarea convexă a acestora va conține toate vârfurile grafului $\vec{G}$. Deci, $d - conv_{\vec{G}^{++}}(\{x, y\}) = X_{\vec{G}^{++}}$. Deoarece vârfurile v și $\tilde{v}$ sunt vârfuri copii, atunci au loc egalitățile $\langle \vec{v}, y \rangle = \langle \vec{\tilde{v}}, y \rangle$ și $\langle \vec{y}, v \rangle = \langle \vec{y}, \tilde{v} \rangle$, de unde rezultă egalitatea:

$$d - conv_{\vec{G}^{++}}(\{v, y\}) = d - conv_{\vec{G}^{++}}(\{\tilde{v}, y\}) = X_{\vec{G}^{++}}.$$

Aceasta tocmai și înseamnă că graful $\vec{G}^{++}$ este d -convex și simplu.

Din teorema 3.3.5 rezultă că în grafurile d -convex simple orientate, ca și în cele neorientate, orice vârf poate fi multiplicat de un număr arbitrar de ori, fără a pierde proprietatea de d -convexitate simplă a grafului inițial.

Fie că este dat un graf d -convex simplu orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$ și un vârf arbitrar v din $\vec{G}$, care posedă proprietatea că conturul de lungime minimă ce trece prin v este de lungimea patru. Formăm graful $\vec{G}^{+\sim}$ prin adăugarea unui vârf anticopie pentru v , notat prin $\tilde{v}$.

Teorema 3.3.6. *Dacă $\vec{G} = (X, \vec{U})$, $\text{card}X \geq 3$, este un graf d -convex simplu, iar v un astfel de vârf din $\vec{G}$, încât conturul de lungime minimă ce trece prin v este de lungimea patru, atunci graful $\vec{G}^{+\sim}$ este, de asemenea, un graf d -convex simplu.*

Demonstrație. Conform teoremei 3.3.3 graful $\vec{G} = (X, \vec{U})$ aparține clasei $\mathcal{D}$. Alegem un vârf arbitrar $v \in X$ cu proprietatea că conturul de lungime minimă ce trece prin v are lungimea

patru și se formează graful $\vec{G}^{+\sim}$. Fie $d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{x, y\})$ învelitoarea convexă a două vârfuri distincte x, y din $\vec{G}^{+\sim}$. Dacă $v \in d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{x, y\})$, atunci în $d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{x, y\})$ există cel puțin un vârf din $\Gamma^+(v)$ și cel puțin un vârf din $\Gamma^-(v)$, ceea ce va implica relația $\tilde{v} \in d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{x, y\})$, și invers. Mai mult, dacă x, y sunt două vârfuri distincte din $X_{\vec{G}^{+\sim}}$ și diferite de vârfurile $v, \tilde{v}$, atunci $v \in d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{x, y\})$, deoarece $\vec{G}$ este graf d -convex simplu. Deci, și $\tilde{v} \in d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{x, y\})$. În rezultat obținem: $d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{v, \tilde{v}\}) \subseteq d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{x, y\})$.

Însă, mulțimea $\langle v, \tilde{v} \rangle_{\vec{G}^{+\sim}} \cup \langle \tilde{v}, v \rangle_{\vec{G}^{+\sim}}$ conține toate vârfurile din $\Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)$, învelitoarea convexă a căroră va conține și ultimul vârf din conturul de lungimea patru, căruia îi aparține v în $\vec{G}$. Astfel, conturul se află în întregime în $d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{v, \tilde{v}\})$ și el conține cel puțin două vârfuri din $\vec{G}$, distanțele dintre sunt aceleași în ambele grafuri $\vec{G}$ și $\vec{G}^{+\sim}$. Însă învelitoarea d -convexă a acestor vârfuri va conține toate vârfurile grafului $\vec{G}$. De aici rezultă relația $d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{v, \tilde{v}\}) = X_{\vec{G}^{+\sim}}$ de unde rezultă: $d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{x, y\}) = X_{\vec{G}^{+\sim}}$.

Astfel s-a obținut că învelitoarea d -convexă a oricăror două vârfuri arbitrare și distincte din $\vec{G}^{+\sim}$, diferite de v și $\tilde{v}$, conține toate vârfurile grafului $\vec{G}^{+\sim}$.

Fie acum y un vârf oarecare din $\vec{G}^{+\sim}$, diferit de vârfurile v și $\tilde{v}$. Învelitoarea d -convexă a mulțimii $\{y, v\}$ în $\vec{G}$ va conține toate vârfurile, cel puțin ale unui contur de lungime minimă ce trece prin v și y , care, la rândul său, va conține cel puțin două vârfuri din $\vec{G}$ (distanțele dintre aceste vârfuri sunt aceleași în ambele grafuri $\vec{G}$ și $\vec{G}^{+\sim}$). Învelitoarea convexă a acestora va conține toate vârfurile grafului $\vec{G}$. Deci, $d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{v, y\}) = X_{\vec{G}^{+\sim}}$. Deoarece v și $\tilde{v}$ sunt vârfuri anticopii, atunci $v \in d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{\tilde{v}, y\})$, de unde rezultă:

$$X_{\vec{G}^{+\sim}} = d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{v, y\}) \subseteq d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{\tilde{v}, y\}),$$

adică $d-\text{conv}_{\vec{G}^{+\sim}}(\{\tilde{v}, y\}) = X_{\vec{G}^{+\sim}}$. Aceasta și înseamnă că $\vec{G}^{+\sim}$ este graf d -convex simplu.

Fie dat un graf d -convex simplu orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$, în care există două vârfuri copii v_1 și v_2 . Se va nota prin $\vec{G}^{--}$ graful ce se obține din graful $\vec{G}$ ca rezultat al eliminării unuia dintre cele două vârfuri copii.

Teorema 3.3.7. *Dacă v_1, v_2, v_3 sunt trei vârfuri copii într-un graf d -convex simplu $\vec{G}$, atunci graful $\vec{G}^{--}$, în care lipsește unul dintre ele, este, de asemenea, d -convex simplu.*

Demonstrație. Fie $\vec{G} = (X, \vec{U})$ un graf d -convex simplu orientat, în care există trei vârfuri copii v_1, v_2, v_3 , iar $\vec{G}^{--}$ graful ce se obține din $\vec{G}$, în urma eliminării unuia dintre ele, de exemplu a vârfului v_3 . Deoarece v_1, v_2, v_3 sunt vârfuri copii în $\vec{G}$, rezultă că orice d -segment ce conține unul din ele, le va conține și pe celelalte. Această proprietate are loc, de asemenea, și în $\vec{G}^{--}$, pentru vârfurile v_1 și v_2 . Din aceleași considerente, pentru oricare două vârfuri $x, y \in X_{\vec{G}^{--}}$ are loc egalitatea:

$$d_{\vec{G}}(x, y) = d_{\vec{G}^{--}}(x, y) \quad (3.11)$$

Mai mult, deoarece graful $\vec{G}$ este d -convex simplu, atunci în $\vec{G}$ au loc egalitățile $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle$ și $\langle v_2, v_1 \rangle = \langle v_3, v_1 \rangle$, de unde rezultă:

$$d - \text{conv}_{\vec{G}}(\{v_1, v_2\}) = d - \text{conv}_{\vec{G}}(\{v_1, v_3\}) = X_{\vec{G}^{--}}.$$

Aceasta însă implică relația:

$$d - \text{conv}_{\vec{G}^{--}}(\{v_1, v_2\}) = X_{\vec{G}^{--}}. \quad (3.12)$$

Fie că se selectează, în mod arbitrar, două vârfuri distincte $a, b \in X_{\vec{G}^{--}}$. Graful inițial $\vec{G}$ este d -convex simplu, prin urmare, construirea învelitoarei d -convexe a mulțimii $\{a, b\}$, în acest graf, se reduce la construirea șirului de mulțimi:

$$B_0 = \{a, b\}, B_1 = P(B_0), B_2 = P(B_1), \dots, B_i = P(B_{i-1}), \dots, d - \text{conv}(\{a, b\}) = X_{\vec{G}^{--}}$$

Fără a pierde din generalitate, se poate considera că B_i este prima mulțime în acest șir, care conține vârful v_3 . Acestei mulțimi îi vor aparține, de asemenea, și vârfurile v_1 și v_2 .

Datorită relației (3.11), pentru mulțimea $\{a, b\}$ în graful $\vec{G}^{--}$ se poate construi șirul:

$$B_0^{--} = \{a, b\}, B_1^{--} = P(B_0^{--}), B_2^{--} = P(B_1^{--}), \dots, B_i^{--} = P(B_{i-1}^{--}), \dots,$$

astfel încât $B_j^- = B_{j-1}^-$, pentru orice $0 \leq j \leq i-1$. În aceste condiții se obține $B_i \setminus B_{i-1}^- = \{v_3\}$. În schimb mulțimii B_{i-1}^- îi aparțin vârfurile v_1 și v_2 , ceea ce înseamnă, datorită relației (3.12), că $d\text{-conv}_{\vec{G}^{--}}(\{a, b\}) = X_{\vec{G}^{--}}$.

Teorema 3.3.8. *Dacă v și v' reprezintă copia și, respectiv, anticopia unui vârf v al unui graf d -convex simplu orientat $\vec{G}$, încât se respectă condiția $d(v, v') \neq 3$ atunci graful $\vec{G}^{--}$, în care lipsește vârfurile v' , este, de asemenea, d -convex simplu.*

Demonstrație. Fie $\vec{G} = (X, U)$ un graf d -convex simplu orientat, în care vârfurile v și v' posedă atât un vârf copie v' , cât și un vârf anticopie $\tilde{v}$, care satisface condiția teoremei, iar $\vec{G}^{--}$ graful ce se obține din $\vec{G}$ ca rezultat al eliminării vârfurilor copie v' . Deoarece v și v' sunt vârfuri copii, pentru orice două vârfuri $x, y \in X_{\vec{G}^{--}}$ are loc egalitatea:

$$d_{\vec{G}}(x, y) = d_{\vec{G}^{--}}(x, y) \quad (3.13)$$

Din aceleași considerente avem

$$\langle v, v' \rangle_{\vec{G}} = \langle \tilde{v}, v \rangle_{\vec{G}}. \quad (3.14)$$

Faptul că v și v' sunt vârfuri copii, iar $\tilde{v}$ este anticopia lor în graful $\vec{G}$ înseamnă că:

$$\Gamma^+(v) \cup \Gamma^+(v') = \Gamma^-(\tilde{v}) = \{p_1, p_2, \dots, p_s\} \quad \text{și}$$

$$\Gamma^-(v) \cup \Gamma^-(v') = \Gamma^+(\tilde{v}) = \{q_1, q_2, \dots, q_r\},$$

unde $r, s \geq 1$, deoarece aceste mulțimi nu sunt vide.

Cum vârfurile v și v' sunt vârfuri copii, rezultă că $d_{\vec{G}}(v, v') \neq 1$, pentru că, în caz contrar, în graful $\vec{G}$ ar exista bucle, și am avea $d_{\vec{G}}(v, v') \neq 2$, pentru că în $\vec{G}$ ar exista mulțimi d -convexe formate din două vârfuri. Însă condiția $d_{\vec{G}}(v, v') \neq 3$ este echivalentă cu următoarea: p_i nu este adiacent cu q_j pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ și orice $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Deci, rezultă că $d_{\vec{G}}(v, v') = 4$, unul din drumuri fiind $[v, p_i, \tilde{v}, q_j, v']$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Aceasta mai înseamnă că conturul elementar de lungime minimă, care conține vârfurile v și v' , este de lungimea patru, atât în graful $\vec{G}$, cât și în graful $\vec{G}^{--}$. Deci, se obține că

$$\Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v) \subseteq \langle v, v' \rangle_{\vec{G}^{--}}.$$

Fie x un vârf din $\langle v, v' \rangle \setminus (\Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v))$. Atunci rezultă că x aparține unui drum de la v spre v' , deci există $p_i, 1 \leq i \leq s$, și $q_k, 1 \leq k \leq r$, încât în G există drumul $[v, p_i, x, q_k, v']$. Dar atunci $x \in \langle p_i, q_k \rangle$, deoarece p_i nu este adiacent cu q_k , ceea ce implică relația

$$\langle v, v' \rangle \setminus \{v, v'\} \subseteq P(\Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)). \quad (3.15)$$

De asemenea, are loc relația:

$$\Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v) \cup \{v, \tilde{v}\} = P_G(\{v, \tilde{v}\}) = P_{G--}(\{v, \tilde{v}\}). \quad (3.16)$$

Din relațiile (3.14), (3.15) și (3.16) rezultă că $\langle v, v' \rangle \setminus \{v, v'\} \subset P_{G--}^2\{v, \tilde{v}\}$, ceea ce implică relația:

$$d - \text{conv}_{G--} \{v, \tilde{v}\} = X_{G--}. \quad (3.17)$$

Selectăm, în mod arbitrar, două vârfuri distincte $a, b \in X_{G--}$. Graful inițial $\vec{G}$ este d -convex simplu. Prin urmare, construirea învelitoarei d -convexe a mulțimii $\{a, b\}$ în acest graf se reduce la construirea șirului de mulțimi:

$$B_0 = \{a, b\}, B_1 = P(B_0), B_2 = P(B_1), \dots, B_i = P(B_{i-1}), \dots, d - \text{conv}(\{a, b\}) = X_{G--}$$

Fără a pierde din generalitate, se poate de considerat că B_i este prima mulțime a acestui șir, care conține vârful v' . Acestei mulțimi îi aparține și vârful v . Atunci $\tilde{v} \in B_{i+1}$.

În baza relației (3.13), pentru mulțimea $\{a, b\}$, în graful $\vec{G}^{--}$ se poate construi șirul:

$$B_0^{--} = \{a, b\}, B_1^{--} = P(B_0^{--}), B_2^{--} = P(B_1^{--}), \dots, B_i^{--} = P(B_{i-1}^{--}), \dots,$$

încât $B_j = B_j^{--}$, $0 \leq j \leq i-1$. În aceste condiții obținem $B_i \setminus B_i^{--} = \{v'\}$. În schimb, mulțimii B_{i+1}^{--} îi aparține vârful v și unele vârfuri din $\Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)$, ceea ce înseamnă că mulțimii B_i^{--} îi va mai aparține și vârful $\tilde{v}$. Deci, datorită relației (3.17), obținem egalitatea $d - \text{conv}_{G--}(\{a, b\}) = X_{G--}$.

Din teoremele 3.3.7 și 3.3.8 rezultă că, în grafurile d -convex simple orientate, ca și în grafurile d -convex simple neorientate, se poate elimina vârfurile copii ale unui vârf v , păstrând pentru v doar o copie sau o anticopie, și graful obținut va fi la fel d -convex simplu.

Teorema 3.3.9. *Dacă $\vec{G} = (X, \vec{U})$, $\text{card} X \geq 4$, este un graf d -convex simplu, în care există patru vârfuri x_1, x_2, y_1, y_2 , ce satisfac condițiile:*

1. vârfurile x_1, x_2, y_1, y_2 sunt două câte două neadiacente;
2. $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2), d(x_2, x_1) = d(y_2, y_1)$;
3. $\min\{d(x_1, y_2), d(y_1, x_2)\} \geq d(x_1, x_2)$;
4. $\min\{d(y_2, x_1), d(x_2, y_1)\} \geq d(x_2, x_1)$;
5. $\min\{d(x_1, y_1), d(y_1, x_1), d(x_2, y_2), d(y_2, x_2)\} \geq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_1)$,

atunci $\vec{H} = W_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(\vec{G})$ ce se obține din $\vec{G}$ în rezultatul contopirii vârfului x_1 cu y_1 și a vârfului x_2 cu y_2 este, de asemenea, un graf d -convex simplu.

Demonstrație: Fie $\vec{G} = (X, \vec{U})$ un graf d -convex simplu, care satisface condițiile teoremei, iar $\vec{H} = W_{x_2=y_2}^{x_1=y_1}(\vec{G})$ graful construit după cum s-a indicat anterior. Notăm prin z_1 și z_2 vârfurile din $\vec{H}$, formate ca rezultat al contopirii vârfurilor x_1 cu y_1 și x_2 cu y_2 .

Deoarece se examinează grafuri fără bucle și muchii multiple, iar graful inițial $\vec{G}$ este d -convex simplu, rezultă că condiția 1 din teoremă, impusă asupra mulțimii de vârfuri alese $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, asigură ca și în graful $\vec{H}$ nu sunt bucle sau arce multiple. Mai mult, pentru orice două vârfuri $s, t \in X_{\vec{H}}$, în $\vec{H}$ există cel mult unul din cele două arce posibile (s, t) sau (t, s) .

Cum graful inițial $\vec{G}$ este d -convex simplu, rezultă că învelitoarea d -convexă a mulțimii de vârfuri $\{x_1, x_2\}$ poate fi scrisă astfel:

$$A_0 = \{x_1, x_2\}, A_1 = P(A_0), A_2 = P(A_1), \dots, A_i = P(A_{i-1}), \dots, d - \text{conv}_{\vec{G}}(\{x_1, x_2\}) = X_{\vec{G}}.$$

Din aceleași motive, învelitoarea d -convexă a mulțimii de vârfuri $\{y_1, y_2\}$ poate fi scrisă în modul următor:

$$B_0 = \{y_1, y_2\}, B_1 = P(B_0), B_2 = P(B_1), \dots, B_i = P(B_{i-1}), \dots, d - \text{conv}_{\vec{G}}(\{y_1, y_2\}) = X_{\vec{G}}.$$

Fie că se construiește învelitoarea d -convexă în graful $\vec{H}$ pentru mulțimea $\{z_1, z_2\}$ cu ajutorul șirului de mulțimi:

$$C_0 = \{z_1, z_2\}, C_1 = P(C_0), C_2 = P(C_1), \dots, C_i = P(C_{i-1}), \dots, d - \text{conv}_{\vec{G}}(\{z_1, z_2\}) = X_{\vec{G}}.$$

Datorită condițiilor 2, 3 și 4 a teoremei, rezultă că $A_1 \cup B_1 \subseteq C_1$, iar condițiile 3, 4 și 5 asigură veridicitatea relațiilor $A_i \cup B_i \subseteq C_i$, pentru orice $i \geq 2$. Acestea însă implică relația:

$$d - \text{conv}_{\vec{H}}(\{z_1, z_2\}) = X_{\vec{H}} \quad (3.18)$$

Fie, că se selectează, în mod arbitrar, două vârfuri distincte $a, b \in X_{\vec{H}}$. Graful inițial $\vec{G}$ este d -convex simplu, prin urmare, construirea învelitoarei convexe a mulțimii $\{a, b\}$ se reduce la construirea șirului de mulțimi:

$$E_0 = \{a, b\}, E_1 = P(E_0), E_2 = P(E_1), \dots, E_i = P(E_{i-1}), \dots, d\text{-conv}(\{a, b\}) = X_{\vec{G}}.$$

Fără a pierde din generalitate, se poate considera că E_i este prima mulțime a acestui șir, care conține unul din vârfurile mulțimii $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Mulțimii E_i îi aparține, de asemenea, și vârful copie al vârfului respectiv.

Construim învelitoarea convexă a mulțimii $\{a, b\}$ în graful $\vec{H}$ în modul următor:

$$E_0^{\vec{H}} = \{a, b\}, E_1^{\vec{H}} = P(E_0^{\vec{H}}), E_2^{\vec{H}} = P(E_1^{\vec{H}}), \dots, E_i^{\vec{H}} = P(E_{i-1}^{\vec{H}}), \dots,$$

încât $E_j = E_j^{\vec{H}}$, pentru orice $0 \leq j \leq i-1$, iar mulțimii E_i îi aparțin, de asemenea, și vârfurile z_1 și z_2 , ceea ce, datorită relației (3.18), înseamnă că $d\text{-conv}_{\vec{H}}(\{a, b\}) = X_{\vec{H}}$.

3.4. Concluzii la capitolul 3

Prin rezultatele obținute în capitolul 3, în cadrul teoriei complexului de relații multi-are se propune o direcție de cercetare ce ține de generalizarea noțiunii de d -convexitate, introdusă pentru prima dată de către K. Menger [253] și redescoperită, mai târziu, de către P. Soltan, în legătură cu necesitatea de a soluționa probleme cu caracter practic pe grafuri. Folosind noțiunea de lanț m -dimensional și proprietățile acestuia, examinate în capitolul precedent, se definește o funcție a distanței, cu ajutorul căreia se construiește convexitate și învelitoarea convexă în spațiul metric, determinat de relația k -ară R^k .

Ținând cont de proprietățile generale ale mulțimilor convexe într-un spațiu metric (R^k, d_k^m) , $1 \leq k < m \leq n+1$, studiate în primul paragraf al capitolului, se descriu rezultate importante din punct de vedere teoretico-aplicativ în domeniul convexității pentru un caz particular al complexului de relații multi-are. E vorba de grafuri (atât cele neorientate, cât și cele orientate). Sunt examinate mai multe clase de grafuri, pentru care învelitoarea convexă a oricăror două vârfuri neadiacente coincide cu mulțimea tuturor vârfurilor din graf. Astfel de grafuri se numesc d -convex simple. Importanța acestor grafuri este determinată și de faptul că o serie de probleme dificile din punct de vedere al soluționării algoritmice, pe grafurile d -convex simple se rezolvă în timp polinomial (în unele cazuri chiar în timp liniar).

În baza celor descrise în capitolul 3, pot fi menționate rezultatele principale ce țin de studierea convexității într-un complex de relații multi-are:

- a fost definită convexitatea și învelitoarea convexă în spațiul metric, determinat de relația k -ară a complexului. S-a demonstrat că orice familie de submulțimi a relației k -are determină, în mod univoc, o învelitoare convexă, și invers.
- a fost estimat diametrul unei mulțimi, construite prin aplicarea operatorului ce generează învelitoarea convexă a unei mulțimi k -are;
- au fost determinate condițiile, în care o submulțime a relației k -are reprezintă învelitoarea convexă a punctelor sale extreme;
- au fost obținute teoremele de caracterizare a convexității simple pentru mai multe clase de grafuri, identice după structură;
- a fost examinată relația dintre rază și diametru în grafurile d -convex simple de tipul $L(G, G_0)$, unde G_0 reprezintă atomul grafului G ;
- a fost examinată noțiunea de convexitate și proprietățile mulțimilor convexe în cazul unui garf orientat. S-a demonstrat teorema de caracterizare a grafurilor d -convex simple orientate.

Ținând cont de rezultatele obținute în capitolul 3, deducem următoarele concluzii:

1. Prin extinderea noțiunii de lanț m -dimensional și introducerea noțiunii de (k,m) -convexitate, în cadrul teoriei complexelor de relații multi-are a fost conturată o direcție de cercetare, legată de studierea proprietăților mulțimilor (k,m) -convexe cu aplicarea ulterioară acestora la soluționarea problemelor cu caracter teoretico-aplicativ;
2. Structura specială a unor clase de grafuri d -convex simple, cum ar fi cele planare, modular ereditare, cordale, ereditare după distanță etc., care rezultă din teoremele de caracterizare a convexității simple a acestor grafuri, permite elaborarea unor algoritmi polinomiali de soluționare a problemelor de amplasare, cunoscute drept problema medianei, problema centrului și a multiplelor variații ale acestora;
3. Rezultatele obținute în legătură cu studierea grafurilor d -convex simple servesc drept imbold pentru extinderea cercetărilor, în scopul caracterizării complexelor cu o familie prescrisă de mulțimi (k,m) -convexe.
4. Prin definirea operațiilor algebrice asupra grafurilor d -convex simple se crează premisele studierii condițiilor în care clasele de grafuri d -convex simple formează structuri algebrice de grup, chestiune importantă pentru dezvoltarea teoretică a teoriei d -convexității pe complexe de relații multi-are.

4. COMPLEXE DE CUBURI ABSTRACTE

Folosind simplexele abstracte, printr-o procedură iterativă se definește cubul abstract p -dimensional, $p \geq 0$ (a se vedea definiția 4.1.2), cu ajutorul căruia se construiește complexul de cuburi abstracte (a se vedea definiția 4.2.1). Cercetările ce țin de studierea cubului și a complexului respectiv sunt reflectate în mai multe lucrări publicate pe parcursul ultimilor zece ani [15], [19], [129], [148], [153], [155], [296]. Rezultate importante au fost obținute atât la nivel teoretic, legate de construirea omologiilor cubice, a caracteristicii Euler, de studierea proprietăților varietăților determinate de complexul cubic abstract [150], [170], [171], [179], precum și la nivel aplicativ, prin soluționarea unor probleme practice, printre care un rol aparte revine problemelor de amplasare [23], [161], [162], [172]. Aceste rezultate pot fi generalizate și pentru cazul complexului de cuburi construit cu ajutorul quasisimplexelor abstracte. Totuși, vorbind despre soluționarea problemelor cu caracter aplicativ, ar fi mai firesc să examinăm complexe obișnuite de cuburi abstracte, menționat mai sus. Despre unele dintre acestea vom vorbi în capitolul 4.

După cum se va vedea din cele ce urmează, un complex de cuburi abstracte poate fi considerat drept un caz special al complexului simplu de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = \{R^1, R^2, \dots, R^{n+1}\}$, examinat în paragraful 2.3. Complexul $\mathfrak{R}^{n+1} = \{R^1, R^2, \dots, R^{n+1}\}$ este asociat, de regulă, cu un complex de simplexe abstracte $\mathcal{K}^n = \{S^0, S^1, \dots, S^n\}$, unde $S^m = \{s_1^m, s_2^m, \dots, s_{\alpha_m}^m\}$ reprezintă mulțimea tuturor simplexelor abstracte m -dimensionale, $0 \leq m \leq n$, iar oricare două simplexe $s_i^l \in S^l$ și $s_j^k \in S^k$, $0 \leq l, k \leq n$, au intersecție vidă sau intersecția lor este un simplex p -dimensional $s_r^p \in S^p$, $p \leq \min\{l, k\}$. Folosind simplexele $s_i^m \in S^m$, $0 \leq i \leq \text{card} S^m$, $0 \leq m \leq n$, în calitate de „cărămizi” elementare, vom construi complexul n -dimensional de cuburi abstracte. Cu ajutorul grupurilor de omologii, vom determina proprietăți importante ale acestui complex, în baza cărora se vor obține rezultate utile pentru cercetările ulterioare.

4.1. Cubul abstract n -dimensional

Vom începe cu definirea cubului abstract n -dimensional, apelând la simplexele abstracte, definite în paragraful 2.3. Generalizarea acestuia, prin utilizarea quasisimplexelor abstracte, se transformă într-o procedură simplă, chiar dacă aceasta și este una suficient de migăloasă, determinată de însuși specificul unui quasisimplex în raport cu simplexul abstract.

Fie $s_j^m = (x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ un simplex cu dimensiunea m al complexului de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$, iar $s_{i_k}^{m-1}$ – una dintre fețele $(m-1)$ -dimensionale din s_j^m , păstrând notațiile folosite în capitolul 2. Introducem parametrul

$$\sigma_{i_k}^j = \begin{cases} +1, & \text{dacă simplexele } s_j^m \text{ și } s_{i_k}^{m-1} \text{ sunt coerente,} \\ -1, & \text{dacă simplexele } s_j^m \text{ și } s_{i_k}^{m-1} \text{ nu sunt coerente.} \end{cases}$$

Folosind acest parametru, putem considera s_j^m și $\sigma_{i_k}^j \cdot s_{i_k}^{m-1}$ drept simplexe coerente. Prin urmare, coeficientul de Δ -incidență $[s_j^m : \sigma_{i_k}^j \cdot s_{i_k}^{m-1}]$ va fi egal cu $+1$, în raport cu toate fețele $(m-1)$ -dimensionale ale complexului s_j^m .

Definiția 4.1.1. *Dacă s_j^m este simplex m -dimensional al complexului de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1}$, $1 \leq m \leq n$, atunci $s_j^m \setminus \bigcup_{k=0}^m \sigma_{i_k}^j \cdot s_{i_k}^{m-1}$ se numește vacuum cu dimensiunea m al simplexului s_j^m , $1 \leq m \leq n$ (prototipul spațiului interior pentru figurile geometrice). Vacuumul simplexului s_j^m se va nota: $\hat{s}_j^m = [x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}]$. Vacuumul simplexului cu dimensiunea 0 coincide cu simplexul cu aceeași dimensiune, adică $\hat{s}^0 = s^0$ pentru orice simplex 0-dimensional $s^0 \in \mathfrak{R}^{n+1}$.*

Definim în mod inductiv cubul abstract n -dimensional și vacuumul acestuia.

Definiția 4.1.2. *Pentru o mulțime arbitrară de elemente X declarăm:*

1. Orice element $x \in X$ reprezintă un cub 0-dimensional, notat $I^0 = (x)$. Considerăm că acest cub și vacuumul său coincid cu simplexul 0-dimensional și, respectiv, cu vacuumul acestuia.

2. Fie $I_1^0 = (x_{i_0})$ un cub 0-dimensional. Mai fixăm un cub 0-dimensional $I_2^0 = (x_{i_1})$. Perechea elementelor x_{i_0} și x_{i_1} , în ordinea indicată, reprezintă un cub 1-dimensional, pe care îl notăm $I^1 = (x_{i_0}, x_{i_1})$. Acest cub coincide cu simplexul abstract, determinat de vârfurile x_{i_0} și x_{i_1} . Vacuumul lui I^1 coincide cu vacuumul simplexului indicat. Vârful x_{i_0} se va numi origine a cubului 1-dimensional $I^1 = (x_{i_0}, x_{i_1})$. Totodată, x_{i_0} și x_{i_1} se mai numesc fațete 0-dimensionale ale lui I^1 .

3. Considerăm cubul abstract 1-dimensional $I^1 = (x_{i_0}, x_{i_1})$. Alegem un alt cub 1-dimensional $I_2^1 = (y_{i_0}, y_{i_1})$. Relațiile 2-are între vârfurile acestor cuburi determină existența

încă a două cuburi 1-dimensional $I_3^1 = (x_{i_0}, y_{i_0}), I_4^1 = (x_{i_1}, y_{i_1})$. Mai definim o relație 2-ară (y_{i_0}, y_{i_1}) și două relații 3-are: $(x_{i_0}, x_{i_1}, y_{i_1})$ și $(x_{i_0}, y_{i_0}, y_{i_1})$. Ca rezultat obținem un complex simplicial abstract, determinat de simplexele: $(x_{i_0}, x_{i_1}), (y_{i_0}, y_{i_1}), (x_{i_0}, y_{i_0}), (x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_0}, y_{i_1}), (x_{i_0}, x_{i_1}, y_{i_1})$ și $(x_{i_0}, y_{i_0}, y_{i_1})$. Acest complex simplicial se numește procub 2-dimensional și se notează prin $I^2(\Delta)$. Reuniunea vacuumurilor simplexelor $(x_{i_0}, x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_0}, y_{i_0}, y_{i_1})$ și (x_{i_0}, y_{i_1}) reprezintă vacuumul cubului 2-dimensional, notat prin $\overset{o}{I}^2$. Cubul abstract 2-dimensional este reuniunea vacuumului $\overset{o}{I}^2$ și a simplexelor rămase:

$$I^2 = \overset{o}{I}^2 \cup (x_{i_0}, x_{i_1}) \cup (y_{i_0}, y_{i_1}) \cup (x_{i_0}, y_{i_0}) \cup (x_{i_1}, y_{i_1}).$$

Cubul construit I^2 are 2^2 vârfuri: $x_{i_0}, x_{i_1}, y_{i_0}, y_{i_1}$. Vârful x_{i_0} se numește origine, iar șirul ordonat $(x_{i_0}, x_{i_1}, y_{i_0})$ – reper al cubului I^2 . Vom reprezenta cubul I^2 prin reperul său $I^2 = (x_{i_0}, x_{i_1}, y_{i_0})$.

Fecare dintre fațetele 0-dimensionale din I_1^1 (vârfurile x_{i_0} și x_{i_1}) împreună cu fațetele 0-dimensionale respective din I_2^1 (vârfurile y_{i_0} și y_{i_1}) determină fațetele 1-dimensionale ale cubului I^2 . Fațetele 0-dimensionale ale cuburilor $I_j^1, 1 \leq j \leq 4$, rămân fațete 0-dimensionale ale lui I^2 .

4. Fie că se cunoaște noțiunea de cub și procub abstract i -dimensional, I^i și $I^i(\Delta)$, $1 \leq i \leq n-1$, precum și de vacuum al cubului cu aceeași dimensiune $\overset{o}{I}^i$.

5. Pentru a defini cubul abstract n -dimensional pornim de la un cub $(n-1)$ -dimensional, reprezentat prin reperul său: $I_1^{n-1} = (x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}})$. Alegem un alt cub $(n-1)$ -dimensional $I_2^{n-1} = (y_{i_0}, y_{i_1}, \dots, y_{i_{n-1}})$. Considerăm relațiile i -are, $2 \leq i \leq n$, între vârfurile cuburilor I_1^{n-1}, I_2^{n-1} , care determină niște simplexe ce formează un complex simplicial abstract – procubul $I^n(\Delta)$. Fiecare fațetă $(n-2)$ -dimensională din I_1^{n-1} în pereche cu fațeta corespunzătoare ei din I_2^{n-1} reprezintă câte un cub $(n-1)$ -dimensional. Aceste cuburi, împreună cu I_1^{n-1} și I_2^{n-1} , reprezintă toate cele 2^n fațete $(n-1)$ -dimensionale ale cubului n -dimensional. Notăm prin $\mathfrak{C}^{n-1}$ familia acestor cuburi $(n-1)$ -dimensionale. **Vacuumul cubului n -dimensional**, notat

prin I^n , se definește ca reuniunea vacuumurilor simplexelor din complexul ce determină procubul $I^n(\Delta)$ și care nu aparțin complexelor simpliciale corespunzătoare cubului din $\mathfrak{S}^{n-1}$.

Cubul abstract n -dimensional se definește prin reuniunea:

$$I^n = \bigcup_{I^{n-1} \in \mathfrak{S}^n} I^{n-1} \cup I^n.$$

Vârful x_{i_0} este **originea**, iar șirul ordonat $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ – **reperul cubului abstract I^n** . Toate fațetele cu dimensiunea i , $0 \leq i \leq n-1$, rămân fațete cu aceeași dimensiune a cubului I^n .

Ca și în cazul simplexului abstract, vom defini orientarea cubului. Fie I^n un cub abstract n -dimensional, determinat prin intermediul reperului său: $I^n = (x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$.

Definiția 4.1.3. Dacă numărul de inversiuni în cortegiul de indici $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ este par, atunci cubul I^n se va numi **cub orientat pozitiv** și se va nota prin $+I^n$. În cazul când numărul de inversiuni ale cortegiului menționat de indici este impar, atunci I^n se va numi **cub orientat negativ**, folosind notația $-I^n$.

Este cazul să menționăm că reperul ce determină un cub abstract n -dimensional I^n poate fi folosit și la construirea simplexului n -dimensional, semnul căruia coincide cu semnul cubului.

Pentru cubul abstract, determinat de reperul $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ și orientat pozitiv sau negativ, se va folosi notația respectivă: $+I^n = +[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$ și $-I^n = -[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$.

Menționăm că, dacă $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ este reper al cubului n -dimensional I^n , atunci perechile ordonate (x_{i_0}, x_{i_1}) , (x_{i_0}, x_{i_2}) , ..., (x_{i_0}, x_{i_n}) reprezintă, la rândul lor, cuburi 1-dimensionale, pe care le vom nota $I_{i_1}^1, I_{i_2}^1, \dots, I_{i_n}^1$. Prin urmare, reperul lui I^n poate fi descris și ca o mulțime ordonată de cuburi 1-dimensionale $r = \{I_{i_1}^1, I_{i_2}^1, \dots, I_{i_n}^1\}$.

Similar cazului complexului de relații multi-are, se definește noțiunea de cuburi coerente și coeficient de coerență.

Vom considera că două cuburi abstracte I_i^m , I_j^{m-1} , unde I_j^{m-1} este una dintre fațetele $(m-1)$ -dimensionale ale lui I_i^m , sunt coerente dacă acestea sunt orientate la fel. În caz contrar aceste cuburi se vor considera noncoerente. Pentru două cuburi I_i^m și I_j^{m-1} definim coeficientul de coerență, notat prin $\varepsilon_j^i(m, \square) = [I_i^m : I_j^{m-1}]$, în modul următor:

$$\varepsilon_j^i(m, \square) = \begin{cases} +1, & \text{dacă cuburile } I_i^m \text{ și } I_j^{m-1} \text{ sunt coerente,} \\ -1, & \text{dacă cuburile } I_i^m \text{ și } I_j^{m-1} \text{ nu sunt coerente,} \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

unde $1 \leq i \leq \text{card}\mathcal{C}^m$, $1 \leq j \leq \text{card}\mathcal{C}^{m-1}$.

Definiția 4.1.4. Două cuburi abstracte I_i^m și I_j^m se numesc concordante dacă au o fațetă $(m-1)$ -dimensională comună I_k^{m-1} și între coeficienții de coerență $\varepsilon_k^i(m, \square)$ și $\varepsilon_k^j(m, \square)$ are loc relația:

$$\varepsilon_k^i(m, \square) = -\varepsilon_k^j(m, \square).$$

Fie I^n un cub abstract n -dimensional cu mulțimea de vârfuri $V = \{x_1, x_2, \dots, x_{2^n}\} \subset X$, $\text{card}X = r > 2^n$. Vârfurilor acestui cub le punem în corespondență niște cortegii binare cu elementele 0 sau 1, încât să putem defini pe I^n metrica Hamming. Pentru prima dată, această metrică a fost introdusă de către Richard Hamming în legătură cu necesitatea de a determina gradul de discrepanță dintre combinațiile de coduri, reprezentate prin vectori binari de aceeași lungime [127]. Ulterior, ea s-a dovedit a fi un instrument eficient pentru examinarea problemelor de ordin teoretico-aplicativ [14], [128], inclusiv în cazul complexelor de relații multi-are [129].

Metrica Hamming determină distanța $d(x_i, x_j)$ dintre două vârfuri $x_i, x_j \in V$, egală cu numărul de poziții prin care se deosebesc cortegiile binare corespunzătoare. Fie vârfului x_1 i s-a atribuit cortegiul nul $(0, 0, \dots, 0)$ și x_{2^n} este vârful situat la distanță maximă de la x_1 , ceea ce înseamnă că acestuia i s-a atribuit cortegiul unitar $(1, 1, \dots, 1)$.

Formăm mulțimile:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x_1\}, \\ \Gamma_1 &= \{x_i \in V : d(x_1, x_i) = 1\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \Gamma_k &= \{x_i \in V : d(x_1, x_i) = k\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \Gamma_n &= \{x_i \in V : d(x_1, x_i) = n\} = \{x_{2^n}\}. \end{aligned}$$

Astfel, cubul abstract n -dimensional I^n poate fi reprezentat prin șirul de mulțimi $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, care posedă proprietățile:

- a) $\text{card}\Gamma_i = C_n^i$;
- b) oricare două elemente distincte ale unei mulțimi Γ_i , $0 < i < n$, nu reprezintă o fațetă 1-dimensională a cubului I^n ,

c) $d(x_k, x_l)$ este un număr par, pentru oricare două elemente distincte x_k, x_l ale unei mulțimi Γ_i , $0 < i < n$.

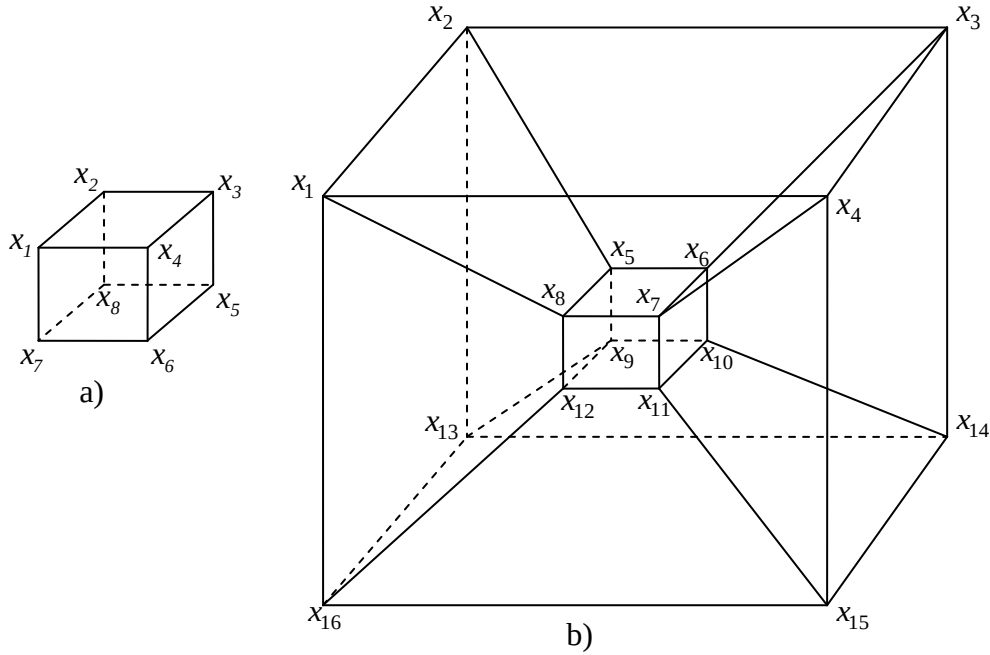


Fig. 4.1. Reprezentarea geometrică a cubului 3-dimensional (cazul a)) și a celui 4-dimensional (cazul b))

Evident, nu orice șir de acest tip reprezintă un cub n -dimensional.

De rând cu reprezentările geometrice clasice ale cuburilor n -dimensionale (figura 4.1), vom utiliza și reprezentările acestora prin șirurile respective de mulțimi $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ (figura 4.2). În acest caz, vom mai spune că avem descrierea stratificată a cubului n -dimensional, folosind notația $I^n = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$.

Lema 4.1.1. Numărul de muchii ce leagă un vârf oarecare din Γ_i cu vârfurile mulțimii Γ_{i-1} , $1 \leq i \leq n-1$, este $N_{i-1}^i = i$, iar numărul de muchii ce leagă același vârf cu vârfurile mulțimii Γ_{i+1} este $N_{i+1}^i = n-i$. (Evident, $N_1^0 = N_{n-1}^n = n$.)

Demonstrație. Introducem metrica Hamming, considerând că vârfului x_i i se atribuie cortegiul nul $(0, 0, \dots, 0)$. Atunci, orice element din Γ_i va avea un cortegiu α cu i unități. Acest element va fi adiacent cu elementele din Γ_{i-1} ale căror cortegii diferă de α exact printr-un element. Astfel de cortegii sunt exact i (fiecare cortegiu diferă de α prin faptul că una din cele i unități din α va fi înlocuită cu zero). Prin urmare, $g_{i-1}(x_j) = i$ și, deoarece x_j a fost ales în mod arbitrar din Γ_i , obținem $N_{i-1}^i = i$.

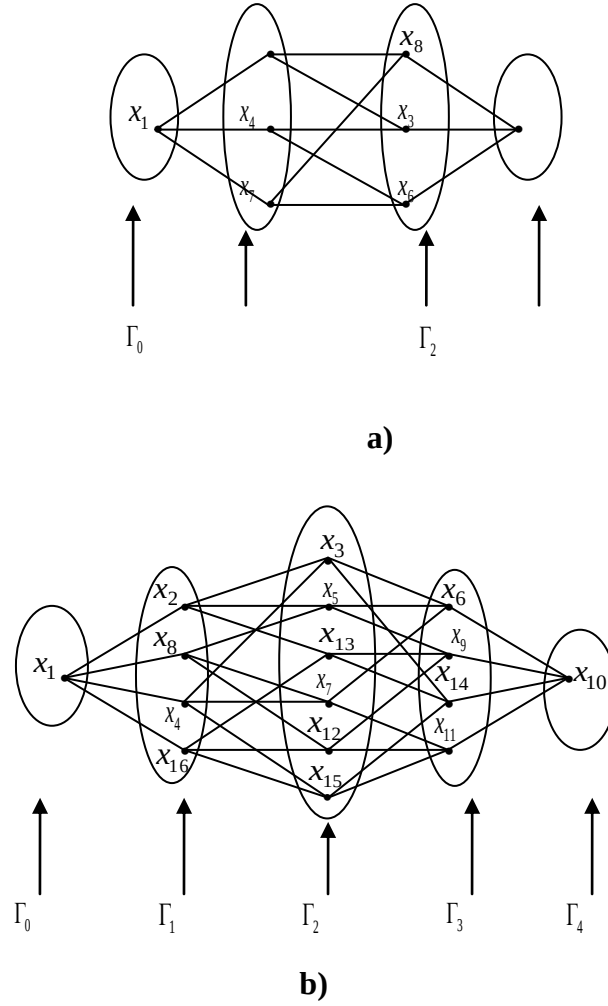


Fig. 4.2. Reprezentarea cubului 3-dimensional prin șirul $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ (cazul a)) și a cubului 4-dimensional prin șirul $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ (cazul b))

Întrucât în cubul n -dimensional toate vârfurile au gradul egal cu n , rezultă egalitatea enunțată în leamnă: $N_{i+1}^i = n - i$.

Să estimăm acum suma distanțelor dintre un element arbitrar $x \in \Gamma_k$ și mulțimea Γ_{k+l} în cazul cubului abstract n -dimensional $I^n = (\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$, $0 \leq k \leq n-1, k+1 \leq l \leq n$.

Lema 4.1.2. *Suma distanțelor dintre elementul $x \in \Gamma_k$ și toate elementele mulțimii Γ_{k+l} se exprimă prin*

$$\sum_{i=0}^{\min\{k, n-k-l\}} (l+2i) \cdot C_k^i \cdot C_{n-k}^{l+i}.$$

Demonstrație. Alegem un vârf arbitrar $x \in \Gamma_k$ și definim pe cubul $I^n = (\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ metrica Hamming, astfel încât vârful $x_1 \in \Gamma_0$ este marcat prin cortegiul nul $(0, 0, \dots, 0)$. Cortegiul binar ce corespunde vârfului $x \in \Gamma_k$ va avea k unități și $(n-k)$ zerouri. Fără a pierde din

generalitate, vom considera că acesta este cortegiul $\tilde{\alpha} = (\underbrace{11\dots 1}_k \underbrace{00\dots 0}_{n-k})$. Orice element din Γ_{k+l}

este marcat printr-un cortegiu $\tilde{\beta}$ ce conține cu l unități mai mult decât $\tilde{\alpha}$. Aceste l unități pot fi obținute în două moduri:

a) l zerouri din cortegiul $\tilde{\alpha}$ se înlocuiesc cu unități. Distanța dintre vârfurile, cărora le corespund cortegiile $\tilde{\alpha}$ și $\tilde{\beta}$, va fi egală cu l . În așa mod cortegiul $\tilde{\beta}$ poate fi ales în C_{n-k}^l moduri;

b) i unități din cortegiul $\tilde{\alpha}$ se înlocuiesc cu zerouri, iar $(l+i)$ zerouri se înlocuiesc cu unități (respectând condiția $l+i \leq n-k$). În rezultat obținem un cortegiu $\tilde{\beta}$ cu $(k+l)$ unități, iar distanța dintre $\tilde{\alpha}$ și $\tilde{\beta}$ va fi $l+2i$ (distanța este determinată de metrica Hamming și este egală cu suma $\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$). Un astfel de cortegiu $\tilde{\beta}$ poate fi ales în $C_k^i \cdot C_{n-k}^{l+i}$ moduri.

Prin urmare, obținem că suma distanțelor de la elementul $x \in \Gamma_k$ până la toate elementele mulțimii Γ_{k+l} este:

$$\sum_{i=0}^{\min\{k, n-k+l\}} (l+2i) \cdot C_k^i \cdot C_{n-k}^{l+i}.$$

Suma din lema 4.1.2 este o constantă ce caracterizează relația dintre mulțimile Γ_k și Γ_{k+l} . Vom nota această constantă prin σ_k^{k+l} . În mod similar se demonstrează că suma distanțelor dintre un element fixat $x \in \Gamma_{k+l}$ și toate elementele mulțimii Γ_k nu depinde de alegerea lui x , deci este o mărime constantă pe care o notăm prin σ_{k+l}^k . Ușor se demonstrează că $\sigma_k^{k+l} \neq \sigma_{k+l}^k$ pentru orice valori ale lui k și l ce verifică relațiile: $0 \leq k \leq n-l, 1 \leq l \leq n$ și $k+l \neq n-k$. În cazul când $k+l = n-k$, pentru mulțimile Γ_k și Γ_{n-k} are loc egalitatea $\sigma_k^{n-k} = \sigma_{n-k}^k$.

Consecință din lema 4.1.2. Pentru orice mulțime Γ_i , $1 \leq i \leq n$, a unui cub n -dimensional $I^n = (\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$, șirul $\sigma_0^i, \sigma_1^i, \dots, \sigma_{i-1}^i$ este descrescător.

Teorema 4.1.1. Pentru orice mulțime Γ_k a cubului n -dimensional $I^n = (\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$, $[n/2] < k \leq n-1$, este adevărată relația: $\sigma_{k-1}^k > \sigma_n^k$.

Demonstrație. În baza consecinței din lema 4.1.2, e suficient de demonstrat că pentru orice mulțime Γ_k , $[n/2] < k \leq n-1$, este adevărată relația $\sigma_{k-1}^k > \sigma_n^k$.

În mod evident se obține egalitatea:

$$\sigma_n^k = (n-k) \cdot |S_k| = (n-k) \cdot C_n^k.$$

În conformitate cu lema 4.1.2, vom avea:

$$\sigma_{k-1}^k = \sum_{i=0}^{\min\{k-1, n-k\}} (1+2i) \cdot C_{k-1}^i \cdot C_{n-k+1}^{1+i}.$$

Deoarece teorema se formulează pentru mulțimile Γ_k cu indicele $k > \lceil n/2 \rceil$, rezultă că are loc egalitatea: $\min\{k-1, n-k\} = n-k$. Deci, pentru σ_{k-1}^k obținem suma:

$$\sigma_{k-1}^k = \sum_{i=0}^{n-k} (1+2i) \cdot C_{k-1}^i \cdot C_{n-k+1}^{1+i}.$$

Examinând expresiile σ_n^k și σ_{k-1}^k și ținând cont de condiția $\lceil n/2 \rceil < k \leq n-1$, obținem inegalitatea din teoremă $\sigma_{k-1}^k > \sigma_n^k$.

4.2. Complexe de cuburi abstracte

Din punct de vedere teoretic, complexe de cuburi servesc drept instrument eficient în dezvoltarea unor compartimente ale topologiei combinatorice, fiind folosite la construirea invariantilor topologici prin aplicarea metodelor combinatoriale de studiu.

Structurile matematice construite cu ajutorul cuburilor abstracte n -dimensionale se întâlnesc în teoria modernă a topologiei algebrice, în particular la fundamentarea unor rezultate ce țin de studierea operațiilor definite pe coomologii. Totodată, aceste structuri se regăsesc într-un șir de aplicații, în special în geometria combinatorică, datorită faptului că o serie de structuri întâlnite în diverse ramuri ale matematicii conduc la studierea unor spații speciale cu o divizare specifică în cuburi.

În cele ce urmează vom porni de la studierea unor proprietăți speciale ale complexului de cuburi abstracte, necesare la soluționarea problemelor de amplasare pe structuri discrete, în particular pentru problema medianei.

Definiția 4.2.1. Familia nonvidă și finită de cuburi abstracte $\mathfrak{T}^n = \{I^m, 0 \leq m \leq n\}$, ce verifică proprietățile:

1. pentru oricare două cuburi abstracte $I^s, I^t \in \mathfrak{T}^n, 0 \leq s, t \leq n$, are loc relația $I^s \cap I^t = \emptyset$ sau $I^s \cap I^t \in \mathfrak{T}^n$;
2. orice fațetă I^k a cubului m -dimensional $I^m \in \mathfrak{T}^n, 0 \leq k < m \leq n$, este element al familiei $\mathfrak{T}^n$;
3. în $\mathfrak{T}^n$ există cel puțin un cub n -dimensional I^n ,

se numește **complex cubic abstract cu dimensiunea n** .

De rând cu definiția 4.2.1, uneori se apelează la o altă definiție a complexului de cuburi abstracte, prin care se pune accent, în special, pe structura combinatorică a acestuia:

Definiția 4.2.2. *O mulțime de elemente parțial ordonate $(\mathcal{H}, \subseteq)$, ce conține elementul cel mai mic $\emptyset$ și posedă proprietățile:*

- a) *pentru orice element $h \in \mathcal{H}$ segmentul $[0, h]$, determinat de relația $\subseteq$, este izomorf cu mulțimea parțial ordonată a fațetelor unui cub abstract;*
- b) *dacă h_1, h_2 sunt două elemente din $\mathcal{H}$, atunci pentru toate elementele $h \in \mathcal{H}$ ce satisfac relațiile $h \subseteq h_1$ și $h \subseteq h_2$, există un singur element maximal din $\mathcal{H}$;*
- c) *în $\mathcal{H}$ există cel puțin un element h încât segmentul $[0, h]$ este izomorf cu mulțimea parțial ordonată a fațetelor unui cub abstract n -dimensional,*
se numește complex de cuburi abstracte n -dimensional.

Elementele mulțimii $\mathcal{H}$ se numesc fațete ale complexului, iar dacă segmentul $[0, h]$, $h \in \mathcal{H}$, reprezintă mulțimea de fațete ale unui cub abstract I^k , atunci h se numește fațetă cu dimensiunea k .

Echivalența definițiilor 4.2.1 și 4.2.2 ușor se verifică. Într-adevăr, proprietatea c) în ambele definiții cere existența cel puțin a unui cub abstract n -dimensional. Proprietatea b) în definiția 4.2.2 este echivalentă cu condiția ca oricare două cuburi abstracte din complex să aibă intersecție vidă sau intersecția acestora să fie element al complexului. În sfârșit, condiția ca segmentul $[0, h]$ să fie ordonat cu mulțimea parțial ordonată a fațetelor unui cub abstract cere ca orice fațetă a cubului abstract să aparțină complexului.

Pentru a percepe mai ușor unele proprietăți ale complexului de cuburi abstracte, vom recurge și la interpretarea geometrică a acestuia, care reprezintă o realizare topologică a complexului într-un spațiu R^n . Fațetele acestui complex formează, în raport cu operația de includere $\subseteq$, o mulțime parțial ordonată, izomorfă cu $\mathcal{H}$. În examinările noastre ne vom folosi de definiția 4.2.1 a cubului abstract.

Notăm prin $\mathfrak{C}^m = \{I_1^m, I_2^m, \dots, I_{\beta_m}^m\}$ familia tuturor cuburilor abstracte m -dimensionale ale complexului cubic $\mathfrak{C}^n$, $0 \leq m \leq n$. Astfel, complexul cubic $\mathfrak{C}^n$ poate fi privit ca o familie de mulțimi de cuburi abstracte $\mathfrak{C}^n = \{\mathfrak{C}^0, \mathfrak{C}^1, \dots, \mathfrak{C}^n\}$ ce respectă condițiile definiției 4.2.1.

Considerăm aplicația univocă $h: \mathfrak{C}^m \rightarrow Z$. Fie $g_i \in Z$ imaginea cubului m -dimensional I_i^m , adică $h(I_i^m) = g_i$. Pentru comoditate, în loc de $h(I_i^m)$ vom folosi notația $g_i I_i^m$, iar în cazul cubului orientat negativ $-I_i^m$, vom scrie $-g_i I_i^m$.

Definiția 4.2.3. Suma

$$g_1 I_1^m + g_2 I_2^m + \dots + g_{\beta_m} I_{\beta_m}^m, 2 \leq m \leq n, \quad (4.1)$$

se numește $\square$ -lanț m -dimensional de cuburi abstracte al complexului $\mathfrak{I}^n$ și se notează prin L^m .

Definiția 4.2.4. Sumă a două $\square$ -lanțuri de cuburi abstracte m -dimensionale

$L_1^m = \sum_{i=1}^{\beta_m} g_i^1 I_i^m$ și $L_2^m = \sum_{i=1}^{\beta_m} g_i^2 I_i^m$, se numește expresia:

$$L_1^m + L_2^m = \sum_{i=1}^{\beta_m} (g_i^1 + g_i^2) I_i^m. \quad (4.2)$$

Mulțimea tuturor $\square$ -lanțurilor m -dimensionale ale complexului cubic $\mathfrak{I}^n$, din considerente de comoditate, o vom nota ca și în cazul complexelor de relații multi-are, prin $\mathcal{L}^m$. Lesne se verifică

Teorema 4.2.1. Mulțimea $\mathcal{L}^m$ formează un grup comutativ în raport cu operația de adunare (4.2).

Menționăm că orice cub $I^m \in \mathfrak{I}^m$ posedă m perechi de fațete opuse cu dimensiunea $m-1$. Fie $I_{i_j 0}^{m-1}$ și $I_{i_j 1}^{m-1}$ fațete opuse ale unui cub m -dimensional $I_i^m \in \mathfrak{I}^n$, $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $1 \leq i \leq \text{card} I^m$.

Definiția 4.2.5. Pentru cubul m -dimensional $I_i^m \in \mathfrak{I}^m$, $1 \leq m \leq n$, expresia

$$\square I_i^m = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (I_{i_j 0}^{m-1} - I_{i_j 1}^{m-1})$$

se numește $\square$ -frontieră a cubului I_i^m .

Pornind de la familia de $\square$ -lanțurilor m -dimensionale $\mathcal{L}^m$ ale complexului cubic $\mathfrak{I}^n$, vom construi omologiile cubice pentru $\mathfrak{I}^n$, apelând la tehnica bine cunoscută de la construirea omologiilor complexului de relații multi-are (a se vedea paragraful 2.6).

Definiția 4.2.6. Se numește $\square$ -frontieră a unui lanț m -dimensional $L^m \in \mathcal{L}^m$ expresia

$$\square L^m = \sum_{i=1}^{\beta_m} g_i \square I_i^m, \quad g_i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq \beta_m.$$

Menționăm că operația de definire a $\square$ -frontierei unui $\square$ -lanț $L^m \in \mathcal{L}^m$ este un omomorfism. Notăm acest omomorfism astfel:

$$\square(m): \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^{m-1}, \quad 1 \leq m \leq n,$$

și îl vom numi $\square$ -omomorfism. Un astfel de omomorfism, definit pe complexul cubic $\mathfrak{I}^n$, poate fi obținut aplicând operațiile de creare a $\square$ -frontierei pentru $I_i^m \in \mathfrak{I}^m$ și considerând

$\square I_i^m = L^{m-1} \in \mathcal{L}^{m-1}$, $1 \leq m \leq n$. Ca și în cazul clasic [40], vom nota prin $Im\square(m)$ imaginea, iar prin $Kern\square(m)$ – nucleul omomorfismului definit $\square(m)$.

Folosind operația de construire a $\square$ -frontierei unui cub m -dimensional $I^m \in \mathfrak{G}^m$ (a se vedea definiția 4.2.5) și operația de construire a $\square$ -frontierei unui lanț m -dimensional (a se vedea definiția 2.4.5), e lesne a demonstra

Teorema 4.2.2. *Pentru orice cub m -dimensional $I^m \in \mathfrak{G}^m$, $1 \leq m \leq n$, are loc egalitatea*

$$\square\square I^m = 0.$$

Tehnica de demonstrare a acestui rezultat este similară celei expuse în lucrarea [32].

Din teorema 4.2.2, ținând cont de definiția 4.2.6, obținem

Consecința 4.2.1. *Dacă L^m este un lanț m -dimensional și finit de cuburi abstracte al complexului $\mathfrak{I}^n$, atunci*

$$\square\square L^m = 0, \quad 1 \leq m \leq n.$$

Definiția 4.2.7. $\square$ -lanțul m -dimensional $L^m \in \mathcal{L}^m$ al unui complex cubic $\mathfrak{I}^n$, pentru care se respectă egalitatea $\square L^m = 0$, se numește $\square$ -ciclu de cuburi abstracte cu dimensiunea m (sau, mai simplu, $\square$ -ciclu m -dimensional).

Mulțimea tuturor ciclurilor ($\square$ -ciclurilor) de cuburi abstracte cu dimensiunea m din $\mathfrak{I}^n$ poate fi divizată în două submulțimi:

- A. $\square$ -cicluri m -dimensionale, care reprezintă $\square$ -frontiera unui $\square$ -lanț L^{m+1} cu dimensiunea $m+1$, $0 \leq m < n$. Aceste cicluri mărginesc ceva în complexul de cuburi studiat $\mathfrak{I}^n$.
- B. $\square$ -cicluri m -dimensionale, ce nu mărginesc nimic în complexul $\mathfrak{I}^n$.

Vom nota mulțimea tuturor $\square$ -ciclurilor cu dimensiunea m din $\mathfrak{I}^n$ prin $\mathfrak{Z}^m$, $0 \leq m \leq n$. Evident, $\mathfrak{Z}^m \subset \mathcal{L}^m$ și $\mathfrak{Z}^m$ formează un grup comutativ în raport cu operația aditivă (4.2), definită pentru lanțuri. Grupul $\square$ -ciclurilor cu dimensiunea m din $\mathfrak{I}^n$ îl vom nota prin $\mathfrak{Z}^m(\square)$.

Mulțimea tuturor $\square$ -lanțurilor cu dimensiunea m ale complexului $\mathfrak{I}^n$ ce verifică proprietatea A formează, în raport cu aceeași operație aditivă, un grup comutativ $\mathfrak{Z}_0^m(\square) \subset \mathfrak{Z}^m(\square)$, $0 \leq m \leq n$.

Definiția 4.2.8. Grupul factor $\mathfrak{Z}^m(\square)/\mathfrak{Z}_0^m(\square)$ se numește grup de $\square$ -omologii cu dimensiunea m a complexului cubic $\mathfrak{I}^n$. Vom nota acest grup prin $\square^m(\mathfrak{I}^n, Z)$, $0 \leq m \leq n$.

Respectarea decătre grupurile de $\square$ -omologii a următoarelor condiții:

$$\square^0(\mathfrak{I}^n, Z) \cong Z;$$

$$\square^1(\mathfrak{T}^n, Z) \cong \square^2(\mathfrak{T}^n, Z) \cong \dots \cong \square^n(\mathfrak{T}^n, Z) \cong 0,$$

înseamnă că complexul de cuburi abstracte $\mathfrak{T}^n$ este conex și aciclic.

De rând cu $\square$ -omologiile definite mai sus, care pot fi numite omologii cubice directe, vom studia, în cele ce urmează, un tip de omologii determinat de omomorfismul $\diamond(m): \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^{m+1}$, $0 \leq m \leq n-1$. Să fixăm mai întâi câteva rezultate preliminare.

Fie I^m un cub m -dimensional, reprezentat prin reperul său $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$. Acest cub are m perechi de fațete opuse cu dimensiunea $m-1$. Prin definiția cubului abstract, se consideră că fiecare pereche e formată din cuburi cu aceeași orientare, determinată de fiecare dată de reperul ce este subcortegiu ereditar al reperului $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$. Cu alte cuvinte, reperul ce fixează orientarea unei perechi de fațete $(m-1)$ -dimensionale din I^m se obține din reperul lui I^m prin eliminarea unuia dintre vârfurile $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$. De exemplu, în cazul cubului 3-dimensional (x_5, x_2, x_1, x_4) vom avea 3 perechi de fațete 2-dimensionale, determinate de reperele (x_5, x_2, x_1) , (x_5, x_2, x_4) și (x_5, x_1, x_4) . Printre acestea, prima pereche va fi formată din două cuburi orientate negativ fiecare (numărul de inversiuni în cortegiul (x_5, x_2, x_4) este impar), iar ultimele două perechi vor fi perechi de cuburi orientate pozitiv.

Fie I_i^m și I_i^{m+1} două cuburi abstracte ale unui complex de cuburi $\mathfrak{T}^n$ cu dimensiunile respective m și $m+1$. Dacă I^m este fațetă proprie a cubului I^{m+1} , atunci acestea se consideră coerente când sunt orientate la fel și se consideră noncoerente în cazul când sunt orientate în mod diferit. Definim coeficientul de $\diamond$ -coerență al cuburilor abstracte:

$$\xi_j^i(m, \diamond) = \begin{cases} +1, & \text{dacă cuburile } I_i^m \text{ și } I_j^{m+1} \text{ sunt coerente,} \\ -1, & \text{dacă cuburile } I_i^m \text{ și } I_j^{m+1} \text{ nu sunt coerente,} \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Fie $\Gamma(I^m)$ mulțimea tuturor cuburilor cu dimensiunea $m+1$ din $\mathfrak{T}^n$, pentru care I^m este fațetă proprie. Menționăm că reuniunea $\Gamma(I^m) \cup \{I^m\}$ formează steaua cubică a elementului $I^m \in \mathfrak{T}^m$, notată prin $qst I^m$.

Definiția 4.2.9. Pentru cubul abstract m -dimensional $I^m \in \mathfrak{T}^m$ cu mulțimea $\Gamma(I_i^m) = \{I_{\alpha_1}^{m+1}, I_{\alpha_2}^{m+1}, \dots, I_{\alpha_t}^{m+1}\}$, suma:

$$\diamond I_i^m = \xi_{\alpha_1}^i(m, \diamond) I_{\alpha_1}^{m+1} + \xi_{\alpha_2}^i(m, \diamond) I_{\alpha_2}^{m+1} + \dots + \xi_{\alpha_t}^i(m, \diamond) I_{\alpha_t}^{m+1} \quad (4.3)$$

se numește *cofrontieră algebrică* a cubului I_i^m , $0 \leq m \leq n-1$.

Luând în considerație simbolul $\diamond$ folosit la definirea cofrontierei algebrice, aceasta din urmă se va numi $\diamond$ -frontieră.

Evident, pentru orice cub n -dimensional I^n din $\mathfrak{I}^n$, precum și pentru cuburile m -dimensionale $I^m \in \mathfrak{I}^m$ cu proprietatea $\Gamma(I_i^m) = 0$, se va considera $\diamond I^n = 0$, respectiv $\diamond I_i^m = 0$, $0 \leq m \leq n-1$.

În mod similar cu cele din [32], [52] se demonstrează că pentru orice cub m -dimensional $I^m \in \mathfrak{I}^m$, $0 \leq m \leq n-1$, are loc egalitatea:

$$\diamond \diamond I^m = 0. \quad (4.4)$$

Fie acum L^m , $0 \leq m \leq n-1$, un lanț m -dimensional din $\mathfrak{I}^n$ definit prin suma (4.1).

Definiția 4.2.10. Pentru un lanț format din cuburi m -dimensionale $L^m = g_1 I_1^m + g_2 I_2^m + \dots + g_{\beta_m} I_{\beta_m}^m$, $0 \leq m \leq n-1$, $\beta_m = \text{card } \mathfrak{I}^m$, expresia:

$$\diamond L^m = \sum_{i=1}^{\beta_m} g_i \diamond I_i^m \quad (4.5)$$

se numește cofrontieră ($\diamond$ -frontieră) algebrică a lanțului L^m .

Dacă $\diamond L^m = 0$, atunci L^m se numește cociclu ($\diamond$ -ciclu) cu dimensiunea m al complexului $\mathfrak{I}^n$. Mulțimea tuturor cociclorilor m -dimensionale o vom nota prin $\mathfrak{Z}^m(\diamond)$, $0 \leq m \leq n-1$.

Fie $\mathcal{L}^m$ mulțimea tuturor ciclorilor m -dimensionale ale complexului $\mathfrak{I}^n$, $0 \leq m \leq n$.

Remarca 4.2.1. Operația de definire a cofrontierei algebrice a unui lanț cubic m -dimensional, $0 \leq m \leq n-1$, este un omomorfism [40]:

$$\diamond(m): \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^{m+1},$$

pe care îl vom numi $\diamond$ -omomorfism.

Teorema 4.2.3. Pentru orice lanț cubic m -dimensional $L^m \in \mathcal{L}^m$, $0 \leq m \leq n-1$, se verifică egalitatea:

$$\diamond \diamond L^m = 0.$$

Demonstrația teoremei rezultă nemijlocit din relațiile (4.4) și (4.5).

Teorema 4.2.4. Mulțimea tuturor cociclorilor cubice m -dimensionale $\mathfrak{Z}^m(\diamond)$ din $\mathfrak{I}^n$, în raport cu operația de adunare a două cicluri $z_1^m(\diamond), z_2^m(\diamond) \in \mathfrak{Z}^m(\diamond)$, definită prin egalitatea:

$$\begin{aligned} z_1^m(\diamond) + z_2^m(\diamond) &= (g_1^1 I_1^m + g_2^1 I_2^m + \dots + g_{\beta_m}^1 I_{\beta_m}^m) + (g_1^2 I_1^m + g_2^2 I_2^m + \dots + g_{\beta_m}^2 I_{\beta_m}^m) = \\ &= (g_1^1 + g_1^2) I_1^m + (g_2^1 + g_2^2) I_2^m + \dots + (g_{\beta_m}^1 + g_{\beta_m}^2) I_{\beta_m}^m, \end{aligned} \quad (4.6)$$

formează un subgrup comutativ al grupului lanțurilor cubice m -dimensionale $\mathcal{L}^m$, $0 \leq m \leq n-1$, examinat anterior.

Demonstrația teoremei se face în mod trivial, prin verificarea directă a axiomelor grupului comutativ [188].

Definiția 4.2.11. *Dacă în $\mathfrak{T}^n$ există două lanțuri $L^m \in \mathcal{L}^m$ și $L^{m+1} \in \mathcal{L}^{m+1}$ cu proprietățile:*

$$a) L^{m+1} = \diamond L^m,$$

$$b) \diamond L^{m+1} = 0,$$

atunci L^{m+1} se numește cociclu m -dimensional ∇ -omolog cu 0, și se notează prin

$$L^{m+1} = z^m(\diamond) \sim 0.$$

Două cocicluri $z_1^m(\diamond)$ și $z_2^m(\diamond)$ din grupul $\mathfrak{Z}^m(\diamond)$ ce respectă condiția: $z_1^m(\diamond) - z_2^m(\diamond) \sim 0$, le vom numi cicluri $\diamond$ -omoloage cu zero. Ușor se demonstrează că mulțimea tuturor cociclorilor m -dimensionale și $\diamond$ -omoloage cu zero, în raport cu operația de adunare (4.6), formează un subgrup din $\mathfrak{Z}^m(\diamond)$. Vom nota acest subgrup prin $\mathfrak{Z}_0^m(\diamond)$.

Definiția 4.2.12. *Grupul factor $\mathfrak{Z}^m(\diamond)/\mathfrak{Z}_0^m(\diamond)$ al complexului $\mathfrak{T}^n$ se va numi grup al coomologiilor ($\diamond$ -omoloagii) cu dimensiunea m peste grupul numerelor întregi Z , fiind notat prin $\diamond^m(\mathfrak{T}^m, Z)$, $0 \leq m \leq n$.*

În cele ce urmează vom prezenta câteva rezultate ce țin de studierea grupurilor de coomologii. Prin analogie cu complexul de relații multi-are, vom considera că un complex de cuburi abstracte $\mathfrak{T}_1$ este subcomplex al complexului de cuburi $\mathfrak{T}_2$ dacă orice cub din $\mathfrak{T}_1$ este și element al complexului $\mathfrak{T}_2$. Mulțimea tuturor cuburilor unui complex cubic abstract $\mathfrak{T}^n$, dimensiunile cărora nu depășesc un număr $r \leq n$, reprezintă la rândul său un complex de cuburi abstracte, numit schelet r -dimensional al $\mathfrak{T}^n$.

Definiția 4.2.13. *Un complex de cuburi abstracte $\mathfrak{T}^n$ se numește conex dacă pentru oricare două vârfuri a, b din $\mathfrak{T}^n$ există o succesiune de vârfuri $a = x_1, x_2, \dots, x_t = b$, încât orice două vârfuri vecine din această succesiune aparțin unui cub abstract r -dimensional, $1 \leq r \leq n$. (Reamintim că, cuburile 0-dimensionale ale unui complex cubic se mai numesc vârfuri, iar cuburile 1-dimensionale – muchii ale acestui complex).*

Această definiție este o generalizare a noțiunii de conexitate, folosită în cazul structurilor discrete, reprezentate prin grafuri [5], hipergrafuri [6], complexe simpliciale [17], [305] etc. Condiția de conexitate a unui complex de cuburi abstracte $\mathfrak{T}^n$, determinată de definiția 4.2.13, este echivalentă cu faptul că în complex nu există două subcomplexe $\mathfrak{T}_1$ și $\mathfrak{T}_2$, care ar satisface următoarele două condiții:

$$a) \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}^n;$$

$$b) \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2 = 0.$$

Într-adevăr, fie în $\mathfrak{T}^n$ există subcomplexele $\mathfrak{T}_1$ și $\mathfrak{T}_2$ cu proprietățile a) și b), indicate mai sus. Selectăm două vârfuri a și b ce aparțin, respectiv, subcomplexelor $\mathfrak{T}_1$ și $\mathfrak{T}_2$. Dacă în $\mathfrak{T}^n$ există succesiunea de vârfuri, menționată în definiția 4.2.13, atunci se va găsi un ultim vârf x_i al acestei succesiuni, $1 \leq i < t$, care este din $\mathfrak{T}_1$, însă nu și din $\mathfrak{T}_2$. În aceste condiții, existența cubului r -dimensional, $1 \leq r \leq n$, cerut prin definiția 4.2.13, nu este posibilă. Prin urmare, existența celor două subcomplexe $\mathfrak{T}_1$ și $\mathfrak{T}_2$ înseamnă lipsa succesiunii de vârfuri menționate.

Să admitem acum situația inversă. Fie $\mathfrak{T}^n$ un complex conex. Alegem un vârf oarecare a din $\mathfrak{T}^n$. Notăm prin $\mathcal{D}$ mulțimea tuturor vârfurilor complexului, care pot fi legate de a cu ajutorul succesiunilor de vârfuri indicate în definiția 4.2.13. Mulțimea cuburilor din $\mathfrak{T}^n$, care conțin cel puțin un vârf din $\mathcal{D}$, formează un subcomplex $\mathfrak{T}_1$ (condițiile definiției complexului de cuburi abstracte se verifică în mod evident – a se vedea definiția 4.2.1). Celelalte cuburi, dacă există, formează subcomplexul $\mathfrak{T}_2$, care este vid. Aceasta din urmă înseamnă că, pentru oricare două vârfuri a și b din $\mathfrak{T}^n$ există succesiunea menționată în definiția 4.2.13.

Similar cu alte structuri discrete cunoscute (grafurile, hipergrafurile, complexe simpliciale etc.), definim noțiunea de componentă conexă al unui complex de cuburi abstracte.

Definiția 4.2.14. *Subcomplexul maximal conex al complexului $\mathfrak{T}^n$ se numește componentă conexă a lui $\mathfrak{T}^n$.*

Fie $\mathcal{F} = \{\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots, \mathfrak{T}_p\}$ familia tuturor componentelor conexe ale complexului $\mathfrak{T}^n$. Aceste p complexe formează o divizare a complexului $\mathfrak{T}^n$ în componente conexe, adică:

$$\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{T}_p = \mathfrak{T}^n,$$

$$\mathfrak{T}_i \cap \mathfrak{T}_j = 0, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq p, \quad i \neq j.$$

Teorema 4.2.5. *Dacă $\diamond^m(\mathfrak{T}^n, Z)$ este grupul de coomologii cu dimensiunea m peste câmpul numerelor întregi Z al complexului $\mathfrak{T}^n = \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{T}_p$, iar $\diamond_i^m(\mathfrak{T}_i, Z)$ este grupul de coomologii cu dimensiunea m a subcomplexului $\mathfrak{T}_i$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq m < n$, atunci grupul $\diamond^m(\mathfrak{T}^n, Z)$ este izomorf cu suma directă a subgrupurilor $\diamond_1^m(\mathfrak{T}_1, Z)$, $\diamond_2^m(\mathfrak{T}_2, Z)$, ..., $\diamond_p^m(\mathfrak{T}_p, Z)$.*

Demonstrație. Dacă examinăm grupurile $\mathcal{L}^m$, $\mathcal{L}_1^m$, $\mathcal{L}_2^m$, ..., $\mathcal{L}_p^m$ ale tuturor lanțurilor cu dimensiunea m a complexelor $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_p$, atunci, evident, are loc egalitatea:

$$\mathcal{L}^m = \mathcal{L}_1^m + \mathcal{L}_2^m + \dots + \mathcal{L}_p^m. \quad (4.7)$$

Aplicăm $\diamond$ -omomorfismul $\diamond(m): \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^{m+1}$. Să considerăm:

$$\begin{aligned} \diamond \mathcal{L}^m &= \hat{\mathcal{L}}^{m+1}, \\ \diamond \mathcal{L}_i^m &= \hat{\mathcal{L}}_i^{m+1}, \quad 1 \leq i \leq p. \end{aligned}$$

Atunci, evident, $\hat{\mathcal{L}}^{m+1} \subset \mathcal{L}^{m+1}$ și $\hat{\mathcal{L}}_i^{m+1} \subset \mathcal{L}_i^{m+1}$, $1 \leq i \leq p$. Să arătăm că $\hat{\mathcal{L}}^{m+1}$ poate fi exprimată prin suma directă a grupurilor $\hat{\mathcal{L}}_1^m, \hat{\mathcal{L}}_2^m, \dots, \hat{\mathcal{L}}_p^m$. Pentru aceasta vom examina un lanț arbitrar $L^m = \mathcal{L}^m$. Prin urmare, $\diamond L^m = \hat{\mathcal{L}}^m$. Conform relației (4.7), există elementele $L_1^m \in \mathcal{L}_1^m, L_2^m \in \mathcal{L}_2^m, \dots, L_p^m \in \mathcal{L}_p^m$, care satisfac condițiile:

$$\begin{aligned} \diamond L_i^m &\in \mathcal{L}_i^m, \quad 1 \leq i \leq p, \\ \diamond L^m &= \diamond L_1^m + \diamond L_2^m + \dots + \diamond L_p^m, \end{aligned} \quad (4.8)$$

ceea ce înseamnă că $\hat{\mathcal{L}}^{m+1}$ se reprezintă ca sumă directă a grupurilor $\hat{\mathcal{L}}_1^m, \hat{\mathcal{L}}_2^m, \dots, \hat{\mathcal{L}}_p^m$.

Din condiția $\hat{\mathcal{L}}_i^{m+1} \subset \mathcal{L}_i^{m+1}$, $1 \leq i \leq p$, și relația (4.7) rezultă că descompunerea (4.8) se determină în mod univoc.

Pentru a finisa demonstrația este suficient de arătat că, pentru nucleele grupurilor de coomologii are loc o relație identică cu relații (4.7).

Alegem un element arbitrar $z \in \text{Kern} \diamond^m(\mathfrak{I}^n, Z)$. În baza relației (4.7), se vor găsi elementele $L_i^m \in \mathcal{L}_i^m$, $1 \leq i \leq p$, care garantează egalitatea: $z = L_1^m + L_2^m + \dots + L_p^m$. Prin urmare, obținem: $\diamond z = \diamond L_1^m + \diamond L_2^m + \dots + \diamond L_p^m = 0$. Luând în considerare implicațiile $\hat{\mathcal{L}}^{m+1} \subset \mathcal{L}^{m+1}$, $\hat{\mathcal{L}}_i^{m+1} \subset \mathcal{L}_i^{m+1}$, precum și relația (4.8), rezultă că $\diamond L_i^m = 0$, $1 \leq i \leq p$. Aceasta din urmă înseamnă că $L_i^m \in \text{Kern} \diamond^m(\mathfrak{I}_1, Z) + \text{Kern} \diamond^m(\mathfrak{I}_2, Z) + \dots + \text{Kern} \diamond^m(\mathfrak{I}_p, Z)$.

Unicitatea descompunerii decurge din relația (4.7). Din ultima egalitate obținută, precum și din faptul că $\hat{\mathcal{L}}_i^{m+1}$ se exprimă prin sumă directă a grupurilor $\hat{\mathcal{L}}_1^m, \hat{\mathcal{L}}_2^m, \dots, \hat{\mathcal{L}}_p^m$, rezultă afirmația teoremei.

Folosind această teoremă, se demonstrează proprietăți ale unui complex $\mathfrak{I}^n$ în termenii grupurilor de coomologii a componentelor conexe [160], [163].

Prin definiție, orice cub 0-dimensional al complexului $\mathfrak{I}^n$ se consideră orientat pozitiv. Fie $\mathfrak{G}^0 = \{I_1^0, I_2^0, \dots, I_{\alpha_0}^0\}$ familia tuturor cuburilor 0-dimensionale din $\mathfrak{I}^n$. Considerăm un lanț 0-dimensional $L^0 = g_1 I_1^0 + g_2 I_2^0 + \dots + g_{\alpha_0} I_{\alpha_0}^0$ peste câmpul numerelor întregi

$Z (g_i \in Z, 1 \leq i \leq \alpha_0)$. Definim indicele acestuia $E(L^0) = g_1 + g_2 + \dots + g_{\alpha_0}$. Pentru oricare două lanțuri 0-dimensionale L_1^0 și L_2^0 este evidentă egalitatea:

$$E(L_1^0 + L_2^0) = E(L_1^0) + E(L_2^0). \quad (4.9)$$

Ca și în cazul complexului de relații, pentru complexul de cuburi abstracte $\mathfrak{S}^n$ are loc

Lema 4.2.1. *Un lanț de cuburi 0-dimensionale I^0 al complexului conex de cuburi abstracte este $\square$ -omolog lui 0 dacă și numai dacă $E(I^0) = 0$.*

Demonstrația afirmației este similară cu demonstrația lemei 2.6.1.

Teorema 4.2.6. *Grupul 0-dimensional al $\square$ -omologiilor unui complex conex de cuburi abstracte $\mathfrak{S}^n$ este izomorf cu grupul numerelor întregi Z .*

Demonstrație. Fie $\mathcal{L}^0$ mulțimea tuturor lanțurilor 0-dimensionale din $\mathfrak{S}^n$. Prin definiție, $\mathcal{L}^0 = \mathfrak{X}^0$. În baza relației (4.9), rezultă că indicele E reprezintă o aplicație omeomorfă a grupului $\mathfrak{X}^0$ în grupul numerelor întregi Z . Mai sus s-a menționat că pentru orice element $p \in Z$ există un ciclu în $\mathfrak{X}^0$, indicele căruia este p . Prin urmare, $E(\mathfrak{X}^0) = Z$. Din lema 4.2.1 rezultă că nucleul omeomorfismului E este $\mathfrak{X}_0^0$ – mulțimea tuturor ciclurilor 0-dimensionale și $\square$ -omoloage cu zero. Aceasta din urmă și înseamnă că grupul 0-dimensional al $\square$ -omologiilor unui complex conex de cuburi abstracte $\mathfrak{S}^n$ este izomorf cu Z .

4.3. Caracteristica Euler

Caracteristica Euler se utilizează frecvent în topologia algebrică și combinatorica poliedrelor, reprezentând un invariant topologic – un număr, care descrie forma și structura spațiului. Inițial, caracteristica Euler a fost introdusă pentru studierea poliedrelor, în particular, s-a folosit la clasificarea corpurilor Platon. În matematica modernă, acest număr re apare în legătură cu studierea omologiilor spațiilor în corelație cu un șir de alți invarianti cunoscuți.

Pentru prima dată, formula ce leagă între ele numerele fațetelor unui poliedru 3-dimensional a fost obținută de către Leonard Euler în anul 1752 [190], cu toate că unele indicații referitoare la existența acesteia se regăsesc și în manuscrisele lui Rene Descartes. Formula a fost generalizată ceva mai târziu de către H. Poincare [189] pentru poliedre N -dimensionale:

$$\sum_{i=0}^N (-1)^i F_i = 1,$$

unde F_i reprezintă numărul fațetelor i -dimensionale ale poliedrului, considerând că însuși poliedrul N -dimensional este fațetă proprie a acestuia. În consecință, toate variațiile și

generalizările formulei în cauză au apărut în timp sub numirea de caracteristică Euler-Poincare. În cazul unei varietăți, caracteristica Euler-Poincare descrie relația dintre numărul de vârfuri, numărul de muchii și numărul de fațete:

$$V - E + F - (L - F) - 2(S - G) = 0,$$

unde V reprezintă numărul de vârfuri al varietății; E – numărul de muchii; F – numărul de fațete, G – numărul de găuri ce penetrează corpul solid, cunoscut în topologie ca gen; S – numărul de goluri interne (vidul inferior al corpului solid) pentru care totdeauna are loc inegalitatea $S \geq 1$; L – numărul de bucle.

În cele ce urmează, pentru o structură matematică oarecare A vom nota caracteristica Euler-Poincare prin $\chi(A)$. În dependență de structura studiată, caracteristica Euler-Poincare își găsește exprimarea prin diferite formule:

A) Pentru un complex celular W , caracteristica Euler-Poincare $\chi(W)$ se calculează ca o sumă alternantă a celulelor cu dimensiunea $i = 1, 2, 3, \dots$. Dacă complexul W conține doar celule cu dimensiunea nu mai mare decât p , atunci:

$$\chi(W) = C_0 - C_1 + C_2 - \dots + (-1)^p C_p, \quad (4.10)$$

unde C_i reprezintă numărul de celule cu dimensiunea $0 \leq i \leq p$, ale complexului W .

B) Dacă în cazul unui spațiu topologic X se cunosc grupurile de omologii de ordin $i = 1, 2, \dots, q$, atunci caracteristica Euler-Poincare a spațiului se reprezintă prin suma alternantă a rangurilor acestor grupuri:

$$\chi(W) = r_0 - r_1 + r_2 - \dots + (-1)^q r_q, \quad (4.11)$$

unde r_i este rangul grupului de omologii de ordin i , $0 \leq i \leq q$, al spațiului topologic X .

Desigur, în formulele (4.10) și (4.11) se consideră că numerele $C_i, 0 \leq i \leq p$, și $r_j, 0 \leq j \leq q$, sunt finite.

C) Pentru o suprafață orientabilă închisă cu genul g , notată prin T_g , caracteristica Euler-Poincare se calculează: $\chi(T_g) = 2 - 2g$.

D) Pentru o suprafață nonorientabilă închisă cu genul k , notată prin S_k , avem:

$$\chi(S_k) = 2 - k.$$

Vorbind despre caracteristica Euler-Poincare a spațiilor topologice, nu putem să nu menționăm unele proprietăți ale acesteia, folosite la definirea operațiilor asupra spațiilor respective. În lucrările [192], [193] au fost stabilite două rezultate importante pentru cazul a două spații topologice arbitrare X și Y :

- a)** $\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$. Dacă X și Y sunt spații disjuncte, atunci
 $\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y)$;
b) $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$.

Proprietățile respective au loc, după cum bine se cunoaște, și în cazul cardinalelor unor mulțimi de elemente arbitrare. Din acest punct de vedere, caracteristica Euler poate fi considerată ca o generalizare a noțiunii de cardinal, fapt menționat în lucrarea [191].

Pentru o varietate multidimensională, privită ca un spațiu topologic, caracteristica Euler-Poincare se calculează cu ajutorul rangurilor grupurilor de omologii, în conformitate cu formula (4.11). Ca rezultat obținem un număr întreg ce caracterizează varietatea respectivă. Totodată, este necesar să menționăm că caracteristica Euler-Poincare nu totdeauna este număr întreg. În confirmarea celor spuse putem aduce drept exemplu o structură matematică specială, numită orbivarietate (engl. *orbifold*). Amintim aici că orbivarietatea este un spațiu topologic Hausdorff X împreună cu o totalitate de aplicații deschise $\varphi_\alpha : A_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$, încât acestea formează o acoperire a mulțimii X . Pentru prima dată, orbivarietatea a fost studiată de către I. Satake în anii 50 ai secolului trecut, numind-o V -varietate [194], iar rezultatele fundamentale ce țin de studierea acestei structuri matematice se regăsesc în lucrările [195], [196], [197]. În situația unui caz particular de orbivarietate, cunoscută ca T -orbivarietate (engl. *teardrop orbifold*), caracteristica Euler-Poincare nu este număr întreg și este egală cu $1+1/p$, unde p este număr prim ce corespunde unghiului conic $2\pi/p$ [198], [199], [200].

În cele ce urmează vom stabili câteva relații pentru caracteristica Euler-Poincare în cazul complexului de cuburi abstracte $\mathfrak{T}^n$ [298], care reprezintă la rândul său o varietate cubică multidimensională (varietatea cubică abstractă se studiază în continuare în paragraful 4.4, folosind grupurile de omologii respective).

În paragraful 4.2 au fost calculate grupurile de $\square$ -omologii ale complexului $\mathfrak{T}^n$. Rangurile acestor grupuri reprezintă invariantii topologici ai complexului. La rândul său, prezintă interes problema construirii unui sistem complet de invarianti ai grupurilor de omologii ai complexului de cuburi abstracte $\mathfrak{T}^n$, chestiune importantă din punct de vedere teoretic, dar și utilă la soluționarea problemelor aplicative. Pentru grupul $\square^m(\mathfrak{T}^n, \mathbb{Z})$, $0 \leq m \leq n$, sistemul complet de invarianti este format din rangul acestui grup și coeficienții de torsiune ai grupului. Vom examina, în cele ce urmează, rolul invariantilor grupurilor de omologii în construirea formulei Euler-Poincare, cunoscută drept una dintre caracteristicile de bază la studierea proprietăților spațiilor topologice [162], [298]. Să arătăm, pentru început, că caracteristica Euler-Poincare poate fi stabilită în două moduri:

a) Cu ajutorul cardinalelor grupurilor de omologii, numite Betti. Rangul grupului $\square^m(\mathfrak{Z}^n, Z)$ îl vom nota prin ρ^m . Prin urmare, caracteristica Euler-Poincare obținută în așa mod este un invariant al complexului de cuburi abstracte $\mathfrak{Z}^n$.

b) Cu ajutorul numărului de cuburi abstracte m -dimensionale din $\mathfrak{Z}^n$, $0 \leq m \leq n$.

Menționăm, mai întâi, câteva proprietăți utile ale complexului de cuburi abstracte, folosite în cele expuse ulterior:

A) Mulțimea $\mathcal{L}^m$ a tuturor lanțurilor cubice m -dimensionale din $\mathfrak{Z}^n$ formează un grup comutativ în raport cu operația de adunare, definită anterior (a se vedea teorema 4.2.1).

B) Grupul $\mathcal{L}^m$ posedă un sistem finit de generatori. Afirmatia rezultă din faptul că $\mathfrak{Z}^n$ este un complex finit, precum și din operația (4.2) de adunare a lanțurilor. Prin urmare, în $\mathcal{L}^m$ există un număr finit de lanțuri m -dimensionale $L_{i_1}^m, L_{i_2}^m, \dots, L_{i_t}^m$, încât orice lanț $L^m \in \mathcal{L}^m$ se exprimă prin combinația liniară a acestora:

$$L^m = p_1 L_{i_1}^m + p_2 L_{i_2}^m + \dots + p_t L_{i_t}^m,$$

unde $p_1, p_2, \dots, p_t$ sunt numere întregi. Se cunoaște că, dacă un grup oarecare posedă sistem finit de generatori, atunci orice subgrup și orice grup-factor al acestuia posedă, de asemenea, sistem finit de generatori [40]. Prin urmare, fiecare dintre grupurile de omologii $\square^0(\mathfrak{Z}^n, Z), \square^1(\mathfrak{Z}^n, Z), \dots, \square^n(\mathfrak{Z}^n, Z)$ posedă un sistem finit de generatori.

C) Pentru orice grup există sistem de generatori. Ba mai mult, pentru același grup ar putea să existe sisteme cu număr diferit de generatori. Dacă grupul conține un element ce poate fi considerat generator al grupului, atunci acesta se numește grup ciclu [202].

Definiția 4.3.1 [202]. *Dacă x este elementul generator al unui grup ciclic A și este cel mai mic număr natural pentru care are loc egalitatea $p \cdot x = 0$, atunci spunem că generatorul x și însuși grupul ciclic A este de ordin p . În cazul $p = 0$ se spune că A este un grup liber.*

Grupurile ciclice joacă un rol important la studierea structurii unui grup comutativ. Rezultatul de bază care stabilește legătura dintre un grup comutativ și subgrupurile ciclice ale acestuia a fost obținut de către matematicianul Niels Henrik Abel. Mai târziu, acest rezultat a fost generalizat pentru grupuri cu sisteme generatoare finite. Astfel, în cazul unui grup comutativ are loc următoarea

Teorema 4.3.1 [52], [203]. *Pentru un grup comutativ A cu un sistem finit de generatori sunt adevărate afirmațiile:*

I. *Grupul A se descompune în mod univoc în suma directă a grupurilor $A_1, A_2, \dots, A_r; B_1, B_2, \dots, B_q$ cu proprietățile:*

a) A_i este grup ciclic liber, $1 \leq i \leq r$;

b) B_j este grup ciclic, gradul căruia τ_j este finit și este divizor al numărului τ_{j+1} ,
 $1 \leq j \leq q-1$ (în cazul $i = q$ rămâne doar condiția ca τ_j să fie număr finit).

II. Numerele $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q$ formează un sistem complet de invarianți numerici ai grupului A .

Definiția 4.3.2 [52]. Dacă un grup comutativ A se descompune în suma directă a grupurilor ciclice $A_1, A_2, \dots, A_r; B_1, B_2, \dots, B_q$ ce posedă proprietățile a) și b) menționate în teorema 4.3.1, atunci numărul r se numește rang al grupului A , iar $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q$ – coeficienți de torsiune.

Menționăm că, dacă toate elementele grupului A sunt de ordin m -număr impar, atunci rangul grupului A este egal cu zero, iar toți coeficienții de torsiune $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q$ sunt egali cu m . În acest caz, numărul q se numește rang după modulul m al grupului A [202]. Să examinăm numerele Betti într-un complex de cuburi abstracte.

Definiția 4.3.3. Rangul grupului de omologii $\square^m(\mathfrak{I}^n, Z)$ al complexului n -dimensional de cuburi abstracte $\mathfrak{I}^n$ se numește număr Betti cu dimensiunea m al acestui complex și se notează:

$$\rho^m = \text{card } \square^m(\mathfrak{I}^n, Z), \quad 0 \leq m \leq n.$$

Coeficienții de torsiune ai acestui grup se numesc coeficienți de torsiune cu dimensiune m și se notează prin $\tau_1^m, \tau_2^m, \dots, \tau_q^m$.

Vom nota prin α_m numărul de cuburi abstracte m -dimensionale ale complexului $\mathfrak{I}^n$:

$$\alpha_m = \text{card } \mathfrak{I}^m, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Teorema 4.3.2. Dacă $\mathfrak{I}_1^n, \mathfrak{I}_2^n, \dots, \mathfrak{I}_p^n$ sunt componente conexe ale complexului $\mathfrak{I}^n$ și $\mathfrak{I}^n = \mathfrak{I}_1^n \cup \mathfrak{I}_2^n \cup \dots \cup \mathfrak{I}_p^n$, atunci are loc egalitatea:

$$\square^0(\mathfrak{I}^n, Z) = \underbrace{Z + Z + \dots + Z}_{q \text{ ori}}.$$

Demonstrație. Evident, pentru familiile de lanțuri m -dimensionale $\mathcal{L}^m, \mathcal{L}_1^m, \mathcal{L}_2^m, \dots, \mathcal{L}_p^m$ ale complexelor de cuburi abstracte $\mathfrak{I}_n, \mathfrak{I}_1^n, \mathfrak{I}_2^n, \dots, \mathfrak{I}_p^n$ este adevărată egalitatea:

$$\mathcal{L}^m = \mathcal{L}_1^m + \mathcal{L}_2^m + \dots + \mathcal{L}_p^m. \quad (4.12)$$

În condițiile $\square$ -omomorfismului $\square(m): \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^{m-1}, 1 \leq m \leq n$, avem:

$$\square(\mathcal{L}^m) = \square(\mathcal{L}_1^m) + \square(\mathcal{L}_2^m) + \dots + \square(\mathcal{L}_p^m). \quad (4.13)$$

Să examinăm acum nucleele grupurilor de $\square$ -omologii cu dimensiunea m , $1 \leq m \leq n$. În baza relației (4.12), pentru orice element L^m ce aparține nucleului grupului $\square^m(\mathfrak{S}^n, Z)$ există elementele $L_i^m \in \mathcal{L}_i^m$, $1 \leq i \leq p$, ce garantează egalitatea:

$$L^m = L_1^m + L_2^m + \dots + L_p^m,$$

și, în consecință:

$$\square(L^m) = \square(L_1^m) + \square(L_2^m) + \dots + \square(L_p^m).$$

Deoarece L^m aparține nucleului grupului $\square^m(\mathfrak{S}^n, Z)$, rezultă egalitatea $\square(L_i^m) = 0$, $1 \leq i \leq p$.

Din cele expuse mai sus, facem concluzia că grupul $\square^m(\mathfrak{S}^n, Z)$ se exprimă prin suma directă a grupurilor de omologii $\square^m(\mathfrak{S}_i^n, Z)$, $1 \leq i \leq p$. Reșind din definiția noțiunii de componentă conexă a complexului, în cazul $m = 0$ obținem:

$$\square^0(\mathfrak{S}^n, Z) = \square^0(\mathfrak{S}_1^n, Z) + \square^0(\mathfrak{S}_2^n, Z) + \dots + \square^0(\mathfrak{S}_p^n, Z).$$

Luând în considerație că grupul de omologii cu dimensiunea 0 al unui complex de cuburi abstracte este izomorf grupului numerelor întregi Z (a se vedea teorema 4.2.5), rezultă:

$$\square^0(\mathfrak{S}^n, Z) = \underbrace{Z + Z + \dots + Z}_{\text{de } p \text{ ori}}.$$

Teorema 4.3.3. *Pentru un complex de cuburi abstracte $\mathfrak{S}^n$ este adevărată egalitatea:*

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \alpha_m = \sum_{m=0}^n (-1)^m \rho^m. \quad (4.14)$$

Pentru a demonstra teorema, vom avea nevoie de anumite rezultate suplimentare, unele dintre ele fiind cunoscute din teoria grafurilor.

În teoria grupurilor, noțiunea de rang se mai definește prin sistemul de elemente liniar independent. În cazul unui grup comutativ A , elementele $a_1, a_2, \dots, a_s$ se numesc liniar independente dacă din relația:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s = 0$$

cu coeficienții λ_i întregi, $1 \leq i \leq s$, rezultă egalitatea $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$.

Definiția 4.3.4 [40]. *Numărul maxim de elemente liniar independente ale unui grup comutativ A se numește rang $\rho(A)$ al acestui grup.*

În lucrarea [52] se demonstrează echivalența definițiilor 4.3.2 și 4.3.4. Prin urmare, în cazul unui grup comutativ, numărul r din definiția 4.3.2 coincide cu numărul $\rho(A)$, determinat prin definiția 4.3.3.

Fie $\mathfrak{X}^m$ mulțimea tuturor $\square$ -ciclurilor cu dimensiunea m din complexul $\mathfrak{Z}^n$, $0 \leq m \leq n$, iar $\mathfrak{X}_0^m$ – mulțimea lanțurilor din $\mathfrak{X}^m$ ce verifică proprietatea A, formulată în paragraful 4.2.

Lema 4.3.1. Pentru grupul factor $\mathfrak{X}^m / \mathfrak{X}_0^m$ de $\square$ -omologii cu dimensiunea m al complexului cubic $\mathfrak{Z}^n$ are loc egalitatea:

$$\rho(\mathfrak{X}^m) = \rho(\mathfrak{X}_0^m) + \rho(\mathfrak{X}^m / \mathfrak{X}_0^m). \quad (4.15)$$

Demonstrație. Vom folosi noțiunea de rang al unui grup, determinat cu ajutorul numărului maxim de elemente liniar independente ale grupului (a se vedea definiția 4.3.4).

Fie $y_1, y_2, \dots, y_r$ un sistem de elemente liniar independente al grupului $\mathfrak{X}_0^m$, iar $z_1, z_2, \dots, z_s$ – sistem de elemente liniar independente al grupului $\mathfrak{X}^m / \mathfrak{X}_0^m$. Fiecare element $z \in \mathfrak{X}_0^m$ generează o clasă de echivalență. Din fiecare astfel de clasă m alegem câte un element x_i , $1 \leq i \leq s$. Vom arăta că în grupul $\mathfrak{X}^m$, un sistem de elemente

$$x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_r \quad (4.16)$$

este liniar independent. Fie există numerele întregi $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq s$, și $\mu_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq r$, încât:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_s x_s + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_r y_r = 0. \quad (4.17)$$

Deoarece x_i sunt elementele din clasele de echivalență a elementelor z_i , $1 \leq i \leq s$, rezultă că în grupul factor $\mathfrak{X}^m / \mathfrak{X}_0^m$ se respectă egalitatea:

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_s z_s = 0. \quad (4.18)$$

Întrucât elementele $z_1, z_2, \dots, z_s$ sunt liniar independente, rezultă că egalitatea (4.18) are loc doar în cazul $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$. Prin urmare, din relația (4.17) rămâne:

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_r y_r = 0.$$

Totodată, deoarece elementele $y_1, y_2, \dots, y_r$ formează un sistem liniar independent, rezultă că $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0$, ceea ce înseamnă că sistemul (4.16) este liniar independent.

Dat fiind că $\mathfrak{Z}^n$ este un complex cubic finit, rezultă că rangurile grupurilor studiate sunt finite. Fără a pierde din generalitate, vom considera că $y_1, y_2, \dots, y_r$ și $z_1, z_2, \dots, z_s$ sunt sisteme maximale liniar independente. Să arătăm că, în acest caz, sistemul (4.16) este un sistem maximal de elemente liniar independente al grupului $\mathfrak{X}^m$.

Alegem un element arbitrar x din $\mathfrak{X}^m$ și admitem că z este element corespunzător din $\mathfrak{X}^m / \mathfrak{X}_0^m$. Deoarece $z_1, z_2, \dots, z_s$ este un sistem maximal de elemente liniar independente, rezultă că egalitatea:

$$\mu z + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \dots + \mu_s z_s = 0 \quad (4.19)$$

poate avea loc doar în cazul $\mu \neq 0$, unde $\mu, \mu_i \in Z$, $1 \leq i \leq s$ (elementele $z, z_1, z_2, \dots, z_s$ nu mai formează sistem liniar independent). Prin urmare, pentru elementele $x, x_1, x_2, \dots, x_s$ se respectă egalitatea:

$$\mu x + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_s x_s = y \in \mathcal{X}_0^m. \quad (4.20)$$

De asemenea, deoarece $y_1, y_2, \dots, y_r$ formează sistem maximal liniar independent, rezultă că egalitatea:

$$\xi y + \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \dots + \xi_r y_r = 0 \quad (4.21)$$

are loc doar în cazul $\xi \neq 0$ (ținem cont de faptul că $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ sunt elemente ale grupului numerelor întregi Z). Dacă acum expresia lui y , reprezentată prin relația (4.20), o substituim în (4.21), atunci obținem următoarea egalitate:

$$\xi \mu \cdot y + \sum_{i=1}^s \xi \mu_i x_i + \sum_{j=1}^r \xi_j y_j = 0.$$

Din cele menționate constatăm că are loc relația $\xi \mu \neq 0$, ceea ce înseamnă că sistemul format dintr-un element arbitrar x și elementele (4.16) formează un sistem maximal de elemente liniar independente.

Prin urmare, am obținut:

$$\rho(\mathcal{X}^m) = r + s = \rho(\mathcal{X}_0^m) + \rho(\mathcal{X}^m / \mathcal{X}_0^m).$$

Lema 4.3.2. Grupul ciclurilor $(m-1)$ -dimensionale și $\square$ -omoloage lui zero $\mathcal{X}_0^{m-1}$ al unui complex n -dimensional de cuburi abstracte $\mathfrak{Z}^n$ este izomorf cu grupul factor $\mathcal{X}^m / \mathcal{X}_0^m$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{X}_0^{m-1}$ grupul ciclurilor $(m-1)$ -dimensionale și $\square$ -omoloage lui zero din $\mathfrak{Z}^n$. În baza definiției ciclului m -dimensional, este evidentă relația $\mathcal{X}^m \subset \mathcal{L}^m$, $1 \leq m \leq n$.

Operația de formare a $\square$ -frontierei în $\mathfrak{Z}^n$ reprezintă un $\square$ -omomorfism $\square(m): \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}^{m-1}$ (a se vedea definiția 4.2.6). În baza definiției de ciclu și ciclu $\square$ -omolog lui zero, rezultă că nucleul $\square$ -omomorfismului $\square(m)$ în $\mathcal{L}^m$ este subgrupul $\mathcal{X}^m$. Aceasta din urmă și înseamnă că grupurile $\mathcal{L}^m / \mathcal{X}^m$ și $\mathcal{X}_0^{m-1}$ sunt izomorfe.

Vom demonstra acum teorema 4.3.3.

Demonstrație. Fie $\mathcal{G}^m$ familia tuturor cuburilor m -dimensionale ale complexului $\mathfrak{Z}^n$. Elementele familiei $\mathcal{G}^m$ sunt, evident, liniar independente și formează un sistem maximal de generatori ai grupului comutativ $\mathcal{L}^m$. Prin urmare, putem scrie:

$$\rho(\mathcal{L}^m) = \text{card} \mathfrak{G}^m = \alpha_m.$$

În baza lemei 4.3.1, demonstrate mai sus, pentru grupurile $\mathcal{L}^m$, $\mathfrak{X}^m$, $\mathcal{L}^m / \mathfrak{X}^m$ are loc egalitatea:

$$\rho(\mathcal{L}^m) = \rho(\mathfrak{X}^m) + \rho(\mathcal{L}^m / \mathfrak{X}^m). \quad (4.22)$$

Conform lemei 4.3.2, grupurile $\mathcal{L}^m / \mathfrak{X}^m$ și $\mathfrak{X}_0^{m-1}$ sunt izomorfe. Prin urmare, relația (4.22) se transcrie:

$$\rho(\mathcal{L}^m) = \rho(\mathfrak{X}^m) + \rho(\mathfrak{X}_0^{m-1}), \quad (4.23)$$

pentru $1 \leq m \leq n$. În cazul $m = 0$ se consideră $\mathcal{L}^0 = \mathfrak{X}^0$, ceea ce implică egalitatea:

$$\rho(\mathcal{L}^0) = \rho(\mathfrak{X}^0).$$

Dacă, convențional, acceptăm egalitatea $\rho(\mathfrak{X}_0^{-1}) = 0$, atunci relația 4.2.3 devine adevărată pentru orice m , $0 \leq m \leq n$. Luând în considerație definiția 4.3.2 și aplicând lema 4.3.1 pentru grupurile $\mathfrak{X}^m$, $\mathfrak{X}_0^m$ și grupul factor $\mathfrak{X}^m / \mathfrak{X}_0^m$, obținem:

$$\rho(\mathfrak{X}^m) = \rho(\mathfrak{X}_0^m) + \rho(\mathfrak{X}^m / \mathfrak{X}_0^m) = \rho(\mathfrak{X}_0^m) + \rho^m, \quad 0 \leq m \leq n. \quad (4.24)$$

Substituind expresia (4.24) a lui ρ^m în (4.23), obținem:

$$\rho(\mathcal{L}^m) = \rho(\mathfrak{X}_0^m) + \rho^m + \rho(\mathfrak{X}_0^{m-1}), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (4.25)$$

Ținând cont de faptul că $\mathfrak{X}_0^n = \{0\}$ și, în baza celor menționate anterior, avem $\rho(\mathfrak{X}_0^{-1}) = \rho(\mathfrak{X}_0^n) = 0$.

Deoarece, precum s-a demonstrat mai sus, este adevărată egalitatea $\rho(\mathcal{L}^m) = \text{card} \mathfrak{G}^m = \alpha_m$, obținem:

$$\alpha^m = \rho^m + \rho(\mathfrak{X}_0^m) + \rho(\mathfrak{X}_0^{m-1}), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (4.26)$$

Înmulțim ambele părți ale relației (4.26) la $(-1)^m$ și sumăm după indicele m , $0 \leq m \leq n$. Evident, are loc egalitatea:

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \rho(\mathfrak{X}_0^{m-1}) + \sum_{m=0}^n (-1)^m \rho(\mathfrak{X}_0^m) = 0,$$

în condițiile: $\mathfrak{X}_0^n = \{0\}$, $\rho(\mathfrak{X}_0^{-1}) = \rho(\mathfrak{X}_0^n) = 0$.

În final, din relația 4.26 obținem: $\sum_{m=0}^n (-1)^m \alpha_m = \sum_{m=0}^n (-1)^m \rho^m$.

Prin teorema demonstrată am stabilit relația dintre numărul cuburilor m -dimensionale și numerele Betti pentru un complex de cuburi abstracte.

4.4. Varietăți abstracte

Noțiunea de varietate a apărut odată cu dezvoltarea unor ramuri ale științei din punct de vedere teoretico-aplicativ. În matematică, noțiunea respectivă reprezintă deseori diverse mulțimi de obiecte (geometrice sau de altă natură) care permit introducerea parametrizării locale. Studiul varietăților a început la sfârșitul sec. XIX, odată cu necesitatea fundamentărilor teoretice ale unor rezultate ce țin de geometria diferențială și teoria grupurilor Lie. Cu toate acestea, primele definiții exacte ale acestei noțiuni au apărut abia prin anii '30 ai secolului trecut. Astăzi, vorbind despre o varietate topologică, considerăm că este dat un spațiu topologic Hausdorff cu o bază numărabilă, în care vecinătatea oricărui punct este omeomorfă spațiului euclidian R^n . Numărul n se numește dimensiune a varietății. Spațiul euclidian poate servi drept cel mai simplu exemplu de varietate. Varietățile își găsesc aplicații la dezvoltarea diferitelor ramuri ale științei moderne: în mecanica clasică, varietatea folosită este spațiul fazelor; în teoria relativității, varietatea pseudo Riemann 4-dimensională servește drept model de spațiu-timp.

Varietatea, ca structură topologică, este întâlnită în lucrările mai multor matematicieni sub diferite aspecte, legate de soluționarea problemelor teoretico-aplicative: varietăți topologice 4-dimensionale cu structură netedă (Fredman M. & Guinn F. [205]); varietăți în studierea structurilor netede, a formelor diferențiale, coomologiilor Rham, grupurilor Lie (Lee J. [206]) etc.; aplicații în dezvoltarea topologiei algebrice, studierea conexității și compactibilității spațiilor, clasificarea suprafețelor (Massey W. [207], Munkres J. [208]); varietăți infinite dimensionale în geometria diferențială (Lang S. [204]).

Este bine cunoscută definiția clasică a varietății [205], [206], [305].

Definiția 4.4.1. *Un spațiu topologic M cu proprietățile:*

- a) M este un spațiu topologic Hausdorff (adică verifică axioma de separabilitate: două puncte distincte au vecinătăți distincte);*
- b) M are o bază numărabilă de mulțimi deschise;*
- c) orice punct din M are o vecinătate omeomorfă cu o mulțime deschisă din R^n ,*

se numește varietate topologică cu dimensiunea n .

Cu toate că varietatea poate fi interpretată ca un obiect geometric cu o structură topologică bine pronunțată, studierea acesteia cu ajutorul metodelor topologice prezintă deseori dificultăți majore. Din aceste considerente, pentru descrierea proprietăților și a diverselor aplicații ale varietăților se recurge frecvent la aplicarea omologiilor sau a unor construcții speciale ce rezultă, în primul rând, din echivalența locală a varietății cu spațiul R^n .

Inițial, în cercetările matematicienilor, varietatea era interpretată ca un spațiu triunghiulat, ceea ce a condus ulterior la noțiunea de complex. Pe parcurs însă lucrurile au evoluat în dependență de specificul problemelor teoretico-aplicative examinate. În prezent, varietatea este percepută ca un spațiu topologic ce posedă proprietăți locale ale unui spațiu euclidian care, în același timp, poate avea o structură generală mult mai complexă. Rezultatele obținute în ultimii ani la studierea complexelor de cuburi abstracte n -dimensionale au stimulat interesul față de varietățile determinate de astfel de complexe. În cazul unor astfel de varietăți spunem că acestea reprezintă un spațiu cubiliat. Desigur, rezultatele ce țin de studierea spațiilor cubiliate au fost, în mare parte, precedate de investigațiile efectuate asupra varietăților construite cu ajutorul complexelor de simplexe abstracte și proprietăților acestora.

La general vorbind, pentru varietățile n -dimensionale este actuală problema divizării lor într-un număr finit de poliedre. Totuși, mai frecvent, în diverse aplicații se întâlnește problema divizării varietăților în simplexe n -dimensionale [52], [62], [209], [305]. Se cunoaște că nu orice varietate compactă [210] $M^n \subset E^{n+1}$ poate fi divizată într-un număr finit de simplexe n -dimensionale, care în ansamblu formează un complex simplicial. Dacă varietatea admite o astfel de divizare, atunci ea se numește varietate n -dimensională și fără borduri. Astfel de varietăți au fost studiate de către V.Boltyanski [305].

În cele ce urmează, folosind G -complexul de relații multi-are, definit în paragraful 2.3, vom efectua un studiu ce ține de proprietățile varietăților, generate de astfel de complexe. Vom vedea că unele rezultate, cunoscute pentru varietățile determinate de complexe simple de relații și descrise în lucrările [15], [19], [23], [153], pot fi extinse și asupra acestor tipuri de varietăți.

Fie $\mathfrak{R}^{n+1} = \mathfrak{X}^n = (\mathfrak{Q}^0, \mathfrak{Q}^1, \dots, \mathfrak{Q}^n)$ un G -complex de relații multi-are cu familiile de quasisimplexe $\mathfrak{Q}^m = \{Q_1^m, Q_2^m, \dots, Q_{\alpha_m}^m\}$, $0 \leq m \leq n$.

Definiția 4.4.2. G -complexul de relații multi-are $\mathfrak{X}^n$ ce posedă proprietățile:

- a) orice quasisimplex cu dimensiunea $n-1$ este o fațetă comună exact pentru două quasisimplexe abstracte cu dimensiunea n din $\mathfrak{X}^n$;
- b) pentru oricare două quasisimplexe n -dimensionale distincte Q_i^n și Q_j^n din $\mathfrak{X}^n$ există o succesiune de quasisimplexe n -dimensionale $Q_{i_1}^n = Q_i^n, Q_{i_2}^n, \dots, Q_{i_q}^n = Q_j^n$, $k \geq 2$, încât $Q_{i_k}^n \cap Q_{i_{k+1}}^n \in \mathfrak{Q}^{n-1}$, $1 \leq k \leq q-1$;
- c) pentru orice quasisimplex m -dimensional Q^m din complexul $\mathfrak{X}^n$ există un quasisimplex n -dimensional Q^n , încât Q^m este o fațetă a lui Q^n , $0 \leq m \leq n-1$;

d) dacă Q_i^n și Q_j^n sunt două quasisimplexe distincte din $\mathcal{K}^n$, cu intersecția $Q_i^n \cap Q_j^n = Q^m$, atunci există un șir de quasisimplexe $Q_1^n = Q_i^n, Q_2^n, \dots, Q_k^n = Q_j^n$ cu proprietatea din b), ce respectă relația:

$$Q^m = Q_{i_1}^n \cap Q_{i_2}^n \cap \dots \cap Q_{i_q}^n, \quad 0 \leq m \leq n-1,$$

se numește **varietate abstractă degenerată** cu dimensiunea n .

Varietatea abstractă determinată de G -complexul de relații multi-are $\mathcal{K}^n$ o vom nota prin $\mathcal{V}^n$. Din prima condiție a definiției 4.4.2 rezultă că orice quasisimplex n -dimensional din $\mathcal{K}^n$ participă doar o singură dată la construirea varietății $\mathcal{V}^n$. Varietatea m -dimensională $\mathcal{V}^m, 0 \leq m \leq n-1$, determinată de subcomplexul $\mathcal{K}^m \subset \mathcal{K}^n$, se numește subvarietate a lui $\mathcal{V}^n$ (se va scrie $\mathcal{V}^m \subset \mathcal{V}^n$).

Fie Q^n un quasisimplex n -dimensional. Evident, mulțimea tuturor fațetelor din Q^n formează un complex de relații multi-are (a se vedea definiția 2.1.1). Subcomplexul determinat de toate fațetele din Q^n cu dimensiunea $(n-1)$ îl vom numi frontieră-complex a lui Q^n și îl vom nota prin $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$.

Teorema 4.4.1. *Complexul de relații $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$ este o varietate abstractă $(n-1)$ -dimensională degenerată fără borduri.*

Demonstrație. Pentru a demonstra teorema e suficient să arătăm că complexul $\mathcal{K}^{n-1}$ posedă proprietățile a) – d) din definiția 4.4.2:

a) dat fiind faptul că Q^n este un quasisimplex n -dimensional, orice fațetă cu dimensiunea $(n-2)$ a acestuia aparține cel puțin la două fațete $(n-1)$ -dimensionale din Q^n . Prin urmare, complexul de simplexe respectă prima condiție a definiției 4.4.2;

b) întrucât orice fațetă cu dimensiunea $(n-2)$ din Q^n aparține cel puțin la două fațete $(n-1)$ -dimensionale, existența în $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$ a succesiunii de quasisimplexe cu proprietatea menționată în punctul b) a definiției 4.4.2 este evidentă;

c) orice quasisimplex n -dimensional din $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$, $0 \leq m \leq n-2$, reprezintă o fațetă a cel puțin unui quasisimplex cu dimensiunea $n-1$ din $\mathcal{K}^{n-1}$, chestiune ce rezultă din definiția quasisimplexului Q^n (a se vedea definiția 2.3.4);

d) ținând cont de definirea complexului $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$, precum și de faptul că oricare două quasisimplexe $Q_1^{n-1}, Q_2^{n-1} \in \mathcal{K}^{n-1}$, fiind fațete cu dimensiunea $(n-1)$ din Q^n , au o intersecție

vidă sau aceasta reprezintă o fațetă comună $(n-2)$ -dimensională $Q^{n-2} \in \mathcal{K}^{n-1}$, rezultă că succesiunea indicată în punctul d) al definiției 4.4.2 e formată din înseși simplexele menționate Q_1^{n-1} și Q_2^{n-1} .

Ținând cont de definiția quasisimplexului n -dimensional (a se vedea definiția 2.3.4), rezultă că complexul $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$ este fără borduri. Teorema este demonstrată.

Amintim că, la construirea grupurilor de Δ -omologii ale unui G -complex de relații multi-are au fost folosite Δ -ciclurile complexului și Δ -ciclurile omoloage cu zero (a se vedea definiția 2.5.5 și definiția 2.5.6). Vom spune că, un Δ -ciclu n -dimensional este complet dacă acesta conține toate simplexele cu dimensiunea respectivă ale complexului.

Definiția 4.4.3. Varietatea $\mathcal{V}^n$ se numește orientabilă dacă conține un Δ -ciclu n -dimensional. În caz contrar, $\mathcal{V}^n$ se numește varietate nonorientabilă.

Teorema 4.4.2. Dacă Q^n este un quasisimplex abstract cu toate fațetele orientate pozitiv, atunci frontiera-complex a acestuia reprezintă o varietate abstractă $(n-1)$ -dimensională degenerată și orientabilă.

Demonstrație. Conform teoremei 4.4.1, frontiera-complex $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$ este o varietate abstractă degenerată. Să demonstrăm că aceasta este și orientabilă. Menționăm că, quasisimplexul Q^n are $n+1$ fațete $(n-1)$ -dimensionale. Notăm aceste fațete prin $Q_1^{n-1}, Q_2^{n-1}, \dots, Q_{n+1}^{n-1}$ (unele dintre aceste fațete ar putea să coincidă în Q^n , dat fiind faptul că acesta este un quasisimplex – definiția 2.3.4). Considerăm lanțul:

$$L^{n+1} = 1 \cdot Q_1^{n-1} + 1 \cdot Q_2^{n-1} + \dots + 1 \cdot Q_{n+1}^{n-1}. \quad (4.27)$$

(Dacă $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ sunt vârfurile quasisimplexului Q^n , atunci Q_i^{n-1} din relația (4.27) reprezintă fațeta opusă vârfului x_i).

Luând în considerație operația de construire a Δ -frontierei unui lanț (a se vedea definiția 2.5.4 și remarca 2.5.1), rezultă că orice quasisimplex Q^{n-1} din $\mathcal{K}^{n-1} = [Q^n]$ se va conține de două ori, cu semne diferite, în lanțul

$$L^{n-2} = \Delta L^{n-1} = \sum_{i=1}^{n+1} 1 \cdot \Delta S_i^{n-1} = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta S_i^{n-1}.$$

Deci, $L^{n-2} = 0$, ceea ce înseamnă că L^{n-1} este Δ -ciclu cu dimensiunea $n-1$. Totodată, L^{n-1} este Δ -frontiera quasisimplexului Q^n . Din cele examinate obținem că L^{n-1} este, întradevăr, un Δ -ciclu $(n-1)$ -dimensional din $\mathcal{K}^{n-1}$.

În continuare vom studia doar varietățile orientabile.

Fie $\mathcal{VD}^n$ o varietate abstractă, orientabilă și fără borduri, determinată de G -complexul $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$, iar $\chi(\mathcal{VD}^n)$ – caracteristica Euler a lui $\mathcal{VD}^n$ (caracteristica Euler a complexului $\mathcal{X}^n$ se numește caracteristică Euler și a varietății respective $\mathcal{VD}^n$).

Definiția 4.4.4. Dacă caracteristica Euler a unei varietăți abstracte degenerate, orientabile și fără borduri $\mathcal{VD}^n$ satisface relația:

$$\chi(\mathcal{VD}^n) = \begin{cases} 0, & \text{în cazul când } n \text{ este impar,} \\ 2, & \text{în cazul când } n \text{ este par,} \end{cases}$$

atunci $\mathcal{VD}^n$ se numește **varietate sferică abstractă degenerată** n -dimensională și se notează prin Σ^n .

Definiția 4.4.5. Succesiunea de quasisimplexe m -dimensionale $Q_1^m, Q_2^m, \dots, Q_t^m$, $t > 1$, ale G -complexului de relații multi-are $\mathcal{X}^n$, ce posedă proprietățile:

- a) $Q_i^m \cap Q_{i+1}^m = Q_j^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}$, $1 \leq i \leq t-1$;
- b) coeficienții de Δ -incidentă $\xi_i^j(m, \Delta) = [Q_i^m : Q_j^{m-1}]$ și $\xi_{i+1}^j(m, \Delta) = [Q_{i+1}^m : Q_j^{m-1}]$ au semne distincte,

se numește **drum m -dimensional**. Varietatea abstractă, determinată de G -complexul $\mathcal{X}^n$, se numește **conexă forte**, dacă pentru oricare două quasisimplexe n -dimensionale Q_i^n și Q_j^n , cu ordinea indicată, există drum n -dimensional ce leagă Q_i^n și Q_j^n .

Menționăm că două quasisimplexe Q_i^m și Q_{i+1}^m , ce posedă proprietățile a) și b) din definiția 4.4.5, se mai numesc quasisimplexe concordante [15], [153]. Ușor se verifică echivalența dintre noțiunea de varietate orientabilă (a se vedea definiția 4.4.3) și noțiunea de varietate conexă forte.

Teorema 4.4.3. Orice varietate abstractă degenerată conexă forte și fără borduri reprezintă un ciclu n -dimensional.

Demonstrație. Fie $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ un G -complex de relații care determină, la rândul său, o varietate conexă forte $\mathcal{VD}^n$. Pentru oricare două quasisimplexe n -dimensionale Q_i^n și Q_j^n există drum n -dimensional care le unește. (a se vedea definiția 4.4.5). Desigur, la formarea Δ -frontierei varietății $\mathcal{VD}^n$, fiecare quasisimplex $(n-1)$ -dimensional va intra de un număr par de ori în descrierea frontierei respective. Aceasta înseamnă, la rândul său, că numărul de includeri a quasisimplexului în această frontieră cu coeficientul $+1$ va fi egal cu numărul de includeri cu coeficientul -1 . Prin urmare, $\Delta \mathcal{VD}^n = 0$, de unde rezultă că $\mathcal{VD}^n$ reprezintă un ciclu de quasisimplexe n -dimensionale abstracte.

Evident, pentru orice quasisimplex m -dimensional Q^m al varietății $\mathcal{VD}^n$ există Δ -ciclul $(m-1)$ -dimensional care reprezintă Δ -frontiera acestui quasisimplex. Un astfel de ciclu îl vom numi Δ -ciclu simplu al varietății și îl vom nota prin $z^{m-1} = \Delta Q^m$, $1 \leq m \leq n$.

Definiția 4.4.6. Un Δ -ciclu m -dimensional z^m al varietății $\mathcal{VD}^n$ se numește **Δ -ciclu elementar** dacă $z^m = \eta_1 z_1^m + \eta_2 z_2^m + \dots + \eta_k z_k^m$, unde z_i^m este Δ -ciclul simplu al quasisimplexului m -dimensional Q^m și $\eta_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq k$.

Vom generaliza acum noțiunea de contur Euler, cunoscută din teoria grafurilor [5]. Fie $\mathcal{Q}^m$ familia tuturor quasisimplexelor m -dimensionale ale G -complexului $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$, $\text{card} \mathcal{Q}^m = \beta_m$, $1 \leq m \leq n$.

Definiția 4.4.7. Succesiunea de quasisimplexe m -dimensionale din complexul $\mathcal{X}^n$ ce posedă proprietățile:

- a) fiecare quasisimplex al familiei $\mathcal{Q}^m$ se întâlnește în această succesiune exact o singură dată;
- b) oricare două quasisimplexe vecine ale succesiunii reprezintă în intersecție un element din $\mathcal{Q}^{m-1}$;
- c) intersecția primului și ultimului element al succesiunii reprezintă un quasisimplex $(m-1)$ -dimensional,

se numește ciclu Euler m -dimensional al varietății $\mathcal{VD}^n = \mathcal{X}^n$. Dacă simplexele din succesiune sunt coerente, atunci această succesiune se numește **contur Euler** m -dimensional.

Menționăm că, un ciclu Euler m -dimensional din $\mathcal{X}^n$ este un Δ -lanț m -dimensional L^m , ce poate fi reprezentat formal prin suma

$$L^m = g_1 Q_1^m + g_2 Q_2^m + \dots + g_{\alpha_m} Q_{\alpha_m}^m, \quad (4.28)$$

unde $|g_i| = 1$, $1 \leq i \leq \alpha_m$, iar $\Delta L^m = 0$. În cazul conturului Euler, relația (4.28) se transcrie:

$$L^m = Q_1^m + Q_2^m + \dots + Q_{\alpha_m}^m$$

sau

$$L^m = -Q_1^m - Q_2^m - \dots - Q_{\alpha_m}^m.$$

Vom aminti că o varietate se numește orientabilă dacă pentru ea există Δ -ciclu cu dimensiunea n . Prin urmare, existența unui contur Euler n -dimensional în $\mathcal{VD}^n$ înseamnă că varietatea e orientabilă.

Ținând cont de faptul că simplexele abstracte servesc drept „cărămizi” pentru construirea cubului abstract n -dimensional, în cele ce urmează vom defini noțiunea de varietate cubică și

vom efectua unele cercetări ce țin de existența conturului Euler al acestuia. Chestiunea respectivă este importantă, în special, pentru soluționarea unor probleme cu caracter aplicativ. Astfel, în lucrările [19], [23] se examinează un dispozitiv abstract, funcționarea căruia parvine din existența conturului Euler a unei varietăți cubice speciale și care servește drept o generalizare a mașinii Tiuring clasice.

Fie $\mathfrak{I}^n$ un complex de cuburi abstracte definit în paragraful 4.2, iar $\mathfrak{G}^m$ – familia de cuburi abstracte m -dimensionale a acestuia, $0 \leq m \leq n$.

Definiția 4.4.8. Complexul n -dimensional de cuburi abstracte $\mathfrak{I}^n$ ce verifică proprietățile:

- a) orice cub $(n-1)$ -dimensional $I^n \in \mathfrak{G}^n$ este fațetă exact pentru două cuburi n -dimensionale din $\mathfrak{I}^n$;
- b) pentru oricare două cuburi n -dimensionale $I_i^n, I_j^n \in \mathfrak{G}^n$, în $\mathfrak{I}^n$ există succesiunea de cuburi n -dimensionale

$$I_{i_1}^n = I_i^n, I_{i_2}^n, \dots, I_{i_q}^n = I_j^n$$

ce posedă proprietatea:

$$I_{i_r}^n \cap I_{i_{r+1}}^n \in \mathfrak{G}^{n-1}, 0 \leq r \leq q-1;$$

- c) pentru orice cub p -dimensional $I^p \in \mathfrak{G}^p$, în complexul $\mathfrak{I}^n$ există cub n -dimensional I^n , încât I^p este una dintre fațetele proprii ale lui I^n , $0 \leq p \leq n-1$;
- d) pentru oricare două cuburi n -dimensionale distincte $I_i^n, I_j^n \in \mathfrak{I}^n$, cu intersecția $I_i^n \cap I_j^n = I^p$, $0 \leq p \leq n-1$, în $\mathfrak{I}^n$ există o succesiune de cuburi abstracte n -dimensionale $I_{i_1}^n = I_i^n, I_{i_2}^n, \dots, I_{i_q}^n = I_j^n$ ce posedă proprietatea:

$$\bigcap_{s=1}^q I_{i_s}^n = I^p,$$

se numește **varietate cubică abstractă** n -dimensională, notată prin V_c^n .

Menționăm că, din prima proprietate enunțată în definiția 4.4.8, rezultă că fiecare cub n -dimensional din $\mathfrak{I}^n$ participă o singură dată la construirea varietății cubice V_c^n .

În literatura de specialitate se întâlnesc diverse variații sau generalizări ale varietății clasice (a se vedea definiția 4.4.1), printre care, în primul rând, e necesar a fi menționate:

- orbivarietatea – o generalizare a noțiunii de varietate cu unele particularități speciale ale spațiului topologic [194], [195], [197];
- varietatea algebrică – obiectul central de studiu al geometriei algebrice. Exemplu de varietate algebrică poate servi mulțimea de soluții ale unui sistem de ecuații algebrice peste câmpul numerelor reale [207], [230];

- complexul celular – un spațiu topologic format prin lipirea discurilor de diferite dimensiuni. Noțiunea a fost introdusă de către J.H.C. Whitehead în legătură cu studierea omotopiilor [227]-[229], [232];
- varietatea omologică – un spațiu ce posedă caracteristicile unei varietăți din punct de vedere al teoriei omologiilor. Aceste varietăți pot fi studiate cu ajutorul metodelor teoriei ajustărilor, cunoscute ca restructurările Morse [231].

Varietățile enunțate merită o atenție specială, în primul rând, datorită posibilităților pe care acestea le oferă la soluționarea problemelor teoretico-aplicative.

Noi, în cele ce urmează, ne vom ocupa de studierea proprietăților varietăților cubice, definite mai sus, cu scopul utilizării acestora la examinarea unor probleme importante de optimizare. Despre unele astfel de probleme vom vorbi în capitolul 4.

Din cele expuse anterior cunoaștem că, atât un complex obișnuit de simplexe abstracte $\mathcal{K}^n = \{S^0, S^1, \dots, S^n\}$, cât și un complexul cubic $\mathfrak{S}^n = \{\mathfrak{S}^0, \mathfrak{S}^1, \dots, \mathfrak{S}^n\}$ determină niște varietăți abstracte [18], [59]. Varietatea determinată de complexul de simplexe $\mathcal{K}^n = \{S^0, S^1, \dots, S^n\}$ o vom nota prin V_Δ^n , iar cea determinată de complexul cubic – prin V_c^n . Să stabilim corelația dintre aceste două varietăți. Definirea varietăților prin intermediul complexelor $\mathcal{K}^n$ și $\mathfrak{S}^n$ ne permit să obținem într-un mod eficient o serie de rezultate noi inspirate de unele proprietăți generale ale varietăților, precum și să găsim un șir de aplicații nontriviale.

Vom apela la noțiunea de gen și clasă cunoscute în literatura de specialitate și studiate într-o formă netrivială în mai multe lucrări [63], [64], [211]. În acest context, are loc

Teorema 4.4.4. *Dacă varietățile V_c^n și V_Δ^n au același gen, atunci acestea aparțin aceleiași clase.*

Demonstrația teoremei se obține în mod trivial dacă ținem cont de definiția cubului abstract (a se vedea definiția 4.1.2) și a procubului respectiv. Demonstrația completă a acestui rezultat se regăsește în lucrarea [15].

Teorema 4.4.5. *Dacă I_i^m și I_j^m sunt cuburi coerente ale complexului $\mathfrak{S}^n$, intersecția cărora reprezintă un cub $(m-1)$ -dimensional din $\mathfrak{S}^n$, adică $I_i^m \cap I_j^m = I_t^{m-1} \in \mathfrak{S}^{m-1}$, atunci coeficienții de incidență ai acestor cuburi în raport cu cubul I_t^{m-1} satisfac relația: $\varepsilon_t^i(m, \square) = -\varepsilon_t^j(m, \square)$.*

Demonstrație. Folosind noțiunea de coerență și $\square$ -incidență a cuburilor complexului $\mathfrak{S}^n$, definite în paragraful 4.1, obținem următorul șir de raționamente. Fie cuburile I_i^m și I_t^{m-1} sunt coerente, deci $\varepsilon_t^i(m, \square) = +1$ (cazul când I_i^m și I_t^{m-1} sunt noncoerente se examinează în mod

similar). Luând în considerație că cuburile I_i^m și I_j^m sunt coerente, rezultă că I_j^m și fațeta acestuia I_t^{m-1} ($I_t^{m-1} = I_i^m \cap I_j^m$) sunt noncoerente. Prin urmare, $\varepsilon_t^j(m, \square) = -1$. Astfel, se obține egalitatea: $\varepsilon_t^i(m, \square) = -\varepsilon_t^j(m, \square)$.

Fie acum V_c^n o varietate cubică orientabilă, adică în V_c^n există un lanț cubic m -dimensional $L^m \in \mathcal{L}^m$ încât $\square L^m = 0$. Vom spune că o varietate cubică V_c^n este **totalmente coerentă** dacă toate cuburile n -dimensionale ale acesteia au aceeași orientare.

Teorema 4.4.6. *O varietate cubică V_c^n este totalmente coerentă.*

Demonstrație. V_c^n Menționăm mai întâi că o varietate, determinată de simplexe abstracte, conține Δ -ciclu n -dimensional, ceea ce înseamnă că ea este orientabilă, prin urmare este totalmente coerentă [212]. Totodată, orice cub abstract n -dimensional este construit din procuburi, care la rândul lor sunt reprezentate prin simplexe abstracte (a se vedea definiția 4.1.2). Deci orice complex de cuburi abstracte este un complex de simplexe. Aceasta din urmă și demonstrează teorema.

La studierea varietăților cubice un rol important îl joacă contururile Euler. Vom examina în continuare problema existenței conturului Euler al varietăților V_c^n și V_Δ^n pentru cazul când dimensiunea n este pară. Conturul Euler al varietății cubice, fiind examinat pentru prima dată în lucrarea [19], și-a găsit în continuare aplicații netriviiale importante, expuse în [23], [153].

Teorema 4.4.7. *Dacă V_c^n este o varietate cubică abstractă cu dimensiunea n pară, atunci aceasta admite un $\square$ -contur Euler cu dimensiunea $(n-1)$.*

Demonstrație. Conform teoremei 4.4.6, varietatea V_c^n este totalmente coerentă. Acestei varietăți îi punem în corespondență un graf orientat G cu mulțimea de vârfuri ce corespund cuburilor abstracte n -dimensionale din V_c^n . Cu alte cuvinte, dacă V_c^n este determinat de complexul de cuburi $\mathfrak{S}^n = \{\mathfrak{C}^0, \mathfrak{C}^1, \dots, \mathfrak{C}^n\}$, atunci $\text{card } X_G = \text{card } I^n$ (aici X_G este mulțimea de vârfuri din G). Dacă $\mathfrak{C}^n = \{I_1^n, I_2^n, \dots, I_{\beta_n}^n\}$, atunci considerăm că vârful x_i al grafului G corespunde cubului I_i^n din $\mathfrak{S}^n$. Arcele grafului G corespund cuburilor $(n-1)$ -dimensionale din $\mathfrak{S}^n$. Notăm mulțimea de arce prin $U_G = \{u_1, u_2, \dots, u_{\beta_{n-1}}\}$, $\beta_{n-1} = \text{card } \mathfrak{C}^{n-1}$. Vom determina orientarea arcelor în modul următor: dacă cuburile n -dimensionale I_p^n și I_q^n sunt coerente și au o singură fațetă comună, atunci în G avem arcul $u_k = (x_p, x_q) \in U_G$. Graful G , definit precum a fost descris mai sus, este conex forte.

Orice cub n -dimensional al varietății V_c^n conține n perechi de fațete $(n-1)$ -dimensionale opuse, orientate în mod diferit. Aceasta înseamnă că dacă în G există arcul $u_k = (x_p, x_q)$ ce pornește din vârful x_p , atunci se va găsi numaidecât și un arc care intră în x_p . Prin urmare, fiecare vârf din G are grad par, ceea ce înseamnă că în G există contur Euler [5], [302]. Ținând cont de șirul de cugetări expuse mai sus, rezultă că în V_c^n există $\square$ -contur Euler n -dimensional.

Similar situației de existență a $\square$ -conturului Euler pentru V_c^n se studiază existența Δ -conturului Euler pentru varietatea V_Δ^n , determinată de un complex de simplexe abstracte.

Teorema 4.4.8. *Pentru o varietate abstractă, orientabilă și conexă forte V_Δ^n cu dimensiunea pară n există Δ -contur Euler $(n-1)$ -dimensional dacă familia simplexelor n -dimensionale din V_Δ^n reprezintă o varietate cubică.*

Ținând cont de teoremele 4.4.6 și 4.4.7, demonstrația teoremei 4.4.8 reprezintă un exercițiu pur tehnic.

4.5. Complexe omogene și transversale n -dimensionale

În capitolul 1 a fost definită noțiunea de transversală ca o mulțime cu proprietăți speciale ce conține câte un element din fiecare mulțime a unei familii de mulțimi $\mathcal{F}$ (a se vedea definiția 1.1.12). Condiția b) din definiția respectivă este destul de dură dat fiind faptul că prin aceasta se impune ca transversala să conțină câte un element din fiecare mulțime a familiei F . În cele ce urmează vom aplica noțiunea de transversală pentru un complex de cuburi abstracte, înlocuind condiția b) prin alte condiții, mai firești și mai utile din punct de vedere al aplicației acestora la soluționarea problemelor aplicative. Una dintre aceste probleme este problema medianei, despre care vom discuta în capitolul următor.

Vom începe cu studierea unui caz special al complexului de cuburi, și anume al complexului omogen de cuburi abstracte.

Fie $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ reperul unui cub n -dimensional I^n . Conform definiției 4.1.2, perechile de elemente $(x_{i_j}, x_{i_{j+1}})$, $0 \leq j \leq n$, reprezintă cuburi 1-dimensionale abstracte $I_{i_1}^1 = (x_{i_0}, x_{i_1})$, $I_{i_2}^1 = (x_{i_0}, x_{i_2})$, ..., $I_{i_n}^1 = (x_{i_0}, x_{i_n})$, pe care se construiește cubul I^n . Cortegiul $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ format din indicii reperului este o permutare a șirului ordonat $(0, 1, 2, \dots, n)$ și această permutare determină semnul cubului I^n . Astfel, vom vorbi despre cuburi orientate pozitiv și cuburi orientate negativ (a se vedea definiția 4.1.3).

Menționăm că, cortegiul de indici $(i_0, i_1, i_2, \dots, i_n)$ care determină semnul cubului n -dimensional I^n , descrie în mod univoc și un quasisimplex n -dimensional (punctele $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ servesc drept vârfuri ale acestui quasisimplex). Din aceste considerente, vom spune că cubul determinat de reperul r are același semn ca și simplexul $(x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$.

Definind în paragraful 2.1 complexul de relații multi-are, s-a menționat că mulțimea de elemente $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, ce servesc drept vârfuri ale complexului, se ia dintr-o altă mulțime M , $\text{card}M \leq \infty$. E o chestiune importantă, ce se manifestă la soluționarea problemelor aplicative. Una dintre aceste probleme se va examina în ceva mai târziu, în paragrafele 5.1 și 5.2. Prezența punctelor din M generează, la rândul său, necesitatea introducerii unor noțiuni speciale și studierea proprietăților lor.

Definiția 4.5.1. *Un cub 1-dimensional se numește **abstract-convex** dacă intersecția vacuumului acestuia [19] cu vacuumul oricărui alt cub 1-dimensional conține cel mult un punct comun $x \in M$. Un cub I^m , $2 \leq m \leq n$, se numește abstract-convex dacă intersecția acestuia cu oricare alt cub I^q , $2 \leq q \leq n$, conține cel mult un cub abstract-convex 1-dimensional.*

Noțiunea de cub abstract-convex, numit uneori cub A -convex, a fost introdusă odată cu încercările de a elabora metode eficiente de soluționare a problemelor cu caracter aplicativ, precum ar fi problemele de amplasare [19], [21], [160], [165], [184]. Astfel, proprietățile cuburilor abstract-convexe sunt folosite la căutarea medianei într-un complex de cuburi abstracte cu mulțimea de vârfuri $X \subset M$. Pentru astfel de complexe, precum și pentru diverse variații și generalizări ale acestora, au fost elaborate metode de calcul a medianei, fără utilizarea metricii spațiului, care garantează amplasarea medianei respective în mulțimea X [22], [166], [178].

Similar celor menționate de Boltyanski [305] și Hilton [32], se poate ușor de demonstrat că o varietate abstractă V_c^n , orientabilă și fără borduri [117], [19], determinată de un număr finit de cuburi n -dimensionale și abstract-convexe (A -convexe), poate fi orientată cu respectarea proprietății: oricare două cuburi n -dimensionale arbitrare din V_c^n , care dispun de o intersecție dintr-un cub $(n-1)$ -dimensional, sunt orientate ambele pozitiv sau negativ. Altfel spus, pentru aceste două cuburi abstracte există un drum n -dimensional [130] ce le unește – așa-zisa **orientare forte**, precum e și pentru un graf orientat și conex [5]. (Noțiunea de orientare forte se întâlnește și la alte structuri discrete, de exemplu, la grafurile orientate [5]).

Definiția 4.5.2. *Fie V_c^n o varietate abstractă, determinată de cuburi abstract-convexe, iar x' și x'' două puncte din mulțimea infinită M [130], care nu aparțin lui V_c^n și determină un cub*

1-dimensional abstract-convex. Fie că muchia (x', x'') intersectează V_c^n într-un număr impar de puncte din M . În V_c^n există două puncte x_1 și x_2 ce determină un cub 1-dimensional nonorientabil (muchie) din V_c^n , notat prin (x_1, x_2) . Considerăm că intersecția muchiilor (x', x'') și (x_1, x_2) constă doar dintr-un singur punct $y \in M$. Punctele x' și x'' aparțin lui V_c^n . Unul dintre aceste două vacuumuri îl vom considera intern, notându-l prin $\text{int}V_c^n$, iar altul – extern, notându-l prin $\text{ext}V_c^n$ (o situație care generalizează teorema lui Jordan și Holder [63], [64]).

Ca și în cazul G -complexului de relații multi-are, vom numi **schelet p -dimensional** al complexului cubic $\mathfrak{I}^n = \{\mathfrak{I}^0, \mathfrak{I}^1, \dots, \mathfrak{I}^n\}$, mulțimea tuturor cuburilor cu dimensiunea cel mult egală cu p , $0 \leq p \leq n$. Scheletul p -dimensional se va nota prin $\text{sk}(p)\mathfrak{I}^n$.

Evident, $\text{sk}(p)\mathfrak{I}^n$ este un subcomplex al lui $\mathfrak{I}^n$, iar $\text{sk}(1)\mathfrak{I}^n$ reprezintă un graf orientat [5] al acestuia. Vom nota acest graf prin $G = (X; U)$, unde $X = \mathfrak{I}^0$, iar $U = \mathfrak{I}^1$. Prin urmare, cuburile 0-dimensionale și cele 1-dimensionale ale complexului $\mathfrak{I}^n$ reprezintă vârfurile și arcele din G .

Să considerăm că sunt cunoscute grupurile de $\square$ -omologii ale complexului $\mathfrak{I}^n$:

$$\square^1(\mathfrak{I}^n, Z), \square^2(\mathfrak{I}^n, Z), \dots, \square^n(\mathfrak{I}^n, Z),$$

definite și studiate în paragraful 4.2.

Definiția 4.5.3. Un complex de cuburi abstract-convexe $\mathfrak{I}^n$, ce satisface condițiile:

a) dacă I^p , $0 \leq p \leq n$, este un element al lui $\mathfrak{I}^n$, atunci și orice fațetă $I^k \subset I^p$, $0 \leq k < p$, este un element din $\mathfrak{I}^n$;

b) pentru fiecare două cuburi I^{p_1} și I^{p_2} din $\mathfrak{I}^n$ intersecția $I^{p_1} \cap I^{p_2}$ este vidă sau reprezintă un element din $\mathfrak{I}^n$, $0 \leq p_1, p_2 \leq n$;

c) orice cub abstract I^k din $\mathfrak{I}^n$, $0 \leq k \leq n$, aparține cel puțin unui cub n -dimensional I^n din $\mathfrak{I}^n$;

d) oricare două subcomplexe minimale $\mathfrak{I}_1^n$ și $\mathfrak{I}_2^n$ din $\mathfrak{I}^n$, care verifică condițiile a)-c) și $\mathfrak{I}_1^n \cup \mathfrak{I}_2^n = \mathfrak{I}^n$, posedă proprietatea: intersecția $\mathfrak{I}_1^n \cap \mathfrak{I}_2^n$ reprezintă un subcomplex $\mathfrak{I}^p \subset \mathfrak{I}^n$, cu dimensiunea $p = n - 1$;

e) grupul de omologii de rangul zero este izomorf cu grupul numerelor întregi Z , adică

$$\square^0(\mathfrak{I}^n, Z) \cong Z; \quad (4.29)$$

f) grupurile de omologii de rangul 1, 2, 3, ..., n sunt izomorfe cu zero, adică

$$\square^1(\mathfrak{I}^n, Z) \cong \square^2(\mathfrak{I}^n, Z) \cong \dots \cong \square^n(\mathfrak{I}^n, Z) \cong 0, \quad (4.30)$$

se numește **complex abstract omogen** n -dimensional și se notează prin $\mathfrak{I}_A^n$.

Respectarea condițiilor e) și f) din definiția 4.5.3 pentru complexul $\mathfrak{I}_A^n$ înseamnă că acesta este **conex** și **aciclic**. Pentru a ne convinge că complexul $\mathfrak{I}_A^n$ este întradevăr conex și aciclic e suficient să ne convingem că orice ciclu m -dimensional al acestuia posedă proprietatea A) din paragraful 4.2. (Vom respecta aici terminologia din [32], [305] pentru structuri discrete.)

Definiția 4.5.4. Mulțimea tuturor cuburilor $(n-1)$ -dimensionale ale complexului $\mathfrak{I}_A^n$, care aparțin doar unui singur cub n -dimensional I^n din $\mathfrak{I}_A^n$ se va numi frontieră a acestui complex și se va nota prin $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$, iar mulțimea vacuumurilor tuturor cuburilor din $\mathfrak{I}_A^n$, ce nu aparțin frontierei $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$, se va numi interiorul acestui complex și se va nota prin $\mathbf{int}\mathfrak{I}_A^n$.

În paragraful 4.4 a fost definită noțiunea de varietate sferică Σ^n (a se vedea definiția 4.4.4) cu ajutorul caracteristicii Euler a varietății abstracte, orientabile și fără borduri, determinată de G -complexul de relații multi-are $\mathfrak{K}^n = (\mathfrak{Q}^0, \mathfrak{Q}^1, \dots, \mathfrak{Q}^n)$. La rândul său, și complexul de cuburi abstracte $\mathfrak{I}^n$ definește o varietate cubică abstractă n -dimensională V_c^n (a se vedea definiția 4.4.8), caracteristica Euler a căreia este determinată de egalitatea: $\chi(V_c^n) = \chi(\mathfrak{I}^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$, unde α_i reprezintă numărul de cuburi i -dimensionale din $\mathfrak{I}^n$, $0 \leq i \leq n$. Dacă varietatea V_c^n este de genul p [32], [305], atunci aceasta se va nota prin $V_c^{n,p}$. În cazul $p = 0$, vom considera $V_c^{n,0} = V_c^n$.

Definiția 4.5.5. Varietatea cubică orientabilă $V_c^{n,p}$, determinată de complexul de cuburi abstracte $\mathfrak{I}^n = \{\mathfrak{Q}^0, \mathfrak{Q}^1, \dots, \mathfrak{Q}^n\}$, se numește **sferă abstractă** n -dimensională, dacă satisface una din egalitățile:

$$\begin{aligned} \chi(V_c^{n,p}) &= 2, \text{ pentru } n - \text{par}, \\ \chi(V_c^{n,p}) &= 0, \text{ pentru } n - \text{impar}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

și se notează prin $\mathfrak{O}^n = V_c^{n,p}$,

Teorema 4.5.1. Dacă $\mathfrak{I}_A^n$ este un complex cubic n -dimensional abstract și omogen, atunci frontiera acestuia $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$ reprezintă o sferă abstractă $(n-1)$ -dimensională $\mathfrak{O}^{n-1}$.

Demonstrație. Mai întâi vom arăta că frontiera $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$ a complexului cubic omogen $\mathfrak{I}_A^n$ este o varietate cubică abstractă și orientabilă $(n-1)$ -dimensională V_c^{n-1} cu genul $p = 0$.

Presupunem contrariul. Fie $p > 0$. În aceste condiții, ținând cont de omogenitatea lui $\mathbf{bd} \mathfrak{S}_A^n$ și de ipoteza că $p > 0$, imediat obținem contradicția: complexul $\mathbf{bd} \mathfrak{S}_A^n$ nu este aciclic. Ultima afirmație rezultă din condiția f) a definiției 4.5.1: varietatea $V_c^{n-1,p}$ poate fi tăiată printr-o varietate $V_c^{n-2,q}$, $1 \leq q \leq p$, și în acest caz va avea loc, cel puțin, relația $\square^{n-1}(V_c^{n-1,p}, Z) \neq 0$ [130]. Însă chiar și în cazul acesta, având respectarea egalităților (4.30), e posibil ca $V_c^{n-1,p}$ să nu fie varietate, ceea ce ar însemna că parametrul p își pierde rostul. Conform omogenității lui $\mathfrak{S}_A^n$, aceasta conduce la faptul că acest complex contravine propriei condiții d) din definiția 4.5.3: nu există două subcomplexe $\mathfrak{S}_{A(1)}^n$ și $\mathfrak{S}_{A(2)}^n$ pentru care $\mathfrak{S}_{A(1)}^n \cap \mathfrak{S}_{A(2)}^n = \mathfrak{S}_{A(3)}^p$, unde $0 \leq p \leq n-2$. Prin urmare, $V_c^{n-1,p} = V_c^{n-1} = \mathcal{O}^{n-1}$.

Teorema 4.5.2. *Dacă $V_c^{n,p}$ este o varietate orientabilă, determinată de cuburi abstracte și A -convexe, pentru care orice ciclu cu dimensiunea k , $1 \leq k \leq n-1$, este $\square$ -omolog cu 0, atunci $V_c^{n,p}$ este o sferă-corp (o bilă) abstractă n -dimensională.*

Demonstrație: Evident, varietatea $V_c^{n,p}$ este conexă [130]. Prin urmare, $\square^0(V_c^{n,p}, Z) \cong Z$. Fie z_0^k un ciclu arbitrar al varietății $V_c^{n,p}$. Dacă toate ciclurile cu dimensiunea k , $1 \leq k \leq n-1$, sunt omoloage cu zero, atunci aceasta înseamnă că în $\mathbf{sk}(k)V_c^{n,p}$ fiecare astfel de ciclu mărginește un subcomplex $V_c^{k,p}$. Situația respectivă conduce la faptul că subgrupul $\mathfrak{Z}_0^m(\square)$ și grupul de cicluri $\mathfrak{Z}^m(\square)$ coincid. Deci grupul cât e lipsit de cicluri nonomoloage cu 0, de unde rezultă că $\square^k(V_c^{n,p}, Z) \cong 0$, $1 \leq k \leq n-1$. În aceste condiții au loc relațiile:

$$\begin{aligned}\square^0(V_c^{n,p}, Z) &\cong Z, \\ \square^1(V_c^{n,p}, Z) &\cong \square^2(V_c^{n,p}, Z) \cong \dots \cong \square^{n-1}(V_c^{n,p}, Z) \cong 0, \\ \square^n(V_c^{n,p}, Z) &\cong Z.\end{aligned}$$

Considerând egalitatea Euler-Poincare [165], obținem:

$$\chi(V_c^{n,p}) = \sum_{i=0}^n (-i)^i \alpha_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i r_i,$$

unde α_i este numărul de cuburi i -dimensionale ale lui $V_c^{n,p}$, iar r_i – rangul grupului $\square^i(V_c^{n,p}, Z)$, $0 \leq i \leq n$. Ca rezultat, constatăm:

$$\chi(V_c^{n,p}) = 1 + 0 + \dots + 0 + (-1)^n 1 = \begin{cases} 2, & \text{pentru } n-\text{par}, \\ 0, & \text{pentru } n-\text{impar}. \end{cases}$$

Conform definiției 4.5.5, varietatea examinată $V_c^{n,p}$ este o sferă abstractă n -dimensională $\mathcal{O}^n$.

Corolarul 4.5.1. *Varietatea abstractă, determinată de frontiera unui cub abstract-convex k -dimensional, $0 \leq k \leq n$, reprezintă o sferă abstractă $(k-1)$ -dimensională, iar cubul respectiv reprezintă o sferă-corp abstractă k -dimensională.*

Corectitudinea afirmației rezultă imediat din teoremele 4.5.1 și 4.5.2, dacă ținem cont de faptul că familia tuturor fațetelor (proprie și improprie) ale unui cub abstract reprezintă un complex de cuburi abstracte (a se vedea definiția 4.2.2) ce respectă condițiile teoremelor enunțate.

Importantă, din punct de vedere al aplicațiilor complexelor de cuburi la soluționarea problemelor cu caracter aplicativ, examinate în capitolul 4, este următoarea

Teorema 4.5.3. *Dacă $\mathcal{O}^{n-1}$ este o sferă abstractă determinată de frontiera $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$ a unui complex omogen $\mathfrak{I}_A^n$ de cuburi abstract-convexe, atunci aceasta dispune de cel puțin un cub (vârf) $I^0 \in \mathcal{O}^0$, ce aparține exact la n cuburi 1-dimensionale (muchii).*

Pentru a demonstra această teoremă sunt necesare examinări suplimentare, referitoare la complexe de cuburi ce corespund definiției 4.5.3. Vom începe cu o lemă ce ține de existența complexelor omogene de cuburi abstracte cu proprietăți speciale ale mulțimilor de cuburi ce formează interiorul și frontiera complexului.

Lema 4.5.1. *Există cel puțin un complex omogen n -dimensional $\mathfrak{I}_A^n$ cu proprietatea că orice cub $I^p \in \mathcal{O}^p$ din $\mathbf{int}\mathfrak{I}_A^n$, care intersectează frontiera $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$ cel mult printr-un cub cu dimensiunea $p-1$, $1 \leq p \leq n$, este incident la un număr nu mai mic de 2^{n-p} cuburi n -dimensionale.*

Demonstrația se face într-un mod constructiv. Fie dat un cub I_1^n . Lipim lui I_1^n un alt cub I_2^n , încât $I_1^n \cap I_2^n = I^{n-1}$, și continuăm acest proces astfel încât să nu intrăm în contradicție cu definiția 2.5.1. Ținând cont de definiția complexului omogen de cuburi abstracte (a se vedea definiția 4.5.3), procedura propusă de construire este realizabilă și finită. E suficient a opri acest proces când obținem un complex abstract arborescent $\mathfrak{I}_A^n$ (se va ține cont de faptul că afirmația din lema este o afirmație de existență).

Conform celor expuse anterior, putem considera că orice sferă abstractă n -dimensională $\mathcal{O}^n$ este determinată de un complex de cuburi abstracte n -dimensionale sau cel puțin de simplexe abstracte. Evident, pentru orice sferă abstractă $\mathcal{O}^n$ există totdeauna un complex de cuburi abstracte $\mathfrak{I}^{n+1}$ (nu numai de cuburi și omogen), încât frontiera acestuia este $\mathcal{O}^n$. Interiorul complexului $\mathfrak{I}^{n+1}$ se va considera că este interiorul sferei n -dimensionale $\mathcal{O}^n$ și se va nota prin

$int\mathfrak{O}^n$. Reuniunea $\mathfrak{O}^n \cup int\mathfrak{O}^n$ se numește *sferă-corp (disk)* cu dimensiunea $n+1$ (prin analogie cu cele cunoscute din [117, 130]).

Pentru a examina posibilitatea utilizării complexului omogen de cuburi abstracte la soluționarea unor probleme cu caracter practic, sunt necesare niște examinări auxiliare. Mai întâi vom defini noțiunea de clasă de muchii (cuburi 1-dimensionale) paralele ale unui complex omogen $\mathfrak{I}_A^n$. Fie I^n un cub n -dimensional, iar I_1^{n-1} și I_2^{n-1} două fațete $(n-1)$ -dimensionale opuse ale acestuia (în total avem n perechi de fațete opuse). Între vârfurile acestor fațete există 2^{n-1} muchii ale cubului I^n .

Definiția 4.5.6. *Muchiile cubului I^n , care unesc vârfurile fațetei I_1^{n-1} cu vârfurile fațetei I_2^{n-1} , se numesc muchii paralele ale acestui cub.*

Mulțimea celor 2^n muchii paralele dintre două fațete fixate $(n-1)$ -dimensionale din I^n o vom nota prin $\mathcal{E}(I^n)$.

Evident, componența acestei mulțimi este determinată în mod univoc de perechea de fațete opuse I_1^{n-1} și I_2^{n-1} . Într-un cub I^n există n mulțimi distincte de muchii paralele $\mathcal{E}_1(I^n)$, $\mathcal{E}_2(I^n)$, ..., $\mathcal{E}_n(I^n)$.

În cele ce urmează vom construi, printr-o procedură iterativă, o familie specială de cuburi n -dimensionale. Inițial, considerăm că numărul i de cuburi al acestei familii este $i=0$. Construim familia respectivă prin aplicarea următorilor 4 pași:

P1. Alegem un cub n -dimensional I^n al complexului $\mathfrak{I}_A^n$. Deci, putem considera $i=1$. Notăm prin $\mathfrak{O}_T^n(1) = \{I^n\}$ familia respectivă de cuburi, iar prin $\mathcal{E}(\mathfrak{O}_T^n(1))$ – una dintre mulțimile de muchii paralele ale lui I^n .

P2. Fie că de acum au fost selectate anumite $i \geq 1$ cuburi n -dimensionale din $\mathfrak{I}_A^n$. Astfel am obținut o familie de cuburi abstracte $\mathfrak{O}_T^n(i)$, pentru care se cunoaște mulțimea de muchii paralele $\mathcal{E}(\mathfrak{O}_T^n(i))$.

P3. Alegem un cub nou (dacă există) $I_*^n \in \mathfrak{O}^n \setminus \mathfrak{O}_T^n(i)$, care conține cel puțin o muchie din $\mathcal{E}(\mathfrak{O}_T^n(i))$. Notăm prin $\mathcal{E}(I_*^n)$ mulțimea de muchii paralele ale acestui cub, care satisface relația $\mathcal{E}(\mathfrak{O}_T^n(i)) \cap \mathcal{E}(I_*^n) \neq \emptyset$, și formăm mulțimile noi

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}_T^n(i+1) &= \mathfrak{O}_T^n(i) \cup \{I_*^n\} \\ \mathcal{E}(\mathfrak{O}_T^n(i+1)) &= \mathcal{E}(\mathfrak{O}_T^n(i)) \cup \mathcal{E}(I_*^n).\end{aligned}$$

P4. Repetăm procedura descrisă în P3 până când e posibil. Deoarece se studiază doar complexe omogene n -dimensionale finite, la un moment dat vom ajunge la situația când nu vom mai putea selecta un cub n -dimensional din $\mathfrak{Z}_A^n$ ce satisface condiția din P3. În acest caz considerăm construită familia căutată de cuburi n -dimensionale.

Definiția 4.5.7. Familia de cuburi n -dimensionale, construită în conformitate cu pașii P1-P4, se va numi **transversală n -dimensională** a complexului $\mathfrak{Z}_A^n$. Vom nota această familie prin T^n , iar prin $\mathcal{E}(T^n)$ – **clasa** (mulțimea) respectivă de **muchii paralele**.

Conform definiției 4.5.3, orice complex omogen n -dimensional $\mathfrak{Z}_A^n$ conține $m \geq n$ clase de muchii paralele, pe care le vom nota prin $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$. Egalitatea $m = n$ are loc doar în cazul când $\mathfrak{Z}_A^n$ este format dintr-un singur cub n -dimensional I^n .

Din cele relatate mai sus rezultă că orice clasă de muchii paralele $\mathcal{E}_i$, $1 \leq i \leq m$, determină o transversală n -dimensională, și invers, orice transversală n -dimensională determină o clasă de muchii paralele. Totodată, vom considera că orice clasă de muchii paralele $\mathcal{E}_i$, $1 \leq i \leq m$, generează în mod univoc un subcomplex omogen n -dimensional de cuburi abstracte (a se vedea definiția 4.5.3). Acest subcomplex este determinat de familia fațetelor atât proprii, cât și improprii ale tuturor cuburilor n -dimensionale din transversala T_i^n și satisface condițiile teoremelor formulate anterior. Vom nota subcomplexul respectiv prin $\mathfrak{Z}_i^n$.

Corolarul 4.5.2. Subcomplexul n -dimensional $\mathfrak{Z}_i^n$, generat de clasa de muchii paralele $\mathcal{E}_i$, $1 \leq i \leq m$, a complexului $\mathfrak{Z}_A^n$ este un subcomplex n -dimensional din $\mathfrak{Z}_A^n$.

Frontiera complexului $\mathfrak{Z}_i^n$ conține exact două subcomplexe maximale $(n-1)$ -dimensionale și aciclice, care nu conțin nici o muchie din clasa respectivă de muchii paralele $\mathcal{E}_i$. Notăm aceste subcomplexe prin $\mathfrak{Z}_{i(1)}^{n-1}$ și $\mathfrak{Z}_{i(2)}^{n-1}$. A priori vom numi $\mathfrak{Z}_{i(1)}^{n-1}$ fațetă de „stânga”, iar $\mathfrak{Z}_{i(2)}^{n-1}$ – fațetă de „dreapta” a transversalei T_i^n .

Definiția 4.5.8. Reuniunea vacuumurilor tuturor cuburilor abstract-convexe cu dimensiunea k , $1 \leq k \leq n$, care aparțin complexului $\mathfrak{Z}_i^n$, dar nu aparțin fațetelor de „stânga” și de „dreapta” ale transversalei T_i^n , se va numi vacuum al transversalei respective și se va nota prin $\mathcal{V}(T_i^n)$.

Corolarul 4.5.3. Orice transversală T_i^n a unui complex abstract și omogen $\mathfrak{Z}_A^n$ divizează acest complex, prin intermediul vacuumului său $\mathcal{V}(T_i^n)$, în două complexe conexe de cuburi, iar fiecare dintre acestea nu este neapărat și omogen, având cel puțin dimensiunea egală cu $n-1$.

Definiția 4.5.9. Transversalele n -dimensionale $T_1^n, T_2^n, \dots, T_q^n$ ale unui complex abstract și omogen $\mathfrak{Z}_A^n$, determinate de clasele de muchii paralele $\mathcal{E}_{i_1}^n, \mathcal{E}_{i_2}^n, \dots, \mathcal{E}_{i_q}^n$, $2 \leq q \leq m$, se numesc transversale vecine două câte două, dacă oricare două transversale $T_{i_r}^n, T_{i_s}^n$, $0 \leq i_r, i_s \leq q$, satisfac condițiile:

a) $\mathcal{V}(T_{i_r}^n) \cap \mathcal{V}(T_{i_s}^n) \neq \emptyset$;

b) clasele de muchii paralele $\mathcal{E}_{i_r}$ și $\mathcal{E}_{i_s}$ conțin, respectiv, cel puțin câte o muchie $I_1' \in \mathcal{E}_{i_r}$ și $I_1'' \in \mathcal{E}_{i_s}$, care la rândul lor au un vârf comun.

Din definiția 4.5.9 rezultă următoarele. Pentru o transversală $T_{i_k}^n$ vom nota fațetele de „stânga” și de „dreapta” prin $T_{i_k(1)}^n$ și $T_{i_k(2)}^n$. Dacă transversalele $T_1^n, T_2^n, \dots, T_q^n$ sunt vecine două câte două, atunci există o transversală, în general ramificată, $T_{1,q}^n = \bigcup_{j=1}^q T_{i_j}^n \cap T_{i_k}^n$, care divizează $\mathfrak{Z}_A^n$ în mai multe subcomplexe conexe. Vom nota prin $st\mathfrak{Z}_{i_k(1)}^n$ și $dr\mathfrak{Z}_{i_k(2)}^n$ componentele determinate respectiv de fațetele de „stânga” și de „dreapta” ale transversalei n -dimensionale $T_{i_k}^n$. Este evident că, pentru aceste componente se respectă relația: $st\mathfrak{Z}_{i_k(1)}^n = \mathfrak{Z}_A^n \setminus dr\mathfrak{Z}_{i_k(2)}^n$.

Fie T_i^n , $1 \leq i \leq m$, o transversală oarecare a complexului $\mathfrak{Z}_A^n$ și $\mathfrak{Z}_{i(1)}^{n-1}$ fațeta de „stânga” a acestuia. Fațetei de „stânga” îi corespunde transversala $n-1$ -dimensională $T_{i(1)}^{n-1}$.

Definiția 4.5.10. Subcomplexul maximal conex $(n-1)$ -dimensional al complexului $\mathfrak{Z}_A^n$, cu proprietățile:

1) acest subcomplex conține fațeta $\mathfrak{Z}_{i(1)}^{n-1}$ a transversalei T_i^n ;

2) oricare două cuburi $(n-1)$ -dimensionale ale acestui subcomplex nu aparțin unui cub n -dimensional din $\mathfrak{Z}_A^n$,

se numește **transversală $(n-1)$ -dimensională**, determinată de transversala n -dimensională T_i^n , $1 \leq i \leq m$.

Conform definiției, orice transversală n -dimensională a lui $\mathfrak{Z}_A^n$ determină exact două transversale $(n-1)$ -dimensionale. Totodată, o transversală $(n-1)$ -dimensională poate fi determinată de mai multe transversale n -dimensionale.

Prin analogie cu notația transversalei n -dimensionale, transversala $(n-1)$ -dimensională o vom nota prin T^{n-1} .

Transversala $(n-1)$ -dimensională determinată de transversala T_i^n și care conține fațeta $\mathfrak{S}_{i(1)}^{n-1}$ a acesteia se va nota prin $T_{i(1)}^{n-1}$, iar cea care conține fațeta $\mathfrak{S}_{i(2)}^{n-1}$ – prin $T_{i(2)}^{n-1}$.

Lema 4.5.2. *Dacă T_i^n este o transversală n -dimensională din $\mathfrak{S}_A^n$, iar $T_{i(1)}^{n-1}$ și $T_{i(2)}^{n-1}$ sunt transversalele $(n-1)$ -dimensionale ale lui $\mathfrak{S}_A^n$, determinate de transversala T_i^n , atunci $T_{i(1)}^{n-1} \cap T_{i(2)}^{n-1} = \emptyset$, $1 \leq i \leq m$.*

Demonstrație. Fie există două transversale $(n-1)$ -dimensionale $T_{i(1)}^{n-1}$ și $T_{i(2)}^{n-1}$, determinate de o transversală n -dimensională T_i^n , încât intersecția acestora nu este vidă. Luând în considerație faptul că $T_{i(1)}^{n-1}$ și $T_{i(2)}^{n-1}$ reprezintă fațetele de „stânga” și de „dreapta” ale transversalei T_i^n , rezultă că T_i^n se autointersectează. Ar putea avea loc următoarele două cazuri:

- a) cel puțin una dintre fațetele $\mathfrak{S}_{i(1)}^{n-1}$ sau $\mathfrak{S}_{i(2)}^{n-1}$ nu mărginește niciun subcomplex din $\mathfrak{S}_A^n$. În aceste condiții, există $1 \leq k \leq n-1$ încât grupul de omologii $\square^k(\mathfrak{S}_A^n, \mathbb{Z})$ nu este izomorf lui 0. Obținem contradicție cu faptul că $\mathfrak{S}_A^n$ este un complex omogen de cuburi abstracte (a se vedea definiția 4.5.3);
- b) subcomplexul mărginit de una dintre fațetele $\mathfrak{S}_{i(1)}^{n-1}$ sau $\mathfrak{S}_{i(2)}^{n-1}$ conține, la rândul său, două subcomplexe, intersecția cărora nu este complex omogen cu dimensiunea $n-1$. Aceasta conduce la contradicție cu condiția d) a definiției 4.5.3.

Deoarece $\mathfrak{S}_A^n$ este un complex omogen de cuburi abstracte, contradicțiile obținute demonstrează că afirmația lemei este adevărată.

Vom reveni acum asupra demonstrației teoremei 4.5.3.

Demonstrație. Menționăm, mai întâi, că un complex omogen de cuburi abstract-convexe satisface condițiile definiției 4.5.3. Prin urmare, pentru acest complex sunt adevărate teoremele 4.5.1 și 4.5.2. Fie $\mathcal{O}^{n-1}$ este sfera abstractă determinată de frontiera $\text{bd} \mathfrak{S}_A^n$ complex omogen $\mathfrak{S}_A^n$ de cuburi abstract-convexe. Această sferă este divizată în cuburi ce formează un complex cubic abstract-convex omogen $(n-1)$ -dimensional. În complexul $\mathfrak{S}_A^n$ sunt m clase de muchii paralele care determină, la rândul lor, transversalele n -dimensionale $T_1^n, T_2^n, \dots, T_m^n$. Alegem transversala $T_{i_k}^1$. Ea aparține unei succesiuni maximale de transversale $T_{i_1}^n, T_{i_2}^n, \dots, T_{i_r}^n$, $1 \leq r \leq m$, cu proprietatea că intersecția $T_{i_s}^n \cap T_{i_{s+1}}^n$ reprezintă o transversală $(n-1)$ -dimensională, $1 \leq s \leq r-1$. Considerăm că $T_{i_k}^n = T_{i_r}^n$ (în caz contrar ne deplasăm până la $T_{i_r}^n$). Conform lemei 4.5.2, are loc

egalitatea $T_{i_r(1)}^{n-1} \cap T_{i_r(2)}^{n-1} = \emptyset$. Acționăm asupra transversalelor $T_{i_r}^n$ și $T_{i_r(2)}^{n-1}$. Luăm o altă transversală n -dimensională, ce nu aparține succesiunii menționate mai sus $T_{i_1}^n, T_{i_2}^n, \dots, T_{i_r}^n$, însă care intersectează $T_{i_r}^n$ și $T_{i_r(2)}^{n-1}$ (fie aceasta se alege din succesiunea $T_{j_1}^n, T_{j_2}^n, \dots, T_{j_q}^n$). Procedăm la fel ca și în cazul transversalei $T_{i_k}^n$. Ca rezultat vom avea selectate două transversale n -dimensionale $T_{i_r}^n$, $T_{j_q}^n$ și două $(n-1)$ -dimensionale $T_{i_r(2)}^{n-1}$, $T_{j_q(2)}^{n-1}$. Fiecare dintre perechile indicate au intersecție nevidă. Repetăm procedura descrisă de n ori. În final, vom obține că toate aceste transversale se intersectează printr-un cub n -dimensional $I^n \in \mathfrak{S}^n$. Acest cub este abstract-convex. Cubul I^n conține un vârf de pe fâșia circulară de cuburi $(n-1)$ -dimensionale, care are un vârf $I^0 \in \mathfrak{S}^0$ cu n muchii incidente lui. Deci, afirmația teoremei 4.5.3 e adevărată.

Noțiunea de transversală n -dimensională, precum și cea $(n-1)$ -dimensională, poate fi generalizată pentru cazul unui complex cubic arbitrar, conex și aciclic, care nu neapărat este și omogen. Cu alte cuvinte, e vorba de complexul de cuburi abstract-convexe $\mathfrak{S}^n$, ce satisface condițiile:

- a) dacă I^p , $0 \leq p \leq n$, este un element al lui $\mathfrak{S}^n$, atunci și orice fațetă $I^k \subset I^p$, $0 \leq k < p$, este un element din $\mathfrak{S}^n$;
- b) pentru fiecare două cuburi I^{p_1} și I^{p_2} din $\mathfrak{S}^n$ intersecția $I^{p_1} \cap I^{p_2}$ este vidă sau reprezintă un element din $\mathfrak{S}^n$, unde $0 \leq p_1, p_2 \leq n$;
- c) complexul $\mathfrak{S}^n$ conține cel puțin un cub abstract n -dimensional I^n ;
- d) pentru oricare două subcomplexe $\mathfrak{S}_1^n$ și $\mathfrak{S}_2^n$ din $\mathfrak{S}^n$, care verifică condițiile a)-c), și $\mathfrak{S}_1^n \cup \mathfrak{S}_2^n = \mathfrak{S}^n$ posedă proprietatea: intersecția $\mathfrak{S}_1^n \cap \mathfrak{S}_2^n$, reprezintă un subcomplex $\mathfrak{S}^p \subset \mathfrak{S}^n$, cu dimensiunea $p = n-1$;
- e) grupul de omologii de rangul zero este izomorf cu grupul numerelor întregi Z :

$$\square^0(\mathfrak{S}^n, Z) \cong Z;$$

- f) grupurile de omologii de rangul $1, 2, 3, \dots, n$ sunt izomorfe cu zero:

$$\square^1(\mathfrak{S}^n, Z) \cong \square^2(\mathfrak{S}^n, Z) \cong \dots \cong \square^n(\mathfrak{S}^n, Z) \cong 0.$$

Aceste complexe se deosebesc de cele omogene prin reformularea condiției c) a definiției 4.5.3. Reprezentarea geometrică a unui astfel de complex este dată în figura 4.3.

Pornind de la definiția constructiv-algoritmă a clasei de muchii paralele și a transversalei n -dimensionale, constatăm:

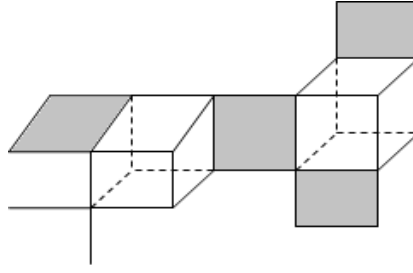


Fig. 4.3. Complex neomogen de cuburi, conex și aciclic

- a) două muchii determinate de cuburile 1-dimensionale I_j^1 și I_k^1 ale complexului cubic $\mathfrak{I}^n$ sunt paralele dacă în $\mathfrak{I}^n$ există o succesiune de cuburi 1-dimensionale

$$I_j^1 = I_{\alpha_1}^1, I_{\alpha_2}^1, \dots, I_{\alpha_t}^1 = I_k^1,$$

încât fiecare două cuburi vecine $I_{\alpha_s}^1, I_{\alpha_{s+1}}^1$ ale acestei succesiuni reprezintă muchiile disjuncte (opuse) ale unui cub 2-dimensional din $\mathfrak{I}^n$. Mulțimea maximală de muchii paralele ale complexului $\mathfrak{I}^n$ formează o clasă de muchii paralele.

- b) mulțimea cuburilor abstracte din $\mathfrak{I}^n$ ce conțin muchii ale clasei $\mathcal{E}_i$ în calitate de fațete 1-dimensionale se numește transversală a complexului $\mathfrak{I}^n$ și se notează prin $T(\mathcal{E}_i), 1 \leq i \leq m$.

Menționăm că, în cazul complexelor omogene de cuburi abstracte, fiecare clasă de muchii paralele conține cel puțin 2^{n-1} cuburi 1-dimensionale. În cazul unui complex arbitrar de cuburi abstracte (nu numai de omogen), fiecare cub 1-dimensional care nu este fațetă a unui cub cu dimensiunea $q \geq 2$ din $\mathfrak{I}^n$, formează o clasă aparte. Pentru complexul reprezentat în figura 4.3 avem 11 clase de muchii paralele, printre care două clase conțin doar câte un element.

Vom studia în continuare câteva proprietăți generale ale transversalelor complexului $\mathfrak{I}^n$.

Teorema 4.5.4. *Transversala determinată de o clasă de muchii paralele a unui complex conex și aciclic de cuburi abstracte $\mathfrak{I}^n$ este, la rândul său, un complex de cuburi abstracte $\mathfrak{I}^q, 1 \leq q \leq n$, conex și aciclic.*

Demonstrație. Fie $T(\mathcal{E}_i)$ o transversală determinată de clasa de muchii paralele $\mathcal{E}_i$ a complexului $\mathfrak{I}^n$, iar q – dimensiunea maximă a cuburilor abstracte din $\mathfrak{I}^n$ ce formează transversala $T(\mathcal{E}_i)$. Astfel, avem un complex de cuburi $\mathfrak{I}^q$ care satisface condițiile a)-c) menționate mai sus. Ținând cont de definiția clasei de muchii paralele, rezultă că $\mathfrak{I}^q$ este complex conex. Deoarece grupurile de omologii ale complexului $\mathfrak{I}^q$ sunt subgrupuri ale grupurilor de omologii ale complexului $\mathfrak{I}^n$, rezultă că $\mathfrak{I}^q$ este un complex aciclic.

Frontiera complexului I_i^q , determinat de transversala $T(\mathcal{E}_i)$, este formată din două complexe maximale disjuncte cu dimensiunea $(q-1)$ fiecare, ce nu conțin nici o muchie din $\mathcal{E}_i$. Vom nota subcomplexele respective prin $I_{i(1)}^{q-1}$ și $I_{i(2)}^{q-1}$. Acestea ar putea și să nu fie conexe.

Fie $\mathcal{V}(T(\mathcal{E}_i))$ vacuumul transversalei $T(\mathcal{E}_i)$ care este reuniune a vacuumurilor cuburilor complexului I_i^q , ce nu aparțin subcomplexelor menționate mai sus $I_{i(1)}^{q-1}$ și $I_{i(2)}^{q-1}$.

Teorema 4.5.5. *Transversala $T(\mathcal{E}_i)$, $1 \leq i \leq m$, a unui complex cubic abstract n -dimensional, conex și aciclic, divizează acest complex prin intermediul vacuumului transversalei $T(\mathcal{E}_i)$ în două complexe cubice cu dimensiunile q , $1 \leq q \leq n$, care sunt conexe și aciclice.*

Demonstrația teoremei rezultă imediat din faptul că $\mathfrak{I}^n$ este complex conex și aciclic, precum și din definiția transversalelor respective.

Fie $\mathfrak{I}^n$ un complex n -dimensional neomogen de cuburi abstracte. Prin urmare, în $\mathfrak{I}^n$ există un cub $I^r \in I^n$, $0 \leq r \leq n$, care nu este fațetă a cuburilor n -dimensionale din $\mathfrak{I}^n$.

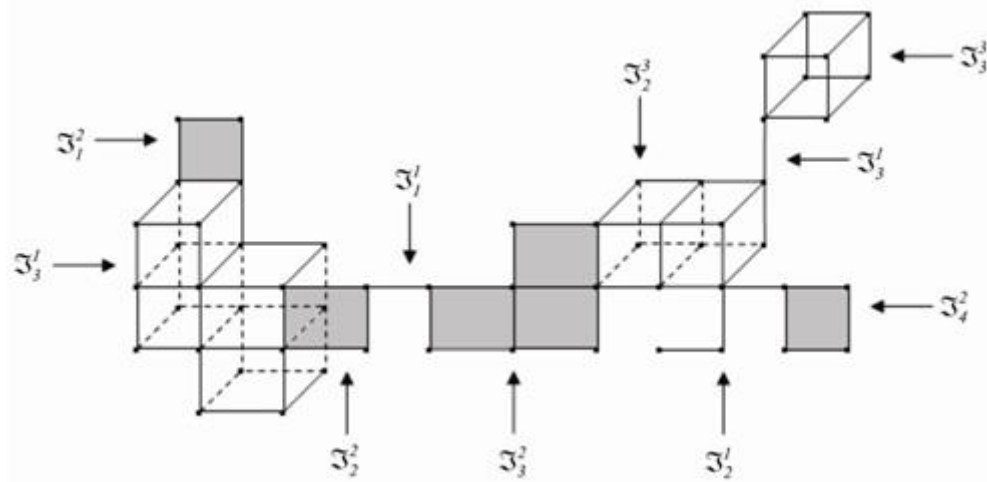


Fig. 4.4. Complex neomogen de cuburi cu subcomplexe omogene cu dimensiunile 1, 2 și 3

Vom nota prin $\mathcal{T}^t$, $1 \leq t \leq n$, familia de subcomplexe omogene t -dimensionale, maximale și conexe din $\mathfrak{I}^n$. Evident, în cazul unui complex neomogen $\mathfrak{I}^n$ avem:

- 1) $\mathcal{T}^n \neq \emptyset$;
- 2) există o valoare a lui t , $1 \leq t < n$, încât $\mathcal{T}^t \neq \emptyset$ ($t \geq 1$, deoarece conform celor menționate anterior, se studiază doar complexe de cuburi conexe și aciclice).

Astfel, într-un complex neomogen, oricare două subcomplexe omogene n -dimensionale sunt legate prin șirul de subcomplexe omogene maximale $\mathfrak{I}_1^{n_1}, \mathfrak{I}_2^{n_2}, \dots, \mathfrak{I}_q^{n_q}$, $1 \leq n_1, n_2, \dots, n_q < n$, cu proprietățile:

$$a) \mathfrak{S}_j^{n_j} \in \mathcal{T}^j, 1 \leq j \leq q;$$

$$b) n_i \neq n_{i+1}, \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, q-1\}.$$

Evident, în şirul de complexe $\mathfrak{S}_1^{n_1}, \mathfrak{S}_2^{n_2}, \dots, \mathfrak{S}_q^{n_q}$, $1 \leq n_1, n_2, \dots, n_q < n$, oricare două vecine sunt de dimensiuni diferite.

În figura 4.4 este dată reprezentarea geometrică a unui complex cubic neomogen conex şi aciclic cu dimensiunea trei, în care avem trei familii de subcomplexe cubice conexe şi omogene:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^1 &= \{ \mathfrak{S}_1^3, \mathfrak{S}_2^3, \mathfrak{S}_3^3 \}, \\ \mathcal{T}^2 &= \{ \mathfrak{S}_1^2, \mathfrak{S}_2^2, \mathfrak{S}_3^2, \mathfrak{S}_4^2 \}, \\ \mathcal{T}^3 &= \{ \mathfrak{S}_1^1, \mathfrak{S}_2^1, \mathfrak{S}_3^1 \}.\end{aligned}$$

Observăm că complexe omogene 3-dimensionale $\mathfrak{S}_1^3$ şi $\mathfrak{S}_2^3$ sunt unite prin şirul de complexe omogene cu dimensiuni mai mici: $\mathfrak{S}_2^2, \mathfrak{S}_1^1, \mathfrak{S}_3^2$.

Pentru complexul omogen de cuburi abstracte $\mathfrak{S}^n$ deja cunoaştem noţiunile de interior şi frontieră, notate respectiv prin $\text{int } \mathfrak{S}^n$ şi $\text{bd } \mathfrak{S}^n$. Aceste noţiuni pot fi generalizate ținând cont de particularităţile unui complex neomogen de cuburi abstracte, menţionate anterior.

Fie $\mathfrak{S}^n$ un complex neomogen de cuburi abstracte, cu familiile de subcomplexe omogene maximale conexe $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2, \dots, \mathcal{T}^n$.

Definiția 4.5.11. Reuniunea $\bigcup_{I^n \in \mathfrak{Q}^n} \text{int } I^n$ se numeşte interior al complexului $\mathfrak{S}^n$ şi se notează prin $\text{int } \mathfrak{S}^n$. Diferența $\mathfrak{S}^n \setminus \text{int } \mathfrak{S}^n$ se numeşte frontieră a complexului şi se notează prin $\text{bd } \mathfrak{S}^n$.

Menţionăm că frontiera unui complex neomogen de cuburi abstracte poate fi, la rândul său, un complex neomogen cu dimensiunea cel mult egală cu $n-1$. Această situație ar însemna că putem vorbi de o frontieră complexă cu porţiuni de diferite dimensiuni r , $1 \leq r \leq n-1$. Chestiune interesantă, ce poate constitui obiectul unui studiu aparte.

Precum s-a menţionat anterior, un cub n -dimensional I^n , împreună cu toate faţetele sale, formează un complex cubic abstract (a se vedea definiția 4.2.1), pe care îl vom nota prin $\mathfrak{S}^n(I^n)$. Revenind la notațiile folosite în paragraful 4.1, cubul I^n se va interpreta:

$$I^n = (\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n), \quad \Gamma_0 = \{x_1\}, \quad \Gamma_n = \{x_n\}.$$

Fie I^1 o faţetă 1-dimensională (muchie) a cubului I^n , incidentă vârfului x_n . Notăm prin $T_{I^1}^n$ transversala determinată de clasa de muchii paralele ce conţine muchia I^1 , iar prin $\mathfrak{S}(x_n)$ – subcomplexul din $\mathfrak{S}^n(I^n)$ determinat de $T_{I^1}^n$, ce conţine vârful x_n . Respectiv, prin $\mathfrak{S}(\overline{x_n})$ vom nota cel de-al doilea subcomplex.

Ținând cont de proprietățile cubului abstract n -dimensional, studiate în paragraful 4.1, vom demonstra un rezultat util pentru examinările ce urmează.

Teorema 4.5.6. *Pentru orice transversală $T_{I_1}^n$ și orice mulțime $\Gamma_k, [n/2] < k \leq n-1$, este adevărată relația:*

$$\text{card}(\mathfrak{Z}(x_n) \cap \Gamma_k) > \text{card}(\mathfrak{Z}(\overline{x_n}) \cap \Gamma_k),$$

unde $[n/2]$ este partea întreagă a numărului $n/2$.

Demonstrație. Fie I^1 fațeta 1-dimensională a cubului n -dimensional I^n , incidentă vârfului x_{2^n} . Notăm extremitățile muchiei I^1 prin a și b , considerând $b = x_{2^n}$. Transversala T_{I^1} împarte cubul I^n în două cuburi $(n-1)$ -dimensionale I_1^{n-1} și I_2^{n-1} , astfel încât vârful a aparține lui I_1^{n-1} , iar vârful b – cubului I_2^{n-1} . Elementele mulțimii Γ_k se află la distanța $(n-k)$ de la vârful b . Mulțimea Γ_k este formată din două submulțimi:

- a) S'_k – mulțimea tuturor vârfurilor cubului $(n-1)$ -dimensional I_1^{n-1} , ce se află la distanța $(n-k)$ de la vârful b în cubul inițial I^n ;
- b) S''_k – mulțimea tuturor vârfurilor cubului $(n-1)$ -dimensional I_2^{n-1} , ce se află la distanța $(n-k)$ de la vârful b în cubul inițial I^n .

Având în vedere că pentru orice vârf z al cubului I_1^{n-1} , ce aparține mulțimii Γ'_k , în cubul I^n are loc egalitatea $d(b, z) = d(b, a) + d(a, z)$, precum și de faptul că b este vârf al cubului I_2^{n-1} , rezultă inegalitatea $\text{card}(\Gamma''_k) > \text{card}(\Gamma'_k)$. Această inegalitate confirmă afirmația teoremei.

4.6. Concluzii la capitolul 4

Cercetările efectuate în cadrul capitolului 4 au fost determinate de căutarea unor metode eficiente de soluționare a problemelor cu caracter aplicativ, care își găsesc interpretarea respectivă pe complexe de cuburi geometrice și diferite variații ale acestora. În condițiile unor astfel de complexe, deseori suntem nevoiți să operăm ținând cont de metrica spațiului în care este amplasat complexul de cuburi. Situația respectivă crează anumite dificultăți care se răsfrâng asupra eficienței metodelor și algoritmilor de soluționare a problemelor. Aceasta a servit drept unul dintre motivele care a determinat necesitatea examinării complexelor de cuburi abstracte, în contextul celor expuse în capitolul 2 pentru complexul de relații multi-are.

În capitolul 4, mai întâi se definește cubul abstract n -dimensional cu ajutorul simplexelor abstracte, pentru ca mai apoi acesta să servească drept “cărămida” necesară la construirea

complexului de cuburi abstracte. Cercetările se încadrează în schema folosită în capitolul 2 la studierea complexelor de relații. Cu ajutorul grupurilor de omologii au fost stabilite fundamentele teoriei complexelor de cuburi abstracte.

Rezultatele teoretice obținute în legătură cu studierea complexelor de cuburi abstracte au permis obținerea unor rezultate adiționale, cunoscute în alte domenii ale matematicii. Printre rezultatele ce încununează studierea acestor complexe pot fi menționate:

- a fost dedusă formula Euler-Poincare pentru complexul de cuburi abstracte;
- au fost studiate proprietățile caracteristice ale varietăților abstracte, determinate de complexe de cuburi abstracte;
- au fost determinate condițiile de existență a conturului Euler $(n-1)$ -dimensional într-o varietate abstractă, orientabilă și conexă forte;
- au fost studiate proprietățile transversalei n -dimensionale și $(n-1)$ -dimensionale într-un complex cubic abstract, chestiune importantă la soluționarea problemei medianei.

Ținând cont de rezultatele obținute în capitolul 4, deducem următoarele concluzii:

1. Prin complexul de cuburi abstracte a fost studiat un caz special al complexului de relații multi-are, important pentru soluționarea problemelor practice, ceea ce generează o direcție aparte de cercetare prin aplicarea metodelor topologiei algebrice;
2. Prin construirea grupurilor de omologii ale complexului de cuburi abstracte au fost create premisele obținerii unor rezultate analoage celor din topologia algebrică, importante pentru stabilirea proprietăților speciale, utile la elaborarea unei metode de calculare a medianei fără a utiliza metrica spațiului respectiv;
3. Duducerea formulei Euler-Poincare pentru un complex de cuburi abstracte, a servit drept un instrument eficient pentru examinarea proprietăților varietăților, determinate de un astfel de complex, și clasificarea ulterioară a acestora.

5. APLICAȚII ALE COMPLEXELOR DE RELAȚII MULTI-ARE

Precum a mai fost menționat, fundamentarea direcției de cercetare, legată de studierea complexelor de relații multi-are, a fost determinată, în primul rând, de necesitatea soluționării unor probleme importante cu caracter aplicativ, care puteau fi rezolvate într-un mod eficient doar pentru unele cazuri speciale. Într-un final, rezultatele teoretice obținute pentru complexul de relații multi-are au permis elaborarea unor metode eficiente de soluționare a acestor probleme, avansând esențial în această direcție. Printre ele se numără atât problemele cu caracter teoretico-aplicativ, cum ar fi studierea varietăților abstracte și clasificarea lor, precum și problemele practice, cum ar fi problemele de amplasare. Problemele examinate țin de domeniul optimizării discrete, dezvoltat intens în ultimele decenii [308], [309].

Să examinăm unele dintre aplicațiile posibile ale teoriei complexelor de relații multi-are.

5.1. Clasificarea varietăților abstracte

Varietatea este considerată drept una dintre noțiunile fundamentale ale matematicii cu diverse aplicații teoretico-aplicative, cu ajutorul căreia se concretizează și se generalizează noțiunea de suprafață pentru dimensiuni oricât de mari. Studierea varietăților începe odată cu dezvoltarea geometriei corpurilor fizice și se întâlnește în lucrările clasice ale mai multor matematicieni: K.Gauss – la examinarea proprietăților suprafețelor în spațiul R^3 ; H.Poiancare – la examinarea suprafețelor în spații cu dimensiuni mari; B. Riemann – la studierea ipotezelor fundamentale ale geometriei, etc.

Odată cu fundamentarea teoriei complexelor de relații multi-are, devine actuală problema introducerii noțiunii de varietate abstractă și studierea proprietăților acesteia. Varietățile abstracte n -dimensionale pot fi modelate în spațiul E^d , $n+1 \leq d \leq 2n+1$, obținând astfel varietățile combinatoriale. Aceste varietăți mai sunt importante prin faptul că ele pot conduce la elaborarea unor modele importante nu doar din domeniul matematicilor [42], [186]. Un studiu amplu ce ține de corelația dintre principalele clase de varietăți n -dimensionale îi aparține matematicianului S. Novikov [225]. Elementul de bază al varietăților abstracte îl constituie simplexul abstract, precum și generalizarea acestuia – quasisimplexul abstract. Rezultatele ce țin de studierea acestor varietăți se regăsesc în lucrările [19], [23], [153], [156], [168], [177] și se folosesc la soluționarea unor probleme aplicative pe complexe speciale de cuburi abstracte [130], [144].

În lucrările [156], [212] a fost studiată legătura dintre varietatea abstractă și un complex simplu de relații multi-are. În paragraful 4.4 au fost demonstrate mai multe proprietăți ale

varietăților abstracte degenerate, care le generalizează pe cele din [156], [212] și care vor fi folosite în acest capitol pentru a obține o clasificare a varietăților degenerate.

Varietatea n -dimensională și proprietățile acesteia au fost studiate de către Boltiansky V. [305], Teleman C. [62] ș.a., fiind considerată, în primul rând, ca un spațiu euclidian de o anumită dimensiune, numită dimensiunea varietății. Fiecare punct de pe o varietate are o vecinătate omeomorfă cu o mulțime deschisă a spațiului.

Notăm prin $\sum^{n+1}(x, \varepsilon)$ sfera-corp în spațiul euclidian E^{n+1} cu centrul în punctul $x \in E^{n+1}$ și raza $\varepsilon > 0$. Sfera-corp $\sum^{n+1}(x, \varepsilon)$ se mai numește ε -vecinătate a punctului x .

Definiția 5.1.1 [305]. *Mulțimea $N \subset E^{n+1}$ se numește varietate n -dimensională, $n \geq 2$, dacă pentru orice punct $x \in N$ există o astfel de ε -vecinătate $\sum(x, \varepsilon)$, încât intersecția $\sum^{n+1}(x, \varepsilon) \cap N$ reprezintă o mulțime omeomorfă cu sfera-corp $\sum^n(0, 1) \subset E^n \subset E^{n+1}$.*

Se cunoaște că astfel de varietăți, numite și *varietăți combinatorice fără borduri*, pot fi divizate într-un complex finit de simplexe [305]. Acestea nu sunt unicele varietăți ce admit astfel de divizări care, la rândul lor, se folosesc pentru obținerea unor rezultate importante din domeniul topologiei algebrice. O condiție importantă o constituie lipsa bordurilor în aceste varietăți. Înainte de a formula unele rezultate adiționale celor descrise în paragraful 4.4, vom defini noțiunea de bord și vom vedea ce se întâmplă în cazul așa-numitelor varietăți cu borduri m -dimensionale, $m \geq 1$.

Să considerăm un complex de relații multi-are $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ și varietatea abstractă degenerată $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$, determinată de acest complex conform definiției 4.4.2, examinată în capitolul precedent.

În conformitate cu cele expuse în capitolul 2, notăm prin $\varepsilon_j^i(m, \Delta)$ coeficientul de Δ -incidență al unui quasisimplex Q_j^m al complexului $\mathcal{K}^n$ în raport cu quasisimplexul Q_i^{m-1} , $1 \leq m \leq n$. Coeficientul $\varepsilon_j^i(m, \Delta)$ se descrie în modul următor [130]:

$$\varepsilon_j^i(m, \Delta) = [Q_j^m : Q_i^{m-1}].$$

În cazul complexului simplu de simplexe abstracte [58] a fost definită noțiunea de vacuum al simplexului [19]. În mod similar, această chestiune o putem face și pentru cazul unui quasisimplex, care diferă de un simplex obișnuit prin repetarea elementelor șirului respectiv (quasisimplexul abstract este un simplex obișnuit cu bucle).

Fie $Q_j^k = (x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_k})$ un quasisimplex oarecare cu dimensiunea k din complexul $\mathcal{K}^n$.

Definiția 5.1.2. Dacă coeficientul de incidență $\varepsilon_j^i(k, \Delta) = [Q_j^k : (-1)^i Q_i^{k-1}]$ este egal cu 1 în raport cu orice fațeta $(k-1)$ -dimensională Q_i^{k-1} a lui Q_j^k , $i = 0, 1, \dots, k$, atunci $Q_j^k \setminus (\bigcup_{i=0}^k (-1)^i Q_i^{k-1})$ se numește vacuum cu dimensiunea k al quasisimplexului Q_j^k , $1 \leq k \leq n$.

Vom nota vacuumul quasisimplexului $Q_j^k \in \mathcal{Q}^k$ prin $\overset{\circ}{Q}_j^k$. Evident, diferența $Q_j^k \setminus \overset{\circ}{Q}_j^k$ reprezintă, la rândul său, un complex de quasisimplexe $(k-1)$ -dimensionale, $1 \leq k \leq n$. (diferența respectivă reprezintă un complex generat de fațetele $(k-1)$ -dimensionale ale lui $Q_j^k \in \mathcal{Q}^k$). Acest complex se numește bord cu dimensiunea $k-1$ al quasisimplexului Q_j^k . Astfel, din varietatea dată $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$, se obține o varietate nouă prin eliminarea unui vacuum.

Să admitem că într-o varietate degenerată $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$ au fost eliminate p_i vacuumuri i -dimensionale, $1 \leq i \leq n$.

Definiția 5.1.3. Varietatea degenerată $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$ din care sunt eliminate p_n vacuumuri n -dimensionale, p_{n-1} vacuumuri $(n-1)$ -dimensionale, ..., p_1 vacuumuri 1-dimensionale, se numește varietate degenerată cu p_n borduri n -dimensionale, p_{n-1} borduri $(n-1)$ -dimensionale, ..., p_1 borduri 1-dimensionale.

Pentru varietatea degenerată cu p_n borduri n -dimensionale, p_{n-1} borduri $(n-1)$ -dimensionale, ..., p_1 borduri 1-dimensionale vom nota prin $\widehat{P}^n = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ caracteristica de bord a acesteia, iar însăși varietatea o vom numi varietate $\widehat{P}^n$ -degenerată, folosind pentru ea notația $\mathcal{V}\mathcal{D}_{\widehat{P}^n}^n$. Ușor se verifică că varietatea $\widehat{P}^n$ -degenerată nu mai respectă condițiile definiției 4.4.2, reprezentând o structură matematică mult mai complicată. Proprietățile varietăților abstracte degenerate, demonstrate anterior, nu au loc și în cazul celor $\widehat{P}^n$ -degenerate. Varietățile respective merită o examinare aparte, care nu va constitui obiectul de cercetare în cazul prezentei lucrări.

În cele ce urmează vom continua studierea varietăților ce satisfac condițiile din definiția 4.4.2. Astfel de varietăți sunt:

- închise, adică fără borduri (se asigură de condiția a) din definiția 4.4.2);
- conexe (se asigură de condiția b) din definiția 4.4.2);
- omogene (condiția c) din definiția 4.4.2);
- fără găuri (condiția d) din definiția 4.4.2).

Teorema 5.1.1. Grupul de omologii directe de ordin n al unei varietăți abstracte degenerate și conexă forte $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$ este izomorf cu grupul numerelor întregi, adică $\Delta^n(\mathcal{V}\mathcal{D}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Demonstrație. Într-o varietate conexă forte $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$ două quasisimplexe n -dimensionale Q_α^n și Q_β^n sunt unite printr-un drum n -dimensional $Q_\alpha^n = Q_1^n, Q_2^n, \dots, Q_i^n, \dots, Q_k^n = Q_\beta^n$.

Formăm Δ -frontiera varietății $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$. Fiecare fațetă $(n-1)$ -dimensională a varietății va fi prezentă în această frontieră exact de două ori, cu semne diferite. Prin urmare, $\Delta \mathcal{V}\mathcal{D}^n = 0$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$ reprezintă un Δ -ciclu. Astfel, are loc egalitatea $L^n = \mathcal{V}\mathcal{D}^n = Q_1^n + Q_2^n + \dots + Q_{\alpha_n}^n$, sau $L^n = \mathcal{V}\mathcal{D}^n = -Q_1^n - Q_2^n - \dots - Q_{\alpha_n}^n$. Aceste sume reprezintă niște Δ -cicluri, ceea ce asigură relația $Z^n(\Delta) = \Delta^n(\mathcal{V}\mathcal{D}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, deoarece nu există Δ -cicluri n -dimensionale și omoloage cu 0.

Vom prezenta în continuare câteva rezultate, necesare pentru examinările ulterioare, și care reprezintă de fapt o generalizare a rezultatelor obținute pentru cazul complexului simplu de relații multi-are (a se vedea [11], [12]), folosind aceeași tehnică de demonstrație.

Teorema 5.1.2. Dacă într-o varietate degenerată abstractă orientabilă, fără borduri și conexă forte $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$, orice subvarietate $(n-1)$ -dimensională sferică și orientabilă $\sum^{n-1}$ divizează $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$ în două componente conexe, atunci $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$ reprezintă o varietate sferică, adică $\mathcal{V}\mathcal{D}^n = \sum^n$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$ varietatea abstractă ce corespunde unui complex generalizat de relații multi-are și satisface condițiile teoremei. Din cele examinate anterior deducem că frontiera-complex $\mathcal{K}^{n-1}$ a unui simplex abstract n -dimensional reprezintă o varietate sferică abstractă $(n-1)$ -dimensională. Aceasta garantează existența subvarietății $\sum^{n-1} \subset \mathcal{V}\mathcal{D}^n$, care satisface ipoteza teoremei. Examinăm șirul de schelete p -dimensionale $\mathcal{K}^0 \subset \mathcal{K}^1 \subset \dots \subset \mathcal{K}^{n-1} \subset \mathcal{K}^n$, $0 \leq p \leq n$, ale varietății degenerate $\mathcal{V}\mathcal{D}^n$, privindu-le ca complexe de relații multi-are, și un șir de subvarietăți sferice arbitrare:

$$\sum^1 \subset \sum^2 \subset \dots \subset \sum^m \subset \dots \subset \sum^{n-1} \subset \mathcal{V}\mathcal{D}^n = \mathcal{K}^n. \quad (5.1)$$

Conform ipotezei teoremei, $\sum^{n-1}$ divizează complexul $\mathcal{K}^n$ în două componente conexe, $\tilde{\mathcal{K}}_1^n \cup \sum_1^{n-1}$ și $\tilde{\mathcal{K}}_2^n \cup \sum_2^{n-1}$, unde $\sum_1^{n-1}$ și $\sum_2^{n-1}$ sunt două copii ale lui $\sum^{n-1}$. Ținând cont de

definiția noțiunii de schelet al unui complex de relații multi-are [130], precum și de succesiunea de incluziuni (5.1), rezultă că și $\sum^m$ divizează complexul $\mathcal{X}^{m+1}$ în două subcomplexe, $\tilde{\mathcal{X}}_1^{m+1} \cup \sum_1^m$ și $\tilde{\mathcal{X}}_2^{m+1} \cup \sum_2^m$. Deci $\sum_1^m$ și $\sum_2^m$ sunt Δ -cicluri omoloage cu 0. Astfel, și $\sum^m$ este un Δ -ciclu omolog cu 0.

Fie $\mathcal{Z}^m(\Delta)$ grupul Δ -ciclurilor lui $\mathcal{X}^{m+1}$, $1 \leq m \leq n-1$, deci și al lui $\mathcal{X}^n$. Toate simplexele m -dimensionale ale lui $\mathcal{X}^n$ aparțin lui $\mathcal{X}^m$ (deoarece $\mathcal{X}^m$ este scheletul m -dimensional al lui $\mathcal{X}^n$). $\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$ reprezintă grupul Δ -ciclurilor omoloage cu 0 ale lui $\mathcal{X}^{m+1}$, pe când pentru $\mathcal{X}^m$ acestea nu mai sunt omoloage cu 0. Formând grupul-cât $\mathcal{Z}^m(\Delta)/\mathcal{Z}_0^m(\Delta) = \Delta^m(\mathcal{X}^n, Z)$, să demonstrăm că acesta este trivial, adică e izomorf cu 0. Pentru aceasta e suficient a demonstra că grupul $\mathcal{Z}^m(\Delta)$ satisface relația $\mathcal{Z}^m(\Delta) \cong 0$.

Să arătăm, pentru început, că orice Δ -ciclu elementar din $\mathcal{Z}^m(\Delta)$ al lui $\mathcal{X}^{m+1}$ este omolog cu 0. Pentru aceasta este suficient a demonstra că orice Δ -ciclu simplu din grupul $\mathcal{Z}^m(\Delta)$, raportat la complexul $\mathcal{X}^{m+1}$, este omolog cu 0. Însă acest lucru este evident: dacă $Q^{m+1} \in \mathcal{X}^{m+1}$ e un simplex arbitrar, atunci conform teoremei 4.4.3, Δ -ciclul m -dimensional $z^m = \Delta Q^{m+1} = \sum_{i=0}^m (-1)^i Q_i^m$, unde quasisimplexul Q_i^m este opus vârfului i din Q^{m+1} , aparține grupului $\mathcal{Z}^m(\Delta)$ al complexului $\mathcal{X}^m$ și este un Δ -ciclu simplu. Concomitent, z^m este Δ -frontiera Δ -lanțului $L^{m+1} = Q^{m+1}$. Deci z^m aparține lui $\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$, adică vom nota $z^m = z_0^m \cdot \mathcal{X}^m = \mathcal{Z}_0^m$, sau $\mathcal{X}^{m+1}$ are în total α_{m+1} quasisimplexe $(m+1)$ -dimensionale: $Q_1^{m+1}, Q_2^{m+1}, \dots, Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$. Astfel, avem α_{m+1} Δ -cicluri simple $z_{01}^m, z_{02}^m, \dots, z_{0\alpha_{m+1}}^m$. Suma acestor cicluri reprezintă un Δ -ciclu elementar și omolog cu 0 pentru complexul $\mathcal{X}^{m+1}$:

$$z_0^m = \delta_1 z_{01}^m + \delta_2 z_{02}^m + \dots + \delta_i z_{0i}^m + \dots + \delta_{\alpha_{m+1}} z_{0\alpha_{m+1}}^m, \quad (5.2)$$

unde $\delta_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq \alpha_{m+1}$. Δ -Ciclul z_0^m din relația (5.2) nu are forma generală a unui Δ -ciclu din $\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$.

Expresia

$$z_0^m = g_1 z_{01}^m + g_2 z_{02}^m + \dots + g_i z_{0i}^m + \dots + g_{\alpha_{m+1}} z_{0\alpha_{m+1}}^m, \quad (5.3)$$

unde g_i este un număr arbitrar din Z , $i \in \{1, 2, \dots, \alpha_m\}$, reprezintă forma generală a unui Δ -ciclu din $\mathcal{Z}_0^m(\Delta)$ pentru complexul $\mathcal{X}^{m+1}$. De aici, însă, nu rezultă că Δ -ciclurile $z_{01}^m, z_{02}^m, \dots, z_{0\alpha_{m+1}}^m$

constituie o bază [40] a grupului $\mathfrak{X}_0^m(\Delta)$ pentru subcomplexul $\mathfrak{X}^m \subset \mathfrak{X}^n$. Prin urmare, în condițiile teoremei formulate și în virtutea constatărilor de mai sus, imediat se verifică egalitatea (a se vedea teorema 5.1.1):

$$\delta_1 z_{01}^m + \delta_2 z_{02}^m + \dots + \delta_i z_{0i}^m + \dots + \delta_{\alpha_{m+1}} z_{0\alpha_{m+1}}^m = 0,$$

unde

$$z_{0i}^m = \Delta Q_i^{m+1}, \delta_i = \pm 1, 1 \leq i \leq \alpha_{m+1},$$

și deci

$$z_{01}^m = -\delta_1 \delta_2 z_{02}^m - \dots - \delta_1 \delta_{\alpha_{m+1}} z_{0\alpha_{m+1}}^m. \quad (5.4)$$

Considerând că grupul $\mathfrak{X}_0^m(\Delta)$ aparține subcomplexului $\mathfrak{X}^m$, acesta necesită a fi notat prin $\mathfrak{X}^m(\Delta)$, deoarece vacuumurile respective $\overset{\circ}{Q}_1^{m+1}, \overset{\circ}{Q}_2^{m+1}, \dots, \overset{\circ}{Q}_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$ (definiția 5.1.2), ce corespund frontierelor determinate de Δ -ciclurile menționate, nu aparțin lui $\mathfrak{X}^m$.

Menționăm că orice Δ -ciclu general z^m al grupului $\mathfrak{X}^m(\Delta)$ pentru complexul $\mathfrak{X}^m$ poate fi reprezentat sub forma:

$$z^m = g_1 z_1^m + g_2 z_2^m + \dots + g_i z_i^m + \dots + g_{\alpha_{m+1}} z_{\alpha_{m+1}}^m, \quad (5.5)$$

unde $z_i^m = \Delta Q_i^{m+1}$, iar $g_i \in Z, i \in \{1, 2, \dots, \alpha_{m+1}\}$.

Să considerăm familia $\mathcal{VD}^m$ a tuturor subvarietăților $\mathcal{VD}^m \subset \mathcal{VD}^{m+1}$, ce divizează $\mathfrak{X}^{m+1}$ în două componente conexe. Rezultă că familia $\{\mathcal{VD}^m\}$ divizează $\mathfrak{X}^{m+1}$ în componentele conexe $Q_1^{m+1}, Q_2^{m+1}, \dots, Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$, considerate ca subcomplexe ale lui $\mathfrak{X}^{m+1}$, adică:

$$\bigcup_{i=1}^{\alpha_{m+1}} Q_i^{m+1} = \mathfrak{X}^{m+1}.$$

Precum s-a observat anterior, dacă subvarietatea arbitrară $\mathcal{VD}^{n-1}$ divizează $\mathcal{VD}^n$ în două componente conexe, atunci rezultă că și subvarietatea sferică arbitrară $\mathcal{VD}^m$ divizează subcomplexul $\mathfrak{X}^{m+1} \subset \mathcal{VD}^n$ în două componente conexe. Deci, Δ -ciclurile $z_{01}^m = \Delta Q_1^{m+1}$, $z_{02}^m = \Delta Q_2^{m+1}, \dots, z_{0\alpha_{m+1}}^m = \Delta Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$ determină Δ -ciclul general Δz_0^m al grupului $\mathfrak{X}_0^m(\Delta)$, pentru complexul $\mathfrak{X}^m$ (a se vedea relația (5.2)). Aceste Δ -cicluri completate, respectiv, cu vacuumurile $\overset{\circ}{Q}_1^{m+1}, \overset{\circ}{Q}_2^{m+1}, \dots, \overset{\circ}{Q}_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$, determină simplexele $Q_1^{m+1}, Q_2^{m+1}, \dots, Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$. Prin urmare, Δ -ciclurile $z_1^m = \Delta Q_1^{m+1}, z_2^m = \Delta Q_2^{m+1}, \dots, z_{\alpha_m}^m = \Delta Q_{\alpha_{m+1}}^{m+1}$ sunt omoloage cu 0. Conform relației (5.3), expresia (5.5) este argumentată.

Să arătăm că Δ -ciclul din (5.5) este omolog cu 0. Pentru aceasta e suficient a apela la demonstrația relației $\Delta\Delta L^m = 0$, pentru orice $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, de unde avem că $\Delta\Delta Q^m = 0, \forall m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. În continuare se verifică egalitatea:

$$\Delta z_g^{m-1} = g_1 \Delta z_1^{m-1} + \dots g_{\alpha_m} \Delta z_{\alpha_m}^{m-1} = g_1 \Delta\Delta Q_1^m + \dots + g_{\alpha_m} \Delta\Delta Q_{\alpha_m}^m = 0.$$

Deci, pentru complexul $\mathcal{X}^n$ obținem că $\mathcal{X}^m(\Delta) \cong 0$, ceea ce implică relația $\Delta^m(\mathcal{X}^n, Z) \cong 0, 1 \leq m \leq n-1$.

Cunoscând proprietățile frontierei-complex $\mathcal{X}^{n-1}$ a unui quasisimplex abstract n -dimensional Q^n , deducem că pentru complexul $\mathcal{X}^n = \mathcal{W}\mathcal{D}^n$ se verifică relațiile:

$$\Delta^0(\mathcal{X}^n, Z) \cong Z, \Delta^1(\mathcal{X}^n, Z) \cong \dots \cong \Delta^{n-1}(\mathcal{X}^n, Z) \cong 0, \Delta^n(\mathcal{X}^n, Z) \cong Z,$$

pe când rangul grupului Z este egal cu 1. Deci, în conformitate cu formularea teoremei, obținem:

$$\chi(\mathcal{W}\mathcal{D}^n) = \chi(\mathcal{X}^n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i r_i = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2m-1, \\ 2, & \text{dacă } n = 2m, \quad 1 \leq m \leq n-1, \end{cases}$$

unde r_i reprezintă rangurile grupurilor de omologii directe $\Delta^i(\mathcal{X}^n, Z), 0 \leq i \leq n$.

În cele ce urmează vom face o clasificare a varietăților abstracte degenerate, orientabile și fără borduri. O astfel de clasificare este cunoscută pentru varietățile determinate de complexe obișnuite de relații multi-are [212]. Apariția în cazul nostru a quasisimplexelor abstracte n -dimensionale își are „farmecul” său datorită buclelor p -dimensionale, $0 \leq p \leq n-1$. Ca rezultat vom obține o clasificare care le conține pe cele din [212].

Fie Q^m un quasisimplex m -dimensional, determinat de șirul ordonat $(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Vom spune că două subșiruri ereditare $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ și $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p}$, de lungime p , sunt distincte dacă ele diferă cel puțin printr-un element.

Definiția 5.1.4. Familia $\Omega^p = \{(x_{i_1}^\alpha, x_{i_2}^\alpha, \dots, x_{i_p}^\alpha) : \alpha = 1, 2, \dots, t\}$ din $t \geq 1$ subșiruri ereditare de lungimea p , distincte două câte două, a unui quasisimplex abstract m -dimensional $Q^m = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, ce posedă proprietățile:

- a) toate elementele $x_{i_1}^\alpha, x_{i_2}^\alpha, \dots, x_{i_p}^\alpha$ ale unui subșir ereditar $\alpha = 1, 2, \dots, t$ sunt distincte între ele;
- b) toate cele α subșiruri ereditare, $1 \leq \alpha \leq t$, sunt formate din aceleași p elemente ale mulțimii inițiale X ;
- c) Ω^p este o familie maximală de subșiruri ereditare de lungimea p , adică pentru quasisimplexul $Q^m = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ nu există o altă familie de subșiruri ereditare Ω_*^p de lungimea p , ce posedă proprietățile a) și b), astfel încât $\Omega^p \subset \Omega_*^p$;

d) pentru quasisimplexul Q^m nu există o altă familie formată, de asemenea, din $t \geq 1$ subșiruri ereditare de lungimea $q > p$, $\Omega^q = \{(x_{s_1}^\beta, x_{s_2}^\beta, \dots, x_{s_q}^\beta) : \beta = 1, 2, \dots, t\}$, cu proprietățile a) și b) menționate mai sus, astfel încât elementele lui X , ce generează subșirul $(x_{i_1}^\alpha, x_{i_2}^\alpha, \dots, x_{i_p}^\alpha) \in \Omega^p$, formează o submulțime a mulțimii de elemente din care e format subșirul $(x_{s_1}^\beta, x_{s_2}^\beta, \dots, x_{s_q}^\beta) \in \Omega^q$,

se numește **bucă p -dimensională de gradul t** a quasisimplexului Q^m .

Menționăm că cazul $t=1$ generează condiția $p=m$, ceea ce înseamnă că quasisimplexul Q^m reprezintă un simplex obișnuit S^m , studiat în [58].

Să construim acum un șir infinit de varietăți n -dimensionale neizomorfe. Din cele expuse mai sus rezultă că un complex generalizat de relații multi-are poate avea bucle cu dimensiunea $p = 1, 2, \dots, n-1$. Precizăm că, caracteristica Euler a unei varietăți sferice degenerate (a se vedea definiția 4.4.4) nu depinde de numărul de bucle și dimensiunile acestora, ci doar de dimensiunea varietății.

În conformitate cu situația clasică, varietatea sferică ce corespunde unui complex obișnuit [58] de relații multi-are se numește **varietate cu genul 0** (a se vedea [32], [62], [212], [216], [217]). Existența buclelor p -dimensionale în complexe generalizate $\mathcal{X}^n$ conduc spre o varietate sferică degenerată cu dimensiunea n , ce conține **simplexe de tip „șă”** cu dimensiunea $0 \leq p \leq n-1$. Aceste simplexe corespund buclelor complexului $\mathcal{X}^n$.

Fie X_1 și X_2 , $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, mulțimi finite de elemente, în baza cărora, prin complexe generalizate de relații multi-are, se construiesc două varietăți sferice degenerate disjuncte cu genul 0: $\sum_1^n$ și $\sum_2^n$. Să considerăm că pe aceste sfere există un număr suficient de mare de quasisimplexe n -dimensionale, încât pe $\sum_1^n$ și, respectiv, $\sum_2^n$ să existe câte două quasisimplexe Q_{11}^n, Q_{12}^n și Q_{21}^n, Q_{22}^n , care respectă condițiile:

$$\begin{aligned} Q_{11}^n \cap Q_{12}^n &= \emptyset, \\ Q_{21}^n \cap Q_{22}^n &= \emptyset. \end{aligned}$$

Determinăm bordurile lui $\sum_1^n$ și Q_2^n prin eliminarea vacuumurilor simplexelor indicate:

$$\begin{aligned} bd^1(\sum_1^n) &= Q_{11}^n \setminus \overset{\circ}{Q}_{11}^n = [Q_{11}^n], \\ bd^2(\sum_1^n) &= Q_{12}^n \setminus \overset{\circ}{Q}_{12}^n = [Q_{12}^n], \end{aligned}$$

$$bd^1(\sum_2^n) = Q_{21}^n \setminus \overset{\circ}{Q}_{21}^n = [Q_{21}^n],$$

$$bd^2(\sum_2^n) = Q_{22}^n \setminus \overset{\circ}{Q}_{22}^n = [Q_{22}^n].$$

Deoarece bordurile $bd^1(\sum_1^n)$ și $bd^1(\sum_2^n)$ sunt izomorfe ca suprafețe de simplexe, există un izomorfism și între $bd^2(\sum_1^n)$ și $bd^2(\sum_2^n)$. „Lipim” frontierele $bd^1(\sum_1^n)$ cu $bd^1(\sum_2^n)$ și $bd^2(\sum_1^n)$ cu $bd^2(\sum_2^n)$. (Aici e vorba de „lipirea” izomorfică a frontierelor respective.)

Prin verificarea condițiilor definiției 4.4.2, ne convingem că în urma acestei operații de „lipire” se obține o varietate degenerată nouă, pe care o vom nota prin $\mathcal{VD}_1^n$.

Definiția 5.1.5. *Varietatea degenerată $\mathcal{VD}_1^n$ se numește varietate degenerată cu genul 1.*

Într-o ilustrare grafică, varietatea $\mathcal{VD}_1^n$ s-ar deosebi de varietatea sferică $\sum_1^n$ (sau $\sum_2^n$) prin faptul că are o singură „gaură”.

Să presupunem că avem două varietăți degenerate $\mathcal{VD}_1^n$ (varietate cu o gaură) și $\mathcal{VD}_0^n$ (varietate fără gaură – varietate sferică degenerată), care posedă proprietățile:

a) există perechile de quasisimplexe

$$Q_1^n(1), Q_2^n(1) \in \mathcal{VD}_1^n \quad \text{și} \quad Q_1^n(0), Q_2^n(0) \in \mathcal{VD}_0^n;$$

b) perechile de quasisimplexe alese satisfac condițiile:

$$Q_1^n(1) \cap Q_2^n(1) = \emptyset,$$

$$Q_1^n(0) \cap Q_2^n(0) = \emptyset.$$

Examinăm bordurile:

$$bd^1(\mathcal{VD}_1^n) = Q_1^n(1) \setminus \overset{\circ}{Q}_1^n(1) = [Q_1^n(1)],$$

$$bd^2(\mathcal{VD}_1^n) = Q_2^n(1) \setminus \overset{\circ}{Q}_2^n(1) = [Q_2^n(1)],$$

$$bd^1(\mathcal{VD}_0^n) = Q_1^n(0) \setminus \overset{\circ}{Q}_1^n(0) = [Q_1^n(0)],$$

$$bd^2(\mathcal{VD}_0^n) = Q_2^n(0) \setminus \overset{\circ}{Q}_2^n(0) = [Q_2^n(0)].$$

„Lipim” iarăși izomorfic frontierele $bd^1(\mathcal{VD}_1^n)$ cu $bd^1(\mathcal{VD}_0^n)$ și, respectiv, $bd^2(\mathcal{VD}_1^n)$ cu $bd^2(\mathcal{VD}_0^n)$. Ca rezultat obținem, din nou, o varietate abstractă n -dimensională (a se vedea definiția 4.4.2).

Definiția 5.1.6. *Varietatea abstractă degenerată $\mathcal{VD}_2^n$ se va numi varietate cu genul 2.*

(Genul 2 al varietății înseamnă ca avem o varietate cu două „găuri”).

Acum putem generaliza operația de lipire descrisă mai sus: fie am obținut două varietăți degenerate $\mathcal{V}\mathcal{D}_{p-1}^n$ și $\mathcal{V}\mathcal{D}_0^n$, adică una are $p-1$ „găuri”, iar alta este varietate sferică degenerată. Considerăm $Q_1^n(p-1)$ și $Q_2^n(p-1)$ două quasisimplexe n -dimensionale din $\mathcal{V}\mathcal{D}_{p-1}^n$, iar $Q_1^n(0)$ și $Q_2^n(0)$ – două simplexe n -dimensionale din $\mathcal{V}\mathcal{D}_0^n$. Construim bordurile:

$$\begin{aligned} bd^1(\mathcal{V}\mathcal{D}_{p-1}^n) &= Q_1^n(p-1) \setminus \overset{\circ}{Q}_1^n(p-1) = [Q_1^n(p-1)], \\ bd^2(\mathcal{V}\mathcal{D}_{p-1}^n) &= Q_2^n(p-1) \setminus \overset{\circ}{Q}_2^n(p-1) = [Q_2^n(p-1)], \\ bd^1(\mathcal{V}\mathcal{D}_0^n) &= Q_1^n(0) \setminus \overset{\circ}{Q}_1^n(0) = [Q_1^n(0)], \\ bd^2(\mathcal{V}\mathcal{D}_0^n) &= Q_2^n(0) \setminus \overset{\circ}{Q}_2^n(0) = [Q_2^n(0)]. \end{aligned}$$

„Lipim” iarăși izomorfic bordurile $bd^1(\mathcal{V}\mathcal{D}_{p-1}^n)$ cu $bd^1(\mathcal{V}\mathcal{D}_0^n)$ și, respectiv, $bd^2(\mathcal{V}\mathcal{D}_{p-1}^n)$ cu $bd^2(\mathcal{V}\mathcal{D}_0^n)$. Obținem o varietate nouă $\mathcal{V}\mathcal{D}_p^n$.

Definiția 5.1.7. *Varietatea $\mathcal{V}\mathcal{D}_p^n$ se numește varietate abstractă degenerată de genul p (adică cu p găuri).*

Conform celor descrise mai sus, rezultă că printr-o procedură iterativă se poate obține un șir infinit de varietăți degenerate cu genul $p = 0, 1, \dots$:

$$\mathcal{V}\mathcal{D}_0^n, \mathcal{V}\mathcal{D}_1^n, \mathcal{V}\mathcal{D}_2^n, \dots, \mathcal{V}\mathcal{D}_p^n, \dots \quad (5.6)$$

În literatura de specialitate, noțiunea de gen are un sens mult mai variat și complicat (a se vedea [64]). Din aceste considerente, vom folosi mai mult, în continuare, noțiunea de varietate degenerată cu găuri.

Prin analogie cu cele cunoscute pentru proprietățile abstracte ce corespund complexelor de relații multi-are simple [58], [212], vom demonstra, în cele ce urmează, un șir de rezultate ce țin de specificul varietăților degenerate multidimensionale.

Teorema 5.1.3. *Pentru o varietate degenerată multidimensională $\mathcal{V}\mathcal{D}_p^n$, $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$, se verifică egalitatea:*

$$\chi(\mathcal{V}\mathcal{D}_p^n) = \begin{cases} 2 - 2p, & \text{dacă } n = 2m, \\ 0, & \text{dacă } n = 2m - 1, \end{cases} \quad (5.7)$$

unde $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Demonstrație. Demonstrația teoremei o vom face prin aplicarea inducției matematice în raport cu numărul de „găuri” p al varietății $\mathcal{V}\mathcal{D}_p^n$, $p \in \mathbb{N}$.

În cazul $p = 0$ avem varietatea sferică $\mathcal{V}\mathcal{D}_0^n$. Ținând cont de definiția 4.4.4, obținem:

$$\chi(\mathcal{D}_0^n) = \chi(\sum^n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2m - 1, \\ 2, & \text{dacă } n = 2m, \end{cases}$$

unde $m \in \mathbb{N}$.

Admitem că afirmația teoremei este adevărată pentru cazul $p = t$, $t \geq 0$. Examinăm cazul $p = t + 1$. Să demonstrăm că are loc egalitatea:

$$\chi(\mathcal{D}_{t+1}^n) = \chi(\sum^n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2m - 1, \\ 2 - 2(t + 1), & \text{dacă } n = 2m. \end{cases}$$

În lucrarea [130] se demonstrează că pentru oricare două subcomplexe generalizate $\mathcal{K}^p$ și $\mathcal{K}^q$ ale unui complex generalizat de relații multi-are $\mathcal{K}^n$, $0 \leq p, q \leq n$, are loc egalitatea:

$$\chi(\mathcal{K}^p \cup \mathcal{K}^q) = \chi(\mathcal{K}^p) + \chi(\mathcal{K}^q) - \chi(\mathcal{K}^p \cap \mathcal{K}^q).$$

(Dacă subcomplexele respective sunt disjuncte, atunci ultimul termen al relației menționate este egal cu zero)

În baza acestei relații, a metodei de construire a șirului (5.6) și a pasului precedent al inducției matematice, obținem:

$$\text{a) } \chi(\mathcal{D}_t^n) = 0 + (-1)^{2m-2} \cdot 2 - 2 + 0 + (-1)^{2m-2} \cdot 2 - 2 = 0,$$

pentru $n = 2m - 1$;

$$\text{b) } \chi(\mathcal{D}_t^n) = 2 - 2(t - 1) + (-1)^{2m-2} \cdot 2 - 0 + 2 + (-1)^{2m-1} \cdot 2 - 0 = 2 - 2t,$$

pentru $n = 2m$.

Notă. În cazul $n=1$ există o singură varietate degenerată, care este sferică și nu conține găuri, adică $\mathcal{D}_0^1 = \sum^1$. Pentru $\mathcal{D}_0^1$ are loc egalitatea $\chi(\mathcal{D}_0^1) = 0$.

Fie X o mulțime arbitrară de elemente, selectate dintr-o altă mulțime M , $\text{card} M \leq \infty$, în baza căreia se construiește un complex generalizat de relații multi-are $\mathcal{K}^n$.

Considerăm că acest complex satisface condițiile a)-d) ale definiției 4.4.2 și, prin urmare, determină o varietate abstractă degenerată $\mathcal{D}^n$. Totdeauna putem admite că mulțimea de elemente X este suficient de mare, astfel încât se va găsi un element $x^* \in X$, neutilizat la construcția varietății $\mathcal{D}^n$. Formăm simplexul 0-dimensional $S^0 = (x_0)$. (În baza definiției complexului generalizat din [130], putem considera S^0 și ca un quasisimplex Q^0). Acum toate quasisimplexele din $\mathcal{D}^n$ le vom înlocui prin quasisimplexele de forma $(x_0) \cdot Q^p = (x_0, x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) = Q^{p+1}$, unde $Q^p \in \mathcal{D}^n$, $p \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Definiția 5.1.8. Quasisimplexul obținut Q^{p+1} se numește piramidă degenerată cu vârful x_0 și baza Q^p , și se notează prin PD^n .

Construcția piramidei degenerate se face prin analogie cu cele din [218].

În continuare vom face o clasificare a mulțimii tuturor varietăților degenerate abstracte, orientabile și fără borduri. A clasifica mulțimea tuturor varietăților n -dimensionale înseamnă a diviza această mulțime în clase (grupe), conform unei proprietăți, astfel încât proprietatea fiecărei varietăți din clasa dată să fie aceeași și totodată să difere de proprietatea altei clase.

Șirul de varietăți degenerate construite (5.6) permite să facem o clasificare conform numărului de „găuri” al acestora. Menționăm că, șirul (5.6) reprezintă un șir de varietăți degenerate abstracte, orientabile, n -dimensionale și fără borduri.

În mod similar cu cele demonstrate în [212], [218], pentru varietatea degenerată obținem următorul rezultat.

Teorema 5.1.4. *Dacă $\mathcal{VD}^n$ este o varietate degenerată abstractă, orientabilă, fără borduri și conexă forte, determinată în baza unui complex generalizat de relații multi-are $\mathcal{K}^n$, atunci în șirul (5.6) există o varietate care conține același număr de găuri ca și $\mathcal{VD}^n$.*

Demonstrație. Vom nota prin $\sum_1^{(n-1)}$ o subvarietate abstractă și sferică din $\mathcal{VD}^n$. Să admitem că orice astfel de subvarietate divizează $\mathcal{VD}^n$ în două componente conexe. Conform teoremei 5.1.2, putem considera că $\mathcal{VD}^n$ este o sferă abstractă, adică $\mathcal{VD}^n = \sum^n$. Aceasta înseamnă că varietatea căutată în șirul (5.6) este $\mathcal{VD}_0^n$. Prin urmare, $\mathcal{VD}^n$ este de genul 0.

Să admitem că $\mathcal{VD}^n$ nu este varietate sferică degenerată. Atunci în $\mathcal{VD}^n$ există o subvarietate $\sum_{(1)}^{n-1}$. Conform presupunerii, ca rezultat se obține o varietate conexă cu două borduri $\sum_{(1)1}^{n-1}$ și $\sum_{(1)2}^{n-1}$ izomorfe cu $\sum_{(1)}^{n-1}$. Aceste două borduri se obțin dintr-o mulțime de simplexe și vacuumuri care se datorează „tăieturii” făcute pe $\sum_{(1)}^{n-1}$. Bordurile satisfac condiția:

$$\sum_{(1)1}^{n-1} \cap \sum_{(1)2}^{n-1} = \emptyset.$$

Pe bordurile obținute se construiește câte o piramidă degenerată conform definiției 5.1.6. Notăm aceste piramide prin $PD_{(1)1}^n$ și $PD_{(1)2}^n$, iar varietatea obținută – prin $\mathcal{VD}_{(1)}^n$.

Ușor se verifică că varietatea obținută posedă proprietățile:

- I. Fiecare quasisimplex $(n-1)$ -dimensional de pe frontierele $\sum_{(1)1}^{n-1}$ și $\sum_{(1)2}^{n-1}$ este fațetă comună exact pentru două quasisimplexe n -dimensionale.
- II. Oricare două quasisimplexe n -dimensionale disjuncte (cu intersecție vidă) pot fi unite printr-o succesiune de quasisimplexe n -dimensionale, astfel încât fiecare două

quasisimplexe vecine din şirul respectiv au o faţetă $(n-1)$ -dimensională comună. Aceasta rezultă din definiţia varietăţii degenerate $\mathcal{VD}^n$ şi a piramidelor $PD_{(1)1}^n$ şi $PD_{(1)2}^n$.

- III. Fiecare quasisimplex m -dimensional, $0 \leq m < n$, de pe bordurile pe care s-au construit piramidele, aparţine unui quasisimplex n -dimensional din $\mathcal{VD}^n$, sau uneia din cele două piramide construite.
- IV. Simplexele de pe bordurile pe care s-au construit piramidele degenerate determină două varietăţi abstracte degenerate fără găuri.

Deoarece varietatea degenerată $\mathcal{VD}^n$ este conexă forte, rezultă că piramidele $PD_{(1)1}^n$ şi $PD_{(1)2}^n$ pot fi construite astfel încât $\mathcal{VD}_{(1)}^n$, de asemenea, să fie conexă forte. Pentru aceasta e suficient de făcut ca orice quasisimplex n -dimensional Q_j^n al piramidei $PD_{(1)1}^n$ sau $(PD_{(1)2}^n)$ să fie concordant cu quasisimplexul vecin Q_i^n din $\mathcal{VD}^n \cup \sum_{(1)1}^n \cup \sum_{(1)2}^{(n)}$.

Demonstrăm teorema aplicând inducţia matematică în raport cu numărul de „găuri” $q \in N$.

Cazul $q=1$. Vom arăta că $\chi(\mathcal{VD}_{(1)}^n) = \chi(\mathcal{VD}_{(0)}^n) + 2$, unde $\mathcal{VD}_{(0)}^n = \mathcal{VD}^n$.

$\sum_{(1)1}^{n-1}$ şi $PD_{(1)2}^n$ reprezintă bazele piramidelor degenerate $PD_{(1)1}^n$ şi $PD_{(1)2}^n$. Folosind cele menţionate anterior, vom avea:

$$\chi(PD_{(1)1}^n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \alpha_i + (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \alpha_0 + \dots + (-1)^n \alpha_{n-1} = 1.$$

De asemenea, şi $\chi(PD_{(1)2}^n) = 1$.

Din relaţia $\mathcal{VD}_{(1)}^n = (\mathcal{VD}^n \setminus \sum_{(1)}^{n-1}) \cup PD_{(1)1}^n \cup PD_{(1)2}^n$ rezultă:

$$\chi(\mathcal{VD}_{(1)}^n) = \chi(\mathcal{VD}^n) - \chi(\sum_{(1)}^{n-1}) + \chi(PD_{(1)1}^n) + \chi(PD_{(1)2}^n). \quad (5.8)$$

Ținând cont de faptul că $\chi(PD_{(1)1}^n) = \chi(PD_{(1)2}^n) = 1$, precum şi de relaţia (5.7), din (5.8) obţinem:

$$\text{a) } \chi(\mathcal{VD}_{(1)}^n) = \chi(\mathcal{VD}_{(0)}^n) - 0 + 1 + 1 = \chi(\mathcal{VD}_{(0)}^n) + 2, \text{ pentru } n = 2m, m \in N;$$

$$\text{b) } \chi(\mathcal{VD}_{(1)}^n) = \chi(\mathcal{VD}_{(0)}^n) - 2 + 1 + 1 = \chi(\mathcal{VD}_{(0)}^n), \text{ pentru } n = 2m-1, m \in N.$$

Din raţionamentele de mai sus, conchidem că, pentru cazul $q=1$, afirmaţia teoremei este adevărată.

Cazul $q=p-1$. Presupunem că s-au făcut $p-1$ „tăieturi” sferice pentru varietatea $\mathcal{VD}^n = \mathcal{VD}_{(0)}^n$.

Dacă $n = 2m$, atunci are loc formula recurentă $\chi(\mathcal{VD}_{(p-1)}^n) = \chi(\mathcal{VD}_{(0)}^n) + 2(p-1)$. În cazul $n = 2m-1$ se verifică egalitatea: $\chi(\mathcal{VD}_{(p-1)}^n) = \chi(\mathcal{VD}_{(0)}^n) = 0$. (Ținem cont de faptul că varietatea $\mathcal{VD}_{(p-1)}^n$ nu este sferică.)

Cazul $q=p$. Conform pasului inductiv $q = p-1$ și teoremei 5.1.2, varietatea degenerată $(\mathcal{VD}_{(p-1)}^n)$ dispune de o varietate sferică $\sum_{(p)}^{n-1}$. Completând cu două piramide $(PD_{(p)1}^n)$ și $(PD_{(p)2}^n)$, obținem:

$$\mathcal{VD}_{(p)}^n = \mathcal{VD}_{(p-1)}^n \setminus \sum_{(p)}^{n-1} \cup PD_{(p)1}^n \cup PD_{(p)2}^n.$$

Ca și în cazul $q=1$, obținem:

$$\chi(\mathcal{VD}_{(p)}^n) = \chi(\mathcal{VD}_{(p-1)}^n) \setminus \chi(\sum_{(p)}^{n-1}) + \chi(PD_{(p)1}^n) + \chi(PD_{(p)2}^n),$$

de unde:

$$\chi(\mathcal{VD}_{(p)}^n) = \begin{cases} \chi(\mathcal{VD}_{(p-1)}^n) - 0 + 1 + 1 = \chi(\mathcal{VD}_{(p-1)}^n) + 2, & \text{pentru } n = 2m, \\ \chi(\mathcal{VD}_{(p-1)}^n), & \text{pentru } n = 2m-1. \end{cases}$$

În caz că $(\mathcal{VD}_{(p)}^n)$ este varietate sferică, atunci ținând cont de relația pentru $\chi(\mathcal{VD}_{(p-1)}^n)$ (cazul inductiv $q = p-1$), obținem:

$$\chi(\mathcal{VD}_{(p)}^n) = \begin{cases} \chi(\mathcal{VD}_{(0)}^n) = 2 - 2p, & \text{pentru } n = 2m, \\ 0, & \text{pentru } n = 2m-1. \end{cases}$$

Din cele demonstrate, precum și rezultatele din lucrările [130], [153], [156], [212], [218], rezultă că complexul de relații multi-are reprezintă o structură discretă nouă ce poate fi utilizată cu succes la efectuarea unor cercetări cu caracter teoretico-aplicativ. Prin intermediul acestui complex au fost realizate cercetări ce țin de studierea diferitelor tipuri de varietăți abstracte.

5.2. Mediana complexului de cuburi abstracte

Problema calculării medianei, precum și multiplele variații ale acesteia, se întâlnesc la soluționarea problemelor cu caracter aplicativ, cunoscute în literatura de specialitate ca probleme de amplasare. Deseori apare necesitatea amplasării unui centru de deservire pentru o rețea de utilizatori, reprezentată, de regulă, printr-un graf neorientat, astfel încât suma distanțelor minime de la acest centru până la celelalte noduri ale rețelei să fie minimă. Locul optimal de amplasare, în sensul indicat mai sus, se numește mediană. Ținând cont de esența funcției scop, astfel de probleme se mai numesc probleme de amplasare *de tip minisumă* și se întâlnesc frecvent la

soluționarea problemelor practice legate de alegerea locului „potrivit” pentru o stație de telefoane, a unui depozit pentru o rețea de magazine, legate printr-o infrastructură de drumuri, a unui oficiu poștal dintr-o localitate, etc.

La general, problema medianei este o problemă NP-completă [86], cu toate consecințele ce urmează din această constatare. Totuși, în unele cazuri speciale, frecvent întâlnite în practică, se reușește elaborarea unor metode eficiente de calculare a medianei. O oportunitate în acest sens ne oferă complexul de cuburi abstracte.

Definiția noțiunii de mediană este bine cunoscută din literatura de specialitate, fiind întâlnită deseori în diferite interpretări, determinate de specificul problemelor studiate [60], [116], [125], [151], [169], [173], [180], [192].

Fie (X, d) un spațiu metric finit cu mulțimea de elemente $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și $f(x) = \sum_{i=1}^n d(x, x_i) p(x_i)$ o funcție definită pe X , unde $p(x_i)$ este un număr real pozitiv, numit **ponderea** elementului $x_i \in X$.

Definiția 5.2.1. *Punctul $x^* \in X$, care satisface egalitatea*

$$f(x^*) = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^n d(x, x_i) p(x_i), \quad (5.9)$$

*se numește **mediana lui X** .*

Sunt cunoscute aplicările medianei în practica cotidiană, mai ales în amplasarea obiectelor de deservire. Însă procedura de calculare a acesteia în conformitate cu formula (5.9) devine, în anumite condiții, o chestiune anevoioasă. În lucrările [213], [60], [214], pentru niște complexe speciale sunt expuși algoritmi eficienți de aflare a medianei, fără a utiliza metrica. Prezenta lucrare generalizează în mare măsură rezultatele expuse în lucrările [60] și [214], însă dacă în [213] mediana se calculează eficient pentru un arbore simplu ponderat, atunci lucrarea în cauză aplică un *arbore abstract* omogen n -dimensional, $n \geq 1$. Pentru scheletul (a se vedea mai jos) 1-dimensional al acestui arbore se propune un algoritm eficient de aflare a medianei fără a utiliza vreo metrică.

Algoritmul de calculare a medianei pentru un arbore finit cu ponderi pozitive ale elementelor, descris în lucrarea [213], este nu doar un algoritm elegant, dar și-a găsit și aplicații practice. Aceeași situație o avem și în cazul unui complex de patrulare [60] cu muchiile ponderate în mod special pentru spațiul euclidian E^2 .

Problema în cauză a fost formulată pentru prima dată, și parțial soluționată, la finele anilor '60 în cadrul Institutului de Matematică cu Centrul de Calcul al Academiei de Științe a Moldovei.

Atunci nu s-a reușit a obține soluții eficiente pentru dimensiuni mai mari decât doi. Cercetările ultimilor ani au condus la obținerea unor rezultate teoretice pentru dimensiuni mari, aplicând construcții noi, precum e complexul de cuburi abstracte. Studiarea acestor complexe se face prin utilizarea grupurilor de omologii directe [52], [32], [305] ale acestora.

Fie $\mathfrak{I}_A^n$ un complex cubic abstract omogen (a se vedea definiția 4.5.3), însă considerat de acum nonorientat. Conform teoremei 4.5.1, frontiera $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$ este o sferă $(n-1)$ -dimensională cubiliată $\mathfrak{O}^{n-1}$. Fie $\mathbf{st}(I^0)\mathfrak{O}^{n-1}$ – steaua vârfului I^0 calculată pe sfera $\mathfrak{O}^{n-1}$.

Vom examina, în cele ce urmează, problema calculării medianei unui complex special de cuburi abstracte, considerând că vârfurile complexului $\mathfrak{I}_A^n$ se i-au dintr-un spațiu metric discret, reprezentat printr-o mulțime oarecare M . În aceste condiții, dacă $\mathfrak{O}^0 \subset M$, atunci mediana lui $\mathfrak{I}_A^n$ este determinată de punctul $x^* \in M$, ce satisface relația:

$$f(x^*) = \min_{x \in M} f(x), \quad (5.9')$$

unde $f(x)$ este funcția definită pe mulțimea M și cu valori în R^+ :

$$f : M \rightarrow R^+ \text{ încât } f(x) = \sum_{x_i \in \mathfrak{O}^0} d(x, x_i) p(x_i).$$

Definiția 5.2.2. Un complex abstract n -dimensional, omogen și neorientat $\mathfrak{I}_A^n$, care satisface condițiile:

- 1) orice cub $I^k \in \mathbf{int}\mathfrak{I}_A^n$ aparține cel puțin la 2^{n-k} cuburi n -dimensionale din $\mathfrak{I}_A^n$, $0 \leq k \leq n$;
- 2) dacă I^0 este un vârf din $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$, căruia îi sunt incidente exact n arce ale lui $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$, iar steaua $\mathbf{st}(I^0)\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$ conține exact n cuburi $(n-1)$ -dimensionale ale lui $\mathbf{bd}\mathfrak{I}_A^n$, atunci cubul n -dimensional I^n , determinat de această stea, aparține complexului $\mathfrak{I}_A^n$,

se numește **arbore omogen n -dimensional**. Notăm acest arbore prin A^n .

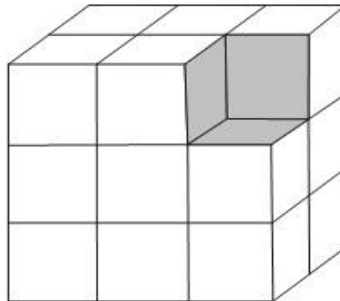


Fig. 5.1. Complex omogen 3-dimensional ce nu corespunde definiției 5.2.2

Nota 5.2.1. Existența complexelor de cuburi abstracte, ce satisfac condiția 1 a definiției 5.2.2, este asigurată de lema 4.5.1.

Prin definiția 5.2.2 este exclusă situația din figura 5.1, importantă pentru calcularea medianei complexului. În astfel de situații, totdeauna se poate indica un sistem de ponderi ale vârfurilor, încât mediana x^* să nu aparțină complexului $\mathfrak{S}_A^n$. De exemplu, condiția 2 din definiția arborelui omogen este necesară la calcularea medianei pentru $\mathbf{sk}(1)\mathfrak{S}_A^n$, care poate să nu se afle pe $\mathbf{sk}(0)\mathfrak{S}_A^n$, adică $x^* \in M \setminus \mathfrak{S}^0$.

Pentru a ilustra cele menționate, vom examina complexul cubic $\mathfrak{S}_A^2$, reprezentarea geometrică a căruia este dată în figura 5.1. Considerând muchiile cu lungimile egale cu 1, iar ponderile vârfurilor:

$$p(x) = p(y) = p(z) = 100,$$

$$p(w) = 1, \text{ pentru celelealte vârfuri din } \mathfrak{S}_A^2,$$

conform formulei (5.9'), în calitate de mediană vom obține vârful v , care nu aparține mulțimii $\mathfrak{S}^0 = \mathbf{sk}(0)\mathfrak{S}_A^n$.

Considerăm în continuare funcția

$$p: \mathfrak{S}^0 \rightarrow R^+ \quad (5.10)$$

și lungimile muchiilor din clasele de muchii paralele $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$ egale, respectiv, cu numerele

$$d_1, d_2, \dots, d_m, \quad (5.11)$$

unde $d_i > 0$, pentru $1 \leq i \leq m$. Astfel, se presupune că toate muchiile ce aparțin unei clase au aceeași lungime. Mai târziu vom arăta că lungimile respective ale muchiilor pot fi omise. Numărul $p(I^0)$ se numește pondere a cubului 0-dimensional $I^0 \in \mathfrak{S}^0$.

Descrierea metodei de calculare a medianei arborelui A^n o vom începe cu construirea unui spațiu normat m -dimensional și interpretarea ulterioară a complexului A^n în acest spațiu (aici m reprezintă numărul de clase de muchii paralele din A^n).

Fie $\mathfrak{S}^0 = \{I_\lambda^0 : 1 \leq \lambda \leq \beta_0\}$ și $\mathfrak{S}^1 = \{I_\mu^1 : 1 \leq \mu \leq \beta_1\}$ mulțimile de vârfuri și, respectiv, de muchii ale arborelui A^n . Fixăm un lanț arbitrar $L^1 = (I_{\mu_1}^1, I_{\mu_2}^1, \dots, I_{\mu_k}^1)$, $1 \leq \mu_i \leq \beta_1$, $1 \leq i \leq k$, cu originea $I_{\lambda_i}^0 \in \mathfrak{S}^0$ și extremitatea în $I_{\lambda_j}^0 \in \mathfrak{S}^0$. Formăm numărul întreg nenegativ (a se vedea condițiile (5.10) și (5.11))

$$d(I_{\lambda_i}^0, I_{\lambda_j}^0) = t_1 d_1 + t_2 d_2 + \dots + t_m d_m, \quad (5.12)$$

unde $t_i = 0$ (sau $t_i = 1$) dacă L^1 trece de un număr par (sau impar) de ori prin muchiile complexului $\mathfrak{S}_A^n$, ce aparțin clasei $\mathcal{E}_i$, $1 \leq i \leq m$ [155], [296].

Teorema 5.2.1. *Relația (5.12) reprezintă metrica Hamming [215].*

Demonstrație. Din relația (5.12) și condiția (5.11) avem:

1) $d(I_{\lambda_i}^0, I_{\lambda_j}^0) \geq 0$. Din egalitatea $d(I_{\lambda_i}^0, I_{\lambda_j}^0) = 0$ rezultă egalitatea:

$$t_1 = t_2 = \dots = t_m = 0,$$

ceea ce conduce la relația $I_{\lambda_i}^0 = I_{\lambda_j}^0$;

2) egalitatea $d(I_{\lambda_i}^0, I_{\lambda_j}^0) = d(I_{\lambda_j}^0, I_{\lambda_i}^0)$ este evidentă;

3) pentru oricare trei vârfuri distincte $I_{\lambda_i}^0, I_{\lambda_j}^0, I_{\lambda_k}^0 \in \mathfrak{S}^0$, ținând cont de definirea numărului $d(I_{\lambda_i}^0, I_{\lambda_j}^0)$, ușor se verifică

$$d(I_{\lambda_i}^0, I_{\lambda_j}^0) = d(I_{\lambda_i}^0, I_{\lambda_k}^0) + d(I_{\lambda_k}^0, I_{\lambda_j}^0).$$

Aceasta din urmă și demonstrează că (5.12) este metrica Hamming.

Fie arborele A^n dispune de clasele de muchii paralele $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$ cu lungimile fixate (5.11). Considerăm spațiul R_1^m peste câmpul numerelor reale cu norma $\|x\| = \sum_{i=1}^m |x_i|$. Din originea $O \in R_1^m$, depunem pe axele de coordonate $OY_1, OY_2, \dots, OY_p$ segmente cu lungimile $d_1, d_2, \dots, d_m$. Construim în mod univoc pe aceste segmente paralelipipedul P^m . Mulțimea tuturor fațetelor k -dimensionale, $0 \leq k \leq m$, a acestui paralelipiped formează un complex de paralelipipe k -dimensionale. Vom nota acest complex prin $\mathcal{S}^k = \{P^k \subset P^m, 0 \leq k \leq m\}$. În cazul $k = 1$ obținem complexul $\mathcal{S}^1$, care reprezintă reuniunea tuturor fațetelor 0- și 1-dimensionale din P^m . Acest complex este un subcomplex al lui $\mathcal{S}^m$. Complexul $\mathcal{S}^1$ reprezintă un graf conex, metric și nonorientat. Vom nota acest graf prin $H = (Y; V)$, unde Y și V reprezintă mulțimile de vârfuri și, respectiv, muchii din $\mathcal{S}^1$.

Precum a fost menționat în paragraful 4.5, scheletul 1-dimensional al complexului de cuburi abstracte $\mathfrak{S}^n$ reprezintă un graf orientat, notat prin $G = (X_G; U_G)$. În acest graf, vârfurile corespund cuburilor 0-dimensionale, iar arcele – cuburilor 1-dimensionale din complexul $\mathfrak{S}^n$.

Teorema 5.2.2. *Pentru arborele A^n există o aplicație univocă $\alpha: A^n \rightarrow \mathcal{S}^m$, care interpretează A^n pe un subcomplex din $\mathcal{S}^m$, astfel încât $\alpha: G \rightarrow \mathcal{S}^1$ reprezintă o izometrie.*

Veridicitatea teoremei rezultă imediat din modalitatea de construire a complexului $\mathcal{S}^m$ și din relația (5.12).

În spațiul R_1^m , mulțimea de vârfuri $\alpha(X_G)$ o notăm prin $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{\beta_0}\} \subset \alpha(A^n)$.

Considerăm funcția

$$f(y) = \sum_{i=1}^{\beta_0} p(y_i) \|y - y_i\|, \quad (5.13)$$

unde y_i este imaginea lui $x_i \in X_G$, cu ponderea $p(y_i) = p(x_i)$, $1 \leq i \leq \beta_0$.

Vom demonstra că punctul $y_* \in R_1^m$, care minimizează funcția (5.13), este **mediana** grafului $H = (Y; V)$.

Fără a face vreo confuzie, notăm prin y și vectorii din R_1^m . Astfel, pentru vectorul $y = (y^1, y^2, \dots, y^m) \in R_1^m$ formăm diferențele $y^i - y_1^i, y^i - y_2^i, \dots, y^i - y_n^i$, $1 \leq i \leq m$, și mulțimile de indici:

$$\begin{aligned} I_i^+ &= j : y^i - y_j^i > 0, \\ I_i^0 &= j : y^i - y_j^i = 0, \\ I_i^- &= j : y^i - y_j^i < 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Relațiile (5.14) se construiesc exact ca în [214].

Teorema 5.2.3. Vectorul $y_j \in R_1^m$ minimizează funcția (5.12) dacă și numai dacă sunt satisfăcute relațiile:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_i^+ \cup I_i^0} p(y_j) &\geq \sum_{j \in I_i^-} p(y_j), \\ \sum_{j \in I_i^+} p(y_j) &\leq \sum_{j \in I_i^0 \cup I_i^-} p(y_j). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Demonstrația teoremei se face în mod analog cu cea a teoremei 3.1 din lucrarea [60].

Teorema 5.2.3 permite să afirmăm un fapt important: *mediana grafului metric H nu depinde de lungimile $d_1, d_2, \dots, d_m$ ale muchiilor din V* . Prin urmare, paralelipipedul P^m poate fi înlocuit printr-un cub unitate al lui R_1^m , utilizând operația de dilatare sau constrângere a fiecărei muchii cu lungimea d_i , $1 \leq i \leq m$.

Cubul unitate m -dimensional obținut îl vom nota prin E^m . Ca rezultat al acestor raționamente, obținem aplicația:

$$\beta : P^m \rightarrow E^m. \quad (5.16)$$

Putem considera că coordonatele vârfurilor cubului unitate E^m în spațiul R_1^m sunt numerele 0 și 1. Astfel, fiecărui vârf al cubului îi corespunde un cortegiu binar cu lungimea m . Prin aplicația β , graful H trece într-un graf metric $\beta(H)$, pe care îl vom nota prin $\mathcal{G} = (Z; W) \subset E^m$. Ca rezultat obținem că, atât pe cubul unitate E^m , cât și pe graful obținut

$\mathcal{G} = (\mathcal{Z}; \mathcal{W}) \subset E^m$, este definită metrica Hamming. Mulțimea de vârfuri $\mathcal{Z}$ a grafului $\mathcal{G}$ este $\beta\alpha(\mathcal{T}^0)$, iar mulțimea de muchii $\mathcal{W}$ reprezintă mulțimea de muchii $\beta\alpha(\mathcal{T}^1)$. Clasele de muchii paralele $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$ se transformă în următoarele clase de muchii paralele din I^m :

$$\mathcal{E}_1^1 = \beta\alpha(\mathcal{E}_1), \mathcal{E}_2^1 = \beta\alpha(\mathcal{E}_2), \dots, \mathcal{E}_m^1 = \beta\alpha(\mathcal{E}_m),$$

reuniunea cărora nu acoperă neapărat toate muchiile din cubul unitate E^m . Ar fi o acoperire doar în cazul când $A^n = \mathbf{P}^m$.

Pentru mulțimea de vârfuri $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_{\beta_0}\}$ păstrăm aceleași ponderi:

$$p(z_1) = p(x_1), p(z_2) = p(x_2), \dots, p(z_{\beta_0}) = p(x_{\beta_0}), \quad (5.17)$$

unde $z_i = \beta\alpha(x_i)$, $1 \leq i \leq \beta_0$.

Astfel, am obținut aplicația izometrică:

$$\beta\alpha : G \rightarrow \mathcal{G}.$$

Fie vârful $z_i \in \mathcal{Z}$ al cubului E^m are coordonatele $z_i = (z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^m)$, unde $z_i^j = 1$ sau $z_i^j = 0$ (pe cub e definită metrica Hamming).

Deoarece mediana din R_1^m nu depinde de metrică, considerăm că lungimile $d_1, d_2, \dots, d_m$ ale muchiilor din toate clasele de muchii paralele sunt egale cu 1. Notăm arborele A^n prin $A^n(1)$. În aceste condiții, aplicația $\beta\alpha(A^n(1)) \rightarrow E^m$ este, la fel, o izometrie, unde $\beta\alpha(A^n(1))$ este un subcomplex al complexului, format din fațetele lui E^m . Relația de izometrie permite examinarea medianei arborelui $A^n(1)$ pe subcomplexul $\beta\alpha(A^n(1))$.

Formăm matricea N , liniile căreia corespund vârfurilor grafului $\mathcal{G}$, iar coloanele – claselor de muchii paralele $\mathcal{E}_1^1, \mathcal{E}_2^1, \dots, \mathcal{E}_m^1$:

$$N = \begin{array}{cccccc} \mathcal{E}_1^1 & \mathcal{E}_2^1 & \dots & \mathcal{E}_j^1 & \dots & \mathcal{E}_m^1 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccccc} z_1^1 & z_1^2 & \dots & z_1^j & \dots & z_1^m \\ z_2^1 & z_2^2 & \dots & z_2^j & \dots & z_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_i^1 & z_i^2 & \dots & z_i^j & \dots & z_i^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{\beta_0}^1 & z_{\beta_0}^2 & \dots & z_{\beta_0}^j & \dots & z_{\beta_0}^m \end{array} \right) & \begin{array}{l} \leftarrow z_1 \\ \leftarrow z_2 \\ \dots \\ \leftarrow z_i \\ \dots \\ \leftarrow z_{\beta_0} \end{array} \end{array}$$

Pentru fiecare coloană j din matricea N calculăm un număr r_j , considerând $r_j = 1$ sau $r_j = 0$, $1 \leq j \leq m$, conform regulilor:

a) dacă produsul scalar

$$(z_1^j, z_2^j, \dots, z_{\beta_0}^j)(p(z_1), p(z_2), \dots, p(z_{\beta_0})) = \sum_{i=1}^{\beta_0} z_i^j p(z_i)$$

este un număr mai mare decât $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\beta_0} p(z_i)$, atunci $r_j = 1$, iar dacă acest produs este mai mic decât

suma indicată, atunci $r_j = 0$;

b) dacă are loc egalitatea

$$\sum_{i=1}^{\beta_0} z_i^j p(z_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\beta_0} p(z_i), \quad (5.18)$$

atunci valoarea lui r_j se alege în mod arbitrar: 0 sau 1.

Ca rezultat, obținem cortegiul $r = (r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_m)$.

Teorema 5.2.4. Cortegiul $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ reprezintă o linie din N .

Pentru a demonstra această teoremă sunt necesare niște examinări preventive.

Fie T_i^{n-1} o transversală $(n-1)$ -dimensională a complexului $A^n(1)$. Această transversală separă $A^n(1)$ în două părți distincte, notate prin $A_{i(1)}^n(1)$, $A_{i(2)}^n(1)$, și numite, convențional, subcomplex de *stânga* și subcomplex de *dreapta*, în raport cu transversala T_i^{n-1} . Ambele complexe obținute sunt arbori omogeni, doar că nu neapărat și n -dimensionali (unul dintre aceștia ar putea fi $(n-1)$ -dimensional).

Notăm în continuare prin $\mathcal{G}^0$, $\mathcal{G}_i^0$, $\mathcal{G}_{i(1)}^0$ și $\mathcal{G}_{i(2)}^0$, respectiv, mulțimile de vârfuri ale complexului $A^n(1)$, ale transversalei T_i^{n-1} și ale arborilor $A_{i(1)}^n(1)$, $A_{i(2)}^n(1)$. Sunt evidente relațiile:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_i^0 &\subset \mathcal{G}_{i(1)}^0, \\ \mathcal{G}_i^0 &\subset \mathcal{G}_{i(2)}^0, \\ \mathcal{G}_{i(1)}^0 \cap \mathcal{G}_{i(2)}^0 &= \mathcal{G}_i^0, \\ \mathcal{G}_{i(1)}^0 \cup \mathcal{G}_{i(2)}^0 &= \mathcal{G}^0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pentru mulțimile de vârfuri $\mathcal{G}_{i(1)}^0$ și $\mathcal{G}_{i(2)}^0$ ale arborilor $A_{i(1)}^n(1)$ și $A_{i(2)}^n(1)$, determinate de transversalele T_i^{n-1} , $1 \leq i \leq B$, unde B reprezintă numărul tuturor transversalelor $(n-1)$ -dimensionale, calculăm suma ponderilor vârfurilor $p(\mathcal{G}_{i(1)}^0)$ și $p(\mathcal{G}_{i(2)}^0)$:

$$\begin{aligned} p(\mathcal{G}_{i(1)}^0) &= \sum_{I^0 \in \mathcal{G}_{i(1)}^0} p(I^0), \\ p(\mathcal{G}_{i(2)}^0) &= \sum_{I^0 \in \mathcal{G}_{i(2)}^0} p(I^0) \quad . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Numerele $p(\mathfrak{G}_{i(1)}^0)$ și $p(\mathfrak{G}_{i(2)}^0)$ se vor numi *ponderi* ale complexelor $A_{i(1)}^n(1)$ și $A_{i(2)}^n(1)$.

Precum s-a menționat anterior (a se vedea paragraful 4.5), o transversală n -dimensională generează două transversale $(n-1)$ -dimensionale, pe care le vom numi transversale vecine.

Transversalele T_i^{n-1} și T_j^{n-1} le vom considera paralele dacă în arborele $A^n(1)$ există șirul de transversale vecine $T_i^{n-1} = T_{k_1}^{n-1}, T_{k_2}^{n-1}, \dots, T_{k_q}^{n-1} = T_j^{n-1}$. În cazul când două transversale $(n-1)$ -dimensionale din $A^n(1)$ nu sunt paralele, vom spune că acestea sunt transversale de direcții distincte.

Fie $T_1^{n-1}, T_2^{n-1}, \dots, T_r^{n-1}$ un șir maximal de transversale paralele din $A^n(1)$, în care T_s^{n-1} și T_{s+1}^{n-1} , $1 \leq s \leq r-1$, sunt vecine. Fiecare dintre aceste transversale determină în $A^n(1)$ un subcomplex de stânga și un subcomplex de dreapta.

Definiția 5.2.3. Transversala T_i^{n-1} din șirul ordonat $T_1^{n-1}, T_2^{n-1}, \dots, T_r^{n-1}$ se numește transversală mediană a arborelui $A^n(1)$ dacă pentru ponderile de stânga și de dreapta ale acesteia se respectă inegalitățile:

$$\begin{aligned} p(\mathfrak{G}_{i(1)}^0) &\geq p(\mathfrak{G}_{i(2)}^0 \setminus \mathfrak{G}_i^0), \\ p(\mathfrak{G}_{i(1)}^0 \setminus \mathfrak{G}_i^0) &\leq p(\mathfrak{G}_{i(2)}^0). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Menționăm că, transversala mediană din șirul $T_1^{n-1}, T_2^{n-1}, \dots, T_r^{n-1}$ poate fi determinată în mod eficient prin aplicarea unui algoritm de complexitate $O(\log r)$, bazat pe utilizarea metodei căutării binare.

Din definiția 5.2.3 rezultă că dacă T_i^{n-1} este transversala pentru care are loc egalitatea $p(\mathfrak{G}_{i(1)}^0) = p(\mathfrak{G}_{i(2)}^0)$, atunci aceasta este unica transversală mediană în șirul $T_1^{n-1}, T_2^{n-1}, \dots, T_r^{n-1}$. Totodată, ușor se deduce că, în șirul indicat există cel mult două transversale mediană și în acest caz ele sunt transversale vecine.

Teorema 5.2.5. Un vârf x_* al grafului $G = (X_G; U_G) = sk(1)A^n(1)$ este mediană în G dacă și numai dacă acest vârf reprezintă în arborele $A^n(1)$ intersecția a n transversale mediană $(n-1)$ -dimensionale.

Demonstrație. Necesitatea. Fie x_* vârful mediană al grafului $G = (X; U) = sk(1)A^n(1)$. Observăm, mai întâi, că în complexul de cuburi abstracte $A^n(1)$, orice vârf se află la intersecția a cel puțin n transversale $(n-1)$ -dimensionale. Conform teoremei 5.2.3, în mod univoc rezultă că există anumite n transversale $(n-1)$ -dimensionale $T_{i_1}^{n-1}, T_{i_2}^{n-1}, \dots, T_{i_n}^{n-1}$, la intersecția cărora se

află vârful mediană x_* și pentru care necesită să aibă loc niște relații analoage cu (5.15). Să le expunem în mod explicit.

În arborele $A^n(1)$ definim:

- a) $A_{i_1(1)}^n, A_{i_1(2)}^n, A_{i_2(1)}^n, A_{i_2(2)}^n, \dots, A_{i_n(1)}^n, A_{i_n(2)}^n$ – perechile de subcomplexe ale arborelui, determinate de transversalele $T_{i_1}^{n-1}, T_{i_2}^{n-1}, \dots, T_{i_n}^{n-1}, \mathcal{G}_{i_1(1)}^0$;
- b) $\mathcal{G}_{i_1(2)}^0, \mathcal{G}_{i_2(1)}^0, \mathcal{G}_{i_2(2)}^0, \dots, \mathcal{G}_{i_n(1)}^0, \mathcal{G}_{i_n(2)}^0$ – mulțimile de vârfuri (cuburi 0-dimensionale) ale subcomplexelor $A_{i_t(s)}^0, 1 \leq t \leq n, s \in \{1, 2\}$;
- c) $p(\mathcal{G}_{i_1(1)}^0), p(\mathcal{G}_{i_1(2)}^0), p(\mathcal{G}_{i_2(1)}^0), p(\mathcal{G}_{i_2(2)}^0), \dots, p(\mathcal{G}_{i_n(1)}^0), p(\mathcal{G}_{i_n(2)}^0)$ – ponderile subcomplexelor $A_{i_t(s)}^0, 1 \leq t \leq n, s \in \{1, 2\}$.

Unele dintre subcomplexele menționate $A_{i_t(s)}^0, 1 \leq t \leq n, s \in \{1, 2\}$, pot fi chiar printre transversalele examinate $T_{i_1}^{n-1}, T_{i_2}^{n-1}, \dots, T_{i_n}^{n-1}$. Inegalitățile (5.18), evident, determină vârful x_* . Cu alte cuvinte, are loc relația:

$$x_* \in T_{i_1}^{n-1} \cap T_{i_2}^{n-1} \cap \dots \cap T_{i_n}^{n-1}, \quad (5.22)$$

deoarece relațiile (5.21) sunt cele de la (5.15) adaptate, conform teoremei 5.2.3, la arborele A^n .

Să demonstrăm acum condiția suficientă a teoremei. Considerăm că din n șiruri ordonate de transversale au fost selectate transversalele mediană $T_{i_1}^{n-1}, T_{i_2}^{n-1}, \dots, T_{i_n}^{n-1}$. Prin urmare, pentru aceste transversale se respectă relațiile (5.21). Să admitem totuși că are loc:

$$T_{i_1}^{n-1} \cap T_{i_2}^{n-1} \cap \dots \cap T_{i_n}^{n-1} = \emptyset, \quad (5.23)$$

pe mulțimea de vârfuri din $G = (X; U) = sk(1)A^n(1)$. Deoarece fiecare transversală mediană conține mediana complexului $sk(1)A^n(1)$, rezultă că acesta va nimeri în afara lui $sk(1)A^n(1)$. O judecată din simple silogisme conduce la contradicție prin faptul că nu are loc condiția 2 a definiției 5.2.2. Aceasta din urmă demonstrează corectitudinea afirmației teoremei 5.2.5.

Folosind cele expuse în [214], precum și din proprietățile complexului de cuburi abstracte, deducem că mulțimea tuturor medianelor grafului $\mathcal{G} = (\mathcal{Z}; \mathcal{W})$, izomorfic interpretat în cubul unitate E^m , formează o mulțime convexă și, prin urmare, reprezintă o fațetă a lui E^m . Deci, dacă ne-ar interesa doar acele mediane ale lui $\mathcal{G}$, care sunt și vârfuri ale grafului $\mathcal{G}$, atunci acestea sunt vârfurile fațetei respective.

Acum să revenim la demonstrația teorema 5.2.4 anunțată ceva mai sus.

Demonstrație. Să admitem enunțul teoremei 5.2.4 nu este adevărat. Altfel spus, presupunem că există totuși un vârf $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ al cubului E^m , însă acesta nu aparține grafului $\beta\alpha(G) = \mathcal{G}$, unde β este de acum aplicația $P^m \rightarrow E^m$.

Fie $r = z_* \in E^n \setminus \mathcal{G}$ minimizează funcția $f(z)$, analoagă lui (5.12). Vectorul z_* aparține la m fațete cu dimensiunea $m-1$. Aceste fațete pentru complexul, de acum cubic, al tuturor fațetelor din I^m reprezintă niște transversale $(n-1)$ -dimensionale, care au o intersecție ce constă exact din punctul (vectorul) z_* . Fiecare dintre aceste fațete conține câte o transversală $(n-1)$ -dimensională a complexului $\beta\alpha(A_n)$, care este izometric cu $A_n(1)$. Acum menționăm că z_* respectă relațiile (5.21), adaptate la complexul $\beta\alpha(A_n(1))$. Totodată, în acest complex oricare m transversale $(n-1)$ -dimensionale $\beta\alpha(T_{i_1}^{n-1}), \beta\alpha(T_{i_2}^{n-1}), \dots, \beta\alpha(T_{i_m}^{n-1})$ au o intersecție vidă, deoarece vectorul z_* nu le aparține. Contradicție cu teorema 5.2.2. Deci teorema 5.2.4 e justă.

Din cele expuse anterior rezultă un algoritm eficient de calculare a medianei unui complex de cuburi abstracte, ce satisface definiția 5.2.2 și care va fi descris în paragraful 5.3.

În legătură cu problema studiată, în mod firesc apare întrebarea: pe cât de mult poate fi extinsă clasa de complexe cubice, reprezentate prin arbori omogeni n -dimensionali, pentru care rezultatele prezentate mai sus rămân viabile. Vom căuta răspuns la această întrebare, examinând totodată anumite proprietăți noi ale complexului de cuburi abstracte.

Fie $\mathfrak{I}^n(I^n)$ complexul n -dimensional de cuburi abstracte, determinat de familia de fațete ale cubului I^n . Orice transversală n -dimensională împarte complexul $\mathfrak{I}^n(I^n)$ în două subcomplexe conexe. Fie I^1 o fațetă 1-dimensională (o muchie) a cubului $I^n = (\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$, $\Gamma_0 = \{x_1\}$, $\Gamma_n = \{x_{2^n}\}$, incidentă vârfului x_{2^n} . Vom nota prin $T_{I^1}^n$ transversala determinată de clasa de muchii paralele ce conține muchia I^1 , iar prin $\mathfrak{I}(x_n)$ – subcomplexul din $\mathfrak{I}^n(I^n)$, determinat de $T_{I^1}^n$, ce conține vârful x_n . Respectiv, prin $\mathfrak{I}(\overline{x_n})$ vom nota cel de-al doilea subcomplex.

Lema 5.2.1. Pentru orice transversală $T_{I^1}^n$ și orice mulțime $\Gamma_k, [n/2] < k \leq n-1$, este adevărată inegalitatea:

$$|\mathfrak{I}(x_n) \cap \Gamma_k| > |\mathfrak{I}(\overline{x_n}) \cap \Gamma_k|.$$

Demonstrație. Fie I^1 fațeta 1-dimensională (muchia) a cubului n -dimensional I^n , incidentă vârfului x_{2^n} . Notăm extremitățile muchiei I^1 prin a și b considerând $b = x_{2^n}$.

Transversala T_{I^1} împarte cubul I^n în două cuburi $(n-1)$ -dimensionale I_1^{n-1} și I_2^{n-1} , astfel încât vârful a aparține lui I_1^{n-1} , iar vârful $b = x_{2^n}$ – cubului I_1^{n-2} . Elementele mulțimii Γ_k se află la distanța $(n-k)$ de la vârful b .

Mulțimea Γ_k e formată din două submulțimi:

- a) S'_k – mulțimea tuturor vârfurilor cubului $(n-1)$ -dimensional I_1^{n-1} , ce se află la distanța $(n-k)$ de la vârful b , în cubul inițial I^n ;
- b) S''_k – mulțimea tuturor vârfurilor cubului $(n-1)$ -dimensional I_2^{n-1} , ce se află la distanța $(n-k)$ de la vârful b , în cubul inițial I^n .

Ținând cont de faptul că pentru orice vârf z al cubului I_1^{n-1} , ce aparține mulțimii Γ'_k , în cubul I^n are loc egalitatea $d(b, z) = d(b, a) + d(a, z)$, precum și de faptul că b ($b = x_{2^n}$) este vârf al cubului I_2^{n-1} , rezultă inegalitatea $|\Gamma''_k| > |\Gamma'_k|$. Această inegalitate confirmă corectitudinea afirmației lemei 5.2.1.

Alegem acum un subcomplex $\mathfrak{S}^q \subset \mathfrak{S}^n(I^n)$, format din fațetele cubului I^n , generate de mulțimile de vârfuri $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_q$, cu condiția $q > [n/2]$. Ducem transversalele n -dimensionale prin fiecare muchie I^1 incidentă vârfului x_1 (x_1 este unicul element din Γ_0) și notăm prin $\mathfrak{S}_{I^1}^{n-1}(I^n)$ subcomplexul din $\mathfrak{S}^n(I^n)$ determinat de transversala T_{I^1} , ce conține cel puțin o jumătate din elementele mulțimii Γ_q . Notăm prin $\mathfrak{S}^1(x_1)$ familia tuturor cuburilor 1-dimensionale din I^n incidente vârfului x_1 . În cele ce urmează, cubul I^n se va numi închidere cubică a complexului K^q .

Teorema 5.2.6. *Dacă $I^n = (\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ este închiderea cubică a unui complex de cuburi abstracte $\mathfrak{S}^q$, $[n/2] < q \leq n-1$, atunci:*

- a) $(\bigcap_{I^1 \in \mathfrak{S}^1(x_1)} \mathfrak{S}_{I^1}^{n-1}(I^n)) \cap \mathfrak{S}^q = \emptyset$;
- b) $x_{2^n} \in \bigcap_{I^1 \in \mathfrak{S}^1(x_1)} \mathfrak{S}_{I^1}^{n-1}(I^n)$.

Demonstrație. Vom demonstra mai întâi relația b) din teoremă. Menționăm că în închiderea cubică I^n a complexului $\mathfrak{S}^q$, orice transversală determinată de clasa de muchii paralele ce conține o muchie incidentă vârfului x_1 va conține în mod obligatoriu și o muchie incidentă vârfului x_{2^n} . În baza lemei 5.2.1 și condiției teoremei, rezultă:

$$x_{2^n} \in \bigcap_{I^1 \in Q^1(x_1)} \mathfrak{S}_{I^1}^{q-1}.$$

Să demonstrăm acum relația a) din teoremă. Specificăm că, într-un cub n -dimensional I^n , orice fațetă n -dimensională îl împarte pe acesta în două cuburi $(n-1)$ -dimensionale, care sunt fațete cu aceeași dimensiune pentru I^n . În cubul n -dimensional putem duce exact n transversale, prin urmare, obținem n perechi de cuburi $(n-1)$ -dimensionale. Notăm prin $x_1, x_2, \dots, x_{2^n}$ vârfurile cubului $I^n = (\Gamma_0 = \{x_1\}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n = \{x_{2^n}\})$. Evident, fiecare transversală conține exact câte o muchie incidentă vârfului x_{2^n} . Din fiecare pereche de cuburi $(n-1)$ -dimensionale, determinate de transversalele din I^n , alegem acel cub ce conține vârful x_{2^n} și formăm familia de cuburi $(n-1)$ -dimensionale $\mathcal{F}_{I^n}^{n-1}(x_{2^n})$. Intersecția tuturor cuburilor din $\mathcal{F}_{I^n}^{n-1}(x_{2^n})$ conține doar un vârf – vârful x_{2^n} .

Subcomplexul $\mathfrak{S}_{I^1}^{n-1}(I^n)$ conține cel puțin o jumătate din elementele mulțimii Γ_q . Deoarece $q > [n/2]$, acest subcomplex nu conține vârful x_1 din $\mathfrak{S}^q$, însă conține vârful x_{2^n} din închiderea cubică I^n a lui $\mathfrak{S}^q$. De aici, în conformitate cu cele demonstrate mai sus, rezultă afirmația a) din teoremă.

Teorema 5.2.7. *Dacă $I^n = (\Gamma_0 = \{x_1\}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n = \{x_{2^n}\})$ este un cub n -dimensional, iar $\mathfrak{S}^q$ este un subcomplex din $\mathfrak{S}^n(I^n)$, format din fațetele cubului I^n , generate de mulțimile $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_q$, unde $q > [n/2]$, atunci există un astfel de sistem de ponderi $p(x_i)$ ale vârfurilor complexului $\mathfrak{S}^q$, încât pentru orice vârf din $\mathfrak{S}^n(I^n)$, calculând funcția (5.9'), obținem:*

$$f(x) > f(x_{2^n}),$$

unde rolul mulțimii X îl joacă vârfurile din I^n , iar M reprezintă mulțimea vârfurilor din $\mathfrak{S}^q$.

Demonstrație. Pentru vârfurile complexului $\mathfrak{S}^q$ fixăm două tipuri de ponderi:

- a) $p(x_i) = 1$, pentru orice element $x_i \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{q-1}$;
- b) $p(x_i) = \Lambda$, pentru orice element $x_i \in \Gamma_q$, unde Λ este un număr suficient de mare.

(Numărul Λ poate fi ales astfel încât să fie mai mare decât suma distanțelor calculate de la x_{2^n} până la toate vârfurile mulțimii $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{q-1}$. Acesta nu contravine condițiilor din teoremă)

Luând în considerație structura mulțimii Γ_q , precum și cele demonstrate în teorema 5.2.6, obținem afirmația din teoremă.

Vom studia, în cele ce urmează, complexe de cuburi abstracte $\mathfrak{T}^n$ ce posedă următoarele patru proprietăți:

- 1) orice cub k -dimensional $I^k \in \text{int } \mathfrak{T}^n$ aparține cel puțin la 2^{n-k} cuburi n -dimensionale, $0 \leq k \leq n$;
- 2) dacă x este un vârf de pe frontiera $\text{bd}\mathfrak{T}^n$, căruia îi sunt incidente exact t muchii, $3 \leq t \leq n$, și pe această frontieră există reuniunea $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{q-1}$, atunci închiderea cubică a acestui subcomplex aparține lui $\mathfrak{T}^n$;
- 3) grupul de omologii de rangul zero al complexului $\mathfrak{T}^n$ este izomorf cu grupul numerelor întregi, adică $\square^0(\mathfrak{T}^n, Z) \cong Z$;
- 4) grupurile de omologii de rangul $k = 1, 2, \dots, n$ sunt izomorfe cu zero, adică

$$\square^1(\mathfrak{T}^n, Z) \cong \square^2(\mathfrak{T}^n, Z) \cong \dots \cong \square^n(\mathfrak{T}^n, Z) \cong 0.$$

Complexele de cuburi cu proprietățile indicate mai sus servesc drept model matematic în multiple probleme practice legate de amplasarea optimală a unor centre de deservire. Un rol aparte aici îi revine problemei medianei, pentru care s-a elaborat o metodă eficientă de calcul. Important e că această metodă poate fi generalizată și pentru cazul unor complexe de cuburi mai generale. Ba mai mult, cu efortul unor modificări, ea ar putea fi folosită și în cazul unor complexe de poliedre cu proprietăți speciale [165].

5.3. Algoritmul de calculare a medianei pentru un arbore cubic n -dimensional

Fie $A^n(1)$ un arbore n -dimensional. Din cele examinate anterior deducem că mediana arborelui $A^n(1)$ poate fi determinată de mediana z_* calculată în cubul m -dimensional E^m pentru un graf special $\mathcal{G}$ obținut ca rezultat a două aplicații succesive α și β . Astfel, dacă z_* este mediana grafului $\mathcal{G}$ în cubul E^m , atunci mediana x^* a arborelui $A^n(1)$ se determină prin relația: $x^* = \alpha^{-1}\beta^{-1}(z^*)$.

Rezultatele obținute ne permit să elaborăm un algoritm eficient de calculare a medianei în $A^n(1)$, fără a utiliza metrica.

Descrierea algoritmului:

I. Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \mathcal{G}^0$.

II. Determinăm clasele de muchii paralele în arborele $A^n(1)$. Fie avem m clase de muchii paralele: $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$.

III. Fixăm un vârf arbitrar din X , de exemplu x_1 , și îi punem în corespondență cortegiul $x_1 = (0,0,...,0)$, format din m zerouri.

IV. Pentru oricare alt vârf $x_i \in X$ alegem un lanț arbitrar $L^1(x_1, x_i)$.

V. Vârfului x_i i se pune în corespondență cortegiul $x_i = (\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2, ..., \varepsilon_i^m)$, considerând $\varepsilon_i^j = 1$, dacă lanțul $L^1(x_1, x_i)$ trece de un număr impar de ori prin muchiile clasei $\mathcal{E}_j$, și $\varepsilon_i^j = 0$, dacă acest număr este par, $i \in \overline{1, n}$.

Din aceste cortegii formăm o matrice M , liniile căreia reprezintă cortegiile corespunzătoare vârfurilor x_i , $1 \leq i \leq n$:

$$M = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{E}_1 \\ \downarrow \\ \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \dots \\ \varepsilon_n^1 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathcal{E}_2 \\ \downarrow \\ \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2^2 \\ \dots \\ \varepsilon_n^2 \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} \mathcal{E}_m \\ \downarrow \\ \varepsilon_1^m \\ \varepsilon_2^m \\ \dots \\ \varepsilon_n^m \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

VI. Calculăm un cortegiu nou $r^* = (r_1^*, r_2^*, ..., r_m^*)$, folosind elementele din M și ponderile $p(x_i)$ ale vârfurilor din X , $1 \leq i \leq n$, conform regulilor:

$$r_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^j p(x_i) > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p(x_i), \\ 0, & \text{dacă } \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^j p(x_i) < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p(x_i), \\ 0 \text{ sau } 1 \text{ (indiferent)}, & \text{dacă } \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^j p(x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p(x_i). \end{cases}$$

VII. Conform teoremei 5.2.4, cortegiul r^* aparține matricei M , iar vârfurile x^* , care corespund acestui cortegiu, este mediana lui A_1^n , prin urmare, și a complexului A^n .

Exemplu. Să examinăm arborele 2-dimensional $A^2(1)$ cu suma ponderilor vârfurilor $\sum_{i=1}^{24} p(x_i) = 64$. Aplicând formula 5.9, obținem: $\min_{y \in R^2} \sum_{i=1}^{24} d(y, x_i) p(x_i) = \sum_{i=1}^{24} d(x_{15}, x_i) p(x_i)$, ceea ce înseamnă că mediana complexului se realizează în vârfurile x_{15} .

Să calculăm acum mediana conform algoritmului descris. În arborele din figura 5.2 avem 10 clase de muchii paralele $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, ..., \mathcal{E}_{10}$. Alegem vârfurile x_1 și îi atribuim cortegiul $(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$. Construim matricea M conform regulilor descrise supra pentru arborele cubic din figura 5.2. Matricea respectivă este reprezentată în figura 5.3.

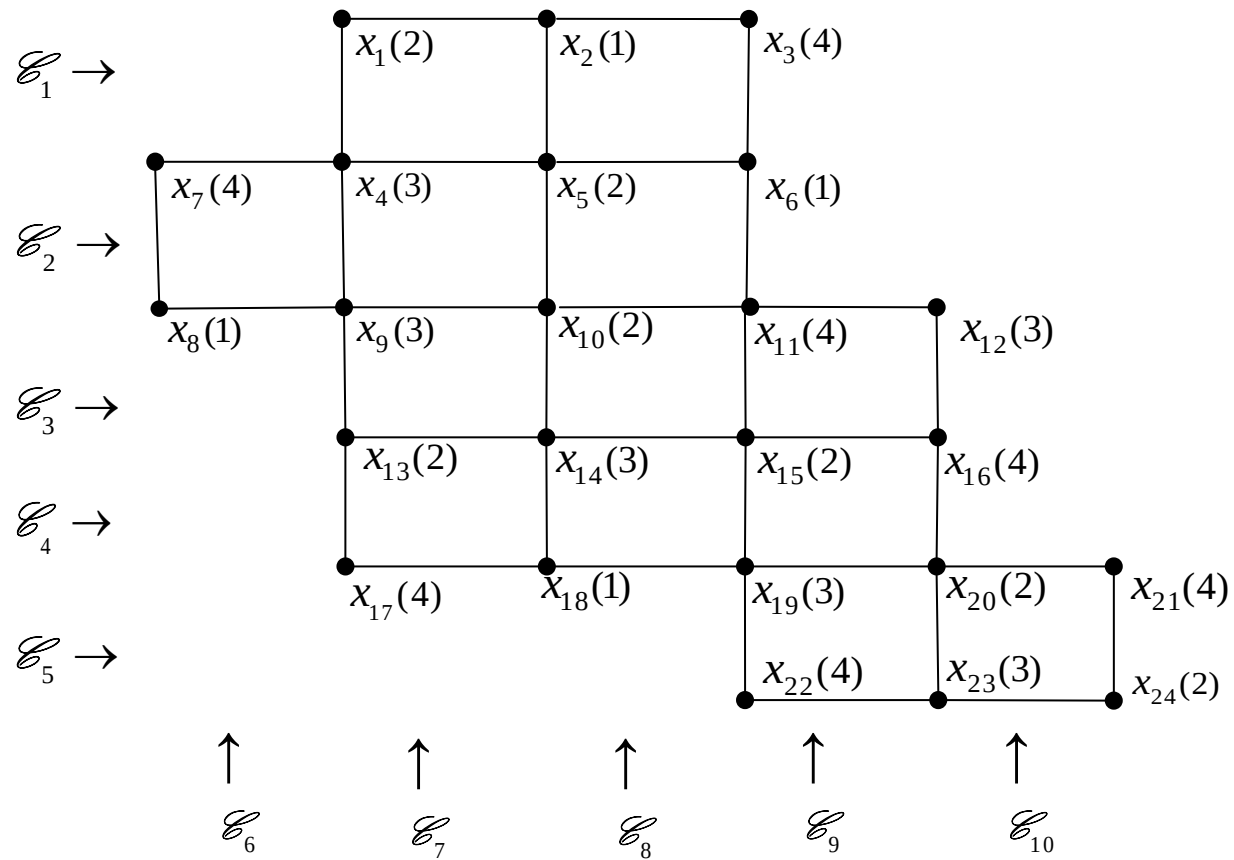


Fig. 5.2. Complex omogen de cuburi abstracte 2-dimension

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
\mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_4 & \mathcal{C}_5 & \mathcal{C}_6 & \mathcal{C}_7 & \mathcal{C}_8 & \mathcal{C}_9 & \mathcal{C}_{10} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array} \\
M = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\leftarrow x_1(2) \\
\leftarrow x_2(1) \\
\leftarrow x_3(4) \\
\leftarrow x_4(3) \\
\leftarrow x_5(2) \\
\leftarrow x_6(1) \\
\leftarrow x_7(4) \\
\leftarrow x_8(1) \\
\leftarrow x_9(3) \\
\leftarrow x_{10}(2) \\
\leftarrow x_{11}(4) \\
\leftarrow x_{12}(3) \\
\leftarrow x_{13}(2) \\
\leftarrow x_{14}(3) \\
\leftarrow x_{15}(2) \\
\leftarrow x_{16}(4) \\
\leftarrow x_{17}(4) \\
\leftarrow x_{18}(1) \\
\leftarrow x_{19}(3) \\
\leftarrow x_{20}(2) \\
\leftarrow x_{21}(4) \\
\leftarrow x_{22}(4) \\
\leftarrow x_{23}(3) \\
\leftarrow x_{24}(2)
\end{array}
\end{array}$$

Fig. 5.3. Matricea M pentru complexul din figura 5.2

Calculăm vectorul $r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_m^*)$ conform formulei din punctul VI al algoritmului. Acest vector va fi $r^* = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$ și corespunde vârfului x_{15} , ceea ce confirmă corectitudinea algoritmului.

În cazul complexului de cuburi din figura 5.2 vectorul $r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_m^*)$ se determină în mod univoc. Totodată, menționăm că există complexe pentru care vectorul calculat în matricea M , conform algoritmului descris mai sus, se determină neunivoc (atragem atenția la punctul IV al algoritmului, unde se menționează că elementul r_j^* poate primi valoarea 0 sau 1.) În acest caz, numărul de vârfuri mediană este exprimat prin puterea lui 2.

În cazul unui sistem de ponderi ale vârfurilor complexului de cuburi abstracte, elementele fiecărei linii din matricea M se înmulțește la numărul ce reprezintă ponderea vârfului corespunzător liniei, iar elementul rezultat din vectorul $r^* = (1,1,1,0,0,0,1,1,0,0)$ se calculează în mod analog. Evident, pentru diferite sisteme de ponderi ale vârfurilor se obțin soluții diferite ale problemei medianei. Ba mai mult, totdeauna putem indica astfel de ponderi ale vârfurilor încât numărul de vârfuri mediană să fie 2, 4, 8 etc.

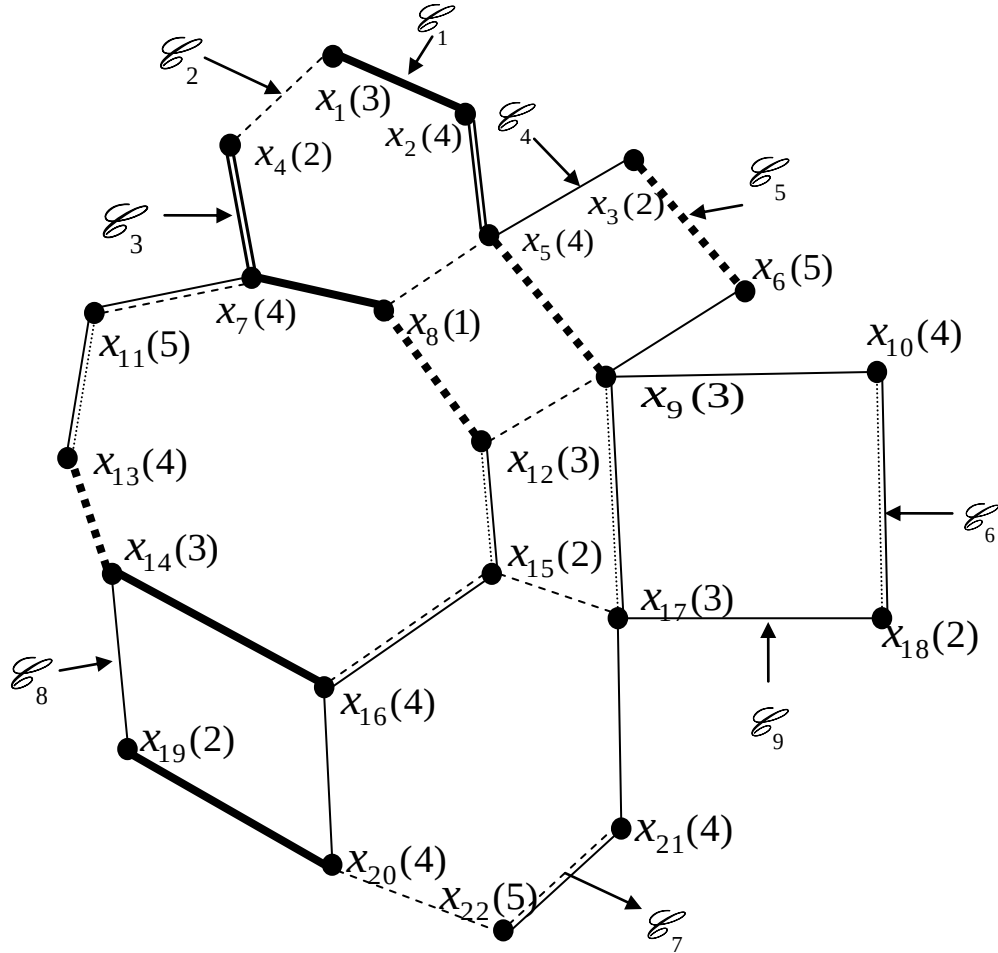


Fig. 5.4. Complex de poligoane 2-dimensionale pentru calcularea medianei

Remarca 5.3.1. Algoritmul descris poate fi folosit la calcularea medianei și în cazul unor structuri mai complicate. În figura 5.4 este reprezentat un complex de poligoane cu un număr par de muchii pentru fiecare. În acest complex, în mod similar, definim clasele de muchii paralele. Acestea sunt 9 la număr: $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_9$. Complexul conține 22 de vârfuri. Ponderile vârfurilor sunt indicate în figura 5.4, iar matricea M este descrisă în figura 5.5 (suma ponderilor vârfurilor este egală cu 72). Cazul unui complex de poliedre abstracte nu se studiază în această lucrare. Un astfel de complex necesită un studiu aparte.

$$\begin{array}{c}
\mathcal{E}_1 \quad \mathcal{E}_2 \quad \mathcal{E}_3 \quad \mathcal{E}_4 \quad \mathcal{E}_5 \quad \mathcal{E}_6 \quad \mathcal{E}_7 \quad \mathcal{E}_8 \quad \mathcal{E}_9 \\
\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
M = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\leftarrow x_1(3) \\
\leftarrow x_2(4) \\
\leftarrow x_3(2) \\
\leftarrow x_4(2) \\
\leftarrow x_5(4) \\
\leftarrow x_6(5) \\
\leftarrow x_7(4) \\
\leftarrow x_8(1) \\
\leftarrow x_9(3) \\
\leftarrow x_{10}(4) \\
\leftarrow x_{11}(5) \\
\leftarrow x_{12}(3) \\
\leftarrow x_{13}(4) \\
\leftarrow x_{14}(3) \\
\leftarrow x_{15}(2) \\
\leftarrow x_{16}(4) \\
\leftarrow x_{17}(3) \\
\leftarrow x_{18}(2) \\
\leftarrow x_{19}(2) \\
\leftarrow x_{20}(4) \\
\leftarrow x_{21}(4) \\
\leftarrow x_{22}(5)
\end{array}
\end{array}$$

Fig. 5.5. Matricea M pentru complexul din figura 5.4

La aplicarea formulei 5.9 obținem:

$$\min_{y \in R^2} \sum_{i=1}^{22} d(y, x_i) p(x_i) = \sum_{i=1}^{22} d(x_5, x_i) p(x_i),$$

ceea ce înseamnă că mediana complexului se realizează în vârful x_5 . Ca rezultat al calculelor efectuate în conformitate cu algoritmul studiat, obținem vectorul $r^* = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, ce corespunde vârfului x_5 .

5.4. Funcția Grundy și jocuri combinatoriale într-un complex de relații multi-are

Să examinăm un joc special între doi jucători pe un complex de relații multi-are $\mathfrak{R}^{n+1} = \{R^1, R^2, \dots, R^{n+1}\}$, definit în capitolul 2. Conform celor menționate în paragraful 2.3, $\mathfrak{R}^{n+1}$

poate fi considerat drept un complex de quasisimplexe abstracte $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$. Astfel, fiecare element al relației m -are R^m din complexul $\mathcal{R}^{n+1}$ este reprezentat în $\mathcal{X}^n$ printr-un quasisimplex $(m-1)$ -dimensional $Q_j^{m-1} \in \mathcal{Q}^{m-1}$, $1 \leq m \leq n+1$. Din aceste considerente, în cele ce urmează vom folosi notațiile și proprietățile unui complex de relații, formulate în termenii de quasisimplexe abstracte și expuse în capitolul 2. Totodată, din considerente de comoditate, elementele complexului $\mathcal{X}^n$ le vom numi simplexe, ceea ce nu schimbă esența lucrurilor, în contextul celor examinate ulterior.

Vom generaliza mai întâi unele noțiuni și proprietăți ale acestora, examinate în capitolele precedente. Generalizările respective sunt necesare pentru examinarea unui joc combinatorial și determinarea strategiilor optime ale jucătorilor.

Generalizarea noțiunii de coerență

Fie $Q_{j_k}^{m-1} = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m})$ un simplex abstract ce se obține din simplexul $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_k}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m})$ la eliminarea vârfului x_{j_k} . Relația de coerență a simplexelor Q_j^m și $Q_{j_k}^{m-1}$ și proprietățile respective au fost examinate în paragraful 2.4. În cele ce urmează vom generaliza această noțiune și vom stabili niște relații importante pentru examinările ulterioare. Începem cu un rezultat ce completează cele expuse în paragraful 2.4.

Teorema 5.4.1. *Simplexele Q_j^m și $(-1)^k Q_{j_k}^{m-1}$ sunt coerente.*

Demonstrație. Pentru a demonstra teorema, conform definiției 2.4.2, e suficient să arătăm că simplexele Q_j^m și $(-1)^k \cdot (x_{j_k} \rightarrow Q_{j_k}^{m-1})$ sunt orientate la fel, adică au același semn. Din considerente de comoditate, simplexul $x_{j_k} \rightarrow Q_{j_k}^{m-1}$ îl vom nota prin $\hat{Q}_{j_k}^m$.

Fie $t_{Q_j^m}$ numărul de inversiuni al cortegiului de indicii $(j_0, j_1, \dots, j_{k-1}, j_k, j_{k+1}, \dots, j_m)$ ce corespunde simplexului Q_j^m . Să admitem că printre primele k numere $j_0, j_1, \dots, j_{k-1}$ sunt q numere mai mari decât j_k , iar printre $j_{k+1}, \dots, j_m$ sunt p numere mai mici decât j_k . Prin urmare, numărul de inversiuni în cortegiul $(j_0, j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m)$, ce corespunde simplexului $Q_{j_k}^{m-1} = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m})$, este egal cu $t_{Q_j^m} - p - q$. Ușor se calculează că numărul de inversiuni în cortegiul indicilor determinat de simplexul $\hat{Q}_{j_k}^m = (x_{j_k}, x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m})$ este $t_{Q_j^m} - 2q + k$. Să examinăm acum paritatea numerelor $t_{Q_j^m}$ și $t_{Q_j^m} - 2q + k$.

I. Fie $t_{Q_j^m}$ un număr par, ceea ce înseamnă că simplexul Q_j^m este orientat pozitiv. Dacă numărul k este impar, atunci $t_{Q_j^m} - 2q + k$ este impar, adică $\hat{Q}_{j_k}^m$ este orientat negativ, și $(-1)^k = -1$, de unde rezultă că simplexele Q_j^m și $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel (ambele sunt cu semn pozitiv). Dacă numărul k este par, atunci și $t_{Q_j^m} - 2q + k$ este număr par, și $(-1)^k = +1$. Prin urmare, simplexele Q_j^m și $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel (ambele cu semn pozitiv).

II. Fie $t_{Q_j^m}$ un număr impar, ceea ce înseamnă că simplexul Q_j^m este orientat negativ. Dacă numărul k este impar, atunci $t_{Q_j^m} - 2q + k$ este par, adică $\hat{Q}_{j_k}^m$ este orientat pozitiv, și $(-1)^k = -1$, de unde rezultă că simplexele Q_j^m și $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel (ambele cu semn negativ). Dacă numărul k este par, atunci $t_{Q_j^m} - 2q + k$ este număr impar, iar $(-1)^k = +1$. Prin urmare, simplexele Q_j^m și $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel (ambele sunt cu semn negativ).

Cazurile examinate înseamnă că simplexele Q_j^m și $(-1)^k Q_{j_k}^{m-1}$ sunt coerente.

Din teorema demonstrată rezultă două consecințe, ușor verificabile.

Consecința 5.4.1. Dacă $\xi_j(m)$ și $\hat{\xi}_{j_k}(m)$ sunt semnele de orientare ale simplexelor Q_j^m și $\hat{Q}_{j_k}^m$, atunci $\xi_j(m) = (-1)^k \cdot \hat{\xi}_{j_k}(m)$.

Consecința 5.4.2. Pentru simplexul Q_j^m și fațeta acestuia $Q_{j_k}^{m-1}$ este adevărată egalitatea

$$\xi_j(m) = (-1)^{k+\alpha} \cdot \xi_{j_k}(m-1),$$

unde $\xi_j(m)$ și $\xi_{j_k}(m-1)$ sunt semnele de orientare ale simplexului Q_j^m și a fețetei $Q_{j_k}^{m-1}$, iar α reprezintă numărul de inversiuni formate de indicele vârfului x_{j_k} cu indicii $j_0, j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m$ ai vârfurilor simplexului $Q_{j_k}^{m-1}$.

Corectitudinea afirmației consecinței 5.4.2 rezultă imediat din faptul că semnul $\hat{\xi}_{j_k}(m)$ al simplexului $\hat{Q}_{j_k}^m = (x_{j_k}, x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m})$ este determinat de numărul de inversiuni din șirul $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}$, care reprezintă semnul $\xi_{j_k}(m-1)$ al simplexului $Q_{j_k}^{m-1}$, și numărul de inversiuni formate de elementul x_{j_k} cu vârfurile $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}$.

Referitor la coerența simplexelor, are loc un rezultat similar celui expus în lucrarea [305]:

Teorema 5.4.2. Coerența simplexelor Q_j^m și $(-1)^k Q_{j_k}^{m-1}$ nu depinde de permutarea concordantă a elementelor ce determină aceste simplexe.

Prin permutare concordantă aici înțelegem următoarele: dacă se face o permutare a elementelor din Q_j^m , atunci aceasta determină în mod univoc permutarea din $Q_{j_k}^{m-1}$, și invers. De exemplu, fie $Q^5 = (x_3, x_6, x_2, x_4, x_1, x_5)$ un simplex 5-dimensional, iar $Q_1^4 = (x_3, x_6, x_2, x_4, x_5)$ – fațeta lui Q^5 , opusă vârfului x_1 . Dacă ca rezultat al unei permutări, din Q^5 obținem un simplex nou ${}_1Q^5 = (x_6, x_2, x_3, x_4, x_1, x_5)$, atunci din fațeta Q_1^4 vom obține simplexul ${}_1Q_1^4 = (x_3, x_6, x_2, x_4, x_5)$, care este fațetă a lui ${}_1Q^5 = (x_6, x_2, x_3, x_4, x_1, x_5)$, opusă vârfului x_1 .

Demonstrația teoremei 5.4.2. Să notăm prin ${}^pQ_j^m$ și ${}^pQ_{j_k}^{m-1}$ simplexele ce se obțin ca rezultat al unor permutări ale elementelor din Q_j^m și $Q_{j_k}^{m-1}$. Pornim de la o permutare a elementelor din Q_j^m . Vom demonstra că dacă ${}^pQ_{j_k}^{m-1}$ se obține prin aplicarea permutării generate de permutarea folosită în Q_j^m , atunci simplexele ${}^pQ_j^m$ și $(-1)^k \cdot {}^pQ_{j_k}^{m-1}$ sunt coerente. Ultima înseamnă că simplexele ${}^pQ_j^m$ și $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel. (Cazul invers, când pornim de la o permutare efectuată asupra elementelor din $Q_{j_k}^{m-1}$, se reduce la primul.)

Folosind notațiile din paragraful 2.4, scriem:

$$Q_j^m = \xi_j(m) \cdot [x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}],$$

$$\hat{Q}_{j_k}^m = \hat{\xi}_{j_k}(m) \cdot [x_{j_k}, x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}],$$

unde $\varepsilon_j(m), \hat{\xi}_{j_k}(m) = \pm 1$, $1 \leq j \leq \text{card} Q^m$, în dependență de numărul de inversiuni în succesiunile respective de indici, și reprezintă semnele acestor simplexe. Conform teoremei 5.4.1, simplexele Q_j^m și $(-1)^k Q_{j_k}^{m-1}$ sunt coerente. Aceasta înseamnă că simplexele Q_j^m și $(-1)^k \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel, ceea ce, conform consecinței 5.4.1, este echivalent cu relația:

$$\xi_j(m) = (-1)^k \hat{\xi}_{j_k}(m). \quad (5.24)$$

Pentru a demonstra teorema e suficient a examina situația când permutarea constă din schimbarea cu locurile a două elemente x' și x'' în simplexul $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_k}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m})$. Să arătăm că în urma acestei permutări p , simplexele obținute ${}^pQ_j^m$ și $(-1)^k \cdot {}^pQ_{j_k}^{m-1}$ rămân coerente, ceea ce înseamnă că ${}^pQ_j^m$ și $(-1)^k \cdot \hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel. Notăm prin t_j^m numărul de inversiuni în cortegiul $(j_0, j_1, \dots, j_{k-1}, j_k, j_{k+1}, \dots, j_m)$. Examinările se reduc la următoarele cinci cazuri:

- 1) x' și x'' aparțin subșirului de vârfuri ce precedează x_{j_k} (se află printre $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}$);

2) x' și x'' aparțin subșirului de vârfuri ce urmează după x_{j_k} , adică se află printre vârfurile cu indicii mai mari $x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}$;

3) $x' \in \{x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}\}$, iar $x'' \in \{x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}\}$;

4) $x' \in \{x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}\}$, iar $x'' = x_{j_k}$;

5) $x' = x_{j_k}$, iar $x'' \in x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}$.

În primele două cazuri, paritatea numărului de inversiuni cu care se modifică t_j^m și $\hat{t}_{j_k}^m$ este aceeași. Aceasta permite să considerăm justă egalitatea:

$${}^p\xi_j(m) = (-1)^k \cdot ({}^p\hat{\xi}_{j_k}(m)),$$

adică simplexele ${}^pQ_j^m$ și $(-1)^k \cdot {}^p\hat{Q}_{j_k}^m$ sunt orientate la fel, ceea ce înseamnă că ${}^pQ_j^m$ și $(-1)^k \cdot {}^pQ_{j_k}^{m-1}$ rămân simplexe coerente.

Să examinăm cazul 3. Fie $x' = x_{j_r}$, $j_r < j_k$, și $x'' = x_{j_s}$, $j_s > j_k$. Dacă $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_r}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_s}, \dots, x_{j_m})$, atunci după schimbarea cu locurile a elementelor $x' = x_{j_r}$ și $x'' = x_{j_s}$, obținem simplexul ${}^pQ_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_s}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_r}, \dots, x_{j_m})$. Numărul de inversiuni ${}^pt_j^m$ în cortegiul ${}^p\alpha_j^m = (j_0, j_1, \dots, j_s, \dots, j_k, \dots, j_r, \dots, j_m)$ diferă de numărul de inversiuni t_j^m în cortegiul $\alpha_j^m = (j_0, j_1, \dots, j_r, \dots, j_k, \dots, j_s, \dots, j_m)$ doar datorită schimbărilor din șirul $j_r, \dots, j_k, \dots, j_s$.

Fie printre elementele $j_{r+1}, \dots, j_k, \dots, j_s$ sunt n_r^1 elemente mai mari decât j_r , ceea ce înseamnă că în ${}^p\alpha_j^m$ apar n_r^1 inversiuni noi care lipseau în α_j^m . Celelalte $n_r^2 = s - r - n_r^1$ elemente, raportate la j_r , formează niște inversiuni în α_j^m , care vor lipsi în ${}^p\alpha_j^m$. Pe de altă parte, să admitem că printre $j_{r+1}, \dots, j_k, \dots, j_{s-1}$ sunt n_s^1 elemente mai mici decât j_s , ceea ce înseamnă că în ${}^p\alpha_j^m$ apar n_s^1 inversiuni noi care lipseau în α_j^m . Celelalte $n_s^2 = s - r - 1 - n_s^1$ elemente, raportate la j_r , formează inversiuni în α_j^m , care însă vor lipsi în ${}^p\alpha_j^m$. Prin urmare, are loc relația:

$${}^pt_j^m = t_j^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2).$$

Să calculăm acum numărul de inversiuni ${}^p\hat{t}_{j_k}^m$ din cortegiul ${}^p\hat{\alpha}_{j_k}^m = (j_k, j_0, j_1, \dots, j_s, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_r, \dots, j_m)$ ce corespunde simplexului ${}^p\hat{Q}_{j_k}^m = (x_{j_k}, x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_s}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_r}, \dots, x_{j_m})$, exprimat prin $\hat{t}_{j_k}^m$. Folosind notațiile și tehnica de mai sus, examinăm patru cazuri:

a) $j_r < j_k$ și $j_s > j_k$. Pentru numerele de inversiuni ${}^p\hat{t}_{j_k}^m$ și $\hat{t}_{j_k}^m$ obținem:

$${}^p\hat{t}_{j_k}^m = \hat{t}_{j_k}^m + ((n_r^1 - 1) - n_r^2) + ((n_s^1 - 1) - n_s^2) = \hat{t}_{j_k}^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2) - 2.$$

b) $j_r < j_k$ și $j_s < j_k$. Pentru numerele de inversiuni ${}^p\hat{t}_{j_k}^m$ și $\hat{t}_{j_k}^m$ obținem:

$${}^p\hat{t}_{j_k}^m = \hat{t}_{j_k}^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2).$$

c) $j_r > j_k$ și $j_s > j_k$. Pentru numerele de inversiuni ${}^p\hat{t}_{j_k}^m$ și $\hat{t}_{j_k}^m$ obținem:

$${}^p\hat{t}_{j_k}^m = \hat{t}_{j_k}^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2).$$

d) $j_r > j_k$ și $j_s < j_k$. Pentru numerele de inversiuni ${}^p\hat{t}_{j_k}^m$ și $\hat{t}_{j_k}^m$ obținem:

$${}^p\hat{t}_{j_k}^m = \hat{t}_{j_k}^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2) + 2.$$

Comparând rezultatele obținute în fiecare din cazurile a)-d) cu formula ${}^p\hat{t}_j^m = \hat{t}_j^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_s^1 - n_s^2)$, obținută mai sus, observăm că paritatea numărului de inversiuni cu care se modifică ${}^p\hat{t}_j^m$ și ${}^p\hat{t}_{j_k}^m$ este aceeași. Prin urmare, este adevărată egalitatea:

$${}^p\xi_j(m) = (-1)^k \cdot ({}^p\hat{\xi}_{j_k}(m)),$$

ceea ce înseamnă că ${}^pQ_j^m$ și $(-1)^k \cdot {}^pQ_{j_k}^{m-1}$ rămân simplexe coerente.

Examinăm în continuare cazul 4. Fie $x' = x_{j_r}$, $0 \leq r \leq k-1$, $x'' = x_{j_k}$, iar ${}^pQ_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-1}}, x_{j_k}, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_r}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m})$ – simplexul ce se obține din $Q_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_r}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_m})$ la schimbarea cu locurile a vârfurilor x_{j_r} și x_{j_k} . Prin $Q_{j_k}^{m-1}$ e notată, de fapt, fațeta opusă vârfului de pe locul $k+1$ din lista ordonată a simplexului Q_j^m , și acesta este vârful $x_{j_k} \in X$. După efectuarea permutării, pe locul $k+1$ în simplexul ${}^pQ_j^m$ vine vârful x_{j_r} . Pentru a specifica acest moment, vom nota fațeta opusă vârfului de pe locul $k+1$ din ${}^pQ_j^m$ prin ${}^pQ_{j_r(k)}^{m-1}$. Să demonstrăm că ${}^pQ_j^m$ și $(-1)^k \cdot {}^pQ_{j_r(k)}^{m-1}$ sunt coerente, ceea ce e echivalent cu faptul că simplexele

$${}^pQ_j^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-1}}, x_{j_k}, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_r}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m}),$$

$$\text{și } (-1)^k \cdot {}^p\hat{Q}_{j_r(k)}^m = (-1)^k \cdot (x_{j_r}, x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-1}}, x_{j_k}, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_m})$$

sunt orientate la fel. Ca și în cazul precedent, vom examina paritatea numerelor cu care se modifică ${}^p\hat{t}_j^m$ și ${}^p\hat{t}_{j_r(k)}^m$. Pentru cortegiul de indici $\alpha_j^m = (j_0, j_1, \dots, j_r, j_{r+1}, \dots, j_{k-1}, j_k, j_{k+1}, \dots, j_m)$ definim numerele:

n_r^1 – numărul de elemente ale șirului $j_{r+1}, \dots, j_k$ care sunt mai mari decât j_r ;

n_r^2 – numărul de elemente ale șirului $j_{r+1}, \dots, j_k$ care sunt mai mici decât j_r ;

n_k^1 – numărul de elemente ale șirului $j_{r+1}, \dots, j_{k-1}$ care sunt mai mici decât j_k ;

n_k^2 – numărul de elemente ale șirului $j_{r+1}, \dots, j_{k-1}$ care sunt mai mari decât j_k .

Obținem o formulă, analoagă celei din cazul 3, pentru numărul de inversiuni din cortegiul ${}^p\alpha_j^m = (j_0, j_1, \dots, j_k, j_{r+1}, \dots, j_{k-1}, j_r, j_{k+1}, \dots, j_m)$, exprimat prin numărul de inversiuni din cortegiul corespunzător α_j^m :

$$\begin{aligned} {}^pt_j^m &= t_j^m + (n_r^1 - n_r^2) + (n_k^1 - n_k^2) = \\ &= t_j^m + (n_r^1 + n_r^2) - 2n_r^2 + (n_k^1 + n_k^2) - 2n_s^2 = \\ &= t_j^m + (k - r) - 2n_r^2 + (k - r - 1) - 2n_s^2 = \\ &= 2k - 2r - 2n_r^2 - 2n_k^2 - 1, \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că numărul de inversiuni ${}^pt_j^m$ diferă de t_j^m cu un număr impar. De aici mai rezultă că simplexele orientate Q_j^m și ${}^pQ_j^m$ sunt de semne diferite.

Să examinăm acum simplexul ${}^p\hat{Q}_{j_r(k)}^m$ și să exprimăm numărul de inversiuni ${}^p\hat{t}_{j_r(k)}^m$ din ${}^p\hat{\alpha}_{j_r(k)}^m = (j_r, j_0, j_1, \dots, j_{r-1}, j_k, j_{r+1}, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m)$ prin numărul de inversiuni $\hat{t}_{j_k}^m$ ale cortegiului $\hat{\alpha}_{j_k}^m = (j_k, j_0, j_1, \dots, j_{r-1}, j_r, j_{r+1}, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m)$. Pentru cortegiul $\hat{\alpha}_{j_k}^m$ definim numerele:

l_k^1 – numărul de elemente ale șirului $j_0, j_1, \dots, j_r$ care sunt mai mari decât j_k ;

l_k^2 – numărul de elemente ale șirului $j_0, j_1, \dots, j_r$ care sunt mai mici decât j_k ;

l_r^1 – numărul de elemente ale șirului $j_0, j_1, \dots, j_{r-1}$ care sunt mai mici decât j_r ;

l_r^2 – numărul de elemente ale șirului $j_0, j_1, \dots, j_{r-1}$ care sunt mai mari decât j_r .

Obținem formula:

$$\begin{aligned} {}^p\hat{t}_{j_r(k)}^m &= \hat{t}_{j_k}^m + (l_k^1 - l_k^2) + (l_r^1 - l_r^2) = \\ &= \hat{t}_{j_k}^m + (l_k^1 + l_k^2) + (l_r^1 + l_r^2) - 2l_k^2 - 2l_r^2 = \\ &= \hat{t}_{j_k}^m + (r + 1) + r - 2l_k^2 - 2l_r^2 = \\ &= \hat{t}_{j_k}^m + 2r - 2l_k^2 - 2l_r^2 + 1, \end{aligned}$$

ceea ce denotă că numărul de inversiuni ${}^p\hat{t}_{j_r(k)}^m$ diferă de $\hat{t}_{j_k}^m$ cu un număr impar. Ca și în cazul simplexelor m -dimensionale Q_j^m și ${}^pQ_j^m$, aceasta înseamnă că simplexele $\hat{Q}_{j_k}^m$ și ${}^p\hat{Q}_{j_r(k)}^m$ sunt orientate în mod diferit.

Din cele demonstrate mai sus deducem că dacă Q_j^m și $\hat{Q}_{j_k}^m$ sunt simplexe cu același semn de orientare, atunci și simplexele ${}^p Q_j^m$ și ${}^p \hat{Q}_{j_r(k)}^m$ posedă aceeași proprietate. Deci și în acest caz, afirmația teoremei este justă.

Demonstrația se finalizează cu examinarea cazului 5, care se face similar cazului 4.

Să generalizăm acum noțiunea de coerență a simplexelor. O vom face în două etape:

1) pentru simplexele $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ și Q^{m-t} , unde Q^{m-t} reprezintă o fațetă a simplexului Q_j^m , $1 \leq t \leq m-1$; 2) pentru două simplexe $Q^1, Q^2 \in K^n$, unde $Q^1 \cap Q^2 = Q^{12} \in K^n$ și nici unul dintre simplexele Q^1, Q^2 nu este fațetă a celuilalt.

Fie $Q_i^m = \xi_i(m)[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}]$ un simplex orientat, ales în mod aleatoriu din $\mathcal{Q}^m$, și $Q_{J_t}^{m-t} = \xi_{J_t}(m-t)[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-t}}]$ – fațeta $(m-t)$ -dimensională din Q_i^m , opusă mulțimii de vârfuri $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}$, unde $J_t = j_0 + j_1 + \dots + j_{t-1}$, $0 \leq j_0, j_1, \dots, j_{t-1} \leq m$. Indicele j_s , $0 \leq s \leq t-1$, corespunde locului pe care îl ocupă x_{j_s} în lista $(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$. Pentru a nu recurge la indexări „etajate”, se consideră juste relațiile:

- a) $j_0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{t-1}$;
- b) $j_0, j_1, \dots, j_{t-1} \in \{i_0, i_1, \dots, i_m\}$;
- c) $l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_{m-t}$;
- d) $\{l_0, l_1, \dots, l_{m-t}\} = \{i_0, i_1, \dots, i_m\} \setminus \{j_0, j_1, \dots, j_{t-1}\}$.

Vom generaliza acum noțiunea de coerență, definită în paragraful 2.4 (a se vedea definiția 2.4.2), pentru cazul 1) indicat mai sus. De rând cu simplexul $Q_{j_p}^{m-p} \in \mathcal{Q}^{m-p}$, care este fațetă $(m-t)$ -dimensională din $Q_i^m \in \mathcal{Q}^m$, opusă vârfurilor $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}$, vom defini simplexul

$$\hat{Q}_{J_t}^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}, x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-t}}).$$

Definiția 5.4.1. Simplexul $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ și fațeta acestuia $Q_{J_t}^{m-t} \in \mathcal{Q}^{m-t}$ se numesc *t-coerente* dacă Q_j^m și $\hat{Q}_{J_t}^m$ sunt orientate la fel, adică ambele sunt orientate pozitiv sau ambele sunt orientate negativ. Dacă simplexele Q_j^m și $\hat{Q}_{J_t}^m$ sunt orientate în mod diferit, atunci Q_j^m și $Q_{J_t}^{m-p}$ se numesc simplexe *t-noncoerente*.

Din această definiție rezultă că noțiunea de *t-coerență* se răsfrânge doar asupra a două simplexe, dintre care unul este fațetă a celuilalt. Similar cazului de coerență simplă (a se vedea paragraful 2.4), se definește coeficientul de *t-coerență* al simplexelor:

$$\varepsilon_i^{J_t}(m) = \begin{cases} +1, & \text{dacă } Q_i^m \text{ și } Q_{J_t}^{m-t} \text{ sunt simplexe } t\text{-coerente,} \\ -1, & \text{dacă } Q_i^m \text{ și } Q_{J_t}^{m-t} \text{ sunt simplexe } t\text{-noncoerente,} \\ 0, & \text{dacă } Q_{J_t}^{m-t} \text{ nu este fațetă a lui } Q_i^m. \end{cases}$$

Teorema 5.4.3. *Simplexele Q_i^m și $(-1)^{J_t} Q_{J_t}^{m-t}$ sunt t -coerente.*

Folosind metoda inducției matematice în raport cu numărul t de vârfuri eliminate $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}$ din Q_i^m și teorema 5.4.1, demonstrația teoremei 5.4.3 devine o chestiune pur tehnică.

Conform definiției 5.4.1, t -coerența simplexelor Q_i^m și $Q_{J_t}^{m-1}$ este determinată de orientarea simplexelor Q_i^m și $\hat{Q}_{J_t}^m$. Semnul de orientare $\hat{\xi}_{J_t}(m)$ al lui $\hat{Q}_{J_t}^m$ se stabilește cu ajutorul numărului de inversiuni α ale indicilor vârfurilor simplexului $\hat{Q}_{J_t}^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}, x_{l_0}, x_{l_1}, \dots, x_{l_{m-t}})$, care poate fi reprezentat prin suma $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{12}$, unde

α_1 este numărul de inversiuni din șirul $j_0, j_1, \dots, j_{t-1}$;

α_2 este numărul de inversiuni din șirul $l_0, l_1, \dots, l_{m-t}$ și care determină semnul $\xi_{J_t}(m-t)$ al fațetei $Q_{J_t}^{m-t}$;

α_{12} este numărul de inversiuni format de fiecare dintre indicii $j_0, j_1, \dots, j_{t-1}$ cu fiecare dintre indicii $l_0, l_1, \dots, l_{m-t}$.

Consecința 5.4.3. *Pentru simplexul Q_i^m și fațeta acestuia $Q_{J_t}^{m-t}$ este adevărată egalitatea $\xi_i(m) = (-1)^{J_t + \alpha(J_t)} \cdot \xi_{J_t}(m-t)$, unde $\xi_i(m)$ și $\xi_{J_t}(m-t)$ sunt semnele de orientare ale simplexului Q_i^m și fațetei acestuia $Q_{J_t}^{m-t}$, iar $\alpha(J_t) = \alpha_1 + \alpha_{12}$.*

Demonstrație. Conform teoremei 5.4.3, simplexele Q_i^m și $(-1)^{J_t} Q_{J_t}^{m-t}$ sunt t -coerente. Prin urmare, între semnul de orientare $\xi_i(m)$ al simplexului Q_i^m și semnul de orientare $\hat{\xi}_{J_t}(m)$ al simplexului $(-1)^{J_t} Q_{J_t}^{m-t}$ are loc relația:

$$\xi_i(m) = (-1)^{J_t} \cdot \hat{\xi}_{J_t}(m). \quad (5.25)$$

Luând în considerație că valoarea lui $\hat{\xi}_{J_t}(m)$ este determinată de paritatea numărului $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{12}$, obținem:

$$\hat{\xi}_{J_t}(m) = (-1)^\alpha = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{12}} = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{12}} \cdot \xi_{J_t}(m-t),$$

ceea ce permite să reprezentăm formula (5.25) în modul următor:

$$\xi_i(m) = (-1)^{J_t + \alpha_1 + \alpha_{12}} \cdot \xi_{J_t}(m-t).$$

Notând $\alpha(J_t) = \alpha_1 + \alpha_{12}$, în cele din urmă obținem egalitatea:

$$\xi_i(m) = (-1)^{J_t + \alpha(J_t)} \cdot \xi_{J_t}(m-t). \quad (5.25')$$

Pentru simplexele Q_i^m și $Q_{J_t}^{m-t}$ are loc un rezultat similar teoremei 5.4.2.

Teorema 5.4.4. *t-coerența simplexelor Q_i^m și $(-1)^{J_t} Q_{J_t}^{m-t}$ nu depinde de permutarea concordantă a elementelor ce determină aceste simplexe.*

Demonstrație. Ca și în cazul teoremei 5.4.2, e suficient să demonstrăm că dacă ${}^p Q_{J_t}^{m-t}$ se obține prin aplicarea permutării generate de permutarea folosită în Q_i^m , atunci simplexele ${}^p Q_i^m$ și $(-1)^{J_t} \cdot {}^p Q_{J_t}^{m-t}$ sunt coerente. Ultima afirmație înseamnă că este adevărată egalitatea:

$${}^p \xi_i(m) = (-1)^{J_t} \cdot {}^p \hat{\xi}_{J_t}(m). \quad (5.26)$$

Folosim metoda inducției matematice în raport cu numărul t de vârfuri eliminate $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}$ din Q_i^m .

1) $t = 0$. În acest caz, $J_t = j_0$. Apelând la teorema 5.4.2, obținem:

$${}^p \xi_i(m) = (-1)^{j_0} \cdot {}^p \hat{\xi}_{j_0}(m),$$

ceea ce confirmă relația (5.26).

2) Admitem că afirmația teoremei este adevărată pentru $t \geq 0$ vârfuri eliminate $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}$, adică are loc egalitatea:

$${}^p \xi_i(m) = (-1)^{J_t} \cdot {}^p \hat{\xi}_{J_t}(m),$$

independent de permutările elementelor din Q_i^m și $Q_{J_t}^{m-t}$. În acest caz, indicele J_t este $J_t = j_0 + j_1 + \dots + j_t$.

3) Examinăm situația când din Q_i^m se elimină $t+1$ vârfuri. Fie acestea sunt $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}, x_{j_t}$ și

$Q_{J_t}^{m-t}$ este fațeta lui Q_i^m , opusă vârfurilor $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}$;

$$\hat{Q}_{J_t}^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}, x_{l_0}, x_{l_1}, \dots, x_{l_{m-t}});$$

$Q_{J_{t+1}}^{m-t-1}$ este fațeta lui Q_i^m , opusă vârfurilor $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}, x_{j_t}$;

$$\hat{Q}_{J_{t+1}}^m = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}, x_{j_t}, x_{l_0}, x_{l_1}, \dots, x_{l_{m-t}});$$

$Q_{j_t}^{m-t-1}$ este fațeta lui $Q_{J_t}^{m-t}$ opusă vârfului $x_{j_t} = x_{i_{j_t}} \in \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$.

Să demonstrăm că și în acest caz se respectă egalitatea

$${}^p\xi_i(m) = (-1)^{J_{t+1}} \cdot {}^p\hat{\xi}_{J_{t+1}}(m).$$

Construirea fațetei $Q_{J_{t+1}}^{m-t-1}$ o facem în două etape, mai întâi prin eliminarea vârfurilor $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{t-1}}$, conform regulilor de eliminare descrise anterior, iar apoi prin eliminarea ultimului vârf x_{j_t} . Luând în considerație pasul precedent al inducției matematice, precum și afirmația teoremei 5.4.2, obținem următoarele relații pentru coeficienții de coerență între simplexele examinate:

$${}^p\xi_i(m) = (-1)^{J_t} \cdot {}^p\hat{\xi}_{J_t}(m), \quad (5.27)$$

$${}^p\xi_{J_t}(m-t) = (-1)^{j_t} \cdot {}^p\hat{\xi}_{J_{t+1}}(m). \quad (5.28)$$

În baza acestor relații, precum și a modului de construire a simplexelor $Q_{J_t}^{m-t}$, $\hat{Q}_{J_t}^m$, $Q_{J_{t+1}}^{m-t-1}$, $\hat{Q}_{J_{t+1}}^m$, $Q_{j_t}^{m-t-1}$, în cele din urmă obținem:

$${}^p\xi_i(m) = (-1)^{J_t} \cdot (-1)^{j_t} \cdot {}^p\hat{\xi}_{J_{t+1}}(m) = (-1)^{J_{t+1}} \mathcal{E}_{J_{t+1}}^{(m-t-1)}.$$

Deci, afirmația teoremei are loc și pentru $t+1$ vârfuri eliminate. Conform inducției matematice, relația (5.26) este adevărată.

Să extindem în continuare noțiunea de coerență pentru două simplexe Q^{m_1} și Q^{m_2} din complexul $\mathcal{K}^n$ ce posedă proprietățile:

- a) $Q^{m_1} \not\subset Q^{m_2}$;
- b) $Q^{m_2} \not\subset Q^{m_1}$;
- c) $Q^{m_1} \cap Q^{m_2} = Q^{m_3} \neq \emptyset$,

unde $m_1 - m_3 = t \geq 1$, $m_2 - m_3 = q \geq 1$, și $1 \leq m_1, m_2, m_3 \leq n$. Vom considera că simplexele Q^{m_1}, Q^{m_2} și Q^{m_3} sunt orientate, ceea ce înseamnă că le putem interpreta în modul următor:

$$Q^{m_1} = \xi(m_1)[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m_1}}],$$

$$Q^{m_2} = \xi(m_2)[y_{j_0}, y_{j_1}, \dots, y_{j_{m_2}}],$$

$$Q^{m_3} = \xi(m_3)[z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}].$$

Simplexul Q^{m_3} se obține din Q^{m_1} la eliminarea a t vârfuri $x_{a_0}, x_{a_1}, \dots, x_{a_{t-1}}$, iar din Q^{m_2} – prin eliminarea a q vârfuri $y_{b_0}, y_{b_1}, \dots, y_{b_{q-1}}$. Definim numerele:

$$J_t = a_0 + a_1 + \dots + a_{t-1},$$

$$J_q = b_0 + b_1 + \dots + b_{q-1},$$

și construim simplexele:

$$\hat{Q}_{J_t}^{m_1} = \hat{\xi}_{J_t}(m_1) \cdot [x_{a_0}, x_{a_1}, \dots, x_{a_{t-1}}, z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}],$$

$$\hat{Q}_{J_q}^{m_2} = \hat{\xi}_{J_q}(m_2) \cdot [x_{b_0}, x_{b_1}, \dots, x_{b_{q-1}}, z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}].$$

Aici $a_0, a_1, \dots, a_{t-1}$ reprezintă numerele de ordine ale acelor t vârfuri din lista $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m_1}}$, care se elimină din Q^{m_1} la construirea lui Q^{m_3} . Respectiv, $b_0, b_1, \dots, b_{q-1}$ reprezintă numerele de ordine ale q vârfuri din lista $y_{j_0}, y_{j_1}, \dots, y_{j_{m_2}}$, care se elimină din Q^{m_2} la construirea lui Q^{m_3} . Pentru vârfurile simplexelor Q^{m_1}, Q^{m_2} și Q^{m_3} se respectă relațiile:

$$\{z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}\} \subset \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m_1}}\},$$

$$\{z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}\} \subset \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m_1}}\}.$$

Definiția 5.4.2. Simplexele Q^{m_1} și Q^{m_2} cu proprietatea $Q^{m_1} \cap Q^{m_2} \neq \emptyset$ se numesc simplexe (t, q) -coerente dacă Q^{m_1} și $Q^{m_3} = Q^{m_1} \cap Q^{m_2}$ sunt simplexe t -coerente iar Q^{m_2} și Q^{m_3} sunt simplexe q -coerente.

Pentru indicii vârfurilor din șirurile

$$x_{a_0}, x_{a_1}, \dots, x_{a_{t-1}}; \quad y_{b_0}, y_{b_1}, \dots, y_{b_{q-1}} \quad \text{și} \quad z_{k_0}, z_{k_1}, \dots, z_{k_{m_3}}$$

determinăm numerele:

α_1 – numărul de inversiuni în șirul de indici $a_0, a_1, \dots, a_{t-1}$;

α_2 – numărul de inversiuni în șirul de indici $b_0, b_1, \dots, b_{q-1}$;

α_3 – numărul de inversiuni în șirul de indici $k_0, k_1, \dots, k_{m_3}$;

α_{13} – numărul de inversiuni formate de fiecare dintre indicii $a_0, a_1, \dots, a_{t-1}$ cu fiecare dintre indicii $k_0, k_1, \dots, k_{m_3}$;

α_{23} – numărul de inversiuni formate de fiecare dintre indicii $b_0, b_1, \dots, b_{q-1}$ cu fiecare dintre indicii $k_0, k_1, \dots, k_{m_3}$.

Teorema 5.4.5. În cazul simplexelor (t, q) -coerente Q^{m_1} și Q^{m_2} are loc egalitatea:

$$\xi(m_1) = (-1)^{J_t + J_q + \alpha(J_t) + \alpha(J_q)} \cdot \xi(m_2),$$

unde $\alpha(J_t) = \alpha_1 + \alpha_{13}$, iar $\alpha(J_q) = \alpha_2 + \alpha_{23}$.

Demonstrație. Pentru semnele simplexelor studiate obținem relațiile:

$$\xi(m_3) = (-1)^{\alpha_3};$$

$$\hat{\xi}_{J_t}(m_1) = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13} + \alpha_3} = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13}} \cdot \xi(m_3);$$

$$\hat{\xi}_{J_q}(m_2) = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23} + \alpha_3} = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23}} \cdot \xi(m_3).$$

Conform teoremei 5.4.3, simplexele Q^{m_1} și $(-1)^{J_t} Q^{m_3}$ sunt coerente. Prin urmare, în baza relației (5.25) și celor menționate mai sus, putem scrie:

$$\xi(m_1) = (-1)^{J_t} \cdot \hat{\xi}_{J_t}(m_1) = (-1)^{J_t} \cdot (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13}} \cdot \xi(m_3).$$

Din aceleași considerente, și în cazul simplexelor Q^{m_2} , $(-1)^{J_q} Q^{m_3}$ are loc egalitatea similară:

$$\xi(m_2) = (-1)^{J_q} \cdot \hat{\xi}_{J_q}(m_2) = (-1)^{J_q} \cdot (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23}} \cdot \xi(m_3).$$

Din ambele egalități exprimăm $\xi(m_3)$ prin $\xi(m_1)$ și, respectiv, $\xi(m_2)$:

$$\xi(m_3) = (-1)^{J_t} \cdot (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13}} \cdot \xi(m_1),$$

$$\xi(m_3) = (-1)^{J_q} \cdot (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23}} \cdot \xi(m_2).$$

Deoarece părțile din stânga ale acestor egalități coincid, rezultă:

$$(-1)^{J_t} \cdot (-1)^{\alpha_1 + \alpha_{13}} \cdot \xi(m_1) = (-1)^{J_q} \cdot (-1)^{\alpha_2 + \alpha_{23}} \cdot \xi(m_2).$$

Notăm $\alpha(J_t) = \alpha_1 + \alpha_{13}$ și $\alpha(J_q) = \alpha_2 + \alpha_{23}$. Ultima ecuație se va transcrie:

$$(-1)^{J_t + \alpha(J_t)} \cdot \xi(m_1) = (-1)^{J_q + \alpha(J_q)} \cdot \xi(m_2),$$

de unde rezultă relația:

$$\xi(m_1) = (-1)^{J_t + J_q + \alpha(J_t) + \alpha(J_q)} \cdot \xi(m_2).$$

Mulțimi stabile

În capitolul 2 a fost definită noțiunea de stea a unui simplex (a se vedea definiția 2.3.2), care poate fi generalizată în cazul unui simplex $Q_j^m \in \mathbf{Q}^m$.

Definiția 5.4.3. Subcomplexul $\mathfrak{X}_{Q_j^m}$ din $\mathfrak{X}^n$, care conține simplexul Q_j^m , împreună cu toate fațetele proprii ale sale, precum și toate simplexele din $\mathfrak{X}^n$ incidente lui Q_j^m , împreună cu toate fațetele proprii ale acestora se numește **superstea** a lui Q_j^m și se notează prin StQ_j^m .

Menționăm că, spre deosebire de supersteaua StQ_j^m , steaua stQ_j^m a unui simplex Q_j^m nu este complex simplicial abstract.

Pentru supersteaua StQ_j^m definim următoarele noțiuni:

- a) **închiderea** $Cl(StQ_j^m)$ **superstelei** StQ_j^m – subcomplexul minimal din $\mathfrak{X}^n$, care conține supersteaua StQ_j^m ;

b) **reprezentanța** $R(Q_j^m)$ **superstelei** StQ_j^m – mulțimea simplexelor din StQ_j^m ce nu sunt incidente simplexului Q_j^m ;

c) **frontiera** $B(Q_j^m)$ **a superstelei** StQ_j^m – mulțimea tuturor simplexelor din StQ_j^m ce nu sunt incidente lui Q_j^m sau intersecția acestora cu Q_j^m reprezintă una dintre fațetele proprii ale lui Q_j^m .

Ușor se verifică relațiile:

$$R(Q_j^m) \subset Cl(StQ_j^m),$$

$$B(Q_j^m) \subset Cl(StQ_j^m),$$

$$R(Q_j^m) \subset B(Q_j^m).$$

Fie Q^m un simplex din $\mathcal{K}^n$, pentru care se cunoaște supersteaua StQ^m , împreună cu reprezentanța $R(Q^m)$ și frontiera $B(Q^m)$. Conform celor relatate anterior, constatăm:

$$R(Q^m) \cap Q^m = \emptyset,$$

$$B(Q^m) \setminus R(Q^m) = \emptyset.$$

În mod aleatoriu, alegem un simplex Q^{m_1} din mulțimea $B(Q^m) \setminus R(Q^m)$ (evident, Q^{m_1} este diferit de Q^m și fațetele acestuia). Totodată, există un simplex Q^{m_2} încât: $Q^{m_1} \cap Q^m = Q^{m_2} \neq \emptyset$. Conform teoremei 5.4.3, condiția de (t, q) - coerență a simplexelor Q^m și Q^{m_1} este:

$$\xi(m_1) = (-1)^{J_t + J_q + \alpha(J_t) + \alpha(J_q)} \xi(m), \quad (5.29)$$

unde $t = m - m_2$, iar $q = m_1 - m_2$. În această situație sunt posibile două cazuri: a) când numărul $J_t + J_q + \alpha(J_t) + \alpha(J_q)$ este par; b) când numărul $J_t + J_q + \alpha(J_t) + \alpha(J_q)$ este impar. Referitor la simplexul Q^{m_1} și orice simplex $Q^{m_3} \in R(Q^m)$, unde Q^{m_3} este fațetă a lui Q^{m_1} , obținem relația analoagă cu relația (5.29):

$$\xi(m_1) = (-1)^{J_{t_1} + J_{q_1} + \alpha(J_{t_1}) + \alpha(J_{q_1})} \xi(m_3), \quad (5.30)$$

unde $t_1 = m_1 - m_3$, $J_{q_1} = 0$, $\alpha(J_{q_1}) = 0$. Deci, orientarea simplexelor Q^{m_1} și Q^{m_3} e determinată de cele două cazuri posibile: a) când $J_{t_1} + \alpha(J_{t_1})$ este un număr par; b) când $J_{t_1} + \alpha(J_{t_1})$ este un număr impar.

Notăm prin $\tilde{Q}_m$ mulțimea tuturor simplexelor din $B(Q^m)$, încât în cazul perechii Q^m, Q^{m_1} , ce satisface relația (5.29), are loc condiția a), iar în cazul perechii Q^{m_1}, Q^{m_3} , ce satisface relația (5.30), are loc condiția b).

Considerăm aplicația:

$$\Gamma : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n \quad (5.31)$$

cu proprietatea:

$$\Gamma(Q_j^m) = \tilde{Q}_{m(j)},$$

pentru orice simplex m -dimensional $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$, $0 \leq m \leq n$.

Menționăm că mulțimea $\tilde{Q}_{m(j)}$ se determină în mod univoc în baza teoremelor 5.4.2-5.4.5.

Definiția 5.4.4. *Mulțimea de simplexe F a complexului $\mathcal{K}^n$ ce posedă proprietatea:*

$$\Gamma(Q) \cap F = \emptyset,$$

pentru orice simplex $Q \subset F$, se numește mulțime intern stabilă de simplexe abstracte a complexului $\mathcal{K}^n$.

Vom spune că o mulțime intern stabilă este maximală dacă în $\mathcal{K}^n$ nu există o altă mulțime intern stabilă H , încât $F \subset H$.

Notăm prin $\mathcal{F}$ familia tuturor mulțimilor intern stabile din $\mathcal{K}^n$.

Definiția 5.4.5. *Numărul $\alpha(\mathcal{K}^n) = \max_{F \in \mathcal{F}} \{\text{card } F\}$ se numește număr de stabilitate internă a complexului $\mathcal{K}^n$.*

Prin analogie cu situația din teoria grafurilor care, precum a mai fost menționat, este un caz particular al complexului de relații multi-are, vom defini noțiunea de mulțime extern stabilă.

Definiția 5.4.6. *Mulțimea de simplexe E a complexului $\mathcal{K}^n$ se numește extern stabilă dacă pentru orice simplex $Q \notin E$ are loc relația:*

$$\Gamma(Q) \cap E \neq \emptyset.$$

Menționăm că, conform definițiilor 5.4.4 și 5.4.6, în orice complex $\mathcal{K}^n$ există mulțime intern stabilă și mulțime extern stabilă. Astfel, orice simplex formează o mulțime intern stabilă, iar mulțimea tuturor simplexelor complexului $\mathcal{K}^n$ este totdeauna extern stabilă.

Să notăm prin $\mathcal{E}$ familia tuturor mulțimilor extern stabile din $\mathcal{K}^n$.

Definiția 5.4.7. *Numărul $\beta(\mathcal{K}^n) = \max_{E \in \mathcal{E}} \{\text{card } E\}$ se numește număr de stabilitate externă a complexului $\mathcal{K}^n$.*

Definiția 5.4.8. *Mulțimea de simplexe abstracte a unui complex $\mathcal{K}^n$ care este intern stabilă și, totodată, extern stabilă, se numește nucleu al complexului.*

Teorema 5.4.6. *O mulțime intern stabilă $F \in \mathcal{F}$ este nucleu al complexului $\mathcal{K}^n$ dacă și numai dacă ea este maximală.*

Demonstrație. Fie mulțimea intern stabilă $F \in \mathcal{F}$ este nucleu al complexului $\mathcal{X}^n$. Să presupunem că F nu este maximală. În acest caz, complexul $\mathcal{X}^n$ conține un simplex m -dimensional Q^m , $0 \leq m \leq n$, încât $F \cup \{Q^m\} = F' \in \mathcal{F}$ și $Q^m \notin F$. Atunci, în virtutea definiției 5.4.8, deoarece F' este mulțime intern stabilă, obținem relația $\Gamma(Q^m) \cap F' = \emptyset$.

Pe de altă parte, deoarece nucleul F este totodată și mulțime extern stabilă, pentru simplexul Q^m are loc relația $\Gamma(Q^m) \cap F = \emptyset$, de unde rezultă relația $\Gamma(Q^m) \cap F' \neq \emptyset$. Din contradicția obținută conchidem că nucleul F este mulțime intern stabilă maximală.

Să demonstrăm acum afirmația inversă. Fie $F \in \mathcal{F}$ este mulțime intern stabilă maximală. Pentru a demonstra că F este nucleu al complexului $\mathcal{X}^n$ e suficient să arătăm că F formează o mulțime extern stabilă. Dacă admitem contrariul, atunci rezultă că în complexul $\mathcal{X}^n$ există un simplex $Q^m \notin F$ pentru care are loc relația:

$$\Gamma(Q^m) \cap F' = \emptyset,$$

unde $F' = F \cup \{Q^m\}$. Prin urmare, mulțimea F' este intern stabilă, ceea ce vine în contradicție cu condiția că F este mulțime intern stabilă maximală a complexului $\mathcal{X}^n$.

Generalizarea funcției Grundy

Funcția Grundy, cunoscută în literatura de specialitate și ca funcția Sprague-Grundy, este folosită, în special, în teoria jocurilor pentru a găsi strategiile de câștig în jocurile combinatoriale [187]. Funcția se definește pentru jocurile cu doi jucători, în care unul dintre aceștia se declară învingător, dacă adversarul său nu mai poate executa următoarea mișcare.

Vom defini, în cele ce urmează, funcția Grundy pentru un complex de relații multi-are în scopul folosirii acesteia la soluționarea unui joc combinatorial, examinat în paragraful următor, care este o generalizare a cunoscutului joc Nim.

Considerăm complexul de relații multi-are, reprezentat ca un complex de simplexe abstracte $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ și aplicația $\Gamma : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{X}^n$, definite anterior.

Definiția 5.4.9. Aplicația univocă $g : \mathcal{X}^n \rightarrow N_0$, definită pentru orice simplex abstract m -dimensional Q^m din $\mathcal{X}^n$ prin relația

$$g(Q^m) = \min\{N_0 \setminus g(\Gamma(Q^m))\}, \quad (5.32)$$

unde $g(\Gamma(Q^m))$ reprezintă mulțimea valorilor aplicației g pentru toate simplexele din $\Gamma(Q^m)$, se numește funcție Grundy.

Funcția Grundy poate fi folosită la studierea mulțimilor intern stabile într-un complex simplicial $\mathcal{K}^n$. De exemplu, în baza definițiilor 5.4.4 și 5.4.9, ușor deducem că este adevărată afirmația: *dacă F este o mulțime de simplexe intern stabilă în $\mathcal{K}^n$, atunci, pentru oricare două simplexe abstracte $Q', Q'' \in F$, are loc egalitatea $g(Q') = g(Q'')$* . Există o dependență directă între numărul de mulțimi intern stabile din $\mathcal{K}^n$ și funcția Grundy, care poate fi exprimată prin

Teorema 5.4.7. *Numărul minim de mulțimi intern stabile într-un complex de relații multi-are $\mathcal{K}^n$ este egal cu $\gamma \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă are loc egalitatea:*

$$\max_{Q \in \mathcal{K}^n} g(Q) = \gamma - 1.$$

Demonstrație. Suficiența. Fie are loc egalitatea menționată în teoremă. Notăm prin $F(m)$ mulțimea tuturor simplexelor abstracte din $\mathcal{K}^n$ pentru care valoarea funcției Grundy este m , $0 \leq m \leq \gamma - 1$. Conform definiției 5.4.4, mulțimea $F(m)$ este intern stabilă. Prin urmare, am obținut γ mulțimi m -stabile: $F(0), F(1), \dots, F(\gamma - 1)$. Dacă în $\mathcal{K}^n$ ar exista un număr $q < \lambda$ de mulțimi intern stabile, atunci, conform celor menționate mai sus și datorită faptului că pentru toate simplexele mulțimii valoarea funcției Grundy este aceeași, rezultă că pe complexul $\mathcal{K}^n$ putem defini funcția Grundy pentru care $\max_{Q \in \mathcal{K}^n} g(Q) = q$. Aceasta vine în contradicție cu condiția enunțată în teoremă.

Necesitatea. Fie în $\mathcal{K}^n$ numărul minim de mulțimi intern stabile este $\gamma: F_1, F_2, \dots, F_\gamma$. Pentru oricare simplex $Q \in F_m$, $1 \leq m \leq \gamma$, are loc egalitatea $\Gamma(Q) \cap F_m = \emptyset$.

Definim funcția Grundy în modul următor:

a) $g(Q) = 0$ pentru orice simplex $Q \in F_1$.

b) Examinăm mulțimea F_2 . Observăm, mai întâi, că pentru orice simplex $Q' \in F_2$ are loc relația: $\Gamma(Q') \cap F_1 \neq \emptyset$. În caz contrar, simplexul Q poate fi închis în F_1 , ceea ce conduce la o reconfigurare a mulțimilor intern stabile, însă numărul lor nu va crește. Prin urmare, valoarea funcției Grundy în cazul simplexelor din F_2 poate fi declarată egală cu unu.

c) Fie am ajuns la mulțimea F_m , $2 \leq m \leq \gamma$. Din aceleași motive ca și în cazul examinării mulțimii F_1 , pentru orice simplex $Q \in F_m$ și oricare dintre mulțimile $F_1, F_2, \dots, F_{m-1}$ are loc relația $\Gamma(Q) \cap F_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq m-1$. Această situație permite a considera justă egalitatea $g(Q) = m-1$, pentru orice simplex $Q \in F_m$.

Din cele examinate referitor la mulțimile $F_1, F_2, \dots, F_\gamma$, rezultă că $\max_{Q \in \mathcal{K}^n} g(Q) = \gamma - 1$.

Joc combinatorial pe un complex de relații multi-are

Definim pe $\mathcal{X}^n$ un joc cu doi participanți A și B , care poate fi privit ca o generalizare a jocului chinezesc NIM, cunoscut prin impactul său asupra unor rezultate fundamentale în matematică. În special, acesta a jucat un rol esențial în demonstrația teoremei Sprague – Grundy, considerată drept una dintre teoremele clasice ale teoriei jocurilor și folosită la determinarea strategiei de câștig în jocurile combinatoriale. Diverse generalizări și interpretări ale jocului NIM, cu aplicații netriviiale [13], se întâlnesc în lucrările a mai multor matematicieni - Claud Berge [5], [302], Charles Bouton [185], :

Descrierea jocului:

- 1) Fie dat un complex de simplexe abstracte $\mathcal{X}^n$. În mod arbitrar, se alege un simplex m -dimensional $Q^m \in \mathcal{Q}^m$, $0 \leq m \leq n$.
- 2) Jucătorul A alege un simplex din $\Gamma(Q^m)$. Fie acesta este simplexul Q^{m_1} , $0 \leq m_1 \leq n$.
(Dacă $\Gamma(Q^m) = \emptyset$, atunci se consideră că jucătorul A a pierdut și jocul a luat sfârșit).
- 3) Jucătorul B alege un simplex $Q^{m_2} \in \Gamma(Q^{m_1})$. De asemenea, se consideră că dacă $\Gamma(Q^{m_1}) = \emptyset$, atunci jocul a luat sfârșit și jucătorul B este în pierdere.
- 4) Jucătorii continuă alegerea simplexelor noi până când lucrul acesta este posibil.
Evident, deoarece $\mathcal{X}^n$ este un complex finit, jocul va avea un sfârșit.

În jocul descris, s-ar cere de răspuns la întrebarea: în ce condiții jucătorul A va ieși învingător?

Pentru a găsi răspuns la această întrebare vom apela la rezultatele descrise anterior, ce se referă la studierea mulțimilor intern stabile, nucleului și proprietăților funcției Grundy, definite pe complexul de relații multi-are, reprezentat prin simplexe abstracte.

Definiția 5.4.10. Succesiunea de simplexe $Q^{m_0}, Q^{m_1}, \dots, Q^{m_r}$ a complexului $\mathcal{X}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$ ce posedă proprietățile:

- a) $Q^{m_{i+1}} \in \Gamma(Q^{m_i})$, $0 \leq i \leq r-1$;
- b) Q^{m_i} și $Q^{m_{i+1}}$, $0 \leq i \leq r-1$, sunt simplexe (t, q) -coerente, determinate de condițiile adiționale relațiilor (5.29) și (5.30);
- c) dacă simplexele $Q^{m_{i+1}}$ și $Q^{m_{i-j}}$, $0 \leq j \leq i-1$, sunt intersectate de către simplexul $Q^{m_{i+1}, i-j}$, atunci $Q^{m_{i+1}}$ și $Q^{m_{i-j}}$ nu aparțin lui $Q^{m_{i+1}, i-j}$,

se numește **traietorie** a complexului $\mathcal{X}^n$ și se notează prin $T(o, r)$.

În cazul traiectoriei $T(o, r) = (Q^{m_0}, Q^{m_1}, \dots, Q^{m_r})$, vom spune că aceasta leagă simplexul Q^{m_0} cu simplexul Q^{m_r} care, la rândul lor, se consideră extremități ale $T(o, r)$. Evident, traiectoria complexului depinde de aplicația Γ definită anterior pe complexul $\mathcal{K}^n$. Uneori, traiectoria construită prin intermediul aplicației Γ se va nota $T_\Gamma(o, r)$.

Vom spune că traiectoria $T(o, r)$ este o **traiectorie maximală**, determinată de relația Γ , dacă se îndeplinesc următoarele condiții:

- a) $\Gamma(Q^{m_r}) = \emptyset$;
- b) nu există simplex Q în $\mathcal{K}^n$, încât $Q^{m_0} \in \Gamma(Q)$ și șirul $Q, Q^{m_0}, Q^{m_1}, \dots, Q^{m_r}$ ar satisface condițiile definiției 5.4.10.

Traectoria $T(o, r)$ se va numi **traiectorie-contur**, determinată de aplicația Γ , dacă $Q^{m_0} = Q^{m_r}$. Traectoria contur o vom nota prin $T_C(o, r)$.

Teorema 5.4.8. *Dacă g este funcția Grundy a unui complex $\mathcal{K}^n$, determinată de aplicația $\Gamma: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$, definită prin relația (5.31), atunci mulțimea tuturor simplexelor Q din $\mathcal{K}^n$, pentru care este adevărată egalitatea $g(Q) = 0$, reprezintă nucleul complexului $\mathcal{K}^n$.*

Demonstrație. Fie M mulțimea simplexelor din $\mathcal{K}^n$ pentru care are loc egalitatea $g(Q) = 0$. Vom arăta că M posedă proprietățile:

- a) M este o mulțime intern stabilă;
- b) M este o mulțime extern stabilă,

ceea ce înseamnă, conform definiției 5.4.9, că M este nucleu.

Fie Q^m un simplex din $\mathcal{K}^n$ cu proprietatea $g(Q^m) = 0$, adică $Q^m \in M$. Alegem un simplex arbitrar $Q^{m_1} \in \Gamma(Q^m)$. În baza definiției funcției Grundy rezultă relația $g(Q^{m_1}) \neq 0$. Aceasta înseamnă că se respectă egalitatea $\Gamma(Q^m) \cap M = \emptyset$, adică M este mulțime intern stabilă.

Să demonstrăm acum că M este și extern stabilă. Alegem un simplex oarecare $Q^{m_1} \in \mathcal{K}^n \setminus M$. Deoarece M reprezintă mulțimea tuturor simplexelor din $\mathcal{K}^n$ pentru care valoarea funcției Grundy este zero, rezultă că $g(Q^{m_1}) \neq 0$. Aceasta la rândul său implică relația $\Gamma(Q^{m_1}) \cap M \neq \emptyset$. Prin urmare, M este mulțime extern stabilă.

Din cele examinate rezultă că M este nucleul complexului $\mathcal{K}^n$.

Teorema 5.4.9. *Dacă în complexul $\mathcal{K}^n$ există o traiectorie-contur $T(o, r)$, determinată de aplicația Γ definită prin relația (5.31), și pentru orice simplex Q^m al acestui complex există*

traietorie $T(0, r)$ ce leagă Q cu careva simplex din $T_c(0, r)$, atunci în jocul combinatorial definit pe acest complex, jucătorii își pot determina comportamentul astfel încât niciunul dintre ei nu va pierde.

Demonstrație. Menționăm că jocul combinatorial pornește de la simplexul Q^m luat în mod aleator. Dacă acest simplex va fi pe traiectoria-contur $T_c(0, r)$, atunci de fiecare dată jucătorii au posibilitatea de a alege simplexul lor de pe același contur, ceea ce conduce la un joc infinit.

Dacă simplexul Q^m nu aparține traiectoriei-contur $T_c(0, r)$, atunci în baza condiției din teoremă, jucătorii pot alege simplexele respective în așa mod încât vor ajunge la $T_c(0, r)$. Mai departe ei pot proceda similar cazului descris mai sus.

Teorema 5.4.10. Într-un joc combinatorial, determinat de aplicația (5.31), jucătorul A nu va pierde dacă va reuși să construiască funcția Grundy pe acest complex și să aleagă simplexul Q pentru care $g(Q) = 0$.

Demonstrație. Să admitem că pentru complexul $\mathcal{X}^n$ putem construi funcția Grundy și jucătorul A reușește să aleagă un simplex Q încât $g(Q) = 0$. Conform teoremei 5.4.8, mulțimea tuturor simplexelor cu valoarea funcției Grundy egală cu zero formează nucleul N în $\mathcal{X}^n$.

Fie $\exists Q' \in \Gamma(Q)$ și jucătorul B alege acest simplex Q' . Evident, Q' nu este din nucleul N . Următoarea mișcare este pentru jucătorul A , cu alegerea simplexului din $\Gamma(Q')$.

Dacă $\Gamma(Q') = \emptyset$, atunci valoarea funcției Grundy pentru acest simplex va fi $g(Q) = 0$, ceea ce înseamnă că Q' trebuie să fie din nucleul Q' (conform teoremei 5.4.8). Prin urmare, $\exists Q'' \in \Gamma(Q')$. Examinăm două cazuri posibile:

- $Q'' \in N$ – atunci jucătorul A revine în mulțimea N și se repetă situația precedentă;
- $Q'' \notin N$, adică $\Gamma(Q') \cap N = \emptyset$. Dacă printre simplexele din $\Gamma(Q')$ există unul cu valoarea funcției Grundy egală cu zero, atunci primim contradicție cu faptul că N este nucleu (nucleul trebuie să fie mulțime intern stabilă maximală). În caz contrar, obținem contradicție cu definirea funcției Grundy.

Din cele examinate rezultă că jucătorul A totdeauna are șansa de a reveni în mulțimea N , ceea ce îi garantează că nu el va fi cel care pierde în jocul combinatorial.

5.5. Concluzii la capitolul 5

Capitolul 5 al lucrării poartă mai mult un caracter aplicativ și conține unele rezultate ce țin de soluționarea problemelor practice, fapt ce denotă eficiența rezultatelor teoretice, prezentate în

capitolele precedente. Folosind proprietățile unui complex de relații multi-are, precum și cele ale complexului de cuburi abstracte, se generalizează rezultatele ce țin de clasificarea varietăților, descrise în lucrările [15], [19], [23], [153], [156], [177]. Apariția buclor într-un complex abstract, determinate de repetările elementelor în cortegiile ce corespund quasisimplexelor, conduce la necesitatea studierii varietății sferice degenerate de genul p . Se face o clasificare a varietăților determinate de G -complexele de relații, care permit existența buclor.

Datorită rezultatelor obținute în legătură cu examinarea complexelor de cuburi abstracte la nivelul construirii omologiilor respective, s-a reușit avansarea în soluționarea problemei medianei unui complex de cuburi, cunoscute din anii 60-70 ai secolului trecut [60] și rezolvate atunci doar pentru cazul complexului 2-dimensional. În rezultatul elaborării teoriei respective, în acest capitol al tezei se propune un algoritm de calculare a medianei fără utilizarea metricii.

Generalizând noțiunea de coerență pentru un quasisimplex $Q_j^m \in \mathcal{Q}^m$ și fațeta acestuia $Q_{J_t}^{m-t} \in \mathcal{Q}^{m-t}$, în cazul $t \geq 2$, numită t -coerență, și pentru două simplexe arbitrare Q^{m_1} și Q^{m_2} cu proprietatea $Q^{m_1} \cap Q^{m_2} \neq \emptyset$, numită (t, q) -coerență, a fost definită noțiunea de nucleu al complexului $\mathcal{K}^n = (\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^n)$, importantă pentru examinarea unui joc combinatorial între doi jucători A și B , descrisă în paragraful 5.4. Pentru determinarea strategiilor de comportare a jucătorilor în acest complex, se introduce o funcție, folosită la construirea nucleului, numită funcție Grundy.

Printre rezultatele importante ale capitolului 5 pot fi menționate:

- a fost obținută clasificarea varietăților abstracte cu ajutorul grupurilor de omologii ale complexului de relații multi-are;
- au fost determinate condițiile necesare și suficiente pentru ca un vârf al unui complex omogen de cuburi abstracte să fie mediană;
- a fost elaborat algoritmul de calcul a medianei într-un complex de cuburi abstracte;
- a fost definită funcția Grundy pe un complex de relații multi-are, chestiune importantă pentru determinarea nucleului complexului care joacă, la rândul său, un rol decisiv la soluționarea unor jocuri pe structuri discrete;
- au fost determinate strategiile de comportare a adversarilor într-un joc combinatorial definit pe complexul de relații multi-are.

Ținând cont de rezultatele obținute în capitolul 5, deducem următoarele concluzii:

1. Folosind complexul generalizat de relații multi-are în calitate de structură matematică ce determină o varietate degenerată abstractă orientabilă, fără borduri și conexă forte, au fost

determinate condițiile în care aceasta reprezintă o varietate sferică. Acest rezultat a fost folosit ulterior pentru obținerea clasificării varietăților abstracte degenerate, reprezentate printr-un șir de varietăți cu $p \geq 0$ găuri, obținute în mod constructiv.

2. Folosind proprietățile varietăților determinate de un complex de cuburi abstracte, au fost obținute proprietăți importante cu referire la frontiera complexului omogen de cuburi n -dimensionale care, la rândul său, este o varietate $(n-1)$ -dimensională. În baza proprietăților respective au fost determinate condițiile, respectarea cărora asigură calcularea medianei unui complex cubic și această mediană aparține complexului respectiv;
3. Rezultatele teoretice obținute la studierea complexelor de cuburi abstracte și a varietăților determinate de aceste complexe, au fost folosite la elaborarea unui algoritm eficient de calculare a medianei care nu depinde de metrica spațiului respectiv. Algoritmul respectiv a fost generalizat pentru cazul unui sistem arbitrar de ponderi ale vîrfurilor complexului de cuburi abstracte și nu depinde de lungimile muchiilor ce formează o clasă de muchii paralele din complex;
4. Generalizând funcția Grundy pentru complexul de relații multi-are, folosită anterior de către C.Berge pentru grafurile neorientate, a fost demonstrat că câștigul într-un joc combinatorial depinde de posibilitatea construirii acestei funcții și determinării cu ajutorul ei a nucleului complexului de relații multi-are.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Studiul realizat în prezenta lucrare conduce la următoarele concluzii și recomandări.

Concluzii generale asupra rezultatelor obținute. Problemele examinate în teza de doctor habilitat "*Complexul generalizat de relații multi-are și aspectele aplicative ale acestuia*" fac parte de direcția de cercetare din matematică ce ține de elaborarea modelelor și metodelor corespunzătoare pentru soluționarea problemelor teoretico-aplicative din diverse domenii ale activității umane: economie, tehnică sociologie, fizică, chimie, informatică etc. Rezultatele teoretice obținute în legătură cu studierea complexului de relații, precum și aplicații acestuia la studierea unor probleme de ordin aplicativ, conduc la următoarele concluzii:

1. A fost creată o direcție nouă de cercetare ce constă în fundamentarea teoriei complexelor de relații multi-are, prin care se generalizează mai multe structuri discrete clasice cunoscute ca grafuri, hipergrafuri, matroizi, complexe de simplexe, ceea ce a contribuit la elaborarea modelelor și metodelor eficiente în vederea aplicării acestora la soluționarea problemelor de optimizare discretă.
2. A fost elaborată o nouă structură matematică discretă determinată de o familie de relații multi-are pentru modelarea proceselor cu acțiune discretă, care a condus la obținerea metodelor eficiente pentru utilizarea ulterioară a acestora la soluționarea problemei de calculare a medianei ponderate, fără a folosi metrica spațiului, a problemei de comportament a jucătorilor într-un joc combinatorial etc.
3. Au fost studiate proprietăți importante ale complexului de relații multi-are cu ajutorul grupurilor de omologii și coomologii ale acestuia. Rezultatele respective au demonstrat eficiența folosirii metodelor de studiu ale topologiei algebrice pentru examinarea structurilor discrete. Această situație a permis efectuarea cercetărilor la un nivel calitativ nou pentru astfel de structuri. Grupurile de omologii construite reprezintă un instrument eficient, folosit la determinarea structurii complexului de cuburi, pentru care problema medianei se rezolvă în mod eficient fără a apela la metrica spațiului respectiv;
4. Folosirea rangurilor grupurilor de omologii ale complexului de relații multi-are a permis deducerea unei formule eficiente de calcul a numărului cicromatic, chestiune importantă pentru stabilirea proprietăților combinatoriale ale unui astfel de complex, necesare la soluționarea problemelor applicative. Calcularea numerelor ciclomatice se face printr-o formulă recurentă, folosind rangurile grupurilor de omologii ale complexului;
5. Pentru complexul de relații multi-are a fost demonstrat analogul teoremei Poincare-Veblen-Alexander (teorema 2.8.1), cunoscută în legătură cu examinarea conturilor unui graf

orientat. Rezultatul respectiv reprezintă un instrument eficient care a fost folosit pentru studierea ciclurilor m -dimensionale și construirea matricei ciclomatice ale complexului de relații multi-are;

6. Prin extinderea noțiunii de lanț m -dimensional și introducerea noțiunii de (k,m) -convexitate, în cadrul teoriei complexelor de relații multi-are a fost conturată o direcție nouă de cercetare – *convexitatea în complexul de relații multi-are*, legată de studierea proprietăților mulțimilor (k,m) -convexe cu aplicarea ulterioară acestora la soluționarea problemelor cu caracter teoretico-aplicativ;
7. Rezultatele obținute în legătură cu studierea grafurilor d -convex simple servesc drept imbold pentru extinderea cercetărilor, în scopul caracterizării complexelor cu o familie prescrisă de mulțimi (k,m) -convexe.
8. Prin complexul de cuburi abstracte a fost studiat un caz special al complexului de relații multi-are, important pentru soluționarea problemelor practice, ceea ce generează o direcție aparte de cercetare prin aplicarea metodelor topologiei algebrice;
9. A fost dedusă formula Euler-Poincare pentru un complex de cuburi abstracte. Formula respectivă a servit drept instrument eficient pentru examinarea proprietăților varietăților, determinate de un astfel de complex, și clasificarea ulterioară a acestora.
10. Folosind complexul generalizat de relații multi-are în calitate de structură matematică ce determină o varietate degenerată abstractă orientabilă, fără borduri și conexă forte, au fost determinate condițiile în care aceasta reprezintă o varietate sferică. Acest rezultat a fost folosit ulterior pentru obținerea clasificării varietăților abstracte degenerate, reprezentate printr-un șir de varietăți cu $p \geq 0$ găuri, obținute în mod constructiv.
11. Folosind proprietățile varietăților determinate de un complex de cuburi abstracte, au fost obținute proprietăți importante cu referire la frontiera complexului omogen de cuburi n -dimensionale care, la rândul său, este o varietate $(n-1)$ -dimensională. În baza proprietăților respective au fost determinate condițiile, respectarea cărora asigură calcularea medianei unui complex cubic și această mediană aparține complexului respectiv;
12. Rezultatele teoretice obținute la studierea complexelor de cuburi abstracte și a varietăților determinate de aceste complexe, au fost folosite la elaborarea unui algoritm eficient de calculare a medianei care nu depinde de metrica spațiului respectiv. Algoritmul respectiv a fost generalizat pentru cazul unui sistem arbitrar de ponderi ale vîrfurilor complexului de cuburi abstracte și nu depinde de lungimile muchiilor ce formează o clasă de muchii paralele din complex;

Recomandări. Ținem să menționăm că rezultatele prezentate în teză servesc drept imbold pentru efectuarea cercetărilor ulterioare, legate de studierea obiectului definit ca complex de relații multi-are. În viziunea autorului prezintă interes, pentru examinările ulterioare, unele aspecte legate de dezvoltarea teoretico-aplicativă a direcției propuse de cercetare:

1. de examinat, în ce mod se modifică teoria elaborată în teză în cazul unui complex infinit de relații multi-are;
2. de studiat complexul de cuburi abstracte prin introducerea unei operații speciale de triangulare generalizată a cuburilor. Ce s-ar întâmpla în acest caz cu grupurile de omologii ale complexului?;
3. de definit o convexitate generală pe complexul de relații multi-are și de stabilit legătura acesteia cu convexitățile definite în fiecare dintre spațiile metrice (R^k, d_k^m) ;
4. de verificat, în ce măsură se respectă rezultatele obținute la studierea complexului de cuburi abstracte în cazul unor alte tipuri de complexe, de exemplu, în cazul unui complex de poliedre abstracte.

BIBLIOGRAFIE

1. Katsuro Sakai. *Geometric Aspects of General Topology*. Springer, 2013. 533p.
2. Dieter J.. *Graphs, Networks and Algorithms*. Springer, 2013. 675p.
3. Alain B. *Hypergraph Theory. An Introduction*. Springer, 2013. 119p.
4. Bause H.J. *Combinatorial foundation of homology and homotopy*. Berlin: Springer, 1998.
5. Berge C. *Graphs and hypergraphs*. New-York: Elsevier, 1973.
6. Berge G. *Hypergraphs: combinatorics of finite sets*. North-Holland, Amsterdam, 1989. 267p.
7. *Discrete and Topological Models in Molecular Biology*. (eds. Jonoska N.) Springer, 2014.
8. Björner A. *Topological methods*. In Handbook of Combinatorics. (eds. R.Grahfm, M.Grotschel, L.Lovasz), North Holland, Amsterdam, 1995, p. 1819-1872.
9. Björner A. and Ziegler G.M. *Introduction to Greedoids in Matroid applications* (ed. N.White). London: Cambridge Univ. Press., 1992, p. 284-357.
10. Björner A., Las Vergnas M., Sturmfels B., White N. and Ziegler G.M. *Oriented Matroids*, vol. **46** of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge Univ. Press., 1993.
11. Bollobas B. *On generalized graphs*. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 16, 1965, p. 447-452.
12. Bollobas B. *Modern Graph Theory*. USA, MN, 1998.
13. *Game theory and business applications*. (eds. Kalyan Ch. and William S.). New York: Springer, 2014. 409p.
14. Boltyanski V., Martini H., Soltan P. *Excursions into Combinatorial Geometry*. Berlin: Springer, 1997.
15. Bujac M. *Clasificarea varietăților abstracte orientabile multidimensionale fără borduri*. Analele Științifice ale USM. Seria „Științe fizico-matematice”. Chișinău, 2003, p.247-250.
16. Alina Ene, Huy L. Nguyen. *From Graph to Hypergraph Multiway Partition: Is the Single Threshold the Only Route?* 22th Annual Eur. Symp., Wroclaw, September 8-10, 2014. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science Vol. 8737, 2014, p.382-393.
17. Cataranciuc S. *G-complex de relații multi-are*. Analele științifice ale USM. Seria „Științe fizico-matematice”. Chișinău, 2006, p. 119-122.
18. Cataranciuc S., Soltan P. *Hipergrafuri și omologiile lor*. International Conference „Trends in the Development of the Information and Communication Technology in Education and Management”. March 20-21, 2003. Chișinău, p. 294-300.
19. Cataranciuc S., Bujac M., Soltan P. *On the Division in Cubes of Abstract Manifolds*. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Seria Matematica, nr. 2(51). Chișinău, 2006, p. 29-34.

20. Cataranciuc S., Scripnic M., Soltan P. *About the median does not depend on the space metric*. The 30-th Annual Congres of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA), Proceedings. Chişinău, July 5-10, 2005, p. 58-61.
21. Cataranciuc S., Scripnic M., Soltan P. *A metric space with independent median*. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol.3. Cluj-Napoca, 2005, p. 3-12.
22. Cataranciuc S. *The complex of parallelepipeds and the 3-dimensional tree*. The 33-rd Annual Congres of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA), Proceedings, Sibiu, Romania, July 02-07, 2009, vol. **II**, p. 293-296.
23. Bujac M., Cataranciuc S., Soltan P. *On the proprieties of Multidimensional Torus*. The XIV Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60th anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University. CAIM – 2006. Chişinău, August 25-27, 2006, p. 66-70.
24. Dewdney A.K. *Degree sequences in complexes and hypergraphs*. Proc. Am. Math. Soc., 53, 1975, p. 535-540.
25. *Chemical applications of topology and graph theory*, edited by R.B.King. Elsevier, 1983.
26. Dodson C.T.I., Lok R. *Hypergraphs, homotopy and neighbourhood homology*. Ars. Com., 16-A, 1983, p. 107-130.
27. Dowker C.H. *Homology groups of relations*. Annals of mathematics, vol. **56**, no. 1, 1952, p. 84-95.
28. Erdos P. *On extremal problems on graphs and generalized graphs*. Israel J. Math., 2, 1964, p. 183-190.
29. Fritsch R., Fritsch G., Peschke E. *The four-color theorem*. Berlin: Springer. 1998.
30. ГАНТМАХЕР Ф.П. *Теория матриц*. Москва: Наука, 1967, 575 с.
31. Ghouila-Houri A. *Caracterisation des matrices totalement unimodulaires*. C. R. Acad. Sci. (Paris) 254, (1962), p. 1192-1194.
32. Hilton P.I., Wylie S. *Homology Theory: An introduction to Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1960.
33. Hoffman A.J., Kruskal J.B. *Integral boundary points of convex polyhedra*. Ann. of Math. Studies, 28, Princeton: Princeton Univ. Press, 1956, p. 223-246.
34. Hall M.. *Combinatorial Theory*. Second edition. John Wiley & Sons, 1998. 464p.
35. Hurewicz W., Wallman H. *Dimension Theory*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.
36. James R. Munkres. *Topological Results in Combinatorics*. Michigan math. J., 3, 1984, p. 113-128.

37. Kenmoshi Yukiko, Atsushi Ismiya, Ichikawa Akira. *Discrete combinatorial geometry*. Pattern Recognition, vol. **30**, 1997, no. 10, p. 1719-1728.
38. Kleene St. C. *Mathematical Logic*. New York: Wilez, 1967.
39. Knaster B., Kuratowski K., Mazurakiewicz S. *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Simplexe*. Fundam. Math. 14 (1929), pp. 132-137.
40. Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*. Москва, Наука, 1968. 431с.
41. Курош А.Г. *Лекции по общей алгебре*. Москва, Наука, 1973. 400с.
42. Lang S. *Algebra*. Revised third edition, New York: Springer, 2002.
43. Lovasz L. *On chromatic number of finite sets – system*. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 19: 1-2 (1968), p. 59-67.
44. Martini H., Soltan P. *On the Homologies of Multy-ary Relation*. JCMCC, 45 (2003), p.216-243.
45. Melnicov O., Tyshkevich R., Yemelichev V., Sarvanov V. *Lectures on graph theory*. Manheim, BT-Wiss-Vell, 1994.
46. Meyer J.C. *Quelques probleme concernant les cliques des hypergraphes h -complets et q -parti h -complets*. Hypergraph seminar (Berge, Ray-Chaudhuri, eds.). Lecture Notes in Math. 411, Springer-Verlag, 1974, p. 127-139 and p. 285-286.
47. Moisil Grigore. *Lecții despre logica raționamentului nuanțat*. București: Editura Științifică și Enciclopedică, 1975. 160 p.
48. Naik R.N., Rao S.B., Shrikhande S.S., Singhi N.W. *Interssection graphs on k -uniform linear hypergraphs*. Eur. J. Comb., 3, 1982, p. 159-172.
49. Oliver R. *Fixed-point sets of group actionson on finite aciclic complexes*. Comment. Math. Helvetici, 50, Birkhauser Verlag, Basel, 1975, p. 155-177.
50. Padberg M.W. *Total unimodularity and the Euler subgraph problem*. Operations Research Letters, 7, 1988, p. 173-179.
51. Poincare H. *Complement a l'analysis situs*. Rend. Circ. Palermo, 13, 1989, p. 285-343.
52. Понтрягин Л. С. *Основы комбинаторной топологии*. Москва, 1986. 120с.
53. Ringel Gerhard. *Map Color Theorem*. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1974.
54. Рышков С.С. *О комбинаторной топологии в гильбертовом про-странстве*. Успехи Математических Наук, 1958, том 13, выпуск 4(82), с.216-217.
55. Рышков С.С. *Инвариантность бесконечномерных групп гомологии*. Труды III Всесоюзного математического съезда. т.IV. Москва, 1958.
56. Rotman J.J. *An introduction to algebraic topology*. New-York: Springer-Verlag, 1998.
57. Saunders MacLane. *Homology*. Berlin: Springer, 1963.

58. Soltan P. *On the Homologies of Multy-ary relations and Oriented Hipergraphs*. Studii în metode de analiză numerică și optimizare, vol. 2, nr. 1(3). Chișinău, 2000, p. 60-81.
59. Soltan P. *Prelegeri selectate din teoria grafurilor*. Chișinău: USM, 2001.
60. Солтан П.С., Замбицкий Д.К., Присакару К.Ф. Экстремальные задачи на графах и алгоритмах и алгоритмы их решения. Кишинев, Штиинца, 1973. 87 с.
61. Spanier E.H. *Algebraic Topology*. Berlin: Springer 1966. 205p.
62. Teleman C. *Elemente de topologie și varietăți diferențiabile*. București: Editura Didactică și Pedagogică, 1964. 290p.
63. *Математическая Энциклопедия*. т.1, 1977.
64. *Математическая Энциклопедия*. т.3, 1982.
65. Tomescu I. *Sur le problème du colorage des graphes généralisés*. C. R. Acad. Sci. (Paris) 267: 6 (1968), p. 250-252.
66. Tutte W.T. *Lectures on matroids*. J. Research Nat. Bureau of Standards B69: 1-2, (1965), p. 1-48.
67. Tuza Z. *Critical hypergraphs and intersecting set-pair system*. J. Comb. Theory, B, 39, 1985, p. 134-145.
68. Veblen O., Alexander J.W. *Manifolds of n-dimensions*. Ann. of Math., (2)14, 1913, p.163-178.
69. Voloshin V.L. *On the upper chromatic nurnber of a hypergraph*. Australian Journal of Combinatorics, 11 (1995), p. 25-45.
70. Wylie S. *Algebraic Geometry and Topology*, Lefschetz symposium, p. 389-399.
71. Зыков А.А. *Гиперграфы*. Успехи математических наук. Т.29, № 6(180), Москва, 1974, с. 89-154.
72. Cantor Georg. *Über eine Eigenschaft des Inbergriffes aller reelen algebraischen Zahlen*. Journal fur die Reine and Angrewandte Mathematik, 77(1874), p.258-262.
73. Bertrand Russell. *The Principles of Mathematics*. 1903 (online text: fair-use.org/Bertrand-russell/the-principles-of-mathematics/).
74. Whitehead Alfred North & Bertrand Russell. *Principia Mathematica*. 3 vols, Cambridge: Cambridge University Press, 1910, 1912 and 1913.
75. Bourbaki N. *Theorie des ensembles*. Paris: Hermann, 1954.
76. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. Москва, Наука, 1981, 344с.
77. Heller I., Tompkins C.B. Gh. *An Extension of a Theorem of Dantzig's*; Kuhn H.W., Tucker A.W. *Linear Inequalities and Realated Systems*. Annals of Mathematics Studies 38, Princeton (NJ): Princeton University Press, 1956, p.247-254.

78. Cataranciuc S., Niculiță A. *Aspecte algoritmice ale teoremei grafurilor*. Partea I. Chișinău: CEP USM, 2006. 144p.
79. Еременко Ю.И., Глущенко А.И. *Автоматизация решения задачи учета преимущества дисциплин при составлении учебных планов*. ИБР, no.4, 2008, p.64-67.
80. Harary Frank. *Graph Theory*. Addison-Wesley Pub. Co., 1969. 274p.
81. Cataranciuc S., Holban M. The Pico's formula generalization. *Computer Science Journal of Moldova*, vol.15, no.1(43), 2007, p.54–73.
82. Teodor Toadere. *Grafe: teorie, algoritmi și aplicații* Cluj-Napoca: Editura Albastră, 2009. 197p.
83. Ray-Chaudhury D.K. *An algorithm for a maximum cover of an abstract complex*. *Canad. J. Math.*, 15:1, 1963, p. 11-24.
84. Erdős P., Gallai T. *On the minimal number of vertices representing the edges of a graph*. *Publ. Math. Instit. Hungar. Acad. Sci.*, 6(1961), p. 181-203.
85. Erdős P., Hajnal A. *On chromatic number of graphs and set-systems*. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 17:1-2, 1966, p. 61-99.
86. Kariv O., Hakimi S. *An algorithmic approach to network Location Problems. The p-medians*. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37-3 (1979), p. 513-538.
87. Герман Л.Ф., Зыков А.А., Замбицкий Д.К., Присакару К.Ф., Лазовану Д.Д. *Графы, гиперграфы и дискретные оптимизационные задачи*. Кишинев: Штиинца, 1982. 199с.
88. Gale D. *A theorem on flows in networks*. *Pacific J. Math.*, vol. 7, 1957, no. 2, p. 1073-1082.
89. Ryser H.J. *Combinatorial properties of matrices of zeros and ones*. *Canad. J. Math.*, 9, 1957, p. 371-377.
90. Lovasz L. *Graphs and set systems*. *Beiträge zur Graphentheorie*, Teubner, 1968, p. 99-106.
91. Roberts F., Tesman B. *Applied combinatorics (2nd ed.)*. Chapman and Hall/CRC, 2009, 848p.
92. Oxley James J. *Matroid theory*. Oxford graduate texts in mathematics. Oxford University Press, 2006.
93. Maghout Kh. *Sur la determination des des nombres de stabilite et du nombre chromatic d'un graph*, *C.R.Acad.Sci. Paris*, 248:25(1959), p. 3522-3523.
94. Whitney Hassler. *On the abstract properties of linear dependence*. *American Journal of Mathematics (The Johns Hopkins University Press)* 57 (3): 509-533, 1935, p. 55-79.
95. Mac Lane S. *Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry*. *American Journal of Mathematics (The Johns Hopkins University Press)* 58 (1): 236–240, 1936.
96. Van der Waerden B. L. *Moderne Algebra*, 1937.

97. Tutte W.T. *Matroids and graphs*. Transactions of the American Mathematical Society (Amer. Math. Society) 90 (3): 527–552, 1959.
98. Tutte W.T. *Lectures on matroids*. Journal of Research of the National Bureau of Standards (U.S.A.), Sect. B 69: 1–47, 1965.
99. Tutte W.T. *Introduction to the theory of matroids*. Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics 37. New York: American Elsevier Publishing Company, 1937.
100. Tutte W.T. *A homotopy theorem for matroids. I*. Transactions of the American Mathematical Society 88: 144–160, 1958.
101. Tutte W.T. *A homotopy theorem for matroids. II*. Transactions of the American Mathematical Society 88: 161–174, 1958.
102. Crapo Henry H. *The Tutte polynomial*. Aequationes Mathematicae vol.3, nr.3, 1969, p.211-229.
103. Brylawski Thomas H. *A decomposition for combinatorial geometries*. Transactions of the American Mathematical Society (American Mathematical Society), vol.171,1972, p.235-282.
104. Seymour Paul D. *Decomposition of regular matroids*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 28 (3), 1980, p.305-359.
105. Welsh D.J.A. *Matroid Theory*. L.M.S. Monographs 8, Academic Press, 1976.
106. Welsh D.J.A. *Matroid Theory*. Dover Publications, 2010. 433p.
107. Wilson R.J. *An introduction to matroid theory*. The American Mathematical Monthly, vol.80, no.5 (May, 1973), p.500-525.
108. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. *Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы*. СПб.:Издательство "Лань", 2010. 368с.
109. Пак И.М., Постников А.Е. *Трансверсальные матроиды и страты на грассманиане*. Функциональный анализ и его приложения, 29:2, 1995, с.84-88.
110. Hall Philip. *On representatives of subsets*. J. London Math. Soc., no. 10(1), 1935, p.26-30.
111. Солтан В.П. *Введение в аксиоматическую теорию выпуклости*. 1984. Кишинев: штиинца. 222с.
112. Kozlov Dimitry. *Combinatorial Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 2008. 389p.
113. Александров П.С., Пасынков Б.А. *Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности*. Москва: Наука, 1973. 577с.
114. Hamdy A. Taha. *Operations Research: An Introduction*. Prentice Hall, 2010. 838 p.

115. Савельев И.В. *Симплициальные комплексы и линейчатые многообразия*. Мат. заметки, 1991, том 50, выпуск 1, с. 92–97.
116. Christofides Nicos. *GRAPH THEORY: An Algorithmic Approach*. Academic Press, Incorporated, 1975 - Algorithms. 400 p.
117. Bujac M. *The Multidimensional Directed Euler Tour of Cubic Manifold*, Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Seria Matematica, nr. 1(50). Chișinău, 2006, p. 15-22.
118. König Dénes. *Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére*. Matematikai és Természettudományi Értesítő, 1916, 34, p. 104-119.
119. Lovász László. *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*. Discrete Math., 1972, 2(3), p.253-267.
120. Bondy J.A. Murty U.S.R. *Graph Theory with Applications*. North Holland, New-York, 1976. 74 p.
121. Faridi Sara. *The facet ideal of a simplicial complex*. Manuscripta Math. 109 (2002), p. 159–174.
122. Faridi Sara. *Simplicial trees are sequentially Cohen-Macaulay*. Journal of Pure and Applied Algebra 190 (2003), p.121-136.
123. Cataranciuc S., Niculiță A., Novac L. *Aspecte algoritmice ale teoriei grafurilor*. Partea II. Chișinău: CEP USM, 2012. 174 p.
124. Ushakov A., Myasnikov A., Shpilrain V. *Non-commutative Cryptography and Complexity of Group-theoretic Problems*. Amer. Math. Soc., 2011. 385p.
125. Cooper L. *Location-allocation problems*. Operations Research, 11(1963), p. 331-344.
126. Blahut Richard E. *Theory and practice of error control codes*. Addison-Wesley Pub. Co., 1983. 500p.
127. Hamming Richard W. *Digital Filters*. Prentice Hall, 1977. 226p.
128. Pilcher C.D., Wong J.K., Pillai S.K. *Inferring HIV transmission dynamics from phylogenetic sequence relationships*. 2008, doi:10.1371/journal.pmed.0050069
129. Cataranciuc S., Soltan P. *Complex of abstract cubes and median problem*. Computer Science Journal of Moldova, vol.19, no.1(55), 2011, p. 38-63.
130. Cataranciuc S., Soltan P. *Abstract complexes, their homologies and applications*. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Seria Matematica. Chișinău, 2010, nr. 2(63), p. 31-58.
131. Катаранчук С. *d-Выпукло простые планарные графы*. Исследования по численным методам и теорет. Кибернетике. Кишинев: Штиинца, 1985, с. 68-75.

132. Катаранчук С. *d-Выпукло простые двудольные графы*. Исследования по общей алгебре, геометрии и их приложения. Кишинев: Штиинца, 1986, с. 92-96.
133. Катаранчук С. *Строение и изоморфизм d-выпукло простых графов*. Оптимизация и обработка данных. Кишинев: Штиинца, 1987, с. 64-68.
134. Катаранчук С., Солтан В. *d- выпукло простые и d-выпукло квазипростые планарные графы*. Деп. в МолдНИИНТИ, № 2022. Кишинев, 1988. 23 с.
135. Катаранчук С. *О свойствах вершин d-выпукло квазипростого планарного графа*. Деп. в МолдНИИНТИ, № 2023. Кишинев, 1988. 23 с.
136. Катаранчук С. *Об одном классе планарных d- выпукло квазипростых графов*. Деп. в МолдНИИНТИ, № 2024. Кишинев, 1988. 17 с.
137. Катаранчук С. *Вершинная разборка d-выпукло квазипростых планарных графов*. Деп. в МолдНИИНТИ, № 2020. Кишинев, 1988. 20 с.
138. Катаранчук С. *d- выпуклые множества графов*. Исследования по прикл. матем. и информ. Кишинев: Штиинца, 1990, с. 102-108.
139. Катаранчук С., Чепой В. *Классы d-выпукло простых графов*, Исследования по прикл. матем. и информ. Кишинев: Штиинца, 1990, с. 97-102.
140. Катаранчук С. *О выпуклой простоте графов*. Автореферат на соискание учёной степени доктора физ-мат. наук. Минск, 1990. 14 с.
141. Cataranciuc S., Soltan P., Gherman L., Cepoi V. *Convexitatea generalizată și aplicațiile ei*. Lucrările conferinței pregătitoare pentru Congresul matematicienilor români de pretutindeni. București, 23-25 noiembrie, 1990, p.145-154.
142. Cataranciuc S., Soltan P. *A simple games of a complex of multiary relations*. Analele Facultății de Matematică și Informatică, vol. 3, nr.1(1). Chișinău, 2001, p.59-76.
143. Cataranciuc S. *Modelul matematic al problemei de determinare a mulțimii stabile interior maxime*. Analele Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea de Stat din Moldova, vol. 5. Chișinău, 2003, p.69-75.
144. Cataranciuc S., Soltan P. *About the automorfism of cellular complex and it fixed element*. Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chișinău, August 17-19, 2004, p.87-90.
145. Cataranciuc S., Vicol N. *Ciclotomic numbers of a class of complex of multi-ary relation*. Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chișinău, August 17-19, 2004, p.316-319.

146. Cataranciuc S., Vicol N. *The general complex of multi-ary relations*. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 2. Cluj-Napoca, 2004, p. 107-118.
147. Cataranciuc S., Sur N. *Involving d -convex simple and quasi-simple planar graphs in R^3* . Computer Science Journal of Moldova, vol.13, no. 2(38), 2005, p. 151-167.
148. Cataranciuc S., Prisacaru Ch. *Cercetări în domeniul topologiei combinatorice, mulțimilor convexe, teoriei grafurilor, hipergrafurilor și aplicațiilor acestora*. Elemente de istorie a matematicii și matematica în Republica Moldova (coordonator: M. Ciobanu, I. Valuță). Chișinău, 2006, p. 327-345.
149. Cataranciuc S. *About connectivity of general complexes of multi-ary relations*. The XIVth Conference on Applied and Industrial Mathematics. (Satelite Conference of ICM 2006). Chișinău, August 17-19, 2006, p. 94-95.
150. Cataranciuc S., Hâncu B., Soltan P. *Realizări în studierea structurilor matematice moderne*. Analele științifice ale Universității de Stat din Moldova. Seria „Științe reale”. Lucrări de sinteză. Chișinău, 2006, p. 214-228.
151. Cataranciuc S. *An algorithm for determination of the median independent on the metric of the space*. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol.4. Cluj-Napoca, 2006, p. 13-22.
152. Cataranciuc S., Zgureanu A. *Matricele de relații multi-are și numerele prime în criptarea informației*. Studia Universitatis. Seria: Științe exacte și economice, 2012, nr.7(57), p.12-16.
153. Cataranciuc S., Bujac M., Soltan P. *The Problem of Existence of the n -Dimensional Directed Euler Tour of Cubic Manifold with Pozitiv Genus*. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 5. Cluj-Napoca, 2007, p. 55-58.
154. Cataranciuc S. *The stables sets of a G – complex of multi-ary relations and its applications*. KEPT-2007. Knowledge engineering: Principles and techniques, vol. I. Cluj-Napoca: Babeș-Bolyai University, 2007, p. 269-273.
155. Cataranciuc S. *Metrica complexului cubic abstract*. Modelare mat-că, optim-re și tehnologii inf-le. Materialele conferinței int-le. Chișinău, 19-21 martie 2008, p. 205-210.
156. Cataranciuc S., Bujac-Leisz M., Soltan P. *The Euler tour of n -dimensional manifold with positive genus*. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, 2008, nr. 2(57), p.110-113.
157. Cataranciuc S., Sur N. *About directed d -convex simple graphs*. Computer Science Journal of Moldova, vol.16, no.3(48), 2008, p. 323-346.

158. Cataranciuc S., Soltan P. *The generalized complex of multi-ary relations and its homology*. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximations and Convexity, vol. **6**. Cluj-Napoca, 2008, p. 17-44.
159. Cataranciuc S. *The abstract complex of multidimensional relations*. Sevent Workshop on Mathematical Modeling of Environmental and Life Sciences Problems. Constantza, 22-25 october 2008, p.11-12.
160. Cataranciuc S. *Structuri matematice și rolul acestora în soluționarea problemelor practice*. Conf. șt-că „Interferențe universitare – integrare prin cercetare și inovare”. Chișinău, 25-26 septembrie, 2012. <http://usm.md/wp-content/uploads/2012/09/Textul-comunicarii3.pdf>
161. Cataranciuc S., Soltan P. *The median of the n-dimensioanal abstract tree*. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximations and Convexity, vol.7. Cluj-Napoca, 2009, p. 33-46.
162. Cataranciuc S. *A median of the abstract homogeneous cubical complexe*. Mathematics and Informatic Technologies: Research and Education (MITRE 2009). Chișinău, 2009, p.38-39.
163. Cataranciuc S., Soltan P. *The generalized complex of multi-ary relations and its application aspects*. International Scientific Conference «Дискретная математика, алгебра и их приложения». 19-22 oct., 2009, Minsk, Belorusia, p.162-163.
164. Cataranciuc S., Sur N. *Grafuri d-convex simple și quasisimple*. Monografie. Chișinău: CEP USM, 2009. 201p.
165. Cataranciuc S. *Location problem for a complex of abstract n-polytops*. The 21st Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM - 2013, Bucharest, September 19-22, 2013. Book of abstracts, p.79.
166. Cataranciuc S. *Median's calculation of the complex of abstract cubes*. The 18th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM – 2010. Iași, October 14-17, 2010, p.22-23.
167. Cataranciuc S., Zgureanu A. *Encryption Systems Based on Multidimensional Matrixes*. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximations and Convexity, vol. **8**. Cluj-Napoca, România, 2010, p.3-14.
168. Cataranciuc S. *n-Dimensional Homogeneous Tree on Abstract A-normal Cubes*. Actual problems of mathematics and informatics. Scientific Conference dedicated to the 80-th anniversary of the foundation of the Tiraspol State University, 24-25 sept., 2010, p.68-69.
169. Cataranciuc S. *The cubical abstract tree and its median*. Mathematical modelling of invironmental and life sciences problems. București: Ed. Acad. Române, 2010, p.157-166.
170. Cataranciuc S. *Transversale într-un complex de cuburi abstracte*. Studia Universitatis. Seria: Științe exacte și economice. 2011, nr.2(42), p. 34-43.

171. Cataranciuc S. *Homogeneous complex of n-dimensional abstract cubes and Grundy function*. Mathematics & Information Technologies: Research and Education, International Conference MITRE-2011. Chişinău, 2011, august 22-25, p. 28-29.
172. Cataranciuc S. *Задача Вебера для n-мерного кубического комплекса со взвешенными вершинами*. Proceedings of the International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies. Minsk, Oct.'31 – Nov.'3, 2011, vol. 2, p. 288 - 291.
173. Avella P., Sassano A., Vasil'ev I. *Computational study of large-scale p-median problems*. Math. Program., Ser. A 109, 2007, p. 89-114.
174. Cataranciuc S. *Convexitatea simplă a grafurilor orientate*. Conferința Internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”. Ediția III. Chişinău, 19-23 martie, 2012, p. 9-19.
175. Cataranciuc S. *Coloring of the Simplicial Complex and the Grundy Function*. The 14-th International Conference of Scientific Papers „Scientific Research and Education in the Air Force”. PROCEEDINGS. Braşov, România, May 24-26, 2012, p. 515-519.
176. Cataranciuc S. *Optimal strategy in a simple game on a simplicial complex*. The 13th International Conference on Mathematics and its Applications - ICMA 2012, Abstracts, November 1-3, 2012, „Politehnica” University of Timișoara, p. 17.
177. Cataranciuc S. *Varietăți abstracte multidimensionale degenerate*. Studia Universitatis. Seria: Științe exacte și economice. 2013, nr.2(62), p. 10-22.
178. Cataranciuc S. *The median calculation for a EBP-graph*. Int. conf. „Discrete mathematics, graph theory and their applications (DIMA-2013)”. Minsk, Belorusia, november 11-14, 2013, p.44-45.
179. Cataranciuc S. *Convexity in a complex of abstract cubes*. Mathematics & Information Technologies: Research and Education, International Conference MITRE-2013. Chişinău, 2013, august 28-22, p. 26-27.
180. Cataranciuc S. *Median calculation for heterogenous complex of abstract cubes*. Computer Science Journal of Moldova. vol.21, no.1(61), 2013, p. 120-141.
181. Bulat M., Cataranciuc S., Zgureanu A. *Mulțimi de relații multi-are și criptarea informației*. Monografie. Chişinău: CEP USM, 2013. 200p.
182. Cataranciuc S. *Arbori de relații multi-are*. Conferința Internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”. Ediția IV. Chişinău, 25-28 martie 2014. Proceedings, vol. I, p. 56-65.
183. Bodnariuc G., Cataranciuc S. *Search tree-based approach for the p-median problem*. Computer Science Journal of Moldova, vol.22, no.1(64), 2014, p. 62-76.

184. Cataranciuc S. *Location problems into complexes of cubes with weighted vertexes*. The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics (dedicated to academician M. Ciobanu), Chişinău, August 22-25, 2012, p. 61-62.
185. Bouton C.L. *Nim, a game with a complete mathematical theory*. Annals of Mathematics, 23(1/4), 1901/02, p.35-39.
186. Курант Р., Робинс Г. *Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов*. Москва: Просвещение, 3-е изд., 2001. 568с.
187. Milvang-Jensen B.C.A. *Combinatorial Games, Theory and Applications*. Thesis, IT University of Copenhagen, 2000.
188. Александров П. С. *Введение в теорию групп*. Москва: Наука, 1980, 143с.
189. Шашкин Ю. А. *Эйлерова характеристика*. Популярные лекции по математике. Москва: Наука, т.58, 1984. 98 с.
190. Euler L. *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 4:140–160, 1758. (*Prezentată la Academia din Sankt Petersburg la 6 aprilie 1752, Opera Omnia 1(26): 94–108*). În engleză: Proof of Some Notable Properties with wich Solids Enclosed by Plane Faces are Endowed.)
191. Eppstein David. *Twenty Proofs of Euler's Formula: $V-E+F=2$* . <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>, (lucrare prezentată la 03 iunie 2013).
192. Kochetov Y., Alekseeva E., Levanova T., Loresh M. *Large neighborhood local search for the p-median problem*, Yugoslav Journal of Oper. Res., vol. **15**, 2005, no. 1, p. 53-63.
193. Fulton William. *Introduction to toric varieties*. Princeton University Press, 1993. p. 141.
194. Satake, Ichirô. *On a generalization of the notion of manifold*. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 42, 1956, p.359-363.
195. Boileau Michel, Maillot Sylvain and Porti Joan. *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*. Panoramas and Syntheses 15. Société Mathém. de France, 2003. 167p.
196. Boileau Michel, Leeb Bernhard, Porti Joan. *Geometrization of 3-dimensional orbifolds*. Annals of Mathematics, 162, 2005, p.195-290.
197. Cooper Daryl, Hodgson Craig and Kerckhoff Steven. *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds*. MSJ Memoirs, 5, 2000, Mathematical Society of Japan, Tokyo. 170 p.
198. Davis Michael W. *Lectures on orbifolds and reflection groups*. <https://people.math.osu.edu/davis.12/papers/lectures%20on%20orbifolds.pdf>. 34 p.
199. Adem Alejandro, Klaus Michele. *Lectures on orbifolds and group homology*. <http://www.math.ubc.ca/~adem/hangzhou.pdf>. 22 p.

200. Hao Ding. Equivalence of two kinds of orbifold Euler characteristic. Arch. Math. 97 (2011), p. 485-493 (E-published: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00013-011-0323-5#page-2>).
201. Зейферт Г., Трельфалль В. *Топология*. Москва, 2001. 448 с.
202. Kurzweil Hans, Stellmacher Bernd. *The theory of finite groups*, Universitext. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2004. 387 p.
203. Винберг Э.Б. *Курс алгебры*. Москва: Факториал Пресс, 2002. 544 с.
204. Lang S. *Introduction to differentiable manifolds*. Springer-Verlag-New York, 2002. 250 p.
205. Freedman M.H., Quinn F. *Topology of 4-Manifolds*. Princeton University Press, 1990. 259p.
206. Lee J.M. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, 2000. 409 p.
207. Massey W.S. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer-Verlag, 1977. 292 p.
208. Munkres J.R. *Topology*. Prentice Hall, 2000. 537 p.
209. Zomorodian Afra J. *Topology for computing*. Cambridge University Press, New-York, 2005. 243 p.
210. Marsden Jerrold E., Rațiu Tudor, Abraham Ralph. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. 3rd edition, Springer-Verlag Publishing Company, Inc., New-York, 2007. 604p.
211. *Математическая Энциклопедия*, т.2. 1979.
212. Bujac M., Soltan P. *The abstract multidimensional varieties and their classification*. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation, vol.33. Cluj-Napoca, 2004, nr.2, p.163-165.
213. Замбицкий Д.К., Солтан П.С. *Об одной экстремальной задаче на дереве*. В кн. Математические методы решения экономических задач. Вып. 11, Москва, Наука, 1989, с.102-107.
214. Солтан П. С., Присакару К. Ф. Задачи Штейнера на графах. Доклады Акад. Наук СССР, 1971, Т. 198, Nr 1, с.46-49.
215. Hamming Richard W. *Error detecting and error correcting codes*. Bell. System Technical Journal, 1950, no. 29(2), p. 147-160.
216. Boltyansky V., Efremovich V. *Intuitive Combinatorial Topology*. Berlin: Springer, 2001. 215 p.
217. Болтянский В., Ефремович В. *Наглядная топология*. Москва: Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 160 с.
218. Bujac M., Soltan P. *On the abstract and oriented varieties*. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity. Cluj-Napoca, 2004, vol.2, p.11-16.

219. Greenberg, Marvin J. and John R. Harper. *Algebraic Topology: A First Course*, Mathematics Lecture Note Series, 58, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. 311 p.
220. Hatcher Allen. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 553 p.
221. Maunder, C. R. F. *Algebraic Topology*. London: Van Nostrand Reinhold, 1970. 375 p.
222. Tammo tom Dieck T. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS). Zurich, 2008. 567 p.
223. Вик Дж. У. *Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию*. Москва: МЦНМО, 2005. 288 с.
224. Switzer R.M. *Algebraic Topology-homotopy and homology*. Springer-Verlag, 2013. 526 p.
225. Novicov S.P., Taimanov I.A. *Modern Geometric Structures and Fields*. American Mathematical Society, 2006. 633 p.
226. Martin Bader. *The transposition median problem is NP-complete*. Theoretical Computer Science, vol. **412**, Issues 12-14, 2011, p. 1099-1110.
227. Whitehead J.H.C. *Combinatorial homotopy. I.*, Bull. Amer. Math. Soc. 55(1949), p. 213-245.
228. Whitehead J.H.C. *Combinatorial homotopy. II.*, Bull. Amer. Math. Soc. 55(1949), p. 453-496.
229. Whitehead J.H.C. *Simple homotopy types*, Amer. J. Math. 72 (1950), p. 1-57.
230. Мамфорд Д. *Красная книга о многообразиях и схемах*. Москва, МЦМНО, 2007. 296 с.
231. Bryant J., Ferry S., Mio W., Weinberger S. *Topology of homology manifolds*, Annals of Maths. 143, 1996, p. 435–467.
232. Arkowitz M. *Introduction to Homotopy Theory*. Springer, 2011. 302 p.
233. Половинкин Е.С., Балашов М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 416 с.
234. Singer I. *Abstract convex analysis*. Canadian Mathematical Society series of monographs and advanced texts. New York: John Wiley & Sons, 1997, Inc. p. xxii+491.
235. Boyd Stephen P., Vandenberghe Lieven. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004. 716 p.
236. Bertsekas Dimitri. *Convex Analysis and Optimization*. Athena Scientific, 2003. 560 p.
237. Hiriart-Urruty J.-B., Lemaréchal C. *Fundamentals of Convex analysis*, Springer, 2004. 269p.
238. König Dénes. *Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére*. Matematikai és Természettudományi Értesítő, 1916, vol. **34**, p. 104-119.
239. König Dénes. *Gráfok és mátrixok*. Matematikai és Fizikai Lapok, 1931, vol. **38**, p. 116-119.
240. Levi F. *On Helly's theorem and the axioms of convexity*. J. Indian Math. Soc., 1951, 15, Part A, p. 65-76.

241. Ellis J.W. *A general set-separation theorem*. Duke Math. J., 1952, 19, p.417-421.
242. Hammer P.C. *General topology, symmetry and convexity*. Trans. Wisconsin Acad. Sci., Arts and Letters, 1956, 44, p. 221-225.
243. Hammer P. *Semispace and the topology of convexity*. In: Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 1963, 7, p. 305-316.
244. Hammer P. *Isotonic spaces in convexity*. In: Proc. Colloq. Convexity, Copenhagen 1965., Copenhagen 1967, p. 132-141.
245. Kay D. Womble E. *Axiomatic convexity theory and relationships between the Caratheodory, Helly and Radon numbers*. Pacif. J. Math., 1971, 38, nr. 2, p. 471-485.
246. Sierksma G. *Axiomatic convexity theory and the convexproduct-structures*. Doct. Diss., Univ. of Groningen, 1976, 113p.
247. Sierksma G. *Relationships between Caratheodory, Helly and Exchange numbers of convexity spaces*. Nieuw arch. wisk., 1977, 25, nr. 3, p. 115-132.
248. Болтянский В., Солтан П. *Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств*. Кишинев: Штиинца, 279с.
249. Сергиенко И.В. *Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации*. Киев: Наукова Думка, 1988, 472с.
250. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Roshchin M.A. *Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации*. Киев: Наукова Думка, 1980, 275с.
251. Ковалев М.М. *Матроиды в дискретной оптимизации*. 2003, 224с.
252. Ковалев М.М. *Градиентные методы максимизации выпуклых функций на дискретных структурах*. Кибернетика, 1985. N 6, с.77-85.
253. Menger K. *Untersuchungen uber Allgemeine Metric* I, II, III. Math. Ann., 1928, 100, S. 75-163.
254. J. de Groot. *Some Special Metrics in General Topology*. Collog. Math., 1958, v.6, p.283-286.
255. Александров А.Д., Залгаллер В.А. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны (Основы внутренней геометрии поверхностей)*. Тр. МИАН СССР, 63, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1962, 264 с.
256. Toranzos F. *Inmersion de Espacios Metricos Convexos en E^n* . Math. Notae, 1966-1967, vol 21, nr. 1-2, p. 29-53.
257. Soetens E. *Convexity in Busemann Spaces*. Bull. Soc. Math. Belg., 1967, vol 19, n-2, p. 194-213.
258. Присэкару К.Ф., Солтан Р.С. *О разбиении плоской области на выпуклые части и его применение*. Докл. АН СССР, 1982, 262, №2, с. 271-273.

259. Eckhoff J. *Der Satz von Radon in konvexen Produktstrukturen*. I, II. Monatsh. für Math., 1968, **72**, nr.4, s.303–314; 1969, **73**, nr.1, s.7–30.
260. Jamison R.E. *A general theory of convexity*. Doct. Diss., Univ of Washington, 1974.
261. van De Vel, Marcel L.J. (1993). *Theory of convex structures*. North-Holland Mathematical Library. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1993. 540p.
262. Krein M., Šmulian V. (1940). *On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space*. Annals of Mathematics (2), 1940, Second series 41, p.556–583.
263. Cataranciuc S., Vicol N. *Convexitatea în grafuri neorientate*. Bilanțul activității științifice USM, 2003, p.104-106.
264. Hebbare S. *A Class of Distance Convex Simple Graphs*. Ars Comb-ca, 1979, vol 7, p.19-26.
265. Rao S., Hebbare S. *Characterization of Planar Distance Convex Simple Graphs*. Proc. Symp. in Graph Theory ISI, Calcuta, 1976, p.138-150.
266. Batten M. *Geodesic Subgraphs*. Journ. of Graph Theory, 1983, Vol.7, p.159-163.
267. Катаранчук С. *О выпуклой простоте графов*. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Кишинев, 1990. 178с.
268. Christofides N. *Graph Theory. An Algorithmic Approach*. Academic Press, Incorporated, 1975 - 400p.
269. Cockayne E. J., Hedetniemi S.T. *Towards a theory of domination in graphs*. Networks, 7 (1977), p.247–261.
270. Bandelt H. *Hereditary-Modular Graphs*. Combinatorica, 1988, vol.8, n-2, p.149-157.
271. Golumbic M., Gross P. *Perfect Elimination and Bipartite Chordal Graphs*. J. Graph Theory, 1978, vol.2, p.155-163.
272. Howorka E. *A Characterization of Distance-Hereditary Graphs*. Quart. J. Math., 1977, vol.28, n-2, p.417-420.
273. Bandelt H., Mulder H. *Distance-Hereditary Graphs*, J. Combinat. Theory, 1986, vol.41, n-2, p.182-208.
274. Harary F., Melter R., Tomescu I. *Digital Metrics: A Graph Theoretical Approach*. Pattern Recogn. Lett., 1984, vol.2, n-3, p.159-165.
275. Zorn M. *A remark on method in transfinite algebra*. Bulletin of the American Mathematical Society. 1935, **41**(10), p.667–670.
276. Kuratowski C. *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*. Fundamenta Mathematicae. 1922, 3, p.76–108.
277. Jessen B. *Über konvexen Punktmengen konstanter Breite*. Math. Z., 1928, **29**, S. 378-380.

278. Солтан В. *Некоторые вопросы аксиоматической теории выпуклых множеств*. ДАН СССР, 1982, **262**(6), с.1321-1325.
279. Лассак М., Солтан В. *Об одной классификации метрических пространств с точки зрения d -выпуклости*. Мат. Исследов. Кишинев, 1975, 10, вып. 3, с.90-106.
280. Стоцкий Э.Д. *О вложении конечных метрик в графы*. Сиб. матем. журнал, 1964, 5, № 5, с.1203-1206.
281. Takahashi W. *A convexity in metric spaces and nonexpansive mapping I*. Kodai Math. Sem. Rep. 22 (1970), 142-149.
282. Тылкин М.Е. *О реализуемости матриц расстояний в единичных кубах*. Проблемы кибернетики, 1962, т.7, с.31-42.
283. Каганов А.В. *Равномерные вложения графов в метрические пространства*. Компьютерные исследования и моделирование, 2012, т. 4, № 2, с. 241-251.
284. Облаков К.И., Облакова Т.А. *Специальные вложения некоторых несвязных графов в трехмерное пространство*. Вестн. Моск. Ун-та, сер. 1, математика. механика, 2011, №2, стр. 54–56.
285. Graham R.L. *On isometric embeddings of graphs*. Trans. Amer. Math Soc., 1985, **288**, p.527-536.
286. Graham R.L., Pollak H.O. *On embedding in squashed cubes*. In *Graph Theory and Applications* (ed. Y. Alavi et. al.). Lecture Notes in Math., 303, Springer, New York, 1972, p.99-110.
287. Ford L.R., Fulkerson D.R. *Flows in Networks*, Princeton University Press, 1962. 194p.
288. Cormen Th., Leiserson Ch., Rivest R., Stein C. *The Ford–Fulkerson method*. Section 26.2 in *Introduction to Algorithms*. MIT Press and McGraw–Hill. 2001, p.651–664.
289. Cormen Th.H., Leiserson Ch.E., Rivest R.L., Stein C. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2009. 1312p.
290. Berman P., Karpinski M., Zelikovsky A. *A 3/2-Approximation Algorithm for Generalized Steiner Trees in Complete Graphs with Edge Lengths 1 and 2*. Proc. of the 21st Intl Symp on Algorithms and Computation, (ISAAC 2010), Lecture Notes in Computer Science **6506**, 2010, p.15-24.
291. Dietmar C. *Steiner Minimal Trees*. Springer, 1998. 322p.
292. Raymond A. Serway, John W. Jewett. *Physics for scientists and engineers*. Thomson-Brooks/Cole, 2014. 384p.
293. Voloshin V. *Coloring Mixed Hypergraphs: Theory, Algorithms, and Applications*. American Mathematical Society, 2002. 181p.

294. Richard A. Brualdi. *Introductory Combinatorics*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2009. 648p.
295. Cataranciuc S. *Topologia algebrică a relațiilor multi-are*. Monografie. Chișinău: CEP USM, 2015. 228p.
296. Cataranciuc S. *Distance function of n-dimensional adstract cubes complex*. The 22nd conference on applied and industrial mathematics. CAIM - 2014, Bacău, September 18-21, 2014, p.50.
297. Tomescu I. *Chromatic coefficients of linear uniform hypergraphs*. J. Combin. Theory (B) 72 (1998) 229–235.
298. Cataranciuc S. *Euler characteristic of abstract cubes complex*. Proceedings of the Third Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chișinău, August 19-23, 2014, p.330-333.
299. Miron R, Pop I. *Topologie algebrică. Omologie, omotopie, spații de acoperire*. București, Ed. Acad. Române, 1974. 341p.
300. Alexandroff P., Hopf H. *Topology*. Vol. I. Berlin: Springer, 1935.
301. Cartan H., Eilenberg S. *Homological Algebra*. Princeton: University Press, 1956.
302. Berge C. *Theorie des graphes et ses applications*. DUNOD, Paris, 1958.
303. Александров П.С. *Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию*. Москва: Наука, 1975. 368с.
304. Baranyai Z. *On the factorization of the complete uniform hypergraph, Infinite and finite sets* (eds. A.Hjnal, R.Rado, V.T.Sos). North Holland, Amsterdam, 1975, p. 91-108.
305. Болтянский В.Г. *Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей*. Тр. МИАН СССР, 47, Москва: Изд-во АН СССР, 1955. 199с.
306. Ciobanu M. Miron R. *O cercetare autentică în topologia modernă. Reflecții asupra corelațiilor dintre abstract și real*. Akademos, nr.1(36), 2015, p.68-77.
307. Miron R. Pitiș Gh., Pop I. *On the Abstract Cech Cohomology*. Buletinul Academiei de Științe a Moldovei. Matematica. Nr.2(66), 2011, p.41-59.
308. Jesús De Loera, Raymond Hemmecke, Matthias Köppe. *Algebraic and Geometric Ideas in the Theory of Discrete Optimization*. SIAM, 2013. 321p.
309. Guido Schafer. *Discrete Optimization*. Lecture Notes of the Master Course. VU University Amsterdam, 2012. 91p.

DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnatul, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.

Cataranciuc Sergiu

Semnătura:

Data:

CURRICULUM VITAE

(fișă biografică)



INFORMAȚIE DE IDENTITATE

Nume, prenume: Cataranciuc Sergiu
Născut: s.Buda-Mare, r-nul Adâncata (Hliboca), reg.Cernăuți, Ucraina, 28.06.1957
Cetățenie: Republica Moldova
Starea civilă: Soția – Cataranciuc Tatiana (29 iunie 1959);
Copii - Cataranciuc Maxim (5 aprilie 1983),
Cataranciuc Emil (14 iunie 1988).
Angajat în serviciu: Universitatea de Stat din Moldova,
str. Mateevici 60, Chișinău, MD-2009, R. Moldova,
e-mail: s.cataranciuc@gmail.com, tel. 577659; 577634
Domiciliat: Str. Teodorovici, 38, Chișinău, Republica Moldova, tel.59.22.98

STUDII

Facultatea de Matematică și Informatică a USM (1974 - 1980)
Doctorand la catedra „Cibernetică Matematică” a USM (1982 - 1985)

TITLURI

Conferențiar Universitar (Chișinău, iunie 1997)
Doctor în științe fizico-matematice (Minsk (Belorusia), noiembrie 1990)

DOMENII DE INTERES ȘTIINȚIFIC

Optimizare discretă, topologie, analiza convexă, teoria grafurilor, complexitatea algoritmilor.

DISTINCȚII

Laureat al Premiului Național în domeniul științei și tehnicii pentru anul 2004

Diploma de Gradul Întâi a Guvernului Republicii Moldova pentru activitate didactico-științifică prodigioasă (2011)

Diploma *Profesorul Anului Universitar* 2011-2012, USM

Diploma CNAA pentru merite în pregătirea cadrelor științifice (2014)

EXPERIENȚA PROFESIONALĂ

1. Conferențiar Universitar la catedra „Cibernetică
Matematică” (denumirea ulterioară – „Informatică
și Optimizare Discretă”) - din noiembrie 1992 – iunie 2012
2. Conferențiar Universitar la Departamentul
“Matematici Aplicate” - din iunie 2012 - prezent
3. Visiting Professor la facultatea Matematică și
Informatică la Univ. Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca,
Romania - septembrie 1994 – martie 1995
4. Lector la catedra „Cibernetică Matematică” - noiembrie 1985 – noiembrie 1992
5. Lector la catedra „Matematică Superioară”
din cadrul facultății de economie a Universității
de Stat din Chișinău - septembrie 1980 – noiembrie 1985

POSTURI

1. Șef de Departament ”Matematici Aplicate” – din iunie 2012
2. Șeful catedrei Informatică și Optimizare Discretă – iunie 2001 – iunie 2012
3. Secretar științific al Consiliului de susținere a tezelor
de doctor în științe fiz.- matematice DH-01.93.38 - din martie 1996 - prezent
4. Șef al laboratorului de cercetări științifice “Optimizare
Discretă” - ianuarie, 1996 – aprilie, 2010
5. Prodecan la facultatea „Matametică și Informatică” - decembrie 1996 – octombrie 2000

CUNOAȘTEREA LIMBILOR

Româna, Rusa, Ucraineana, Engleza, Franceza (necesități profesionale)

MEMBRU AL COLECTIVELOR EDITORIALE

1. Journal of Computer Science of Moldova. (Institutul de Matematică și Informatică.
Academia de Științe a Republicii Moldova).
2. Studia Informatica (Babeș-Bolyai University, Cluj-Napoca, România).

3. Delta. Revistă de Matematică și Informatică. (Moldova).
4. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity. (Babeș-Bolyai University, Cluj-Napoca, România).
5. Scientific Annals of Faculty of Mathematics and Informatics. Moldova State University. (anii 1999-2005)
6. KNOWLEDGE ENGINEERING: PRINCIPLES AND TECHNIQUES. Proceeding of the International Conference on Knowledge engineering. Principles and techniques. KEPT 2007, 2009, Cluj-Napoca (România).
7. Studia Universitatis. Seria *Științe Exacte și Economice*. (Universitatea de Stat din Moldova).
8. International Journal of Applied Research on Information Technology and Computing (IJARITAC), (New Delhi, India).

MEMBRU A COMITETELOR ORGANIZATORICE ȘI A COMITETELOR DE PROGRAM A MANIFESTĂRILOR ȘTIINȚIFICE

1. Membru al Comitetului de Organizare a Conferințelor MITRE-2008, MITRE-2009, MITRE-2011, MITRE-2013, Chișinău, Republica Moldova.
2. Membru al Comitetului de Organizare a Conferinței Internaționale dedicate aniversării a 65 ani ai USM, Chișinău, 22-25 august, 2011.
3. Membru al Comitetului Științific a celei de-a 14-a Conferințe "Scientific research and education in the air force.", Brașov, Romania, May 24-26, 2012.
4. International Conference "KNOWLEDGE ENGINEERING: PRINCIPLES AND TECHNIQUES. KEPT - 2013", July 5-7, 2013, Cluj-Napoca, România (<http://www.cs.ubbcluj.ro/kept2013/>)
5. Membru al Comitetului Științific a celei de-a 16-a Conferințe "Scientific research and education in the air force.", Brașov, Romania, May 22-24, 2014.
http://www.afahc.ro/site_nou/ro/afases/afases_scientific.html
6. Membru al Comitetului de Organizare a Conferinței "The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics (dedicated to academician M. Ciobanu)", Chișinău, August 22-25, 2012.

PARTICIPĂRI LA PROIECTE ȘI GRANTURI (ultimii 5 ani)

1. Proiect 10.839.08.05F (în cadrul Programului de Stat).
Tema: "Modele matematice moderne și aplicarea acestora la soluționarea problemelor de optimizare discretă cu caracter aplicativ" (anii 2010-2011).

2. Proiect 11.817.08.47A (proiect instituțional).
Tema: ”Modele matematice și metode de soluționare a problemelor de optimizare și analiză numerică cu aplicații.” (anii 2011-2014).
3. Proiect 10.820.08.16/BA (Proiect bilateral cu Belarusia) – **conducător de proiect**.
Tema: ”Metode de soluționare a problemelor de optimizare pe grafuri și rețele și aplicații.” (anii 2010-2011).
4. Proiect 1C/2011 (proiect pentru compania moldo-americană „Est Computer”) – **conducător de proiect**.
Tema: ”Cercetarea metodelor de reprezentare a cunoștințelor în Web-ul semantic și pregătirea materialelor didactice corespunzătoare”. (anul 2011)
5. Proiect 12.839.08.03F (în cadrul Programului de Stat).
Tema: ”Modele și metode matematice, bazate pe calcul performant la soluționarea problemelor aplicative” (anii 2012-2013).
6. Proiect 1C/2012 (proiect pentru compania moldo-americană „Est Computer”) – **conducător de proiect**.
Tema: ” Dezvoltarea abordării A3 în Logică și Informatică cu aplicări în Web-ul semantic” (anul 2012).
7. Proiect 13.820.18.02/BA (Proiect bilateral cu Belarusia) – **conducător de proiect**.
Tema: ”Modele și metode combinatorice pentru rezolvarea problemelor teoriei orarurilor și a problemelor pe grafuri și structuri geometrice” (anii 2013-2014).
8. Proiect 15.817.02.37A (proiect instituțional) – **conducător de proiect**.
Tema: ”Modele matematice și calcul performant în soluționarea problemelor cu caracter aplicativ.” (anii 2015-2018).

ALTE ACTIVITĂȚI

1. Secretar științific al Comisiei de Experti în *Matematică* din cadrul Consiliului National de Acreditare si Atestare a Republicii Moldova. (din 2012).
2. Membru al Comisiei de Experti in *Matematica Aplicata si Mecanica Corpului Solid* al Consiliului National de Acreditare si Atestare a Republicii Moldova. (2007 – 2012).
3. Secretar științific al Consiliului de Susținere a tezelor de doctor în științe fizico-matematice la specialitățile:
 - a. **01.01.05 – Teoria Probabilităților și Statistica Matematică; 01.01.07 – Matematica de Calcul; 01.01.09 – Cibernetică Matematică** (anii 1996 - 2006)
 - b. **01.01.09 – Cibernetică Matematică și Cercetări Operaționale** (anii 2006 - prezent)

4. Vicepreședinte al seminarului științific de profil pentru susținerea tezelor de doctorat la specialitatea **01.01.09** – “*Cibernetică Matematică și Cercetări Operaționale*” din cadrul USM. (anii 2004 – 2012)
5. Membru al Consiliului Societății Matematicienilor din Republica Moldova.
6. Membru al Societății Române de cercetări științifice în matematică.
7. Președintele comisiei naționale de matematică pentru examenele de bacalaureat (anii 2008, 2009)
8. Conducător al Seminarului Științific “Structuri Discrete și Probleme de Optimizare”
9. Conducător al cercului științific studențesc “Teoria grafurilor în aplicații”

PREGĂTIREA CADRELOR ȘTIINȚIFICE

A pregătit 3 doctori în științe fizico-matematice la specialitatea 01.01.09 – Cibernetică Matematică și Cercetări Operaționale.

În prezent este conducător științific pentru 3 doctoranzi.

PARTICIPĂRI LA ÎNTRUNIRI ȘTIINȚIFICE (ultimii 5 ani)

- 25) 23rd Conference of the European Schools Project Association. CONNECTING SCHOOLS FOR A SUSTAINABLE SOCIETY, Tartu – Estonia, March 4-8, 2009.
- 26) International Conference „Mathematics & IT: Research and Education”, Chisinau, 22-25 august, 2011.
- 27) International Congress on Computer Science: Information Systems and technologies, Minsk, Belarusia, 31 octomber – 03 november, 2011
- 28) The 19th International Conference. MATHEMATICS. COMPUTING. EDUCATION. January 30 – February 4, 2012, Dubna, Russia.
- 29) Conferința Internațională “Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale. Ediția III”. Chișinău, 19-23 martie 2012.
- 30) The 14-th International Conference of Scientific Papers “Scientific Research and Education in the Air Force”. Brașov (Romania), May 24-26, 2012.
- 31) The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics (dedicated to academician M. Ciobanu), Ghișinău, August 22-25, 2012 (Comunicare în plen “*Algebraic topology of the multi-ary relation and its applications*”)
- 32) Interferențe universitare – integrare prin cercetare și inovare (Conferință științifică cu participare internațională), Chișinău, 25-26 septembrie, 2012 (Comunicare în plen “*Structuri matematice și rolul acestora în soluționarea problemelor practice*”).

- 33) International Conference „Mathematics & IT: Research and Education (MITRE - 2013)”, Chisinau, 18-22 august, 2013.
- 34) International Conference "Discrete mathematics, graph theory and their applications" (DIMA-2013), Minsk, Belorusia, 11-14 november, 2013.
- 35) Conferința Internațională “Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale. Ediția IV”, Chișinău, 25-28 martie 2014.
- 36) The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chișinău, 19-23 August, 2014.
- 37) The 22th Conference on Applied and Industrial Mathematics – CAIM 2014, Bacau, Romania, September 18-21, 2014.

PUBLICAȚII

În total peste 130 de publicații didactico-științifice, dintre care:

Monografii – 3

Manuale și lucrări didactico-metodice - 7