UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 515.122.4+515.126

DUMBRĂVEANU RADU

STUDIEREA SPAȚIILOR TOPOLOGICE CU STRUCTURI ALGEBRICE

111.04 – GEOMETRIE ȘI TOPOLOGIE

Autoreferatul tezei de doctor în științe matematice

CHIȘINĂU, 2015

Teza a fost elaborată în cadrul catedrei ”Algebră, Geometrie și Topologie” a Universității de Stat din Tiraspol, Chișinău.

Conducător științific:

CIOBAN Mitrofan, dr. hab. în șt. fiz-mat., prof. univ., acad. al A.Ș.M.

Referenți oficiali:

1. CHIRIAC Liubomir, dr. hab. în șt. fiz-mat., prof. univ.
2. DAMIAN Florin, dr. în șt. fiz-mat., conf. univ.

Componența Consiliului științific specializat:

1. ARNAUTOV Vladimir, **preşedinte**, dr. hab. în șt. fiz-mat., prof. univ., acad. al A.Ș.M.
2. AFANAS Dorin, **secretar științific**, dr. în șt. fiz-mat., conf. univ.
3. CALMUȚCHI Laurențiu, dr. hab. în șt. fiz-mat., prof. univ.
4. BOTNARU Dumitru, dr. hab. în șt. fiz-mat., prof. univ.
5. PAVEL Dorin, dr. în șt. fiz-mat., conf. univ.

Susținerea va avea loc la **25 august 2015, ora 12.00**, în ședința Consiliului științific specializat **D 36.111.04-01** din cadrul Universității de Stat din Tiraspol (str. Iablocikin 5, or. Chișinău, MD-2069, Republica Moldova, bloc I, sala 304).

Teza de doctor și autoreferatul pot fi consultate la biblioteca Universității de Stat din Tiraspol și la pagina web a C.N.A.A. (www.cnaa.md).

Autoreferatul a fost expediat la **24 iulie 2015**.

Secretar științific al Consiliului științific specializat,
Afanas Dorin, dr., conf. univ. ________________

Conducător științific,
Cioban Mitrofan, dr. hab., prof. univ., academician ________________

Autor
Dumbrăveanu Radu ________________

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea temei. Fie X și Y două mulțimi înzestrate cu anumite structuri și $\mathcal{L}$ o familie de aplicații $f : X \longrightarrow Y$, care corelează în careva mod cu structurile fixate pe aceste mulțimi. Admitem că $\varphi \in \mathcal{L}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ și $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ este un operator. Atunci apare problema determinării unei funcții $g \in \mathcal{M}$ pentru care $\Phi(g) = \varphi$. Așa funcție g se numește soluție a ecuației funcționale $\Phi(f) = \varphi$. Așa probleme au apărut până în secolul al XX-lea. Pentru a construi efectiv soluțiile diferitor ecuații funcționale este necesar:

- de a studia proprietățile spațiilor funcționale;

- de a determina cu ce fel de structuri pot fi înzestrate spațiile funcționale;

- de a stabili legăturile dintre proprietățile spațiilor X, Y și proprietățile spațiilor funcționale.

Primele rezultate au fost obținute încă la sfîrșitul secolului al XIX-lea în lucrările lui K. Weierstrass, G. Ascoli, C. Arzelà, V. Volterra, I. Fredholm în legătură cu rezolvarea ecuațiilor diferențiale și integrale. Teorema lui Arzelà-Ascoli ([11, Teorema 3.4.20]) prezintă un criteriu general de compactitate a unei familii de funcții cu topologia convergenței uniforme pe compacte. Teorema lui Weierstrass generalizată de M. Stone [31, 32] permite să determinăm mulțimi dense în spațiul de funcții pe un compact în topologia convergenței uniforme.

Aceste studii au dus la evidențierea diferitor clase de spații: spații Banach, spații Frechet, spații Hilbert, spații Sobolev, spații Schwartz, spații Hardy, spații Hölder, spații Skorohod etc.

Studiul spațiilor de funcții pe spații topologice a fost inițiat în lucrările lui P. Alexandroff, R. Arens, G. Choquet, I. Gelfand, A. N. Kolmogoroff, L. Gillman, M. Henriksen, M. Serison, E. Hewitt, R. H. Fox, O. Frink, C. Kuratowski, J. W. Tukey, J. Dugundji, J. R. Jackson, M. Katetov, L. Nachbin și J. Nagata (vezi [1, 2, 10, 17, 18, 19, 21, 22, 14, 15, 23, 38, 35, 3, 25, 27, 29, 30]).

Teorema lui Gelfand-Kolmogoroff [17] afirmă că inelul de funcții continue determină spațiul compact. Această teoremă a fost extinsă de Hewitt [21] și Nagata [30]. Hewitt a demonstrat că inelul de funcții continue determină spațiul realcompact (aceste spații se mai numesc și spații Hewitt-Nachbin compacte). Mai precis, inelul de funcții continue determină completarea realcompactă νX a spațiului X. Nagata extinde teorema Gelfand-Kolmogoroff în două direcții:

- prima teoremă afirmă că inelul de funcții continue în topologia convergenței punctiforme determină orice spațiu complet regulat;

- a două teoremă conține condiții necesare și suficiente ca laticea de funcții continue să determine spațiul complet regulat.

Aceste teoreme ne arată că prezintă un interes deosebit cercetarea spațiului de funcții ca spațiu liniar sau ca grup topologic.

Din acest punct de vedere sunt importante teoremele lui A. Miliutin [28] despre structura liniară a spațiilor Banach de funcții continue pe spații compacte metrizabile, teorema lui Kadets [26] despre homeomorfismul spațiilor Banach separabile infinit dimensionale.

În perioada anilor 50-70 au fost inițiate unele cercetări ale spațiilor funcţionale în lucrările [16, 20, 24, 7, 13]. Merită o atenție deosebită lucrarea lui L. Gillman și M. Jerison [19] care a impulsionat cercetarea spațiilor funcționale din punct de vedere aplicativ.

La începutul anilor 70 a secolului XX A. V. Arhangel'skii într-un ciclu de lucrări a prezentat un program fundamental de cercetare a spațiilor funcționale în topologia convergenței punctiforme [4]. Această teorie a fost întitulată "C_p-teorie".

În această teorie se evidențiază două probleme generale.

Problema 1. De studiat corelațiile dintre proprietățile spațiului X și proprietățile spațiului $C_p(X)$.

Problema 2. Fie X și Y două spații l_p-echivalente, adică spațiile $C_p(X)$, $C_p(Y)$ sunt liniar homeomorfe. Care sunt proprietățile comune ale spațiilor X, Y, adică care proprietăți se păstrează la l_p-echivalențe.

Această teorie a fost furtunos dezvoltată de mulți matematicieni și rezultatele lor au fost incluse în monografiile [4, 33, 34]. În lucrările lui V. Valov [36] și M. Choban [8] unele rezultate au fost extinse pentru spațiile de funcții cu valori în spații normate. Sunt remarcabile teoremele generale formulate de M. Choban, care conțin soluțiile la multe probleme particulare (concrete).

Din acest punct de vedere apare următoarea problemă.

Problema 3. De dezvoltat C_p-teoria pentru spațiile de funcții cu valori în inele și module topologice.

Această problemă conține un caz particular.

Problema 4. De dezvoltat C_p-teoria pentru spațiile de funcții cu valori în grupuri topologice abeliene.

Grupurile topologice și modulele topologice sunt instrumente importante în diverse domenii ale matematicii, fizicii și aplicațiilor lor. Prin urmare studiul spațiilor de funcții cu valori în module topologice prezintă o direcție actuală de cercetare.

Scopul și obiectivele lucrării.

- stabilirea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor X, E și proprietățile spațiului $C_p(X, E)$;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care spațiile funcţionale $C_p(X, E)$ sunt liniar homeomorfe;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care inelele topologice $C_p(X, E)$ sunt izomorfe;

Metodica cercetării. Construcțiile și metodele de demonstrație se bazează pe:

- noțiunile de bază din topologie;
- metodele teoriei inelelor și modulelor;
- aplicațiile operatorilor liniari.

Inovația științifică. În rezultatul realizării obiectivelor lucrării:

- a fost elaborată o metodă nouă de cercetare a spațiilor de funcții cu valori în module topologice;
- au fost stabilite unele proprietăți duale pentru anumite clase de spații funcționale;
- au fost demonstrate teoreme generale despre păstrarea proprietăților topologice la echivalențe liniare.

Problema științifică importantă soluționată constă în elaborarea unor metode de cercetare a spațiilor topologice cu ajutorul spațiilor cu structuri algebrice, ceea ce a condus la determinarea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor topologice și proprietățile algebrice ale spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice.

Valoarea teoretică și practică a lucrării. Au fost elaborate noi metode de cercetare a spațiilor de funcții cu valori în module topologice și au fost stabilite principii generale de păstrare a proprietăților topologice la echivalențe liniare.

Rezultatele științifice principale înaintate spre susținere:

- au fost stabilite corelațiile dintre unele proprietățile ale spațiilor X, E și $C_p(X, E)$;
- au fost stabilite condițiile în care proprietățile perfecte, tare perfecte și cele finit-deschise se păstrează la echivalențe liniare pe spații de funcții cu valori în module topologice;
- au fost determinate proprietățile comune ale spațiilor X la care inelele topologice $C_p(X, E)$ sunt izomorfe.

Implementarea rezultatelor științifice.

- rezultatele și metodele dezvoltate în teză pot fi aplicate în investigațiile ulterioare ale spațiilor funcționale;
- rezultatele din teză pot servi drept suport pentru teme de masterat și pot constitui conținutul unor cursuri speciale pentru studenții și masteranzii de la specialitățile matematice.

Aprobarea lucrării.

Rezultatele lucrării au fost expuse la următoarele foruri științifice:

- International Conference ”Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2009)”, Chișinău, 8-9 octombrie, 2009.

- The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2012, Chișinău, 22-25 august, 2012.

- The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50th anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science ”IMCS-50”, Chișinău, 19-23 august, 2014.

Publicații. Rezultatele principale ale tezei au fost publicate în 7 lucrări [44, 41, 45, 43, 46, 39, 40].

Structura tezei. Teza conține adnotări, introducere, 3 capitole, bibliografia, concluzii și recomandări.

Cuvinte-cheie: spații funcționale, topologia convergenței punctiforme, suport, homeomorfism liniar, proprietăți perfecte, proprietăți deschis-finite.

CONȚINUTUL TEZEI

În **Introducere** se argumentează actualitatea temei tezei, scopul şi obiectivele, problemele cercetării şi se prezintă sinteza conţinutui lucrării.

În **Capitol 1 - Studii în domeniul spațiilor funcționale cu structuri algebrice -** ce poartă un caracter de inițiere, se conține o analiză a materialelor științifice la tema tezei și sunt incluse noțiunile și rezultatele necesare pentru studiul general al spațiilor funcționale cu structuri algebrice și pentru aplicarea structurilor algebrice la studierea proprietăților topologice.

Capitolul 1 se finalizează cu fundamentarea și argumentarea problemei și obiectivelor cercetării.

În **Capitolul 2 - Studiul general al spațiilor funcționale cu structuri algebrice -** se studiază unele probleme generale de determinare a corelațiilor dintre proprietățile spațiului X și proprietăților spațiului $C_p(X, E)$. Deoarece pentru unele subspații Y din X este important modul de amplasare a acestora în X prezintă interes și problema extinderilor funcționale. Rezultatele obținute au fost publicate în [43, 44, 41, 45, 46].

În paragrafele 2.1, 2.2, 2.3 și 2.4 sunt stabilite unele corelații dintre proprietățile spațiului topologic X și proprietățile inelului topologic $C_p(X, E)$.

În paragraful 2.1 se definesc noțiunile de compactificare cu un punct a lui Alexandroff, numărul lui Alexandroff $a(X)$ a spațiului X (Definiția 2.1), familie punct-finită, celularitatea punct-finită $p(X)$ a spațiului X (Definiția 2.2) și spațiu cu G_δ-diagonală regulată.

Se demonstrează că pentru orice spațiu E cu două puncte și cu G_δ-diagonală regulată și orice spațiu E-Tychonoff X, celularitatea punct-finită a spațiului X coincide cu numărul lui Alexandroff a spațiului $C_p(X,E)$ (Teorema 2.7).

Fie E un spațiu cu două puncte distincte $0,1 \in E$. Spațiul X se numește *E-Tychonoff*, dacă pentru orice submulțime închisă F a lui X și orice punct $a \in X \setminus F$ există o funcție continuă $f : X \longrightarrow E$ astfel încât $f(a) = 1$ și $f(x) = 0$ pentru orice $x \in F$.

Teorema 2.7. *Fie E un spațiu cu două puncte și cu G_δ-diagonală regulată. Atunci $p(X) = a(C_p(X,E))$ pentru orice spațiu E-Tychonoff X.*

Corolarul 2.8. *Fie E un spațiu cu G_δ-diagonală regulată, $|E| \geq 2$ și $indX = 0$. Atunci $p(X) = a(C_p(X,E))$.*

Următoarea afirmație pentru $E = \mathbb{R}$ a fost demonstrată de A. V. Arhangel'skii și V. V. Tkachuk în [5].

Corolarul 2.9. *Fie E un spațiu infinit metrizabil. Atunci $p(X) = a(C_p(X,E))$ pentru orice spațiu E-Tychonoff.*

Corolarul 2.10. *Fie E un spațiu discret, $|E| \geq 2$ și $indX = 0$. Atunci $p(X) = a(C_p(X,E))$.*

În paragraful 2.2 se demonstrează că pentru orice spațiu zero-dimensional X, $\mathbb{Z}$-desimea spațiului X, $t_{\mathbb{Z}}(X)$, coincide cel mai mic cardinal infinit τ astfel încât spațiul $C_p(X,\mathbb{Z})$ este τ-plasat în $\beta_0 C_p(X,\mathbb{Z})$ (Teorema 2.19). În consecință se obține o condiție suficientă și necesară pentru ca $C_p(X,\mathbb{Z})$ să fie $\mathbb{Z}$-compact (Corolarul 2.20).

O funcție $f : X \longrightarrow Y$ se numește *strict τ-continuă*, dacă pentru orice submulțime A a lui X cu $|A| \leq \tau$ există o funcție continuă $g : X \longrightarrow Y$ astfel încât $g|_A = f|_A$, adică $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$. Se numește *$\mathbb{Z}$-desime* $t_{\mathbb{Z}}(X)$ a spațiului X cel mai mic cardinal infinit τ astfel încât orice funcție definită pe X cu valori în $\mathbb{Z}$ strict τ-continuă este continuă.

O mulțime $A \subseteq X$ se numește *τ-plasată* în X, dacă pentru orice $x \in X \setminus A$ există o mulțime $P \subseteq X$ de tip G_τ astfel încât $x \in P \subseteq X \setminus A$. Notăm cu $q_0(X)$ cel mai mic cardinal infinit τ astfel încât X este τ-plasat în $\beta_0 X$, unde $\beta_0 X$ este compactificarea zero-dimensională maximală a spațiului X.

Teorema 2.19. *Fie $indX = 0$, atunci $t_{\mathbb{Z}}(X) = q_0(C_p(X,\mathbb{Z}))$.*

Corolarul 2.20. *Pentru orice X avem că $t_{\mathbb{Z}} \leq \aleph_0$, dacă și numai dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este $\mathbb{Z}$-compact.*

În paragraful 2.3 se definesc noțiunile de spațiu τ-monolitic și $(\tau, 0)$-stabil. Se demonstrează că aceste două proprietăți sunt duale pentru clasa spațiilor $C_p(X, \mathbb{Z})$ (Teorema 2.27, Teorema 2.28).

Tot în acest paragraf se demonstrează unele proprietăți duale (pentru clasa spațiilor $C_p(X, \mathbb{Z})$) privind numerele cardinale (Propoziția 2.25, Propoziția 2.26).

Cea mai mică pondere a spațiilor zero-dimensionale (respectiv Tychonoff) Y în care X poate fi condensat se notează $iw_0(X)$ (respectiv $iw(X)$). Evident, $iw(X) \leq iw_0(X)$ pentru orice spațiu Tychonoff X.

Spațiul X se numește $(\tau, 0)$-*stabil*, dacă pentru orice imagine continuă Y a lui X condițiile următoare sunt echivalente:

$S1$. $iw_0(Y) \leq \tau$;

$S2$. $nw(Y) \leq \tau$.

Un spațiu X se numește *0-stabil*, dacă este $(\tau, 0)$-stabil pentru orice cardinal τ. Evident, un spațiu X este 0-stabil, dacă și numai dacă pentru orice imagine continuă Y a lui X avem $iw_0(Y) = nw(Y)$.

Următoarea afirmație, pentru cazul spațiilor $C_p(X)$, a fost demonstrată în [33] (vezi [33, Problema 173]).

Propoziția 2.25. *Dacă X este un spațiu zero-dimensional, atunci $iw_0(C_p(X, \mathbb{Z})) = d(X)$.*

Următoarea afirmație, pentru cazul spațiilor $C_p(X)$, a fost demonstrată în [33] (vezi [33, Problema 174]).

Propoziția 2.26. *Dacă X este un spațiu zero-dimensional, atunci $iw_0(X) = d(C_p(X, \mathbb{Z}))$.*

Teorema 2.27. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Spațiul $C_p(X, \mathbb{Z})$ este τ-monolitic, dacă și numai dacă X este $(\tau, 0)$-stabil.*

Teorema 2.28. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Spațiul $C_p(X, \mathbb{Z})$ este $(\tau, 0)$-stabil, dacă și numai dacă X este τ-monolitic.*

În paragraful 2.4 se definește noțiunea de spațiu proiectiv complet. Se dă un răspuns parțial la [4, Problema II.8.8] (Corolarul 2.36) și se studiază în ce condiții spațiul X este discret (Teorema 2.38).

Un spațiu X se numește proiectiv complet, dacă pentru orice aplicație deschisă și continuă $f : X \longrightarrow Y$ cu Y metrizabil, Y este complet.

Propoziția 2.31. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Spațiul $\mathbb{Z}^X$ este proiectiv complet.*

O submulțime A a spațiului X se numește $C_{\mathbb{Z}}$-scufundată în X, dacă orice aplicație continuă a lui A în $\mathbb{Z}$ poate fi prelungită la o aplicație continuă a lui X în $\mathbb{Z}$.

Propoziția 2.33. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este proiectiv complet, atunci orice subspațiu închis și numărabil $F \subseteq X$ este discret și $C_{\mathbb{Z}}$-scufundat în X.*

Propoziția 2.34. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $Y \subseteq X$ este $C_{\mathbb{Z}}$-scufundat în X și $C_p(X,\mathbb{Z})$ este proiectiv complet, atunci $C_p(Y,\mathbb{Z})$ este proiectiv complet.*

Remarca 2.35. *Propoziția 2.34 este adevărată și pentru spațiul $C_p(X)$ când X este Tychonoff.*

Corolarul 2.36. *Spațiul $C_p(\beta\mathbb{N})$ este proiectiv complet, dacă și numai dacă $C_p(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ este proiectiv complet.*

Teorema 2.38. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este proiectiv complet, 0-stabil și $\mathbb{Z}$-compact, atunci X este discret.*

Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă X este discret, atunci $C_p(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^X$ și $C_p(X,\mathbb{Z})$ este proiectiv complet, 0-stabil și $\mathbb{Z}$-compact.

Corolarul 2.39. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Spațiul $C_p(X,\mathbb{Z})$ este homeomorf spațiului $\mathbb{Z}^X$, dacă și numai dacă X este discret.*

În paragraful 2.5 se cercetează unele proprietăți multiplicative ale spațiilor funcționale.

Dacă spațiile liniare topologic F și L sunt liniar homeomorfe, atunci notăm cu $F \sim L$.

Teorema 2.40 (pentru $E = \mathbb{R}$ vezi [4, Teorema 0.6.2]; [33, Problema 177])**.** *Fie E un spațiu liniar topologic infinit și local convex peste corpul $\mathbb{K}$ de numere reale sau complexe. Fie X un spațiu homeomorf cu $Y \times E$ pentru careva spațiu Y. Atunci spațiul $C_p(X,E)$ este liniar homeomorf cu $(C_p(X,E))^{\aleph_0}$, adică există un homeomorfism $h : C_p(X,E) \longrightarrow (C_p(X,E))^{\aleph_0}$ astfel încât $h(f+g) = h(f) + h(g)$ și $h(t \cdot f) = t \cdot h(f)$ pentru orice $f, g \in C_p(X,E)$ și $t \in \mathbb{R}$.*

În paragrafele 2.6, 2.7 se studiază problema extinderii funcționale în spații complet metrizabile.

Teorema 2.41. *Fie $Y \subseteq X$, X un spațiu normal și $dimX = 0$. Atunci următoarele proprietăți sunt echivalente:*

1. Pentru orice submulțime deschisă și închisă U a lui Y, mulțimea $cl_X U$ este deschisă și închisă în $cl_X Y$.

2. Pentru orice partiție deschisă și închisă $\gamma = \{U, V\}$ a lui Y, există o partiție deschisă și închisă $\gamma' = \{U', V'\}$ a lui X astfel încât $U = U' \cap Y$ și $V = V' \cap Y$.

3. Orice funcție $f \in C(Y, \mathcal{D})$ poate fi prelungită la o funcție din $C(X, \mathcal{D})$.

Remarca 2.42. *Teorema de mai sus va fi adevărată și în cazul când vom înlocui condiția "$dimX = 0$" cu "X este Lindelöf și zero-dimensional ($indX = 0$)".*

Remarca 2.43. *Echivalența (ii)$\leftrightarrow$(iii) din Teorema 2.41 este adevărată pentru orice spațiu X.*

În Exemplul 2.44 este arătat că în cazul funcțiilor continue cu valori într-un spațiu discret infinit, condițiile ca X să fie spațiu normal și $dimX = 0$ nu sunt suficiente. Teorema 2.45 extinde Teorema 2.41 pentru cest caz.

Teorema 2.45. *Fie $Y \subseteq X$, X un spațiu τ-colectiv normal, $\tau \geq \omega$ și $dimX = 0$. Atunci următoarele proprietăți sunt echivalente:*

1. Pentru orice familie discretă $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ de submulțimi deschise și închise ale lui Y familia $\{cl_X U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este discretă în X.

2. Pentru orice submulțime deschisă și închisă U a lui Y mulțimea $cl_X U$ este deschisă și închisă în $cl_X Y$ și orice familie discretă $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ submulțimi deschise și închise ale lui Y este local finită în X.

3. Orice funcție $f \in C(Y, \mathcal{D}_\tau)$ poate fi prelungită la o funcție din $C(X, \mathcal{D}_\tau)$.

În Exemplul 2.46 se evidențiază că condiția $dimX = 0$ este esențială în Teorema 2.45.

În paragraful 2.7 se studiază problema extinderii funcționale în spații complet metrizabile.

Un spațiu topologic X este complet după Dieudonné, dacă pe spațiul X există o uniformitate completă. Un spațiu X este complet topologic, dacă X este homeomorf cu un subspațiu închis a unui produs de spații metrizabile [12]. Completarea după Dieudonné μX a spațiului X este spațiu complet topologic pentru care X este un subspațiu dens al lui μX și orice funcție continuă g definită pe X cu valori într-un spațiu topologic complet Y admite o prelungire continuă μg la μX.

Fie τ un număr cardinal infinit. Notăm prin $\mu_\tau X$ un spațiu complet topologic pentru care X este un subspațiu dens al lui $\mu_\tau X$ și orice funcție continuă

g definită pe X cu valori într-un spațiu metrizabil Y cu ponderea $\leq \tau$ admite o prelungire continuă $\mu_\tau g$ la $\mu_\tau X$.

Dacă τ și κ sunt numere cardinale infinite și $\tau \leq \kappa$, atunci $X \subseteq \mu_\kappa X \subseteq \mu_\tau X$. Prelungirea $\nu X = \mu_{\aleph_0} X$ se numește completarea Hewitt-Nachbin a unui spațiu X.

Teorema 2.47. *Fie Y un subspațiul al spațiului X, E un spațiu topologic astfel încât $E = \mu_\tau E$ și pentru orice subspațiu închis Z al lui X și orice funcție continuă $g : Z \longrightarrow E$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$. Dacă $\mu_\tau Y = cl_{\mu_\tau X} Y$, atunci pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.*

Teorema 2.48. *Fie Y un subspațiu al spațiului X, τ un număr cardinal infinit și pentru orice funcție continuă $g : Z \longrightarrow E$ definită pe un subspațiu închis Z al lui X cu valori într-un spațiu Banach E cu ponderea $\leq \tau$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$. Atunci următoarele proprietăți sunt echivalente:*

1. $\mu_\tau Y = cl_{\mu_\tau X} Y$,

2. Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu E cu ponderea $\leq \tau$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.

3. Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu Frechet E cu ponderea $\leq \tau$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.

4. Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu metrizabil E cu ponderea $\leq \tau$ există o prelungire continuă $\bar{g} : cl_X Y \longrightarrow E$.

5. Pentru orice familie funcțional discretă $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ a unui spațiu Y cu $|A| \leq \tau$ familia $\{cl_X F_\alpha : \alpha \in A\}$ este discretă în X.

Corolarul 2.49. *Fie Y un subspațiu al unui spațiu τ-colectiv normal X. Atunci următoarele proprietăți sunt echivalente:*

(i) $\mu Y = cl_{\mu X} Y$.

(ii) Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu Banach E există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.

(iii) Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu Fréchet E există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.

(iv) Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu complet metrizabil E există o prelungire continuă $\mu_\tau g : cl_X Y \longrightarrow E$.

(v) Pentru orice familie funcțional discretă $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ a unui spațiu Y familia $\{cl_X F_\alpha : \alpha \in A\}$ este discretă în X.

În **Capitolul 3 - Aplicații ale structurilor algebrice la studierea proprietăților topologice -** sunt prezentate rezultatele pentru cazuri mai generale cînd o proprietate topologică $\mathcal{P}$ se păstrează la $l_p(E)$-echivalențe. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [39, 40].

Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic cu unitate. Notăm cu $C_p(X, E)$ totalitatea aplicațiilor continue ale spațiului X în E în topologia convergenței punctiforme.

Spațiile X și Y se numesc $l_p(E)$-echivalente, dacă R-modulele topologice $C_p(X, E)$ și $C_p(Y, E)$ sunt izomorfe topologic. Spunem că o proprietate $\mathcal{P}$ se păstrează la $l_p(E)$-echivalențe, dacă $C_p(X, E)$ și $C_p(Y, E)$ sunt izomorfe topologic, atunci X posedă proprietatea $\mathcal{P}$, dacă și numai dacă Y posedă proprietatea $\mathcal{P}$. Pentru $E = \mathbb{R}$ au fost demonstrate multe rezultate (vezi [6]). În [9] au fost demonstrate rezultate pentru E spațiu normat, iar în [36] au fost demonstrate rezultate pentru E spațiu normat și topologia compact deschisă.

În paragrafele 3.1 și 3.2 se extind unele noțiuni și proprietăți de bază din C_p-teorie pentru spațiile de funcții cu valori în inele și module topologice.

Propoziția 3.1. *Fie E un R-modul topologic. Atunci $C_p(X, E)$ este un R-modul topologic, iar E se poate scufunda ca submodul închis în $C_p(X, E)$. Mai mult, această scufundare este una naturală.*

Fie X un spațiu, R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial. Fie $x \in X$ un punct fixat. Atunci aplicația $\xi_x : C_p(X, E) \to E$ definită prin $\xi_x(f) = f(x)$ se numește *aplicația de evaluare* în punctul x.

Propoziția 3.3. *Aplicația de evaluare $\xi_x : C_p(X, E) \longrightarrow E$ este continuă și liniară pentru orice punct $x \in X$.*

Aplicația $e_X : X \to C_p(C_p(X, E), E)$, unde $e_X(x) = \xi_x$ pentru orice $x \in X$ se numește *aplicația canonică de evaluare.*

Propoziția 3.4. *Aplicația de evaluare canonică $e_X : X \to C_p(C_p(X, E), E)$ este continuă. Mai mult, mulțimea $e_X(X)$ este închisă în $C_p(C_p(X, E), E)$.*

Propoziția 3.5. *Dacă $C_p(X, R)$ este o familie separatoare și regulată, aplicația de evaluare canonică $e_X : X \longrightarrow C_p(C_p(X, R), R)$ este un homeomorfism al spațiului X în subspațiul $e_X(X)$ al lui $C_p(C_p(X, R), R)$.*

Se definesc noțiunile de spațiu R-Tychonoff, modul topologic simplu, modul topologic local simplu și modul topologic R-închis.

Un spațiu X se numește R-Tychonoff, dacă pentru orice submulțime închisă F din X și orice punct $a \in X \setminus F$ există $g \in C(X, R)$ astfel încât $g(a) = 0$ și $F \subseteq g^{-1}(1)$.

Definiția 3.10. *Fie R un inel topologic. Un R-modul topologic E se numește:*

(i) simplu, dacă nu conține un submodul netrivial peste R;

(ii) local simplu, dacă E nu este trivial și există o mulțime deschisă U din E astfel încât $0 \in U$ și U nu conține R-submodule ale lui E;

(iii) R-închis, dacă există o aplicație continuă și surjectivă $\varphi_E : E \longrightarrow R$ astfel încât $\varphi_E(x+y) = \varphi_E(x) + \varphi_E(y)$ și $\varphi_E(tx) = t\varphi_E(x)$ pentru orice $t \in R$ și $x, y \in E$.

Exemplele 3.11-3.15 completează Definiția 3.10.

Fie X un spațiu, R un inel topologic și E un R-modul topologic. Vom considera două submulțimi ale lui $C_p(C_p(X, E), E)$:

(i) $L_p(X, E) = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n : \alpha_i \in R, x_i \in e_X(X), n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $M_p(X, E)$ subspațiul aplicațiilor liniare și continue ale spațiului $C_p(X, E)$ în E.

(iii) Dacă F este un R-modul topologic, atunci $\mathcal{L}_p(F, E)$ este spațiul aplicațiilor liniare și continue $\varphi : F \to E$ ca un subspațiu al spațiului $C_p(F, E)$.

Propoziția 3.19 are un rol important în cazul proprietăților finit-deschise.

Propoziția 3.19. *Fie R un inel local simplu și X un spațiu R-Tychonoff. Atunci $M_p(X, R) = L_p(X, R)$.*

În Exemplul 3.21 este ilustrat un caz când $M_p(X, R) \neq L_p(X, R)$.

Propoziția 3.22. *Fie R un inel, E un R-modul topologic și X un spațiu. Atunci pentru orice $g \in C(X, E)$ există o funcție liniară unică $\overline{g} \in \mathcal{L}_p((L_p(X, E), E)$ astfel încât $g = \overline{g} \circ e_X$, unde $e_X : X \to L_p(X, E)$ este aplicația de evaluare.*

Teorema 3.23. *Fie R un inel, E un R-modul topologic și X un spațiu. Considerăm spațiul $e_X(X)$, unde $e_X : X \to L_p(X, E)$ este aplicația de evaluare. Atunci spațiile liniare $C_p(X, E)$, $C_p(e_X(X), E)$ și $\mathcal{L}_p(L_p(X, E), E)$ sunt liniar homeomorfe.*

Corolarul 3.25. *Fie X, Y două spații și R un R-modul local simplu. Spațiile $C_p(X, R)$ și $C_p(Y, R)$ sunt liniar homeomorfe, dacă și numai dacă spațiile $L_p(X, R)$ și $L_p(Y, R)$ sunt liniar homeomorfe.*

Pentru orice subspațiu Y al lui X notăm

$$C_p(Y|X, E) = \{f|_Y : f \in C(X, E)\}.$$

Un subspațiu Y al lui X se numește *E-plin*, dacă $C(Y|X, E) = C(Y, E)$. Un spațiu X se numește *compact E-plin*, dacă $C(Y|X, E) = C(Y, E)$ pentru orice subspațiu compact $Y \subseteq X$.

Lema 3.33 are un rol important în cazul proprietăților tare perfecte.

Lema 3.33. *Fie X un spațiu zero-dimensional și E un spațiu metrizabil. Atunci X este compact E-plin. Mai mult, pentru orice submulțime compactă Y din X și orice $f \in C(Y, E)$ există $g \in C(X, E)$ astfel încât $g(X) \subseteq f(Y)$ și $f = g|_Y$, adică X este compact E-plin.*

În paragraful 3.3 se demonstrează Teorema 3.34 și Corolarul 3.35 care extind rezultatul clasic al lui Nagata (vezi [4, Teorema 0.6.1]) pentru spațiile de funcții cu valori în inele și module topologice.

Fie R un inel topologic simplu. Considerăm doar spațiile R-Tychonoff. Fie $n \in \mathbb{N}$. O funcțională $\mu : C(X, R) \longrightarrow R^n$ se numește multiplicativă, dacă este liniară și $\mu(fg) = \mu(f)\mu(g)$ pentru orice $f, g \in C(X, R^n)$.

Notăm

$$I_{(p,n)}(X, R) = \{\mu \in L_p(X, R, R^n) : \mu \neq 0, \mu \text{ este multiplicativă}\}.$$

Teorema 3.34. *Spațiul X^n și $I_{(p,n)}(X, R)$ sunt homeomorfe.*

Corolarul 3.35. *Dacă inelele $C_p(X, R)$ și $C_p(Y, R)$ sunt topologic izomorfe, atunci spațiile X și Y sunt homeomorfe.*

În paragraful 3.4 se extind unele rezultate din C_p-teoria pentru clase algebrice de spații.

Fie R un inel topologic. Presupunem ca R este un spațiu R-Tychonoff. O clasă $\mathcal{P}$ de spații topologice se numește R-clasă algebrică de spații, dacă:

(i) orice spațiu $X \in \mathcal{P}$ este R-Tychonoff și $Y \in \mathcal{P}$ pentru orice subspațiu închis Y al lui X;

(ii) dacă $f : X \longrightarrow Y$ este o funcție continuă definită pe X cu valori în Y, $X \in \mathcal{P}$ și Y este un spațiu R-Tychonoff, atunci $Y \in \mathcal{P}$;

(iii) dacă $\{X_n \in \mathcal{P} : n \in \mathbb{N}\}$ este un șir de subspații închise ale unui spațiu R-Tychonoff X și $X = \cup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, atunci $X \in \mathcal{P}$;

(iv) dacă $X, Y \in \mathcal{P}$, atunci $X \times Y \in \mathcal{P}$;

(v) $R \in \mathcal{P}$.

Teorema 3.37. *Fie $\mathcal{P}$ o R-clasă algebrică de spații, R un inel topologic și E un R-modul topologic. Presupunem că E este un spațiu R-Tychonoff. Pentru un spațiu R-Tychonoff X următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) $X \in \mathcal{P}$.

(ii) $L_p(X, E) \in \mathcal{P}$.

Corolarul 3.38. *Fie $\mathcal{P}$ o R-clasă algebrică de spații, R un inel topologic și E un R-modul topologic. Presupunem că E este un spațiu R-Tychonoff. Dacă $C_p(X, E)$ și $C_p(Y, E)$ sunt topologic homeomorfe și $X \in \mathcal{P}$, atunci $Y \in \mathcal{P}$.*

Remarca 3.39. *Pentru inelul $\mathbb{R}$ al numerelor reale și $E = \mathbb{R}$ afirmația de mai sus a fost demonstrată în [4, Propoziția 0.5.13]*

În paragraful 3.5 se definește funcția suport $supp_X$.

Fie R un inel topologic și E un E-modul topologic netrivial și local simplu.

Considerăm un spațiu X și o funcțională $\mu \in M_p(X, E)$. Notăm

$$\mathcal{S}(\mu) = \{B \subseteq X : \ dacă \ B \subseteq f^{-1}(0), \ atunci \ \mu(f) = 0\}).$$

Evident, $X \in \mathcal{S}(\mu)$. Astfel mulțimea $\mathcal{S}(\mu)$ este nevidă.

Mulțimea $supp_X(\mu)$ este familia tuturor punctelor $x \in X$ astfel încât pentru orice vecinătate deschisă U a lui x în X există $f \in C_p(X, E)$ astfel încât $f(X \setminus U) = 0$ și $\mu(f) \neq 0$ (vezi [6, 37], pentru $E = R = \mathbb{R}$; [8, 36] pentru $R = \mathbb{R}$).

Teorema 3.40. *Fie R un inel topologic cu unitate, X un spațiu R-Tychonoff, E un R-modul topologic netrivial local simplu, $\mu \in M_p(X, E)$ și $\mu \neq 0$. Atunci:*

1. *Există o mulțime finită $K \in \mathcal{S}(\mu)$ astfel încât $supp_X(\mu) \subseteq K$.*

2. *$supp_X(\mu) \in \mathcal{S}(\mu)$ și $supp_X(\mu)$ este o submulțime finită a lui X.*

Propoziția 3.41. *Dacă $x \in X$ și $\xi_x(f) = f(x)$ pentru orice $f \in C_p(X, E)$, atunci $\xi_x \in L_p(X, E)$.*

Remarca 3.43. *Fie R un inel local simplu, X un spațiu R-Tychonoff, $\mu \in M_p(X, R)$ și $supp(\mu) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Atunci în virtutea Propoziției 3.19, există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R \setminus \{0\}$ astfel încât $\mu = \Sigma\{\alpha_1 \xi_{x_i} : i \leq n\}$.*

Așa cum s-a menționat în Remarca 3.20 și Exemplul 3.21, de regulă $M_p(X, E) \neq L_p(X, E)$. Următorul rezultat specifică forma funcționalelor liniare pentru R-modulele local simple.

Teorema 3.43. *Fie R un inel topologic cu unitate, X un spațiu R-Tychonoff, E un R-modul topologic netrivial, $\mu \in M_p(X, E)$, $\mu \neq 0$, $supp_X(\mu) \in \mathcal{S}(\mu)$ și $supp_X(\mu)$ este o submulțime finită a lui X. Atunci $\mu = \varphi \circ \eta$ pentru careva $\varphi \in Hom(E)$ și $\eta \in L_p(X, E)$.*

În paragraful 3.6 se cercetează proprietățile topologice ale funcției *supp*.

Alegem un inel topologic R, două R-module netriviale local simple E și F și un spațiu R-Tychonoff X.

Amintim că o funcție multivocă $f : X \to 2^Y$ este *inferior semicontinuă* (sau *l.s.c*), dacă pentru orice submulțime deschisă U din Y imaginea inversă a lui U, $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \cap U \neq \emptyset\}$ este deschisă în X.

Propoziția 3.44. *Funcția multivocă* $supp_X : M_p(X, E, F) \to X$ *este l.s.c.*

Se definesc noțiunile de mulțime mărginită, precompactă, a-mărginită (algebric mărginită) și noțiunea de modul local mărginit.

O submulțime L din X este *mărginită*, dacă orice funcție continuă reală $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ este mărginită pe L.

Definiția 3.45. *O submulțime* L *a unui* R*-modul topologic* E *se numește:*

(i) precompact sau total a-mărginită, dacă pentru orice vecinătate deschisă U *a lui* 0 *în* E *există o submulțime finită* A *din* E *astfel încât* $L \subseteq A + U = U + A$*;*

(ii) a-mărginită, dacă pentru orice vecinătate U *a lui* 0 *în* E *există* $n \in \mathbb{N}$ *încât* $L \subseteq nU$*.*

Orice mulțime mărginită este precompact.

Definiția 3.46. *Un* R*-modul topologic* E *se numește local mărginit, dacă există o vecinătate a-mărginită* U *a lui* 0 *în* E *astfel încât* $E = \cup\{nU : n \in \mathbb{N}\}$ *și pentru orice* $a \in E$*,* $a \neq 0$*, și orice* $n \in \mathbb{N}$ *există* $t \in R$ *astfel încât* $ta \notin nU$*.*

Exemplele 3.48, 3.49 completează definițiile de mai sus.

Teorema 3.50. *Fie* E *un* R*-modul topologic netrivial local mărginit,* X *un spațiu* R*-Tychonoff și pentru orice submulțime* L *nemărginită din* X *există* $f \in C(X, E)$ *astfel încât mulțimea* $f(L)$ *nu este a-mărginită. Atunci:*

(i) Mulțimea $supp_X(H)$ *este mărginită în* X *pentru orice submulțime a-mărginită* H *din* $M_p(X, E)$*.*

(ii) Mulțimea $supp_X(H)$ *este mărginită în* X *pentru orice submulțime total a-mărginită* H *din* $M_p(X, E)$*.*

(iii) Mulțimea $supp_X(H)$ *este mărginită în* X *pentru orice submulțime mărginită* H *din* $M_p(X, E)$*.*

Remarca 3.51. *Dacă* $R = \mathbb{K}$ *este corpul numerelor reale sau complexe și* E *este un* R*-modul local mărginit, atunci:*

- E *spațiu liniar metrizabil;*

- E *este un* R*-modul local simplu;*

- orice mulțime precompactă este a-mărginită în E*.*

Remarca 3.53. *Orice spațiu normat este un* $\mathbb{R}$*-modul local mărginit. Dacă* E *un spațiu normat netrivial, atunci pentru orice submulțime nemărginită* L *a spațiului* X *există* $f \in C(X, E)$ *astfel încât mulțimea* $f(L)$ *nu este mărginită în* E*. Pentru un spațiu normat* E *Teorema 3.50 a fost demonstrată de V. Valov în [36].*

Un spațiu X este *μ-complet*, dacă orice submulțime mărginită și închisă din X este compactă.

Un spațiu X este *Dieudonné complet*, dacă uniformitatea maximală pe X este completă. Orice spațiu Dieudonné complet este μ-complet.

Notăm prin PX spațiul X cu G_δ-topologia generată de G_δ-submulțimile lui X. Mulțimea $\delta - cl_X H = cl_{PX} H$ se numește G_δ-închiderea mulțimii H în X. Dacă $\delta - cl_X H = H$, atunci spunem că mulțimea H este G_δ-închisă.

Dacă spațiul X este μ-complet, atunci orice subspațiu G_δ-închis din X este μ-complet.

Desimea unui spațiu X este cel mai mic cardinal τ pentru care pentru orice submulțime $L \subseteq X$ și orice punct $x \in cl_X L$ există o submulțime $L_1 \subseteq L$ astfel încât $|L_1| \leq \tau$ și $x \in cl_X L_1$.

Notăm prin $t(X)$ și $l(X)$ desimea și numărul lui Lindelöf a spațiului X.

Propoziția 3.54. *Fie X și E două spații și $t(X) \leq \aleph_0$. Atunci $C_p(X, E)$ este un subspațiu G_δ-închis al lui E^X. Mai mult, dacă E este μ-complet, atunci spațiul $C_p(X, E)$ este la fel μ-complet.*

Propoziția 3.55. *Fie F și E două R-module topologice și $\mathcal{L}_p(F, E)$ spațiul tuturor funcțiilor liniare și continue definite pe F cu valori în E. Atunci $\mathcal{L}_p(F, E)$ este un subspațiu închis al lui $C_p(F, E)$.*

Corolarul 3.56. *Fie E și F două R-module topologice și $t(F) \leq \aleph_0$. Atunci $\mathcal{L}_p(F, E)$ este o submulțime G_δ-închisă din E^F. În particular, dacă E este μ-complet, atunci spațiul $\mathcal{L}_p(F, E)$ este la fel μ-complet.*

Teorema 3.58. *Fie E un R-modul metrizabil și local mărginit, X un spațiu R-Tychonoff compact E-plin și pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E. Atunci spațiul X este μ-complet, dacă și numai dacă spațiul $M_p(X, E)$ este μ-complet.*

În paragraful 3.7 se demonstrează Proprietățile 3.59-3.67. În virtutea acestor proprietăți funcțiile multivoce $\varphi : X \longrightarrow Y$ și $\psi : Y \longrightarrow X$ formează o echivalență a spațiilor X și Y în sensul articolului [8]. Astfel teoremele generale din [8] pot fi extinse pentru funcțiile cu valori în R-modulele topologice.

Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial local mărginit. Atunci R-modulul E este local simplu.

Fie două spații R-Tychonoff nevide X și Y cu proprietățile:

- pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;

- pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.

Fie un homeomorfism liniar $u : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$. Atunci funcția duală $v : M_p(Y, E) \longrightarrow M_p(X, E)$, unde $v(\eta) = \eta \circ u$ pentru orice $\eta \in M_p(Y, E)$, este un homeomorfism liniar. Pentru fiecare $x \in X$ notăm $\varphi(x) = supp_Y(v^{-1}(\xi_x))$ și pentru orice $y \in Y$ notăm $\psi(y) = supp_X(v(\xi_y))$.

Proprietatea 3.59. *$\varphi : X \to Y$ și $\psi : Y \to X$ sunt funcții multivoce l.s.c. și $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sunt mulțimi finite pentru orice puncte $x \in X$, $y \in Y$.*

Proprietatea 3.60. *Fie $y_0 \in Y$, $f \in C(X, E)$ și $f(\psi(y_0)) = 0$. Atunci $u(f)(y_0) = 0$.*

Corolarul 3.61. *Dacă $f, g \in C(X, E)$ și $f|_{\phi(y)} = g|_{\phi(y)}$, atunci $u(f)(y) = u(g)(y)$.*

Proprietatea 3.62. *$x \in cl_X \psi(\varphi(x))$ pentru orice punct $x \in X$ și $y \in cl_Y \varphi(\psi(y))$ pentru orice punct $y \in Y$.*

Proprietatea 3.63. *$x \in \psi(\varphi(x))$ pentru orice punct $x \in X$.*

Proprietatea 3.64. *Dacă H este submulțime densă din Y, atunci $\psi(H)$ este o submulțime densă din X știind că u este o injecție.*

Corolarul 3.65. *Spațiul X este separabil, dacă și numai dacă spațiul Y este separabil. În general, $d(X) = d(Y)$.*

Proprietatea 3.66. *$\varphi(F)$ este submulțime mărginită din Y pentru orice mulțime mărginită F din X.*

Proprietatea 3.67. *Fie E un spațiu metrizabil, X și Y spații compact E-pline. Atunci spațiul X este μ-complet, dacă și numai dacă spațiul Y este μ-complet.*

La fel ca și în [8] vom spune că perechea de funcții multivoce $\theta : X \longrightarrow Y$ și $\pi : Y \longrightarrow X$ se numește *inferior-reflectivă*, dacă verifică următoarele condiții:

1l. θ și π sunt l.s.c.

2l. $\theta(x)$ și $\pi(x)$ sunt mulțimi finite pentru toate punctele $x \in X$ și $y \in Y$.

3l. $x \in \pi(\theta(x))$ și $y \in \theta(\pi(y))$ pentru toate punctele $x \in X$ și $y \in Y$.

De asemenea, ca și în [8] spunem că perechea de funcții multivoce $\theta : X \longrightarrow Y$ și $\pi : Y \longrightarrow X$ se numește *superior-reflectivă*, dacă verifică condițiile:

1u. $\theta(F)$ este o submulțime mărginită din Y pentru orice submulțime mărginită F din X.

2u. $\pi(\Phi)$ este o submulțime mărginită din X pentru orice submulțime mărginită Φ din Y.

3u. $x \in cl_X \pi(\theta(x))$ și $y \in cl_Y \theta(\pi(y))$ pentru toate punctele$x \in X$ și $y \in Y$.

Din proprietățile de mai sus rezultă:

Corolarul 3.68. *Spațiul X este separabil, dacă și numai dacă spațiul Y este separabil. În general, $d(X) = d(Y)$.*

În paragraful 3.8 se definesc noțiunile de proprietate perfectă și proprietate tare perfectă.

Amintim că proprietatea $\mathcal{P}$ este *perfectă*, dacă pentru orice funcție continuă perfectă $f : X \longrightarrow Y$ de la X la Y avem $X \in \mathcal{P}$ dacă și numai, dacă $Y \in \mathcal{P}$. Spunem că proprietatea $\mathcal{P}$ este *tare perfectă*, dacă este perfectă și orice spațiu cu proprietatea $\mathcal{P}$ este μ-complet.

În Exemplul 3.69, 3.70 sunt enumerate diverse proprietăți care sunt perfecte și tare perfecte.

Se demonstrează Teorema 3.71 și Teorema 3.72 care specifică condițiile în care proprietățile perfecte și tare perfecte se păstrează la $l_p(E)$-echivalențe.

Amintim că un spațiu X se numește *wq-spațiu*, dacă pentru orice punct $x \in X$ există un șir $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de submulțimi deschise din X astfel încât $x \in \cap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ și fiecare mulțime $\{x_n \in U_n : n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită în X.

Teorema 3.71. *Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial local mărginit. Fie două spații R-Tychonoff nevide X și Y cu proprietățile:*

- pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;

- pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.

Presupunem că $u : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$ este un homeomorfism liniar. Atunci:

1. X este un spațiu pseudocompact, dacă și numai dacă Y este un spațiu pseudocompact.

2. Dacă $\mathcal{P}$ este o proprietate perfectă și X, Y sunt wq-spații μ-complete, atunci $X \in \mathcal{P}$, dacă și numai dacă $Y \in \mathcal{P}$.

Teorema 3.72. *Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic metrizabil netrivial local mărginit. Fie două spații R-Tychonoff nevide compact E-pline X și Y cu proprietățile:*

- pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;

- pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.

Presupunem că $u : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$ este un homeomorfism liniar. Atunci:

1. Spațiul X este μ-complet, dacă și numai dacă spațiul Y este μ-complet.

2. X este spațiu compact, dacă și numai dacă Y este compact.

3. Dacă $\mathcal{P}$ este proprietate tare perfectă și X, Y sunt wq-spații, atunci $X \in \mathcal{P}$, dacă și numai dacă $Y \in \mathcal{P}$.

În paragraful 3.9 se definește noțiunea de proprietate finit-deschisă.

Amintim că proprietatea $\mathcal{P}$ este o *of-proprietate* (sau *proprietate finit-deschisă*), dacă pentru orice funcție continuă, deschisă și finită $f : X \longrightarrow Y$ și orice subspațiu Z din X avem $Z \in \mathcal{P}$, dacă și numai dacă $f(Z) \in \mathcal{P}$.

În Exemplele 3.73, 3.74 sunt enumerate diverse proprietăți care sunt finit-deschise.

Se demonstrează Teorema 3.75 care specifică în ce condiții proprietățile finit-deschise se păstrează la $l_p(E)$-echivalențe.

Teorema 3.75. *Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial local mărginit. Fie două spații R-Tychonoff nevide X și Y cu proprietățile:*

- pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;

- pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.

Presupunem că $u : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$ este un homeomorfism liniar. Dacă $\mathcal{P}$ este o of-proprietate, atunci $X \in \mathcal{P}$, dacă și numai dacă $Y \in \mathcal{P}$.

În paragraful 3.10 se demonstrează Teorema 3.76 ce determină unele proprietăți care se păstrează la $l_p(E)$-echivalențe ale spațiilor metrizabile.

Teorema 3.76. *Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial, metrizabil și local mărginit. Fixăm două spații R-Tychonoff nevide și compact E-pline X și Y cu proprietățile:*

1. pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;

2. pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.

Presupunem că X și Y sunt $l_p(E)$-echivalente. Atunci:

1. X este un spațiu compact metrizabil, dacă și numai dacă Y este spațiu compact metrizabil.

2. Dacă X este un spațiu metrizabil, atunci spațiul Y este metrizabil, dacă și numai dacă Y este un wq-spațiu.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Prin prezenta lucrare autorul și-a propus să adauge contribuția personală la investigarea spațiilor cu structuri algebrice și aplicarea acestora în studiul proprietăților topologice care se păstrează la diverse echivalențe funcționale.

Problema științifică importantă soluționată constă în elaborarea unor metode de cercetare a spațiilor topologice cu ajutorul spațiilor cu structuri algebrice, ceea ce a condus la determinarea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor topologice și proprietățile algebrice ale spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice.

Concluzii generale:

C_p-teoria este un domeniu actual al matematicii contemporane care se dezvoltă vertiginos. Pe parcursul dezvoltării C_p-teoriei pentru spațiile de funcții reale au fost obținute un șir important de rezultate concrete, care în totalitate formează nucleul acestei teorii. Unele rezultate au fost extinse pentru spații de funcții cu valori în spații normate. Însă metodele dezvoltate pentru spațiile de funcții cu valori în spații normate sunt insuficiente pentru a studia cazul spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice. Astfel multe probleme din C_p-teorie pentru cazul inelelor și modulelor topologice rămân deschise.

În capitolul 1 a fost studiată C_p-teoria pentru cazul funcțiilor cu valori în $\mathbb{R}$. Au fost prezentate noțiunile și rezultatele importante din această ramură a matematicii. Au fost evidențiate unele probleme care n-au fost cercetate până la moment.

În capitolul 2 au fost cercetate corelațiile dintre proprietățile spațiilor X, E și $C_p(X, E)$ pentru cazuri mult mai generale. Deopotrivă cu aceste proprietăți, în acest capitol a fost cercetată și problema prelungirilor aplicațiilor cu valori în spații metrice și în spații metrizabile complete.

În capitolul 3 au fost cercetate proprietățile care se păstrează la $l_p(E)$-echivalențe. Obținându-se, în rezultat, metode care pot fi aplicate în cercetări ulterioare ale proprietăților invariante la $l_p(E)$-echivalențe.

Așadar în lucrare:

1. Au fost studiate unele probleme generale de determinare a corelațiilor dintre proprietățile spațiului X și proprietăților spațiului $C_p(X, E)$, precum și problema extinderii funcționale. În particular, în capitolul 2, s-a demonstrat că:

- celularitatea punct-finită a spațiului zero-dimensional X este egală cu numărul lui Alexandroff a spațiului $C_p(X,E)$, adică $p(X) = a(C_p(X,E))$ (Teorema 2.7);

- $\mathbb{Z}$-desimea spațiului zero-dimensional X este numărabilă, dacă și numai dacă spațiul $C_p(X,\mathbb{Z})$ este Z-compact (Corolarul 2.20);

- spațiul zero-dimensional X este discret, dacă și numai dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este proiectiv complet, 0-stabil și $\mathbb{Z}$-compact (Teorema 2.38);

- unele criterii pentru care aplicațiile continue definite pe un subspațiu Y al unui spațiu τ-colectiv normal X pot fi prelungite continuu pe X (Corolarul 2.49).

2. Au fost stabilite condițiile în care proprietățile perfecte, tare perfecte și cele finit-deschise se păstrează la echivalențe liniare pe spații de funcții cu valori în module topologice (Teorema 3.71, Teorema 3.72 și respectiv Teorema 3.75).

3. Au fost determinate proprietățile comune ale spațiilor X la care inelele topologice $C_p(X,E)$ sunt izomorfe (Corolarul 3.35).

Recomandări:

1. Rezultatele din teză pot constitui conținutul unor cursuri speciale pentru studenții și masteranzii de la specialitățile matematice și pot servi drept suport pentru unele teze de masterat.

2. Utilizând rezultatele principale ale tezei pot fi stabilite relațiile dintre proprietățile spațiilor și spațiilor funcționale.

3. Cercetările pot fi continuate în următoarele direcții:

- În unele rezultate domeniul de valori E este metrizabil. De determinat cât de esențială este această condiție?

- De aplicat metodele elaborate la determinarea altor proprietăți: dimensiunea, numărul lui Lindelöf etc.

BIBLIOGRAFIE

1. Alexandroff P., Hopf H. Topologie I. Berlin: Springer, 1935. 638 p.
2. Arens R. A topology for spaces of transformations. In: Ann. of Math., 1946, vol. 47, p. 480-495.
3. Arens R., Dugundji J. Topologies for function spaces. In: Pacific Journal of Math., 1951, vol. 1, p. 5-31.
4. Arkhangel'skii A. V. Topological Function Spaces. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1992. 211 p.
5. Arhangel'skii A. V., Tkachuk V. V. Function spaces and topological invariants. Moscow: Moscow University P.H., 1985 (in Russian). 85 p.

6. Arhangel'skii A. V. On linear homomorphisms of function spaces. In: Doklady Acad. Nauk SSSR 264 (1982), vol. 6, p. 1289-1292. English translation: In: Soviet Math. Dokl., 1982, vol. 25, p. 852-855.
7. Bagles R. W., Yang J. S. On k-spaces and function spaces. In: Proc. Amer. Math. Soc., 1966, vol. 17, p. 703-705.
8. Choban M. M. General theorems on functional equivalence of topological spaces. In: Topology Appl., 1998, vol. 89, p. 223-239.
9. Choban M. M. On the theory of topological algebraic systems. In: Trudy Moscov. Mat. Obshch, 1985, vol. 48, p. 106-149. English translation: In: Trans. Moscow Math. Soc., 1986, vol. 48, p. 115-159.
10. Choquet G. Convergences. In: Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math Phys. (N.S.), 1948, vol. 23, p. 57-112.
11. Engelking R. General Topology. Berlin: Heldermann, 1989. 529 p.
12. Engelking R. Dimension theory. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1978. 314 p.
13. Fort M. K. jr. A note on pointwise convergence. In: Proc. Amer. Math. Soc, 1951, vol. 2, p. 34-35.
14. Fox R.H. On topologies for function spaces. In: Bull. Amer. Math. Soc., 1945, vol. 51, p. 429-432.
15. Frink O. Topology in latticies. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1942, vol. 51, p. 569-582.
16. Geba K., Semadeni Z. Spaces of continuous functions V. In: Studia Math, 1960, vol. 19, p. 303-320.
17. Gelfand I. M., Kolmogoroff A. N. On rings of continuous functions on topological spaces. In: Doklady Akad. Nauk SSSR, 1939, vol. 22, p. 11-15.
18. Gillman L., Henriksen M. Concerning rings of continuous functions. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1954, vol. 77, p. 340-362.
19. Gillman L., Jerison M. Rings of Continuous Functions. Princeton, N. J.: D. Van. Nostrand Co., 1960. 300 p.
20. Hager A.W. Approximation of real continuous functions on Lindelöf spaces. In: Proc. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 22, p. 156-163.
21. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1948, vol. 64, p. 45-99.
22. Hewitt E. Linear functionals on spaces of continuous functions. In: Fund. Math, 1950, vol. 37, p. 161-189.
23. Hewitt E. A problem of set-theoretic topology. In: Duke Math. J., 1943, vol. 10, p. 309-333.

24. Isiwata T. Z-mappings and C^*-embeddings. In: Proc. Japan Academy, 1969, vol. 45, p. 889-893.
25. Jackson J. R. Comparison of topologies on function spaces. In: Proc. Amer. Math. Soc., 1912, vol. 3, p. 156-158.
26. Kadets M. I. Homeomorphisms of certain Banach spaces. In: DAN SSSR, 1958, vol. 122, nr. 1, p. 13-16.
27. Katetov M. On real-valued functions in topological spaces. In: Fund. Math., 1951, vol. 38, p. 85-91 (Correction: In: Fund. Math., 1953, vol. 40, p. 203-205).
28. Milyutin A. A. Isomorphism of spaces of continuous functios over compact sets of the cardinality of continuum. In: Teor. Funke. Anal. Priloz., 1966, vol. 2, p. 150-156 (in Russian).
29. Nachbin L. On the continuity of positive linear transformations. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Cambridge, Mass, 1950, vol. 1, p. 464-465.
30. Nagata J. On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces. In: Osaka Math. J., 1949, vol. 1, nr. 2, p. 166-181.
31. Stone M.H. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1937, vol. 41, p. 375-481.
32. Stone M. H. The Generalized Weierstrass Approximation Theorem. In: Mathematics Magazine, Mar. - Apr., 1948, vol. 21, nr. 4, p. 167-184.
33. Tkachuk V.V. A C_p-Theory Problem Book: topological and function spaces. New York: Springer, 2011. 485 p.
34. Tkachuk V.V. A C_p-Theory Problem Book: special features of function spaces. New York: Springer, 2011. 583 p.
35. Tukey J. W. Convergence and uniformity in topology. Princeton: Princeton University Press, 1940. 90 p.
36. Valov V. Function spaces. In: Topology Appl., 1997, vol. 81, nr. 1, p. 1-22.
37. Van Mill J. The infinite-dimensional topology of function spaces. Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co, 2001. 630 p.
38. Kuratowski C. Sur la topologies des espaces, fonctionels. In: Ann. Soc. Polon. Math., 1947-48, vol. 20, p. 314-322.

LISTA PUBLICAȚIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI

39. Choban M. M., Dumbrăveanu R. Two properties of function spaces. In: ROMAI Journal, 2014, vol. 10, nr. 2, p. 121-125.

40. Choban M. M., Dumbrăveanu R. $l_p(R)$-equivalence of topological spaces and topological modules. In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2015, vol. 325, nr. 1, p. 22-47.
41. Choban M., Dumbrăveanu R. About $l_p(R)$-equivalence of topological spaces. In: The 20th Conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu. Chisinau: Tiraspol State University, 2012, p. 73-76..
42. Choban M., Dumbrăveanu R. On the theory of functional spaces. In: Conference mathematics & information technologics: Reseearch and Education (MITRE-2015). Chisinau: Moldova State University, 2015, p. 23-24.
43. Dumbrăveanu R. On extensions of mappings into complete metrizable spaces. In: ROMAI Journal, 2014, vol. 10, nr. 1, p. 39-45.
44. Dumbrăveanu R. About the ring of integer-valued functions. In: Conference mathematics & information technologics: Reseearch and Education (MITRE-2009). Chisinau: Moldova State University, 2009, p. 17-18.
45. Dumbrăveanu R. About discrete-valued functions. In: The 20th Conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu. Chișinău: Tiraspol State University, 2012, p. 110.
46. Dumbrăveanu R. About extensions of mappings into topologically complete spaces. In: Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50. Chisinau: Institute of Mathematics and Computer Science, 2014, p. 66-69.

ADNOTARE
la teza de doctor a dlui Dumbrăveanu Radu
"Studierea spațiilor topologice cu structuri algebrice"

Teza este înaintată pentru obținerea gradului de doctor în științe matematice, la specialitatea 111.04 - Geometrie și Topologie. Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Tiraspol, Chișinău, anul 2015.

Structura tezei: teza este scrisă în limba română și constă din: introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie din 87 titluri, 104 pagini text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 7 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: spații funcționale, topologia convergenței punctiforme, suport, homeomorfism liniar, proprietăți perfecte, proprietăți deschis-finite.

Domeniul de studiu al tezei: aparține studiului proprietăților spațiilor funcționale cu structuri algebrice și aplicațiile lor.

Scopul și obiectivele lucrării:

- stabilirea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor X, E și proprietățile spațiului $C_p(X, E)$;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care spațiile funcționale $C_p(X, E)$ sunt liniar homeomorfe;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care inelele topologice $C_p(X, E)$ sunt izomorfe.

Noutatea și originalitatea științifică:

- a fost elaborată o metodă nouă de cercetare a spațiilor de funcții cu valori în module topologice;

- au fost stabilite unele proprietăți duale pentru anumite clase de spații funcționale;

- au fost demonstrate teoreme generale despre păstrarea proprietăților topologice la echivalențe liniare.

Problema științifică importantă soluționată constă în elaborarea unor metode de cercetare a spațiilor topologice cu ajutorul spațiilor cu structuri algebrice, ceea ce a condus la determinarea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor topologice și proprietățile algebrice ale spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării: constă în elaborarea noilor metode de cercetare a spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice, și stabilirea principiilor generale de păstrare a proprietăților topologice la echivalențe liniare.

Implementarea rezultatelor științifice:

- rezultatele și metodele dezvoltate în teză pot fi aplicate în investigațiile ulterioare ale spațiilor funcționale;

- rezultatele din teză pot servi drept suport pentru teme de masterat și pot constitui conținutul unor cursuri speciale pentru studenții și masteranzii de la specialitățile matematice.

АННОТАЦИЯ
на диссертацию Думбрэвяну Раду «Исследование топологических пространств посредством алгебраических структур»

Диссертация представлена на соискание ученой степени доктора математических наук, специальность 111.04 - Геометрия и Топология. Диссертация разработана в Тираспольском Государственном Университете, в Кишиневе, в 2015 году.

Структура работы: работа написана на румынском языке и состоит из введения, 3 глав, общих выводов и рекомендации, списка цитированных источников из 87 названий, 104 страниц основного текста. По теме диссертации опубликованы 7 научных работ.

Ключевые слова: пространства непрерывных функций, топология поточечной сходимости, носитель, линейные гомеоморфизмы, совершенные свойства,
конечно-открытые свойства.

Область исследования: изучение свойств функциональных пространств с алгебраическими структурами и их приложения.

Цели и задачи исследования:

- установка корреляции между свойствами пространств X, E и свойствами пространства $C_p(X,E)$;

- определение общих свойств пространств X для которых функциональные пространства $C_p(X,E)$ линейно гомеоморфны;

- определение общих свойств пространств X для которых топологические кольца $C_p(X,E)$ изоморфны.

Научная новизна и оригинальность:

- был разработан новый метод исследования пространств функций со значениями в топологических модулях;

- были установлены некоторые двойственные свойства для некоторых классов функциональных пространств;

- были доказаны общие теоремы о сохранении топологических свойств при линейной эквивалентности.

Решенная научная проблема заключается в разработке некоторых методов исследования топологических пространств с помощью пространств с алгебраическими структурами, что привело к установке корреляции между топологическими свойствами пространств и алгебраическими свойствами пространств функций со значениями в топологических кольцах и модулях.

Теоретическая и прикладная значимость: состоит в разработке новых методов исследования пространств функций со значениями в топологических модулях и установлении общих принципов для сохранения топологических свойств при отношениях линейной эквивалентности.

Внедрение научных результатов:

- результаты и методы, разработанные в диссертации могут быть применены в дальнейших исследованиях функциональных пространств;

- результаты диссертации могут служить пособием для тем магистерских диссертаций и могут составлять содержание некоторых специальных курсов для студентов первого и второго цикла математических специальностей.

ANNOTATION
for PhD thesis by Dumbrăveanu Radu
"Study of topological spaces with algebraic structures"

This thesis is submitted to obtain a doctoral degree in Mathematics, specialty 111.04 - Geometry and Topology. It was elaborated at Tiraspol State University, in Chisinau, 2015.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and consists of an introduction, 3 chapters, conclusions, 87 bibliography titles, 104 pages of main text. The obtained results are published in 7 scientific papers.

Keywords: function spaces, topology of pointwise convergence, support, linear homeomorphisms, perfect properties, open-finite properties.

Field of study of the thesis: belongs to the study of function spaces with algebraic structures properties and its applications.

Thesis aim and objectives:

- establishment of correlations between properties of spaces X, E and properties of function space $C_p(X, E)$;

- determination of common properties of spaces X for which the function spaces $C_p(X, E)$ are linear homeomorphic;

- determination of common properties of spaces X for which the topological rings $C_p(X, E)$ are isomorphic.

Scientific novelty and originality:

- was developed a new method of research for function spaces with values in topological modules;

- were established some dual properties for certain classes of function spaces;

- were proved general theorems about topological properties which are preserved by linear equivalences.

The scientific problem solved consist of development a new methods for researching topological spaces with spaces with algebraic structures, which led to the establishment of correlations between properties of topological spaces and algebraic properties of function spaces with values in topological rings and modules.

The theoretical significance and applicative value of the thesis: consists in development of new research methods for spaces of functions with values in topological modules and establishment of general principles for preserving topological properties by linear equivalences.

The implementation of the scientific results:

- the results and methods developed in this thesis can be applied in further investigations of functional spaces;

- the results of the thesis can serve as support for master theses and can be used as content for some special courses for students from first and second cycle studies of mathematical specialties.

DUMBRĂVEANU RADU

STUDIEREA SPAȚIILOR TOPOLOGICE CU STRUCTURI ALGEBRICE

111.04 – GEOMETRIE ȘI TOPOLOGIE

Autoreferatul tezei de doctor în științe matematice

Aprobat spre tipar: 17.07.2015
Hârtie ofset. Tipar ofset.
Coli de tipar: 1,94

Formatul hârtiei 60x84 1/16
Tirajul 70 ex.
Comanda Nr. 320

PRIMEX-COM S.R.L.
filiala N1 Bălți