UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 515.122.4+515.126

DUMBRĂVEANU RADU

STUDIEREA SPAȚIILOR TOPOLOGICE CU STRUCTURI ALGEBRICE

111.04 – GEOMETRIE ȘI TOPOLOGIE

Teză de doctor în științe matematice

Conducător științific: **Cioban Mitrofan**
doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, academician

Autorul:

CHIȘINĂU, 2015

CUPRINS

ADNOTARE
la teza de doctor a dlui Dumbrăveanu Radu
"Studierea spațiilor topologice cu structuri algebrice"

Teza este înaintată pentru obținerea gradului de doctor în științe matematice, la specialitatea 111.04 - Geometrie și Topologie. Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Tiraspol, Chișinău, anul 2015.

Structura tezei: teza este scrisă în limba română și constă din: introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie din 87 titluri, 104 pagini text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 7 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: spații funcționale, topologia convergenței punctiforme, suport, homeomorfism liniar, proprietăți perfecte, proprietăți deschis-finite.

Domeniul de studiu al tezei: aparține studiului proprietăților spațiilor funcționale cu structuri algebrice și aplicațiile lor.

Scopul și obiectivele lucrării:

- stabilirea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor X, E și proprietățile spațiului $C_p(X, E)$;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care spațiile funcționale $C_p(X, E)$ sunt liniar homeomorfe;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care inelele topologice $C_p(X, E)$ sunt izomorfe.

Noutatea și originalitatea științifică:

- a fost elaborată o metodă nouă de cercetare a spațiilor de funcții cu valori în module topologice;

- au fost stabilite unele proprietăți duale pentru anumite clase de spații funcționale;

- au fost demonstrate teoreme generale despre păstrarea proprietăților topologice la echivalențe liniare.

Problema științifică importantă soluționată constă în elaborarea unor metode de cercetare a spațiilor topologice cu ajutorul spațiilor cu structuri algebrice, ceea ce a condus la determinarea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor topologice și proprietățile algebrice ale spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării: constă în elaborarea noilor metode de cercetare a spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice, și stabilirea principiilor generale de păstrare a proprietăților topologice la echivalențe liniare.

Implementarea rezultatelor științifice:

- rezultatele și metodele dezvoltate în teză pot fi aplicate în investigațiile ulterioare ale spațiilor funcționale;

- rezultatele din teză pot servi drept suport pentru teme de masterat și pot constitui conținutul unor cursuri speciale pentru studenții și masteranzii de la specialitățile matematice.

АННОТАЦИЯ
на диссертацию Думбрэвяну Раду
«Исследование топологических пространств посредством алгебраических структур»

Диссертация представлена на соискание ученой степени доктора математических наук, специальность 111.04 - Геометрия и Топология. Диссертация разработана в Тираспольском Государственном Университете, в Кишиневе, в 2015 году.

Структура работы: работа написана на румынском языке и состоит из введения, 3 глав, общих выводов и рекомендации, списка цитированных источников из 87 названий, 104 страниц основного текста. По теме диссертации опубликованы 7 научных работ.

Ключевые слова: пространства непрерывных функций, топология поточечной сходимости, носитель, линейные гомеоморфизмы, совершенные свойства, конечно-открытые свойства.

Область исследования: изучение свойств функциональных пространств с алгебраическими структурами и их приложения.

Цели и задачи исследования:

- установка корреляции между свойствами пространств X, E и свойствами пространства $C_p(X,E)$;

- определение общих свойств пространств X для которых функциональные пространства $C_p(X,E)$ линейно гомеоморфны;

- определение общих свойств пространств X для которых топологические кольца $C_p(X,E)$ изоморфны.

Научная новизна и оригинальность:

- был разработан новый метод исследования пространств функций со значениями в топологических модулях;

- были установлены некоторые двойственные свойства для некоторых классов функциональных пространств;

- были доказаны общие теоремы о сохранении топологических свойств при линейной эквивалентности.

Решенная научная проблема заключается в разработке некоторых методов исследования топологических пространств с помощью пространств с алгебраическими структурами, что привело к установке корреляции между топологическими свойствами пространств и алгебраическими свойствами пространств функций со значениями в топологических кольцах и модулях.

Теоретическая и прикладная значимость: состоит в разработке новых методов исследования пространств функций со значениями в топологических модулях и установлении общих принципов для сохранения топологических свойств при отношениях линейной эквивалентности.

Внедрение научных результатов:

- результаты и методы, разработанные в диссертации могут быть применены в дальнейших исследованиях функциональных пространств;

- результаты диссертации могут служить пособием для тем магистерских диссертаций и могут составлять содержание некоторых специальных курсов для студентов первого и второго цикла математических специальностей.

ANNOTATION
for PhD thesis by Dumbrăveanu Radu
"Study of topological spaces with algebraic structures"

This thesis is submitted to obtain a doctoral degree in Mathematics, specialty 111.04 - Geometry and Topology. It was elaborated at Tiraspol State University, in Chisinau, 2015.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and consists of an introduction, 3 chapters, conclusions, 87 bibliography titles, 104 pages of main text. The obtained results are published in 7 scientific papers.

Keywords: function spaces, topology of pointwise convergence, support, linear homeomorphisms, perfect properties, open-finite properties.

Field of study of the thesis: belongs to the study of function spaces with algebraic structures properties and its applications.

Thesis aim and objectives:

- establishment of correlations between properties of spaces X, E and properties of function space $C_p(X, E)$;

- determination of common properties of spaces X for which the function spaces $C_p(X, E)$ are linear homeomorphic;

- determination of common properties of spaces X for which the topological rings $C_p(X, E)$ are isomorphic.

Scientific novelty and originality:

- was developed a new method of research for function spaces with values in topological modules;

- were established some dual properties for certain classes of function spaces;

- were proved general theorems about topological properties which are preserved by linear equivalences.

The scientific problem solved consist of development a new methods for researching topological spaces with spaces with algebraic structures, which led to the establishment of correlations between properties of topological spaces and algebraic properties of function spaces with values in topological rings and modules.

The theoretical significance and applicative value of the thesis: consists in development of new research methods for spaces of functions with values in topological modules and establishment of general principles for preserving topological properties by linear equivalences.

The implementation of the scientific results:

- the results and methods developed in this thesis can be applied in further investigations of functional spaces;

- the results of the thesis can serve as support for master theses and can be used as content for some special courses for students from first and second cycle studies of mathematical specialties.

INTRODUCERE

Actualitatea temei. Fie X și Y două mulțimi înzestrate cu anumite structuri și $\mathcal{L}$ o familie de aplicații $f : X \longrightarrow Y$, care corelează în careva mod cu structurile fixate pe aceste mulțimi. Admitem că $\varphi \in \mathcal{L}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ și $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ este un operator. Atunci apare problema determinării unei funcții $g \in \mathcal{M}$ pentru care $\Phi(g) = \varphi$. Așa funcție g se numește soluție a ecuației funcționale $\Phi(f) = \varphi$. Așa probleme au apărut până în secolul al XX-lea. Pentru a construi efectiv soluțiile diferitor ecuații funcționale au apărut necesitățile:

- de a studia proprietățile spațiilor funcționale;

- de a determina cu ce fel de structuri pot fi înzestrate spațiile funcționale;

- de a stabili legăturile dintre proprietățile spațiilor X, Y și proprietățile spațiilor funcționale.

Primele rezultate au fost obținute încă la sfârșitul secolului al XIX-lea în lucrările lui K. Weierstrass, G. Ascoli, C. Arzelà, V. Volterra, I. Fredholm în legătură cu rezolvarea ecuațiilor diferențiale și integrale. Teorema lui Arzelà-Ascoli ([31, Teorema 3.4.20]) prezintă un criteriu general de compactitate a unei familii de funcții cu topologia convergenței uniforme pe compacte. Teorema lui Weierstrass generalizată de M. Stone [74, 75] permite să determinăm mulțimi dense în spațiul de funcții pe un compact în topologia convergenței uniforme.

Aceste studii au dus la evidențierea diferitor clase de spații: spații Banach, spații Frechet, spații Hilbert, spații Sobolev, spații Schwartz, spații Hardy, spații Hölder, spații Skorohod etc.

Studiul spațiilor de funcții pe spații topologice a fost inițiat în lucrările lui P. Alexandroff, R. Arens, G. Choquet, I. Gelfand, A. N. Kolmogoroff, L. Gillman, M. Henriksen, M. Serison, E. Hewitt, R. H. Fox, O. Frink, C. Kuratowski, J. W. Tukey, J. Dugundji, J. R. Jackson, M. Katetov, L. Nachbin și J. Nagata (vezi [2, 3, 23, 38, 40, 41, 44, 45, 34, 35, 46, 87, 79, 4, 48, 53, 64, 65]).

Teorema lui Gelfand-Kolmogoroff [38] afirmă că inelul de funcții continue determină spațiul compact. Această teoremă a fost extinsă de Hewitt [44] și Nagata [65]. Hewitt a demonstrat că inelul de funcții continue determină spațiul realcompact (aceste spații se mai numesc și spații Hewitt-Nachbin compacte). Mai precis, inelul de funcții continue determină completarea realcompactă νX a spațiului X. Nagata extinde teorema Gelfand-Kolmogoroff în două direcții:

- prima teoremă afirmă că inelul de funcții continue în topologia convergenței punctiforme determină orice spațiu complet regulat;

- a doua teoremă conține condiții necesare și suficiente ca laticea de funcții continue să determine spațiul complet regulat.

Aceste teoreme ne arată că prezintă un interes deosebit cercetarea spațiului de funcții ca spațiu liniar sau ca grup topologic.

Din acest punct de vedere sunt importante teoremele lui A. Miliutin [60] despre structura liniară a spațiilor Banach de funcții continue pe spații compacte metrizabile, teorema lui Kadets [51] despre homeomorfismul spațiilor Banach separabile infinit dimensionale.

În perioada anilor 50-70 au apărut unele cercetări a spațiilor funcționale în lucrările [37, 43, 47, 12, 33]. Merită o atenție deosebită lucrarea lui L. Gillman și M. Jerison [41] care a impulsionat cercetarea spațiilor funcționale din punct de vedere aplicativ.

La începutul anilor 70 a secolului XX A. V. Arhangel'skii într-un ciclu de lucrări a prezentat un program fundamental de cercetare a spațiilor funcționale în topologia convergenței punctiforme [6]. Această teorie a fost întitulată "C_p-teorie".

În această teorie se evidențiază două probleme generale.

Problema 1. De studiat corelațiile dintre proprietățile spațiului X și proprietățile spațiului $C_p(X)$.

Problema 2. Fie X și Y două spații l_p-echivalente, adică spațiile $C_p(X)$, $C_p(Y)$ sunt liniar homeomorfe. Care sunt proprietățile comune ale spațiilor X, Y, adică care proprietăți se păstrează la l_p-echivalențe.

Această teorie a fost furtunos dezvoltată de mulți matematicieni și rezultatele lor au fost incluse în monografiile [6, 76, 77]. În lucrările lui V. Valov [80] și M. Choban [14] unele rezultate au fost extinse pentru spațiile de funcții cu valori în spații normate. Sunt remarcabile teoremele generale formulate de M. Choban, care conțin soluțiile la multe probleme particulare (concrete).

Din acest punct de vedere apare următoarea problemă.

Problema 3. De dezvoltat C_p-teoria pentru spațiile de funcții cu valori în inele și module topologice.

Această problemă conține un caz particular.

Problema 4. De dezvoltat C_p-teoria pentru spațiile de funcții cu valori în grupuri topologice abeliene.

Grupurile topologice și modulele topologice sunt instrumente importante în diverse domenii ale matematicii, fizicii și aplicațiilor lor. Prin urmare studiul spațiilor de funcții cu valori în module topologice prezintă o direcție actuală de cercetare.

Scopul și obiectivele lucrării.

- stabilirea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor X, E și proprietățile spațiului $C_p(X, E)$;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care spațiile funcționale $C_p(X, E)$ sunt liniar homeomorfe;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care inelele topologice $C_p(X, E)$ sunt izomorfe.

Metodica cercetării. Construcțiile și metodele de demonstrație se bazează pe:

- noțiunile de bază din topologie;

- metodele teoriei inelelor și modulelor;

- aplicațiile operatorilor liniari.

Inovația științifică. În rezultatul realizării obiectivelor lucrării:

- a fost elaborată o metodă nouă de cercetare a spațiilor de funcții cu valori în module topologice;

- au fost stabilite unele proprietăți duale pentru anumite clase de spații funcționale;

- au fost demonstrate teoreme generale despre păstrarea proprietăților topologice la echivalențe liniare.

Problema științifică importantă soluționată constă în elaborarea unor metode de cercetare a spațiilor topologice cu ajutorul spațiilor cu structuri algebrice, ceea ce a condus la determinarea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor topologice și proprietățile algebrice ale spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice.

Valoarea teoretică și practică a lucrării. Au fost elaborate noi metode de cercetare a spațiilor de funcții cu valori în module topologice și au fost stabilite principii generale de păstrare a proprietăților topologice la echivalențe liniare.

Implementarea rezultatelor științifice.

- rezultatele și metodele dezvoltate în teză pot fi aplicate în investigațiile ulterioare ale spațiilor funcționale;

- rezultatele din teză pot servi drept suport pentru teme de masterat și pot constitui conținutul unor cursuri speciale pentru studenții și masteranzii de la specialitățile matematice.

Aprobarea lucrării.

Rezultatele lucrării au fost expuse la următoarele foruri științifice:

- International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2009)", Chișinău, 8-9 octombrie, 2009.

- The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2012, Chișinău, 22-25 august, 2012.

- The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50th anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science "IMCS-50", Chișinău, 19-23 august, 2014.

Publicații. Rezultatele principale ale tezei au fost publicate în 7 lucrări [27, 22, 28, 26, 29, 20, 21].

Sumarul compartimentelor tezei. Teza conține adnotări, introducere, 3 capitole, bibliografia, concluzii și recomandări.

Primul capitol conține:

- o sinteză a cercetărilor științifice expuse în literatura de specialitate privind evoluția dezvoltării metodelor de analiză a spațiilor funcționale;

- o argumentare a direcției și problemei de cercetare;

- unele noțiuni și rezultate cunoscute care sunt importante în următoarele capitole.

În **capitolul 2**, se studiază unele probleme generale de determinare a corelațiilor dintre proprietățile spațiului X și proprietăților spațiului $C_p(X, E)$, precum și problema extinderii funcționale. În particular, în acest capitol, s-a demonstrat că:

- celularitatea punct-finită a lui X este egală cu numărul lui Alexandroff al spațiului $C_p(X, E)$, adică $p(X) = a(C_p(X, E))$ (Teorema 2.7);

- $\mathbb{Z}$-desimea spațiului X este numărabilă, dacă și numai dacă spațiul $C_p(X, \mathbb{Z})$ este $\mathbb{Z}$-compact (Corolarul 2.20);

- X este discret, dacă și numai dacă $C_p(X, \mathbb{Z})$ este proiectiv complet, 0-stabil și $\mathbb{Z}$-compact (Teorema 2.38);

- unele criterii pentru care aplicațiile continue definite pe un subspațiu Y al unui spațiu τ-colectiv normal X pot fi prelungite continuu pe X (Corolarul 2.49).

În **capitolul 3**, se cercetează un domeniu important al C_p-teoriei și anume, echivalențele funcționale ale spațiilor topologice. Sunt introduse noțiuni noi, cum ar fi: R-modul topologic local simplu, mulțime a-mărginită și mulțime E-compact plină. Sunt stabilite condițiile în care proprietățile perfecte, tare perfecte și cele finit-deschise se păstrează la echivalențe liniare pe spații de funcții cu valori în module topologice (Teorema 3.71, Teorema 3.72 și respectiv Teorema 3.75).

În final, sunt expuse concluziile generale și recomandări.

1. STUDII ÎN DOMENIUL SPAȚIILOR FUNCȚIONALE CU STRUCTURI ALGEBRICE

Noțiunea de spațiu și funcție sunt două concepte importante care s-au dezvoltat, ca și însăși matematica, din antichitate până în prezent. Spațiile topologice au apărut din necesitatea studierii convergenței. În mod firesc apar mulțimile deschise, închise, vecinătățile punctelor, distanțe.

Funcțiile sau aplicațiile determină și legăturile dintre spații și mobilități pe spații.

În acest capitol:

- se introduc noțiunile și rezultatele de bază importante în următoarele capitole;

- este inclusă o sinteză a cercetărilor științifice expuse în literatura de specialitate privind evoluția dezvoltării metodelor de analiză a spațiilor funcționale.

1.1. Inele, grupuri și module topologice

Noțiunea de grup a apărut în secolul al XIX-lea în cercetările geometrice și cercetările referitoare la permutări. În geometrie au apărut ca grupuri de transformări geometrice: grupuri de deplasări (sau izometrii), grupul de asemănări, grupul transformărilor afine, grupul transformărilor proiective, grupul transformărilor topologice (continue). Acest fapt și unește topologia cu geometria. Grupul de permutări este un grup de transformări a unei mulțimi finite. E. Galua a aplicat subgrupurile grupului de permutări la soluționarea problemei de rezolvare a ecuațiilor în radicali. Aceste idei au dus la crearea teoriei Galua, un domeniu important al matematicii contemporane. Grupurile de transformări au influențat și cercetările din domeniul fizicii: transformările Lorentz, teoria relativității lui Einstein etc.

O mulțime nevidă G se numește *grup*, dacă pe G este definită o operație algebrică $(x, y) \mapsto x + y \in G$ cu următoarele proprietăți:

$G1$. Este asociativă, adică $x + (y + z) = (x + y) + z$ pentru orice $x, y, z \in G$;

$G2$. Admite unitate, adică există $e \in G$ (unitatea) astfel încât $x + e = e + x = x$ pentru orice $x \in G$;

$G3$. Admite elemente inverse, adică pentru orice $x \in G$ există $-x \in G$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = e$.

Un grup G se numește *comutativ* (sau *abelian*), dacă:

$G4$. $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in G$.

Un *grup topologic* este un grup înzestrat cu o topologie în care operația sa algebrică este continuă.

Un *inel* este o mulțime R împreună cu două operații algebrice $(x, y) \mapsto x + y$ (adunare) și $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (înmulțire) astfel încât:

$I1$. $(R, +)$ este un grup comutativ;

$I2$. Înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea $x(y + z) = xy + xz$ pentru orice $x, y, z \in R$.

Definiția 1.1. *O topologie τ_R pe un inel R se numește topologie de inel, iar R împreună cu τ_R se numește inel topologic, dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți:*

$IT1$. *$(x, y) \mapsto x + y$ este o aplicație continuă a mulțimii $R \times R$ în R;*

$IT2$. *$x \mapsto -x$ este o aplicație continuă a mulțimii R în R;*

$IT3$. *$(x, y) \mapsto x \cdot y$ este o aplicație continuă a mulțimii $R \times R$ în R.*

Definiția 1.2. *Fie G un grup abelian în raport cu operația de adunare și R un inel. Grupul G se numește R-modul de stânga sau, simplu, R-modul, dacă este definită operația de înmulțire $(r, a) \mapsto ra \in G$, unde $r \in R$ și $a \in G$, cu următoarele proprietăți:*

$M1$. *$r(a + b) = ra + rb$ pentru orice $r \in R$ și $a, b \in G$;*

$M2$. *$(r + s)a = ra + sa$ pentru orice $r, s \in R$ și $a \in G$;*

$M3$. *$r(sa) = (rs)a$ pentru orice $r, s \in R$ și $a \in G$.*

Altfel spus, un R-modul este un spațiu vectorial peste un inel R. De obicei, operația de înmulțire $(r, a) \mapsto ra$ se numește *înmulțirea cu scalar*. Evident, orice inel R este un R-modul. Un R-modul este cu unitate [82], dacă R posedă unitatea 1 și $1x = x$ pentru orice $x \in G$.

Exemplul 1.3. *Orice grup abelian este un $\mathbb{Z}$-modul, unde operația de înmulțire cu scalari este definită astfel: $na = a + a + ... + a$ (adunarea de n ori).*

Definiția 1.4. *Fie R un inel topologic și E un R-modul. O topologie τ pe E este o topologie de R-modul, iar E împreună cu τ se numește R-modul topologic, dacă:*

$MT1$. *$(x, y) \mapsto x + y$ este o aplicație continuă a mulțimii $E \times E$ în E;*

$MT2$. *$x \mapsto x + y$ este o aplicație continuă a mulțimii E în E;*

$MT3$. *$(r, x) \mapsto rx$ este o aplicație continuă a mulțimii $R \times E$ în E.*

Fie E și F două R-module. Aplicația $\varphi : E \longrightarrow F$ se numește *aplicație liniară*, dacă verifică condițiile:

$AL1$. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, pentru orice $x, y \in E$;

$AL2$. $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$, pentru orice $x \in E$ și $\alpha \in R$.

Aplicația liniară păstrează operația interioară (operația "+") și operația exterioară (operația "·"). Dacă o aplicație verifică doar condiția $AL1$, atunci această aplicație se numește *aplicație aditivă*.

1.2. Spații funcționale cu structuri algebrice

Fie X și E două spații topologice. Notăm cu E^X totalitatea aplicațiilor $f : X \longrightarrow E$ spațiului X în E, iar cu $C(X, E)$ totalitatea aplicațiilor continue $f : X \longrightarrow E$ ale spațiului X în E. În particular, dacă $E = \mathbb{R}$, se folosește notația $C(X)$, adică $C(X, \mathbb{R}) = C(X)$.

Vom nota cu $\tau(X)$ topologia spațiului topologic X. Fie $\mathcal{A}$ o familie de submulțimi ale lui X astfel încât $\emptyset \in \mathcal{A}$. Notăm

$$W(A, U) = \{f \in C(X, E) : f(A) \subseteq U\},$$

unde $A \in \mathcal{A}$, iar $U \in \tau(E)$. Totalitatea mulțimilor $W(A, U)$ formează subbaza unei topologii pe $C(X, E)$ care se numește *topologia convergenței uniforme pe elementele familiei* $\mathcal{A}$ [6]. Notăm această topologie cu $\tau_{\mathcal{A}}$.

Amintim că orice familie $\mathcal{L}$ de submulțimi ale mulțimii X formează o *subbază* a unei topologii $\tau(\mathcal{L})$ pe X, dacă $\cup\mathcal{L} = X$. Pentru a obține baza se construiește familia $\mathcal{L}$ de intersecții finite $L_1 \cap L_2 \cap ... \cap L_n$, unde $L_1, L_2, ..., L_n \in \mathcal{L}$ și $n \in \mathbb{N}$. Vom avea $U \in \tau(\mathcal{A})$, dacă și numai dacă pentru orice punct $x \in X$ există $H \in \mathcal{L}$ încât $x \in H \subseteq U$.

Vom avea că familia $\{W(A, U) : A \in \mathcal{A}, U \in \tau(E)\}$ formează o subbază. Dacă pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$ are loc $A \cap B \in \mathcal{A}$ și $A \cup B \in \mathcal{A}$, atunci familia $\{W(A, U) : A \in \mathcal{A}, U \in \tau(E)\}$ formează o bază a topologiei $\tau_{\mathcal{A}}$. Prezintă interes topologiile de tipul $\tau_{\mathcal{A}}$ pentru care:

- $\cup\mathcal{A} = X$;

- $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$ pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$.

Condiția $\cup\mathcal{A} = X$ permite să afirmăm că topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ este T_1-topologie. Condiția $A \cup B \in \mathcal{A}$ pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$ permite să afirmăm că familia $\{W(A, U) : A \in \mathcal{A}, U \in \tau(E)\}$ este o bază a topologiei $\tau_{\mathcal{A}}$ pe spațiul $C(X, E)$.

Dacă $\mathcal{A}$ constă din toate submulțimile finite ale lui X, atunci $\tau_{\mathcal{A}}$ se numește *topologia convergenței punctiforme*. Spațiul $C(X, E)$ în topologia convergenței punctiforme se notează cu $C_p(X, E)$.

Dacă $\mathcal{A}$ constă din toate submulțimi compacte, atunci $\tau_{\mathcal{A}}$ se numește *topologia convergenței uniforme pe compacte* sau *topologia compact-deschisă* și $C(X, E)$ în topologia compact-deschisă se notează cu $C_k(X, E)$.

Dacă $X \in \mathcal{A}$, atunci $\tau_{\mathcal{A}}$ se numește *topologia convergenței uniforme* și $C(X, E)$ în topologia convergenței uniforme se notează cu $C_u(X, E)$.

Dacă $X = \bigcup \mathcal{A}$ și $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$ pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$, atunci:

- topologia convergenței uniforme este topologia maximală în familia topologiilor de tipul $\tau_{\mathcal{A}}$ pe $C(X, E)$;

- topologia convergenței punctiforme este topologia minimală în familia topologiilor de tipul $\tau_{\mathcal{A}}$ pe $C(X, E)$;

- $C_u(X, E) \subseteq C_{\mathcal{A}}(X, E) \subseteq C_p(X, E)$.

Prin urmare orice mulțime compactă sau mărginită în careva topologie $\tau_{\mathcal{A}}$ va fi compactă sau, respectiv, mărginită în topologia convergenței punctiforme. Anume acest fapt a impulsionat C_p-teoria.

Dacă $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ este un șir de aplicații continue din $C_p(X, E)$, atunci $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge către o aplicație $f \in C_p(X, E)$, dacă și numai dacă, pentru orice $x \in X$ șirul $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge către $f(x)$ în E. Analog orice șir $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ din $C_u(X, E)$ converge către o aplicație f din $C_u(X, E)$, dacă și numai dacă, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniform către f în E. Astfel la baza topologiei convergenței punctiforme (cât și a topologiei convergenței uniforme) stă noțiunea de convergență punctiformă (respectiv convergență uniformă).

În lucrare se studiază spațiul $C_p(X, E)$ cu topologia convergenței punctiforme.

Propoziția 1.5 (vezi [6, Propoziția 0.3.1]). *Fie $\mathcal{B}$ o bază a spațiului E. Atunci familia*

$$\{W(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n) : x_i \in X, U_i \in \mathcal{B}, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}\}$$

este o bază a spațiului $C_p(X, E)$.

Demonstrație. Fie $f \in W(x_1, x_2, ..., x_n, V_1, V_2, ..., V_n)$, unde $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, $V_1, V_2, ..., V_2$ sunt submulțimi deschise ale spațiului E și $n \in \mathbb{N}$. Atunci pentru fiecare $i = \overline{1, n}$ există $U_i \in \mathcal{B}$ astfel încât $f(x_i) \subseteq U_i \subseteq V_i$. Deci $f \in W(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n)$ și întrucât aplicația f a fost aleasă arbitrar reiese că

$$W(x_1, ..., x_n, U_1, ..., U_n) \subseteq W(x_1, ..., x_n, V_1, ..., V_n).$$

Prin urmare

$$\{W(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n) : x_i \in X, U_i \in \mathcal{B}, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}\}$$

este o bază a spațiului $C_p(X,E)$.

Propoziția 1.6 (vezi [6, Propoziția 0.3.2]). *Dacă $E \subseteq F$, atunci $C_p(X,E)$ este un subspațiu al lui $C_p(X,F)$. În particular, dacă E este închis în F, atunci $C_p(X,E)$ este un subspațiu închis al lui $C_p(X,F)$.*

Demonstrație. Fie E și F două spații topologice astfel încât $E \subseteq F$. Este evident că, dacă $f \in C_p(X,E)$, atunci $f \in C_p(X,F)$.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, .., x_n \in X$ și $U_1, U_2, ..., U_n$ submulțimi deschise ale spațiului E, atunci există submulțimile deschise $V_1, V_2, ..., V_n$ din F astfel încât $U_i = E \cap V_i$, pentru orice $i = \overline{1,n}$. Prin urmare

$$W(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n) = C_p(X,E) \cap W(x_1, x_2, ..., x_n, V_1, V_2, ..., V_n).$$

Deci $C_p(X,E)$ este un subspațiu al spațiului $C_p(X,F)$.

Presupunem că E este un subspațiu închis al lui F. Fixăm $f \in C_p(X,F) \setminus C_p(X,E)$. Atunci există $x \in X$ astfel încât $f(x) \in F \setminus E$. Fixăm o submulțime deschisă V a spațiului F. Atunci $f \in W(x,V) \subseteq C_p(X,F)$ și $W(x,V) \cap C_p(X,E) = \emptyset$. Prin urmare $C_p(X,E)$ este închis în $C_p(X,F)$.

Propoziția 1.7 (vezi [6, Propoziția 0.3.3]). *Spațiul $C_p(X, \Pi_{\alpha \in A} E_\alpha)$ este homeomorf canonic cu spațiul $\Pi_{\alpha \in A} C_p(X, E_\alpha)$.*

Corolarul 1.8. *Spațiul $C_p(X, E^\tau)$ este homeomorf canonic cu spațiul $C_p(X,E)^\tau$.*

Propoziția 1.9 (vezi [6, Propoziția 0.3.4]). *Fie $\Sigma_\oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ este suma topologică liberă a spațiilor X_α. Atunci spațiul $C_p(X,E)$ este homeomorf canonic cu spațiul $\Pi_{\alpha \in A} C_p(X_\alpha, E)$.*

Amintim că o *scufundare* a lui X în Y este o aplicație $e : X \to Y$ astfel încât e este un homeomorfism al lui X în $e(X) \subseteq Y$.

Propoziția 1.10. *Spațiul E se poate scufunda ca subspațiu închis în $C_p(X,E)$. Mai mult, această scufundare este una naturală.*

Demonstrație. Pentru orice $a \in E$ definim funcția $a_X : X \longrightarrow E$ prin $a_X(x) = a$ pentru orice $x \in X$, cu alte cuvinte a_X este o funcție constantă.

Fie $e : E \to C_p(X,E)$, unde $e(a) = a_X(x)$ pentru orice $a \in E$. Funcția e este injectivă, deoarece, dacă $a, b \in E$, cu $a \neq b$, atunci $a_X(x) = a \neq b = b_X(x)$ pentru orice $x \in X$.

Mulțimile

$$W(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n) = \{f \in C_p(X, E) : f(x_i) \in U_i\},$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ și $U_1, U_2, ..., U_n$ sunt submulțimi deschise ale lui E, formează baza deschisă a spațiului $C_p(X, E)$.

Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ și U este deschisă în E, atunci

$$e(U) = \{a_X : a \in U\} = e(E) \cap W(x_1, x_2, ..., x_n, U, U, ..., U).$$

Deci e este deschisă în $e(E)$ sau, echivalent, $e^{-1} : e(E) \longrightarrow E$ este continuă.

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} e^{-1}(W(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n) \cap e(E)) &= \{a \in E : a_X \in U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n\} \\ &= U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n. \end{aligned}$$

Ceea ce înseamnă că e este continuă. Așadar e este un homeomorfism al lui E în $e(E)$, adică o scufundare a lui E în $C_p(X, E)$.

Fixăm $g \in C_p(X, E)$ astfel încât $g \notin e(E)$. Atunci există două puncte distincte $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $g(x_1) \neq g(x_2)$. Fie acum U_1 și U_2 două mulțimi deschise din E astfel încât $g(x_1) \in U_1$, $g(x_2) \in U_2$ și $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Atunci $g \in W(x_1, x_2, U_1, U_2)$ și $W(x_1, x_2, U_1, U_2) \cap e(R) = \emptyset$. Așadar $e(E)$ este închisă în $C_p(X, E)$.

Definiția 1.11. *Spațiul X se numește E-complet regulat, dacă pentru orice submulțime închisă F a lui X și orice punct $x \in X \setminus F$ există $f \in C(X, E)$ astfel încât $f(x) \notin cl(f(F))$, unde $cl(f(F))$ este închiderea mulțimii $f(F)$.*

Spațiul $C(X, E)$ este "bogat" în elemente, dacă spațiul X este E-complet regulat.

Produsul de spații E-complet regulate este E-complet regulat. Subspațiul unui spațiu E-complet regulat este E-complet regulat. Un spațiu X este E-complet regulat, dacă și numai, dacă este homeomorf unui subspațiu al produsului E^τ pentru un careva cardinal τ arbitrar [83].

Fie $\mathcal{F}$ o familie de aplicații continue ale spațiului X în E. Spunem că $\mathcal{F}$ *separă punctele* din X (sau este *separatoare* [6]), dacă pentru orice $x, y \in X$, $x \neq y$ există $f \in \mathcal{F}$ astfel încât $f(x) \neq f(y)$. Spunem că $\mathcal{F}$ *separă punctele și mulțimile închise* (sau este *regulată* [6]), dacă pentru orice $x \in X$ și orice mulțime închisă $F \subseteq X \setminus \{x\}$ există $f \in \mathcal{F}$ astfel încât $f(x) \notin cl(f(F))$.

Propoziția 1.12. *Un spațiu X este E-complet regulat, dacă și numai dacă $C(X,E)$ este o familie separatoare și regulată.*

Demonstraţie. Proprietatea de a fi E-complet regulat este identică cu proprietatea de regularitate a familiei $C(X,E)$, iar orice familie regulată $C(X,E)$ este și separatoare. Într-adevăr, pentru orice două puncte x și y din X considerăm punctul x și mulțimea închisă $\{y\}$.

Fie R un inel topologic cu unitate. Spațiul X se numește *R-Tychonoff*, dacă pentru orice submulțime închisă F a lui X și orice punct $x \in X \setminus F$ există $f \in C(X,R)$ astfel încât $f(x) = 1$ și $F \subseteq f^{-1}(0)$.

Remarca 1.13. *Fie X un spațiu R-Tychonoff. Atunci:*

(i) X este spațiu Tychonoff;

(ii) X este spațiu R-complet regulat.

Un spațiu se numește *zero-dimensional*, dacă are o bază care constă numai din mulțimi deschise și închise, adică $indX = 0$ (*dimensiunea inductivă mică*) [32].

În cele ce urmează vom defini noțiunile de: *dimensiune inductivă mică*, *dimensiune inductivă mare* și *dimensiune de acoperire.* Dar înainte de a face acest lucru vom aminti definiția noțiunii de frontieră. Frontiera unei submulțimi $A \subseteq X$ este mulțimea punctelor $x \in X$ care posedă următoarea proprietate: pentru orice vecinătate U a lui x avem că $A \cap U \neq \emptyset$ și $X \setminus A \cap U \neq \emptyset$.

Definiția 1.14. *Pentru un spațiu regulat X dimensiunea inductivă mică (sau dimensiunea Menger-Urysohn), notată cu $indX$, se definește astfel:*

$MU1$. $indX = -1$ dacă și numai dacă $X = \emptyset$;

$MU2$. $indX \leq n$, unde $n = 0, 1, ...,$ dacă pentru orice punct $x \in X$ și orice vecinătate $V \subseteq X$ a lui x există o submulțime deschisă $U \subseteq X$ astfel încât $x \in U \subseteq V$ și $indfr(U) \leq n-1$;

$MU3$. $indX = n$, dacă $indX \leq n$ și $indX > n-1$, adică nu are loc inegalitatea $indX \leq n-1$;

$MU4$. $indX = \infty$ dacă $indX > n$, $n = -1, 0, 1, 2, ...$

Produsul de spații zero-dimensionale este zero-dimensional. Subspațiul unui spațiu zero-dimensional este zero-dimensional. Orice spațiu metric, separabil și zero-dimensional poate fi scufundat în $\mathbb{R}$.

Definiția 1.15. *Pentru un spațiu normal X dimensiunea inductivă mare (sau dimensiunea Brouwer-Čech), notată cu $IndX$, se definește astfel:*

$BC1$. $IndX = -1$ dacă și numai dacă $X = \emptyset$;

$BC2$. $IndX \leq n$, unde $n = 0, 1, ...$, dacă pentru orice mulțime închisă $F \subseteq X$ și orice mulțime deschisă $V \subseteq X$ care conține F există o submulțime deschisă $U \subseteq X$ astfel încât $F \subseteq U \subseteq V$ și $Indfr(U) \leq n - 1$;

$BC3$. $IndX = n$, dacă $IndX \leq n$ și $IndX > n - 1$, adică nu are loc inegalitatea $IndX \leq n - 1$;

$BC4$. $IndX = \infty$ dacă $IndX > n$, $n = -1, 0, 1, 2, ...$

Pentru orice spațiu normal $indX \leq IndX$ ([32]), iar pentru orice spațiu metric separabil $indX = IndX$.

Dacă $\mathcal{A}$ este o acoperire a spațiului X, atunci acoperirea $\mathcal{B}$ este mai fină decât $\mathcal{A}$ dacă pentru orice $B \in \mathcal{B}$ există $A \in \mathcal{A}$ astfel încât $B \subseteq A$.

Definiția 1.16. *Pentru un spațiu normal X dimensiunea de acoperire (sau dimensiunea Čech-Lebesgue), notată cu $dimX$, se definește astfel:*

$CL1$. $dimX \leq n$, unde $n = 0, 1, ...$, dacă pentru orice acoperire finită și deschisă a spațiului X putem găsi o acoperire finită și deschisă mai fină cu cardinalul $\leq n$;

$CL2$. $dimX = n$, dacă $dimX \leq n$ și $dimX > n - 1$;

$CL3$. $dimX = \infty$ dacă $dimX > n$, $n = -1, 0, 1, 2, ...$

Pentru orice spațiu normal $IndX = 0$ dacă și numai dacă $dimX = 0$, iar pentru orice spațiu metric separabil X, $indX = IndX = dimX$ ([32]).

Propoziția 1.17. *Dacă X este zero-dimensional, atunci X este R-Tychonoff.*

Demonstrație. Fie F o submulțime închisă din X și $x \in X \setminus F$. Atunci există o submulțime deschisă și închisă $U \subseteq X \setminus F$ astfel încât $x \in U$. Aplicația $\chi_U : X \longrightarrow R$ definită prin $\chi_U(x) = 1$ pentru orice $x \in U$ și $\chi_U(y) = 0$ pentru orice $y \in X \setminus U$ este continuă.

Reciproca Propoziției 1.17 nu este întotdeauna adevărată. Însă merită de evidențiat următoarea

Propoziția 1.18 (vezi [1, Teorema 2.11])**.** *Fie R un corp topologic ordonat. Dacă $R \neq \mathbb{R}$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) $indX = 0$;

(ii) X este R-Tychonoff;

(iii) X este R-complet regulat.

Demonstraţie. Implicația $(i) \to (ii)$ rezultă din Propoziția 1.17. Implicația $(ii) \to (iii)$ este evidentă.

Fie X un spațiu R-complet regulat. Deoarece R este ordonat și $R \neq \mathbb{R}$, vom avea $indR = 0$. Din condiția că X este R-complet regulat obținem că $X \subseteq R^\tau$ pentru un careva cardinal τ. Deci $indX = 0$. Implicația $(iii) \to (i)$ este demonstrată.

Următoarea teoremă ne arată cum este amplasat $C_p(X, R)$ în R^X (vezi [6, Propoziția 0.3.6] pentru $R = \mathbb{R}$).

Teorema 1.19. *Dacă X este R-Tychonoff, atunci $C_p(X, R)$ este un subspațiu dens al produsului cartezian R^X*

Demonstraţie. Conform definiției topologiei convergenței punctiforme aceasta coincide cu topologia de subspațiu al spațiului R^X cu topologia Tychonoff pe R^X.

Fixăm o aplicație $f \in R^X$. Fixăm punctele $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Alegem $g_i \in C(X, R)$ astfel încât $g_i(x_i) = 1$ și $g(x_j) = 0$ pentru $i \neq j$ și $i = \overline{1, n}$. Notăm

$$h = g_1 f(x_1) + g_2 f(x_2) + ... + g_n f(x_n),$$

atunci $h \in C(X, R)$ și $h(x_i) = f(x_i)$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Deci $h \in W(f, x_1, x_2, ..., x_n)$. Teorema este demonstrată.

Corolarul 1.20. *Spațiul $C_p(X, R)$ este R-complet regulat.*

Corolarul 1.21. *Dacă R este zero-dimensional, atunci $C_p(X, R)$ este zero-dimensional.*

Menționăm ([81, p. 369]) că, dacă X este infinit, atunci ponderea lui R^X este egală cu produsul dintre cardinalitatea lui X și $w(X)$, adică $w(R^X) = |X| \cdot w(R)$ [50]. În plus, este bine cunoscut că pentru orice submulțime densă $Y \subseteq R^X$, Y are aceeași pondere ca și R^X.

Corolarul 1.22 (vezi [81, Corolarul 6.2.2] pentru $R = \mathbb{R}$)**.** *Dacă X este un spațiu R-Tychonoff infinit, atunci $w(C_p(X, R)) = |X| \cdot w(R)$.*

Demonstraţie. Întrucât $C_p(X, R)$ este dens în R^X avem că

$$w(R) \leq w(C_p(X, R)) = w(R^X) = |X| \cdot w(R).$$

Corolarul este demonstrat.

Corolarul 1.23. *Fie X și Y două spații R-Tychonoff infinite și $|X| + |Y| > w(R)$. Dacă $C_p(X, R)$ și $C_p(Y, R)$ sunt homeomorfe, atunci $|X| = |Y|$.*

Demonstraţie. Dacă $C_p(X, R)$ și $C_p(Y, R)$ sunt homeomorfe, atunci

$$w(C_p(X, R)) = w(C_p(Y, R)).$$

Deci

$$|X| \cdot w(R) = |Y| \cdot w(R) \geq w(R).$$

Prin urmare $|X| = |Y|$.

Exemplul 1.24. *Fie $\tau \geq c$ și $R = \mathbb{R}^\tau$. Fie X și Y două spații topologice discrete. Dacă $|X| = \aleph_0$ și $|Y| = \tau$, atunci atât $C_p(X, R)$ cât și $C_p(Y, R)$ sunt homeomorfe cu R^τ. Însă $|X| < |Y|$.*

Amintim că *densitatea* $d(X)$ a unui spațiu X este cel mai mic cardinal infinit τ astfel încât există o submulțime densă $Y \subseteq X$ și $|Y| \leq \tau$.

Corolarul 1.25 (vezi [81, Corolarul 6.2.3] pentru $R = \mathbb{R}$)**.** *Fie X un spațiu R-Tychonoff infinit. Dacă R este metrizabil și separabil, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) $C_p(X, R)$ este separabil și metrizabil;

(ii) $C_p(X, R)$ este metrizabil;

(ii) $C_p(X, R)$ satisface prima axiomă a numerabilității;

(iv) X este numărabil.

Demonstraţie. Dacă X este numărabil, atunci $w(C_p(X, R)) = \aleph_0$ și deci satisface a două și în consecință prima axiomă a numerabilității. Deoarece $d(C_p(X, R)) \leq w(C_p(X, R))$ rezultă că $C_p(X, R)$ este separabil, deci $C_p(X, R)$ este separabil și satisface a doua axiomă a numerabilității. Prin urmare $C_p(X, R)$ este metrizabil.

Remarca 1.26. *Dacă R este metrizabil, atunci proprietățile (ii)-(iv) sunt echivalente.*

Notăm prin $\tau^*(X)$ familia tuturor mulțimilor deschise și nevide ale lui X. Cardinalul infinit

$$c(X) = \aleph_0 \cdot sup\{|\gamma| : \gamma \subseteq \tau^*(X) \text{ este disjunctă}\}$$

se numește *numărul Souslin* al (sau *celularitatea*) spațiului X. Spațiul X are *proprietatea Souslin*, dacă $c(X) = \aleph_0$. Cel mai mic cardinal infinit τ astfel încât pentru orice punct $x \in X$

există $\gamma \subseteq \tau(X)$ cu $|\gamma| \leq \tau$ și $\{x\} = \bigcap \gamma$, se numește *pseudo-caracterul* spațiului X și se notează cu $\psi(X)$.

Fie $x \in X$, familia $\mathcal{L} \subseteq \tau(X)$ se numește *bază locală* în x, dacă $x \in \cap\mathcal{L}$ și pentru orice vecinătate deschisă U a lui x există $L \in \mathcal{L}$ încât $L \subseteq U$. Cel mai mic cardinal infinit τ astfel încât orice punct x are o bază locală $\mathcal{L}$ cu $|\mathcal{L}| \leq \tau$ se numește *caracterul* spațiului X și se notează $\chi(X)$. În particular, dacă $\chi(X) = \aleph_0$ spunem că X satisface *prima axiomă a numerabilității.*

Este bine cunoscut faptul că $d(X) \leq w(X)$ și $\chi(X) \leq w(X)$. Dacă X este grup topologic, atunci $w(X) = d(X) + \chi(X)$. Pentru orice spațiu această egalitatea nu are loc.

Exemplul 1.27. *În calitate de X poate fi luată dreapta lui Sorgenfrey, adică $X = \mathbb{R}$ cu topologia determinată de baza deschisă $\{[x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x < y\}$. Acest spațiu se mai numește "spațiu săgeată". Vom avea $d(X) = \chi(X) = \aleph_0$ și $w(X) = c = 2^{\aleph_0}$. Prin urmare $d(X) < w(X)$ și $\chi(X) < w(X)$.*

Exemplul 1.28. *Conform Teoremei Hewitt-Marczewski-Pondiczery ([31, Teorema 2.3.15]) $d(\mathbb{I}^\tau) = \aleph_0$ dacă $\tau \leq c = 2^{\aleph_0}$, unde $\mathcal{I} = [0, 1]$. Dacă $\aleph_0 < \tau \leq c$, atunci $X \times \mathcal{I}^\tau$, unde X este dreapta Sorgenfrey, vom avea următoarele proprietăți:*

(i) $d(X \times \mathcal{I}^\tau) = d(X)d(\mathcal{I}^\tau) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$;

(ii) $\chi(X \times \mathcal{I}^\tau) = \chi(X)\chi(\mathcal{I}^\tau) = \aleph_0 \cdot \tau = \tau$;

(iii) $w(X \times \mathcal{I}^\tau) = w(X)w(\mathcal{I}^\tau) = c \cdot \tau = c$.

Prin urmare $d(X \times \mathcal{I}^\tau) < w(X \times \mathcal{I}^\tau)$ și $\chi(X \times \mathcal{I}^\tau) \leq w(X \times \mathcal{I}^\tau)$.

Exemplul 1.29. *Dacă X este discret și numărabil, atunci $\chi(Y) = 1 < \aleph_0$, $d(Y) = w(Y) = |Y|$. Dacă X este dreapta Sorgenfrey, Y discret și $\aleph_0 < |Y| = \tau < c$, atunci pentru $X \times Y$ vom avea:*

(i) $d(X \times Y) = d(X) \cdot d(Y) = \aleph_0 \cdot \tau = \tau$;

(ii) $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y) = \aleph_0$;

(iii) $w(X \times Y) = w(X) \cdot w(Y) = c \cdot \tau = c$.

Prin urmare $\chi(X \times Y) < d(X \times Y) < w(X \times Y)$.

Notăm cu $exp(X)$ totalitatea submulțimilor lui X. Familia $\mathcal{N} \subseteq \tau(X)$ se numește *rețea* în X, dacă pentru orice $x \in X$ și pentru orice vecinătate deschisă U a lui x există $N \in \mathcal{N}$ încât $x \in N \subseteq U$. Notăm cu $nw(X)$ cel mai mic cardinal infinit τ pentru care în X există o rețea $\mathcal{N}$ astfel încât $|\mathcal{N}| \leq \tau$.

Spunem că X poate fi *condensat* pe spațiul Y, dacă există o aplicație continuă și bijectivă a lui X în Y. Cea mai mică pondere a spațiilor Y în care X poate fi condensat se notează $iw(X)$ și se numește *i-ponderea* lui X.

Corolarul 1.30. *Dacă X este un spațiu R-Tychonoff, atunci pentru numărul lui Souslin vom avea $c(C_p(X,R)) \leq d(R)$.*

Demonstrație. Dacă $d(R) = \tau$, atunci $c(R^m) = \tau$ pentru orice cardinal m ([31, Problema 2.7.11]).

Corolarul 1.31. *Dacă R este separabil, atunci numărul Souslin a spațiului $C_p(X,R)$ este numărabil.*

În particular, pentru $C_p(X)$ sunt adevărate următoarele proprietăți duale privind funcțiile cardinale.

Propoziția 1.32. *Fie X un spațiu Tychonoff. Atunci:*

(i) $|X| = \chi(C_p(X)) = w(C_p(X))$ [6, Teorema I.1.1];

(ii) $nw(X) = nw(C_p(X))$ [6, Teorema I.1.3];

(iii) $d(X) = iw(C_p(X)) = \psi(C_p(X))$ [6, Teorema I.1.4];

(iv) $iw(X) = d(C_p(X))$ [6, Teorema I.1.5].

În consecință obținem următorul

Corolarul 1.33 (vezi [6, Corolarul I.1.6])**.** *Fie X și Y două spații Tychonoff. Dacă $C_p(X)$ este homeomorf cu $C_p(Y)$, atunci:*

(i) $nw(X) = nw(Y)$;

(ii) $d(X) = d(Y)$;

(iii) $iw(X) = iw(Y)$;

(iv) $|X| = |Y|$.

În cele ce urmează vom considera spațiul $C_p(C_p(X,R),R)$, adică spațiul aplicațiilor continue ale spațiului $C_p(X,R)$ în R. Prezintă interes subspațiul aplicațiilor liniare continue $L(X,R) \subseteq C_p(C_p(X,R),R)$, pentru cazul $R = \mathbb{R}$.

Definiția 1.34. *Fie $x \in X$ un punct fixat. Atunci $\xi_x : C_p(X,R) \to R$ definită prin $\xi_x(f) = f(x)$ se numește aplicația de evaluare în x.*

Propoziția 1.35. *Aplicația de evaluare* $\xi_x : C_p(X,R) \longrightarrow R$ *este continuă pentru orice punct* $x \in X$.

Demonstraţie. Fie $x \in X$. Pentru orice mulțime deschisă U din E avem

$$\xi_x^{-1}(U) = \{f \in C_p(X,E) : f(x) \in U\} = W(x,U).$$

Însă $W(x,U)$ este un element din subbaza topologiei pe $C_p(X,E)$, adică $\xi_x^{-1}(U)$ este deschisă în $C_p(X,E)$ pentru orice submulțime deschisă $U \subseteq E$.

Definiția 1.36. *Aplicația* $e_X : X \to C_p(C_p(X,R),R)$, *unde* $e_X(x) = \xi_x$ *pentru orice* $x \in X$ *se numește aplicația canonică de evaluare.*

Propoziția 1.37. *Aplicația canonică de evaluare* $e_X : X \longrightarrow C_p(C_p(X,R),R)$ *este continuă.*

Demonstraţie. Fie

$$U = W(f_1, f_2, ..., f_k, U_1, U_2, ..., U_k) \cap e_X(X)$$

o mulțime deschisă în $C_p(C_p(X,R),R) \cap e_X(X)$. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că $U \subseteq e_X(X)$, adică

$$\begin{aligned} U &= \{\xi_x \in e_X(X) : \xi_x(f_i) \in U_i, x \in X, i = \overline{1,k}\} \\ &= \{\xi_x \in e_X(X) : f_i(x) \in U_i, x \in X, i = \overline{1,k}\}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} e_X^{-1}(U) &= \{x \in X : f_i(x) \in U_i, i = \overline{1,k}\} \\ &= \cap\{f_i^{-1}(U_i) : i = \overline{1,k}\}. \end{aligned}$$

Întrucât pentru orice $i = \overline{1,k}$ și $f_i \in C(X,R)$, mulțimea $e_X^{-1}(U)$ este o intersecție finită de mulțimi deschise, deci $e_X^{-1}(U)$ este deschisă.

Propoziția 1.38. *Dacă* $C_p(X,R)$ *este o familie separatoare și regulată, aplicația de evaluare canonică* $e_X : X \longrightarrow C_p(C_p(X,R),R)$ *este un homeomorfism al spațiului* X *în subspațiul* $e_X(X)$ *al lui* $C_p(C_p(X,R),R)$.

Demonstraţie. În primul rînd, vom arăta că e_X este injectivă. Fie $x, y \in X$, $x \neq y$. Din ipoteză, $C_p(X,R)$ este o familie separatoare, adică există o funcție $f \in C_p(X,R)$ astfel încât $f(x) \neq f(y)$, așadar $\xi_x \neq \xi_y$. Prin urmare aplicația $e_X : X \longrightarrow e_X(X)$ este bijectivă.

Acum vom demonstra că e_X^{-1} este continuă. Fie F o submulțime închisă a lui X. Din ipoteză $C_p(X,R)$ este o familie regulată, adică pentru orice $x \notin F$ există $f \in C_p(X,R)$ astfel încât $f(x) \notin cl_R f(F)$. Așadar $f(x)$ are o vecinătate $U_{f(x)}$ pentru care $U_{f(x)} \cap f(F) = \emptyset$. Atunci $W(f, U_{f(x)})$ este o vecinătate a lui ξ_x care nu se conține în $e_X(F)$, adică $e_X(F)$ este închisă. Așadar e_X^{-1} este continuă.

Corolarul 1.39. *Dacă spațiul X este R-Tychonoff, atunci X este homeomorf cu subspațiul $e_X(X)$ al spațiului $C_p(C_p(X,R),R)$.*

Astfel am obținut că X poate fi scufundat în $C_p(C_p(X,E),E)$. Pentru cazul $R=\mathbb{R}$ se știe că X poate fi scufundat ca subspațiu închis în $C_p(C_p(X,E),E)$.

Notăm

$$L_p(X,R) = \{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \in C_p(C_p(X,R),R) : x_1,...,x_n \in e_X(X), \lambda_1,...,\lambda_n \in R, n \in \mathbb{N}\},$$

unde $x_i(f) = f(x_1)$, $i = 1,2,...,n$.

Remarca 1.40. *Spațiul $L_p(X,R)$ este un R-modul topologic.*

Dacă $R=\mathbb{R}$, atunci spațiul $L_p(X,R)$ se notează cu $L_p(X)$, iar spațiul $C_p(C_p(X,R),R)$ se notează cu $C_pC_p(X)$ [6]. În cele ce urmează vom prezenta câteva rezultate importante pentru cazul $R=\mathbb{R}$ care au fost extinse în capitolul 3.

Fie L un spațiul liniar peste $\mathbb{R}$. Spațiul tuturor funcționalelor liniare continue (aplicațiile liniare continue cu valori în $\mathbb{R}$) definite pe L, în topologia convergenței punctiforme, se numește *spațiul dual* al lui L și se notează cu L' [6].

Propoziția 1.41. *[6, Propoziția 0.5.7] $L_p(X) = (C_p(X))'$.*

La baza Propoziției 1.41 stă următorul rezultat.

Propoziția 1.42. *[6, Propoziția 0.5.8] Dacă $\phi \in C_pC_p(X)$ și $\phi : C_p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ este o aplicație liniară continuă, atunci există $x_1,...,x_n \in X$ și $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât*

$$\phi = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n.$$

Propoziția 1.43. *[6, Propoziția 0.5.9] Dacă X este un spațiu Tychonoff, atunci:*

(i) X este un subspațiu închis al lui $L_p(X)$;

(ii) $L_p(X)$ este un subspațiu închis al lui $C_pC_p(X)$;

(iii) X este un subspațiu închis în $C_pC_p(X)$.

Propoziția 1.44 (vezi [6, Propoziția 0.5.11]). *Orice aplicație $f \in C_p(X)$ poate fi prelungită în mod unic la o funcțională continuă și liniară $\widetilde{f} : L_p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Amintim că două spații Tychonoff X și Y se numesc l_p*-echivalente* (respectiv u_p*-echivalente*, respectiv t_p*-echivalente*) dacă spațiile $C_p(X)$ și $C_p(Y)$ sunt liniar homeomorfe (respectiv uniform homeomorfe, respectiv homeomorfe). Evident, dacă X și Y sunt homeomorfe, atunci X și Y sunt l_p-echivalente, afirmația inversă nu este întotdeauna adevărată [81].

Exemplul 1.45 (vezi [81, Exemplul 6.2.4]). *Fie $X = [0,1] \cup [2,3]$ și $Y = [0,2] \cup \{3\}$. Evident, aceste spații nu sunt homeomorfe. Pe de altă parte, aplicația $u : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y)$ definită prin*

$$u(f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,1] \\ f(x+1) - (f(2) - f(1)), & x \in [1,2] \\ f(2) - f(1), & x = 3 \end{cases}$$

este un homeomorfism liniar între $C_p(X)$ și $C_p(Y)$.

Dacă X și Y sunt spații compacte, iar spațiile $C_p(X)$ și $C_p(Y)$ sunt liniar homeomorfe, atunci spațiile $C_u(X)$ și $C_u(Y)$ sunt la fel liniar homeomorfe [81].

Teorema 1.46 (vezi [81, Teorema 6.2.5]). *Fie X și Y două spații Tychonoff compacte. Dacă aplicația $\varphi : C_p(X) \longrightarrow C_p(Y)$ este un homeomorfism liniar, atunci aplicația $\varphi : C_u(X) \longrightarrow C_u(Y)$ este la fel un homeomorfism liniar.*

Afirmația inversă însă nu este întotdeauna adevărată. Drept contra exemplu putem folosi Teoremele lui Milyutin și Pestov la care ne vom referi în paragraful 1.4..

Revenind la l_p-echivalențe prezintă un interes deosebit următorul corolar al Propoziției 1.44.

Corolarul 1.47 (vezi [6, Corolarul 0.5.12]). *Spațiile $L_p(X)$ și $L_p(Y)$ sunt liniar homeomorfe, dacă și numai, dacă sunt liniar homeomorfe $C_p(X)$ și $C_p(Y)$.*

În baza acestui corolar poate fi demonstrată următoarea propoziție, care conține un exemplu de proprietate topologică care se păstrează la l_p-echivalențe.

Propoziția 1.48 (vezi [6, 0.5.13]). *Fie $\mathcal{P}$ o clasă de spații topologice cu următoarele proprietăți:*

(i) dacă $X \in \mathcal{P}$, atunci orice imagine continuă a lui X aparține clasei $\mathcal{P}$;

(ii) dacă $X = \cup\{X_n : X_n \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}\}$*, atunci* $X \in \mathcal{P}$*;*

(iii) dacă $X, Y \in \mathcal{P}$*, atunci* $X \times Y \in \mathcal{P}$*;*

(iv) $\mathbb{R} \in \mathcal{P}$*.*

Dacă $X \in \mathcal{P}$*, atunci* $L_p(X) \in \mathcal{P}$*.*

Teoria spațiilor funcționale este un domeniu actual al matematicii care se dezvoltă vertiginos. Unele probleme deja au fost formulate anterior în lucrările lui J. Cao, A. H. Tomita, M. M. Choban, P. S. Kenderov, W. B. Moors, J.-B. Gatsinzi, S. K. Ghosh, A. Jindal, R. A. McCoy, S. Kundu, K. Keimel, Z. Li, S. Maghsoudi, W. Wm. McGovern, R. Raphael, Z. Yang, Y. Zheng, J. Chen, P. Yan ([58, 39, 49, 84, 85, 54, 13, 52, 19, 36, 56, 57]).

1.3. Unele probleme importante în C_p-teoria

Conform A. V. Arhangeliskii [6, 7] majoritatea problemelor din teoria C_p pot fi clasificate în următorul mod:

Problema A1 (Problema generală A din [6] pentru $R = \mathbb{R}$). De stabilit corelația dintre proprietățile spațiului topologic X și proprietățile inelului topologic $C_p(X, R)$. Astfel de proprietăți se numesc *proprietăți duale*.

Cazuri particulare ale problemei privind proprietățile duale:

(i) Care proprietăți ale spațiului topologic X sunt determinate doar de proprietățile spațiului topologic $C_p(X, R)$? Astfel de proprietăți se numesc *proprietăți super-topologice*.

(ii) Care proprietăți ale spațiului topologic X sunt determinate doar de proprietățile spațiului liniar topologic $C_p(X, R)$? Astfel de proprietăți se numesc *proprietăți topologice liniare*.

(iii) Care proprietăți ale spațiului topologic X sunt determinate doar de proprietățile algebrice ale inelului topologic $C_p(X, R)$? Astfel de proprietăți se numesc *proprietăți topologico-algebrice*.

(iv) Care proprietăți ale spațiului topologic X sunt determinate doar de proprietățile inelului $C_p(X, R)$? Astfel de proprietăți se numesc *proprietăți algebrice*.

(iv) Care proprietăți ale spațiului topologic X sunt determinate doar de proprietățile spațiului uniform $C_p(X, R)$? Astfel de proprietăți se numesc *proprietăți uniforme*.

Problema A1 generează următoarea

Problema A2 (Problema generală A' din [6] pentru $R = \mathbb{R}$). De stabilit corelația dintre proprietățile spațiilor topologice X și Y în cazul când $C_p(X,R)$ și $C_p(Y,R)$ sunt homeomorfe, liniar homeomorfe sau liniar izomorfe?

Primele rezultate fundamentale le putem găsi în [11]. Evident cele mai multe rezultate privind Problema A2 sunt pentru cazul $C_p(X)$ ([6, 68, 78]). Mai puține sunt rezultatele pentru cazuri mai generale: în [80, 14] pentru cazul spațiilor liniar normate, în [20] pentru R-module.

Problema A3. Care sunt condițiile în care orice funcție de pe o submulțime $A \subseteq X$ poate fi prelungită continuu la X?

Rezultate importante ale C_p-teoriei pentru $E = \mathbb{R}$ au fost obținute de R. Arens, J. Dugundji, K. Geba, Z. Semadeni, E. Michael ([5, 25, 37, 59]).

1.4. Teoremele lui Milyutin și Pestov

Stefan Banach în lucrarea [86] a formulat problema:

Problema 1. Fie X și Y două spații compacte metrizabile. În ce condiții spațiile $C_u(X)$ și $C_u(Y)$ sunt liniar homeomorfe? Sunt oare liniar homeomorfe spațiile $C_u([0,1])$ și $C_u([0,1]\times[0,1])$?

Această problemă a fost rezolvată de A. Milyutin în 1951 în teza sa de doctor, iar mai apoi în 1966 a publicat rezolvarea în [60]. A. Milyutin a demonstrat

Teorema 1.49. *Dacă X și Y sunt două spații compacte metrizabile nenumărabile, atunci $C_u(X,\mathbb{R})$ și $C_u(Y,\mathbb{R})$ sunt liniar homeomorfe.*

Pentru cazul când X și Y sunt finite sau numărabile problema lui Banach a fost rezolvată de A. Pelczynski și Z. Semadeni [70, 73]. Pentru aceasta se introduce următorul indice al dispersabilității. Notăm:

$$s_0(X) = X,$$
$$s_1(X) = \{x \in X : x \text{ nu este punct izolat în } X\},$$
$$s_\alpha = \{x \in \cap\{S_\beta : \beta < \alpha\} : x \text{ nu este punct izolat în } \cap\{S_\beta(X) : \beta < \alpha\}\}.$$

Spațiul X se numește dispers dacă orice subspațiu nevid $Y \subseteq X$ conține cel puțin un punct izolat. Fie $i_d(X) = \min\{\alpha : s_\alpha(X) = \emptyset\}$. Pentru orice spațiu dispers și numai pentru astfel de spații se determină $i_d(X)$. A. Pelczynski și Z. Semadeni au demonstrat că pentru spațiile compacte numărabile condițiile ca $C_u(X,R)$ și $C_u(Y,R)$ să fie liniar homeomorfe depind de relațiile dintre $i_d(X)$ și $i_d(Y)$, adică există un număr cardinal de limită $\alpha > 0$ pentru care $i_d(X) = \alpha + n$ și $i_d(Y) = \alpha + m$.

Din punct de vedere a teoremei lui Milyutin este importantă următoarea teoremă a lui V. Pestov [71].

Teorema 1.50 (Pestov [71]). *Fie X și Y două spații complet regulate. Dacă spațiile $C_p(X)$ și $C_p(Y)$ sunt liniar homeomorfe, atunci $dimX = dimY$.*

S. Gul'ko in 1990 a generalizat teorema lui V. Pestov demonstrând ca aceeași relație dintre $dimX$ și $dimY$ rămâne valabilă și pentru cazul când spațiile $C_p(X)$ și $C_p(Y)$ sunt uniform homeomorfe [42].

Teorema 1.51 (Gul'ko [42]). *Fie X și Y două spații complet regulate. Dacă $C_p(X)$ și $C_p(Y)$ sunt uniform homeomorfe, atunci $dimX = dimY$.*

Astfel spațiile $C_u([0,1])$ și $C_u([0,1] \times [0,1])$ sunt liniar homeomorfe, conform teoremei lui Milyutin, iar spațiile $C_p([0,1])$ și $C_p([0,1] \times [0,1])$ nu sunt liniar homeomorfe, conform teoremei lui V. Pestov. Mai mult, recent s-a demonstrat că $C_p([0,1])$ și $C_p([0,1] \times [0,1])$ nu sunt homeomorfe [55].

Teorema 1.52 (Krupski [55]). *Fie X și Y două spații Tychonoff. Dacă $C_p(X)$ și $C_p(Y)$ sunt homeomorfe, atunci $dimX = dimY$.*

1.5. Teoremele lui Hewitt și Nagata

I. Gelfand și A. Kolmogoroff [38] au arătat că inelul de funcții continue $C(X)$ determină spațiul compact X, adică două spații compacte X și Y sunt homeomorfe, dacă și numai dacă $C(X)$ și $C(Y)$ sunt algebric izomorfe. E. Hewitt extinde acest rezultat pentru spațiile realcompacte, demonstrând că inelul de funcții continue $C(X)$ determină spațiul realcompact νX.

Fie X un spațiu Tychonoff. Homeomorfismul $\nu : X \longrightarrow Y$ se numește *completarea realcompactă* a spațiului X, dacă $\nu(X)$ este dens în Y și pentru orice aplicație continuă $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ există o funcție continuă $\overline{f} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f = \overline{f} \circ \nu$. Completarea realcompactă a spațiului X se notează νX. Un spațiu complet regulat X se numește *Q-spațiu* (sau *realcompact*), dacă $X = \nu X$, adică X coincide cu completarea sa realcompactă. Completarea realcompactă și Q-spațiile au fost introduse de E. Hewitt în 1948 ([44]).

Teorema 1.53 (Hewitt [44, Teorema 56]). *Orice spațiu complet regulat X poate fi scufundat ca un subspațiu dens într-un spațiu realcompact νX astfel încât $C(X)$ să fie algebric izomorf cu $C(\nu X)$.*

Următorul rezultat exprimă faptul că în studiul inelelor $C(X)$ putem să ne limităm doar la spațiile realcompacte.

Teorema 1.54 (Hewitt [44, Teorema 57]). *Două spații realcompacte X și Y sunt homeomorfe, dacă și numai dacă $C(X)$ și $C(\nu X)$ sunt algebric izomorfe.*

Iar următorul rezultat ne arată că νX este unic într-un sens analog cu unicitatea lui βX.

Teorema 1.55 (Hewitt [44, Teorema 58]). *Dacă X este un spațiu complet regulat, atunci νX este complet determinat de următoarele proprietăți:*

(i) νX este un spațiu realcompact;

(ii) X se scufundă ca un subspațiu dens în νX;

(iii) orice funcție din $C(X)$ poate fi prelungită la o funcție continuă pe νX.

În 1949 J. Nagata [65] reușește să extindă același rezultat al lui I. Gelfand și A. Kolmogoroff demonstrând că inelul topologic de funcții continue $C_p(X)$ determină spațiul complet regulat X.

Teorema 1.56 (Nagata [65, Teorema 3]). *Fie X și Y sunt două spații topologice complet regulate. Atunci X și Y sunt homeomorfe dacă și numai dacă $C_p(X)$ și $C_p(Y)$ sunt liniar homeomorfe.*

Fie X un spațiu complet regulat. Notăm cu $L(X)$ laticea de aplicații continue, mărginite și nenegative, ale spațiului X în $\mathbb{R}$.

Teorema 1.57 (Nagata [65, Teorema 1]). *Spațiile complet regulate X și Y sunt homeomorfe, dacă și numai dacă $L(X)$ și $L(Y)$ sunt izomorfe.*

1.6. Spațiile E-compacte

Fie E un spațiu Hausdorff. Un spațiu X se numește E-*compact* dacă este homeomorf cu un subspațiu închis al produsului E^τ pentru un careva cardinal τ [62]. Notăm cu $\mathcal{K}(E)$ clasa spațiilor E-compacte. Clasa $\mathcal{K}([0,1])$ coincide cu clasa spațiilor compacte, adică spațiile $[0,1]$-compacte sunt exact spațiile compacte. Clasa $\mathcal{K}(\mathcal{D})$, unde $\mathcal{D} = \{0,1\}$, coincide cu clasa spațiilor zero-dimensionale și compacte.

Spațiile E-compacte au fost introduse S. Mrówka în [62]. Evident, orice spațiu E-compact este și E-complet regulat. Produsul de spații E-compacte este E-compact. Subspațiul închis al unui spațiu E-compact este E-compact. În general avem următoarea

Teorema 1.58 (Mrówka-Engelking [61]). *Dacă X și E sunt două spații Hausdorff, atunci:*

(i) Spațiul E este E-compact.

(ii) Dacă X este E-compact și X_0 este homeomorf cu un subspațiu închis al lui X, atunci X_0 este E-compact.

(iii) Produsul topologic arbitrar de spații E-compacte este E-compact.

(iv) Dacă E_1 este un spațiu Hausdorff, atunci $\mathcal{K}(E) \subseteq \mathcal{K}(E_1)$ dacă și numai dacă $E \in \mathcal{K}(E_1)$.

(v) Dacă $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ este o familie nevidă de spații E-compacte, atunci $\cap\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ este E-compact.

(vi) Fie X un spațiu E-compact și $f : X \longrightarrow Y$ o aplicație continuă. Dacă Y_0 este un subspațiu E-compact al spațiului Y, atunci $f^{-1}(Y_0)$ este E-compact.

Avem următoarea generalizare a compactizării Stone-Čech, βX.

Teorema 1.59 (Mrówka-Engelking [61]). *Fie X un spațiu Hausdorff E-complet regulat. Atunci X are o E-compactificare Hausdorff notată $\beta_E X$ cu următoarele proprietăți:*

(i) Spațiul X este dens în $\beta_E X$ și orice aplicație continuă $f : X \longrightarrow E$ admite o prelungire continuă unică $f^* : \beta_E X \longrightarrow E$.

(ii) Dacă Y este un spațiu E-compact, atunci orice aplicație continuă $f : X \longrightarrow Y$ admite o prelungire continuă unică $f^* : \beta_E X \longrightarrow Y$.

(iii) Spațiul $\beta_E X$ este unic în sensul următor: dacă Y este un spațiu E-compact care conține X ca un subspațiu dens și orice aplicație continuă $f : X \longrightarrow E$ admite o prelungire continuă unică $f^* : Y \longrightarrow E$, atunci aplicația identică a spațiului Y în $\beta_E X$ este un homeomorfism.

Corolarul 1.60 (Mrówka [61]). *Fie X un spațiu E-complet regulat. Atunci X este E-compact dacă și numai dacă $X = \beta_E X$.*

În particular, dacă $E = [0, 1]$, atunci $\beta_E X$ coincide cu compactificarea Stone-Čech βX. Dacă $E = \mathbb{R}$, atunci $\beta_E X$ coincide cu completarea Hewitt-Nachbin νX a spațiului complet regulat și Hausdorff X [61]. Spațiile $\mathbb{R}$-compacte au fost introduse de Hewitt cu denumirea de *Q-spații* (sau *realcompacte*)

Teorema 1.61 (Mrówka-Engelking [61]). *Fie X un spațiu Hausdorff E-complet regulat. Spațiul X este E-compact dacă și numai dacă pentru orice spațiu Hausdorff Y care conține X ca subspațiu dens astfel încât $Y \neq X$, există o aplicație continuă $f : X \longrightarrow E$ care nu poate fi prelungită pe Y.*

În cele ce urmează vom examina spațiile $\mathbb{N}$-compacte. Aceste spații au fost introduse de S. Mrówka în [63]. Evident, orice spațiu $\mathbb{N}$-compact este zero-dimensional și realcompact. Implicația inversă nu este întotdeauna adevărată. În [72, 67] este prezentat un exemplu de spațiu Δ, realcompact și zero-dimensional care nu este $\mathbb{N}$-compact. Acest spațiu este un exemplu foarte complicat introdus de P. Roy în 1962 și 1968 [72] pentru a demonstra că egalitatea $indX = dimX$ nu este adevărată pentru orice spațiu metrizabil X.

Spațiul Δ conține puncte de două tipuri: P_1 și P_2. Mulțimea P_1 este mulțimea tuturor șirurilor de numere reale nenule. Mulțimea $P_2 = X \times Y \times Z$. Unde:

$P1$. X este mulțimea tuturor șirurilor finite de numere reale astfel încât dacă $x \in X$, atunci $x(i) = 0$, dacă și numai dacă $i = 0$, unde $x(i)$ este termenul i al șirului x. Notăm punctele din X cu p_X.

$P2$. Y mulțimea tuturor șirurilor de numerele reale pozitive astfel încât $y \in Y$ dacă și numai dacă $y(i) \neq y(j)$ pentru $i \neq j$. Notăm punctele din Y cu p_Y.

$P3$. Z mulțimea tuturor șirurilor infinite de numere pozitive. Notăm punctele din Z cu p_Z.

În spațiul Δ există regiuni de două tipuri: Γ_1 și Γ_2.

O regiune R este de tipul Γ_1 dacă există $x \in X$ astfel încât $|x| \neq 0$ și

$R1$. $R = R^1 \cup R^2$, unde

1.1. $R^1 = \{p \in P_1 : p(i) = x(i), i = 1, 2, ..., |x|\}$ și

1.2. $R^2 = \{|p_X| \geq |x|, p_X(i) = x(i), i = 1, 2, ..., |x|\}$.

O regiune R este de tipul Γ_1 dacă există $p \in P_2$ și $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$R2$. $R = R^0 \cup R^+ \cup R^-$, unde

2.1. $R^0 = \{q \in P_2 : q_x = p_x, q_y = p_y, q_z(i) = p_z(i), i = 1, 2, ..., n\}$;

2.2. R^+1, $R^+ = \cup_{i=1}^{\infty} R_{\gamma(p,n,+)_i}$, $R^- = \cup_{i=1}^{\infty} R_{\gamma(p,n,-)_i}$;

2.3. $(\gamma(p, n, +)_i)_{i=1}^{\infty}$ și $(\gamma(p, n, -)_i)_{i=1}^{\infty}$ sunt două șiruri în care nici un element nu se repetă din X astfel încât, dacă $j \in \mathbb{N}$, atunci:

2.3.1. $|\gamma(p, n, \pm)_j| = |p_x| + n + 1$;

2.3.2. $\gamma(p, n, \pm)_j(i) = p_X(i)$, $i = 0, 1, ..., |p_X|$;

2.3.3. $\gamma(p, n, \pm)_j(|p_X| + 1) = \pm p_Y(n + j - 1)$;

2.3.4. $\gamma(p, n, \pm)_j(|p_X| + 2) = \mp F^{-1}_{p_Y(n+j-1)}(p_Y)$, $n = 1$;

2.3.5. $\gamma(p, n, \pm)_j(|p_X| + 2 + i) = \mp p_Z(i)$, $i = 1, 2, ..., n - 1$, $n > 1$.

Pe de altă parte, S. Mrówka a demonstrat că, dacă βX este zero-dimensional, atunci X este realcompact, dacă și numai dacă este $\mathbb{N}$-compact. Cu timpul spațiile cu compactificarea βX zero-dimensională au căpătat denumirea de spații *tare zero-dimensionale*.

Fie X un spațiu Tychonoff. O submulțime $A \subseteq X$ se numește *zero-mulțime*, dacă există $f \in C(X)$ astfel încât $A = f^{-1}(0)$. Respectiv, o submulțime $B \subseteq X$ se numește *cozero-mulțime*, dacă există $f \in C(X)$ astfel încât $A = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Un spațiu complet regulat X se numește *tare zero-dimensional*, dacă pentru orice două zero-mulțimi disjuncte $A, B \subseteq X$ există o mulțime deschisă și închisă $U \subseteq X$ astfel încât $A \subseteq U$ și $U \cap B = \emptyset$ [61]. Evident, orice spațiu tare zero-dimensional este zero-dimensional. În general avem următoarea ([67])

Teorema 1.62. *Dacă X este un spațiu zero-dimensional, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) X este tare zero-dimensional.

(ii) βX este total neconex.

(iii) Pentru orice acoperire finită a spațiului X cu cozero-mulțimi există o partiție finită, mai fină, compusă din submulțimi închise și deschise.

(iv) Pentru orice acoperire numărabilă a spațiului X cu cozero-mulțimi există o partiție numărabilă, mai fină, compusă din submulțimi închise și deschise.

(v) Orice cozero-mulțime poate fi reprezentată în formă de intersecție numărabilă de mulțimi deschise și închise.

Amintim că un spațiu X este *total neconex*, dacă unicele mulțimi conexe sunt mulțimile formate dintr-un punct, adică orice submulțime din X cu mai mult de două elemente este neconexă.

Remarca 1.63. *Echivalențele (i)-(iv) sunt adevărate și pentru orice spațiu complet regulat X [67].*

Altă caracterizare a spațiilor $\mathbb{N}$-compacte ne oferă următoarea

Propoziția 1.64. *[62, Teorema 3.16] Un spațiu X este $\mathbb{N}$-compact, dacă și numai dacă X este zero-dimensional și $([0,1]\times\mathbb{N})$-compact.*

Spunem că o submulțime A a lui X este de G_δ-*mulțime*, dacă există o familie γ de mulțimi deschise în X cu $|\gamma| \leq \aleph_0$ astfel încât $A = \bigcap \gamma$, adică A poate fi reprezentată sub formă de intersecție numărabilă de mulțimi deschise. O submulțime $B \subseteq X$ se numește F_σ-*mulțime* dacă poate fi reprezentată ca reuniune numărabilă de mulțimi închise. Un spațiu în care orice G_δ-mulțime este deschisă, sau echivalent orice F_σ-mulțime este închisă, se numește P-*spațiu.*

O submulțime $A \subseteq X$ se numește G_δ-*închisă* în X, dacă pentru orice $x \in X \setminus A$ există o G_δ-mulțime $P \subseteq X$ astfel încât $x \in P \subseteq X \setminus A$.

Propoziția 1.65 ([61, Lema 2.7]). *Fie X un spațiu $\mathbb{N}$-compact. Atunci orice submulțime G_δ-închisă în X este spațiu $\mathbb{N}$-compact.*

Întrucât orice spațiu $\mathcal{D}$-compact este $\mathbb{N}$-compact avem că $\beta_\mathcal{D}(\beta_\mathbb{N}X) = \beta_\mathcal{D}X$. Prin urmare $X \subseteq \beta_\mathbb{N} \subseteq \beta_\mathcal{D}X$. Mai precis

Teorema 1.66 ([61, Teorema 2.8]). *Fie X un spațiu zero-dimensional. Atunci $\beta_\mathbb{N}X$ este G_δ-închiderea spațiului X în $\beta_\mathcal{D}X$*

Corolarul 1.67 ([61, Corolarul 2.9]). *Un spațiu zero-dimensional X este $\mathbb{N}$-compact dacă și numai dacă X este G_δ închis în $\beta_\mathcal{D}X$.*

Amintim că spațiile realcompacte la fel pot fi caracterizate prin intermediul $\beta_\mathbb{R}X$, adică compactificarea Stone-Čech βX. Și anume, X este realcompact dacă X este G_δ închis în βX [31, 76]. Astfel spațiile $\mathbb{N}$-compacte se aseamănă foarte mult cu spațiile realcompacte, iar relația dintre $\beta_\mathbb{N}X$ și $\beta_\mathcal{D}X$ este analogă cu relația dintre βX și $\beta_{[0,1]}X$.

În paragraful precedent a fost formulată teorema lui Hewitt din care reiese că structura de inel pe $C(X)$ determină structura topologică pe spațiul realcompact X. În 1965 S. Mrówka a demonstrat un rezultat analog pentru spațiile $\mathbb{N}$-compacte.

Teorema 1.68 (Mrówka [61, Teorema 5.3]). *Fie X și Y două spații $\mathbb{N}$-compacte. Atunci inelele $C(X,\mathbb{Z})$ și $C(Y,\mathbb{Z})$ sunt izomorfe, dacă și numai dacă X și Y sunt homeomorfe.*

În același timp, structura de grup pe $C(X,\mathbb{Z})$ nu determină topologia spațiul $\mathcal{D}$-compact X.

Teorema 1.69 ([61, Corolarul 6.17]). *Fie X și Y două spații compacte și zero-dimensionale. Atunci grupurile $C(X,\mathbb{Z})$ și $C(Y,\mathbb{Z})$ sunt izomorfe, dacă și numai dacă $w(X) = w(Y)$.*

1.7. Prima echivalență topologică a lui M. Choban

Cercetarea păstrării proprietăților la l_p-echivalențe se efectua pentru fiecare proprietate în mod separat. M. Choban [14] a propus o metodă generală de cercetare a acestei probleme, care permite să analizăm simultan mai multe proprietăți.

S-a observat că un homeomorfism liniar $u : C_p(X,E) \longrightarrow C_p(Y,E)$ pentru un spațiu normat E generează două corespondențe multivoce $\varphi : X \longrightarrow Y$ și $\psi : Y \longrightarrow X$ cu anumite proprietăți.

Aceste proprietăți au fost definite de M. Choban în două grupuri de proprietăți. Primul grup de proprietăți sunt incluse în următoarea teoremă, iar al doilea grup în Teorema 1.72 din paragraful următor.

Aceste corespondențe vor fi construite în capitolul 3 pentru unele module topologice, care conțin spațiile normate ca module de acest tip.

Amintim că o aplicație multivocă $\varphi : X \longrightarrow Y$ se numește *inferior semicontinuă* (sau *l.s.c.*) dacă pentru orice submulțime deschisă $U \subseteq Y$ mulțimea $\varphi^{-1}(U) = \{x \in X : \varphi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ este deschisă în X. Respectiv, aplicație φ se numește *superior semicontinuă* (sau *u.s.c.*) dacă pentru orice submulțime deschisă $U \subseteq Y$ mulțimea $\{x \in X : \varphi(x)$ $subseteq U, \varphi(x) \neq \emptyset\}$ este deschisă în X.

Teorema 1.70 (Prima echivalență topologică a lui M. Choban [14]). *Fie X și Y două spații. Fie $\mathcal{P}$ o proprietate care verifică următoarea condiție:*

(of) pentru orice aplicație continuă, deschisă și finită $f : X \longrightarrow Y$ și orice subspațiu Z din X avem $Z \in \mathcal{P}$, dacă și numai, dacă $f(Z) \in \mathcal{P}$.

Fie $\varphi : X \longrightarrow Y$ și $\psi : Y \longrightarrow X$ două aplicații multivoce cu următoarele proprietăți:

(i) φ este inferior continuă (l.s.c.) și $\varphi(x)$ este finită pentru orice $x \in X$;

(ii) ψ este l.s.c. și $\psi(y)$ este finită pentru orice $y \in Y$;

(iii) $x \in \psi(\varphi(x))$ pentru orice $x \in X$;

(iv) $y \in \varphi(\psi(y))$ pentru orice $y \in Y$.

Atunci $X \in \mathcal{P}$ dacă și numai dacă $Y \in \mathcal{P}$.

Remarca 1.71. *Proprietatea (of) se numește of-proprietate (sau proprietate finit-deschisă).*

1.8. A doua echivalență topologică a lui M. Choban

O aplicație continuă și închisă $f : X \longrightarrow Y$ a spațiului X în Y se numește *perfectă*, dacă $f^{-1}(y)$ este o submulțime compactă a lui X pentru orice $y \in Y$.

Un spațiu X se numește *μ-spațiu* sau *spațiu μ-complet*, dacă pentru orice submulțime mărginită $L \subseteq X$ închiderea $cl_X(L)$ este compactă.

Teorema 1.72 (A doua echivalență topologică a lui M. Choban [14])**.** *Fie X și Y două spații μ-complete. Fie $\mathcal{P}$ o proprietate care verifică următoarea condiție:*

(p) pentru orice aplicație continuă perfectă $f : X \longrightarrow Y$ a lui X în Y avem $X \in \mathcal{P}$ dacă și numai, dacă $Y \in \mathcal{P}$.

Fie $\varphi : X \longrightarrow Y$ și $\psi : Y \longrightarrow X$ două aplicații multivoce cu următoarele proprietăți:

(i) $x \in cl_X(\psi(\varphi(x)))$ pentru orice $x \in X$;

(ii) $y \in cl_Y(\varphi(\psi(y)))$ pentru orice $y \in Y$;

(iii) dacă $A \subseteq X$ și A este mărginită, atunci $\varphi(A)$ este mărginită în Y;

(iv) dacă $B \subseteq Y$ și B este mărginită, atunci $\psi(B)$ este mărginită în X.

Atunci $X \in \mathcal{P}$ dacă și numai dacă $Y \in \mathcal{P}$.

Remarca 1.73. *Proprietatea (p) se mai numește și proprietate perfectă.*

1.9. Concluzii la capitolul 1

Conform informației incluse în primul capitol teoria spațiilor funcționale și, în particular C_p-teoria, este un domeniu actual al matematicii contemporane care se dezvoltă vertiginos.

În C_p-teorie sunt bine conturate problemele: Problema A1, Problema A2 și Problema A3.

Pe parcursul dezvoltării C_p-teoriei pentru spațiile de funcții reale au fost obținute un șir important de rezultate concrete, care în totalitate formează nucleul acestei teorii.

Unele din aceste probleme au fost extinse pentru spații de funcții cu valori în spații normate.

Pentru acest caz mai general au fost create noi metode de cercetare și multe din problemele particulare rezolvate pentru spațiile de funcții reale au rămas nesoluționate pentru acest caz general. Aceste metode sunt insuficiente pentru a studia cazul spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice.

Rezultatele pentru spațiile de funcții reale și de funcții cu valori în spații normate nu reflectă proprietățile spațiilor de funcții cu valori în corpuri comutative.

Deci problema studiului problemelor A1 și A2 pentru cazul inelelor și modulelor topologice rămâne deschisă. Așadar sunt actuale următoarele probleme:

- de elaborat metode de cercetare a spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice;

- de determinat clase de inele și module topologice pentru care se extind rezultatele fundamentale ale C_p-teoriei spațiilor de funcții reale;

- de elaborat metode de cercetare a spațiilor topologice cu ajutorul spațiilor cu structuri algebrice, ceea ce va conduce la determinarea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor topologice și proprietățile algebrice ale spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice.

Pentru a rezolva aceste probleme este necesar:

- stabilirea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor X, E și proprietățile spațiului $C_p(X, E)$;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care spațiile funcționale $C_p(X, E)$ sunt liniar homeomorfe;

- determinarea proprietăților comune ale spațiilor X la care inelele topologice $C_p(X, E)$ sunt izomorfe.

Aceste probleme nu au fost valorificate până acum, cu excepția cazului când modulul este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{Z}$. Acest fapt confirmă actualitatea problemelor vizate.

2. STUDIUL GENERAL AL SPAȚIILOR FUNCȚIONALE CU STRUCTURI ALGEBRICE

În acest capitol se studiază unele probleme generale de determinare a corelațiilor dintre proprietățile spațiului X și proprietăților spațiului $C_p(X, E)$. Deoarece pentru unele subspații Y din X este important modul de amplasare a acestora în X prezintă interes și problema extinderilor funcționale.

Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [26, 27, 22, 28, 29].

2.1. Numărul lui Alexandroff și celularitatea punct-finită

Dacă k este un număr cardinal, vom nota prin $D(k)$ spațiul discret de cardinalitatea k. Notăm $A(k) = D(k) \cup \{a\}$, unde $a \notin D(k)$. Dacă $x \in D(k)$, fie $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$. Dacă $x = a$, atunci $\mathcal{B}_x = \{\{a\} \cup (D(k) \setminus B) : B$ *este o submulțime finită a lui* $D(k)\}$. Familia $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x : x \in A(k)\}$ este baza deschisă a spațiului $A(k)$. Spațiul $A(k)$ se numește *compactificarea cu un punct a lui Alexandroff* a spațiului discret $D(k)$.

Definiția 2.1. *Cardinalul infinit*

$$a(X) = sup\{k : A(k) \text{ este scufundat în} X\}$$

se numește numărul Alexandroff a spațiului X.

O familie γ de submulțimi ale spațiului X se numește familie *punct-finită* dacă orice punct $x \in X$ aparține la cel mult un număr finit de submulțimi din γ.

Definiția 2.2. *Cardinalul infinit*

$$p(X) = sup\{|\gamma| : \gamma \subseteq t^*(X) \text{ este punct-finită }\}$$

se numește celularitatea punct-finită a lui X.

Fie E un spațiu cu două puncte distincte $0, 1 \in E$. Spațiul X se numește *E-Tychonoff*, dacă pentru orice submulțime închisă F a lui X și orice punct $a \in X \setminus F$ există o funcție continuă $f : X \longrightarrow E$ astfel încât $f(a) = 1$ și $f(x) = 0$ pentru orice $x \in F$.

Propoziția 2.3. *Fie E un spațiu metric nevid. Atunci $a(C_p(X, E)) \leq p(X)$ pentru orice spațiu nevid X.*

Demonstrație. Întrucât E este un subspațiu al lui $C_p(X,E)$ avem $a(E) \leq a(C_p(X,E))$. Fixăm o metrică d pe spațiul metric E.

Fie k un cardinal infinit și $h : A(k) \longrightarrow C_p(X,E)$ o scufundare. Conform construcției $C_p(X,E)$ este un subspațiu al spațiului E^X. Atunci $h(A(k))$ este o submulțime închisă a lui E^X. Fie $h(y) = f_y$ pentru orice $y \in A(k) = D(k) \cup \{a\}$. Pentru orice $y \in A(k)$ și orice $n \in \mathbb{N}$ notăm

$$V(y) = \{x \in X : f_y(x) \neq f_a(x)\},$$
$$V_n(y) = \left\{x \in X : d(f_y(x), f_a(x)) > \frac{1}{2^n}\right\}.$$

Evident, $V(y)$ și $V_n(y)$ sunt submulțimi deschise ale lui X și mulțimea $V(y) = \cup\{V_n(y) : n \in \mathbb{N}\}$ este nevidă.

Dacă $\gamma = \{V(y) : y \in D(k)\}$ și $\gamma_n = \{V_n(y) : y \in D(k)\}$, atunci

$$sup\{|\gamma_n(y)| : n \in \mathbb{N}\} = |\gamma| = k.$$

Afirmăm că orice familie γ_n este punct-finită. Presupunem că $x_0 \in X$ și mulțimea $B(x_0) = \{y \in D(k) : x_0 \in V_n(y)\}$ este infinită. Notăm

$$W = \left\{z \in E : d(z, f_a(x_0)) < \frac{1}{2^n}\right\}.$$

Atunci H =$\{g \in C(X,E) : g(x_0) \in W\}$ este o submulțime deschisă a lui $C_p(X,E)$. Atunci $f_a \in H$. Întrucât f_a este unicul punct neizolat al lui $h(A(k))$, atunci $L = \{y \in D(k) : f_y \notin H\}$ este o mulțime infinită. Conform construcției, $B(x_0) \subseteq L$ și mulțimea $B(x_0)$ este infinită, ceea ce este o contradicție. Prin urmare $a(C_p(X,E)) \leq p(X)$.

Spunem că un spațiu X are o *G_δ-diagonală*, dacă diagonala $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ este o G_δ-mulțime în $X \times X$. În același timp, spunem că un spațiu X are o *G_δ-diagonală regulată*, dacă diagonala $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ poate fi reprezentată sub formă unei intersecții de închideri ale unei familii numărabile de vecinătăți deschise ale lui Δ în $X \times X$. Clasa spațiilor cu G_δ-diagonală regulată este largă și conține toate spațiile submetrizabile [8]. Pe când clasa spațiilor cu G_δ-diagonală nu conține toate spațiile submetrizabile.

Propoziția 2.3 este adevărată pentru spațiul E cu G_δ-diagonală regulată.

Propoziția 2.4. *Fie E un spațiu nevid cu G_δ-diagonala regulată. Atunci $a(C_p(X,E)) \leq p(X)$ pentru orice spațiu nevid X.*

Demonstrație. Fie $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ un șir fixat de submulțimi deschise ale lui $E \times E$ astfel încât

$$\Delta = \cap\{G_n : n \in \mathbb{N}\} = \cap\{cl_{E\times E}G_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Presupunem că $G_{n+1} \subseteq G_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie k un cardinal infinit și $h : A(k) \longrightarrow C_p(X, E)$ o scufundare. Fie $h(y) = f_y$ pentru orice $y \in A(k) = D(k) \cup \{a\}$. Pentru orice $y \in Y$ și orice $n \in \mathbb{N}$ notăm

$$V(y) = \{x \in X : f_y(x) \neq f_a(x)\}$$

și

$$V_n(y) = \{x \in X : (f_y(x), f_a(x)) \notin cl_{E\times E}G_n\}.$$

Evident, $V(y)$ și $V_n(y)$ sunt submulțimi deschise ale lui X și mulțimea $V(y) = \cup\{V_n(y) : n \in \mathbb{N}\}$ este nevidă.

Dacă $\gamma = \{V(y) : y \in D(k)\}$ și $\gamma_n = \{V_n(y) : y \in D(k)\}$, atunci $sup\{|\gamma_n(y)| : n \in \mathbb{N}\} = |\gamma| = k$.

Afirmăm că orice familie γ_n este punct-finită. Presupunem că $x_0 \in X$ și mulțimea $B(x_0) = \{y \in D(k) : x_0 \in V_n(y)\}$ este infinită. Notăm

$$W = \{z \in E : (z, f_a(x_0)) \in G_n\}.$$

Atunci $H = \{g \in C(X, E) : g(x_0) \in W\}$ este o submulțime deschisă a lui $C_p(X, E)$. Atunci $f_a \in H$. Întrucât f_a este unicul punct izolat al lui $h(A(k))$, atunci $L = \{y \in D(k) : f_y \notin H\}$ este o mulțime finită. Conform construcției, $B(x_0) \subseteq L$ și mulțimea $B(x_0)$ este infinită, ceea ce este o contradicție. Prin urmare $a(C_p(X, E)) \leq p(X)$.

Propoziția 2.5. *Fie E un spațiu cu două puncte de bază și X un spațiu E-Tychonoff. Atunci $p(X) \leq a(C_p(X, E))$.*

Demonstrație. Fie γ o familie punct-finită de submulțimi deschise și nevide ale lui X și $k = |\gamma|$ un cardinal infinit. Presupunem că $0, 1 \in E$ și $0 \neq 1$.

Pentru orice $U \in \gamma$ fixăm un punct $x_U \in U$. Atunci $|\{x_U : U \in \gamma\}| = |\gamma|$. În virtutea E-regularității spațiului X, pentru orice punct x_U există o aplicație continuă $f_U : X \to E$ astfel încât $f_U(x_U) = 1$ și $f_U(x) = 0$ pentru orice $x \in X \setminus U$. Este posibil ca $f_u = f_v$ pentru submulțimile distincte $U, V \in \gamma$. Dar întrucât γ este punct-finită avem $|\{f_U : U \in \gamma\}| = k$.

Considerăm aplicația constantă (care este continuă) $f_0(x) = 0$ pentru orice $x \in X$.

Fie $F_\gamma = \{f_0\} \cup \{f_U : U \in \gamma\}$.

Afirmația 1. *Orice punct f_U, $U \in \gamma$, este izolat în F_γ.*

Fie $U_0 \in \gamma$ o submulțime fixată. Există o mulțime finită

$$\{U_1, U_2, ..., U_n\} = \{U \in \gamma : x_{U_0} \in U\}.$$

Fie H este deschisă în E astfel încât $1 \in H$ și $0 \notin H$. Atunci

$$\begin{aligned} F_\gamma \cap W(f_{U_0}, x_{U_0}, H) &= \{f \in F_\gamma : f(x_{U_0}) \in H\} \\ &\subseteq \{f_{U_i} : i \in \{1, 2, ..., n\}\}. \end{aligned}$$

Adică aplicația corespunzătoare f_{U_0} are o vecinătatea deschisă finită.

Mulțimea $U_0 \in \gamma$ a fost aleasă arbitrar, deci orice aplicație definită pe F_γ are o vecinătate deschisă finită în F_γ. Astfel orice f_U, $U \in \gamma$, este izolat în F_γ.

Afirmația 2. *F_γ este o mulțime compactă homeomorfă cu $A(k)$.*

Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, H o submulțime deschisă a lui E și $0 \in H$. Atunci

$$W(x_1, x_2, ..., x_n, H) = \{f \in C_p(X, E) : f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n) \in H\}$$

este o vecinătate deschisă a aplicației f_0 în $C_p(X, E)$.

Mulțimea $\gamma' = \{U \in \gamma : U \cap \{x_1, x_2, ..., x_n\} \neq \emptyset\}$ este finită. Fie $U \in \gamma \setminus \gamma'$. Atunci $x_i \notin U_i$ și $f_U(x_i) = 0$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, adică $f_U \in W(x_1, x_2, ..., x_n, H)$. Prin urmare $F_\gamma \setminus W(x_1, x_2, ..., x_n, H) \subseteq \{f_U : U \in \gamma'\}$. Rezultă că F_γ este o mulțime compactă cu un singur punct neizolat f_0. În acest caz subspațiul F_γ și $A(k)$ sunt homeomorfe.

Corolarul 2.6. *Fie E un spațiu, $|E| \geq 2$ și $indX = 0$. Atunci $p(X) \leq a(C_p(X, E))$.*

Dacă X și E sunt spații nevide, atunci putem presupune că E este un subspațiu închis al lui $C_p(X, E)$. În acest scop identificăm punctul $a \in E$ cu aplicația constantă $c_a \in C_p(X, E)$, unde $c_a(X) = \{a\}$. Așadar $a(E) \leq a(C_p(X, E))$.

Teorema 2.7. *Fie E un spațiu cu două puncte și cu G_δ-diagonală regulată. Atunci $p(X) = a(C_p(X, E))$ pentru orice spațiu E-Tychonoff X.*

Demonstrație. Rezultă din Propoziția 2.4 și 2.5.

Corolarul 2.8. *Fie E un spațiu cu G_δ-diagonală regulată, $|E| \geq 2$ și $indX = 0$. Atunci $p(X) = a(C_p(X, E))$.*

Următoarea afirmație pentru $E = \mathbb{R}$ a fost demonstrată de A. V. Arhangel'skii și V. V. Tkachuk în [9].

Corolarul 2.9. *Fie E un spațiu infinit metrizabil. Atunci $p(X) = a(C_p(X, E))$ pentru orice spațiu E-Tychonoff.*

Corolarul 2.10. *Fie E un spațiu discret, $|E| \geq 2$ și $indX = 0$. Atunci $p(X) = a(C_p(X, E))$.*

2.2. Spații τ-plasate și $\mathbb{Z}$-desime

O funcție $f : X \longrightarrow Y$ se numește *strict τ-continuă*, dacă pentru orice submulțime A a lui X cu $|A| \leq \tau$ există o funcție continuă $g : X \longrightarrow Y$ astfel încât $g|_A = f|_A$, adică $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$. Se numește *$\mathbb{Z}$-desime* $t_{\mathbb{Z}}(X)$ a spațiului X cel mai mic cardinal infinit τ astfel încât orice funcție definită pe X cu valori în $\mathbb{Z}$ strict τ-continuă este continuă.

Propoziția 2.11. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $t_{\mathbb{Z}}(X) \leq \tau$ și $x \in X$ nu este un punct izolat în X, atunci există o mulțime $A \subseteq X \setminus \{x\}$ astfel încât $|A| \leq \tau$ și $x \in cl(A)$.*

Demonstrație. Raționăm prin reducere la absurd și presupunem contrariul. Ceea ce înseamnă că pentru orice $A \subseteq X \setminus \{x\}$ cu $|A| \leq \tau$, $x \notin cl(A)$. Atunci funcția $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ definită prin $f(x) = 1$ și $f(y) = 0$, pentru orice $y \in X \setminus \{x\}$ este strict τ-continuă. Într-adevăr:

Cazul 1. *$f|_A$ este continuă pentru orice $A \subseteq X \setminus \{x\}$ cu $|A| \leq \tau$.*

Pentru orice $A \subseteq X \setminus \{x\}$ cu $|A| \leq \tau$ există o vecinătate deschisă U a lui x astfel încât $U \cap A = \emptyset$, dar atunci funcția $\chi_U : X \longrightarrow \mathcal{D}$ (unde $\chi_U(x) = 1$ pentru orice $x \in U$ și $\chi_U(y) = 0$ în celelalte cazuri, iar $\mathcal{D} = \{0, 1\}$) este continuă și $\chi_U(y) = f(y)$ pentru orice $y \in A$.

Cazul 2. *$f|_A$ este continuă pentru orice $A \subseteq X$ cu $x \in A$ și $|A| \leq \tau$.*

Pentru orice $A \subseteq X$ cu $x \in A$ și $|A| \leq \tau$, avem că $|A \setminus \{x\}| \leq \tau$ și $|A \setminus \{x\}| \subseteq X \setminus \{x\}$, deci putem aplica Cazul 1.

Întrucât x nu este izolat funcția f nu poate fi continuă. Deci $t_{\mathbb{Z}}(X) > \tau$, ceea ce este o contradicție.

Spunem că o submulțime A a lui X este de *tip G_τ*, dacă există o familie γ de mulțimi deschise în X cu $|\gamma| \leq \tau$ astfel încât $A = \bigcap \gamma$. În particular, dacă $\tau = \aleph_0$, atunci A este o mulțime de tip G_δ (sau o G_δ-mulțime). O mulțime $A \subseteq X$ se numește *τ-plasată* în X, dacă pentru orice $x \in X \setminus A$ există o mulțime $P \subseteq X$ de tip G_τ astfel încât $x \in P \subseteq X \setminus A$.

Notăm cu $q_0(X)$ cel mai mic cardinal infinit τ astfel încât X este τ-plasat în $\beta_0 X$, unde $\beta_0 X$ este compactificarea zero-dimensională maximală a spațiului X. Amintim că X este $\mathbb{Z}$-compact, dacă și numai dacă X este G_δ-închis în $\beta_0 X$, adică $q_0(X) \leq \aleph_0$.

Propoziția 2.12. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă X este τ-plasat într-o compactificare zero-dimensională $b_0 X$, atunci X este τ-plasat în $\beta_0 X$.*

Demonstrație. Fie $b_0 X$ o compactificare zero-dimensională a lui X și X este τ-plasat în $b_0 X$. Există o aplicație continuă $f : \beta_0 X \longrightarrow b_0 X$ astfel încât $f^{-1}(b_0 X \setminus X) = \beta_0 X \setminus X$ și $f(x) = x$ pentru orice $x \in X$. Atunci pentru orice mulțime P de tip G_τ astfel încât $P \subseteq b_0 X \setminus X$, $f^{-1}(P)$ este o mulțime de tip G_τ și $f^{-1}(P) \subseteq \beta_0 X \setminus X$.

Amintim că închiderea unei mulțimi deschise se numește mulțime *închisă canonic* [6] (sau mulțime închisă regulat). Un spațiu X se numește m_τ-spațiu, dacă pentru orice mulțime F închisă canonic a lui X și orice $x \in F$ există o mulțime P de tip G_τ astfel încât $x \in P \subseteq F$.

Notăm prin $m(X)$ cel mai mic cardinal infinit astfel încât X este un m_τ-spațiu. În particular, dacă $m(X)$ este numărabil, spunem că X este un spațiu Moscova [6].

Propoziția 2.13. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Fie τ un cardinal infinit și Y un spațiu zero-dimensional. Fie $X \subseteq Y$, $q_0(X) \leq \tau$, $cl(X) = Y$ și $m(Y) \leq \tau$. Atunci X este τ-plasat în Y.*

Demonstrație. În primul rînd demonstrăm

Afirmația 1. *Există o aplicație continuă și închisă $f : \beta_0 X \longrightarrow \beta_0 Y$ astfel încât $f(x) = x$ pentru orice $x \in X$.*

Într-adevăr, fie o aplicație continuă $g : X \longrightarrow \beta_0 Y$ astfel încât $g(x) = x$ pentru orice $x \in X$. Atunci există o aplicație continuă $f : \beta_0 X \longleftarrow \beta_0 Y$ astfel încât $f|_X = g$, adică $f(x) = x$ pentru orice $x \in X$.

Acum fixăm o submulțime închisă F din $\beta_0 X$. Atunci F este o mulțime compactă. Întrucât f este continuă și $\beta_0 Y$ este Hausdorff, $f(F)$ este închisă. Prin urmare f este o aplicație închisă.

Fie f aplicația din Afirmația 1. Fixăm $y \in Y \setminus X$. Atunci $f(\beta_0 X)$ este un subspațiu închis al lui $\beta_0 Y$. Întrucât $cl(X) = Y$ avem $Y \subseteq f(\beta_0 X)$. Deci $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Cazul 1. *Fie $|f^{-1}(y)| = 1$, adică $f^{-1}(y) = \{z\}$ pentru un careva punct $z \in \beta_0 X \setminus X$.*

Întrucât X este τ-plasat în $\beta_0 X$, există o mulțime H de tip G_τ în $\beta_0 X$ astfel încât $z \in H \subseteq \beta_0 X \setminus X$. Fie γ o familie de submulțimi deschise ale spațiului $\beta_0 X$ astfel încât

$|\gamma| \leq \tau$ și $H = \bigcap \gamma$. Atunci $y \in \bigcap \eta$ unde $\eta = \{\beta_0 Y \setminus f(\beta_0 X \setminus U) : U \in \gamma\}$. Evident, $|\eta| \leq \tau$. De asemenea $(\bigcap \eta) \cap X = \emptyset$. Notăm cu $P = Y \cap (\bigcap \eta)$. Atunci $y \in P \subseteq Y \setminus X$.

Cazul 2. *Fie* $|f^{-1}(y)| \geq 2$.

Fixam două puncte distincte $z, t \in f^{-1}(y)$. Există două mulțimi deschise și închise U_z și U_t astfel încât $z \in U_z$, $t \in U_t$ și $U_z \cap U_t = \emptyset$. Întrucât X este τ-plasat în $\beta_0 X$, există o familie de submulțimi deschise și închise $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ astfel încât $|A| \leq \tau$, $\cap\{V_\alpha : \alpha \in A\} = \{z\}$ și $V_\alpha \subseteq U_z$ pentru orice $\alpha \in A$. Prin urmare $f(V_\alpha)$ este o submulțime închisă canonic a lui $\beta_0 Y$ și $y \in f(V_\alpha)$. Evident, $y \notin int_{\beta_0 Y}(f(V_\alpha))$ pentru orice $\alpha \in A$, unde $int_{\beta_0 Y}(f(V_\alpha))$ este interiorul mulțimii $f(V_\alpha)$ în $\beta_0 Y$. Pentru orice $\alpha \in A$ există o familie $\xi_\alpha = \{W_\beta : \beta \in B_\alpha\}$ de submulțimi deschise și închise ale lui Y astfel încât $|B_\alpha| \leq \tau$ și $y \in \cap\{W_\beta : \beta \in B_\alpha\} \subseteq f(V_\alpha)$. Fie $B = \cup\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ și $\xi = \{W_\beta : \beta \in B\}$. Atunci $y \in \cap\{W_\beta : \beta \in B\} \subseteq \cap\{f(V_\alpha) : \alpha \in A\}$. Putem presupune că pentru orice doi indici $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ există $\alpha_3 \in A$ astfel încât $V_{\alpha_3} \subseteq V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}$. În acest caz

$$f(\cap\{V_\alpha : \alpha \in A\}) = \cap\{f(V_\alpha) : \alpha \in A\} = \{y\}.$$

Prin urmare $y = \cap\{W_\beta : \beta \in B\}$ și $|B| \leq \tau$.

Fie Y un subspațiu al lui X, $indX = 0$. Notăm prin $\pi = \pi_Z : C_p(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_p(Y, \mathbb{Z})$ *aplicația de restricție* a unei funcții din $C_p(X, \mathbb{Z})$ pe Y, adică $\pi_Y(f) = f|_Y$ pentru orice $f \in C_p(X, \mathbb{Z})$. Subspațiul $\pi_Y(C_p(X, \mathbb{Z}))$ se notează prin $C_p(Y|X, \mathbb{Z})$

Următoarea lemă este versiunea zero-dimensională a Lemei 2.23 din [20].

Lema 2.14. *Fie X un spațiu zero-dimensional, Y un subspațiu închis al lui X și $g : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ o aplicație continuă. Pentru orice submulțime finită F a lui $X \setminus Y$ și orice aplicație $f : F \longrightarrow \mathbb{Z}$ există o aplicație continuă $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ astfel încât $f = \varphi|_F$ și $\varphi|_Y = g|_Y$.*

Demonstrație. Fie $\{U_x : x \in F\}$ o familie de submulțimi deschise din X astfel încât $x \in U_x \subseteq X \setminus Z$ pentru orice $x \in F$ și $U_x \cap U_y = \emptyset$ pentru oricare două puncte distincte $x, y \in F$. Pentru orice $x \in F$ fixăm o aplicație continuă $f_x : X \longrightarrow R$ astfel încât $f_x(x) = 1$ și $f_x(X \setminus U_x) = 0$. Notăm

$$\varphi_x(y) = f_x(y) \cdot f(x)$$

pentru orice $x \in F$ și $y \in X$. Fie $\varphi_F(y) = \sum\{\varphi_x(y) : x \in F\}$. Reieșind din modul cum a fost construită, aplicația φ_F este continuă, $\varphi_F|_F = f$ și $\varphi_F(Z) = 0$. Fie $g_x(y) = 1 - f_x(y)$ pentru orice $x \in F$ și $y \in X$. Notăm

$$g_F(y) = \prod\{g_x(y) : x \in F\}$$

pentru orice $y \in X$. Aplicația g_F este continuă, $g_F(F) = 0$ și $g_F(Z) = 1$. Fie $\varphi_Z(y) = g_F(y) \cdot g(y)$ pentru orice $y \in Y$. Din construcție, aplicația φ_Z este continuă, $\varphi_Z(F) = 0$ și $\varphi_Z|_Z = g|_Z$. Evident, $\varphi = \varphi_F + \varphi_Z$ este aplicația căutată.

Propoziția 2.15. *Pentru orice $Y \subseteq X$ sunt adevărate următoarele afirmații:*

(i) aplicația π este continuă și $cl(\pi(C_p(X,\mathbb{Z}))) = C_p(Y,\mathbb{Z})$;

(ii) dacă Y este închisă în X, atunci π este o aplicație deschisă;

(iii) aplicația π_Y este injectivă, dacă și numai dacă mulțimea Y este densă în X.

Demonstrație. (i) Aplicația π_Y este continuă deoarece este restricția proiecției canonice $p_Y : \mathbb{Z}^X \longrightarrow \mathbb{Z}^Y$ pe subspațiul $C_p(X,\mathbb{Z})$.

Fie $f \in C_p(Y,\mathbb{Z})$ o aplicație fixată. Fie o mulțime deschisă U din $C_p(Y,\mathbb{Z})$ astfel încât $f \in U$, adică $U = W(x_1, x_2, ..., x_k, n_1, n_2, ..., n_k)$, unde $x_i \in Y$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci există $g_i \in C_p(X,\mathbb{Z})$, $i = \overline{1,k}$ astfel încât $g_i(x_i) = 1$ și $g_i(x_j) \subseteq \{0\}$ pentru orice $j \neq i$. Fie

$$h(x) = f(x_1)g_1(x) + f(x_2)g_2(x) + ... + f(x_k)g_k(x),$$

pentru orice $x \in X$. Atunci $h \in C_p(X,\mathbb{Z})$ și $h|_Y \in U$. Așadar $cl(C_p(Y|X,\mathbb{Z})) = C_p(Y,\mathbb{Z})$. Asertiunea 1 este demonstrată.

(ii) Fie o mulțime deschisă U din $C_p(X,\mathbb{Z})$, adică $U = W(x_1, ..., x_k, n_1, ..., n_k)$, unde $x_i \in X$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$. Presupunem că $x_1, x_2, ..., x_{l-1} \in Y$ și $x_l, x_{l+1}, ..., x_k \in X \setminus Y$ pentru un $l = \overline{1,k}$.

Fie V o submulțime deschisă a lui $C_p(Y,\mathbb{Z})$ astfel încât $V = W(x_1, ..., x_{l-1}, n_1, ..., n_{l-1})$, unde $i = \overline{1, l-1}$ și $x_1, ..., x_{l-1} \in Y$. Este evident că $\pi_Y(U) \subseteq V$.

Fie $g \in C_p(Y|X,\mathbb{Z})$ o aplicație fixată, $g \in V$ și fie $\widetilde{g} \in C_p(X,\mathbb{Z})$ astfel încât $\widetilde{g} = \pi_Y^{-1}(g)$. Atunci din Lema 2.14 există $\varphi \in C_p(X,\mathbb{Z})$ astfel încât $\varphi_Y = \widetilde{g}|_Y$ și $\varphi(x_i) = n_i$, unde $i = \overline{l-1, ..., k}$. Așadar $\varphi \in U$ și $\pi_Y(\varphi) = g$. Deci $\pi_Y(U) = V$. Asertiunea 2 este demonstrată.

(iii) Presupunem, prin absurd, că π_Y este o injecție și Y nu este o submulțime densă în X. Fie $x \in X \setminus cl(Y)$ un punct fixat. Atunci există o aplicație $f \in C_p(X,E)$ astfel încât $f(x) = 1$ și $f(cl(Y)) \subseteq \{0\}$. Astfel $f|Y = f_0|Y$, unde $f_0 = 0$ pentru orice $x \in X$. Am obținut o contradicție deoarece $f \neq f_0$.

Presupunem că mulțimea Y este densă în X. Fie $f, g \in C_p(X,E)$ astfel încât $f \neq g$ și notăm cu $h = f - g$. Atunci h este o aplicație continuă și $U = h^{-1}(E \setminus \{0\})$ este o mulțime deschisă și nevidă în X. Fie un punct $x \in Y \cap U$ fixat. Atunci $f(x) \neq g(x)$, adică $f|Y \neq g|Y$. Prin urmare π_Y este o injecție.

Fie X și Y două spații zero-dimensionale. Pentru orice aplicație continuă $f : X \longrightarrow Y$, aplicația $f^* : C_p(Y, E) \longleftrightarrow C_p(X, E)$ definită prin $f^*(g) = g \circ f$ pentru orice $g \in C_p(Y, E)$ se numește *aplicația duală*.

Spunem că X este condensat pe Y, dacă există o aplicație continuă și bijectivă de forma $f : X \longrightarrow Y$.

Fie X și Y două spații zero-dimensionale. Spunem că $f : X \longrightarrow Y$ este $\mathbb{Z}$-factor, dacă pentru orice $g : X \longrightarrow \mathbb{Z}$, aplicația g este continuă, dacă $g \circ f$ este continuă.

Fie X și Y două spații topologice și $f : X \longrightarrow Y$ o aplicație, atunci cea mai puternică topologie zero-dimensională pe Y în raport cu care f este continuă se numește topologia $\mathbb{Z}$-factor generată de f (dacă o astfel de topologie există pe Y). Dacă topologia pe Y este chiar topologia $\mathbb{Z}$-factor generată de f, atunci f se numește aplicația $\mathbb{Z}$-factor (în acest caz $indY = 0$).

Următoarea afirmație, pentru cazul spațiilor $C_p(X)$, a fost demonstrată în [76] (vezi [76, Problema 163]).

Propoziția 2.16. *Fie X și Y două spații zero-dimensionale și $f : X \longrightarrow Y$ este o aplicație continuă. Atunci:*

(i) aplicația f^* este continuă;

(ii) dacă f este surjectivă, adică $f(X) = Y$, atunci f^* este un homeomorfism între $C_p(Y, \mathbb{Z})$ și $f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$;

(iii) dacă f este surjectivă, atunci $f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$ este închis în $C_p(X, \mathbb{Z})$, dacă și numai dacă f este o aplicație $\mathbb{Z}$-factor;

(iv) dacă f este surjectivă, atunci $f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$ este dens în $C_p(X, E)$, dacă și numai dacă f este o condensare.

Demonstrație. (i) Fixăm o aplicație $g \in C_p(Y, \mathbb{Z})$ și fie $h = f^*(g)$. Fixăm o vecinătate standard a lui h, $U = W(h, x_1, ..., x_n)$ în $C_p(X, \mathbb{Z})$, unde $x_1, ..., x_n \in X$ și $n \in \mathbb{N}$. Fixăm o vecinătate standard a lui g, $V = W(g, f(x_1), ..., f(x_n))$ în $C_p(Y, \mathbb{Z})$. Pentru orice $g' \in V$ avem

$$g'(f(x_i)) = g(f(x_i)) = f^*(g)(x_i) = h(x_i),$$

unde $i = \overline{1, n}$. Astfel $f^*(V) \subseteq U$, adică f^* este continuă în g. Întrucât g a fost aleasă arbitrar concludem că f^* este continuă în fiecare punct din domeniul de definiție.

(ii) În primul rînd vom demonstra că f^* este o aplicație injectivă. Fixăm două aplicații distincte $g, h \in C_p(Y, \mathbb{Z})$. Atunci $g(y) \neq h(y)$ pentru un careva $y \in Y$. Dacă $x \in f^{-1}(y)$, atunci $f^*(g)(x) = g(y) \neq h(y) = f^*(h)(x)$. Prin urmare $f^*(g) \neq f^*(h)$.

Acum vom arăta că $(f^*)^{-1}$ este continuă. Fixăm o aplicație $g \in C_p(Y, \mathbb{Z})$ și o vecinătate standard $U = W(g, y_1, ..., y_n)$ a lui g în $C_p(Y, \mathbb{Z})$. Fie $x_i = f^{-1}(y_i)$, $i = \overline{1, n}$. Fie $V = W(h, x_1, ..., x_n) \cap f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$, unde $h = f^*(g)$. Mulțimea V este o vecinătate deschisă a lui h în $f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$. Dacă $h' \in V$, atunci $h' = f^*(g')$ pentru un careva $g' \in C_p(Y, \mathbb{Z})$ și $h'(x_i) = f^*(g')(x_i) = g'(f(x_i)) = g'(y_i)$. Astfel $g' = (f^*)^{-1}(h') \in U$. Prin urmare $(f^*)^{-1}(V) \subseteq U$.

(iii) Presupunem că f este $\mathbb{Z}$-factor. În primul rând vom demonstra că $h(f^{-1}(y))$ este o aplicație constant pentru orice $h \in cl(f^*(C_p(Y, \mathbb{Z})))$ și $y \in Y$. Într-adevăr, fie $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$ și $h(x_1) \neq h(x_2)$. Atunci fixăm o aplicație $h' \in W(h, x_1, x_2) \cap f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$. Atunci $h'(x_1) \neq h'(x_2)$ și $h' = f^*(g')$ pentru careva $g' \in C_p(Y, \mathbb{Z})$. Prin urmare

$$h'(x_1) = g'(f(x_1)) = g'(y) = g'(f(x_2)) = g'(x_2),$$

contradicție. Deci există o aplicație $g : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ astfel încât $h = g \circ f$. Întrucât f este $\mathbb{Z}$-factor și h este continuă, aplicația g este la fel continuă, adică $h = f^*(g) \in f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$. Prin urmare $f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$ este închis în $C_p(Y, E)$.

(iv) Presupunem că cf este o condensare. Fixăm o aplicație $h \in C_p(X, \mathbb{Z})$ și punctele arbitrare $x_1, ..., x_n \in X$, unde $n \in \mathbb{N}$. Atunci există $g \in C_p(Y, \mathbb{Z})$ astfel încât $g(f(x_i)) = h(x_i)$. Evident, $f^*(g) \in W(h, x_1, ..., x_n)$. Prin urmare $h \in cl(f^*(C_p(Y, \mathbb{Z})))$. Astfel $cl(f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))) = C_p(X, \mathbb{Z})$. Dacă f nu este injectivă fixăm două puncte distincte $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $U = W(x_1, x_2, a_1, a_2)$, unde $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ și $a_1 \neq a_2$, este o mulțime deschisă și nevidă în $C_p(X, \mathbb{Z})$ cu $U \cap f^*(C_p(Y, \mathbb{Z})) = \emptyset$. Prin urmare $f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$ nu este densă în $C_p(X, \mathbb{Z})$.

Propoziția 2.17. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $t_{\mathbb{Z}}(X) \leq \tau$, atunci $C_p(X, \mathbb{Z})$ este τ-plasată în $\mathbb{Z}^X$.*

Demonstrație. Fie $g \in \mathbb{Z}^X \setminus C_p(X, \mathbb{Z})$. Din faptul că $t_{\mathbb{Z}}(X) \leq \tau$ reiese că există $A \subseteq X$ astfel încât $|A| \leq \tau$ și $g|A \neq f|A$ pentru orice $f \in C_p(X, \mathbb{Z})$. Considerăm $\pi : \mathbb{Z}^X \to \mathbb{Z}^A$ – restricția, adică $\pi(h) = h|A$ pentru orice $h \in \mathbb{Z}^X$.

Mulțimea $Z = \pi(C_p(X, \mathbb{Z}))$ este τ-plasată în $\mathbb{Z}^A$ întrucât $|A| \leq \tau$ (orice submulțime de un punct din $\mathbb{Z}^A$ este de tip G_τ). Din $\pi(g) = g|A \notin Z$ reiese că există mulțimea P_0 de tip G_τ în $\mathbb{Z}^A$ pentru care $\pi(g) \in P_0 \subseteq \mathbb{Z}^A \setminus Z$.

Atunci $F = \pi^{-1}(P_0)$ este de tip G_τ în $\mathbb{Z}^X$ și $g \in P \subseteq \mathbb{Z} \setminus C_p(X, \mathbb{Z})$.

Propoziția 2.18. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este τ-plasat în $\mathbb{Z}^X$, atunci $t_{\mathbb{Z}}(X) \leq \tau$.*

Demonstrație. Fie $g \in \mathbb{Z}^X$ strict τ-continuă pe X și P o mulțime de tip G_τ în $\mathbb{Z}^X$, astfel încât $f \in P$. Evident există $A \subseteq X$ cu $|A| \leq \tau$ și $g \in \{f \in \mathbb{Z}^X$ astfel încât $f|A = g|A\} \subseteq P$. Întrucât g este strict τ-continuă există $h \in C_p(X,\mathbb{Z})$ astfel încât $h|A = g|A$. Atunci $h \in P$. Deci $P \cap C_p(X,\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ pentru orice P de tip G_τ în $\mathbb{Z}^X$ ce conține g. Întrucât $C_p(X,\mathbb{Z})$ este τ-plasată în $\mathbb{Z}^X$ concludem $g \in C_p(X,\mathbb{Z})$, adică g este continuă, deci $t_{\mathbb{Z}}(X) \leq \tau$.

Teorema 2.19. *Fie X un spațiu zero-dimensional, atunci $t_{\mathbb{Z}}(X) = q_0(C_p(X,\mathbb{Z}))$.*

Demonstrație. Fie $t_{\mathbb{Z}}(X) = \tau$. În virtutea Propoziției 2.17 avem că $C_p(X,\mathbb{Z})$ este τ-scufundat în $\mathbb{Z}^X$. Iar întrucât $\mathbb{Z}^X$ este $\mathbb{Z}$-compact rezultă că $\mathbb{Z}^X$ este $\aleph_0$-scufundat în $\beta_0\mathbb{Z}^X$. Atunci aplicând [6, Propoziția II.4.9] obținem că $C_p(X,\mathbb{Z})$ este τ-scufundat în $\beta_0(\mathbb{Z}^X)$. Iar aplicând Propoziția 2.12 obținem că $C_p(X,\mathbb{Z})$ este τ-scufundat în $\beta_0(C_p(X,\mathbb{Z}))$. Prin urmare $q(C_p(X,\mathbb{Z})) \leq t_{\mathbb{Z}}$.

Fie $\lambda = q_0(C_p(X,\mathbb{Z}))$. Aplicând faptul că $m(\mathbb{Z}^X) = \aleph_0 \leq \lambda$, $cl(C_p(X,\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}^X$ și Propoziția 2.13 concludem că $C_p(X,\mathbb{Z})$ este λ-scufundată în $\mathbb{Z}^X$. Prin urmare, în baza propoziție 2.18, $t_{\mathbb{Z}} \leq \lambda$. Așadar $t_{\mathbb{Z}} \leq q_0(C_p(X,\mathbb{Z}))$.

Corolarul 2.20. *Pentru orice X avem că $t_{\mathbb{Z}} \leq \aleph_0$, dacă și numai dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este $\mathbb{Z}$-compact.*

Demonstrație. Dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este $\mathbb{Z}$-compact, atunci $q_0(C_p(X,\mathbb{Z})) \leq \aleph_0$. Prin urmare și $t_{\mathbb{Z}}(X) \leq \aleph_0$

2.3. Spații monolitice și 0-stabile

Un spațiu X se numește spațiu τ-monolitic, dacă pentru orice mulțime $A \subseteq X$ cu $|A| \leq \tau$ avem $nw(cl(A)) \leq \tau$. În particular, X este $\aleph_0$-monolitic, dacă închiderea fiecărei mulțimi numărabile din X este un subspațiu cu rețea numărabilă. Un spațiu X este monolitic, dacă este τ-monolitic pentru orice număr cardinal τ, adică pentru fiecare $A \subseteq X$ avem $d(A) = nw(A)$.

Exemplul 2.21 (vezi [6])**.** *Spațiile metrizabile și spațiile cu rețele numărabile sunt monolitice. Pe când orice spațiu separabil X cu $nw(X) > \aleph_0$ nu este $\aleph_0$-monolitic.*

Cea mai mică pondere a spațiilor zero-dimensionale (respectiv Tychonoff) Y în care X poate fi condensat se notează $iw_0(X)$ (respectiv $iw(X)$). Evident, $iw(X) \leq iw_0(X)$ pentru orice spațiu Tychonoff X.

Propoziția 2.22. *Dacă* $\dim \beta X = 0$, *atunci* $iw_0(X) = iw(X)$.

Demonstrație. Presupunem că $iw(X) = \tau$. Atunci există un spațiu complet regulat Y cu ponderea τ și o bijecție continuă $f : X \longrightarrow Y$. Avem $Y \subseteq \Pi\{I_\alpha : \alpha \in A\}$, unde $I_\alpha = [0, 1]$ și $|A| = \tau$. Notăm cu $p_\alpha : Y \longrightarrow I_\alpha$ proiecția lui Y pe I_α, $\alpha \in A$. În virtutea teoremei de factorizare Mardešić [31, 7.4.14], pentru orice $\alpha \in A$ există un spațiu zero-dimensional Z_α, o aplicație continuă $g_\alpha : X \longrightarrow Z_\alpha$ și o aplicație continuă $h_\alpha : Z_\alpha \longrightarrow I_\alpha$ astfel încât $w(Z_\alpha) \leq \aleph_0$ și $h_\alpha \circ g_\alpha = p_\alpha \circ f$.

Considerăm aplicația $g = \Delta\{g_\alpha : \alpha \in A\} : X \longrightarrow Z \subseteq \Pi\{Z_\alpha : \alpha \in A\}$. Aplicația g este o bijecție continuă, $indZ = 0$ și $w(Z) = \tau$. Prin urmare $iw_0(X) \leq \tau$.

Spațiul X se numește $(\tau, 0)$-*stabil*, dacă pentru orice imagine continuă Y a lui X condițiile următoare sunt echivalente:

$S1$. $iw_0(Y) \leq \tau$;

$S2$. $nw(Y) \leq \tau$.

Propoziția 2.23. *Dacă* X *este zero-dimensional, atunci* $iw_0(X) \leq nw(X)$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{L}$ o rețea a spațiului X și $|\mathcal{L}| \leq \tau$. Perechea de submulțimi A, B ale lui X este 0-separată, dacă există o mulțime deschisă și închisă $U \subseteq X$ astfel încât $A \subseteq U \subseteq X \setminus B$. Notăm cu $\{(A_\mu, B_\mu) : \mu \in M\}$ familia tuturor perechilor 0-separate $A, B \in \mathcal{L}$. Evident, $|M| \leq \tau$. Pentru orice $\mu \in M$ fixăm o submulțime deschisă și închisă U_μ din X astfel încât $A_\mu \subseteq U_\mu \subseteq X \setminus B_\mu$. Notăm cu Y mulțimea X în topologia generată de subbaza $\{U_\mu, X \setminus U_\mu : \mu \in M\}$. Atunci $indY = 0$, $w(Y) \leq |M| \leq \tau$, iar aplicația identică $f : X \longrightarrow Y$ este o bijecție continuă. Prin urmare $iw_0(X) \leq nw(X)$.

Un spațiu X se numește *0-stabil*, dacă este $(\tau, 0)$-stabil pentru orice cardinal τ. Evident, un spațiu X este 0-stabil, dacă și numai dacă pentru orice imagine continuă Y a lui X avem $iw_0(Y) = nw(Y)$.

Următoarea afirmație a fost demonstrată în [24], iar pentru cazul spațiilor $C_p(X)$ a fost demonstrată în [76] (vezi [76, Problema 172]).

Propoziția 2.24. *Dacă* X *este un spațiu zero-dimensional, atunci* $nw(X) = nw(C_p(X, \mathbb{Z}))$.

Demonstrație. Vom arăta mai întâi că $nw(C_p(X,\mathbb{Z})) \le nw(X)$. În acest scop fixăm în mod arbitrar o rețea $\mathcal{S}$ din X și notăm

$$V(S_1, S_2, ..., S_k, n_1, ..., n_k) = \{f \in C_p(X,\mathbb{Z}) : f(S_i) = \{n_i\}, S_i \in \mathcal{S}, n_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., k\},$$

unde $k \in \mathbb{N}$. În continuare vom demonstra că familia $\eta = \{V(S_1, S_2, ..., S_k, n_1, n_2, ..., n_k)\}$ este o rețea în $C_p(X,\mathbb{Z})$.

Fie $f \in C_p(X,\mathbb{Z})$ și $W(f, x_1, x_2, ..., x_k)$ o vecinătate standard a lui f, adică

$$W(f, x_1, x_2, ..., x_k) = \{g \in C_p(X,\mathbb{Z}) : g(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, ..., k\},$$

unde $k \in \mathbb{N}$. Notăm $f(x_1) = m_1$, $f(x_2) = m_2$, ..., $f(x_k) = m_k$. Întrucât $\mathcal{S}$ este o rețea în X reiese că pentru orice punct x_i există $S_i \in \mathcal{S}$ astfel încât $x_i \in S_i$, unde $i = 1, 2, ..., k$ și $k \in \mathbb{N}$. Prin urmare

$$V(S_1, S_2, ..., S_k, m_1, m_2, ..., m_k) \subseteq V(x_1, x_2, ..., x_k, m_1, m_2, ..., m_k).$$

Într-adevăr, dacă $g \in V(S_1, S_2, ..., S_k, m_1, m_2, ..., m_k)$ reiese că $g(S_i) = \{m_i\}$, iar aplicând faptul că $x_i \in S_i$ concludem că $g(x_i) = m_i$, adică $g \in W(x_1, ..., x_k, m_1, ..., m_k)$, unde $i = 1, 2, ..., k$, $k \in \mathbb{N}$. Așadar η este o rețea în $C_p(X,\mathbb{Z})$, iar reieșind din modul cum a fost construită familia η obținem că $|\eta| \le |\mathcal{S}|$, deci $nw(C_p(X,\mathbb{Z})) \le nw(X)$.

În cele ce urmează vom arăta că $nw(X) \le nw(C_p(X,\mathbb{Z}))$. Aplicând faptul că X poate fi scufundat în $C_p(C_p(X,\mathbb{Z}))$ reiese că $nw(X) \le nw(C_p(C_p(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}))$. Pe de altă parte, din cele demonstrate mai sus avem $nw(C_p(C_p(X,\mathbb{Z}))) \le nw(C_p(X,\mathbb{Z}))$. Astfel $nw(X) \le nw(C_p(X,\mathbb{Z}))$ și în final am obținut $nw(X) = nw(C_p(X,\mathbb{Z}))$.

Următoarea afirmație, pentru cazul spațiilor $C_p(X)$, a fost demonstrată în [76] (vezi [76, Problema 173]).

Propoziția 2.25. *Dacă X este un spațiu zero-dimensional, atunci $iw_0(C_p(X,\mathbb{Z})) = d(X)$.*

Demonstrație. Fixăm o submulțime infinită $Y \subseteq X$ astfel încât $|Y| = d(X)$ și $cl(Y) = X$. Atunci, aplicând Propoziția 2.15, rezultă că $\pi_Y : C_p(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow C_p(Y|X,\mathbb{Z})$ este o aplicație continuă și bijectivă, adică o condensare. Prin urmare $iw_0(C_p(X,\mathbb{Z})) \le w(C_p(Y|X,\mathbb{Z}))$. Întrucât

$$w(C_p(Y|X,\mathbb{Z})) \le w(C_p(Y,E)) = |Y|$$

obținem că

$$iw_0(C_p(X,E)) \le d(X).$$

În cele urmează vom demonstra că $d(X) \leq \psi(C_p(X, \mathbb{Z}))$. Fie aplicația $f_0 = 0$ pentru orice $x \in X$. Evident, $f_0 \in C_p(X, \mathbb{Z})$. Fixăm o familie

$$\gamma = \{W(f_0, x_1, x_2, ..., x_k) : x_1, x_2, ..., x_k \in X, k \in \mathbb{N}\}$$

de vecinătăți standarde ale aplicației f_0 astfel încât $\cap\gamma = \{f_0\}$ (vezi demonstrația Propoziției 2.17). Pentru orice $W(f_0, x_1, x_2, ..., x_k)$ notăm $K(W) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ și $Y = \cup\{K(W) : W \in \gamma\}$, unde $k \in \mathbb{N}$. Evident, $|Y| \leq |\gamma|$. Vom arăta că $cl(Y) = X$. Presupunem, prin absurd, că $cl(Y) \neq X$. Atunci există un punct $x \in X \setminus cl(Y)$ și o aplicație $f \in C_p(X, \mathbb{Z})$ astfel încât $f(x) = 1$ și $f(Y) \subseteq \{0\}$. Dar atunci rezultă că $f \in \cap\gamma = \{f_0\}$ ceea ce este o contradicție.

Următoarea afirmație, pentru cazul spațiilor $C_p(X)$, a fost demonstrată în [76] (vezi [76, Problema 174]).

Propoziția 2.26. *Dacă X este un spațiu zero-dimensional, atunci $iw_0(X) = d(C_p(X, \mathbb{Z}))$.*

Demonstrație. Aplicând Propoziția 2.25 și faptul că X poate fi scufundat în $C_p(C_p(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ obținem că

$$iw_0(X) \leq iw_0(C_p(C_p(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})) \leq d(C_p(X, \mathbb{Z})),$$

deci

$$iw_0(X) \leq d(C_p(X, \mathbb{Z})).$$

Fixăm o condensare $f : X \longrightarrow Y$ astfel încât $w(Y) \leq iw_0(X)$. Aplicând Propoziția 2.16 concludem că $C_p(Y, \mathbb{Z})$ poate fi scufundat ca un subspațiu dens $f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))$ al spațiului $C_p(X, \mathbb{Z})$, unde f^* este aplicația duală. Prin urmare

$$d(f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))) \leq nw(f^*(C_p(Y, \mathbb{Z}))) = nw(C_p(Y, \mathbb{Z})) = nw(Y) \leq w(Y).$$

Așadar

$$d(C_p(X, E)) \leq d(f^*(C_p(Y, E))) \leq w(Y) \leq iw_0(X).$$

Teorema 2.27. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Spațiul $C_p(X, \mathbb{Z})$ este τ-monolitic, dacă și numai dacă X este $(\tau, 0)$-stabil.*

Demonstrație. Necesitatea. Fie τ un număr cardinal arbitrar. Presupunem că $C_p(X, \mathbb{Z})$ este τ-monolitic. Fie Y imaginea lui X printr-o funcție continuă și $iw_0(X) \leq \tau$. Evident, spațiul

$C_p(Y,\mathbb{Z})$ este homeomorf cu un subspațiu al lui $C_p(X,\mathbb{Z})$ și deci, din presupunerea noastră obținem că $C_p(Y,\mathbb{Z})$ este τ-monolitic. În particular, $nw(C_p(Y,\mathbb{Z})) \leq d(C_p(Y,\mathbb{Z}))$. Dar în același timp $iw_0(Y) = d(C_p(Y,\mathbb{Z}))$ și $nw(C_p(Y,\mathbb{Z})) = nw(Y)$. Deci $nw(Y) \leq iw_0(Y)$.

Suficiența. Fie $A \subseteq C_p(X,\mathbb{Z})$ și $|A| \leq \tau$. Considerăm produsul diagonal $f = \Delta A$ de funcții din A și notăm $Y = f(X)$. Astfel $f(x) = \{x_g = g(x) : g \in A\}$ și $Y \subseteq \mathbb{Z}^A$. Evident $w(Y) \leq |A| \leq \tau$.

Notăm prin $\widetilde{Y}$ mulțimea punctelor din Y înzestrată cu topologia $\mathbb{Z}$-factor asociată funcției f. Funcția identitate $i : \widetilde{Y} \to Y$ este o îndesire. Din acest motiv $iw_0(\widetilde{Y}) \leq w(Y) \leq \tau$. Întrucât X este τ-stabil și se transformă continuu pe $\widetilde{Y}$ reiese că $nw(\widetilde{Y}) \leq \tau$. Mai departe, $nw(C_p(\widetilde{Y},\mathbb{Z})) = nw(\widetilde{Y}) \leq \tau$. Spațiul $C_p(\widetilde{Y},\mathbb{Z})$ este homeomorf cu subspațiul închis $F = \{g\widetilde{f}$ *astfel încât* $g \in C_p(\widetilde{Y},\mathbb{Z})\}$ al spațiului $C_p(X,\mathbb{Z})$ întrucât funcția $\widetilde{f} = i^{-1} \circ f : X \to \widetilde{Y}$ $\mathbb{Z}$-factor.

Fie $g \in A$. Atunci $g = p_g \circ f = p_g \circ i \circ \widetilde{f}$, unde $p_g : \mathbb{Z}^A \to \mathbb{Z}$ proiecția: $p_g(x) = x_g = g(x)$. Evident funcția $p_g \circ i : \widetilde{Y} \to \mathbb{Z}$ este continuă adică $p_g \circ i \in C_p(\widetilde{Y},\mathbb{Z})$. Reiese că $g \in F$ adică $A \subseteq F$. Concludem, $cl(A) \subseteq cl(F) = F$ și $nw(cl(A)) \leq nw(F) = nw(C_p(\widetilde{Y},\mathbb{Z})) \leq \tau$.

Teorema 2.28. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Spațiul $C_p(X,\mathbb{Z})$ este $(\tau,0)$-stabil, dacă și numai dacă X este τ-monolitic.*

Demonstrație. Necesitatea. Aplicând Teorema 2.27 și faptul că $C_p(X,\mathbb{Z})$ este 0-stabil concludem că $C_p(C_p(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ este monolitic. Dar întrucât $X \subseteq C_p(C_p(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ reiese că X este monolitic (proprietatea de a fi monolitic este moștenită de orice subspațiu [6, Propoziția II.6.5]).

Suficiența. În virtutea Teoremei 2.27 este suficient să arătăm că $C_p(C_p(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ este τ-monolitic. Fie $A \subseteq C_p(C_p(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ și $|A| \leq \tau$. Pentru fiecare $f \in A$ fixăm mulțimea $B_f \subseteq X$ astfel încât $|B_f| \leq \tau$ și, dacă $g_1, g_2 \in C_p(X,\mathbb{Z})$ și $g_1|B_f = g_2|B_f$, atunci $f(g_1) = f(g_2)$. Punem $D = \cup\{B_f : f \in A\}$ și $cl(F) = D$. Evident, $|D| \leq \tau$. Întrucât X este τ-monolitic concludem că $nw(F) \leq \tau$ și $nw(C_p(F,\mathbb{Z})) \leq \tau$.

Considerăm restricția $\pi : C_p(X,\mathbb{Z}) \to Z \subseteq C_p(F,\mathbb{Z})$ (unde $\pi(g) = g|F$ și $Z = C_p(F,\mathbb{Z})$). Întrucât F e închisă în X funcția $\pi : C_p(X,\mathbb{Z}) \to Z$ este deschisă. În virtutea modulului de definiție a mulțimii F pentru fiecare $f \in A$ există $h_f : Z \to \mathbb{Z}$ încât $h_f \circ \pi = f$. Întrucât π e $\mathbb{Z}$-factor reiese că funcția h_f e continuă adică $h_f \in C_p(Z,\mathbb{Z})$. Din acest motiv $A \subseteq H = \{h \circ \pi : h \in C_p(Z,\mathbb{Z})\}$. Dar $H = \pi^*_{\mathbb{Z}}(C_p(Z,\mathbb{Z}))$ este închisă în $C_p(C_p(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ în virtutea factor lui π și H e homeomorf cu $C_p(C_p(Z,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$. Obținem $nw(C_p(Z,\mathbb{Z})) =$

$nw(Z) = nw(C_p(F,\mathbb{Z})) \leq \tau$. Așadar $nw(cl(A)) \leq nw(H) \leq nw(C_p(Z,\mathbb{Z})) \leq \tau$, adică $C_p(C_p(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ este τ-monolitic.

Propoziția 2.29. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este 0-stabil, atunci $C_p(X,\mathbb{Z})^\tau$ este 0-stabil pentru orice cardinal τ.*

Demonstrație. Rezultă din [6, Corolarul II.6.15].

Corolarul 2.30. *Spațiul $\mathbb{Z}^\tau$ este 0-stabil pentru orice cardinal τ.*

Demonstrație. Dacă $|X| = 1$, atunci $C_p(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Astfel aplicând Propoziția 2.29 obținem că $\mathbb{Z}^\tau$ este 0-stabil.

2.4. Spații proiectiv complete

Un spațiu X se numește *proiectiv complet*, dacă pentru orice aplicație deschisă și continuă $f : X \longrightarrow Y$ cu Y metrizabil, Y este complet.

Propoziția 2.31. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Spațiul $\mathbb{Z}^X$ este proiectiv complet.*

Demonstrație. Fie f o funcție continuă și deschisă pe $\mathbb{Z}^X$. Fie $Y = f(\mathbb{Z}^X)$ - spațiu cu bază numărabilă. Atunci, conform Lemei de factorizare, putem alege o submulțime numărabilă $A \subseteq X$ și o funcție $g : \mathbb{Z}^A \to Y$ astfel încât $g \circ \pi = f$, unde $\pi : \mathbb{Z}^X \to \mathbb{Z}^A$ este proiecția lui $\mathbb{Z}^X$ pe $\mathbb{Z}^A$. Din felul cum am ales funcția g și faptul că f este deschisă concludem că și g este deschisă. Dar $\mathbb{Z}$ este complet metrizabil cu bază numărabilă și deci $\mathbb{Z}^A$ este la fel complet metrizabil cu bază numărabilă întrucât $\mathbb{Z}^A$ este un produs numărabil. În baza teoremei lui Hausdorff asupra imaginii continue a unui spațiu complet metrizabil spațiul Y este complet metrizabil.

O submulțime A a spațiului X se numește $C_\mathbb{Z}$-scufundată în X, dacă orice aplicație continuă a lui A în $\mathbb{Z}$ poate fi prelungită la o aplicație continuă a lui X în $\mathbb{Z}$.

Un spațiu X se numește Čech-complet, dacă este o mulțime de tip G_δ într-o (respectiv în orice) compactificare Hausdorff a lui X. În particular, un spațiu metrizabil este Čech-complet, dacă și numai dacă este complet metrizabil.

Propoziția 2.32. *Dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ conține un subspațiu Čech-complet peste tot dens, atunci X este discret și numărabil.*

Demonstrație. Fie X un spațiu zero-dimensional. Fie Y un subspațiu Čech-complet și dens în $C_p(X, \mathbb{Z})$. Atunci Y este dens în $\mathbb{Z}^X$. Întrucât $\mathbb{Z}^X$ este compact, rezultă că Y este o mulțime de tip G_δ în $\mathbb{Z}^X$.

Fie o aplicație $g \in \mathbb{Z}^X$ fixată. Fie $\varphi : \mathbb{Z}^X \longrightarrow \mathbb{Z}^X$ astfel încât $\varphi(f) = f + g$ pentru orice $f \in \mathbb{Z}^X$. Atunci φ este un homeomorfism al spațiului $\mathbb{Z}^X$ în el însuși. Astfel mulțimea $Y' = \varphi(Y)$ este peste tot densă în $\mathbb{Z}^X$ și este de tip G_δ în $\mathbb{Z}^X$. Prin urmare mulțimea $Y \cap Y'$ este intersecția unui număr numărabil de mulțimi peste tot dense în $\mathbb{Z}^X$. Dar $\mathbb{Z}^X$ are proprietatea Baire. Așadar $Y \cap Y' \neq \emptyset$.

Fie o aplicație $h \in Y \cap Y'$ fixată. Atunci întrucât $h \in Y'$, $h = g + f$ pentru careva $f \in Y$. Dar $h \in Y$. Deci $g = h - f \in C_p(X, \mathbb{Z})$, adică $C_p(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^X$.

Propoziția 2.33. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $C_p(X, \mathbb{Z})$ este proiectiv complet, atunci orice subspațiu închis și numărabil $F \subseteq X$ este discret și $C_{\mathbb{Z}}$-scufundat în X.*

Demonstrație. Fie $\pi_F : C_p(X, \mathbb{Z}) \to C_p(F, \mathbb{Z})$ restricția lui $C_p(X, \mathbb{Z})$ la $C_p(F, \mathbb{Z})$. Notăm $\pi = \pi_F$ și $Y = \pi(C_p(X, \mathbb{Z})) \subseteq C_p(X, \mathbb{F})$. Atunci $cl(Y) = C_p(F, \mathbb{Z})$, iar întrucât F este închisă concludem că $\pi : C_p(X, \mathbb{Z}) \to Y$ este deschisă.

Conform numerabilității F și faptului că $Y \subseteq \mathbb{Z}^F$, Y are o bază numărabilă. Pe de altă parte $C_p(X, \mathbb{Z})$ este proiectiv complet și deci Y este complet metrizabil. Rezultă că Y este Čech-complet. Concludem că $Y = C_p(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^F$ și deci F este discret.

Propoziția 2.34. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $Y \subseteq X$ este $C_{\mathbb{Z}}$-scufundat în X și $C_p(X, \mathbb{Z})$ este proiectiv complet, atunci $C_p(Y, \mathbb{Z})$ este proiectiv complet.*

Demonstrație. Fie o aplicație continuă și deschisă $f : C_p(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow Z$ fixată, astfel încât $Z = f(C_p(Y, \mathbb{Z}))$ este un spațiu cu bază numărabilă. Atunci $\pi_Y \circ f$ este o aplicație continuă și deschisă a spațiului $C_p(Y, \mathbb{Z})$ în Z.

Remarca 2.35. *Propoziția 2.34 este adevărată și pentru spațiul $C_p(X)$ când X este Tychonoff.*

Corolarul 2.36. *Spațiul $C_p(\beta\mathbb{N})$ este proiectiv complet, dacă și numai dacă $C_p(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ este proiectiv complet.*

Demonstrație. Întrucât $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ este C-scufundată în $\beta\mathbb{N}$ și $\beta\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Remarca 2.37. *Corolarul 2.36 prezintă un răspuns parțial la [6, Problema II.8.8].*

Teorema 2.38. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă $C_p(X, \mathbb{Z})$ este proiectiv complet, 0-stabil și $\mathbb{Z}$-compact, atunci X este discret.*

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că X nu este discret. Prin urmare putem alege un punct $x \in X$ care să nu fie izolat. Atunci conform Propoziției 2.11 putem găsi o submulțime $A \subseteq X \setminus \{x\}$ numărabilă astfel încât $x \in cl(A)$. Numerabilitatea mulțimii A se datorează Corolarului 2.20 și faptului că $C_p(X, \mathbb{Z})$ este $\mathbb{Z}$-compact.

Deci în X există o mulțime A care e numărabilă, dar nu este închisă. Conform presupunerii că X nu este discret, concludem că $cl(A)$ nu poate fi un subspațiu discret. Iar aplicând condiția că $C_p(X, \mathbb{Z})$ este proiectiv complet și Propoziția 2.33 vedem că $cl(A)$ nu poate fi numărabilă.

În același timp, X este monolitic în baza stabilității lui $C_p(X, \mathbb{Z})$ (Teorema 2.28) și deci, cum A este numărabilă reiese că clA este un subspațiu cu rețea numărabilă. Aplicând [6, Lema II.8.4] concludem că în $cl(A)$ poate fi găsit un compact K numărabil, dar nu și discret.

Pe de altă parte K este închis în clA deci și în X (subspațiul clA este Hausdorff). Iar cum K este numărabil și $C_p(X, \mathbb{Z})$ proiectiv complet aplicând Propoziția 2.33 reiese că K este discret. Aceasta este o contradicție, deci teorema este demonstrată.

Fie X un spațiu zero-dimensional. Dacă X este discret, atunci $C_p(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^X$ și $C_p(X, \mathbb{Z})$ este proiectiv complet, 0-stabil și $\mathbb{Z}$-compact.

Corolarul 2.39. *Fie X un spațiu zero-dimensional. Spațiul $C_p(X, \mathbb{Z})$ este homeomorf spațiului $\mathbb{Z}^X$, dacă și numai dacă X este discret.*

2.5. Proprietăți multiplicative ale spațiilor funcționale cu structuri algebrice

Dacă spațiile liniare topologic F și L sunt liniar homeomorfe, atunci notăm cu $F \sim L$.

Fie E un spațiu topologic infinit și local convex.

În [6] este menționată următoarea afirmație:

F1: Dacă spațiul X este o sumă discretă de spații nevide $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, atunci

$$C_p(X, E) \sim \Pi\{C_p(X_\alpha, E) : \alpha \in A\}.$$

În [15] a fost demonstrată următoarea afirmație:

F2: Dacă Y este un subspațiu nevid al lui X și există o funcție liniară și continuă $u : C_p(Y,E) \longrightarrow C_p(X,E)$, unde $u(g)|Y = g$ pentru orice $g \in C_p(Y,E)$, atunci

$$C_p(X,E) \sim C_p(Y,E) \times H,$$

unde $H = \{f \in C_p(X,E) : Y \subseteq f^{-1}(0)\}$.

Teorema 2.40 (pentru $E = \mathbb{R}$ vezi [6, Teorema 0.6.2]; [76, Problema 177])**.** *Fie E un spațiu liniar topologic infinit și local convex peste corpul $\mathbb{K}$ de numere reale sau complexe. Fie X un spațiu homeomorf cu $Y \times E$ pentru careva spațiu Y. Atunci spațiul $C_p(X,E)$ este liniar homeomorf cu $(C_p(X,E))^{\aleph_0}$, adică există un homeomorfism $h : C_p(X,E) \longrightarrow (C_p(X,E))^{\aleph_0}$ astfel încât $h(f+g) = h(f)+h(g)$ și $h(t \cdot f) = t \cdot h(f)$ pentru orice $f, g \in C_p(X,E)$ și $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstrație. Dacă un spațiu Z este sumă discretă de spații $\{Z_\alpha : \alpha \in A\}$, atunci $C_p(Z,E) \sim \sqcap\{C_p(Z_\alpha,E) : \alpha \in A\}$ (vezi [6, Propoziția 0.3.4]).

Fie $a \in E$ unde $a \neq 0$. Orice număr $\lambda \in \mathbb{K}$ este identificat cu punctul $\lambda \cdot a$. Atunci $\mathbb{K}$ este un subspațiu liniar al lui E și spațiul discret $\mathbb{Z}$ este un subspațiu al lui $\mathbb{K}$. În acest caz $a = 1$. Astfel $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K} \subseteq E$. Există un retract continuu și liniar $r : E \longrightarrow \mathbb{R}$ peste corpul numerelor reale, unde $r(\lambda) = \lambda$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notăm cu $E_0 = r^{-1}(0)$. Atunci E_0 este un subspațiu închis a lui E și peste corpul numerelor reale avem $E \sim E_0 \times \mathbb{R}$. Putem presupune că $E = E_0 \times \mathbb{R}$ și $X = Y \times E_0 \times \mathbb{R}$. Considerăm retracția $\rho : X \longrightarrow Y \times \mathbb{R}$, unde $\rho(y,z,\lambda) = (y,\lambda)$ pentru orice

$$(y,z,\lambda) \in Y \times E_0 \times \mathbb{R} = X$$

care este liniar peste corpul numerelor reale $\mathbb{R}$.

Notăm cu

$$X_0 = Y \times E_0 \times \mathbb{Z}.$$

Există o aplicație liniară și continuă $u : C_p(X_0,E) \longrightarrow C_p(X,E)$, unde $u(g)|X_0 = g$ pentru orice $g \in C_p(X_0,E)$. Fie $x = (y,z,\lambda) \in Y \times E_0 \times \mathbb{R}$. Există un unic $n(x) \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n(x) \leq \lambda n(x) + 1$. Notăm cu $\lambda(x) = n(x) + 1 - \lambda$ și

$$u(g)(x) = \lambda(x) \cdot g(y,z,n(x)) + (1 - \lambda(x))g(y,z,n(x)+1).$$

Evident, aplicația u este continuă și liniară. Dacă $x \in X_0$, atunci $n(x) = \lambda$, $\lambda(x) = 1$ și $u(g)|X_0 = g$ pentru orice $g \in C_p(X_0,E)$. Așadar spațiile X_0 și $X_0 \times Z$ sunt homeomorfe.

Fie $H = \{f \in C_p(X,E) : X_0 \subseteq f^{-1}(0)\}$ un subspațiu liniar al lui $C_p(X,E)$. Prin urmare

$$C_p(X,E) \sim C_p(X_0,E) \times H) \sim C_p(X_0 \times \mathbb{Z}, E) \times H) = C_p(X_0,E)^{\mathbb{N}} \times H.$$

Notăm cu $Y_n = Y \times [n, n+1] \times E_0$, $H_n = \{f|Y_n : f \in H\}$ și $F_n = Y \times \{n, n+1\} \times E_0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Întrucât spațiile Y_n, Y_m sunt homeomorfe și $H_n = \{f \in C(Y_n, E) : F_n \subseteq f^{-1}(0)\}$, avem $H_n \sim H_m$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$. Din construcție, $H = \Pi\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$. Așadar $H \sim H^{\mathbb{N}}$.

Prin urmare

$$C_p(X,E) \sim C_p(X_0,E)^{\mathbb{N}} \times H) \sim C_p(X_0,E)^{\mathbb{N}} \times H^{\mathbb{N}} = (C_p(X_0,E) \times H)^{\mathbb{N}} = C_p(X,E)^{\mathbb{N}}.$$

2.6. Prelungirea funcțiilor cu valori în spații discrete

Un spațiu X se numește *normal*, dacă orice două submulțimi închise din X pot fi separate cu mulțimi deschise. În cele ce urmează notăm $\mathcal{D} = \{0,1\}$ în topologia discretă și cu $\mathcal{D}_\tau$ spațiul topologic discret cu τ elemente.

Teorema 2.41. *Fie $Y \subseteq X$, X un spațiu normal și $dim X = 0$. Atunci următoarele proprietăți sunt echivalente:*

1. *Pentru orice submulțime deschisă și închisă U a lui Y, mulțimea $cl_X U$ este deschisă și închisă în $cl_X Y$.*

2. *Pentru orice partiție deschisă și închisă $\gamma = \{U, V\}$ a lui Y, există o partiție deschisă și închisă $\gamma' = \{U', V'\}$ a lui X astfel încât $U = U' \cap Y$ și $V = V' \cap Y$.*

3. *Orice funcție $f \in C(Y, \mathcal{D})$ poate fi prelungită la o funcție din $C(X, \mathcal{D})$.*

Demonstrație. (i)→(ii) Fie X un spațiu normal și $dim X = 0$. Atunci $Ind X = 0$, ceea ce înseamnă că oricare două submulțimi disjuncte și închise ale lui X pot fi separate de către două submulțimi disjuncte, deschise și închise ale lui X; altfel spus, X este ultranormal [30]. Fie $\gamma = \{U, V\}$ o partiție deschisă și închisă a lui Y. Atunci, din presupunere, $cl_X U$ este deschisă și închisă în $cl_X Y$. Întrucât $cl_X Y$ este o submulțime deschisă a lui X, aplicând [30, Lema 1.1], există o submulțime deschisă și închisă U' a lui X, astfel încât $cl_X U = U' \cap cl_X Y$.

Pe de altă parte, $U \subseteq cl_X U$ și U este deschisă și închisă în Y, ceea ce implică $U' \cap Y = U$. Deducem că $\{U', X \setminus U'\}$ este partiția căutată.

(ii)$\rightarrow$(i) Fie U o submulțime deschisă a lui Y. Atunci $\{U, V = Y \setminus U\}$ este o partiție deschisă și închisă a lui Y. În aceste condiții, din presupunere, există o partiție deschisă și închisă $\{U', V'\}$ a lui X astfel încât $U = U' \cap Y$ și $V = V' \cap Y$. Acum, întrucât $\{U, V\}$ este o partiție a lui Y avem $cl_X Y = cl_X U \cup cl_X V$. Pe de altă parte, $U \subseteq cl_X U \subseteq U'$ și prin urmare $cl_X U = U' \cap cl_X Y$, ceea ce înseamnă că $cl_X U$ este deschisă și închisă în $cl_X Y$.

(ii)$\leftrightarrow$(iii) Este evident.

Remarca 2.42. *Teorema de mai sus va fi adevărată și în cazul când vom înlocui condiția "$dimX = 0$" cu "X este Lindelöf și zero-dimensional ($indX = 0$)".*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă X este Lindelöf, atunci $indX = 0$, dacă și numai dacă $IndX = 0$ [32, Teorema 1.6.5].

Remarca 2.43. *Echivalența (ii)$\leftrightarrow$(iii) din Teorema 2.41 este adevărată pentru orice spațiu X.*

Exemplul 2.44. *Fie $Y = \mathbb{N}$ înzestrat cu topologia discretă și $X = \beta\mathbb{N}$. Atunci X este un spațiu normal și $dimX = 0$. Fie $\tau < \omega$. Atunci orice funcție continuă definită pe Y cu valori în $\mathcal{D}_\tau$ poate fi prelungită la o funcție continuă pe X. Însă, dacă $\tau \geq \omega$, atunci întrucât o funcție continuă pe un compact trebuie sa fie mărginită, nu orice funcție continuă pe Y cu valori în $\mathcal{D}_\tau$ poate fi prelungită la o funcție continuă pe X. Astfel în cazul funcțiilor continue cu valori într-un spațiu discret infinit, condițiile ca X să fie spațiu normal și $dimX = 0$ nu sunt suficiente.*

O familie γ de submulțimi ale unui spațiu X se numește *discretă*, dacă pentru orice punct $x \in X$ există o vecinătate care se intersectează cu cel mult un element din γ. Un spațiu X se numește *τ-colectiv normal*, dacă pentru orice familie $\{F_\alpha : \alpha \in A, |A| \leq \tau\}$ de submulțimi discrete din X, există o familie de mulțimi deschise și disjuncte $\{U_\alpha : \alpha \in A, |A| \leq \tau\}$ astfel încât $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ pentru orice $\alpha \in A$.

Teorema 2.45. *Fie $Y \subseteq X$, X un spațiu τ-colectiv normal, $\tau \geq \omega$ și $dimX = 0$. Atunci următoarele proprietăți sunt echivalente:*

1. *Pentru orice familie discretă $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ de submulțimi deschise și închise ale lui Y familia $\{cl_X U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este discretă în X.*

2. *Pentru orice submulțime deschisă și închisă U a lui Y mulțimea $cl_X U$ este deschisă și închisă în $cl_X Y$ și orice familie discretă $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ submulțimi deschise și închise ale lui Y este local finită în X.*

3. *Orice funcție $f \in C(Y, \mathcal{D}_\tau)$ poate fi prelungită la o funcție din $C(X, \mathcal{D}_\tau)$.*

Demonstrație. (i)→(ii) Fie $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ o familie discretă de submulțimi deschise și închise ale lui Y. Din presupunere, $\{cl_X U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este discretă în X, însă $U_\alpha \subseteq cl_X U_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{D}\tau$, prin urmare $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este local finită în X.

Acum, presupunem că $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este o acoperire discretă a lui Y cu submulțimi deschise și închise. Folosind presupunerea obținem că $cl_X U_\alpha = cl_X Y \setminus \cup\{U_\beta : \beta \in \mathcal{D}_\tau \setminus \{\alpha\}\}$ ceea ce înseamnă că $cl_X U_\alpha$ este deschis și închis în Y pentru orice $\alpha \in \mathcal{D}\tau$.

Acum, fie U o submulțime deschisă și închisă a lui Y. Atunci $\{U, Y \setminus U\}$ este o familie discretă de submulțimi deschise și închise ale lui Y. Aplicând rezultatele precedente concludem că $cl_X U$ este deschisă și închisă în $cl_X Y$.

(ii)→(i) Fie $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ o familie discretă de submulțimi deschise și închise ale lui Y. Atunci, din presupunere, $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este local finită în X și $cl_X U_\alpha$ este deschisă și închisă în $cl_X Y$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{D}\tau$. Întrucât, pentru orice $\alpha \in \mathcal{D}\tau$, U_α sunt disjuncte două câte două și $cl_X U_\alpha$ sunt deschise și închise în $cl_X Y$ concludem că $cl_X U_\alpha$ sunt de asemenea disjuncte două câte două. Astfel $\{cl_X U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este discretă în X.

(i)→(iii) Fie $f \in C(Y, \mathcal{D}_\tau)$. Fie $\{U_\alpha = f^{-1}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ o familie discretă de submulțimi deschise și închise ale lui Y. Din presupunere, $\{cl_X U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este discretă în X și întrucât X este τ-colectiv normal și $dim X = 0$, există o colecție discretă $\{V_\alpha : \alpha \leq \tau\}$ de submulțimi deschise și închise ale lui X astfel încât $cl_X U_\alpha \subseteq V_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{D}\tau$. Putem presupune că $\{V_\alpha : \alpha \leq \tau\}$ este o acoperire a lui X. Fie $g \in C(X, \mathcal{D}_\tau)$, $g^{-1}(\alpha) = V_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{D}\tau$.

Funcția g este cea căutată.

(iii)→(i) Fie $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ o familie discretă de submulțimi deschise și închise ale lui Y. Fie $f \in C(Y, \mathcal{D}_\tau)$ astfel încât $f^{-1}(\alpha) = U_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{D}\tau$. Atunci, din presupunere, există $g \in C(X, \mathcal{D}_\tau)$ astfel încât $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in Y$. Prin urmare $\{V_\alpha = g^{-1}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este o partiție deschisă și închisă a lui X astfel încât $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{D}\tau$. Atunci $cl_X U_\alpha = V_\alpha \cap cl_X Y$ și $\{cl_X U_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\tau\}$ este o partiție deschisă și închisă a lui $cl_X Y$.

Exemplul 2.46. *Fie* $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *un subspațiu al planului cu distanță:* $d((0,0),(x,y)) = |x| + |y|$ *pentru orice* $(x, y) \in X$*; dacă* $(x, y), (u, v) \in X$ *și* $x : y = u : v$ *(se află pe aceeași linie care intersectează originea), atunci* $d((x, y), (u, v)) = |x - u| + |y - v|$*; dacă* $(x, y), (u, v) \in X$ *și* $x : y \neq u : v$*, atunci* $d((x, y), (u, v)) = |x| + |y| + |u| + |v|$.

Spațiul X *este un hedgehog metrizabil [31]. Fie*

$$Y = \{(x, y) \in X : \frac{1}{2} < x^2 + y^2\}.$$

Pentru orice $\alpha \in [0, 2\pi]$ *notăm*

$$I_\alpha = \{(tcos\alpha, tsin\alpha) : 0 \leq t \leq 1\}$$

și $F_\alpha = I_\alpha \cap Y$*. Atunci orice submulțime deschisă și închisă* U *a lui* Y *este o reuniune a unui careva* F_α*. Pentru orice submulțime deschisă și închisă* H *a lui* Y *mulțimea* $cl_X H$ *este deschisă și închisă în* $cl_X Y$.

Fie $f : Y \longrightarrow \mathcal{D}_\tau$ *o funcție continuă definită pe* Y *cu valori într-un careva* $\mathcal{D}_\tau$*. Dacă* $|f(Y)| \geq 2$*, funcția* f *nu poate fi prelungită la o funcție continuă pe* X*. Astfel condiția* $dimX=0$ *este esențială în Teorema 2.45.*

2.7. Prelungirea funcțiilor cu valori în spații metrice

Un spațiu topologic X este complet după Dieudonné, dacă pe spațiul X există o uniformitate completă. Un spațiu X este complet topologic, dacă X este homeomorf cu un subspațiu închis a unui produs de spații metrizabile [32]. Completarea după Dieudonné μX a spațiului X este spațiu complet topologic pentru care X este un subspațiu dens al lui μX și orice funcție continuă g definită pe X cu valori într-un spațiu topologic complet Y admite o prelungire continuă μg la μX.

Fie τ un număr cardinal infinit. Notăm prin $\mu_\tau X$ un spațiu complet topologic pentru care X este un subspațiu dens al lui $\mu_\tau X$ și orice funcție continuă g definită pe X cu valori într-un spațiu metrizabil Y cu ponderea $\leq \tau$ admite o prelungire continuă $\mu_\tau g$ la $\mu_\tau X$.

Cardinalul infinit $c(X) = sup\{|\gamma| : \gamma \subseteq t^*(X)$ *familie de mulțimi disjuncte două câte două*$\}$ se numește numărul Souslin al lui X.

Dacă τ și κ sunt numere cardinale infinite și $\tau \leq \kappa$, atunci $X \subseteq \mu_\kappa X \subseteq \mu_\tau X$. Prelungirea $\nu X = \mu_{\aleph_0} X$ se numește completarea Hewitt-Nachbin a unui spațiu X. Dacă $\tau \geq c(X)$, atunci $\mu_\tau X = \mu X$.

Teorema 2.47. *Fie Y un subspațiul al spațiului X, E un spațiu topologic astfel încât $E = \mu_\tau E$ și pentru orice subspațiu închis Z al lui X și orice funcție continuă $g : Z \longrightarrow E$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$. Dacă $\mu_\tau Y = cl_{\mu_\tau X} Y$, atunci pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.*

Demonstrație. Fie $g : Y \longrightarrow E$ o funcție continuă fixată. Această funcție admite o prelungire continuă $\mu_\tau g$ la $\mu_\tau Y$, adică $\mu_\tau g : \mu_\tau Y \to E$.

Însă $\mu_\tau Y = cl_{\mu_\tau X} Y$, întrucât X este scufundat în $\mu_\tau X$ și $Y \subseteq X$ putem privi $\mu_\tau Y$ ca un subspațiu închis al lui $\mu_\tau X$. Acum notăm $Z = \mu_\tau Y \cap X$ și $\varphi = \mu_\tau g | Z$.

Din condițiile teoremei orice funcție continuă pe Z cu valori în E admite o prelungire continuă la X. Astfel prelungirea continuă a lui g, φ admite o prelungire continuă $\bar{g} : X \to E$.

Spunem că familia $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ de submulțimi a spațiului X este funcțional discretă, dacă există o funcție continuă $g : X \longrightarrow Y$ cu valori într-un careva spațiu metrizabil Y astfel încât $\{g(F_\alpha) : \alpha \in A\}$ este o familie discretă de submulțimi ale spațiului Y.

Teorema 2.48. *Fie Y un subspațiu al spațiului X, τ un număr cardinal infinit și pentru orice funcție continuă $g : Z \longrightarrow E$ definită pe un subspațiu închis Z al lui X cu valori într-un spațiu Banach E cu ponderea $\leq \tau$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$. Atunci următoarele proprietăți sunt echivalente:*

1. *$\mu_\tau Y = cl_{\mu_\tau X} Y$,*
2. *Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu E cu ponderea $\leq \tau$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.*
3. *Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu Frechet E cu ponderea $\leq \tau$ există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.*
4. *Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu metrizabil E cu ponderea $\leq \tau$ există o prelungire continuă $\bar{g} : cl_X Y \longrightarrow E$.*
5. *Pentru orice familie funcțional discretă $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ a unui spațiu Y cu $|A| \leq \tau$ familia $\{cl_X F_\alpha : \alpha \in A\}$ este discretă în X.*

Demonstrație. În primul rând vom stabili că spațiul X este τ-colectiv normal. Fie $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ o familie discretă de submulțimi închise ale spațiului X astfel încât $|A| \leq \tau$. Atunci

$Z = \cup\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ este o submulțime închisă a lui X. Există un spațiu Hilbert H cu ponderea τ astfel încât $\mathcal{D}_\tau$ este un subspațiu închis al lui H și $||x - y|| \geq 1$ pentru orice $x, y \in \mathcal{D}_\tau$. Fie $h : A \longrightarrow \mathcal{D}_\tau$ o funcție injectivă. Considerăm funcția $g : Z \longrightarrow \mathcal{D}_\tau \subseteq H$, unde $g(F_\alpha) = \{h(\alpha)\}$ pentru orice $\alpha \in A$. Întrucât $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ este o familie discretă, funcția g este continuă. Notăm $U_\alpha = \{z \in H : ||z - h(\alpha)|| < 2^{-2}\}$. Există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow H$ a funcției g. Atunci $\{V_\alpha = \bar{g}^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ este o familie discretă de submulțimi deschise din X și $F_\alpha \subseteq V_\alpha$ pentru orice $\alpha \in A$. Astfel X este τ-colectiv normal.

(i)$\rightarrow$(ii) Rezultă din Teorema 2.47.

(i)$\rightarrow$(iv) Fie E un spațiu metrizabil cu ponderea mai mică sau egală cu τ și $g : Y \longrightarrow E$ o funcție continuă. Există o prelungire continuă $\mu_\tau g : \mu_\tau Y \longrightarrow E$ a funcției g. Întrucât $\mu_\tau Y \subseteq \mu_\tau X$, avem că $cl_X Y = \mu_\tau Y \cap X$. Astfel $\bar{g} = \mu_\tau g | cl_X Y : cl_X Y \longrightarrow E$ este o prelungire continuă a funcției g.

(ii)$\rightarrow$(i) Orice spațiu metrizabil cu ponderea mai mică sau egală cu τ poate fi scufundat într-un spațiu Hilbert cu ponderea mai mică sau egală cu τ. Fie H un spațiu Hilbert cu $w(H) \leq \tau$ astfel încât E poate fi scufundat în H.

Fie $g : Y \longrightarrow E \subseteq H$ o funcție continuă și $\bar{g} : X \longrightarrow E \subseteq H$ o prelungire continuă a funcției g. Atunci $\bar{g}$ poate fi prelungită la $\bar{\bar{g}} : \mu_\tau X \longrightarrow H$, însă $\varphi = \bar{\bar{g}} | cl_{\mu_\tau X} Y$ este o prelungire continuă a g. Astfel $\mu_\tau Y = cl_{\mu_\tau X} Y$.

(iv)$\rightarrow$(iii) Rezultă din faptul că X este τ-colectiv normal și un rezultat din [66].

(iii)$\rightarrow$(ii) Este evident deoarece orice spațiu Frechet este spațiu Banach.

(iv)$\rightarrow$(v) Fie $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ o familie funcțional discretă a spațiului Y și $|A| \leq \tau$. Atunci există un spațiu metrizabil Y_1 și o funcție continuă $g : Y \longrightarrow Y_1$ astfel încât $\{g(F_\alpha) : \alpha \in A\}$ este o familie discretă de submulțimi ale lui Y_1. Atunci există o familie discretă $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de submulțimi deschise ale lui Y_1 astfel încât $cl_{Y_1} g(F_\alpha) \subseteq U_\alpha$ pentru orice $\alpha \in A$. Prin urmare pentru orice $\alpha \in A$ există o funcție continuă $h_\alpha : Y \longrightarrow I = [0, 1]$ astfel încât $Y \setminus g^{-1}(U_\alpha) \subseteq h_\alpha^{-1}(0)$ și $F_\alpha \subseteq h_\alpha^{-1}(1)$.

Fie H_1 spațiul Hilbert a tuturor funcțiilor $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $f(A)$ este finită și

$$< f_1, f_2 >= \sum \{f_1(x) \cdot f_2(x) : x \in A\}.$$

Completarea H a spațiului H_1 este un spațiu Hilbert (și Banach) cu ponderea $|A| \leq \tau$. Pentru orice $y \in Y$ considerăm funcția $f_y : A \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $f_y(\alpha) = h_\alpha(y)$ pentru orice $\alpha \in A$. Atunci $\varphi : Y \longrightarrow H$, unde $\varphi(y) = f_y$ este o funcție continuă. Prin urmare există o prelungire continuă $\mu_\tau\varphi : cl_X Y \longrightarrow E$. Dacă $y \in F_\alpha$, atunci $f_y(\alpha) = 1$ și $f_y(\beta) = 0$ pentru orice $\beta \in A$ și $\beta \neq \alpha$. Astfel $f_y = f_z$ pentru orice $y, z \in F_\alpha$ și $\alpha \in A$. Notăm $l_\alpha = f_y$ pentru un $y \in F_\alpha$ fixat. Atunci $||l_\alpha - l_\beta|| = 2$ și $||l_\alpha|| = 1$ pentru orice $\alpha, \beta \in A$ și $\alpha \neq \beta$. Prin urmare $\{\varphi(F_\alpha) : \alpha \in A\}$ este o familie discretă de puncte ale spațiului H. Așadar $\{\Phi_\alpha = \mu_\tau\varphi^{-1}(l_\alpha) : \alpha \in A\}$ este o familie discretă de submulțimi ale lui X. Întrucât $F_\alpha \subseteq \Phi_\alpha$, implicația (iv)$\to$(v) este demonstrată.

(v)$\to$(iv) Fie $g : Y \to E$ o funcție continuă cu valori în spațiul metric E cu ponderea mai mică sau egală decât τ. Din condiția (v) rezultă că $cl_{\beta X} Y = \beta Y$, adică $\beta Y \subseteq \beta X$.

Fie $Z = cl_X Y$. Atunci $Y \subseteq Z \subseteq X$ și $\beta Y = \beta Z \subseteq \beta X$.

Considerăm prelungirea continuă $\varphi : \beta Z \longrightarrow \beta E$ a funcției g. Afirmăm că $\varphi(Z) \subseteq E$.

Presupunem că $z_0 \in Z$ și $\varphi(z_0) \in \beta E \setminus E$. În primul rând afirmăm că $z_0 \in \nu Y \subseteq \beta Z$. Presupunem că $z_0 \in \beta Z \setminus \nu Z$.

În acest caz există o funcție continuă $h : \beta Z \longrightarrow [0, 1]$ astfel încât $h(z_0) = 0$ și $h(y) > 0$ pentru orice $y \in Y$ [32, Teorema 3.11.10]. Notăm

$$U_n = \{y \in Y : \frac{1}{n+2} < h(y) < \frac{1}{n}\}.$$

Din construcție, $U = \cup\{U_n : n \in \mathbb{N}\} = \{y \in Y : 0 < h(y) < 1\}$. Prin urmare $z_0 \in cl_{\beta Z} U$. Atunci familiile $\gamma_1 = \{cl_Z U_{4n-3} : n \in \mathbb{N}\}$, $\gamma_2 = \{cl_Z U_{4n-2} : n \in \mathbb{N}\}$, $\gamma_3 = \{cl_Z U_{4n-1} : n \in \mathbb{N}\}$ și $\gamma_4 = \{cl_Z U_{4n} : n \in \mathbb{N}\}$ sunt discrete în Z, adică familia $\gamma = \{cl_Z U_n : n \in \mathbb{N}\}$ este local finită. Din construcție, $z_0 \notin cl_Z U_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Așadar

$$z_0 \notin \cup\{cl_Z U_n : n \in \mathbb{N}\} = cl_Z(\cup\{U_n : n \in \mathbb{N}\}),$$

ceea ce este o contradicție. Prin urmare $z_0 \in \nu Y$.

O mulțime $F \subseteq Y$ este o zero-mulțime, dacă $F = h^{-1}(0)$ pentru o funcție continuă h fixată definită pe Y. În acest caz $Y \setminus E$ se numește co-zero-mulțime a lui Y.

Presupunem că $\varphi(z_0) \in \beta E \setminus E$. Pentru orice $x \in E$ există o submulțime deschisă V_x a lui E astfel încât $x \in V_x$ și $\varphi(z_0) \notin cl_{\beta E} V_x$. În acest caz $z_0 \notin cl_X(g^{-1}(V_x))$. Există o acoperire local finită σ-discretă $\{W_\beta : \beta \in B\}$ astfel încât:

- $|B| \leq \tau$ și pentru orice $\beta \in B$ există $x(\beta) \in E$ astfel încât $W_\beta \subseteq V_{x(\beta)}$;

- $B = \cup\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ și orice familie $\{W_\beta : \beta \in B_n\}$ este discretă în E.

Atunci $z_0 \notin cl_X g^{-1}(W_\beta)$ pentru orice $\beta \in B$. Din construcție, familia $\{g^{-1}(W_\beta) : \beta \in B_n\}$ este funcțional discretă în Y. Prin urmare, $\{cl_X g^{-1}(W_\beta) : \beta \in B_n\}$ este o familie discretă în X și $Z_n = \cup\{cl_X g^{-1}(W_\beta) : \beta \in B_n\}$ este o submulțime închisă a lui X. Din construcție,

$z_0 \in Z \setminus \cup\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Întrucât Z este un spațiu normal, există o funcție continuă $h : Z \longrightarrow [0,1]$ astfel încât $h(z_0) = 0$ și $h(z) \geq 2^{-n}$ pentru orice $z \in Z_n$ și $n \in \mathbb{N}$. Atunci $z_0 \notin \nu Y$, ceea ce este o contradicție.

Corolarul 2.49. *Fie Y un subspațiu al unui spațiu τ-colectiv normal X. Atunci următoarele proprietăți sunt echivalente:*

(i) $\mu Y = cl_{\mu X} Y$.

(ii) Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu Banach E există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.

(iii) Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu Fréchet E există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$.

(iv) Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu complet metrizabil E există o prelungire continuă $\mu_\tau g : cl_X Y \longrightarrow E$.

(v) Pentru orice familie funcțional discretă $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ a unui spațiu Y familia $\{cl_X F_\alpha : \alpha \in A\}$ este discretă în X.

Exemplul 2.50. *Presupunem că Y este un spațiu discret care nu este un spațiu Hewitt-Nachbin complet. Fie o submulțime numărabilă nevidă $H \subseteq \nu Y \setminus Y$ fixată. Notăm $Z = Y \cup H$. Fie $S = \{0\} \cup \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ un subspațiu al numerelor reale și $X = Y \times (H \times S)$ un subspațiu al spațiului $Z \times S$. Atunci X este un spațiu topologic complet și paracompact care nu este un spațiu Hewitt-Nachbin complet. Conform construcției, $dim X = 0$ și $Y \subseteq Z \subseteq cl_{\nu X} Y \subseteq \nu X$. Pentru orice funcție continuă $g : Y \longrightarrow E$ cu valori într-un spațiu metrizabil, complet și separabil E există o prelungire continuă $\bar{g} : X \longrightarrow E$. Dacă Y este un subspațiu închis al unui spațiu Banach E, atunci funcția identică $g : Y \longrightarrow Y \subseteq E$ nu admite prelungiri continue la Z și X.*

2.8. Concluzii la capitolul 2

Problema studierii corelațiilor dintre proprietăților topologice ale spațiului X, proprietățile topologico-algebrice ale spațiului E și proprietățile topologico-algebrice ale spațiului $C_p(X, E)$ a fost evidențiată în multe lucrări însă mai mult pentru cazul când $E = \mathbb{R}$ sau $E = \mathbb{Z}$.

În capitolul 2 au fost cercetate corelațiile dintre proprietățile spațiilor X, E și $C_p(X, E)$ pentru cazuri mult mai generale. Respectiv metodele dezvoltate în acest capitol pot fi utilizate în cercetările ulterioare privitor la corelațiile dintre proprietățile spațiului X și proprietățile spațiului funcțional $C_p(X, E)$.

Deopotrivă cu aceste proprietăți, în acest capitol a fost cercetată și problema prelungirii aplicațiilor cu valori în spații metrice și în spații metrizabile complete. Este bine știut că problema prelungirii aplicațiilor are un rol important în aplicațiile matematicii, în particular posibilitatea de prelungire a aplicațiilor este o condiție esențială pentru două rezultate principale din capitolul 3.

Așadar în capitolul 2:

1. A fost definită celularitatea punct-finită $p(X)$ a spațiului X, numărul lui Alexandroff $a(X)$. A fost determinată corelația dintre celularitatea punct-finită a spațiului topologic X și numărul lui Alexandroff a spațiului $C_p(X,E)$ (s-a demonstrat că $p(X) = a(C_p(X,E))$, pentru orice spațiu E-Tychonoff X și orice spațiu metrizabil E).

2. A fost definită $\mathbb{Z}$-desimea $t_{\mathbb{Z}}(X)$ a spațiului X, τ-plasabilitatea spațiilor zero-dimensionale. S-a demonstrat $t_{\mathbb{Z}}(X) = q_0(C_p(X,\mathbb{Z}))$ pentru orice spațiu zero-dimensional X avem.

3. A fost definite noțiunea de spațiu 0-stabil, monolitic și proiectiv-complet. S-a demonstrat că spațiul zero-dimensional X este discret, dacă și numai dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este proiectiv-complet, 0-stabil și $\mathbb{Z}$-compact.

4. Au fost stabilite condițiile de prelungire ale aplicațiilor cu valori în spații metrizabile complete.

3. APLICAȚII ALE STRUCTURILOR ALGEBRICE LA STUDIEREA PROPRIETĂȚILOR TOPOLOGICE

Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic cu unitate. Notăm cu $C_p(X, E)$ totalitatea aplicațiilor continue ale spațiului X în E în topologia convergenței punctiforme.

Spațiile X și Y se numesc $l_p(E)$-echivalente, dacă R-modulele topologice $C_p(X, E)$ și $C_p(Y, E)$ sunt izomorfe topologic. Spunem că o proprietate $\mathcal{P}$ se păstrează la $l_p(E)$-echivalențe, dacă $C_p(X, E)$ și $C_p(Y, E)$ sunt izomorfe topologic, atunci X posedă proprietatea $\mathcal{P}$, dacă și numai dacă Y posedă proprietatea $\mathcal{P}$. Pentru $E = \mathbb{R}$ au fost demonstrate multe rezultate (vezi [10]). În [16] au fost demonstrate rezultate pentru E spațiu normat, iar în [80] au fost demonstrate rezultate pentru E spațiu normat și topologia compact deschisă.

În acest capitol sunt prezentate rezultatele pentru cazuri mai generale când $\mathcal{P}$ se păstrează la $l_p(E)$-echivalențe.

Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [20, 21].

3.1. Funcții continue cu valori în module topologice

Fie X un spațiu topologic, R un inel topologic și E un R-modul topologic. Vom nota prin $C(X, E)$ familia tuturor funcțiilor continue definite pe X cu valori în E, iar prin $C_p(X, E)$ vom nota spațiul $C(X, E)$ înzestrat cu topologia convergenței punctiforme. Amintim că familia de mulțimi de forma

$$W(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n) = \{f \in C(X, E) : f(x_i) \in U_i \text{ pentru orice } i \leq n\},$$

unde $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, $U_1, U_2, ..., U_n$ sunt submulțimi deschise ale lui E și $n \in \mathbb{N}$, formează o bază a spațiului $C_p(X, E)$.

Spațiile X și Y se numesc $l_p(E)$-echivalente, dacă spațiile $C_p(X, E)$ și $C_p(Y, E)$ sunt spații liniare homeomorfe și notăm această relație prin $X \overset{E}{\sim} Y$.

Amintim că o *scufundare* a lui X în Y este o funcție $e : X \to Y$ astfel încât e este un homeomorfism al lui X în $e(X) \subseteq Y$.

Propoziția 3.1. *Fie E un R-modul topologic. Atunci $C_p(X, E)$ este un R-modul topologic, iar E se poate scufunda ca submodul închis în $C_p(X, E)$. Mai mult, această scufundare este una naturală.*

Demonstrație. Se poate demonstra ușor că $C_p(X, E)$ este un grup în raport cu operația de adunare punctuală a funcțiilor și respectiv este un modul unitar peste inelul R. Pentru orice $a \in E$ definim funcția $a_X : X \longrightarrow E$ prin $a_X(x) = a$ pentru orice $x \in X$, cu alte cuvinte a_X este o funcție constantă.

Fie $e : E \to C_p(X, E)$, unde $e(a) = a_X(x)$ pentru orice $a \in E$. Funcția e este injectivă, deoarece, dacă $a, b \in E$, cu $a \neq b$, atunci $a_X(x) = a \neq b = b_X(x)$ pentru orice $x \in X$.

Mulțimile $W(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n) = \{f \in C_p(X, E) : f(x_i) \in U_i\}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ și $U_1, U_2, ..., U_n$ sunt submulțimi deschise ale lui E, formează baza deschisă a spațiului $C_p(X, E)$.

Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ și U este deschisă în E, atunci

$$\begin{aligned} e(U) &= \{a_X : a \in U\} \\ &= e(E) \cap W(x_1, x_2, ..., x_n, U, U, ..., U). \end{aligned}$$

Deci e este o aplicație deschisă sau, echivalent, $e^{-1} : e(E) \longrightarrow E$ este continuă. Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} e^{-1}(W(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n) \cap e(E)) &= \{a \in E : a_X \in U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n\} \\ &= U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n. \end{aligned}$$

Ceea ce înseamnă că e este continuă. Așadar e este un homeomorfism al lui E în $e(E)$, adică o scufundare a lui E în $C_p(X, E)$.

Fixăm $g \in C_p(X, E)$ astfel încât $g \notin e(E)$. Atunci există două puncte distincte $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $g(x_1) \neq g(x_2)$. Fie acum U_1 și U_2 două mulțimi deschise din E astfel încât $g(x_1) \in U_1$, $g(x_2) \in U_2$ și $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Atunci $g \in W(x_1, x_2, U_1, U_2)$ și $W(x_1, x_2, U_1, U_2) \cap e(R) = \emptyset$. Așadar $e(E)$ este închisă în $C_p(X, E)$.

Propoziția 3.2. *Dacă E este un R-modul topologic zero-dimensional, atunci $C_p(X, E)$ un R-modul topologic zero-dimensional.*

Demonstrație. Pe de o parte, spațiul E^X este zero-dimensional deoarece este produs cartezian de spații zero-dimensionale. Pe de alta parte, $C_p(X, E)$ este un subspațiu al lui E^X. Prin urmare $C_p(X, E)$ este zero-dimensional deoarece orice subspațiu al unui spațiu zero-dimensional este și el zero-dimensional.

3.2. Aplicația de evaluare

Fie X un spațiu, R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial. Fie $x \in X$ un punct fixat. Atunci aplicația $\xi_x : C_p(X, E) \to E$ definită prin $\xi_x(f) = f(x)$ se numește *aplicația de evaluare* în punctul x.

Propoziția 3.3. *Aplicația de evaluare $\xi_x : C_p(X, E) \longrightarrow E$ este continuă și liniară pentru orice punct $x \in X$.*

Demonstrație. Fie $x \in X$. Pentru orice mulțime deschisă U din E avem $\xi_x^{-1}(U) = \{f \in C_p(X, E) : f(x) \in U\} = W(x, U)$. Însă $W(x, U)$ este un element din subbaza topologiei pe $C_p(X, E)$, adică $\xi_x^{-1}(U)$ este deschisă în $C_p(X, E)$ pentru orice submulțime deschisă $U \subseteq E$.

Evident,

$$\xi_x(f + \alpha g) = (f + \alpha g)(x) = f(x) + \alpha g(x) = \xi_x(f) + \alpha \xi_x(g)$$

pentru orice $f, g \in C_p(X, E)$ și orice $\alpha \in R$. Așadar ξ_x este o aplicație continuă și liniară.

Aplicația $e_X : X \to C_p(C_p(X, E), E)$, unde $e_X(x) = \xi_x$ pentru orice $x \in X$ se numește *aplicația canonică de evaluare.*

Propoziția 3.4. *Aplicația de evaluare canonică $e_X : X \to C_p(C_p(X, E), E)$ este continuă. Mai mult, mulțimea $e_X(X)$ este închisă în $C_p(C_p(X, E), E)$.*

Demonstrație. Fie $U = W(f_1, f_2, ..., f_k, U_1, U_2, ..., U_k) \cap e_X(X)$ o mulțime deschisă standard în $C_p(C_p(X, E), E) \cap e_X(X)$. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că $U \subseteq e_X(X)$, adică

$$\begin{aligned} U &= \{\xi_x \in e_X(X) : \xi_x(f_i) \in U_i, x \in X, i = \overline{1, k}\} \\ &= \{\xi_x \in e_X(X) : f_i(x) \in U_i, x \in X, i = \overline{1, k}\}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} e_X^{-1}(U) &= \{x \in X : f_i(x) \in U_i, i = \overline{1, k}\} \\ &= \cap\{f_i^{-1}(U_i) : i = \overline{1, k}\}. \end{aligned}$$

Întrucât pentru orice $i = \overline{1, k}$ și $f_i \in C(X, E)$, mulțimea $e_X^{-1}(U)$ este o intersecție finită de mulțimi deschise, obținem că ea este deschisă.

Fie $\varphi \in C_p(C_p(X, E), E) \setminus e_X(X)$. Există $f \in C_p(X, E)$ și $b \in X$ astfel încât $\varphi(f) \neq f(b) = \xi_b(f)$. Alegem în E două mulțimi deschise V și W astfel încât $\varphi(f) \in V$, $f(b) \in W$ și $V \cap W = \emptyset$. Mulțimea $U = \{\psi \in C_p(C_p(X, E), E) : \psi(f) \in V\}$ este deschisă în $C_p(C_p(X, E), E)$ și $U \cap e_X(X) = \emptyset$.

Propoziția 3.5. *Dacă $C_p(X,E)$ este o familie separatoare și regulată, aplicația de evaluare canonică $e_X : X \to C_p(C_p(X,E),E)$ este un homeomorfism al lui X în subspațiul $e_X(X)$ al lui $C_p(C_p(X,E),E)$.*

Demonstrație. Întrucât aplicația de evaluare canonică este continuă, este evident că este surjectivă și respectiv ne rămâne să demonstrăm că e_X este injectivă și funcția inversă este continuă.

În primul rând, vom arăta că e_X este injectivă. Fie $x, y \in X$, $x \neq y$. Din ipoteză, $C_p(X,E)$ este o familie separatoare, adică există o funcție $f \in C_p(X,E)$ astfel încât $f(x) \neq f(y)$, așadar $\xi_x \neq \xi_y$.

Acum vom demonstra că e_X^{-1} este continuă. Fie F o submulțime închisă a lui X. Din ipoteză $C_p(X,E)$ este o familie regulată, adică pentru orice $x \notin F$ există $f \in C_p(X,E)$ astfel încât $f(x) \notin cl_E f(F)$. Așadar $f(x)$ are o vecinătate $U_{f(x)}$ pentru care $U_{f(x)} \cap f(F) = \emptyset$. Atunci $W(f, U_{f(x)})$ este o vecinătate a lui ξ_x care nu se conține în $e_X(F)$, adică $e_X(F)$ este închisă. Așadar e_X^{-1} este continuă.

Un spațiu X se numește:

(i) R-complet regulat, dacă pentru orice submulțime închisă F din X și orice punct $a \in X \setminus F$ există $f \in C(X,R)$ astfel încât $f(a) \notin cl_R f(F)$;

(ii) R-Tychonoff, dacă pentru orice submulțime închisă F din X și orice punct $a \in X \setminus F$ există $g \in C(X,R)$ astfel încât $g(a) = 0$ și $F \subseteq g^{-1}(1)$.

Spațiul R este R-complet regulat.

Remarca 3.6. *Fie X un spațiu R-Tychonoff. Atunci:*

1. *X este spațiu Tychonoff.*
2. *Dacă E este un R-modul topologic, atunci pentru orice mulțime închisă F din X, orice punct $a \in X \setminus F$ și orice punct $b \in E$, există $f \in C(X,E)$ astfel încât $f(a) = 0$ și $f(F) = b$.*
3. *X este R-complet regulat.*

Remarca 3.7. *Fie E un R-modul topologic și X un spațiu R-complet regulat. Atunci:*

1. *X este un spațiu Tychonoff.*

2. Pentru orice mulțime închisă F din X și orice punct $a \in X \setminus F$ există $f \in C(X, E)$ astfel încât $f(a) \notin cl_E f(F)$.

3. $C(X, E)$ este o familie separatoare și regulată de funcții continue.

Remarca 3.8. *Un spațiu X este R-complet regulat, dacă și numai dacă familia $C(X, E)$ este separatoare și regulată pentru orice R-modul topologic netrivial E.*

Propoziția 3.9. *Dacă $indX = 0$, atunci spațiul X este R-Tychonoff.*

Demonstrație. Dacă C este o submulțime deschisă și închisă, atunci aplicația χ_C este continuă, unde $\chi_C(C) = 1$ și $\chi_C(X \setminus C) = 0$.

Vom alege un punct $x \in X$ și o submulțime închisă F din X astfel încât $x \in X \setminus F$. Întrucât $indX = 0$ există o submulțime deschisă și închisă C astfel încât $C \subseteq X \setminus F$. Atunci $X \setminus C$ este la fel deschisă și închisă și $F \subseteq cl_X F \subseteq X \setminus C$. Funcția caracteristică $g = \chi_{X \setminus C}$ este continuă, $g(x) = 0$ și $F \subseteq g^{-1}(1)$. Așadar X este R-Tychonoff.

Definiția 3.10. *Fie R un inel topologic. Un R-modul topologic E se numește:*

(i) simplu, dacă nu conține un submodul netrivial peste R;

(ii) local simplu, dacă E nu este trivial și există o mulțime deschisă U din E astfel încât $0 \in U$ și U nu conține R-submodule ale lui E;

(iii) R-închis, dacă există o aplicație continuă și surjectivă $\varphi_E : E \longrightarrow R$ astfel încât $\varphi_E(x + y) = \varphi_E(x) + \varphi_E(y)$ și $\varphi_E(tx) = t\varphi_E(x)$ pentru orice $t \in R$ și $x, y \in E$.

Exemplul 3.11. *Fie $\mathbb{R}$ corpul numerelor reale și $\mathbb{C}$ corpul numerelor complexe. Inelele $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$ sunt inele simple.*

Exemplul 3.12. *Dacă R este corpul numerelor reale sau a numerelor complexe, atunci orice spațiu local convex și liniar peste R este un modul R-închis.*

Exemplul 3.13. *Fie $\mathbb{Q}$ corpul numerelor raționale. Atunci $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$ sunt local simple, nu sunt simple și nu sunt $\mathbb{Q}$-module $\mathbb{Q}$-închise.*

Exemplul 3.14. *Dacă R este un inel local simplu, atunci R^n este un R-modul R-închis local simplu pentru orice număr natural $n \geq 1$.*

Exemplul 3.15. *Fie $\mathbb{Z}$ inelul numerelor întregi. În raport cu topologia discretă $\mathbb{Z}$ este un inel local simplu și nu este un inel simplu. Dacă $p \geq 2$ și $\mathbb{Z}_p = p \cdot \mathbb{Z}$, atunci $\mathbb{Z}_p$ este un ideal și $\{n\mathbb{Z}_p : n \in \mathbb{N}\}$ este o bază în punctul 0 a topologiei de inel. În această topologie $\mathbb{Z}$ nu este un inel local simplu.*

Lema 3.16. *Fie R un inel și E un R-modul. Atunci Ra este un R-modul pentru orice $a \in E$.*

Demonstraţie. Fie $a \in E$, $a \neq 0$. Conform definiției $Ra = \{xa : a \in R\}$. În primul rând vom demonstra că Ra este un grup abelian.

Fie $x, y \in Ra$, atunci există $x_1, y_1 \in R$ astfel încât $x = x_1 a$ și $y = y_1 a$. Atunci

$$x + y = x_1 a + y_1 a = (x_1 + y_1)a \in Ra.$$

De asemenea

$$0 + x_1 a = x_1 a + 0 = x_1 a$$

și

$$x_1 a + (-x_1)a = (-x_1)a + x_1 a = 0.$$

Astfel Ra este un grup în raport cu operația de adunare.

Acum vom demonstra că Ra este un R-modul. Fie $\alpha, \beta \in R$ și $x, y \in Ra$. Conform definiției $x = x_1 a$ și $y = y_1 a$ pentru careva $x_1, y_1 \in R$. Atunci

$$\alpha(x_1 a + y_1 a) = \alpha x_1 a + \alpha y_1 a \in Ra,$$

$$(\alpha + \beta)x_1 a = \alpha x_1 a + \beta x_1 a$$

și

$$\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x_1 a) = (\alpha\beta)x_1 a = (\alpha\beta)x.$$

Remarca 3.17. *Este evident, din Lema 3.16, că pentru orice inel simplu R și orice $a \in R$, $a \neq 0$, avem $Ra = R$, adică R este un corp. Mai mult, pentru orice R-modul simplu E și orice $a \in E$, $a \neq 0$, avem $Ra = E$.*

Propoziția 3.18. *Fie E un R-modul R-închis local simplu, $a \in E$ și $\varphi_E(a) = 1$. Atunci $E_a = \{ta : t \in R\}$ este un R-submodul al lui E cu proprietățile:*

1. *$v_a = \varphi_E | E_a : E_a \longrightarrow R$ este un izomorfism topologic a R-modulului E_a în R-modulul R.*

2. *Aplicația $\psi_a : E \longrightarrow E_a$, unde $\psi_a(x) = v_a^{-1}(\varphi_E(x))$ pentru orice $x \in E$ homomorfism deschis și continuu a R-modulului E în R-modulul E_a.*

3. Spațiul E este homeomorf cu spațiul $\varphi_E^{-1}(0) \times E_a$.

4. Mulțimea E_a este închisă în E.

Demonstrație. Mulțimea $\varphi_E^{-1}(1)$ nu este vidă. Fie $a \in \varphi_E^{-1}(1)$. Dacă $t \in R$, atunci $\varphi_E(ta) = t\varphi_E(a) = t \cdot 1 = t$. Astfel $\varphi_E(E_a) = R$ și v_a este un homomorfism continuu și injectiv a lui E_a în R. Întrucât $(t, x) \mapsto tx$ este o funcție continuă de la $R \times E$ la E, funcția v_a este un homeomorfism, adică $v_a^{-1} : R \longrightarrow E_a$ este continuă. Aserțiunea 1 este demonstrată. Aserțiunea 2 reiese din Aserțiunea 1.

Funcția $\psi : \varphi_E^{-1}(0) \times E \longrightarrow E$, unde $\psi(x, y) = x + y$ pentru orice $x \in \varphi_E^{-1}(0)$ și $y \in E_a$, este un homeomorfism.

Fie X un spațiu, R un inel topologic și E un R-modul topologic. Vom considera două submulțimi ale lui $C_p(C_p(X, E), E)$:

(i) $L_p(X, E) = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n : \alpha_i \in R, x_i \in e_X(X), n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $M_p(X, E)$ subspațiul aplicațiilor liniare și continue ale spațiului $C_p(X, E)$ în E.

(iii) Dacă F este un R-modul topologic, atunci $\mathcal{L}_p(F, E)$ este spațiul aplicațiilor liniare și continue $\varphi : F \to E$ ca un subspațiu al spațiului $C_p(F, E)$.

Propoziția 3.19. *Fie R un inel local simplu și X un spațiu R-Tychonoff. Atunci $M_p(X, R) = L_p(X, R)$.*

Demonstrație. Vom arăta că orice funcție continuă și liniară $\mu \in M_p(X, R)$ poate fi scrisă sub forma

$$\mu = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

pentru un $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in R$, $x_i \in e_X(X)$ fixat și $1 \leq i \leq n$.

Fie $\mu \in M_p(X, R)$. Presupunem că $\mu \neq 0$ și $\alpha_i \neq 0$ pentru orice $i \leq n$. Fie $f \in C(X, R)$, $f = 0$. Atunci $\mu(f) = 0$, întrucât μ este liniar. Alegem o vecinătate deschisă U a lui $0 \in R$ care nu conține R-submodule. Întrucât μ este continuă, putem găsi $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ și $V = V_1 = V_2 = ... = V_n \subseteq U$ astfel încât $\mu(W(x_1, x_2, ..., x_n, V_1, V_2, ..., V_n)) \subseteq U$.

Fie $g \in C_p(X, R)$ și $g(x_1) = g(x_2) = ... = g(x_n) = 0$. Evident,

$$\alpha g \in W(x_1, x_2, ..., x_n, V_1, V_2, ..., V_n)$$

pentru orice $\alpha \in R$. Astfel $\mu(\alpha g) \in U$ și întrucât μ este o funcțională liniară, avem $\alpha\mu(g) \in U$ pentru orice $\alpha \in R$. Din Lema 3.16 deducem că $R\mu(g)$ este un R-submodul al lui R și $R\mu(g) \subseteq U$, contradicție. Așadar $R\mu(g) = \{0\}$ și $\mu(g) = 0$.

Fie $g_i \in C(X, R)$ astfel încât $g_i(x_i) = 1$ și $g_i(x_j) = 0$ pentru $j \neq i$.

Notăm $\alpha_i = \mu(g_i)$. Considerăm

$$\mu' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

Atunci

$$\mu'(g) = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) + ... + \alpha_n g(x_n)$$

pentru orice $g \in C(X, R)$.

Fie $g \in C_p(X, R)$ și

$$g' = g - g(x_1)g_1 - g(x_2)g_2 - ... - g(x_n)g_n.$$

Evident, $g' \in C_p(X, R)$ și $g'(x_i) = 0$ pentru orice $i \leq n$. Așadar $\mu(g') = 0$. Întrucât μ este funcție liniară,

$$0 = \mu(g') = \mu(g) - \mu(\Sigma\{g(x_i)g_i : i \leq n\})$$

și

$$\mu(g) = \mu(\Sigma\{g(x_i)g_i : i \leq n\}) = \Sigma\{g(x_i)\mu(g_i) : i \leq n\} = \Sigma\{\alpha_i g(x_i) : i \leq n\}.$$

Așadar $\mu = \mu'$.

Remarca 3.20. *Fie E un R-modul topologic și $Hom(E)$ mulțimea homomorfismelor continue $\varphi : E \longrightarrow E$. Dacă $\mu \in M_p(X, E)$ și $\varphi \in Hom(E)$, atunci $\varphi \circ \mu \in M_p(X, E)$. Cum reiese din următorul exemplu, există un inel topologic R, un R-modul topologic E, un spațiu X, $\mu \in L_p(X, E)$ și $\varphi \in Hom(E)$, astfel încât $\varphi \circ \mu \in M_p(X, E) \setminus L_p(X, E)$.*

Exemplul 3.21. *Fie R un inel simplu, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $E = R^n$. Atunci E este un R-modul R-închis local simplu. Considerăm homomorfismul $\varphi \in Hom(E)$, unde $\varphi(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ $= (x_2, x_1, x_3, ..., x_n)$ pentru orice punct $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in E$. Presupunem că X un spațiu R-Tychonoff nevid. Atunci $\varphi \circ \mu \in M_p(X, E) \setminus L_p(X, E)$ pentru orice funcțională netrivială $\mu \in L_p(X, E)$. Presupunem că*

$$\mu = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ...\alpha_m b_m$$

și

$$\eta = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + ...\beta_k c_k,$$

unde $m \geq 1$, $b_1, b_2, ..., b_m$ sunt puncte distincte din X, $k \geq 1$, $c_1, c_2, ..., c_m$ sunt puncte distincte din X și $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k \in R \setminus \{0\}$. Afirmăm că $\varphi \circ \mu \neq \eta$. Pentru orice

$i \leq n$ notăm

$$E_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in E : x_j = 0 \text{ pentru orice } j \neq i, j \leq n\}.$$

Din construcție, $\varphi(E_1) = E_2$ și $\varphi = \varphi^{-1}$. Există o funcție continuă $g : X \longrightarrow E$ astfel încât $g(X) \subseteq E_1$, $g(b_1) = (1, 0, ..., 0) \in E_1$ și $g(x) = 0$ pentru orice $x \in \{b_1, b_2, ..., b_m, c_1, c_2, ..., c_k\} \setminus \{b_1\}$. Atunci $\mu(g) = \alpha_1(1, 0, ..., 0) \in E_1$, $(\varphi \circ \mu)(g) = \alpha_1(0, 1, 0, ..., 0) \in E_2$, $\eta(g) = \beta_j(1, 0, ..., 0) \in E_1$, dacă $c_j = b_1$ și $\eta(g) = 0 \in E_1$, dacă $c_j \neq b_1$ pentru orice $j \leq k$. Astfel $\mu(g), \eta(g) \in E_1$ și $(\varphi \circ \mu)(g) \in E_2 \setminus E_1$. Așadar $\varphi \circ \mu \neq \eta$.

Propoziția 3.22. *Fie R un inel, E un R-modul topologic și X un spațiu. Atunci pentru orice $g \in C(X, E)$ există o funcție liniară unică $\overline{g} \in \mathcal{L}_p((L_p(X, E), E)$ astfel încât $g = \overline{g} \circ e_X$, unde $e_X : X \to L_p(X, E)$ este aplicația de evaluare.*

Demonstraţie. Fie $E_f = E$ pentru orice $f \in C_p(X, E)$. Conform definiției

$$e_X(X) \subseteq L_p(X, E) \subseteq E^{C(X,E)} = \Pi\{E_f : f \in C(X, E)\}.$$

Considerăm proiecția $\pi_f : E^{C(X,E)} \longrightarrow E_f = E$. Fie $\overline{f} = \pi_f | L_p(X, E) : L_p(X, E) \longrightarrow E$. Atunci $\overline{f}$ și π_f sunt funcții liniare continue. Dacă $x \in X$, atunci $\overline{f}(e_X(x))) = f(x)$. Astfel $f = \overline{f}|_X$ și pentru orice $f \in C(X, E)$ există o funcție liniară $\overline{f} \in \mathcal{L}_p(L_p(X, E), E)$ astfel încât $f = \overline{f} \circ e_X$. Întrucât subspațiul $e_X(X)$ generează spațiul liniar $L_p(X, E)$, funcția liniara $\overline{f}$ este unică.

Teorema 3.23. *Fie R un inel, E un R-modul topologic și X un spațiu. Considerăm spațiul $e_X(X)$, unde $e_X : X \to L_p(X, E)$ este aplicația de evaluare. Atunci spațiile liniare $C_p(X, E)$, $C_p(e_X(X), E)$ și $\mathcal{L}_p(L_p(X, E), E)$ sunt liniar homeomorfe.*

Demonstraţie. Fie $E_f = E$ pentru orice $f \in C_p(X, E)$. Conform definiției

$$e_X(X) \subseteq L_p(X, E) \subseteq E^{C_p(X,E)} = \Pi\{E_f : f \in C(X, E)\}.$$

Considerăm proiecția $\pi_f : E^{C(X,E)} \longrightarrow E_f = E$. Fie $\overline{f} = \pi_f | L_p(X, E) : L_p(X, E) \longrightarrow E$. Atunci $\overline{f}$ și π_f sunt funcții liniare continue.

Dacă $g : e_X(X) \to E$ este o funcție continuă, atunci $g \circ e_X = f$ pentru o unică $f \in C(X, E)$. Așadar $g = \pi_f | e_X(X)$ și corespondența $f \to \pi_f | e_X(X)$ este un homeomorfism liniar între $C_p(X, E)$ și $C_p(e_X(X), E)$.

Astfel fără a pierde din generalitate, putem presupune că $X = e_X(X) \subseteq L_p(X, E)$.

În virtutea Propoziției 3.22, corespondența $\psi : C_p(X,E) \longrightarrow \mathcal{L}_p(L_p(X,E),E)$, unde $\psi(f) = \overline{f}$, este o aplicație liniară injectivă a lui $C(X,E)$ în $\mathcal{L}_p(L_p(X,E),E)$.

Pentru orice $y \in L_p(X,E)$ există un număr minim $n = n(y) \in \mathbb{N}$, punctele unice $x_1(y),...,x_n(y) \in X$ și punctele unice $\alpha_1(y),...,\alpha_n(y) \in R$ astfel încât

$$y = \alpha_1(y)x_1(y) + ... + \alpha_n(y)x_n(y).$$

Așadar corespondența ψ este continuă și liniară.

Întrucât $\psi(f)|X = f$, funcția ψ^{-1} este continuă.

Remarca 3.24. *Spunem că $e_X(X)$ este E-replica spațiului X. Dacă X este R-complet regulat, atunci $X = e_X(X)$.*

Corolarul 3.25. *Fie X, Y două spații și R un R-modul local simplu. Spațiile $C_p(X,R)$ și $C_p(Y,R)$ sunt liniar homeomorfe, dacă și numai dacă spațiile $L_p(X,R)$ și $L_p(Y,R)$ sunt liniar homeomorfe.*

Propoziția 3.26. *Funcția $p_n : R^n \times X^n \longrightarrow L_{p,n}(X,E)$, unde*

$$p_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,x_1,x_2,...,x_n) = \alpha_1 e_X(x_1) + \alpha_2 e_X(x_2) + ... + \alpha_n e_X(x_n),$$

este o funcție continuă definită pe $R^n \times X^n$ cu valori în $L_{p,n}(X,E)$.

Demonstrație. Rezultă din Propoziția 3.1.

Propoziția 3.27. *Pentru orice spațiu X există un unic R-modul E-liber. Perechea $(L_p(X,E),e_X)$ este R-modulul E-liber al spațiului X.*

Demonstrație. Unicitatea R-modulului E-liber al spațiului X este bine cunoscută (vezi [16, 17]). Din metoda construcției obiectului $(L_p(X,E),e_X)$ și conform definiției R-modulului E-liber reiese că $(L_p(X,E),e_X)$ este R-modulul E-liber al spațiului X.

Propoziția 3.28. *Fie X un spațiu R-Tychonoff și E un R-modul topologic. Atunci $L_{p,n}(X,E)$ este o submulțime închisă din $L_p(X,E)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstrație. Vom proceda analog ca și în demonstrația Propoziției 0.5.16 din [6].

Întrucât e_X este o scufundare a lui X în $L_p(X,E)$, putem presupune că $X = e_X(X) \subseteq L_p(X,E)$. În acest caz un punct $x \in X$, fiind un element al spațiului $E^{C(X,E)}$, are forma $x = (f(x) : f \in C(X,E))$.

Fie $y \in L_p(X,E) \setminus L_{p,n}(X,E)$. Atunci

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m y_m,$$

unde $m > n$, $y_i \in X$, $\alpha_i \in R$ și $\alpha_i y_i \neq 0$ pentru orice $i \leq m$, $y_i \neq y_j$ știind că $i \neq j$. Pentru orice $i \leq m$ există $h_i \in C(X,E)$ astfel încât $\alpha_i h_i(y_i) \neq 0$. Notăm $b_i = h_i(y_i)$.

Fixăm o familie de mulțimi deschise și disjuncte $\{V_i : i \leq m\}$ din X. Fixăm aplicațiile continue $\{f_i \in C(X,R) : i \leq m\}$ astfel încât $y_i \in V_i$, $f_i(y_i) = 1$ și $f_i(X \setminus V_i) = 0$ pentru orice $i \leq m$. Fie $g_i(x) = f_i(x)b_i$. În virtutea Propoziției 3.22, fiecare g_i se prelungește la o funcție liniară și continuă $\overline{g_i} : L_p(X,E) \longrightarrow E$. Submulțimea $U = \bigcap\{\overline{g_i}^{-1}(E \setminus \{0\})\}$ a spațiului $L_p(X,E)$ este deschisă.

Avem $\overline{g_i}(\alpha_i y_i) = \alpha_i g(y_i) = \alpha_i b_i \neq 0$. Dacă $j \neq i$, atunci $\overline{g_i}(\alpha_j y_j) = \alpha_j g(y_j) = \alpha_i 0 = 0$. Astfel $\overline{g_i}(y) = \alpha_i b_i \neq 0$ pentru orice $i \leq m$. Așadar $y \in U$.

Vom arăta că $U \cap L_{p,n}(X,E) = \emptyset$. Fie $z \in U$, adică pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $z_1, z_2, ..., z_k \in X$ și $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k \in R$ avem

$$z = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + ... + \beta_k z_k,$$

$\beta_i z_i \neq 0$ pentru orice $i \leq k$ și $z_i \neq z_j$ știind că $i \neq j$. Atunci

$$\overline{g_i}(z) = \beta_1 g_i(z_1) + \beta_2 g_i(xz_2) + ... + \beta_k g_i(xz_k) \neq 0$$

pentru orice $i \leq k$. Astfel $V_i \cap \{z_1, z_2, ..., z_k\} = V_i' \neq \emptyset$ pentru orice $i \leq k$. Întrucât mulțimile $\{V_i : i \leq m\}$ sunt disjuncte, reiese că mulțimile $\{V_i' : i \leq k\}$ sunt nevide și disjuncte. Așadar $k \geq m > n$, adică $U \cap L_{p,n} = \emptyset$.

Propoziția 3.29. *Fie X un spațiu R-Tychonoff, R un inel simplu E un R-modul topologic. Următoarele afirmații sunt adevărate:*

1. *Funcția $q_n = p_n|_{H_{p,n}(X,E)} : H_{p,n}(X,E) \longrightarrow L^c_{p,n}(X,E)$ este injectivă.*
2. *Dacă R este un corp topologic și modulul E este R-închis, atunci funcția*

$$q_n = p_n|_{H_{p,n}(X,E)} : H_{p,n}(X,E) \longrightarrow L^c_{p,n}(X,E)$$

este un homeomorfism.

Demonstraţie. În virtutea Propoziției 3.26 și 3.1, funcția q_n este continuă. Întrucât e_X este o scufundare a lui X în $L_p(X,E)$, putem presupune că $X = e_X(X) \subseteq L_p(X,E)$.

Întrucât R este un inel simplu, R este un corp și pentru orice $\lambda \in R \setminus \{0\}$ există elementul invers λ^{-1}. Dacă aplicația $\lambda^{-1} : R \setminus \{0\} \to R$ este continuă, atunci inelul R este un corp topologic.

Avem $\alpha x \neq 0$ pentru orice $\alpha \in R \setminus \{0\}$ și $x \in E \setminus \{0\}$.

Afirmația 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ și $x_i \neq x_j$ când $i \neq j$. Dacă $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$, atunci $\alpha_i = 0$ pentru orice $i \leq n$.

Presupunem că $\alpha_i \neq 0$ pentru orice $i \leq n$. Un punct $x \in X$ fiind un element din $E^{C(X,E)}$ are forma $x = (f(x) : f \in C(X, E))$. Astfel pentru orice $i \leq m$ există $h_i \in C(X, E)$ astfel încât $\alpha_i h_i(x_i) \neq 0$. Notăm $b_i = h_i(x_i)$.

Alegem o familie de mulțimi deschise și disjuncte $\{V_i : i \leq m\}$ din X și funcția continuă $\{f_i \in C(X, R) i \leq m\}$ astfel încât $x_i \in V_i$, $f_i(x_i) = 1$ și $f_i(X \setminus V_i) = 0$ pentru orice $i \leq m$. Fie $g_i(x) = f_i(x) b_i$. Atunci

$$\begin{aligned} 0 &= 0(g_i) \\ &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n)(g_i) \\ &= \alpha_1 x_1(g_i) + \alpha_2 x_2(g_i) + ... + \alpha_n x_n(g_i) \\ &= \alpha_i b_i \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Aceasta este o contradicție, deci Afirmația 1 este demonstrată.

Afirmația 2. Fie $n, m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in X$, $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_m \in R$, $x_i \neq x_j$ știind că $i \neq j$ și $y_l \neq y_k$ știind că $l \neq k$. Dacă

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + ... + \beta_m y_m,$$

atunci $m = n$, $\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ și $\alpha_i = \beta_j$ știind că $x_i = y_j$.

Evident, Afirmația 2 reiese din Afirmația 1.

Pentru Afirmația 2 reiese că funcția q_n este injectivă.

Presupunem că R este un corp topologic și E este un R-modul topologic R-închis. Fie homomorfismul continuu $\varphi_E : E \longrightarrow R$ definit pe R-modulul topologic E cu valori în R-modulul topologic R. Fie $a \in \varphi_E^{-1}(1)$. Dacă $E_a = Ra$, atunci funcția $\varphi_E | E_a$ este un homeomorfism definit pe E_a cu valori în R. Astfel funcția φ_E, fiind un homomorfism factor al R-modulului topologic E în R-modulul topologic R, este deschisă și continuă.

Putem alege mulțimile deschise și nevide $V_1, V_2, ..., V_n$ din R, și mulțimile deschise și nevide $W_1, W_2, ..., W_n$ din X astfel încât:

- $U = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n \times W_1 \times W_2 \times ... \times W_n \subseteq H_{(p,n)}(X, E)$;

- $W_i \cap W_j = \emptyset$ știind că $i \neq j$;

- $0 \notin V_i$ pentru orice $i \leq n$.

Afirmăm că mulțimea $q_n(U)$ este deschisă în $L^c_{p,n}(X, E)$.

Fie punctul $y \in q_n(U)$. Conform definiției

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n$$

și $q_n^{-1}(y)y = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, y_1, y_2, ..., y_n)$, unde $\alpha_i \in V_i \subseteq R \setminus \{0\}$, $y_i \in W_i \subseteq X$ și $y_j \neq y_i$ pentru orice $i \leq n$ și $j \neq i$. Acum fixăm $f_i \in C(X, E)$, $i \leq n$, astfel încât $f_i(y_i) = \alpha_i^{-1} a$ și $f_i(X \setminus V_i) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} y(f_i) &= \alpha_1 y_1(f_i) + \alpha_2 y_2(f_i) + ... + \alpha_n y_n(f_i) \\ &= \alpha_1 f_i(y_1) + \alpha_2 f_i(y_2) + ... + \alpha_n f_i(y_n) \\ &= \alpha_i f_i(y_i) \\ &= a. \end{aligned}$$

Întrucât $\alpha_i \in V_i$, există două submulțimi deschise $D(1, i)$ și $D(2, i)$ astfel încât $1 \in D(1, i)$, $\alpha_i^{-1} \in D(2, i)$, $0 \notin D(1, i) \cup D(2, i)$ și $D(1, i)D(2, i)^{-1} \subseteq V_i$. Din construcție, $p_E(f_i(y_i)) \in D(2, i)$. Astfel putem alege $g_i \in C(X, E)$ pentru care $g_i(y_i) = a$ și

$$g_i(X \setminus W_i \cap f_i^{-1}(p_E^{-1}(D(2, i))) = 0.$$

Pentru fiecare $i \leq n$ există în mod unic o funcție continuă și liniară $\overline{f_i}, \overline{g_i} \in \mathcal{L}_p((L_p(X, E), E)$ astfel încât $f_i = \overline{f_i}|X$ și $g_i = \overline{g_i}|X$.

Notăm

$$V = \cap\{\overline{f_i}^{-1}(p_E^{-1}(D(1, i))) \cap \overline{g_i}^{-1}(E \setminus \{0\}) : i \leq n\}.$$

Din construcție, $\overline{f_i}(y) = a$ și $\overline{g_i}(y) \neq 0$. Astfel $y \in V$. Ca și în demonstrația Propoziției 3.27 am dedus că $V \cap L_{p,n-1}(X, E) = \emptyset$. Astfel $V \cap L_{p,n}(X, E) \subseteq L^c_{p,n}(X, E)$.

Alegem $z \in V \cap L_{p,n}(X, E)$. Atunci

$$z = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + ... + \beta_n z_n,$$

unde $\alpha_i \in R \setminus \{0\}$ și $z_j \neq z_i$ pentru orice $i \leq n$ și $j \neq i$. Întrucât $\overline{f_i}(z) \neq 0$ pentru orice $i \leq n$, putem presupune că $\overline{f_i}(z_i) \neq 0$ și $z_i \in V_i$.

Din construcție, $\overline{g_i}(z) = \beta_i g_i(z_i)$ și $\overline{g_i}(z) \neq 0$. Întrucât $p_E(\overline{f_i}(z_i)) \in D(2, i)$, $p_E(\overline{f_i}(z)) \in D(1, i)$ și $\overline{f}_i(z) = \beta_i f(z_i)$, avem $p_E(f_i(z_i)) \in D(2, i)$ și $\beta_i p_E(f_i(z_i)) \in D(1, i)$. Așadar

$$\beta_i p_E(f_i(z_i)) \cdot p_E(f_i(z_i))^{-1} \in D(1, i) \cdot D(2, i)^{-1} \subseteq V_i$$

și $\beta_i \in V_i$. Astfel $z \in q_n(U)$ și $V \subseteq q_n(U)$, adică $q_n(U)$ este o submulțime deschisă din $L^c_{p,n}(X, E)$ și funcția p_n^{-1} este continuă.

Exemplul 3.30. *Fie $E = \mathbb{R}$ corpul numerelor reale cu topologia generată de distanța Euclidiană. Notăm prin R spațiul topologic $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cu următoarele operații:*

- operația de adunare$(\alpha, \beta) + (\delta, \mu) = (\alpha + \delta, \beta + \mu)$;

- operația elementul invers $-(\alpha, \beta) = (-\alpha, -\beta)$;

- operația de înmulțire $(\alpha, \beta) \cdot (\delta, \mu) = (\alpha \cdot \delta, \alpha\mu + \beta\delta)$.

Atunci R este un inel topologic comutativ cu unitatea $(1, 0)$. Inelul R este un R-modul local simplu. Înmulțirea $\cdot : R \times E \longrightarrow E$ este definită astfel $(\alpha, \beta) \cdot t = \alpha t$. În acest caz E este un $\mathbb{R}$-modul simplu și un R-modul simplu. Evident, avem aceleași subspații $L_{p,n}(X, E)$ pentru cazul când E este $\mathbb{R}$-modul și cazul când E este R-modul.

Întrucât $\mathbb{R}$ este un corp topologic și E este un $\mathbb{R}$-modul topologic $\mathbb{R}$-închis, funcția $q_n = p_n|_{H_{p,n}(X,E)} : H_{p,n}(X, E) \longrightarrow L^c_{p,n}(X, E)$ este un homeomorfism, dacă E este considerat ca $\mathbb{R}$-modul. Așadar $indL^c_{p,n}(X, E) = n$ știind că $indX = 0$.

Acum considerăm E ca un R-modul. În acest caz $indH_{p,n}(X, E) \geq indR^n = 2n$. Astfel funcția q_n nu este injectivă, dacă E este considerat ca R-modul. Mai mult, fibrele $q_n^{-1}(y)$ au dimensiunea egală cu n și sunt homeomorfe cu spațiul $\mathbb{R}^n$. Așadar presupunerea că R este un inel simplu în condițiile Propoziției 3.29 este esențială.

Remarca 3.31. *Pentru orice inel topologic R și un spațiu X funcția $q_n = p_n|_{H_{p,n}(X,R)} : H_{p,n}(X, R) \longrightarrow L^c_{p,n}(X, R)$ este injectivă.*

Lema 3.32. *Fie X un spațiu R-Tychonoff, Z o submulțime închisă a lui X, E R-modul topologic și $g : X \longrightarrow E$ o aplicație continuă. Pentru orice submulțime finită F a lui $X \setminus Z$ și orice aplicație $f : F \longrightarrow E$ există o aplicație continuă $\varphi : X \longrightarrow E$ astfel încât $f = \varphi|_F$ și $\varphi|_Z = g|_Z$.*

Demonstrație. Alegem o familie $\{U_x : x \in F\}$ de submulțimi deschise din X astfel încât $x \in U_x \subseteq X \setminus Z$ pentru orice $x \in F$ și $U_x \cap U_y = \emptyset$ pentru orice puncte distincte $x, y \in F$. Pentru orice $x \in F$ alegem o funcție continuă $f_x : X \longrightarrow R$ astfel încât $f_x(x) = 1$ și $f_x(X \setminus U_x) = 0$. Notăm $\varphi_x(y) = f_x(y) \cdot f(x)$ pentru orice $x \in F$ și $y \in X$. Fie

$$\varphi_F(y) = \sum \{\varphi_x(y) : x \in F\}.$$

Din construcție, funcția φ_F este continuă, $\varphi_F|_F = f$ și $\varphi_F(Z) = 0$. Fie $g_x(y) = 1 - f_x(y)$ pentru orice $x \in F$ și $y \in X$. Notăm

$$g_F(y) = \prod \{g_x(y) : x \in F\}$$

pentru orice $y \in X$. Funcția g_F este continuă, $g_F(F) = 0$ și $g_F(Z) = 1$. Fie $\varphi_Z(y) = g_F(y) \cdot g(y)$ pentru orice $y \in Y$. Din construcție, funcția φ_Z este continuă, $\varphi_Z(F) = 0$ și $\varphi_Z|_Z = g|_Z$. Evident,

$$\varphi = \varphi_F + \varphi_Z$$

este aplicația căutată.

Pentru orice subspațiu Y al lui X notăm

$$C_p(Y|X, E) = \{f|_Y : f \in C(X, E)\}.$$

Un subspațiu Y al lui X se numește *E-plin*, dacă $C(Y|X, E) = C(Y, E)$. Un spațiu X se numește *compact E-plin*, dacă $C(Y|X, E) = C(Y, E)$ pentru orice subspațiu compact $Y \subseteq X$.

Lema 3.33. *Fie X un spațiu zero-dimensional și E un spațiu metrizabil. Atunci X este compact E-plin. Mai mult, pentru orice submulțime compactă Y din X și orice $f \in C(Y, E)$ există $g \in C(X, E)$ astfel încât $g(X) \subseteq f(Y)$ și $f = g|_Y$, adică X este compact E-plin.*

Demonstrație. Fie o metrică d pe E. Fie Y un subspațiu compact nevid din X. Fie $f \in C(Y, E)$. Pentru orice punct $y \in Y$ și fiecare $n \in \mathbb{N}$ alegem o submulțime deschisă și închisă $U_n y$ din X astfel încât $y \in U_n y$ și $d(f(y), f(z)) < 2^{-n-1}$ pentru orice $z \in U_n y \cap Y$.

Există un șir $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ de submulțimi finite din Y și un șir $\{\gamma_n = \{V_n y : y \in Y_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ de familii de submulțimi deschise și închise din X astfel încât:

- $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- $y \in V_{n+1} y \subseteq V_n y \subseteq U_n y$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $y \in Y_n$;
- $Y \subseteq \cup\{V_n y : y \in Y_n\} = \cup\gamma_n$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$;
- pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ și fiecare $y \in Y_{n+1}$ există un unic $z(y) \in Y_n$ astfel încât $V_{n+1} y \subseteq V_n z(y)$;
- dacă $y_1, y_2 \in Y_n$, $y_1 \neq y_2$ și $n \in \mathbb{N}$, atunci $V_n y_1 \cap V_n y_2 = \emptyset$.

Notăm $V_n = \cup\{V_n y : y \in Y_n\}$. Alegem $a \in f(Y)$. Vom construi un șir $\{g_n : X \longrightarrow E : n \in \mathbb{N}\}$ de funcții continue cu proprietățile:

- $d(g_n(y), f(y)) < 2^{-n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $y \in Y$;
- $d(g_n(x), g_{n+k}(x)) < 2^{-n}$ pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$ și orice $x \in X$;
- $g_n(X) \subseteq f(Y)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Notăm $f_1(x) = a$ pentru orice $x \in X \setminus V_1$ și $f_1(V_1 y) = f(y)$ pentru orice $y \in Y_1$.

Presupunem că $n \geq 1$ și funcția g_n este construită. Notăm $g_{n+1}|_{(X \setminus V_{n+1})} = g_n|_{(X \setminus V_{n+1})}$ și $g_{n+1}(V_{n+1}y) = f(y)$ pentru orice $y \in Y_{n+1}$. Șirul $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ este construit. Întrucât $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ este un șir fundamental și $(f(Y), d)$ este spațiu metric compact, există limita continuă $g = \lim g_n$. Din construcție, avem $f = g|_Y$.

3.3. Teorema Nagata

Fie R un inel topologic simplu. Considerăm doar spațiile R-Tychonoff. Fie $n \in \mathbb{N}$. O funcțională $\mu : C(X, R) \longrightarrow R^n$ se numește multiplicativă, dacă este liniară și $\mu(fg) = \mu(f)\mu(g)$ pentru orice $f, g \in C(X, R^n)$.

Notăm

$$I_{(p,n)}(X, R) = \{\mu \in L_p(X, R, R^n) : \mu \neq 0, \mu \text{ este multiplicativă}\}.$$

Teorema 3.34. *Spațiul X^n și $I_{(p,n)}(X, R)$ sunt homeomorfe.*

Demonstrație. Fie $1 = (1, 1, ..., 1)$ unitatea inelului R^n. Pentru orice $i \leq n$ notăm

$$R_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_j = 0 \textit{ pentru orice } j \neq i\}.$$

Atunci R_i este un subinel al lui R^n cu unitatea $1_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0) \in R_i$. Inelele R și R_i sunt topologic izomorfe. Aplicația $p_i : R^n \longrightarrow R_i$, definită prin

$$p_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 1_i \cdot (x_1, x_2, ..., x_n)$$

pentru orice $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ este deschisă, continuă, liniară și multiplicativă. Dacă $\mu \in I_{(p,n)}(X, R)$, atunci notăm $\pi_i(\mu) = \mu_i \circ p_i$. Atunci $\pi_i(\mu) \in I_{(p,1)}(X, R)$ și

$$\mu(f) = (\pi_1(\mu)(f), \pi_2(\mu)(f), ..., \pi_n(\mu)(f))$$

pentru orice $f \in C(X, R)$. Așadar $I_{(p,n)}(X, R) = I_{(p,1)}(X, R)^n$.

Acum este suficient să demonstrăm că $I_p(X, R) = I_{(p,1)}(X, R)$ și X sunt homeomorfe.

Evident, $\xi_x \in I_p(X, R)$ pentru orice $x \in X$. Presupunem ca $\mu \in I_p(X, R)$. Atunci există $n \geq 1$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ și $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R \setminus \{0\}$ astfel încât

$$\mu = \alpha_1 \xi_{x_1} + \alpha_2 \xi_{x_2} + ... + \alpha_n \xi_{x_n}.$$

Întrucât R este un inel simplu, avem $\alpha_i\beta_i = 1$ pentru careva $\beta_i \in R$. Pentru orice $i \leq n$ alegem $f_i \in C(X,R)$ astfel încât $f_i(x_i) = \beta_i$ și $f_i(x_j) = 0$ pentru orice $j \neq i$. Din construcție, $\mu(f_i) = \alpha_i f(x_i) = \alpha_i\beta_i = 1$ pentru orice $i \leq n$. Presupunem că $n \geq 2$. Atunci $f_i \cdot f_2 = 0$ și

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(0) \\ &= \mu(f_1 \cdot f_2) \\ &= \mu(f_1)\mu(f_2) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aceasta este o contradicție. Prin urmare $n = 1$ și $\mu = \alpha_1\xi_{x_1}$.

Presupunem că $\alpha_1 \neq 1$. Atunci $\beta_1 \neq 1$ și

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 \cdot \beta_1 \\ &= \alpha_1\beta_1\beta_1 \\ &= \alpha_1(f_1 \cdot f_1)(x_1) \\ &= \mu(f_1 \cdot f_1) \\ &= \mu(f_1) \cdot \mu(f_1) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

contradicție. Așadar $\beta_1 = \alpha_1 = 1$ și $\mu = \xi_{x_1}$.

Corolarul 3.35. *Dacă inelele $C_p(X,R)$ și $C_p(Y,R)$ sunt topologic izomorfe, atunci spațiile X și Y sunt homeomorfe.*

Corolarul 3.35 pentru inelul $\mathbb{R}$ al numerelor reale a fost demonstrat de Nagata (vezi [6, Teorema 0.6.1]).

3.4. Clase algebrice de spații

Fie R un inel topologic. Presupunem ca R este un spațiu R-Tychonoff. O clasă $\mathcal{P}$ de spații topologice se numește R-clasă algebrică de spații, dacă:

(i) orice spațiu $X \in \mathcal{P}$ este R-Tychonoff și $Y \in \mathcal{P}$ pentru orice subspațiu închis Y al lui X;

(ii) dacă $f : X \longrightarrow Y$ este o funcție continuă definită pe X cu valori în Y, $X \in \mathcal{P}$ și Y este un spațiu R-Tychonoff, atunci $Y \in \mathcal{P}$;

(iii) dacă $\{X_n \in \mathcal{P} : n \in \mathbb{N}\}$ este un șir de subspații închise ale unui spațiu R-Tychonoff X și $X = \cup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, atunci $X \in \mathcal{P}$;

(iv) dacă $X, Y \in \mathcal{P}$, atunci $X \times Y \in \mathcal{P}$;

(v) $R \in \mathcal{P}$.

Lema 3.36. *Fie $\mathcal{P}$ este o R-clasă algebrică de spații, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un șir de subspații ale unui spațiu R-Tychonoff X, $X = \cup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ și $X_n \in \mathcal{P}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci $X \in \mathcal{P}$.*

Demonstrație. Fie $Y_n = X_n \times \{n\}$ și Y este suma discretă de spații $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Evident, Y este un spațiu R-Tychonoff, $Y_n \in \mathcal{P}$ și Y_n este închis Y pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel $Y \in \mathcal{P}$ și X este o imagine continuă a lui Y.

Teorema 3.37. *Fie $\mathcal{P}$ o R-clasă algebrică de spații, R un inel topologic și E un R-modul topologic. Presupunem că E este un spațiu R-Tychonoff. Pentru un spațiu R-Tychonoff X următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) $X \in \mathcal{P}$.

(ii) $L_p(X, E) \in \mathcal{P}$.

Demonstrație. Presupunem că $X \in \mathcal{P}$. Considerăm funcția $\varphi_n : X^n \times R^n \longrightarrow L_p(X, E)$, unde

$$\varphi_n((x_1, x_2, ..., x_n), (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \alpha_1\xi_{x_1} + \alpha_2\xi_{x_2} + ... + \alpha_n\xi_{x_n}.$$

Funcția φ_n este continuă și notăm $L_{p,n}(X, E) = \varphi_n(X^n \times R^n)$.

Întrucât $L_p(X, E) \subseteq E^{C(X,E)}$, spațiul $L_p(X, E)$ este R-Tychonoff. Astfel $X^n \times R^n$, $L_{p,n}(X, E) \in \mathcal{P}$ pentru orice n. Din Propoziția 3.28 avem $L_p(X, E) = \cup\{L_{p,n}(X, E) : n \in \mathbb{N}\}$. Așadar $L_p(X, E) \in \mathcal{P}$.

Presupunem că $L_p(X, E) \in \mathcal{P}$. Întrucât $X = L_{p,1}(X, E)$, în virtutea Propoziției 3.28, X este un subspațiu închis al lui $L_p(X, E)$. Atunci $X \in \mathcal{P}$.

Corolarul 3.38. *Fie $\mathcal{P}$ o R-clasă algebrică de spații, R un inel topologic și E un R-modul topologic. Presupunem că E este un spațiu R-Tychonoff. Dacă $C_p(X, E)$ și $C_p(Y, E)$ sunt topologic homeomorfe și $X \in \mathcal{P}$, atunci $Y \in \mathcal{P}$.*

Remarca 3.39. *Pentru inelul $\mathbb{R}$ al numerelor reale și $E = \mathbb{R}$ afirmația de mai sus a fost demonstrată în [6, Propoziția 0.5.13]*

3.5. Aplicația suport

Fie R un inel topologic și E un E-modul topologic netrivial și local simplu.

Considerăm un spațiu X și o funcțională $\mu \in M_p(X, E)$. Notăm

$$\mathcal{S}(\mu) = \{B \subseteq X: \ \textit{dacă } B \subseteq f^{-1}(0), \ \textit{atunci } \mu(f) = 0\}).$$

Evident, $X \in \mathcal{S}(\mu)$. Astfel mulțimea $\mathcal{S}(\mu)$ este nevidă.

Mulțimea $supp_X(\mu)$ este familia tuturor punctelor $x \in X$ astfel încât pentru orice vecinătate deschisă U a lui x în X există $f \in C_p(X, E)$ astfel încât $f(X \setminus U) = 0$ și $\mu(f) \neq 0$ (vezi [10, 81], pentru $E = R = \mathbb{R}$; [14, 80] pentru $R = \mathbb{R}$).

Dacă $f \in C_p(X, E)$ și U este o vecinătate deschisă a lui 0 în E, notăm

$$A(f, L, U) = \{g \in C_p(X, E) : f(x) - g(x) \in U \ \textit{pentru orice } x \in L\}.$$

Familia $\{A(f, L, U) : f \in C_p(X, E)\}$, unde L este o submulțime finită a lui X, iar U este o vecinătate a lui 0 în E, formează o bază deschisă a spațiului $C_p(X, E)$.

Teorema 3.40. *Fie R un inel topologic cu unitate, X un spațiu R-Tychonoff, E un R-modul topologic netrivial local simplu, $\mu \in M_p(X, E)$ și $\mu \neq 0$. Atunci:*

1. *Există o mulțime finită $K \in \mathcal{S}(\mu)$ astfel încât $supp_X(\mu) \subseteq K$.*

2. *$supp_X(\mu) \in \mathcal{S}(\mu)$ și $supp_X(\mu)$ este o submulțime finită a lui X.*

Demonstraţie. Fie V_0 o submulțime deschisă a lui E astfel încât $0 \in V_0$ și V_0 să nu conțină R-submodule netriviale ale lui E.

Există o submulțime finită K din X astfel încât $\mu(f) \in V_0$ pentru orice $f \in A(0, K, V_0)$. Fie $f \in C_p(X, E)$ și $f(K) = 0$. Atunci $\alpha f \in A(0, K, V_0)$ pentru orice $\alpha \in R$. Astfel $\mu(\alpha f) \in W_0$ pentru orice $\alpha \in R$. Așadar $E \cdot \mu(f) \subseteq V_0$ și $E \cdot \mu(f)$ este un R-submodul trivial. Astfel $\mu(f) = 0$ și $K \in \mathcal{S}(\mu)$. În acest caz $supp_X(\mu) \subseteq K$. Astfel $supp_X(\mu)$ este o submulțime finită și K este o mulțime finită din $\mathcal{S}(\mu)$.

Fie $L \in \mathcal{S}(\mu)$ o mulțime finită și $x_0 \in L \setminus supp(\mu)$. Atunci $L_1 = L \setminus \{x_0\} \in \mathcal{S}(\mu)$. Într-adevăr, întrucât $x_0 \notin supp_X(\mu)$, există o submulțime deschisă H din X astfel încât $x_0 \in H$ și $\mu(f) = 0$ știind că $f(X \setminus H) = 0$. Fie $h \in C(X, R)$ astfel încât $h(x_0) = 1$ și $h(X \setminus H) = 0$. Fie $f \in C_p(X, E)$ și $f(L_1) = 0$. Notăm $f_1(x) = h(x)f(x)$ pentru orice $x \in X$ și $f_2 = f - f_1$. Întrucât $f_1(X \setminus H) = 0$, avem $\mu(f_1) = 0$. Din construcție, $f_2(L) = 0$ și $\mu(f_2) = 0$. Astfel $f = f_1 + f_2$ și $\mu(f) = \mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2) = 0$. Astfel $L_1 \in \mathcal{S}(\mu)$. Întrucât $K \setminus supp_X(\mu)$ este o mulțime finită, avem $supp_X(\mu) \in \mathcal{S}(\mu)$.

Propoziția 3.41. *Dacă $x \in X$ și $\xi_x(f) = f(x)$ pentru orice $f \in C_p(X, E)$, atunci $\xi_x \in L_p(X, E)$.*

Demonstrație. Evident, $\xi_x = \alpha x(f)$, unde $\alpha \in R$ și $\alpha = 1$. Astfel $\xi_x \in L_p(X, E)$.

Remarca 3.42. *Fie R un inel local simplu, X un spațiu R-Tychonoff, $\mu \in M_p(X, R)$ și $supp(\mu) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Atunci în virtutea Propoziției 3.19, există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R \setminus \{0\}$ astfel încât $\mu = \Sigma\{\alpha_1 \xi_{x_i} : i \leq n\}$.*

Așa cum s-a menționat în Remarca 3.20 și Exemplul 3.21, de regulă $M_p(X, E) \neq L_p(X, E)$. Următorul rezultat specifică forma funcționalelor liniare pentru R-modulele local simple.

Teorema 3.43. *Fie R un inel topologic cu unitate, X un spațiu R-Tychonoff, E un R-modul topologic netrivial, $\mu \in M_p(X, E)$, $\mu \neq 0$, $supp_X(\mu) \in \mathcal{S}(\mu)$ și $supp_X(\mu)$ este o submulțime finită a lui X. Atunci $\mu = \varphi \circ \eta$ pentru careva $\varphi \in Hom(E)$ și $\eta \in L_p(X, E)$.*

Demonstrație. Presupunem că $n \geq 1$ și $supp_X(\mu) = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, unde $b_i \neq b_j$ for $i \neq j$. Notăm prin $\eta_i = b_i \in L_p(X, E)$ și $\eta = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n$. Evident, $\eta \in L_p(X, E)$ și

$$supp_X(\eta) = \{b_1, b_2, ..., b_n\} = supp_X(\mu).$$

Alegem submulțimile deschise și nevide $V_1, V_2, ..., V_n$ din X, și funcțiile $f_1, f_2, ..., f_n \in C(X, R)$ astfel încât:

- $V_i \cap V_j = \emptyset$ știind că $i \neq j$;

- $b_i \notin V_i$, $f_i(b_i) = 1$ și $f_i(X \setminus V_i) = 0$ pentru orice $i \leq n$.

Fie $i \leq n$. Pentru orice $y \in E$ notăm $\varphi_i(y) = \mu(f_i \cdot y)$. Dacă $g \in C(X, E)$, atunci $\mu_i(g) = \mu(f_i \cdot g)$.

Afirmația 1. $\varphi_i \in Hom(E)$ pentru orice $i \leq n$.

Funcția $\psi_i : E \longrightarrow C_p(X, E)$, unde $\psi_i(y) = f_i \cdot y$ pentru orice $y \in E$, este continuă și liniară. Egalitatea $\varphi_i = \mu \circ \psi_i$ încheie demonstrația Afirmației 1.

Afirmația 2. $\mu_i \in M_p(X, E)$ și $supp_X(\mu_i) = \{b_i\}$ pentru orice $i \leq n$.

Este limpede că $\mu_i \in M_p(X, E)$. Dacă $g \in C(X, E)$, atunci $g(b_i) = (f_i \cdot g)(b_i)$ și $(f_i \cdot g)(b_j) = 0$ știind că $i \neq j$. Astfel $\mu_i(g) = \mu_i(f_i \cdot g) = \mu(f_i \cdot g)$. Afirmația 2 este demonstrată.

Afirmația 3. $\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n$.

Fie $g \in C(X, E)$ și $h = f_1g + f_2g + ... + f_ng$. Atunci $g|supp_X(\mu) = h|supp_X(\mu)$. Astfel

$$\begin{aligned} \mu(g) &= \mu(h) \\ &= \mu(f_1g + f_2g + ... + f_ng) \\ &= \mu(f_1g) + \mu(f_2g) + ... + \mu(f_ng) \\ &= \mu_1(g) + \mu_2(g) + ... + \mu_n(g). \end{aligned}$$

Afirmația 3 este demonstrată.

Afirmația 4. $\mu = \varphi \circ \eta$.

Din construcție, $supp_X(\mu) = supp_X(\varphi \circ \eta)$. Dacă $g \in C(X, E)$ și $h = f_1g + f_2g + ... + f_ng$, atunci $(\varphi \circ \eta)(g) = (\varphi \circ \eta)(h)$. Întrucât

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \eta)(f_ig) &= ((\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) \circ (\eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n))(f_ig)) \\ &= \Sigma\{(\varphi_i \circ \eta_j)(f_ig) : i, j \leq n\} \\ &= (\varphi_i \circ \eta_i)(f_ig) \\ &= \varphi_i(\eta_j(f_ig)) \\ &= \varphi_i(g(b_i)) \\ &= \mu(f_ig), \end{aligned}$$

avem

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \eta)(g) &= (\varphi \circ \eta)(h) \\ &= (\varphi \circ \eta)(f_1g + f_2g + ... + f_ng) \\ &= \Sigma\{(\varphi \circ \eta)(f_ig) : i \leq n\} \\ &= \Sigma\{\mu(f_ig) : i \leq n\} \\ &= (\mu(f_1g + f_2g + ... + f_ng) \\ &= \mu(g). \end{aligned}$$

Afirmația este demonstrată.

3.6. Proprietăți topologice ale funcției $supp_X$

Alegem un inel topologic R, două R-module netriviale local simple E și F și un spațiu R-Tychonoff X.

Amintim că o funcție multivocă $f : X \to 2^Y$ este *inferior semicontinuă* (sau *l.s.c*), dacă pentru orice submulțime deschisă U din Y imaginea inversă a lui U, $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \cap U \neq \emptyset\}$ este deschisă în X.

Propoziția 3.44. *Funcția multivocă* $supp_X : M_p(X, E, F) \to X$ *este l.s.c.*

Demonstrație. Urmăm schema demonstrației din [14, Proprietatea 4.2] și [81, Lema 6.8.2 (4)].

Fie U o submulțime deschisă din X, notăm $V = supp_X^{-1}(U)$, adică

$$V = \{\mu \in M_p(X, E, F) : supp_X(\mu) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Fie $\mu \in V$ și $x \in supp_X(\mu) \cap U$. Alegem o submulțime deschisă W din X astfel încât $x \in W \subseteq cl_X W \subseteq U$. Există $f \in C(X, E)$ astfel încât $f(X \setminus W) = \{0\}$ și $\mu(f) \neq 0$.

Fie $H = \{\eta \in M_p(X, E, F) : \eta(f) \neq 0\}$. Întrucât mulțimea $\{0\}$ este închisă în F, H este mulțime deschisă din subbază $W(f, F \setminus \{0\}) = \{\eta \in M_p(X, E, F) : \eta(f) \in F \setminus \{0\}\}$ și $\mu \in W(f, F \setminus \{0\})$.

Afirmăm că $H \subseteq V$. Presupunem, prin absurd, că $\eta \in H \setminus V$, adică $\eta(f) \neq 0$ și $supp_X(\eta) \cap U = \emptyset$. Atunci $X \setminus cl_X W$ este o vecinătate deschisă a mulțimii $supp_X(\eta)$ și întrucât $f(X \setminus cl_X W) = \{0\}$, aplicând Teorema 3.40, obținem că $\eta(f) = 0$, contradicție. Astfel V este deschisă în $M_p(X, E, F)$.

O submulțime L din X este *mărginită*, dacă orice funcție continuă reală $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ este mărginită pe L.

Definiția 3.45. *O submulțime* L *a unui* R*-modul topologic* E *se numește:*

(i) precompact sau total a-mărginită, dacă pentru orice vecinătate deschisă U *a lui* 0 *în* E *există o submulțime finită* A *din* E *astfel încât* $L \subseteq A + U = U + A$*;*

(ii) a-mărginită, dacă pentru orice vecinătate U *a lui* 0 *în* E *există* $n \in \mathbb{N}$ *încât* $L \subseteq nU$*.*

Orice mulțime mărginită este precompact.

Definiția 3.46. *Un* R*-modul topologic* E *se numește local mărginit, dacă există o vecinătate a-mărginită* U *a lui* 0 *în* E *astfel încât* $E = \cup\{nU : n \in \mathbb{N}\}$ *și pentru orice* $a \in E$, $a \neq 0$, *și orice* $n \in \mathbb{N}$ *există* $t \in R$ *astfel încât* $ta \notin nU$*.*

Remarca 3.47. *În acest caz vecinătatea* U *(conform definiției) nu conține* R*-submodule ale lui* E *și* E *este un* R*-modul local simplu.*

Exemplul 3.48. *Fie* E *un spațiu vectorial normat peste* $\mathbb{R}$*. Atunci* E *este un* $\mathbb{R}$*-modul local mărginit.*

Exemplul 3.49. *Fie E un spațiu vectorial topologic peste $\mathbb{R}$ și există un număr $q > 0$ și o funcțională $||.|| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:*

1. $0 < q \leq 1$.

2. $||x|| \geq 0$ *pentru orice* $x \in E$.

3. Dacă $||x|| = 0$*, atunci* $x = 0$.

4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *pentru orice* $x, y \in E$.

5. $||\lambda x|| \leq |\lambda|^q ||x||$ *pentru orice* $x \in E$ *și* $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Dacă $x \neq 0$*, atunci* $lim_{\lambda \to +\infty} ||\lambda x|| = +\infty$.

Funcționala $||.||$ *se numește q-normă, dacă familia* $\{V(0, r) = \{x : ||x|| < r\} : r > 0\}$ *este o bază a lui E în 0. Orice spațiu q-normat este local mărginit.*

Teorema 3.50. *Fie E un R-modul topologic netrivial local mărginit, X un spațiu R-Tychonoff și pentru orice submulțime L nemărginită din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită. Atunci:*

(i) Mulțimea $supp_X(H)$ este mărginită în X pentru orice submulțime a-mărginită H din $M_p(X, E)$.

(ii) Mulțimea $supp_X(H)$ este mărginită în X pentru orice submulțime total a-mărginită H din $M_p(X, E)$.

(iii) Mulțimea $supp_X(H)$ este mărginită în X pentru orice submulțime mărginită H din $M_p(X, E)$.

Demonstraţie. Fie o vecinătate deschisă a-mărginită W_1 a lui 0 în E astfel încât $E = \bigcup\{nW_1 : n \in \mathbb{N}\}$ și pentru orice $a \in E$, $a \neq 0$ și orice $n \in \mathbb{N}$ există $t \in R$ astfel încât $ta \notin nW_1$.

Alegem două vecinătăți deschise W și W_0 a lui 0 în E astfel încât $W_0 + W_0 + W_0 \subseteq W = -W \subseteq W_1$ și $W_0 = -W_0$.

Din construcție, $W_1 \subseteq kW_0$ pentru careva $k \in \mathbb{N}$.

Astfel mulțimile W și W_0 au următoarele proprietăți:

- W și W_0 sunt a-mărginite din E;

- $E = \bigcup\{nW : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{nW_0 : n \in \mathbb{N}\}$;

- dacă L este submulțime mărginită sau precompactă a lui E, atunci $L \subseteq nW_0$ pentru careva $n \in \mathbb{N}$;

- dacă $a \in E$, $a \neq 0$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $t \in R$ astfel încât $ta \notin nW$.

Presupunem că mulțimea H este a-mărginită sau precompact în $L_p(X, E)$ și mulțimea $supp_X(H)$ nu este mărginită în X. Fie $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(supp_X(H))$ nu este a-mărginită în E.

Folosind inducția vom construi un șir $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$, un șir $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ de submulțimi deschise din X, un șir $\{x_n \in supp_X(\mu_n) : n \in \mathbb{N}\}$ și un șir $\{h_k \in C(X, E) : n \in \mathbb{N}\}$ cu proprietățile:

1. $x_i \in U_i$, $h_i(X \setminus U_i) = 0$ pentru careva $i \in \mathbb{N}$;
2. $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ o familie discretă de submulțimi X;
3. $\mu_n(h_n) \notin nW$;
4. $supp_X\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\} \cap cl_X U_{n+1} = \emptyset$;
5. $f(U_n) \subseteq f(x_n) + W_0$ și $f(x_{n+1}) \notin \bigcup\{f(x_i) + W : i \leq n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $\mu_1 \in H$ și $x_1 \in supp_X(\mu_1)$. Există o submulțime deschisă U_1 din X și $g_1 \in C(X, E)$ astfel încât $f(U_1) \subseteq W_0 + f(x_1)$, $g_1(X \setminus U_1) = 0$ și $\mu_1(g_1) \neq 0$. Există $\alpha_1 \in R$ astfel încât $\alpha_1\mu_1(g) \notin W$. Notăm $h_1 = \alpha_1 g_1$.

Presupunem că $n \geq 1$ și că obiectele $\{h_i, x_i, U_i, \mu_i : i \leq n\}$ au fost construite. Notăm $M_n = \bigcup\{supp_X(\mu_i) : i \leq n\}$. Mulțimea M_n este finită. Astfel mulțimea $f(supp_X(H)) \setminus f(M_n)$ nu este a-mărginită în E. Pentru careva $m_n \in \mathbb{N}$ avem $f(M_n) \subseteq m_n W_0$.

Fie $\mu_{n+1} \in H$ și $x_{n+1} \in supp_X(H)$ astfel încât $f(x_{n+1}) \in E \setminus m_n W$. Există o submulțime deschisă U_{n+1} din X și $g_{n+1} \in C(X, E)$ astfel încât $x_{n+1} \in U_{n+1}$, $f(U_{n+1}) \subseteq f(x_{n+1}) + W_0$, $g_{n+1}(X \setminus U_{n+1}) = 0$, $cl_X U_{n+1} \cap M_n = \emptyset$ și $M_{n+1}(g_{n+1}) \neq 0$. Există $\alpha_{n+1} \in R$ astfel încât $\alpha_{n+1}\mu_{n+1}(g_{n+1}) \notin (n+1)W$. Notăm $h_{n+1} = \alpha_{n+1} g_{n+1}$. Aceasta finalizează procesul inductiv. Obiectele $\{x_m, \mu_n, h_n, U_n\}$ au fost construite pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie $h = \Sigma\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$. Întrucât $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ este o familie discretă și $h_n(X \setminus U_n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $h \in C(X, E)$. Din construcție $\mu_n(h) = \mu_n(h_n) \notin nW_0$ pentru orice n. Atunci $\{\mu_n(h) : n \in \mathbb{N}\}$ nu este submulțime a-mărginită în E. Întrucât mulțimea H este a-mărginită, mulțimea $\{\mu(h) : \mu \in H\}$ este la fel a-mărginită, contradicție.

Remarca 3.51. *Dacă $R = \mathbb{K}$ este corpul numerelor reale sau complexe și E este un R-modul local mărginit, atunci:*

- E spațiu liniar metrizabil;

- E este un R-modul local simplu;

- orice mulțime precompactă este a-mărginită în E.

Remarca 3.52. *Orice spațiu normat este un $\mathbb{R}$-modul local mărginit. Dacă E un spațiu* *normat netrivial, atunci pentru orice submulțime nemărginită L a spațiului X există $f \in C(X,E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este mărginită în E. Pentru un spațiu normat E Teorema 3.50 a fost demonstrată de V. Valov în [80].*

Un spațiu X este *μ-complet*, dacă orice submulțime mărginită și închisă din X este compactă.

Un spațiu X este *Dieudonné complet*, dacă uniformitatea maximală pe X este completă. Orice spațiu Dieudonné complet este μ-complet.

Notăm prin PX spațiul X cu G_δ-topologia generată de G_δ-submulțimile lui X. Mulțimea $\delta - cl_X H = cl_{PX} H$ se numește G_δ-închiderea mulțimii H în X. Dacă $\delta - cl_X H = H$, atunci spunem că mulțimea H este G_δ-închisă.

Dacă spațiul X este μ-complet, atunci orice subspațiu G_δ-închis din X este μ-complet.

Desimea unui spațiu X este cel mai mic cardinal τ pentru care pentru orice submulțime $L \subseteq X$ și orice punct $x \in cl_X L$ există o submulțime $L_1 \subseteq L$ astfel încât $|L_1| \leq \tau$ și $x \in cl_X L_1$.

Notăm prin $t(X)$ și $l(X)$ desimea și numărul lui Lindelöf a spațiului X.

Următoarea afirmație pentru $E = \mathbb{R}$ a fost demonstrată de A. V. Arhangeli'skii și E. G. Pytkeev (vezi [6, Teorema II.1.1]).

Propoziția 3.53. *Presupunem că E este metrizabil și $l(X^n) \leq \tau$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci $t(C_p(X,E)) \leq \tau$.*

Demonstrație. Demonstrația este ca și în [6]. Vom arăta doar schema demonstrației.

Fie d o metrică pe E. Fie $A \subseteq C_p(X,E)$ și $f \in clA$. Fie $\varepsilon_n = 2^{-n}$. Pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$ există $g_x \in A$ astfel încât $d(g_x(x_i), f(x_i)) < \varepsilon_n$, $i \leq n$. Întrucât g_x și f sunt continue, există $O_x = \Pi\{O_{x_1}, O_{x_2}, ..., O_{x_n}\}$ astfel încât $d(g_x(y), f(y)) < \varepsilon_n$, $\forall y \in \Pi_{i=1}^n O_{x_i} = O_x$. Familia $\{O_x : x \in X^n\}$ este o acoperire a lui X^n. Fie $B_n \subseteq X^n$, $|B_n| \leq \tau$ și $\bigcup\{O_x : x \in B_n\} = X^n$. Fie $A_n = \{f_x : x \in B_n\} \subseteq A$. Atunci $f \in cl(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Propoziția 3.54. *Fie X și E două spații și $t(X) \leq \aleph_0$. Atunci $C_p(X,E)$ este un subspațiu G_δ-închis al lui E^X. Mai mult, dacă E este μ-complet, atunci spațiul $C_p(X,E)$ este la fel μ-complet.*

Demonstrație. Întrucât produsul de spații μ-complete este un spațiu μ-complet, spațiul E^X este la fel μ-complet știind că E este μ-complet.

Presupunem că $g \in E^X \setminus C(X,E)$. Atunci există un punct $x_0 \in X$ și o submulțime deschisă U din E astfel încât $g(x_0) \in U$ și $x_0 \in cl_X\{x \in X : g(x) \notin U\}$. Întrucât $t(X) \leq \aleph_0$, există o submulțime numărabilă $L \subseteq \{x \in X : g(x) \notin U\}$ astfel încât $x_0 \in cl_X L$. Alegem o submulțime deschisă V din E astfel încât $g(x_0) \in V \subseteq cl_E V \subseteq U$.

Pentru orice $y \in L$ notăm

$$H_y = \{f \in E^X : f(x_0) \in V, f(y) = E \setminus cl_E V\}.$$

Mulțimea H_y este deschisă în E^X și $g \in H_y$. Fie $H = \cap\{H_y : y \in L\}$. Atunci H este o submulțime G_δ din E^X.

Presupunem ca $f \in C(X, E)$. Dacă $f(x_0) \notin V$, atunci $f \notin H_y$ pentru orice $y \in L$. Presupunem că $f(x_0) \in V$. Există o submulțime deschisă W din X și un punct $y \in L$ astfel încât $x_0 \in W$, $y \in L \cap W$ și $f(W) \subseteq V_0$. Atunci $f \notin H_y$. Astfel $H \cap C(X, E) = \emptyset$ și $g \notin \delta - cl_{E^X} C(X, E)$. Așadar $C(X, E)$ este o submulțime G_δ-închisă din E^X. Orice submulțime G_δ-închisă a unui spațiu μ-complet este μ-completă.

Propoziția 3.55. *Fie F și E două R-module topologice și $\mathcal{L}_p(F, E)$ spațiul tuturor funcțiilor liniare și continue definite pe F cu valori în E. Atunci $\mathcal{L}_p(F, E)$ este un subspațiu închis al lui $C_p(F, E)$.*

Demonstrație. Fie $g \in C_p(F, E) \setminus \mathcal{L}_p(F, E)$. Atunci avem unul din următoarele două cazuri.

Cazul 1. *Există $a, b \in F$ astfel încât $g(a + b) \neq g(a) + g(b)$.*

În acest caz există submulțimile deschise V_1, V_2, V și W din E astfel încât $g(a) \in V_1$, $g(b) \in V_2$, $g(a + b) \in W$, $V_1 + V_2 \subseteq V$ și $V \cap W = \emptyset$. Mulțimea

$$H = \{f \in C_p(F, E) : f(a + b) \in W, f(a) \in V_1, f(b) \in V_2\}$$

este deschisă în $C_p(F, E)$ și $H \cap \mathcal{L}_p(F, E) = \emptyset$.

Cazul 2. *Există $a \in F$ și $\lambda \in R$ astfel încât $g(\alpha a) \neq \alpha g(a)$.*

În acest caz există submulțimile deschise V_1, V și W din E astfel încât $g(a) \in V_1$, $g(\alpha a) \in W$, $\alpha V_1 \subseteq V$ și $V \cap W = \emptyset$. Mulțimea

$$H = \{f \in C_p(F, E) : f(\alpha a) \in W, f(a) \in V_1\}$$

este deschisă în $C_p(F, E)$ și $H \cap \mathcal{L}_p(F, E) = \emptyset$.

Corolarul 3.56. *Fie E și F două R-module topologice și $t(F) \leq \aleph_0$. Atunci $\mathcal{L}_p(F, E)$ este o submulțime G_δ-închisă din E^F. În particular, dacă E este μ-complet, atunci spațiul $\mathcal{L}_p(F, E)$ este la fel μ-complet.*

Pentru orice subspațiu Y a spațiului X vom privi $C_p(Y|X, E) = \{f|_Y : f \in C(X, E)\}$ ca un subspațiu al spațiului $C_p(Y, E)$.

Propoziția 3.57. *[vezi [6, Propoziția 0.4.1] pentru $E = \mathbb{R}$] Fie Y un subspațiu al spațiului X, E un R-modul topologic netrivial, X un spațiu R-Tychonoff și $p_Y(f) = f|_Y$ pentru orice $f \in C_p(X, E)$. Atunci funcția $p_Y : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y|X, E)$ are următoarele proprietăți:*

(i) p_Y este o funcție continuă.

(ii) Dacă mulțimea Y este închisă în X, atunci funcția p_Y este deschisă.

(iii) Dacă Y este densă în X, atunci p_Y este o corespondență injectivă.

(iv) Subspațiul $C_p(Y|X, E)$ este dens în $C_p(Y, E)$.

Demonstrație. Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ o submulțime finită a lui X. Atunci putem presupune că există $k \leq n$ astfel încât $x_1, x_2, ..., x_{k-1} \in Y$ și $x_k, ..., x_n \in X \setminus Y$. Fie $f \in C(X, E)$ și $U_1, U_2, ..., U_n$ submulțimi deschise ale lui E astfel încât $f(x_i) \in U_i$ pentru orice $i \leq n$. Notăm

$$W(f, x_1, x_2, ..., x_n, U_1, ..., U_n) = \{g \in C(X, E) : g(x_i) \in U_i \text{ pentru orice } i \leq n\}$$

și

$$W_Y(f, x_1, ..., x_{k-1}, U_1, ..., U_{k-1}) = \{g|_Y : g \in W(f, x_1, ..., x_{k-1}, U_1, ..., U_{k-1})\}.$$

Avem

$$p_Y(W(f, x_1, x_2, ..., x_n, U_1, ..., U_n)) \subseteq W_Y(f, x_1, ..., x_{k-1}, U_1, ..., U_{k-1}).$$

Astfel funcția p_Y este continuă. Dacă Y este închis în X, atunci din Lema 3.32 rezultă că

$$p_Y(W(f, x_1, x_2, ..., x_n, U_1, ..., U_n)) = W_Y(f, x_1, ..., x_{k-1}, U_1, ..., U_{k-1}).$$

Astfel funcția p_Y este deschisă.

Aserțiunea 3 este evidentă. Aserțiunea 4 reiese din Lema 3.32.

Teorema 3.58. *Fie E un R-modul metrizabil și local mărginit, X un spațiu R-Tychonoff compact E-plin și pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E. Atunci spațiul X este μ-complet, dacă și numai dacă spațiul $M_p(X, E)$ este μ-complet.*

Demonstrație. În virtutea Propoziției 3.5, putem presupune că $X = e_X(X)$ este un subspațiu al lui $M_p(X, E)$. Din Propoziția 3.4 reiese că subspațiul X este închis în $M_p(X, E)$.

Fie $M_p(X, E)$ un spațiu μ-complet. Întrucât X este un subspațiu închis al lui $M_p(X, E)$, spațiul X este la fel μ-complet.

Presupunem că X este un spațiu μ-complet. Fie Φ o submulțime închisă și mărginită din $M_p(X, E)$. Atunci închiderea Y a mulțimii $\cup\{supp_X(\mu) : \mu \in \Phi\}$ este o submulțime compactă în X.

Funcția restricție $p_Y : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$ este o funcție deschisă continuă și liniară definită pe R-modulul $C_p(X, E)$ cu valori în R-modulul $C_p(Y, E)$.

Afirmația 1. Funcția duală $\varphi : E^{C(Y,E)} \longrightarrow E^{C_p(X,E)}$ este o scufundare liniară și mulțimea $\varphi(E^{C(Y,E)})$ este închisă în $E^{C(X,E)}$.

Demonstrația acestui fapt este similară cu demonstrația Propoziției 0.4.6 din [6].

Din construcție, avem $\Phi \subseteq \varphi(M_p(Y, E)) \subseteq M_p(X, E)$.

Afirmația 2. $\varphi(M_p(Y, E))$ este o submulțime închisă a spațiilor $M_p(X, E)$ și $C_p(C_p(X, E), E)$, care la rândul lor sunt subspații ale lui $E^{C(X,E)}$.

Reiese din Afirmația 1 și Propoziția 3.55.

Afirmația 3. $\varphi(C_p(C_p(Y, E), E)) \subseteq C_p(C_p(X, E), E)$.

Reiese din continuitatea funcției p_Y.

Afirmația 4. Mulțimile $\varphi(M_p(X, E))$ și $\varphi(C_p(C_p(Y, E), E))$ sunt G_δ-închise în $E^{C(X,E)}$.

Întrucât Y este compact, din Propoziția 3.53 reiese că $t(C_p(Y, E)) = \aleph_0$. Atunci, din Propoziția 3.54 reiese că $C_p(C_p(Y, E), E)$ este o submulțime G_δ-închisă a spațiului $E^{C(Y,E)}$. Din Afirmația 1 reiese că $\varphi(C_p(C_p(Y, E), E))$ este G_δ-închisă în $E^{C(X,E)}$. Corolarul 3.56 încheie demonstrația acestei afirmații.

Fie G este G_δ-închiderea mulțimii $C_p(C_p(X, E), E))$ în $E^{C(X,E)}$. Avem $M_p(X, E) \subseteq G$. Astfel Φ este o submulțime mărginită din G.

Afirmația 5. Mulțimile $\varphi(M_p(X, E))$ și $\varphi(C_p(C_p(Y, E), E))$ sunt închise în G.

Reiese din Afirmația 4.

Întrucât E este un spațiu metrizabil, E este un spațiu μ-complet. Astfel Φ este o submulțime închisă și mărginită a unui spațiu μ-complet G. Așadar mulțimea Φ este compactă.

3.7. Relații dintre spații generate de homeomorfisme liniare

Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial local mărginit. Atunci R-modulul E este local simplu.

Fie două spații R-Tychonoff nevide X și Y cu proprietățile:

- pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;

- pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.

Fie un homeomorfism liniar $u : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$. Atunci funcția duală $v : M_p(Y, E) \longrightarrow M_p(X, E)$, unde $v(\eta) = \eta \circ u$ pentru orice $\eta \in M_p(Y, E)$, este un homeomorfism liniar. Pentru fiecare $x \in X$ notăm $\varphi(x) = supp_Y(v^{-1}(\xi_x))$ și pentru orice $y \in Y$ notăm $\psi(y) = supp_X(v(\xi_y))$.

Proprietatea 3.59. *$\varphi : X \to Y$ și $\psi : Y \to X$ sunt funcții multivoce l.s.c. și $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sunt mulțimi finite pentru orice puncte $x \in X$, $y \in Y$.*

Demonstraţie. Rezultă din Propoziția 3.44 și Teorema 5.1.

Proprietatea 3.60. *Fie $y_0 \in Y$, $f \in C(X, E)$ și $f(\psi(y_0)) = 0$. Atunci $u(f)(y_0) = 0$.*

Demonstraţie. Pentru orice $\eta \in M_p(Y, E)$ și $g \in C(X, E)$ avem $v(\eta)(g) = \eta(u(g))$. Întrucât

$$f(supp_X(v(\xi_{y_0}))) = f(\psi(y_0)) = 0,$$

avem

$$u(f)(y_0) = \xi_{y_0}(u(f)) = v(\xi_{y_0})(f) = f(supp_X(v(\xi_{y_0}))) = 0.$$

Corolarul 3.61. *Dacă $f, g \in C(X, E)$ și $f|_{\phi(y)} = g|_{\phi(y)}$, atunci $u(f)(y) = u(g)(y)$.*

Proprietatea 3.62. *$x \in cl_X\psi(\varphi(x))$ pentru orice punct $x \in X$ și $y \in cl_Y\varphi(\psi(y))$ pentru orice punct $y \in Y$.*

Demonstraţie. Presupunem că $x_0 \in X$ și $x_0 \notin cl_X\psi(\varphi(x_0)) = F$. Fie $f \in C(X, E)$ astfel încât $f(x_0) = b \neq 0$ și $f(F) = f(\psi(\varphi(x_0))) = 0$. Întrucât $\psi(y) \subseteq F$ și $f(F) = 0$ pentru orice $y \in \varphi(x_0)$ în virtutea Proprietății 3.60, avem $u(f)(y) = 0$ pentru orice $y \in \varphi(x_0)$. Întrucât $u(f)(y) = 0$ pentru orice $y \in \varphi(x_0)$, în virtutea Proprietății 3.60, avem $f(x_0) = u^{-1}(u(f))(x_0) = 0$. Din construcție, avem $f(x_0) \neq 0$, contradicție.

Proprietatea 3.63. *$x \in \psi(\varphi(x))$ pentru orice punct $x \in X$.*

Demonstraţie. Pentru orice $x \in X$, $\varphi(x)$ este mulțime finită și $\psi(\varphi(x))$ este compact. Proprietatea 3.62 finalizează demonstrația.

Proprietatea 3.64. *Dacă H este submulțime densă din Y, atunci $\psi(H)$ este o submulțime densă din X știind că u este o injecție.*

Demonstrație. Presupunem că $x_0 \notin cl_X\psi(H)$. Atunci există $f \in C(X, E)$ astfel încât $f(x_0) \neq 0$ și $f(\psi(H)) = 0$. Întrucât $f(\psi(H)) = 0$ pentru orice $y \in Y$, în virtutea Proprietății 3.60, avem $u(f)(y) = 0$ pentru orice $y \in Y$. Astfel $u(f) = 0$. Așadar $f = 0$, contradicție.

Corolarul 3.65. *Spațiul X este separabil, dacă și numai dacă spațiul Y este separabil. În general, $d(X) = d(Y)$.*

Proprietatea 3.66. *$\varphi(F)$ este submulțime mărginită din Y pentru orice mulțime mărginită F din X.*

Demonstrație. Fie F submulțime mărginită din X. Atunci F este mulțime mărginită din $M_p(X, E)$ și respectiv $v^{-1}(F)$ este submulțime mărginită din $M_p(Y, E)$. Din Teorema 3.50 mulțimea $supp_Y(v^{-1}(F))$ este o submulțime mărginită din Y.

Proprietatea 3.67. *Fie E un spațiu metrizabil, X și Y spații compact E-pline. Atunci spațiul X este μ-complet, dacă și numai dacă spațiul Y este μ-complet.*

Demonstrație. Fie X un spațiu μ-complet. Atunci $M_p(X, E)$ și $M_p(Y, E)$, în virtutea Teoremei 3.58, sunt spații μ-complete. Din Teorema 3.58 spațiul Y este la fel μ-complet.

La fel ca și în [14] vom spune că perechea de funcții multivoce $\theta : X \longrightarrow Y$ și $\pi : Y \longrightarrow X$ se numește *inferior-reflectivă*, dacă verifică următoarele condiții:

1*l*. θ și π sunt l.s.c.

2*l*. $\theta(x)$ și $\pi(x)$ sunt mulțimi finite pentru toate punctele $x \in X$ și $y \in Y$.

3*l*. $x \in \pi(\theta(x))$ și $y \in \theta(\pi(y))$ pentru toate punctele $x \in X$ și $y \in Y$.

De asemenea, ca și în [14] spunem că perechea de funcții multivoce $\theta : X \longrightarrow Y$ și $\pi : Y \longrightarrow X$ se numește *superior-reflectivă*, dacă verifică condițiile:

1*u*. $\theta(F)$ este o submulțime mărginită din Y pentru orice submulțime mărginită F din X.

2*u*. $\pi(\Phi)$ este o submulțime mărginită din X pentru orice submulțime mărginită Φ din Y.

3*u*. $x \in cl_X\pi(\theta(x))$ și $y \in cl_Y\theta(\pi(y))$ pentru toate punctele$x \in X$ și $y \in Y$.

Din proprietățile de mai sus rezultă:

Corolarul 3.68. *Spațiul X este separabil, dacă și numai dacă spațiul Y este separabil. În general, $d(X) = d(Y)$.*

Concluzii generale: Funcțiile multivoce $\varphi : X \longrightarrow Y$ și $\psi : Y \longrightarrow X$ formează o echivalență a spațiilor X și Y în sensul articolului [14]. Astfel teoremele generale din [14] pot fi extinse pentru funcțiile cu valori în R-modulele topologice. În următoarele paragrafe vom formula teoremele generale pentru acest caz.

3.8. Aplicații la proprietățile perfecte

Amintim că proprietatea $\mathcal{P}$ este *perfectă*, dacă pentru orice funcție continuă perfectă $f : X \longrightarrow Y$ de la X la Y avem $X \in \mathcal{P}$ dacă și numai, dacă $Y \in \mathcal{P}$. Spunem că proprietatea $\mathcal{P}$ este *tare perfectă*, dacă este perfectă și orice spațiu cu proprietatea $\mathcal{P}$ este μ-complet.

Exemplul 3.69. *Din Exemplul 6.2 [14] următoarele proprietăți sunt perfecte:*

1. *A fi spațiu compact.*
2. *A fi p-spațiu paracompact.*
3. *A fi spațiu paracompact.*
4. *A fi spațiu metacompact.*
5. *A fi spațiu k-dispers.*
6. *A fi p-spațiu monoton.*
7. *A fi spațiu Čech-complet monoton.*
8. *A fi spațiu Čech-complet.*
9. *A fi spațiu Lindelöf.*
10. *A fi Σ-spațiu Lindelöf.*
11. *A fi spațiu subparacompact.*
12. *A fi spațiu local compact.*

Exemplul 3.70. *Următoarele proprietăți sunt tare perfecte:*

1. A fi spațiu compact.

2. A fi p-spațiu paracompact.

3. A fi spațiu paracompact.

4. A fi spațiu metacompact μ-complet.

5. A fi spațiu μ-complet k-dispers.

6. A fi p-spațiu monoton μ-complet.

7. A fi spațiu Čech-complet monoton μ-complet.

8. A fi spațiu Čech-complet μ-complet.

9. A fi spațiu Lindelöf.

10. A fi Σ-spațiu Lindelöf.

11. A fi spațiu subparacompact μ-complet.

12. A fi spațiu local compact μ-complet.

Amintim că un spațiu X se numește *wq-spațiu*, dacă pentru orice punct $x \in X$ există un șir $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de submulțimi deschise din X astfel încât $x \in \cap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ și fiecare mulțime $\{x_n \in U_n : n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită în X.

Un spațiu X este *pseudocompact*, dacă mulțimea X este mărginită în X. Orice spațiu pseudocompact este μ-complet.

Teorema 3.71. *Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial local mărginit. Fie două spații R-Tychonoff nevide X și Y cu proprietățile:*

- pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;

- pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.

Presupunem că $u : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$ este un homeomorfism liniar. Atunci:

1. X este un spațiu pseudocompact, dacă și numai dacă Y este un spațiu pseudocompact.

2. Dacă $\mathcal{P}$ este o proprietate perfectă și X, Y sunt wq-spații μ-complete, atunci $X \in \mathcal{P}$, dacă și numai dacă $Y \in \mathcal{P}$.

Demonstrație. Considerăm funcțiile multivoce $\varphi : X \longrightarrow Y$ și $\psi : Y \longrightarrow X$ construite în paragraful precedent.

Fie X un spațiu pseudocompact. Atunci X este o submulțime mărginită a spațiului X. Astfel $Y = \varphi(X)$ este o submulțime mărginită din Y și Y este un spațiu pseudocompact. Aserțiunea 1 este demonstrată.

Presupunem că $\mathcal{P}$ este o proprietate perfectă și X, Y sunt wq-spații μ-complete. Presupunem că $X \in \mathcal{P}$. În virtutea Teoremei 2.5 din [14], există un spațiu Z și două funcții perfecte $f : Z \longrightarrow X$ și $g : Z \longrightarrow Y$ cu valori în X și Y, respectiv. Așadar $Y, Z \in \mathcal{P}$. Aserțiunea 2 este demonstrată.

Teorema 3.72. *Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic metrizabil netrivial local mărginit. Fie două spații R-Tychonoff nevide compact E-pline X și Y cu proprietățile:*

- pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;

- pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.

Presupunem că $u : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$ este un homeomorfism liniar. Atunci:

1. Spațiul X este μ-complet, dacă și numai dacă spațiul Y este μ-complet.

2. X este spațiu compact, dacă și numai dacă Y este compact.

3. Dacă $\mathcal{P}$ este proprietate tare perfectă și X, Y sunt wq-spații, atunci $X \in \mathcal{P}$, dacă și numai dacă $Y \in \mathcal{P}$.

Demonstrație. Considerăm funcțiile multivoce $\varphi : X \longrightarrow Y$ și $\psi : Y \longrightarrow X$ construite în paragraful precedent. Aserțiunea 1 rezultă din Proprietatea 3.67.

Presupunem că $\mathcal{P}$ este o proprietate tare perfectă și X, Y sunt wq-spații. Presupunem că $X \in \mathcal{P}$. Conform definiției proprietății tare perfecte, X este μ-complet. Din Aserțiunea 1 reiese că Y este și el μ-complet. În virtutea Teoremei 2.5 din [14], există un spațiu Z și două funcții perfecte $f : Z \longrightarrow X$ și $g : Z \longrightarrow Y$ cu valori în X și Y, corespunzător. Astfel $Y, Z \in \mathcal{P}$. Aserțiunea 3 este demonstrată.

Fie X un spațiu compact. În virtutea Teoremei 3.71, Y este pseudocompact. Astfel X și Y sunt wq-spații. Aserțiunea 3 finalizează demonstrația Aserțiunii 2.

3.9. Aplicații la proprietăți deschise

Amintim că proprietatea $\mathcal{P}$ este o *of-proprietate* (sau *proprietate finit-deschisă*), dacă pentru orice funcție continuă, deschisă și finită $f : X \longrightarrow Y$ și orice subspațiu Z din X avem $Z \in \mathcal{P}$, dacă și numai dacă $f(Z) \in \mathcal{P}$.

Exemplul 3.73. *Din rezultatele din [14] și [18] următoarele proprietăți sunt of-proprietăți:*

1. *A fi ereditar Lindelöf.*

2. *A fi σ-spațiu.*

3. *A fi ereditar separabil.*

4. *A fi σ-metrizabil.*

5. *A fi σ-dispers.*

6. *A fi spațiu σ-discret.*

Exemplul 3.74. *Fie τ un cardinal infinit. Considerăm proprietățile:*

1. *$X \in e(\tau)$, dacă și numai dacă $e(X) \leq \tau$;*

2. *$X \in d(\tau)$, dacă și numai dacă $d(X) \leq \tau$;*

3. *$X \in hd(\tau)$, dacă și numai dacă $hd(X) \leq \tau$;*

4. *$X \in hl(\tau)$, dacă și numai dacă $hl(X) \leq \tau$.*

Atunci $e(\tau), d(\tau), hd(\tau), hl(\tau)$ sunt of-proprietăți.

Teorema 3.75. *Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial local mărginit. Fie două spații R-Tychonoff nevide X și Y cu proprietățile:*

- pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;

- pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.

Presupunem că $u : C_p(X, E) \longrightarrow C_p(Y, E)$ este un homeomorfism liniar. Dacă $\mathcal{P}$ este o of-proprietate, atunci $X \in \mathcal{P}$, dacă și numai dacă $Y \in \mathcal{P}$.

Demonstrație. Considerăm funcțiile multivoce $\varphi : X \longrightarrow Y$ și $\psi : Y \longrightarrow X$. Ca și în [14] (vezi [14, Teorema 2.1]) notăm $Z = \cup\{\{x\} \times \varphi(x) : x \in X\}$ și $S = \cup\{\psi(y) \times \{y\} : y \in Y\}$ ca subspații a spațiilor $X \times Y$, $f(x, y) = x$ și $g(x, y) = y$ pentru orice punct $(x, y) \in X \times Y$. Atunci $f : Z \longrightarrow X$ și $g : S \longrightarrow Y$ sunt funcții continue deschise și finite. Dacă $D = Z \cap S$, atunci din Proprietatea 3.63 rezultă că $f(D) = X$ și $g(D) = Y$. Așadar $X \in \mathcal{P}$, dacă și numai dacă $Y \in \mathcal{P}$.

3.10. Echivalențe funcționale și metrizabilitate

Teorema 3.76. *Fie R un inel topologic și E un R-modul topologic netrivial, metrizabil și local mărginit. Fixăm două spații R-Tychonoff nevide și compact E-pline X și Y cu proprietățile:*

1. *pentru orice submulțime nemărginită L din X există $f \in C(X, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E;*

2. *pentru orice submulțime nemărginită L din Y există $f \in C(Y, E)$ astfel încât mulțimea $f(L)$ nu este a-mărginită în E.*

Presupunem că X și Y sunt $l_p(E)$-echivalente. Atunci:

1. *X este un spațiu compact metrizabil, dacă și numai dacă Y este spațiu compact metrizabil.*

2. *Dacă X este un spațiu metrizabil, atunci spațiul Y este metrizabil, dacă și numai dacă Y este un wq-spațiu.*

Demonstrație. Orice spațiu metrizabil este wq-spațiu. La fel orice spațiu metrizabil este și spațiu μ-complet.

Fie X un spațiu metrizabil și Y un wq-spațiu. Întrucât E este metrizabil din Teorema 3.72 deducem că Y este μ-complet.

Întrucât X este metrizabil, în virtutea Teoremei 3.71, Y este p-spațiu paracompact. Din Teorema 3.75 rezultă că Y este un σ-spațiu. Dacă un spațiu paracompact Y este un σ-spațiu și un p-spațiu, atunci Y este metrizabil [69]. Asertiunea 2 este demonstrată.

Asertiunea 1 rezultă din Asertiunea 2 și Teorema 3.71.

3.11. Concluzii la capitolul 3

În acest capitol au fost cercetate proprietățile care se păstrează la $l_p(R)$-echivalențe. În particular, au fost cercetate proprietățile perfecte, tare perfecte și cele finit-deschise. Rezultatele importante ale acestui capitol sunt Teorema 3.71, Teorema 3.72 și respectiv Teorema 3.75. La baza acestor rezultate stau prima și a doua echivalență topologică ale lui M. Choban introduse în [14] și utilizate pentru cercetarea proprietăților care se păstrează la $l_p(\mathbb{R})$-echivalențe. În acest capitolul echivalențele lui M. Choban au fost utilizate pentru cercetarea proprietăților care se păstrează la $l_p(R)$-echivalențe, unde R este orice inel topologic cu unitate. Iar metodele dezvoltate pot fi aplicate în cercetări ulterioare ale proprietăților invariante la $l_p(R)$-echivalențe.

Așadar în capitolul 3:

1. A fost introdusă și studiată noțiunea de R-modul topologic local simplu;

2. Au fost introduse și studiate noțiunile de mulțime a-mărginită și total a-mărginită;

3. A fost determinată prima echivalență topologică în raport cu care se păstrează of-proprietățile în contextul spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice;

4. A fost determinată a două echivalență topologică în raport cu care se păstrează proprietățile perfecte în contextul spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice;

5. A fost determinată a treia echivalență topologică în raport cu care se păstrează proprietățile tare perfecte în contextul spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Prin prezenta lucrare autorul și-a propus să adauge contribuția personală la investigarea spațiilor cu structuri algebrice și aplicarea acestora în studiul proprietăților topologice care se păstrează la diverse echivalențe funcționale.

Problema științifică importantă soluționată constă în elaborarea unor metode de cercetare a spațiilor topologice cu ajutorul spațiilor cu structuri algebrice, ceea ce a condus la determinarea corelațiilor dintre proprietățile spațiilor topologice și proprietățile algebrice ale spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice.

Concluzii generale:

C_p-teoria este un domeniu actual al matematicii contemporane care se dezvoltă vertiginos. Pe parcursul dezvoltării C_p-teoriei pentru spațiile de funcții reale au fost obținute un șir important de rezultate concrete, care în totalitate formează nucleul acestei teorii. Unele rezultate au fost extinse pentru spații de funcții cu valori în spații normate. Însă metodele dezvoltate pentru spațiile de funcții cu valori în spații normate sunt insuficiente pentru a studia cazul spațiilor de funcții cu valori în inele și module topologice. Astfel multe probleme din C_p-teorie pentru cazul inelelor și modulelor topologice rămân deschise.

În capitolul 1 a fost studiată C_p-teoria pentru cazul funcțiilor cu valori în $\mathbb{R}$. Au fost prezentate noțiunile și rezultatele importante din această ramură a matematicii. Au fost evidențiate unele probleme care n-au fost cercetate până la moment.

În capitolul 2 au fost cercetate corelațiile dintre proprietățile spațiilor X, E și $C_p(X, E)$ pentru cazuri mult mai generale. Deopotrivă cu aceste proprietăți, în acest capitol a fost cercetată și problema prelungirilor aplicațiilor cu valori în spații metrice și în spații metrizabile complete.

În capitolul 3 au fost cercetate proprietățile care se păstrează la $l_p(R)$-echivalențe. Obținându-se, în rezultat, metode care pot fi aplicate în cercetări ulterioare ale proprietățile invariante la $l_p(R)$-echivalențe.

Așadar în lucrare:

1. Au fost studiate unele probleme generale de determinare a corelațiilor dintre proprietățile spațiului X și proprietăților spațiului $C_p(X, E)$, precum și problema extinderii funcționale. În particular, în capitolul 2, s-a demonstrat că:

- celularitatea punct-finită a spațiului zero-dimensional X este egală cu numărul lui Alexandroff a spațiului $C_p(X, E)$, adică $p(X) = a(C_p(X, E))$ (Teorema 2.7);

- $\mathbb{Z}$-desimea spațiului zero-dimensional X este numărabilă, dacă și numai dacă spațiul $C_p(X,\mathbb{Z})$ este $\mathbb{Z}$-compact (Corolarul 2.20);

- spațiul zero-dimensional X este discret, dacă și numai dacă $C_p(X,\mathbb{Z})$ este proiectiv complet, 0-stabil și $\mathbb{Z}$-compact (Teorema 2.38);

- unele criterii pentru care aplicațiile continue definite pe un subspațiu Y al unui spațiu τ-colectiv normal X pot fi prelungite continuu pe X (Corolarul 2.49).

2. Au fost stabilite condițiile în care proprietățile perfecte, tare perfecte și cele finit-deschise se păstrează la echivalențe liniare pe spații de funcții cu valori în module topologice (Teorema 3.71, Teorema 3.72 și respectiv Teorema 3.75).

3. Au fost determinate proprietățile comune ale spațiilor X la care inelele topologice $C_p(X,E)$ sunt izomorfe (Corolarul 3.35).

Recomandări:

1. Rezultatele din teză pot constitui conținutul unor cursuri speciale pentru studenții și masteranzii de la specialitățile matematice și pot servi drept suport pentru unele teze de masterat;

2. Utilizând rezultatele principale ale tezei pot fi stabilite relațiile dintre proprietățile spațiilor și spațiilor funcționale;

3. Cercetările pot fi continuate în următoarele direcții:

- În unele rezultate domeniul de valori E este metrizabil. De determinat cât de esențială este această condiție?

- De aplicat metodele elaborate la determinarea altor proprietăți: dimensiunea, numărul lui Lindelöf etc.

BIBLIOGRAFIE

A. Referințe bibliografice în limba engleză

1. Acharyya S. K., Chattopadhyaya K. C., Ghosh P. P. Constructing Banaschewski Compactification Without Dedekind Completeness Axiom. In: International Journal for Mathematics and Mathematical Sciences, 2004, vol. 69, p. 3799-3816.

2. Alexandroff P., Hopf H. Topologie I. Berlin: Springer, 1935. 638 p.

3. Arens R. A topology for spaces of transformations. In: Ann. of Math., 1946, vol. 47, p. 480-495.

4. Arens R., Dugundji J. Topologies for function spaces. In: Pacific Journal of Math., 1951, vol. 1, p. 5-31.

5. Arens R. Extension on functions on fully normal spaces. In: Pac. J. Math., 1951, vol. 1, p. 353-367.

6. Arkhangel'skii A. V. Topological Function Spaces. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1992. 211 p.

7. Arhangel'skii A. V. Some observations on C_p-theory and bibliography. In: Topol. Appl., 1998, vol. 89, p. 203-221.

8. Arhangel'skii A. V., Burke D. K. Spaces with a regular G_δ-diagonal. In: Topology and Appl., 2006, vol. 153, p. 1917-192.

9. Arhangel'skii A. V., Tkachuk V. V. Function spaces and topological invariants. Moscow: Moscow University P.H., 1985 (in Russian). 85 p.

10. Arhangel'skii A. V. On linear homomorphisms of function spaces. In: Doklady Acad. Nauk SSSR 264 (1982), vol. 6, p. 1289-1292. English translation: In: Soviet Math. Dokl., 1982, vol. 25, p. 852-855.

11. Baars J., de Groot J. On the l-equivalence of metric spaces. In: Fund. Math., 1991, vol. 137, p. 25-43.

12. Bagles R. W., Yang J. S. On k-spaces and function spaces. In: Proc. Amer. Math. Soc., 1966, vol. 17, p. 703-705.

13. Cao J., Tomita A. H. Bornologies, topological games and function spaces. In: Topology and its Applications, 2015, vol. 184, p. 16-28.

14. Choban M. M. General theorems on functional equivalence of topological spaces. In: Topology Appl., 1998, vol. 89, p. 223-239.

15. Choban M. M. Functional equivalence of topological spaces. In: Topology and its Applications, 2001, vol. 111, p. 105-134.

16. Choban M. M. On the theory of topological algebraic systems. In: Trudy Moscov. Mat. Obshch, 1985, vol. 48, p. 106-149. English translation: In: Trans. Moscow Math. Soc., 1986, vol. 48, p. 115-159.

17. Choban M. M. Some topics in topological algebra. In: Topology Appl., 1993, vol. 54, p. 183-202.

18. Choban M. Open finite-to-one mappings. In: Soviet Math. Dokl., 1967, vol. 8, p. 603-603.

19. Choban M. M., Kenderov P. S., Moors W. B. Eberlein theorem and norm continuity of pointwise continuous mappings into function spaces. In: Topology and its Applications, 2014, vol. 169, p. 108-119.

20. Choban M. M., Dumbrăveanu R. Two properties of function spaces. In: ROMAI Journal, 2014, vol. 10, nr. 2, p. 121-125.

21. Choban M. M., Dumbrăveanu R. $l_p(R)$-equivalence of topological spaces and topological modules. In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2015, vol. 77, nr. 1, p. 20-47.

22. Choban M., Dumbrăveanu R. About $l_p(R)$-equivalence of topological spaces. In: The 20th Conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu. Chisinau: Tiraspol State University, 2012, p. 73-76..

23. Choquet G. Convergences. In: Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math Phys. (N.S.), 1948, vol. 23, p. 57-112.

24. Drees K. M. $C_p(X, \mathbb{Z})$. Electronic Thesis or Dissertation. Bowling Green State University, 2009. 125 p.

https://etd.ohiolink.edu/ap/10?3695439842899::NO:10:P10_ETD_SUBID:49197 (vizitat 10.04.2015)

25. Dugundji J. An extension of Tietze's theorem. In: Pacific J. Math., 1951, vol. 1, p. 353-367.

26. Dumbrăveanu R. On extensions of mappings into complete metrizable spaces. In: ROMAI Journal, 2014, vol. 10, nr. 1, p. 39-45.

27. Dumbrăveanu R. About the ring of integer-valued functions. In: Conference mathematics & information technologics: Reseearch and Education (MITRE-2009). Chisinau: Moldova State University, 2009, p. 17-18.

28. Dumbrăveanu R. About discrete-valued functions. In: The 20th Conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu. Chișinău: Tiraspol State University, 2012, p. 110.

29. Dumbrăveanu R. About extensions of mappings into topologically complete spaces. In: Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50. Chisinau: Institute of Mathematics and Computer Science, 2014, p. 66-69.

30. Ellis R. L. Extending continuous functions on zero-dimensional spaces. In: Math. Annal., 1970, vol. 186, p. 114-122.

31. Engelking R. General Topology. Berlin: Heldermann, 1989. 529 p.

32. Engelking R. Dimension theory. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1978. 314 p.

33. Fort M. K. jr. A note on pointwise convergence. In: Proc. Amer. Math. Soc, 1951, vol. 2, p. 34-35.

34. Fox R.H. On topologies for function spaces. In: Bull. Amer. Math. Soc., 1945, vol. 51, p. 429-432.

35. Frink O. Topology in latticies. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1942, vol. 51, p. 569-582.

36. Gatsinzi J.-B. A model for function spaces. In: Topology and its Applications, 2014, vol. 168, p. 153-158.

37. Geba K., Semadeni Z. Spaces of continuous functions V. In: Studia Math, 1960, vol. 19, p. 303-320.

38. Gelfand I. M., Kolmogoroff A. N. On rings of continuous functions on topological spaces. In: Doklady Akad. Nauk SSSR, 1939, vol. 22, p. 11-15.

39. Ghosh S. K. A note on ideals of $C_\infty(X)$. In: Topology and its Applications, 2015, vol. 189, p. 25-30.

40. Gillman L., Henriksen M. Concerning rings of continuous functions. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1954, vol. 77, p. 340-362.

41. Gillman L., Jerison M. Rings of Continuous Functions. Princeton, N. J.: D. Van. Nostrand Co., 1960. 300 p.

42. Gul'ko S. P. On uniform homeomorphisms of spaces of continuous functions. In: Proc. Steklov Inst. Math., 1993, vol. 3, p. 87-93.

43. Hager A.W. Approximation of real continuous functions on Lindelöf spaces. In: Proc. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 22, p. 156-163.

44. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1948, vol. 64, p. 45-99.

45. Hewitt E. Linear functionals on spaces of continuous functions. In: Fund. Math, 1950, vol. 37, p. 161-189.

46. Hewitt E. A problem of set-theoretic topology. In: Duke Math. J., 1943, vol. 10, p. 309-333.

47. Isiwata T. Z-mappings and C^*-embeddings. In: Proc. Japan Academy, 1969, vol. 45, p. 889-893.

48. Jackson J. R. Comparison of topologies on function spaces. In: Proc. Amer. Math. Soc., 1912, vol. 3, p. 156-158.

49. Jindal A., McCoy R. A., Kundu S. The open-point and bi-point-open topologies on $C(X)$. In: Topology and its Applications, 2015, vol. 187, p. 62-74.

50. Juhász I. Cardinal functions in topology - ten years later. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1980. 160 p.

51. Kadets M. I. Homeomorphisms of certain Banach spaces. In: DAN SSSR, 1958, vol. 122, nr. 1, p. 13-16.

52. Karapinar E., Romaguera S. On the weak form of Ekeland's Variational Principle in quasi-metric spaces. In: Topology and its Applications, 2015, vol. 184, p. 54-60.

53. Katetov M. On real-valued functions in topological spaces. In: Fund. Math., 1951, vol. 38, p. 85-91 (Correction: In: Fund. Math., 1953, vol. 40, p. 203-205).

54. Keimel K. Weak topologies and compactness in asymmetric functional analysis. In: Topology and its Applications, 2015, vol. 185-186, p. 1-22.

55. Krupski M. Topological dimension of a space is determined by the pointwise topology of its function space. In: arXiv.org, 2014. http://arxiv.org/pdf/1411.1549.pdf (vizitat 7.04.2015)

56. Li Z. Cauchy convergence topologies on the space of continuous functions. In: Topology and its Applications, 2014, vol. 161, p. 321-329.

57. Maghsoudi S. Certain strict topologies on the space of regular Borel measures on locally compact groups. In: Topology and its Applications, 2013, vol. 160, nr. 14, p. 1876-1888.

58. McGovern W. Wm., Raphael R. Considering semi-clean rings of continuous functions. In: Topology and its Applications, 2015, vol. 190, p. 99-108.

59. Michael E. Some extension theorems for continuous functions. In: Pac. J. Math., 1953, vol. 3, p. 789-806.

60. Milyutin A. A. Isomorphism of spaces of continuous functios over compact sets of the cardinality of continuum. In: Teor. Funke. Anal. Priloz., 1966, vol. 2, p. 150-156 (in Russian).

61. Morita K., Nagata J. Topics in General Topology. Amsterdam; New York: North-Holland, 1989. 747 p.

62. Mrówka S. A Property of the Hewitt Extension νX of Topological Spaces. In: Bull. Acad. Pol. Sci., 1958, vol. 6, p. 95-96.

63. Mrówka S. On universal spaces. In: Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, vol. 4, p. 479-481.

64. Nachbin L. On the continuity of positive linear transformations. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Cambridge, Mass, 1950, vol. 1, p. 464-465.

65. Nagata J. On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces. In: Osaka Math. J., 1949, vol. 1, nr. 2, p. 166-181.

66. Nedev S. Selected theorems on multivalued sections and extensions (in Russian). In: Serdica, 1975, vol. 1, p. 285-294.

67. Nyikos P. Not every 0-dimensional realcompact space is $\mathbb{N}$-compact. In: Bull. Am. Math Soc., 1971, vol. 77, p. 392-396.

68. Okunev O. Tightness of compact spaces is preserved by the t-equivalence relation Comment. In: Mat. Univ. Carolin., 2002, vol. 43, nr. 2, p. 335-342.

69. Okuyama A. A survey of the theory of σ-spaces. In: General Topology Appl., 1971, vol. 1, p. 57-63.

70. Pelczynski A. Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions. Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1968. 92 p.

71. Pestov V. G. The coincidence of the dimension dim of l-equivalent topological spaces. In: Soviet Math. Dokl., 1982, vol. 26, p. 380-383.

72. Roy P. Nonequality of dimensions for metric spaces. In: Trans. Am. Math. Sot., 1968, vol. 134, p. 117-132.

73. Semadeni Z. Banach spaces non-isomorphic to their cartezian squares. II. In: Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., 1960, vol. 8, p. 81-84.

74. Stone M.H. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1937, vol. 41, p. 375-481.

75. Stone M. H. The Generalized Weierstrass Approximation Theorem. In: Mathematics Magazine, Mar. - Apr., 1948, vol. 21, nr. 4, p. 167-184.

76. Tkachuk V.V. A C_p-Theory Problem Book: topological and function spaces. New York: Springer, 2011. 485 p.

77. Tkachuk V.V. A C_p-Theory Problem Book: special features of function spaces. New York: Springer, 2011. 583 p.

78. Tkachuk V. V. Duality with respect to the functor C_p and cardinal invariants of the type of the Souslin number. In: Matematicheskie Zametki, 1985, vol. 37, nr. 3, p. 441-445 (Russian). English translation: In: Math. Notes, 1985, vol. 37, nr. 3, p. 247-252.

79. Tukey J. W. Convergence and uniformity in topology. Princeton: Princeton University Press, 1940. 90 p.

80. Valov V. Function spaces. In: Topology Appl., 1997, vol. 81, nr. 1, p. 1-22.

81. Van Mill J. The infinite-dimensional topology of function spaces. Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co, 2001. 630 p.

82. Warner S. Topological rings. Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co, 1993. 498 p.

83. Weir M. D. Hewitt-Nachbin Spaces. Amsterdam: North-Holland Pub. Co, 1975. 270 p.

84. Yang Z., Zheng Y., Chen J. Topological classification of function spaces with the Fell topology II. In: Topology and its Applications, 2015, vol. 187, p. 82-96.

85. Yang Z., Yan P. Topological classification of function spaces with the Fell topology I. In: Topology and its Applications, 2014, vol. 178, p. 146-159.

B. Referințe bibliografice în limba franceză

86. Banach S. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932. 261 p.

87. Kuratowski C. Sur la topologies des espaces, fonctionels. In: Ann. Soc. Polon. Math., 1947-48, vol. 20, p. 314-322.

DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnatul, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.

Dumbrăveanu Radu

Semnătura:

Data:

CV-ul AUTORULUI

Date personale:

Numele și prenumele: Dumbrăveanu Radu

Data nașterii: 26 octombrie 1982

Locul nașterii: m. Chișinău

Cetățenia: MD

Studii:

2007-2010 – Studii de doctorat, Facultatea de Fizică și Matematică, Universitatea de Stat din Tiraspol cu sediul la Chișinău.

2005-2006 – Diploma de Magistru în Matematică, Facultatea de Fizică și Matematică, Universitatea de Stat din Tiraspol cu sediul la Chișinău.

2004-2005 – Diploma de Licențiat în Matematică, Facultatea de Tehnică, Fizică, Matematică și Informatică (TFMI), Universitatea de Stat ”A. Russo” din Bălți.

1999-2004 – Facultatea TFMI, Universitatea de Stat ”A. Russo” din Bălți, specializarea Matematică și Informatică.

1990-1999 – Liceul Teoretic ”B. P. Hașdeu” din Bălți.

Limbi:

Româna – limba maternă.

Engleza – nivel mediu.

Germana – nivel începător.

Rusa – nivel avansat.

Activitatea profesională:

2006-prezent – lector universitar la Catedra Matematică și Informatică, Universitatea de Stat ”A. Russo” din Bălți

2004-2006 – asistent universitar la Catedra Matematica, Universitatea de Stat ”A. Russo” din Bălți

2001-2004 – inginer- programator la Departamentul Tehnologiilor Informaționale, Universitatea de Stat ”A. Russo” din Bălți

Contribuții științifice:

- Dumbrăveanu, Radu. On extensions of mappings into complete metrizable spaces // ROMAI Journal vol. 10, no. 1, 2014. -P. 39-45

- Dumbrăveanu, Radu. About discrete-valued functions // The 20th Conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu, Chișinău, aug. 22-25, 2012. – Ch., 2012. – P. 110.

- Choban, Mitrofan. About lp(R)-equivalence of topological spaces / M. Choban, Radu Dumbrăveanu // The 20th Conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu, Chișinău, aug. 22-25, 2012. – Ch., 2012. – P. 73-76.

- Dumbrăveanu, Radu. About the ring integer-valued functions // Conference mathematics & information technologics : Reseearch and Education (MITRE-2009), Chișinău, oct. 8-9, 2009/ – Ch., 2009. – P. 17-18.

- Cabac, Ghenadie. Posibilitățile utilizării platformei MOODLE la evaluarea studenților / Ghenadie Cabac, Radu Dumbrăveanu // Problemele actuale ale teoriei și practicii evaluării în învățământ : Materiale ale conf. șt. cu participarea int., 15-16 noiem., 2007 = Problemes actuels de la theorie et de la pratique de l'evaluation de l'enseignement. – Ch. : Univers Pedagogic, 2007. – P. 179-182.

Domenii de interes:

Topologie, analiză funcțională, matematică discretă, e-learning, programe libere.

Date de contact:

Telefon: 079637660

Email: rndumbraveanu@gmail.com