UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 515.1(043.2)

JOSU NATALIA

CERCETAREA GRUPOIZILOR TOPOLOGICI CU UNITĂŢI MULTIPLE

111.04 – GEOMETRIE ŞI TOPOLOGIE

Autoreferatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

CHIŞINĂU, 2015

Teza a fost elaborată în cadrul catedrei "Algebră, Geometrie şi Topologie" a Universităţii de Stat din Tiraspol, cu sediul la Chişinău.

Conducător ştiinţific:
CHIRIAC Liubomir, dr. hab. în şt. fiz.-mat., profesor universitar, UST.

Consultant ştiinţific:
CIOBAN Mitrofan, acad. al AŞM, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ., UST.

Referenţi oficiali:
1. ŞCERBACOV Victor, dr. hab. în şt. fiz.-mat., conf. cercetător, IMI.
2. CIOBANU Ina, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ. interimar, Universitatea de Stat "Alecu Russo" din Bălţi.

Componenţa Consiliului Ştiinţific Specializat:
1. ARNAUTOV Vladimir, preşedinte, acad. al AŞM, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ., IMI.
2. COZMA Dumitru, secretar ştiinţific, dr. hab. în şt. mat., conf. univ., UST.
3. LUNGU Alexandru, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ., USM.
4. CATARANCIUC Sergiu, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ., USM
5. PAVEL Dorin, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ. interimar, UST.

Susţinerea va avea loc la **24 noiembrie 2015**, **ora 14.00** în şedinţa Consiliului Ştiinţific Specializat **D 36.111.04-02** din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol (str. Iablocikin 5, or. Chişinău, MD-2069, Republica Moldova, bloc I, sala 304).

Teza de doctor şi autoreferatul pot fi consultate la biblioteca Universităţii de Stat din Tiraspol şi la pagina web a C.N.A.A. (www.cnaa.md).

Autoreferatul a fost expediat la **23 octombrie 2015.**

Secretar ştiinţific al Consiliului Ştiinţific Specializat,
COZMA Dumitru, dr. hab. în şt. mat., conf. univ. ________________

Conducător ştiinţific,
CHIRIAC Liubomir, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ. ________________

Consultant ştiinţific,
CIOBAN Mitrofan, acad., dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ.________________

Autor,
JOSU Natalia ________________

REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea temei. Cercetările în domeniul algebrei topologice au fost iniţiate în a doua jumătate a secolului al XIX-lea. Algebra topologică, ca ramură a matematicii moderne, se află la frontiera dintre topologia generală şi algebra abstractă. O contribuţie semnificativă la dezvoltarea teoriei respective au adus-o renumiţii matematicieni S.Lie, D.Hilbert, D.H.Poincaré, F.Klein, É.J.Cartan, G.Boole, A.N.Whitehead, etc.

De exemplu, matematicianul englez A.N.Whitehead, în cartea sa "A Treatise on Universal Algebra", publicată în anul 1898, pentru a introduce noţiunea de algebră universală, mai întâi, formulează noţiunea de operaţie. În aşa mod, aplicaţia $f : A^n \to A$ se numeşte operaţie n-ară pe A, pentru $n \geq 0$. Astfel, Whitehead defineşte algebra universală ca un sistem (A, S), unde A este o mulţime nevidă iar S o familie de operaţii.

Noţiunea de algebră universală a creat premisele privind constituirea unui punct de vedere comun asupra cercetării şi dezvoltării teoriilor mai multor structuri algebrice care erau, în perioada respectivă, în ascensiune: teoria grupurilor, teoria algebrelor booleene, etc.

Teoria grupurilor, considerată cea mai veche ramură a algebrei moderne, îşi are începutul în lucrările lui J.L.Lagrange, P.Ruffini, É.Galois şi N.H.Abel publicate la începutul secolului XIX. Grupurile cercetate de matematicienii respectivi au fost în principal grupuri finite: grupuri de rădăcini ale polinoamelor ori grupuri de permutări.

Interesul pentru grupuri inifinite a apărut din topologie şi geometrie, fiind stimulate de lucrările lui F.Klein, J.H.Poincaré şi alţii.

Terminologia de semigrup, după cum susţine L.E.Dickson în 1905 în monografia "On Semigroup and the General Isomorphism Between Infinite Goups", a fost utilizată pentru prima dată de Monsieur l'Abbé J.A. de Séguier în cartea sa "Eléments de la théorie des groupes abstraites", publicată la Paris în anul 1904. Iar O.Y.Schmidt utilizează cu succes semigrupurile în celebra sa lucrare "Abstract Group Theory". Studii consistente pe teoria semigrupurilor se fac în lucrările lui A.K.Suschkewitsch, începând cu publicaţiile din 1928, în monografiile matematicienilor D.Rees şi D.Dubreil publicate în anii 1940 şi respectiv 1941.

Paralel cu teoria grupurilor abstracte se dezvoltă şi teoria grupurilor topologice. Astfel, L.E.I.Brauer şi O.Schreier în lucrările publicate în anii 1909 şi respectiv 1926, introduc şi dezvoltă noţiunea de grup topologic în sens modern. Ceva mai târziu, în anii 1944-1945, A.A.Markov introduce noţiunea de grup topologic liber.

Aceste idei inovatoare contribuie enorm la constituirea şi dezvoltarea teoriei grupurilor topologice, în mod deosebit, în prima jumătate a secolului XX, datorită lucrărilor lui L.S.Pontryagin [1], A.A.Markov, A.D.Alexandrov, A.Weil, C.Chevalley, M.I.Graev, T.Nakayama, J. von Neumann, van Kampen, S.H.Kakutani, etc. Tot aici, pot fi menţionate şi rezultatele obţinute mai recent de matematicienii din Moldova, academicianul V.Arnautov [2], academicianul M.Cioban, M.I.Ursu, P.Chircu, etc. În felul acesta teoria grupurilor topologice a stat la temelia algebrelor topologice universale şi au direcţionat cercetările în acest domeniu.

Ideiile generate în cadrul teoriei quasigrupurilor şi buclelor, care a început să se dezvolte dinamic începând cu anii 30 ai secolului trecut, au influenţat benefic cercetările algebrelor topologice universale. Evidenţiem în acest sens lucrările lui R.H.Bruck [3], H.O.Pflugfelder [4], R.Moufang, V.D.Belousov [5], [6], T.Kepka [7], A.S.Basarab [8], [9], I.A.Florea, A.M.Ceban, P.V.Gorincioi, G.B.Belyavskaya, K.H.Hofmann [10], etc.

O contribuţie specială privind dezvoltarea teoriei quasigrupurilor au avut-o şi generaţia matematicienilor formaţi după anii 70 ai secolului tecut, printre care menţionăm F.M.Sokhatsky, A.W.Dudek, V.Şcerbacov [11], [12], V. Izbaş, P.Sârbu, V.Ursu, etc.

Definim câteva structuri algebrice de bază în termeni de algebră universală. Terminologia de algebră universală va fi simplificată deseori la cea de algebră.

Astfel, un *grupoid* este o algebră universală $(G, \circ)$ cu o singură operaţie binară " $\circ$ ".

În algebra abstractă se utilizează noţiunea de grupoid ori magmă. În afară de faptul că operaţia binară trebuie să fie închisă în raport cu mulţimea respectivă alte condiţii nu se pun. Termenul de *grupoid* a fost propus de Øystein Ore, iar ceva mai târziu N.Bourbaki a introdus termenul de *magmă*. În prezent în literatura de specialitate termenul de grupoid, tot mai des, se foloseşte ca o generalizare a noţiunii de grup. Un interes deosebit prezintă studierea grupoizilor în sens Ore în care se îndeplinesc anumite axiome. Astfel, prezintă interes pentru cercetare structuri de magmă care sunt: semigrup, monoid, grup, quasigrup, buclă, etc.

Un *semigrup* este o algebra universală $(G, \circ)$ cu o singură operaţie binară " $\circ$ " asociativă.

Un *monoid* este o algebră universală $(G, \circ, e)$ cu o singură operaţie binară " $\circ$ " asociativă, iar e este o operaţie nulară care satisface $e \circ a = a \circ e = a$ pentru orice $a \in G$.

Un *grup* este o algebră $(G, \circ, ', e)$ unde "$\circ$" este o operaţie binară asociativă, e este o operaţie nulară cu proprietatea $e \circ a = a \circ e = a$, iar "$'$" este o operaţie unară pe mulţimea G, pentru care are loc $a' \circ a = a \circ a' = e$, pentru orice

$a \in G$, iar e se numeşte unitatea grupului.

Grupoidul topologic G este grupoidul echipat cu topologia Hausdorff pentru care aplicaţia $(a, b) \to a \circ b$, este continuă.

Descrierea situaţiei în domeniul de cercetare şi identificarea problemelor de cercetare.

Problemele de cercetare. Fixăm signatura continuă E şi $-1 \leq i \leq 3.5$. Fie J o mulţime de identităţi. Notăm prin $V(E, i, J)$ clasa E-algebrelor topologice care sunt T_i-spaţii ce satisfac identităţile J. Academicianul M.Cioban în lucrarea sa "Algebra topologică, probleme", 2006, a formulat următoarea problemă fundamentală:

Problema 1. De studiat concordanţa dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale E-algebrelor topologice G din clasa $V(E, i, J)$.

Problema 1 în sensul ei general este foarte importantă. În acest sens sunt ilustrative următoarele exemple:

1. Fie $R^n, n \geq 1$, spaţiul Euclidian n-dimensional şi $S^{n-1} = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ *sfera unitate.* Atunci pe S^m există structuri de grupoid topologic numai pentru $m \in \{0, 1, 3, 7\}$. Acest rezultat important a fost demonstrat de I.M.James în anii 1957-1958.

2. Pe orice spaţiu A în raport cu o operaţie binară aditivă $(+)$, cu zero şi fără divizori ai lui zero, definită de egalitatea $x + y = y$ există o structură de semigrup topologic cu unitate de dreapta. În situaţia dată orice element din A va fi unitate de dreapta.

Din acest punct de vedere putem afirma că grupoizi topologici cu anumite identităţi nu există pentru toate spaţiile şi identităţile influenţează direct asupra proprietăţilor topologice.

După cum s-a menţionat problema principală a algebrei topologice constă în studierea concordanţei dintre proprietăţile algebrice şi topolologice ale E-algebrelor topologice G din clasa $V(E, i, J)$. Această problemă are un aspect larg şi poate fi soluţionată efectiv numai pentru anumite clase de algebre topologice, care se reprezintă prin fixarea operaţiilor algebrice şi identităţilor algebrice.

În acest aspect cecetările fundamentale au fost efectuate pentru grupuri topologice, inele şi module topologice. Dar această problemă este insuficient cercetată pentru grupoizi topologici. Clasa de grupoizi topologici conţine şi clasa de grupuri topologice şi clasa de quasigrupuri topologice.

Menţionăm că clasa de grupoizi topologici este foarte largă. De exemplu, pentru grupoizii topologici nu se poate nimic afirma despre structura lor topologică. Orice spaţiu admite structură de semigrup topologic. De exemplu, fie G un spaţiu topologic nevid. Operaţia $x \cdot y = y$ transformă G în semigrup topologic. Pe G poate fi orice topologie. Daca X este un spaţiu topologic, $e \notin X$ şi $G = X \cup \{e\}$, atunci operaţia $x \cdot y = y$ pentru $x, y \in X$ şi $e \cdot x = x \cdot e = x$ pentru orice $x \in G$, transformă G în semigrup topologic cu unitate, dacă e este un punct izolat în G. Atunci X este subspaţiu deschis şi închis în semigrupul topologic.

Cerinţa de a avea o structură de grupoid topologic cu unitate nu este simplă. De exemplu, pe sfera obişnuită aşa structură nu există.

Dacă pe dreapta reala R cu topologia generată de baza $\{(a, +\infty), a \in R\}$ fixăm operaţia de adunare, atunci obţinem un T_0-grupoid topologic cu diviziuni, care nu este T_1-spaţiu.

Prin urmare sunt necesare anumite restricţii asupra grupoizilor pentru a cerceta concordanţa dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale acestora. De exemplu, grupoizi cu unităţi multiple, grupoizi cu diviziuni continui etc.

Astfel, luând în consideraţie Problema 1 şi argumentele expuse mai sus putem formula următoarea problemă de cercetare.

Problemă de cercetare: *Elaborarea unor noi metode de cercetare a grupoizilor topologici cu diviziuni ce vor conduce la determinarea corelaţiilor dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoizilor cu unităţi multiple şi diviziuni continui.*

Următoarele probleme sunt conectate la problema de cercetare formulată mai sus.

Problema 2. Fie $(G, +)$ grupoid topologic cu proprietatea algebrică P şi e este element (k, p)-zero. În ce condiţii (n, m)-izotopul omogen $(G, \cdot)$, al grupoidului topologic $(G, +)$, posedă proprietatea algebrică P? Care este tipul unităţii multiple în grupoidul topologic $(G, \cdot)$?

Problema 3. Fie H subgrupoid primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni $(G, +, r, l)$ şi $e \in H$. În ce condiţii există un astfel de subgrupoid primitiv cu diviziuni Q al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni $(G, +, r, l)$ astfel, încât $e \in Q \subseteq H$?

Problema 4. Să se stabilească în ce condiţii grupoidul multiplicativ $(G, \cdot)$ este quasigrup paramedial cu $(2, 1)$-unitate.

Problema 5. Fie $(G, \cdot)$ buclă topologică paramedială de dreapta. În ce condiţii o submulţime compactă deschisă P din G conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta $(Q, \circ) \subseteq (G, \cdot)$?

Problema 6. Fie $(G, \cdot)$ grupoid topologic paramedial. În ce condiţii poate fi introdusă pe G o operaţie binară $(\circ)$ astfel încât $(G, \circ)$ să fie semigrup topologic comutativ cu unitate?

Problema 7. Fie G şi G_1 n-grupoizi topologici cu diviziuni continui. În ce condiţii orice omomorfism continuu $f : G \to G_1$ este deschis?

Problema 8. Fie $(G_1, \cdot)$ grupoid cu n unităţi multiple $(k_1, l_1), ..., (k_n, l_n)$ şi $(G_2, \circ)$ grupoid cu t unităţi multiple $(m_1, r_1), ..., (m_t, r_t)$. Să se determine tipul unităţilor multiple din grupoidul produs $G_1 \times G_2$.

Problema 9. Fie $(G, +)$ grup comutativ. În ce condiţii pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită operaţia binară $(\circ)$ astfel încât:

1. $(G \times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, paramedial şi nemedial?
2. $(G \times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, medial şi neparamedial?
3. $(G \times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, medial cu unitate de stânga?

Scopul şi obiectivele lucrării rezidă în studierea sistemelor topologo–algebrice şi aplicaţiile lor. În particular:

- desăvârşirea metodelor de studiere a grupoizilor topologici ce posedă anumite proprietăţi algebrice;
- elaborarea metodelor de cercetare a grupoizilor topologici cu unităţi multiple;
- determinarea condiţiilor pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui sunt deschise;
- soluţionarea problemei pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta;
- determinarea condiţiilor pentru care (n, m)-izotopul omogen al unui grupoid topologic cu proprietatea algebrică P posedă aceeaşi proprietate;
- identificarea condiţiilor pentru care pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară astfel încât noua structură algebrică obţinută este quasigrup neasociativ cu proprietăţi algebrice speciale.

Metodologia cercetării ştiinţifice. Construcţiile şi metodele de demonstraţie se bazează pe aplicarea noţiunilor de grupoid topologic, unităţi multiple, izotop omogen, quasigrup topologic, n-grupoizi topologici cu diviziune continuă, produs cartezian special.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: rezultatele principale sunt noi. Evidenţiem următoarele: au fost determinate condiţiile pentru ca omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise; au fost analizate proprietăţile algebrice ale (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici; au fost determinate unele proprietăţi ale subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni; au fost determinate condiţiile pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta; au fost determinate condiţiile pentru care pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară astfel încât noua structură algebrică obţinută este quasigrup neasociativ cu proprietăţi algebrice speciale.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în elaborarea unor metode de cercetare a grupoizilor topologici cu diviziuni, ceea ce a condus la determinarea corelaţiilor dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoizilor cu unităţi multiple şi diviziuni continui.

Inovaţia ştiinţifică a lucrării este determinată de soluţionarea următoarelor probleme concrete:

- au fost determinate condiţiile pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise;

- au fost analizate proprietăţile algebrice ale (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici;

- au fost determinate unele proprietăti ale subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni;

- au fost determinate condiţiile pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta;

- au fost determinate condiţii, pentru care pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară astfel încât noua structură algebrică obţinută este quasigrup neasociativ cu proprietăţi algebrice speciale.

Rezultatele obţinute în lucrarea respectivă sunt nemijlocit legate de soluţionarea Problemelor 1-9 formulate mai sus. Rezultatele principale sunt noi.

Semnificaţia teoretică. Au fost elaborate concepţii, metode şi construcţii noi care au contribuit la rezolvarea obiectivelor propuse.

Valoarea aplicativă a lucrării. Metodologia aplicată, concepţiile şi metodele elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori a unor aspecte ale lor formulate de M.M.Cioban şi L.L.Chiriac.

Aparatul matematic aplicat a condus la rezolvarea unor probleme ce au conexiune cu algebra topologică.

Rezultate ştiinţifice principale înaintate spre susţinere.

- metoda de cercetare a condiţiilor pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni sunt deschise;

- metoda de studiere a proprietăţilor algebrice ale (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici;

- metoda de cercetare a proprietăţilor subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni;

- metoda de determinare a condiţiilor pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta;

- metoda de construcţie a quasigrupurilor mediale, neasociative şi neparamediale;

- metoda de construcţie a quasigrupurilor paramediale, neasociative şi nemediale.

Implementarea rezultatelor ştinţifice. Rezultatele lucrării pot fi implementate în teoria grupoizilor şi quasigrupurilor topologice, teoria automatelor, la elaborarea unor cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele tezei au fost expuse în cadrul următoarelor foruri ştiinţifice:

1. Mathematics and Information Technologies: Research and Education, MITRE, 2015, Chişinău, 2-5 iulie.

2. Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, Chişinău, 2014, 19-23 august.

3. The 22^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2014, Bacău, România, 18-21 septembrie.

4. The 21^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2013, Bucureşti, 19-22 septembrie.

5. The 20^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to Academician Mitrofan M.Cioban, CAIM, 2012, Chişinău, 22-25 august.

6. Mathematics and Information Technologies: Research and Education. Dedicated to the 65^{th} anniversary of the Moldova State University, MITRE, 2011, Chişinău, 22-25 august.

7. The 19^{th} edition of the annual Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2011, Iaşi, 22-25 septembrie.

8. Actual problems of mathematics and informatics. Scientific conference dedicated to the 80^{th} anniversary of the foundation of the Tiraspol State University and of the Faculty of Physics, Mathematics and Information Technologies, Chişinău, 2010, 24-25 septembrie.

9. The 18^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2010, Iaşi, România, 14-17 octombrie.

10. Mahematics and Information Technologies: Research and Education, MITRE, 2009, Chişinău, 8-9 octombrie.

11. The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2009, Constanţa, 17-20 septembrie.

12. Conferinţa ştiinţifică Republicană "Matematica - probleme actuale cu aplicaţii", Chişinău, 2009, 8 aprilie.

13. Mathematics and Information Technologies: Research and Education, MITRE, 2008, Chişinău, 1-4 octombrie.

14. The 16^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2008, Oradea, 9-11 octombrie.

15. 6^{th} Congress of Romanian Mathematicians, Bucureşti, 2007, România,

28 iunie - 4 iulie.

16. The XIV^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60^{th} anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University, Satellite Conference of ICM, Chişinău, 2006, 17-19 august.

17. Conferinţa a 2-a a Societăţii Matematice din RM, consacrată aniversării a 40-cea de la fondarea Institutului de Matematică şi Informatică al AŞM, Chişinău, 2004, 17-19 august.

18. Şedinţa specială a seminarului ştiinţific consacrată profesorului Valentin Belousov, Institutul de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Moldovei, Chişinău, 2008-2014.

Publicaţiile la tema tezei. Rezultatele de bază ale tezei sunt reflectate în 35 lucrări ştiinţifice, dintre care: 7 articole - 1 articol în Buletinul Academiei de Ştiinţe, Seria Matematica, 1 articol în ROMAI Journal şi 1 articol în revista Studia Universitatis, 4 articole în Analele Universităţii de Stat din Tiraspol, 22 teze ale conferinţelor de matematică naţionale şi internaţionale (vezi [15] – [49]). Volumul total al publicaţiilor este 6.1 coli de autor.

Structura şi volumul tezei. Teza conţine introducere, trei capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografia ce include 177 de titluri, indice al noţiunilor utilizate în lucrare. Volumul total de bază este de 110 pagini.

Cuvinte cheie. Grupoid topologic, unitate multiplă, quasigrup topologic, grupoid medial, grupoid paramedial, izotop omogen, buclă topologică de dreapta, produs cartezian special, n-grupoizi topologici cu diviziuni continui.

CONŢINUTUL TEZEI

În introducere se argumentează actualitatea temei tezei, se prezintă scopul şi obiectivele, problemele cercetării şi se expune succint conţinutul lucrării.

În primul Capitol - Analiza situaţiei în domeniul grupoizilor topologici cu structuri suplimentare - se face o analiză a publicaţiilor în domeniul cercetării, se efectuează o trecere în revistă a unor elemente introductive din literatura de specialitate, sunt prezentate rezultate cunoscute care sunt importante în următoarele capitole.

Cel de al **doilea Capitol - Studiul grupoizilor topologici cu diviziuni şi unităţi multiple -** debutează cu un paragraf în care se introduce conceptul de unitate multiplă. Acest concept este esenţial pentru teza de faţă. Celelalte două paragrafe sunt consacrate noţiunii de izotop omogen şi studierii unor proprietăţi a (n, m)-izotopilor omogeni: Teoremele 2.14, 2.15, 2.19. În continuare se cercetează grupoizii topologici primitivi cu diviziuni: Lema 2.23, Teorema 2.25; (n, m)-isotopii omogeni în AG-grupoizii topologici cu unităţi multiple:

Teorema 2.32, Corolarul 2.33; unele proprietăţi ale buclei topologice paramediale de dreapta: Lema 2.40, Teorema 2.42; conexiunea dintre paramedialitate şi asociativitate: Teoremele 2.51, 2.52; unele proprietăţi ale grupoizilor topologici paramediali: Teoremele 2.53, 2.54, 2.55. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [15], [17], [18], [28]–[32], [34], [37], [38], [39], [41], [45], [46], [49].

Vom scoate în evidenţă următoarele noţiuni.

Grupoidul $(Q, \cdot)$ se numeşte *quasigrup* dacă pentru orice $a, b \in Q$, fiecare din ecuaţiile $a \cdot x = b$ şi $y \cdot a = b$ au soluţii unice în $(Q, \cdot)$.

Elementul $e \in G$ se numeşte *unitate* dacă $ex = xe = x$ pentru fiecare $x \in X$.

Quasigrupul $(G, \cdot)$ se numeşte *medial* dacă este satisfăcută legea $xy \cdot zt = xz \cdot yt$ pentru orice $x, y, z, t \in G$.

Quasigrupul $(G, \cdot)$ se numeşte *paramedial* dacă este satisfăcută legea $xy \cdot zt = ty \cdot zx$ pentru orice $x, y, z, t \in G$.

Quasigrupul $(G, \cdot)$ se numeşte *hexagonal* dacă el este idempotent, medial şi semisimetric, adică, au loc egalităţile $x \cdot x = x$, $xy \cdot zt = xz \cdot yt$, $x \cdot zx = xz \cdot x = z$ pentru orice $x, y, x, t \in G$.

Quasigrupul cu element neutru se numeşte *buclă*.

Dacă quasigrupul medial (paramedial) G conţine elementul e astfel încât $e \cdot x = x (x \cdot e = x)$ pentru orice x din G, atunci e se numeşte element unitate de stânga (dreapta) în G şi G se numeşte *buclă medială (paramedială) de stânga (dreapta)*.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte *grupoid cu diviziuni*, dacă pentru orice elemente $a, b \in G$ ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii, nu necesar unice.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte *grupoid primitiv cu diviziuni*, dacă există două operaţii binare $l : G \times G \to G$, $r : G \times G \to G$, astfel încât $l(a, b) \cdot a = b$, $a \cdot r(a, b) = b$ pentru orice $a, b \in G$.

Astfel, grupoidul primitiv cu diviziuni este algebră universală cu trei operaţii binare.

Dacă în grupoidul topologic $(G, \cdot)$, diviziunile primitive l şi r sunt continui, atunci vom spune că $(G, \cdot)$ este *grupoid topologic primitiv cu diviziuni continui.*

Dacă operaţia multiplicativă din quasigrupul $(G, \cdot)$ este continuă atunci $(G, \cdot)$ se numeşte *quasigrup semitopologic.*

Dacă în quasigrupul semitopologic $(G, \cdot)$, diviziunile l şi r sunt continui, atunci $(G, \cdot)$ se numeşte *quasigrup topologic.*

Considerăm grupoidul $(G, +)$. Pentru fiecare două elemente $a, b \in (G, +)$ avem:

$$1(a, b, +) = (a, b, +)1 = a + b,$$

$$n(a,b,+) = a + (n-1)(a,b,+),$$
$$(a,b,+)n = (a,b,+)(n-1) + b$$

pentru orice $n \geq 2$.

Dacă operaţia binară $(+)$ este fixată pe mulţimea G, atunci vom folosi notaţiile $n(a,b)$ şi $(a,b)n$ în loc de $n(a,b,+)$ şi $(a,b,+)n$.

Definiţia 2.2. *Fie $(G,+)$ groupoid, $n \geq 1$ şi $m \geq 1$. Elementul e al groupoidului $(G,+)$ se numeşte (n,m)-zero în G, dacă:*
1. $e + e = e$;
2. $n(e,x) = x$, pentru orice $x \in G$;
3. $(x,e)m = x$, pentru orice $x \in G$.

Dacă în definiţia 2.2. au loc condiţiile 1 şi 2, vom spune că e se numeşte (n,∞)-zero, dacă se îndeplinesc condiţiile 1 şi 3, vom spune că e se numeşte (∞,m)-zero. Clar că e este (n,m)-zero, dacă e este în acelaşi timp (n,∞) şi (∞,m)-zero, pentru orice $x \in G$.

Fie $(G,\cdot)$ grupoid multiplicativ. Atunci elementul e se numeşte (n,m)-*unitate*. Noţiunea de (n,m)-unitate a fost introdusă de către M.Cioban şi L.Chiriac în [13].

Definiţia 2.6. *Fie $(G,+)$ grupoid topologic. Grupoidul $(G,\cdot)$ se numeşte izotop omogen al grupoidului topologic $(G,+)$ dacă există două automorfisme topologice $\varphi, \psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încât: $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$ pentru orice $x, y \in G$.*

Pentru orice aplicaţie $f : X \to X$ vom nota $f^1(x) = f(x)$ şi $f^{n+1}(x) =$ $= f(f^n(x))$ pentru orice $n \geq 1$.

Definiţia 2.7. *Fie $n, m \leq \infty$. Grupoidul $(G,\cdot)$ se numeşte (n,m)-izotop omogen al grupoidului topologic $(G,+)$ dacă există două automorfisme topologice $\varphi, \psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încât:*
1. $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$ pentru orice $x, y \in G$;
2. $\varphi\psi = \psi\varphi$;
3. Dacă $n < \infty$, atunci $\varphi^n(x) = x$ pentru orice $x \in G$;
4. Dacă $m < \infty$, atunci $\psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$.

Definiţia 2.8. *Fie $(G,+)$ grupoid topologic. Grupoidul $(G,\cdot)$ se numeşte izotop al grupoidului $(G,+)$, dacă există două omeomorfisme topologice φ, ψ : $(G,+) \to (G,+)$ astfel încât $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$, pentru orice $x, y \in G$.*

Conform Definiţiei 2.8 putem spune că izotopul $(G,\cdot)$ este generat de omeomorfismele φ, ψ ale grupoidului topologic $(G,+)$. Vom nota izotopul dat prin $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$.

În continuare vom scoate în evidenţă unele teoreme principale din Capitolul II:

În paragraful 2.3 a fost soluţionată Problema 2, pentru cazul grupoizilor topologici mediali.

Teorema 2.14. *Dacă* $(G,+)$ *este grupoid topologic medial, şi* e *este* (k,p)*-zero element, atunci fiecare* (n,m)*-izotop omogen* $(G,\cdot)$ *al grupoidului topologic* $(G,+)$*, este medial, cu* (mk,np)*-unitate* e *în* $(G,\cdot)$ *şi are loc relaţia* $(x\cdot y)+(u\cdot v)=(x+u)\cdot(y+v)$ *pentru orice* $x,y,u,v\in G$ *şi* $n,m,p,k\in N$.

Teorema 2.19. *Fie* $Q(n,m)$ *clasa quasigrupurilor* (n,m)*-omogene. Atunci:*
1. Pentru fiecare $G\in Q(n,m)$ *există* (n,m)*-unitate* $e\in G$ *cu proprietăţile:*
1.1 $e\cdot e=e$;
1.2 $n(e,x)=x$;
1.3 $(x,e)m=x$;
1.4 $ex\cdot e=e\cdot xe$.
2. Dacă $\varphi(x)=ex$ *şi* $\varphi^n(x)=n(e,x)=x$, *atunci* $\varphi^{-1}(x)=(n-1)(e,x)$;
3. Dacă $\varphi^{-1}(x)=(n-1)(e,x)$ *şi* $\varphi^n(x)=n(e,x)=x$, *atunci*
$(n-1)(e,ex)=x$;
4. Dacă $\psi(x)=xe$ *şi* $\psi^m(x)=(x,e)m=x$, *atunci* $\psi^{-1}(x)=(x,e)(m-1)$;
5. Dacă $\psi^{-1}(x)=(x,e)(m-1)$ *şi* $\psi^m(x)=(x,e)m=x$, *atunci*
$(xe,e)(m-1)=x$.

Fie grupoidul topologic primitiv $(G,+,r,l)$ cu diviziunile r,l şi elementul (k,p)-zero. Fie $(G,\cdot)=g(G,+,\varphi,\psi)$ (n,m)-izotop omogen. Atunci, în baza Teoremei **A** din [14], e este (mk,np)-unitate în grupoidul topologic primitiv $(G,\cdot)$.

Definiţia 2.24. *Subgrupoizii primitivi cu diviziuni* $(H_1,+,r,l)$ *şi* $(H_2,+,r,l)$ *ai grupoidului topologic primitiv cu diviziuni* $(G,+,r,l)$ *se numesc conjugaţi, dacă* $H_2=h(H_1)$ *pentru careva automorfism topologic* $h:G\to G$.

Teorema 2.25. *Fie* H *subgrupoid primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic cu diviziuni* $(G,+,r,l)$ *şi* $e\in H$. *Atunci există astfel de subgrupoid primitiv cu diviziuni* Q *a grupoizilor topologici primitivi cu diviziuni* $(G,+,r,l)$ *şi* $(G,\cdot,r_1,l_1)$ *pentru care:*

1. $e\in Q\subseteq H$;

2. Q *este intersecţie a unui număr finit de subgrupoizi primitivi cu diviziuni conjugaţi cu* H *din* $(G,+,r,l)$;

3. Dacă H *este mulţime închisă, atunci* Q *este de asemenea închisă;*

4. Dacă H *este* G_δ *mulţime, atunci* Q *este de asemenea* G_δ *mulţime;*

5. Dacă H *este mulţime deschisă, atunci* Q *este de asemenea deschisă;*

6. Dacă H *este subgrupoid primitiv normal cu diviziuni, atunci* Q *este* *subgrupoid normal primitiv cu diviziuni al lui* $(G, +, r, l)$ *şi* $(G, \cdot, r_1, l_1)$.

În paragraful 2.5 a fost cercetată Problema 2 pentru cazul AG-grupoizilor topologici şi Problema 4.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte *grupoid Abel-Grassmann* sau *AG-grupoid* dacă este satisfăcută legea inversă la stânga $(a \cdot b) \cdot c = (c \cdot b) \cdot a$ pentru orice $a, b, c \in G$.

Teorema 2.32. *Dacă* $(G, +)$ *este AG-grupoid şi* $e \in G$ *este* $(1, p)$*-zero, atunci fiecare* $(n, 1)$*-izotop omogen* $(G, \cdot)$ *al grupoidului topologic* $(G, +)$ *este AG-grupoid cu* $(1, np)$*-unitate* e *în* $(G, \cdot)$ *şi* $a + bc = b \cdot (a + c)$*, pentru orice* $a, b, c \in G$ *şi* $n, p \in N$.

Corolar 2.33. *Dacă* $(G, +)$ *este AG-grupoid şi* e *este element zero de stânga, atunci orice* $(1, 1)$*-izotop omogen* $(G, \cdot)$ *al grupoidului topologic* $(G, +)$ *este AG-grupoid cu unitate de stânga* e *în* $(G, \cdot)$ *şi are loc egalitatea* $a + bc = b \cdot (a + c)$*, pentru orice* $a, b, c \in G$.

Teorema 2.34. *Dacă* $(G, \cdot)$ *este grupoid multiplicativ,* $e \in G$ *şi au loc următoarele condiţii:*
1. $xe = x$ *pentru orice* $x \in G$*;*
2. $x^2 = x \cdot x = e$ *pentru orice* $x \in G$*;*
3. $xy \cdot z = xz \cdot y$ *pentru orice* $x, y, z \in G$*;*
4. pentru orice $a, b \in G$ *există un punct unic* $y \in G$ *astfel încât* $ya = b$*, atunci* e *este* $(2, 1)$*-unitate în* G.

Teorema 2.35. *Dacă* $(G, \cdot)$ *grupoid multiplicativ,* $e \in G$ *şi au loc următoarele condiţii:*
1. $xe = x$ *pentru orice* $x \in G$*;*
2. $x^2 = x \cdot x = e$ *pentru orice* $x \in G$*;*
3. $x \cdot zt = t \cdot zx$ *pentru orice* $x, t, z \in G$*;*
4. pentru orice $a, b \in G$ *există un punct unic* $y \in G$ *astfel încât* $ya = b$*, atunci* e *este* $(2, 1)$*-unitate în* G.

Teorema 2.37. *Dacă* $(G, \cdot)$ *este grupoid multiplicativ,* $e \in G$ *şi au loc următoarele condiţii:*
1. $xe = x$ *pentru orice* $x \in G$*;*
2. $x^2 = x \cdot x = e$ *pentru orice* $x \in G$*;*
3. $xy \cdot uv = vy \cdot ux$ *pentru orice* $x, y, u, v \in G$*;*
4. dacă $xa = ya$ *atunci* $x = y$*, pentru orice* $x, y, a \in G$ *atunci* G *este quasigrup paramedial cu* $(2, 1)$*-unitate* e.

Menţionăm faptul că Teoremele 2.34, 2.35 şi 2.37 soluţionează Problema 4.

În paragraful 2.6 au fost cercetate unele proprietăţi topologice ale buclei topologice paramediale de dreapta, astfel soluţionând Problema 5.

Lema 2.40. *Fie P submulţime a buclei topologice paramediale de dreapta $(G, \cdot)$ şi $e \in P$. Dacă $P_1 = P \cap eP$, atunci:*
1. $eP_1 = P_1$;
2. Dacă P deschisă, atunci P_1 este deschisă de asemenea;
3. Dacă P este închisă, atunci P_1 este închisă de asemenea;
4. Dacă P este compactă, atunci P_1 este compactă de asemenea.

Propoziţia 2.41. *Fie $(G, \cdot)$ buclă paramedială de dreapta. Atunci aplicaţia $f : G \to G$, prin urmare $f(x) = ex$, este aplicaţie involutivă, adică $f = f^{-1}$.*

Teorema 2.42. *Fie $(G, \cdot)$ buclă topologică paramedială de dreapta cu unitatea $x^2 = e$. Dacă P este submulţime compactă deschisă astfel încât $e \in P$, atunci P conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta $(Q, \cdot)$ în $(G, \cdot)$.*

Teorema 2.43. *Fie $(G, \cdot)$ quasigrup topologic paramedial cu $(2, 1)$-unitate e şi $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$. Dacă P este o submulţime compactă deschisă din $(G, \cdot)$ astfel încât $e \in P$, atunci P conţine un subquasigrup paramedial compact deschis $(Q, \cdot)$ cu $(2, 1)$-unitate e.*

În paragraful 2.7 a fost cercetată Problema 6.

Teorema 2.51. *Fie $(G, \cdot)$ grupoid topologic paramedial şi e, e_1 şi e_2 sunt elemente în G pentru care:*

1. $ee_1 = e_1$ şi $e_2e = e_2$;

2. Aplicaţiile $x \to e_1x$ şi $x \to xe_2$ sunt omeomorfisme a lui G peste el însuşi;

3. Aplicaţia $x \to xe$ este surjectivă.

Dacă există în G operaţia binară $\{\circ\}$ astfel încât $(e_1x) \circ (ye_2) = yx$, atunci $(G, \circ)$ este semigrup topologic comutativ cu e_1e_2 unitate.

Teorema 2.52. *Fie $(G, \cdot)$ grupoid topologic paramedial care satisface condiţiilor următoare:*

1. Conţine elementul idempotent e;

2. Aplicaţiile $x \to xe$ şi $x \to ex$ sunt omeomorfisme a lui G peste el însuşi;

3. În G există operaţia binară $\{\circ\}$ astfel încât $(ex) \circ (ye) = yx$.

Atunci $(G, \circ)$ este semigrup topologic comutativ ce conţine unitatea e. Mai mult ca atât, aplicaţiile $x \to xe$ şi $x \to ex$ sunt antiomomorfisme în $(G, \circ)$ şi $xe \cdot e = e \cdot ex$.

Teorema 2.55. *Dacă $(G, +)$ este grupoid topologic paramedial, şi $e \in G$ este (k, p)-zero element, atunci fiecare (n, m)-izotop omogen $(G, \cdot)$ al grupoidului topologic $(G, +)$, este paramedial, cu e (mk, np)-unitate în $(G, \cdot)$ pentru orice $n, m, p, k \in N$.*

În al **treilea Capitol - Metode de construcţii a unor structuri al-**

gebrice şi problema omomorfismelor continui deschise pentru cazul n-grupoizilor topologici cu diviziuni - sunt reflectate rezultatele publicate în lucrările: [16], [19], [20], [21], [24], [25], [27], [42], [43], [44], [47], [48]. Acestea înglobează rezultatele despre omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui: Teoremele 3.5, 3.7; produsul direct de grupoizi cu unităţi multiple: Teoremele 3.9, 3.12; metodele de obţinere a quasigrupurilor neasociative mediale şi paramediale: Teoremele 3.14, 3.16, 3.18, 3.21; quasigrupuri paramediale cu măsura Haar: Teoremele 3.25, 3.27, 3.28; conexiunea dintre distributivitate şi paramedialitate: Teoremele 3.36, 3.37.

În paragraful 3.1 s-au cercetat condiţiile pentru ca omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise, astfel soluţionând Problema 7.

Definiţia 3.1. *Mulţimea nevidă A se numeşte n-grupoid relativ de operaţia n-ară notată cu ω, dacă pentru orice elemente ordonate $a_1, ..., a_n \in A$ este definit un unic element $\omega(a_1, ..., a_n) \in A$.*

Definiţia 3.2. *n-gropoidul A se numeşte n-grupoid cu diviziuni ori nD-grupoid, dacă ecuaţia $\omega(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) = b$ are soluţii nu necesar unice pentru orice $a_1, ..., a_n, b \in A$ şi $1 \leq i \leq n$.*
Dacă în n-grupoidul (A, ω) cu topologie, operaţia n-ară ω este continuă, atunci A se numeşte n-grupoid topologic.

Definiţia 3.3. *Diviziunea în nD-grupoidul G este i-continuă, dacă pentru orice $a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n, b \in G$ pentru care $\omega(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) = b$ şi pentru orice vecinătate $O_i \ni a_i$ există vecinătăţile $O_1 \ni a_1, O_2 \ni a_2, ..., O_n \ni a_n$, $O_b \ni b$, astfel încât pentru orice $a_1^{'} \in O_1, a_2^{'} \in O_2, ..., a_n^{'} \in O_n, b^{'} \in O_b$ există $a_i^{'} \in O_i$ pentru care $\omega(a_1^{'}, ..., a_i^{'}, ..., a_n^{'}) = b^{'}$.*

Definiţia 3.4. *Dacă în grupoidul topologic G diviziunea este i-continuă pentru orice $i = \overline{1, n}$, atunci vom spune că G este n-grupoid cu diviziuni continui.*

Aplicaţia $h : X \to Y$ a spaţiului topologic X pe spaţiului topologic Y se numeşte *aproape deschisă* dacă $Inth(U) \neq \emptyset$ pentru orice submulţime deschisă şi nevidă U din X.

Aplicaţia $f : A \to B$ a mulţimii A în mulţimea B se numeşte *aplicaţie cu preimaginea finită* dacă mulţimea $f^{-1}(y)$ este finită pentru orice $y \in B$.

Teorema 3.5. *Fie G şi G_1 n-grupoizi topologici cu diviziuni continui, atunci orice omomorfism continuu aproape deschis $h : G \to G_1$ este deschis.*

Teorema 3.7. *Fie G şi G_1 n-grupoizi topologici cu diviziuni continui. Fie G spaţiu local compact şi Lindelöf, G_1 este spaţiu Baire şi pentru orice $a_1, ..., a_{i-1}$, $a_{i+1}, ..., b \in G_1$ mulţimea soluţiilor $\omega(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) = b$ este finită.*

Atunci orice omomorfism continuu $g : G \to G_1$ este deschis.

În paragraful 3.2 a fost cercetată Problema 8.

Definiţia 3.8. *Produsul direct $Q_1 \times Q_2 \times ... \times Q_n$ al grupoizilor $Q_1, Q_2, ...,$ Q_n în raport cu operaţiile $\circ_1, \circ_2, ..., \circ_n$, reprezintă mulţimea ordonată din n-elemente $(q_1, q_2, ..., q_n)$ unde $q_i \in Q_i$, împreună cu operaţia definită astfel:*

$$(q_1, q_2, ..., q_n) \star (h_1, h_2, ..., h_n) = (q_1 \circ_1 h_1, q_2 \circ_2 h_2, ..., q_n \circ_n h_n).$$

Vom nota cel mai mic multiplu comun dintre a şi b astfel: $c(a, b)$.

Teorema 3.9. *Fie $(Q_1, \cdot)$ un grupoid cu (n, m)-unitate şi $(Q_2, \circ)$ un grupoid cu (k, l)-unitate. Atunci produsul direct $G = Q_1 \times Q_2$ este un grupoid cu $(c(n, k), c(m, l))$-unitate. Mai mult ca atât:*
1. Dacă $(Q_1, \cdot)$ şi $(Q_2, \circ)$ sunt grupoizi mediali, atunci G este de asemenea medial;
2. Dacă $(Q_1, \cdot)$ şi $(Q_2, \circ)$ sunt grupoizi paramediali, atunci G este de asemenea paramedial;
3. Dacă $(Q_1, \cdot)$ şi $(Q_2, \circ)$ sunt grupoizi bicomutativi, atunci G este de asemenea bicomutativ.

Teorema 3.12. *Fie $(Q_1, \cdot)$ grupoid cu n unităţi multiple $(k_1, l_1), (k_2, l_2)...,$ $..., (k_n, l_n)$ şi $(Q, \circ)$ grupoid cu t unităţi multiple $(m_1, r_1), (m_2, r_2), ..., (m_t, r_t)$. Atunci produsul direct al acestor doi grupoizi $G = Q_1 \times Q_2$ posedă $n \times t$ unităţi multiple de tipul:*

1. tip de unităţi	*2. tip de unităţi*	*... n. tip de unităţi*
$1.(c(k_1, m_1), c(l_1, r_1))$	$1.(c(k_2, m_1), c(l_2, r_1))$	$... 1.(c(k_n, m_1), c(l_n, r_1))$
$2.(c(k_1, m_2), c(l_1, r_2))$	$2.(c(k_2, m_2), c(l_2, r_2))$	$... 2.(c(k_n, m_2), c(l_n, r_2))$
....	....	....
$t.(c(k_1, m_t), c(l_1, r_t))$	$t.(c(k_2, m_t), c(l_2, r_t))$	$... t.(c(k_n, m_t), c(l_n, r_t))$

În paragraful 3.3 am cercetat punctul 1 din Problema 9.

Teorema 3.14. *Fie $(G, +)$ grup comutativ. Mulţimea $G \times G$ cu operaţia*

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_2 + y_2 - x_1, x_1 + y_1 - y_2)$$

este quasigrup neasociativ, paramedial şi nemedial.

Exemplul 3.15 reflectă modul de obţinere a unui quasigrup neasociativ, paramedial şi nemedial, dintr-un grup comutativ, conform operaţiei din Teorema 3.14.

Teorema 3.16. *Fie $(G, +)$ grup comutativ. Mulţimea $G \times G$ cu operaţia*

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_2 - y_2 + x_1, -x_1 - y_1 + y_2)$$

este quasigrup neasociativ, paramedial şi nemedial.

Exemplul 3.17 reflectă modul de obţinere a unui quasigrup neasociativ, paramedial şi nemedial, dintr-un grup comutativ, conform operaţiei din Teorema 3.16.

În paragraful 3.4 am soluţionat punctul doi şi trei din Problema 9.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte *AD-grupoid* dacă este satisfăcută legea $a \cdot (bc) = c \cdot (ba)$ pentru orice $a, b, c \in G$.

Teorema 3.18. *Fie $(G, +)$ grup comutativ. Mulţimea $G \times G$ cu operaţia*

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1)$$

este quasigrup neasociativ, neparamedial, medial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

În paragraful 3.5 este cercetată existenţa măsurii Haar pe quasigrupurile paramediale.

Notăm cu $B(X)$ familia tuturor submulţimilor Borel din spaţiul X. Valoarea reală, nenegativă a funcţiei μ definită pe familia $B(X)$ a submulţimilor din spaţiul X se numeşte măsură Radon pe X dacă posedă următoarele proprietăţi:

- $\mu(H) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq H, F$ este submulţime compactă din $H\}$ pentru orice $H \in B(X)$;

- pentru orice punct $x \in X$ există o submulţime deschisă V_x astfel încât $x \in V_x$ şi $\mu(V_x) < \infty$.

Definiţia 3.23. *Fie $(A, \cdot)$ quasigrup topologic cu diviziunile (r, l). Măsura Radon μ pe A se numeşte:*

- **măsură Haar invariantă de stânga**, *dacă $\mu(U) > 0$ şi $\mu(xH) = \mu(H)$ pentru orice mulţime nevidă deschisă $U \subseteq A$, punct $x \in A$ şi mulţime Borel $H \in B(A)$;*

- **măsură Haar invariantă de dreapta**, *dacă $\mu(U) > 0$ şi $\mu(Hx) = \mu(H)$ pentru orice mulţime nevidă deschisă $U \subseteq A$, punct $x \in A$ şi mulţime Borel $H \in B(A)$;*

- **măsură Haar invariantă**, *dacă $\mu(U) > 0$ şi*

$$\mu(xH) = \mu(Hx) = \mu(l(x, H)) = \mu(r(H, x)) = \mu(H)$$

pentru orice mulţime nevidă deschisă $U \subseteq A$, punct $x \in A$ şi mulţime Borel $H \in B(A)$.

Definiţia 3.24. *Vom spune că pe quasigrupul topologic $(A, \cdot)$* ***există o unică măsură Haar invariantă de stânga (de dreapta)****, dacă pentru orice două* *măsuri Haar invariante de stânga (de dreapta) μ_1, μ_2 pe A există o constantă $c > 0$ astfel încât $\mu_2(H) = c \cdot \mu_1(H)$ pentru orice mulţime Borel $H \in B(A)$.*

Teorema 3.25. *Fie $(G, \cdot)$ quasigrup paramedial local compact. Atunci:*

1. Există grupul topologic comutativ $(G, +)$ şi $\varphi, \psi : G \to G$ sunt automorfisme în $(G, +), b \in G, \varphi^2 = \psi^2$ şi $(G, +, \varphi, \psi, 0, b)$;

2. Dacă pe grupul topologic Abelian $(G, +)$ considerăm măsura Haar invariantă μ_G, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura Haar invariantă de stânga (de dreapta) este unică;

3. Dacă μ este măsură Haar invariantă de stânga(de dreapta) pe $(G, \cdot)$, atunci μ este măsură Haar invariantă de stânga(de dreapta) pe $(G, +)$ de asemenea;

4. Pe $(G, \cdot)$ există o măsură Haar invariantă de dreapta dacă şi numai dacă $\mu_G(\varphi(H)) = \mu_G(H)$ pentru orice $H \in B(A)$;

5. Dacă $n < +\infty$, şi pe G există o $(n, +\infty)$-unitate, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura μ_G este unica măsură Haar invariantă de dreapta;

6. Dacă $m < +\infty$, şi pe G există o $(+\infty, m)$-unitate, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura μ_G este unica măsură Haar invariantă de stânga;

7. Dacă $n, m < +\infty$, şi pe G există o (n, m)-unitate, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura μ_G este unica măsură Haar invariantă.

Teorema 3.27 *Fie $(G, +)$ quasigrup topologic paramedial şi $(G, \cdot)$ (n, m)-izotop omogen al lui $(G, +)$. Atunci:*

1. Pe $(G, +)$ există măsura Haar invariantă de stânga (dreapta) dacă şi numai dacă pe $(G, \cdot)$ există măsura Haar invariantă de stânga (dreapta);

2. Dacă pe $(G, +)$ măsura Haar invariantă de stânga (dreapta) este unică, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura Haar invariantă de stânga (dreapta) este de asemenea unică.

Teorema 3.28 *Quasigrupul paramedial compact G conţine o unică măsură Haar invariantă μ pentru care $\mu(G) = 1$.*

Teoremele 3.25, 3.27 şi 3.28 au fost demonstrate în [14] pentru quasigrupuri topologice mediale.

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

Cercetările în domeniul algebrei topologice au fost iniţiate în a doua jumătate a secolului XIX-lea. Algebra topologică, ca ramură a matematicii moderne, se află la frontiera dintre topologia generală şi algebra abstractă. Metodele elaborate şi rezultatele obţinute în acest domeniu de mare interes ştiinţific sunt cu succes implementate nu numai în matematica teoretică dar şi în matematica aplicată şi sisteme informaţionale.

Menţionăm că problema principală a algebrei topologice constă în *studierea concordanţei dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale* E*-algebrelor topologice* G *din clasa* $V(E, i, J)$. Această problemă are un aspect larg şi poate fi soluţionată efectiv numai pentru anumite clase de algebre topologice, care se reprezintă prin fixarea operaţiilor algebrice şi identităţilor algebrice.

În acest aspect cecetările fundamentale au fost efectuate pentru grupuri topologice, inele şi module topologice. Dar această problemă este insuficient cercetată pentru grupoizi topologici. Clasa de grupoizi topologici conţine şi clasa de grupuri topologice şi clasa de quasigrupuri topologice.

Însă cercetările diferitor clase de grupoizi topologici cu diviziuni au fost modeste, necătînd la rolul lor în multe cercetări aplicative. Rezultatele obţinute în lucrarea respectivă sunt nemijlocit legate de soluţionarea Problemelor 1-9 formulate mai sus.

Rezultatele principale ale lucrării sunt noi. Au fost rezolvate probleme concrete, ori unele aspecte ale problemelor formulate de M.M.Cioban şi L.L.Chiriac. Cercetările realizate în această lucrare se referă la obiectivele propuse pentru investigaţie şi permit să formulăm următoarele concluzii:

1. A fost formulată problema ştiinţifică importantă soluţionată: *Elaborarea unor metode de cercetare a grupoizilor topologici cu diviziuni, ceea ce a condus la determinarea corelaţiilor dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoizilor cu unităţi multiple şi diviziuni continui.*

În prezenta lucrare autorul şi-a adus contribuţia personală la cercetarea grupoizilor topologici cu diviziuni şi determinarea influenţei structurilor de grupoid asupra proprietăţilor topologice ale grupoizilor topologici şi aplicaţiile lor.

2. Au fost elaborate concepte şi metode eficiente de cercetare a diverselor clase de grupoizi topologici:
- metoda n-grupoizilor topologici cu diviziuni şi a omomorfismelor continui;
- metoda de cercetare a (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici;
- metoda de cercetare a subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni;
- metoda de cercetare a buclelor topologice paramediale de dreapta;
- metoda de construcţie a quasigrupurilor mediale, neasociative şi neparamediale;
- metoda de construcţie a quasigrupurilor paramediale, neasociative şi mediale.

3. Aplicând metoda n-grupoizilor topologici cu diviziuni şi a omomorfismelor continui s-a reuşit de elaborat o construcţie generală care permite stabilirea condiţiilor pentru ca omomorfismele continui a n-grupoizilor topo-

logici cu diviziuni continuii să fie deschise. Afirmaţiile obţinute generalizează unele din rezultatele obţinute de L.Chiriac, care a determinat condiţiile pentru care omomorfismele grupoizilor topologici cu diviziune continuă sunt deschise.

Problema omomorfismelor deschise a fost soluţionată de L.Pontryagin pentru o clasă destul de largă de grupuri topologice. M.Cioban a determinat condiţiile pentru ca omomorfismele algebrelor topologice cu signatura continuă să fie deschise.

4. A fost dezvoltat conceptul de (n, m)-unitate introdus de M.Cioban şi L.Chiriac. În cercetările realizate sunt studiaţi (n, m)-izotopii omogeni ai grupoidului topologic care posedă anumite proprietăţi algebrice. Sunt determinate condiţiile pentru care proprietăţile algebrice respective se păstrează la grupoizii (n, m)-omogeni. Au fost stabilite condiţiile pentru care grupoidul multiplicativ $(G, \circ)$ este quasigrup paramedial cu $(2, 1)$-unitate. Metodologia propusă pentru cercetare poate fi utilizată şi la studierea n-grupoizilor cu unităţi multiple.

5. A fost elaborată o metodă de cercetare a subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni. Cercetările realizate au condus la determinarea condiţiilor pentru care există un astfel de subgrupoid primitiv cu diviziuni care păstrează un şir de proprietăţi topologice ale grupoidului topologic primitiv cu diviziuni.

6. A fost elaborată o metodă care permite soluţionarea problemei pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta. Problema submulţimii compacte deschise dintr-un grup topologic care să conţină un subgrup compact deschis a fost rezolvată de L.Pontryagin.

7. A fost elaborată o metodă generală de construcţie a quasigrupurilor mediale, neasociative şi neparamediale şi a quasigrupurilor paramediale, neasociative şi nemediale. În acest scop s-au utilizat grupurile comutative şi produse carteziene speciale. Metoda respectivă permite să se obţină din orice grup comutativ un quasigrup neasociativ medial ori paramedial.

Luând în consideraţie rolul grupoizilor topologici cu unităţi multiple în algebra abstractă, topologie, algebra topologică, teoria automatelor putem considera că teoria şi conceptele elaborate pot fi aplicate eficient în cercetările din domeniile menţionate, cît şi în alte direcţii de cercetare.

Se recomandă ca rezultatele obţinute, construcţiile şi metodele elaborate sa fie aplicate:
- la examinarea proprietăţilor topologice ale diverselor clase de grupoizi cu unităţi multiple;
- la investigarea structurilor algebrice şi topologice ale diferitor clase de algebre topologice;

- la cercetarea proprietăţilor topologice şi algebrice ale n-grupoizilor topologici cu unităţi multiple;
- la studierea anumitor clase de automate;
- la elaborarea cursurilor opţionale pentru masteranzi şi doctoranzi.

Obiective de perspectivă. În perspectivă:
- se vor studia mai profund conceptul de unitate multiplă pentru diverse clase de grupoizi topologici;
- se vor studia proprietăţile topologice ale spaţiilor care admit anumite structuri algebrice;
- se va studia rolul grupoizilor topologici în diverse sisteme informaţionale;
- se va elabora un curs opţional pentru masteranzi, doctoranzi în domeniul grupoizilor topologici cu unităţi multiple;
- se va continua studierea grupoizilor topologici cu diviziuni continui în vederea determinării concordanţei dintre axiomele de separare;
- se vor determina condiţiile pentru ca un grupoid compact să fie grupoid compact diadic;
- se vor determina condiţiile pentru ca un grupoid topologic cu diviziuni ce satisface primei axiome de numerabilitate să fie metrizabil.

Bibliografie

1. Pontryagin L.S. Neprerivnie gruppi. Moskow, Nauka, 1984.

2. Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the theory of topological rings and modules. Marcel Dekker. Inc. New York, Basel, Hong Kong, 1996, 502 p.

3. Bruck R.H. A survey of binary systems. Spinger-Verlag,Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1958.

4. Pflugfelder H.O. Quasigroups and loops. Introduction, Heldermann, Berlin, 1990.

5. Belousov V.D. Foundations of the theory of quasigroups and loops. Moscow, Nauka, 1967, p.223.

6. Belousov V.D. On the n-ary quasigroup. Chisinau, Stiinta, 1972, 227 p.(in Russian)

7. Jezek J., Kepka T. Medial groupoids. Rozpravy Ceskoslovenske Academie VED, vol. 93, sesit 2, Academia, Praha, 1983.

8. Basarab A.S. Loops with weak inverse property. Teză de doctor în ştiinţe fizico-matematice, Chişinău, 1968.

9. Basarab A.S. and Kiriak L.L. A class of G-loops. In: Mat. Issled. 71, 1983, p.3-6, (in Russian).

10. Hofmann K.H., Martin J.R., Topological left-loops. Topological proceedings, 2012, vol.39, p.185-194.

11. Şcerbacov V. On linear and inverse quasigroups and their applications in code theory. Thesis for a Habilitat Doctors Degree, 2007, 246 p.

12. Şcerbacov V.A., Puşkaşu D.I. On the structure of fnite paramedial quasigroups. In: Comment. Math. Univ. Carolin. 51, 2(2010) p. 357-370.

13. Choban M.M., Kiriyak L.L. The Medial Topological Quasigroups with Multiple Identities. In: The 4^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 1995, Oradea, p.11

14. Choban M.M., Kiriyak L.L. The topological quasigroups with multiple identies. In: Quasigroups and Related Systems, 9, 2002, p.19-31.

LISTA PUBLICAŢIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI

15. Bobeica N., Chiriac L. On topological AG-groupoids and paramedial quasigroups wiht multiple identities. In: Romai Journal, vol.6, nr.1, 2010, p.5-14.

16. Bobeica N. Some properties on topological paramedial groupoids with multiple identities. In: Revista Studia Universitatis, seria Ştiinţe Exacte şi Economice, USM, nr. 2 (52), Chişinău, 2012, ISSN 1857-2073, p.35-41.

17. Chiriac L., CHIRIAC L. Jr., Bobeica N. On topological groupoids and multiple identities. In: Buletinul Academiei de Ştiinţe a RM, seria MATEMATICA, nr.1(59), 2009, ISSN 1024-7696, p.67-78.

18. Chiriac L.L., Bobeica N. Some properties of the homogeneous isotopies. In: Acta et Commentationes, Universitatea de Stat Tiraspol, Chişinău, 2006, vol. III, p.107-112.

19. Bobeica N. ş.a. Identificarea quasigrupurilor neizomorfe de ordin finit. In: Analele Universităţii de Stat din Tiraspol 2004-2005, Chişinău, 2006, pag. 102-106.

20. Bobeica N. ş.a. Identificarea structurilor algebrice neizomorfe. In: Acta et Commentationes, Ştiinţe fizice şi matematice, informatică, didactica fizicii, matematicii şi informaticii, vol.3, Chişinău, 2003, p.114-117.

21. Chiriac L., Pruteanu M., Bobeica N. Algoritmi şi structuri algebrice. In: Acta et Commentationes, Ştiinţe fizice şi matematice, informatică, didactica fizicii, matematicii şi informaticii, vol.3, Chişinău, 2003, p.111-113.

22. Bobeica N., Chiriac L. Topological quasigroups which are direct products of Abelian topological groups. In: The 22^{th} Conference on applied and industrial mathematics, CAIM, 2014, Bacău, România, september 18-21, p.45.

23. Bobeica N., Chiriac L. Distributive topological groupoids and paramedialitivity. In: The 21^{th} Conference on applied and industrial mathematics, CAIM, 2013, Bucureşti, 19-22 september, p.75-76.

24. Bobeica N., Chiriac L. On the structure of grid. In: The 21^{th} Conference on applied and industrial mathematics, CAIM, 2013, Bucureşti, 19-22 september, p.75.

25. Bobeica N. On invariant Haar measure on topological quasigroups. In: The 19^{th} edition of the annual conference on applied and industrial mathematics, CAIM, 2011, Iaşi, september 22-25, p.19.

26. Chiriac L., Bobeica N. On homomorphism of topological groupoids with a continuous division. In: The 19^{th} edition of the annual conference on applied and industrial mathematics, CAIM, Iaşi 2011, september 22-25, p.20.

27. Chiriac L., Bobeica N. Direct products of groupoids with multiple identities. In: The 18^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, Iaşi 2010, România, October 14-17, p.26.

28. Bobeica N., Chiriac L. On topological AG-groupoids and paramedial quasigroups with multiple identities. In: The 18^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2010, Iaşi, România, october 14-17, p.15.

29. Chiriac L., Bobeica N. Topological paramedial groupoids with multiple identities. In: The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2009, Constanţa, september 17-20, p.28-29.

30. Bobeica N. On paramedial loops. In: The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2009, Constanţa, september 17-20, p.20.

31. Chiriac L.L., Bobeica N. On topological groupoids and (n,m)- homogeneous isotopies. In: The 16^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2008 Oradea, october 9-11, 2008, p.13.

32. Chiriac L.L., Bobeica N. Paramedial topological groupoids. In: 6^{th} Congress of Romanian Mathematicians june 28-july 4, Bucureşti, Romania, 2007, p.25-26.

33. Chiriac L., Bobeica N. On a Method of Constructing Medial Left Loops. In: Mahematics and information technologies: research and education, MITRE 2015, Chişinău, 2-5 iulie, p.22.

34. Bobeica N. Some properties of non-isomorphic medial and paramedial finite quasigroups. In: The 20^{th} conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu, CAIM, 2012, Chişinău, august 22-25, p.28-30.

35. Chiriac L., Bobeica N., ZNACENI A. On the non-isomorphic quasigroups. In: The 20^{th} conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu, CAIM, Chişinău, 2012, august 22-25, p.63-65.

36. Chiriac L., Bobeica N. On homorphisms of topological n-groupoids with continuous division. In: Mahematics and information technologies: research and education. Dedicated to the 65^{th} anniversary of the Moldova State University, MITRE, Chişinău, 2011, august 22-25, p.35-36.

37. Bobeica N. On Haar measures on paramedial quasigroups. In: Mathematics and information technologies: research and education. Dedicated to the 65^{th} anniversary of the Moldova State University, MITRE, 2011, Chişinău, august 22-25, p.12-13.

38. Bobeica N. On paramedical loops. In: Mathematics and information technologies: research and education, MITRE, 2009, Chişinău, october 8-9, p.4.

39. Bobeica N. Topological hexagonal groupoids with multiple identities. In: Mathematics and information technologies: research and education. MITRE, 2009, Chişinău, october 8-9, p.5-6.

40. Chiriac L.L., Bobeica N. Some properties of the bicommutative topological groupoids. In: Mathematics and information technologies: Chişianău, MITRE, 2008, october 1-4 , p.5-6.

41. Chiriac L., Bobeica N. Some properties of the homogeneous isotopies. In: The XIV^{th} conference on applied and industrial mathematics, Satellite Conference of ICM, Chişinău, 2006, august 17-19, p.116.

42. Bobeica N. ş.a. On the non-isomorphic quasigroups. In: The XIV^{th} conference on applied and industrial mathematics, Satellite Conference of ICM, Chişinău, 2006, august 17-19, p.114-115.

43. Chiriac L., Bobeica N., Pavel D. Study on properties of non-isomorphic finite quasigroups using the computer. In: Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, Chisinau, 2014, august 19-23, p.44-47.

44. Chiriac L., Bobeica N. On a Method of Constructing Medial and Paramedial Quasigroups. In: Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, Chisinau, 2014, august 19-23, p.18-21.

45. Bobeica N. The topological paramedial quasigroups with multiple identities. In: Actual problems of mathematics and informatics. Scientific conference, UST, Chişinău, 2010, september 24-25, p.29-31.

46. Bobeica N., Chiriac L. On groupoids with multiple identities. In: Actual problems of mathematics and informatics. Scientific conference, UST, Chişinău, 2010, september 24-25, p.31-35.

47. Chiriac L., Bobeica N. Direct products of groupoids with multiple identities. In: Actual problems of mathematics and informatics. Scientific conference, UST, Chişinău, 2010, september 24-25, p.74-77.

48. Bobeica N. ş.a. Identification of non-isomorphic quasigroups. In: Conferinţa a 2-a a Societăţii Matematice din RM, consacrată aniversării a 40-cea de la fondarea Institutului de Matematică şi Informatică al AŞM, Chişinău, 2004, august 17-19, p.109-111.

49. Chiriac L., Bobeica N. Despre unele proprietăţi ale grupoizilor topologici paramediali. In: Conferinţa ştiinţifică Republicană "Matematica-probleme actuale cu aplicaţii", Chişinău 2009, 8 aprilie.

ADNOTARE

la teza de doctor **"Cercetarea grupoizilor topologici cu unităţi multiple"**, prezentată de către Natalia Josu pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 111.04-Geometrie şi Topologie. Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Tiraspol, Chişinău, anul 2015.

Structura tezei: teza este scrisă în limba română şi constă din introducere, 3 capitole, concluzii generale şi recomadări, glosar, 177 titluri bibliografice, 110 pagini text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 35 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte cheie: grupoid topologic, unitate multiplă, quasigrup topologic, grupoid medial, grupoid paramedial, izotop omogen, buclă topologică de dreapta, produs cartezian special, n-grupoizi topologici cu diviziuni continui.

Domeniul de studiu al tezei: influenţa structurilor algebrice asupra prop rietăţilor topologice ale grupoizilor topologici cu unităţi multiple şi diviziuni continui.

Scopul şi obiectivele lucrării rezidă în: desăvârşirea metodelor de studiere a grupoizilor topologici ce posedă anumite proprietăţi algebrice; elaborarea metodelor de cercetare a grupoizilor topologici cu unităţi multiple; determinarea condiţiilor pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziune continuă sunt deschise; soluţionarea problemei pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta; determinarea condiţiilor pentru care (n, m)-izotopul omogen al unui grupoid topologic cu proprietatea algebrică P posedă aceeaşi proprietate; identificarea condiţiilor pentru care pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară astfel încât noua structură algebrică obţinută este quasigrup neasociativ cu proprietăţi algebrice speciale.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: rezultatele principale sunt noi. Evidenţiem următoarele: au fost determinate condiţiile pentru ca omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise; au fost analizate proprietăţile algebrice ale (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici; au fost determinate unele proprietăţi ale subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni; au fost determinate condiţiile pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta; au fost determinate condiţiile pentru care pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară astfel încât noua structură algebrică obţinută este quasigrup neasociativ cu proprietăţi algebrice speciale.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în elaborarea unor metode de cercetare a grupoizilor topologici cu diviziuni, ceea ce a condus la determinarea corelaţiilor dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoizilor cu unităţi multiple şi diviziuni continui.

Semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării: au fost elaborate concepţii, metode şi construcţii noi care au contribuit la rezolvarea obiectivelor propuse.

Metodologia aplicată, concepţiile şi metodele elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori a unor aspecte ale lor formulate de M.M.Cioban şi L.L.Chiriac. Aparatul matematic aplicat a condus la rezolvarea unor probleme ce au conexiune cu algebra topologică.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice: rezultatele lucrării pot fi implementate în teoria grupoizilor şi quasigrupurilor topologice, teoria automatelor, la elaborarea unor cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

АННОТАЦИЯ

диссертации "**Исследования топологических группоиды с многократными единицами**" представлено Наталием Жосу на соискание степени доктора математических наук, специальность 111.04 - Геометрия и Топология. Диссертация была разработана в Тираспольском Государственном Университете, в Кишиневе, в 2015 году.

Структура работы: диссертация написана на румынском языке и состоит из введения, 3 глав, общих выводов и рекомендации, списка цитированных источников из 177 названий, 110 страниц основного текста. По теме диссертации опубликованы 35 научных работ.

Ключевые слова: топологический группоид, многократная единица, топологические квазигруппы, медиальный и парамедиальный группоид, однородный изотоп, правая топологическая лупа, специальное декартовое произведение, n-топологические группоиды с непрерывной делением.

Область исследования: влияния алгебраических структур на топологических свойствах топологических группоидов с многократными единицами и непрерывным делением.

Цели и задачи исследования: совершенствование методами изучения топологических групоидов обладающих определенными алгебраическими свойствами; разработка методов исследования топологические группоиды с многократными единицами; определения условий, при которых непрерывный гомоморфизм n – топологических группоидов с делением открыты; решения задач при которой открытое правое парамедиальное компактное подмножество содержит открытое правое парамедиальное компактное подлупа; определения условий, при которых (n,m)-однородной изотоп топологического группоида с алгебраической свойством P обладает таким же свойством; определение условиях для котрых над множеством $G\times G$ может быть определена бинарная операция, так что полученная новая алгебраическая структура является неассоциативная квазигруппа со специальными алгебраическими свойствами .

Научная новизна и оригинальность: основные результаты работы являются новыми. Выделяем следующие: были определены условия открытости для непрерывного гомоморфизмах топологических n-группоидов с непрерывным делением; были изученны алгебраические свойства (n,m)-однородных изотопов топологического группоида; были определены некоторые свойства примитивного подгруппоида с делением топологического группоида с делением; были определены условия при которых открытое компактное подмножество правой парамедиальной топологической лупой содержит открытое правое парамедиальное компактное подлупой; были определены условия, при которых на множестве $G\times G$ может быть определена бинарная операция, так что новая полученная алгебраическая структура является неассоциативная квазигруппа со специальными алгебраическими свойствами.

Важная научная решенная проблема: заключается в разработке методов исследования топологических группоидов с делением, которые привели к определению корреляции между алгебраическими и топологическими свойствами группоидов с многократными единицами и непрерывным делением.

Теоретическая и прикладная значимость: разработаны новые концепций, методы и конструкциями которые способствуют достижению целей и задач исследования.

Применяемой методологии, концепций и методов, разработанных в работе позволили найти решение конкретных проблем или некоторые аспекты проблем, сформулированных М.МЧобаном и Л.Л.Кирияк. Математические средства, разработанные и применяемые привели к решению проблем из различных областях современной математики, связанных с топологической алгеброй.

Внедрение научных результатов: результаты этой работы могут быть использованы в теории топологических группоидов квазигрупп, теории автоматов и в разработке факультативных курсов.

SUMMARY

of the thesis **"Research of topological groupoids with multiple identities"** presented by Natalia Josu for the competition of Ph. Doctor degree in Mathematical Sciences, speciality 111.04-Geometry and Topology. The thesis was elaborated in Chisinau, Tiraspol State University, in 2015.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and contains introduction, 3 chapter, conclusions, glossary, 177 references, 110 pages of basic text. The main result of the thesis was published in 35 scientific works.

Key words: topological groupoid, multiple identities, topological quasigroup, medial groupoid, paramedial groupoid, homogenous isotope, right topological loop, special cartesian product, n-topological groupoid with continuous divisions.

Field of study of the thesis: the influence of the algebraic structures on the topological properties of the topological groupoids with multiple identities and continuous divisions .

Thesis aim and objectives: mastering the studying methods of the topological groupoids with some algebraic properties; elaborating research methods regarding topological groupoids with multiple identities; establishing the conditions for the continuous homomorphisms of the n-topological groupoids with continuous divisions to be open; solving the problem for which one open compact subset from right paramedial topological loop contain one open compact paramedial right subloop; establishing the conditions for which (n, m)-homogenous isotope of topological groupoids with algebraic property P has the same property; determining the conditions for which on the set $G \times G$ can be defining one binary operation such that the new algebraic structure becomes non associative quasigroup with special algebraic properties.

Scientific innovation and originality: there have been determined the conditions for the continuous homomorphisms of the n-topological groupoids with continous divisions to be open; there have been analyzed the algebraic properties of (n, m)-homogenous isotope of topological groupoids; there have been established some properties of primitive subgroupoid with divisions of topological primitive groupoid with divisions; there have been determined the conditions for which one open compact subset from right paramedial topological loop contain one open compact paramedial right subloop; there have been established for which on the set $G \times G$ can be defining one binary operation such that the new algebraic structure becomes non associative quasigroup with special algebraic properties.

The important scientific problem solved: that was solved consists in the development of several research methods for topological groupoids with divisions, which led to the determination of correlations between the properties of algebraic and topological groupoids with multiple identities and continuos divisions.

The theoretical significance and applicative value of the thesis: there have been elaborated the new concepts, methods and new constructions which contributed to achieving goals and objectives of the research. The basic research of the work are new.

The methodology applied, the concepts and methods developed in work allowed to find the solution of concrete problems or some aspects of the problem formulated by M.M.Choban and L.L.Chiriac. Mathematical tools developed and applied led to solving problems in topological algebras.

The implementation of the scientific results: the results from this work can be used in the theory of topological groupoids and quasigroups, theory of automata and in elaborating optional courses.

JOSU NATALIA

CERCETAREA GRUPOIZILOR TOPOLOGICI CU UNITĂŢI MULTIPLE

111.04 – GEOMETRIE ŞI TOPOLOGIE

Autoreferatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar: 15.10.2015
Hârtie ofset. Tipar ofset.
Coli de tipar: 1.8

Formatul hârtiei 60x84 1/16
Tirajul 70 ex.
Comanda nr.49

Tipografia Universităii de Stat din Tiraspol
Chişinău, str. Gh. Iablocikin 5, MD-2069