UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 515.1(043.3)

JOSU NATALIA

CERCETAREA GRUPOIZILOR TOPOLOGICI CU UNITĂŢI MULTIPLE

111.04 – GEOMETRIE ŞI TOPOLOGIE

Teză de doctor în ştiinţe matematice

Conducător ştiinţific: **CHIRIAC Liubomir**
doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar

Consultant ştiinţific: **CIOBAN Mitrofan**
doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, academician

Autor:

CHIŞINĂU, 2015

CUPRINS

ADNOTARE

la teza de doctor **"Cercetarea grupoizilor topologici cu unităţi multiple"**, prezentată de către Josu Natalia pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 111.04-Geometrie şi Topologie. Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Tiraspol, Chişinău, anul 2015.

Structura tezei: teza este scrisă în limba română şi constă din introducere, 3 capitole, concluzii generale şi recomadări, glosar, 177 titluri bibliografice, 110 pagini text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 35 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte cheie: grupoid topologic, unitate multiplă, quasigrup topologic, grupoid medial, grupoid paramedial, izotop omogen, buclă topologică de dreapta, produs cartezian special, n-grupoizi topologici cu diviziuni continui.

Domeniul de studiu al tezei: influenţa structurilor algebrice asupra proprietăţilor topologice ale grupoizilor topologici cu unităţi multiple şi diviziuni continui.

Scopul şi obiectivele lucrării rezidă în: desăvârşirea metodelor de studiere a grupoizilor topologici ce posedă anumite proprietăţi algebrice; elaborarea metodelor de cercetare a grupoizilor topologici cu unităţi multiple; determinarea condiţiilor pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui sunt deschise; soluţionarea problemei pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta; determinarea condiţiilor pentru care (n, m)-izotopul omogen al unui grupoid topologic cu proprietatea algebrică P posedă aceeaşi proprietate; identificarea condiţiilor pentru care pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară astfel încât noua structură algebrică obţinută este quasigrup neasociativ cu proprietăţi algebrice speciale.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: rezultatele principale sunt noi. Evidenţiem următoarele: au fost determinate condiţiile pentru ca omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise; au fost analizate proprietăţile algebrice ale (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici; au fost determinate unele proprietăţi ale subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni; au fost determinate condiţiile pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta; au fost determinate condiţiile pentru care pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară astfel încât noua structură algebrică obţinută este quasigrup neasociativ cu proprietăţi algebrice speciale.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în elaborarea unor metode de cercetare a grupoizilor topologici cu diviziuni, ceea ce a condus la determinarea corelaţiilor dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoizilor cu unităţi multiple şi diviziuni continui.

Semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării: au fost elaborate concepţii, metode şi construcţii noi care au contribuit la rezolvarea obiectivelor propuse.

Metodologia aplicată, concepţiile şi metodele elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori a unor aspecte ale lor formulate de M.M.Cioban şi L.L.Chiriac.

Aparatul matematic aplicat a condus la rezolvarea unor probleme ce au conexiune cu algebra topologică.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice: rezultatele lucrării pot fi implementate în teoria grupoizilor şi quasigrupurilor topologice, teoria automatelor, la elaborarea unor cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

АННОТАЦИЯ

диссертации **"Исследования топологических группоиды с многократными единицами"** представлено Наталием Жосу на соискание степени доктора математических наук, специальность 111.04 - Геометрия и Топология. Диссертация была разработана в Тираспольском Государственном Университете, в Кишиневе, в 2015 году.

Структура работы: диссертация написана на румынском языке и состоит из введения, 3 глав, общих выводов и рекомендации, списка цитированных источников из 177 названий, 110 страниц основного текста. По теме диссертации опубликованы 35 научных работ.

Ключевые слова: топологический группоид, многократная единица, топологические квазигруппы, медиальный и парамедиальный группоид, однородный изотоп, правая топологическая лупа, специальное декартовое произведение, *n*-топологические группоиды с непрерывной делением.

Область исследования: влияния алгебраических структур на топологических свойствах топологических группоидов с многократными единицами и непрерывным делением.

Цели и задачи исследования: совершенствование методами изучения топологических групоидов обладающих определенными алгебраическими свойствами; разработка методов исследования топологические группоиды с многократными единицами; определения условий, при которых непрерывный гомоморфизм n – топологических группоидов с делением открыты; решения задач при которой открытое правое парамедиальное компактное подмножество содержит открытое правое парамедиальное компактное подлупа; определения условий, при которых *(n,m)*-однородной изотоп топологического группоида с алгебраической свойством Р обладает таким же свойством; определение условиях для котрых над множеством $G \times G$ может быть определена бинарная операция, так что полученная новая алгебраическая структура является неассоциативная квазигруппа со специальными алгебраическими свойствами .

Научная новизна и оригинальность: основные результаты работы являются новыми. Выделяем следующие: были определены условия открытости для непрерывного гомоморфизмах топологических *n*-группоидов с непрерывным делением; были изученны алгебраические свойства (n,m)-однородных изотопов топологического группоида; были определены некоторые свойства примитивного подгруппоида с делением топологического группоида с делением; были определены условия при которых открытое компактное подмножество
правой парамедиальной топологической лупой содержит открытое правое парамедиальное компактное подлупой; были определены условия, при которых на множестве $G \times G$ может быть определена бинарная операция, так что новая полученная алгебраическая структура является неассоциативная квазигруппа со специальными алгебраическими свойствами.

Важная научная решенная проблема: заключается в разработке методов исследования топологических группоидов с делением, которые привели к определению корреляции между алгебраическими и топологическими свойствами группоидов с многократными единицами и непрерывным делением.

Теоретическая и прикладная значимость: разработаны новые концепций, методы и конструкциями которые способствуют достижению целей и задач исследования.

Применяемой методологии, концепций и методов, разработанных в работе позволили найти решение конкретных проблем или некоторые аспекты проблем, сформулированных М. М Чобаном и Л. Л. Кирияк. Математические средства, разработанные и применяемые привели к решению проблем из различных областях современной математики, связанных с топологической алгеброй.

Внедрение научных результатов: результаты этой работы могут быть использованы в теории топологических группоидов квазигрупп, теории автоматов и в разработке факультативных курсов.

SUMMARY

of the thesis **"Research of topological groupoids with multiple identities"** presented by Josu Natalia for the competition of Ph. Doctor degree in Mathematical Sciences, speciality 111.04-Geometry and Topology. The thesis was elaborated in Chisinau, Tiraspol State University, in 2015.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and contains introduction, 3 chapter, conclusions, glossary, 177 references, 110 pages of basic text. The main result of the thesis was published in 35 scientific works.

Key words: topological groupoid, multiple identities, topological quasigroup, medial groupoid, paramedial groupoid, homogenous isotope, right topological loop, special cartesian product, n-topological groupoid with continuous divisions.

Field of study of the thesis: the influence of the algebraic structures on the topological properties of the topological groupoids with multiple identities and continuous divisions.

Thesis aim and objectives: mastering the studying methods of the topological groupoids with some algebraic properties; elaborating research methods regarding topological groupoids with multiple identities; establishing the conditions for the continuous homomorphisms of the n-topological groupoids with continuous divisions to be open; solving the problem for which one open compact subset from right paramedial topological loop contain one open compact paramedial right subloop; establishing the conditions for which (n, m)-homogenous isotope of topological groupoids with algebraic property P has the same property; determining the conditions for which on the set $G \times G$ can be defining one binary operation such that the new algebraic structure becomes non associative quasigroup with special algebraic properties.

Scientific innovation and originality: there have been determined the conditions for the continuous homomorphisms of the n-topological groupoids with continous divisions to be open; there have been analyzed the algebraic properties of (n, m)-homogenous isotope of topological groupoids; there have been established some properties of primitive subgroupoid with divisions of topological primitive groupoid with divisions; there have been determined the conditions for which one open compact subset from right paramedial topological loop contain one open compact paramedial right subloop; there have been established for which on the set $G \times G$ can be defining one binary operation such that the new algebraic structure becomes non associative quasigroup with special algebraic properties.

The important scientific problem solved: that was solved consists in the development of several research methods for topological groupoids with divisions, which led to the determination of correlations between the properties of algebraic and topological groupoids with multiple identities and continuos divisions.

The theoretical significance and applicative value of the thesis: there have been elaborated the new concepts, methods and new constructions which contributed to achieving goals and objectives of the research. The basic research of the work are new.

The methodology applied, the concepts and methods developed in work allowed to find the solution of concrete problems or some aspects of the problem formulated by M.M.Choban and L.L.Chiriac. Mathematical tools developed and applied led to solving problems in topological algebras.

The implementation of the scientific results: the results from this work can be used in the theory of topological groupoids and quasigroups, theory of automata and in elaborating optional courses.

INTRODUCERE

Actualitatea temei şi importanţa problemei abordate. Cercetările în domeniul algebrei topologice au fost iniţiate în a doua jumătate a secolului al XIX-lea. Algebra topologică, ca ramură a matematicii moderne, se află la frontiera dintre topologia generală şi algebra abstractă. O contribuţie semnificativă la dezvoltarea teoriei respective au adus-o renumiţii matematicieni S.Lie, D.Hilbert, J.H.Poincaré, F.Klein, É.J.Cartan, G.Boole, A.N.Whitehead, etc.

De exemplu, matematicianul englez A.N.Whitehead, în cartea sa "A Treatise on Universal Algebra", publicată în anul 1898, pentru a introduce noţiunea de algebră universală, mai întâi, formulează noţiunea de operaţie. În aşa mod, aplicaţia $f : A^n \to A$ se numeşte operaţie n-ară pe A, pentru $n \geq 0$. Astfel, Whitehead defineşte algebra universală ca un sistem (A, S), unde A este o mulţime nevidă iar S o familie de operaţii.

Noţiunea de algebră universală a creat premisele privind constituirea unui punct de vedere comun asupra cercetării şi dezvoltării teoriilor mai multor structuri algebrice care erau, în perioada respectivă, în ascensiune: teoria grupurilor, teoria algebrelor booleene, etc.

Teoria grupurilor, considerată cea mai veche ramură a algebrei moderne, îşi are începutul în lucrările lui J.L.Lagrange, P.Ruffini, É.Galua şi N.H.Abel publicate la începutul secolului XIX. Grupurile cercetate de matematicienii respectivi au fost în principal grupuri finite: grupuri de rădăcini ale polinoamelor ori grupuri de permutări.

Interesul pentru grupuri inifinite a apărut din topologie şi geometrie, fiind stimulate de lucrările lui F.Klein, H.Poincaré şi alţii.

Terminologia de semigrup, după cum susţine L.E.Dickson în 1905 în monografia "On Semigroup and the General Isomorphism Between Infinite Goups", a fost utilizată pentru prima dată de Monsieur l'Abbé J.A. de Séguier în cartea sa "Eléments de la théorie des groupes abstraites", publicată la Paris în anul 1904. Iar O.Y.Schmidt utilizează cu succes semigrupurile în celebra sa lucrare "Abstract Group Theory". Studii consistente pe teoria semigrupurilor se fac în lucrările lui A.K.Suschkewitsch începînd cu publicaţiile din 1928, în monografiile matematicienilor D.Rees şi D.Dubreil publicate în anii 1940 şi respectiv 1941.

Teoria semigrupurilor topologice a fost dezvoltată în lucrările [1]–[3].

Paralel cu teoria grupurilor abstracte se dezvoltă şi teoria grupurilor topologice. Astfel, L.E.I.Brauer şi O.Schreier în lucrările publicate în anii 1909 şi respectiv 1926, introduc şi dezvoltă noţiunea de grup topologic în sens modern. Ceva mai târziu, în anii 1944-1945, A.A.Markov introduce noţiunea de grup topologic liber.

Aceste idei inovatoare contribuie enorm la constituirea şi dezvoltarea teoriei grupurilor topologice, în mod deosebit, în prima jumătate a secolului XX, datorită lucrărilor lui L.S.Pontryagin [4], A.A.Markov [5], A.D.Alexandrov, A.Weil, C.Chevalley, M.I.Graev [6]–[8], T.Nakayama [9], J. von Neumann, van Kampen, S.H.Kakutani [10], etc. Tot aici pot fi menţionate şi rezultatele obţinute mai recent de matematicienii din Moldova, academicianul V.Arnautov [11], academicianul M.Cioban [12], M.I.Ursu, P.Chircu, etc. În felul acesta teoria grupurilor topologice a stat la temelia algebrelor topologice universale şi au direcţionat cercetările în acest domeniu.

Ideiile generate în cadrul teoriei quasigrupurilor şi buclelor, care a început să se dezvolte dinamic începînd cu anii 30 ai secolului trecut, au influenţat benefic cercetările algebrelor topologice universale. Evidenţiem în acest sens lucrările lui R.H.Bruck [13]–[15], H.O.Pflugfelder [16], R.Moufang, V.D.Belousov [17], [18], T.Kepka [19]–[21], A.S.Basarab [22], [23], I.A.Florea [24], A.M.Ceban [25], P.V.Gorincioi [26], G.B.Belyavskaya [27], [28] etc.

O contribuţie specială privind dezvoltarea teoriei quasigrupurilor au avut-o şi generaţia matematicienilor formaţi după anii 70 ai secolului tecut, printre care menţionăm F.M.Sokhatsky [29], V.Şcerbacov [30]–[34], A.W.Dudek [35]–[38], V.Izbaş [39], [40], P.Sârbu [41]–[43], V.Ursu [44], [45] etc.

Definim câteva structuri algebrice de bază în termeni de algebră universală. Terminologia de algebră universală va fi simplificată deseori la cea de algebră.

Astfel, un *grupoid* este o algebră universală $(G, \circ)$ cu o singură operaţie binară " $\circ$ ".

Un *semigrup* este o algebră universală $(G, \circ)$ cu o singură operaţie binară " $\circ$" asociativă.

Un *monoid* este o algebră universală $(G, \circ, e)$ cu o singură operaţie binară " $\circ$" asociativă, iar e este o operaţie nulară care satisface $e \circ a = a \circ e = a$ pentru pentru orice $a \in G$.

Un *grup* este o algebră $(G, \circ, ', e)$ unde " $\circ$ " este o operaţie binară asociativă, e este o operaţie nulară cu proprietatea $e \circ a = a \circ e = a$, iar "$'$" este o operaţie unară pe mulţimea G, pentru care are loc $a' \circ a = a \circ a' = e$, pentru orice $a \in G$, iar e se numeşte unitatea grupului.

Grupoidul topologic G este grupoidul echipat cu topologia Hausdorff pentru care aplicaţia $(a, b) \to a \circ b$, este continuă.

Grupoidul G se numeşte *grupoid primitiv cu diviziuni*, dacă există două operaţii binare $l : G \times G \to G, r : G \times G \to G$, astfel încât $l(a, b) \cdot a = b$ şi $a \cdot r(a, b) = b$ pentru orice $a, b \in G$.

Astfel, grupoidul primitiv cu diviziuni este algebră universală cu trei operaţii binare.

Dacă în grupoidul topologic G, diviziunile l şi r sunt continui, atunci putem spune că G este *grupoid topologic primitiv cu diviziuni continui.*

Grupoidul $(G, \circ)$ se numeşte *quasigrup*, dacă fiecare din ecuaţiile $a \circ x = b$ şi $y \circ a = b$ au soluţii unice pentru orice elemente $a, b \in G$. În quasigrupul G diviziunile l şi r sunt unice.

Dacă operaţia multiplicativă din quasigrupul $(G, \circ)$ este continuă, atunci G se numeşte *quasigrup topologic.*

Dacă în quasigrupul semitopologic G, diviziunile l şi r sunt continui, atunci G se numeşte *quasigrup topologic.*

Considerăm grupoidul $(G, +)$. Pentru fiecare două elemente $a, b \in (G, +)$ şi $n \geq 2$ avem:

$$1(a, b, +) = (a, b, +)1 = a + b,$$
$$n(a, b, +) = a + (n - 1)(a, b, +),$$
$$(a, b, +)n = (a, b, +)(n - 1) + b$$

Dacă operaţia binară $(+)$ este fixată pe mulţimea G, atunci vom folosi notaţiile $n(a, b)$ şi $(a, b)n$ în loc de $n(a, b, +)$ şi $(a, b, +)n$.

Fie $(G, +)$ grupoid, $n \geq 1$ şi $m \geq 1$. Elementul e al grupoidului $(G, +)$ se numeşte (n, m)-zero în G, dacă:

1. $e + e = e$;
2. $n(e, x) = x$, pentru orice $x \in (G, +)$;
3. $(x, e)m = x$, pentru orice $x \in (G, +)$.

Dacă în definiţia dată au loc condiţiile 1 şi 2, vom spune că e se numeşte (n, ∞)-zero. Dacă se îndeplinesc condiţiile 1 şi 3, vom spune că e se numeşte (∞, m)-zero. Clar că e este (n, m)-zero, dacă e este în acelaşi timp (n, ∞) şi (∞, m)-zero, pentru orice $x \in (G, +)$.

În grupoidul multiplicativ $(G, \cdot)$ elementul e se numeşte (n, m)-*unitate.* Noţiunea de (n, m)-unitate (unitate multiplă) a fost introdusă în [46].

Exemplu 1. *Fie* $(G, +)$ *grup comutativ cu elementul zero* 0. *Considerăm pe* G *o nouă operaţie binară:* $x \cdot y = y - x$. *Atunci* $(G, \cdot)$ *este un quasigrup medial, unde* 0 *este* $(1, 2)$*-zero.*

Exemplu 2. *Fie* $(G, +)$ *grup comutativ cu elementul zero* 0. *Considerăm pe* G *o nouă operaţie binară:* $x \cdot y = x - y$. *Atunci* $(G, \cdot)$ *este un quasigrup medial, unde* 0 *este* $(2, 1)$*-zero.*

Descrierea situaţiei în domeniul de cercetare şi identificarea problemelor de cercetare. Fixăm signatura continuă E şi $-1 \leq i \leq 3.5$. Fie J o mulţime de identităţi. Notăm prin $V(E, i, J)$ clasa E-algebrelor topologice care sunt T_i-spaţii ce satisfac identităţile J. Academicianul M.Cioban în lucrarea sa "Algebra topologică, probleme", 2006, a formulat următoarea problemă fundamentală:

Problema 1. De studiat concordanţa dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale E-algebrelor topologice G din clasa $V(E, i, J)$.

Problema 1 în sensul ei general este foarte importantă. În această direcţie sunt ilustrative următoarele exemple:

1. Fie $R^n, n \geq 1$, spaţiu Euclidian n-dimensional şi $S^{n-1} = \{x \in R^n : |x| = 1\}$-sfera unitate. Atunci pe S^m există structuri de grupoid topologic numai pentru $m \in \{0, 1, 3, 7\}$. Acest rezultat important a fost demonstrat de I.M.James în anii 1957-1958.

2. Pe orice spaţiu A în raport cu operaţia binară aditivă $(+)$, cu zero şi fără divizori ai lui zero, definită de egalitatea $x + y = y$ există o structură de semigrup topologic cu unitate de dreapta. În situaţia dată orice element din A va fi unitate de dreapta.

Din acest punct de vedere putem afirma că grupoizi topologici cu anumite identităţi nu există pentru toate spaţiile şi identităţile influenţează direct asupra proprietăţilor topologice.

După cum s-a menţionat problema principală a algebrei topologice constă în studierea concordanţei dintre proprietăţile algebrice şi topolologice ale E-algebrelor topologice G din clasa $V(E, i, J)$. Această problemă are un aspect larg şi poate fi soluţionată efectiv numai pentru anumite clase de algebre topologice, care se reprezintă prin fixarea operaţiilor algebrice şi identităţilor algebrice.

În acest aspect cecetările fundamentale au fost efectuate pentru grupuri topologice, inele şi module topologice. Dar această problemă este insuficient cercetată pentru grupoizi topologici. Clasa de grupoizi topologici conţine şi clasa de grupuri topologice şi clasa de quasigrupuri topologice.

Menţionăm că clasa de grupoizi topologici este foarte largă. De exemplu, pentru grupoizii topologici nu se poate nimic afirma despre structura lor topologică. Orice spaţiu admite structură de semigrup topologic. De exemplu, fie G un spaţiu topologic nevid. Operaţia $x \cdot y = y$ transformă G în semigrup topologic. Pe G poate fi orice topologie. Daca X este un spaţiu topologic, $e \notin X$ şi $G = X \cup \{e\}$, atunci operaţia $x \cdot y = y$ pentru $x, y \in X$ şi $e \cdot x = x \cdot e = x$ pentru orice $x \in G$, transformă G în semigrup topologic cu unitate, dacă e este un punct izolat în G. Atunci X este subspaţiu deschis şi închis în semigrupul topologic.

Cerinţa de a avea o structură de grupoid topologic cu unitate nu este simplă. De exemplu, pe sfera obişnuită aşa structură nu există.

Dacă pe dreapta reala R cu topologia generată de baza $\{(a, +\infty), a \in R\}$ fixăm operaţia de adunare, atunci obţinem un T_0-grupoid topologic cu diviziuni, care nu este T_1-spaţiu.

Prin urmare sunt necesare anumite restricţii asupra grupoizilor pentru a cerceta concordanţa dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale acestora. De exemplu, grupoizi cu unităţi multiple, grupoizi cu diviziuni continui etc.

Astfel, luând în consideraţie Problema 1 şi argumentele expuse mai sus putem formula următoarea problemă de cercetare.

Problemă de cercetare: *Elaborarea unor noi metode de cercetare a grupoizilor topologici cu diviziuni ce vor conduce la determinarea corelaţiilor dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoizilor cu unităţi multiple şi diviziuni continui.*

Următoarele probleme sunt conectate la problema de cercetare formulată mai sus.

Problema 2. Fie $(G, +)$ grupoid topologic cu proprietatea algebrică P şi e este element (k, p)-zero. În ce condiţii (n, m)-izotopul omogen $(G, \cdot)$, al grupodului topologic $(G, +)$, posedă proprietatea algebrică P? Care este tipul unităţii multiple în grupoidul topologic $(G, \cdot)$?

Problema 3. Fie H subgrupoid primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni $(G, +, r, l)$ şi $e \in H$. În ce condiţii există un astfel de subgrupoid primitiv cu diviziuni Q al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni $(G, +, r, l)$ astfel, încât $e \in Q \subseteq H$?

Problema 4. Să se stabilească în ce condiţii grupoidul multiplicativ $(G, \cdot)$ este quasigrup paramedial cu $(2, 1)$-unitate?

Problema 5. Fie $(G, \cdot)$ buclă topologică paramedială de dreapta. În ce condiţii o submulţime compactă deschisă P din G conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta $(Q, \circ) \subseteq (G, \cdot)$?

Problema 6. Fie $(G, \cdot)$ este grupoid topologic paramedial. În ce condiţii poate fi introdusă pe G o operaţie binară $(\circ)$ astfel încât $(G, \circ)$ să fie semigrup topologic comutativ cu unitate?

Problema 7. Fie G şi G_1 n-grupoizi topologici cu diviziuni continui. În ce condiţii orice omomorfism continuu $f : G \to G_1$ este deschis?

Problema 8. Fie $(Q_1, \cdot)$ grupoid cu n unităţi multiple $(k_1, l_1), ..., (k_n, l_n)$ şi $(Q_2, \circ)$ grupoid cu t unităţi multiple $(m_1, r_1), ..., (m_t, r_t)$. Să se detemine tipul unităţilor multiple din grupoidul produs $Q_1 \times Q_2$.

Problema 9. Fie $(G, +)$ grup comutativ. În ce condiţii pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită operaţia binară $(\circ)$ astfel încât:

1. $(G \times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, paramedial şi nemedial?
2. $(G \times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, medial şi neparamedial?

3. $(G \times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, medial cu unitate de stânga?

Scopul şi obiectivele lucrării rezidă în studierea sistemelor topologo-algebrice şi aplicaţiile lor. În particular:

- desăvârşirea metodelor de studiere a grupoizilor topologici ce posedă anumite proprietăţi algebrice;

- elaborarea metodelor de cercetare a grupoizilor topologici cu unităţi multiple;

- determinarea condiţiilor pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui sunt deschise;

- soluţionarea problemei pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta;

- determinarea condiţiilor pentru care (n, m)-izotopul omogen al unui grupoid topologic cu proprietatea algebrică P posedă aceeaşi proprietate;

- identificarea condiţiilor pentru care pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară astfel încât noua structură algebrică obţinută este quasigrup neasociativ cu proprietăţi algebrice speciale.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: rezultatele principale sunt noi. Evidenţiem următoarele: au fost determinate condiţiile pentru ca omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise; au fost analizate proprietăţile algebrice ale (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici; au fost determinate unele proprietăţi ale subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni; au fost determinate condiţiile pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta; au fost determinate condiţiile pentru care pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară astfel încât noua structură algebrică obţinută este quasigrup neasociativ cu proprietăţi algebrice speciale.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în elaborarea unor metode de cercetare a grupoizilor topologici cu diviziuni, ceea ce a condus la determinarea corelaţiilor dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoizilor cu unităţi multiple şi diviziuni continui.

Semnificaţia teoretică. Au fost elaborate concepţii, metode şi construcţii noi care au contribuit la rezolvarea obiectivelor propuse.

Valoarea aplicativă a lucrării. Metodologia aplicată, concepţiile şi metodele elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori a unor aspecte ale lor formulate de M.M.Cioban şi L.L.Chiriac.

Aparatul matematic aplicat a condus la rezolvarea unor probleme ce au conexiune cu algebra topologică.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere.

- metoda de cercetare a condiţiilor pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni sunt deschise;

- metoda de studiere a proprietăţilor algebrice ale (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici;

- metoda de cercetare a proprietăţilor subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni;

- metoda de determinare a condiţiilor pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta;

- metoda de construcţie a quasigrupurilor mediale, neasociative şi neparamediale;

- metoda de construcţie a quasigrupurilor paramediale, neasociative şi nemediale.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele lucrării pot fi implementate în teoria grupoizilor şi quasigrupurilor topologice, teoria automatelor, la elaborarea unor cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele tezei au fost expuse în cadrul următoarelor foruri ştiinţifice:

1. Mathematics and Information Technologies: Research and Education, MITRE, 2015, Chişinău, 2-5 iulie.

2. Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, Chişinău, 2014, 19-23 august.

3. The 22^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2014, Bacău, România, 18-21 septembrie.

4. The 21^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2013, Bucureşti, 19-22 septembrie.

5. The 20^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to Academician Mitrofan M.Cioban, CAIM, 2012, Chişinău, 22-25 august.

6. Mathematics and Information Technologies: Research and Education. Dedicated to the 65^{th} anniversary of the Moldova State University, MITRE, 2011, Chişinău, 22-25 august.

7. The 19^{th} edition of the annual Conference on Applied and Industrial Mathematics,

CAIM, 2011, Iaşi, 22-25 septembrie.

8. Actual problems of mathematics and informatics. Scientific conference dedicated to the 80^{th} anniversary of the foundation of the Tiraspol State University and of the Faculty of Physics, Mathematics and Information Technologies, Chişinău, 2010, 24-25 septembrie.

9. The 18^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2010, Iaşi, România, 14-17 octombrie.

10. Mahematics and Information Technologies: Research and Education, MITRE, 2009, Chişinău, 8-9 octombrie.

11. The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2009, Constanţa, 17-20 septembrie.

12. Conferinţa ştiinţifică Republicană "Matematica - probleme actuale cu aplicaţii", Chişinău, 2009, 8 aprilie.

13. Mathematics and Information Technologies: Research and Education, MITRE, 2008, Chişinău, 1-4 octombrie.

14. The 16^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2008, Oradea, 9-11 octombrie.

15. 6^{th} Congress of Romanian Mathematicians, Bucureşti, 2007, România, 28 iunie - 4 iulie.

16. The XIV^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60^{th} anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University, Satellite Conference of ICM, Chişinău, 2006, 17-19 august.

17. Conferinţa a 2-a a Societăţii Matematice din RM, consacrată aniversării a 40-cea de la fondarea Institutului de Matematică şi Informatică al AŞM, Chişinău, 2004, 17-19 august.

18. Şedinţa specială a seminarului ştiinţific consacrată profesorului Valentin Belousov, Institutul de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Moldovei, Chişinău, 2008-2014.

Sumarul compartimentelor tezei. Teza conţine adnotări, introducere, trei capitole, indice al noţiunilor, bibliografia, concluzii generale şi recomandări.

În **introducere** se argumentează actualitatea tezei, scopul şi obiectivele, problemele de cercetare şi se prezintă sinteza conţinutului lucrării.

În primul Capitol - Analiza situaţiei în domeniul grupoizilor topologici cu structuri suplimentare - se face o analiză a publicaţiilor în domeniul cercetării, se efectuează o trecere în revistă a unor elemente introductive din literatura de specialitate, sunt prezentate rezultate cunoscute care sunt importante în următoarele capitole.

Cel de al **doilea capitol - Studiul grupoizilor topologici cu diviziuni şi unităţi multiple -** debutează cu un paragraf în care se introduce conceptul de unitate multiplă. Acest concept este esenţial pentru teza de faţă. Celelalte două paragrafe sunt consacrate noţiunii de izotop omogen şi studierii unor proprietăţi a (n, m)-izotopilor omogeni: Teoremele 2.14, 2.15, 2.19. În continuare se cercetează grupoizii topologici primitivi cu diviziuni: Lema 2.23, Teorema 2.25; (n, m)-izotopii omogeni în AG-grupoizii topologici cu unităţi multiple: Teorema 2.32, Corolarul 2.33; unele proprietăţi ale buclei topologice paramediale de dreapta: Lema 2.40, Teorema 2.42; conexiunea dintre paramedialitate şi asociativitate: Teoremele 2.51, 2.52; unele proprietăţi ale grupoizilor topologici paramediali: Teoremele 2.53, 2.54, 2.55. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [47]–[62].

În al **treilea capitol - Metode de construcţii a unor structuri algebrice şi problema omomorfismelor continui deschise pentru cazul n-grupoizilor topologici cu diviziuni -** sunt reflectate rezultatele publicate în lucrările: [63]–[81]. Acestea înglobează rezultatele despre omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui: Teoremele 3.5, 3.7; produsul direct de grupoizi cu unităţi multiple: Teoremele 3.9, 3.12; metodele de obţinere a quasigrupurilor neasociative mediale şi paramediale: Teoremele 3.14, 3.16, 3.18, 3.21; quasigrupuri paramediale cu măsura Haar: Teoremele 3.25, 3.27, 3.28; conexiunea dintre distributivitate şi paramedialitate: Teoremele 3.36, 3.37.

În finalul tezei este prezentată o listă de referinţe bibliografice, sunt expuse concluziile generale şi recomandările, indice al noţiunilor utilizate în lucrare.

Aş dori să mulţumesc în mod deosebit conducătorului ştiinţific, domnului L.L.Chiriac, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar şi consultantului ştiinţific, domnului M.M.Cioban, academician al Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar pentru răbdarea, îndrumarea şi sprijinul constant acordat în elaborarea prezentei teze de doctorat.

De asemenea exprim cele mai sincere mulţumiri profesorilor Facultăţii Fizică Matematică şi Tehnologii Informaţionale din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol pentru contribuţia deosebită de-a lungul anilor în formarea mea ca profesor.

1. ANALIZA SITUAŢIEI ÎN DOMENIUL GRUPOIZILOR TOPOLOGICI CU STRUCTURI SUPLIMENTARE

În acest capitol se efectuează o analiză a conceptelor algebrice şi topologice fundamentale. Sunt examinate construcţiile algebrico-topologice de bază. Se face o sinteză a situaţiei în domeniul cercetării.

1.1. Analiza noţiunilor algebrice de bază

Mulţimi şi aplicaţii

Dacă A este o mulţime şi fiecărui element $\alpha \in A$ i se asociază un obiect x_α, atunci A se numeşte *mulţime de indici*, iar $B = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ se numeşte *mulţime indexată*.

O mulţime elementele căreia sunt mulţimi se numeşte *familie de mulţimi.*

Fie A şi B două mulţimi nu neapărat distincte. Mulţimea notată $A \times B$ şi definită astfel:

$$A \times B = \{(x, y)|x \in A \text{ şi } y \in B\}$$

şi se numeşte *produs cartezian* al mulţimilor A şi B. În caz general, dacă n este un număr natural, $n \geq 3$ şi $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt mulţimi, nu neapărat distincte, atunci produsul cartezian al acestor mulţimi se notează cu $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ sau $\prod A_i, i = \overline{1..n}$ şi se defineşte astfel:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod A_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n)|x_i \in A_i, \forall i, 1 \leq i \leq n\}$$

Se spune că f este *aplicaţie*, *funcţie*, *corespondenţă funcţională* a mulţimii A în mulţimea B şi se notează $f : A \to B$, dacă fiecărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $b = f(a) \in B$.

Fie dată aplicaţia $f : A \to B$. Funcţia f se numeşte:

- *surjecţie*, *aplicaţie pe*, dacă pentru fiecare element $b \in B$ există preimaginea $a \in A$, astfel încât $b = f(a)$;
- *injecţie*, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *bijecţie*, *aplicaţie bijectivă*, *aplicaţie biunivocă*, dacă f este simultan injecţie şi surjecţie.

Noţiune de grupoid

Numim *operaţie binară*, *lege de compoziţie* pe o mulţime nevidă M orice aplicaţie de tipul $\varphi : M \times M \to M$.

Definiția 1.1. *O mulţime nevidă G se numeşte grupoid cu operaţia binară notată prin $\{\cdot\}$, dacă pentru orice pereche ordonată de elemenete $(a, b) \in G$, se defineşte în mod unic produsul $ab \in G$.*

Definiția 1.2. *Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte AD-grupoid dacă este satisfăcută legea $a \cdot (bc) = = c \cdot (ba)$ pentru orice $a, b, c \in G$.*

Definiția 1.3. *Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte grupoid Abel-Grassmann sau AG-grupoid dacă elementele lui satisfac legea inversă la stânga, adică $(a \cdot b) \cdot c = (c \cdot b) \cdot a$ pentru orice $a, b, c \in G$.*

Definiția 1.4. *Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte bicomutativ dacă este satisfăcută legea $xy \cdot zt = = tz \cdot yx$ pentru orice $x, y, z, t \in G$.*

Definiția 1.5. *Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte grupoid cu diviziuni, dacă pentru fiecare elemente $a, b \in G$ ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii, nu necesar unice.*

Definiția 1.6. *Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte reductibil sau cancelativ, dacă din egalitatea $xy = uv$ rezultă echivalenţa egalităţilor $x = u$ şi $y = v$.*

Definiția 1.7. *Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte grupoid primitiv cu diviziuni, dacă există două operaţii binare $l : G \times G \to G$, $r : G \times G \to G$, astfel încât $l(a, b) \cdot a = b$, $a \cdot r(a, b) = b$ pentru orice $a, b \in G$.*

Astfel grupoidul primitiv cu diviziuni este o algebră universală cu trei operaţii binare.

Definiția 1.8. *Grupoidul $(N, \circ)$ se numeşte subgrupoid al grupoidului $(G, \cdot)$ dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*
1. $N \subseteq G$;
2. $x \circ y = x \cdot y, \forall x, y \in G$.

Un grupoid $(G, \cdot)$ se numeşte *finit* dacă mulţimea ce-l formează este finită. În acest caz numărul de elemente se numeşte ordinul grupoidului şi se notează $|G|$.

Tabla Cayley a unui grupoid

Tabla Cayley a grupoidului finit $(G, \cdot)$, numită şi *tabla Cayley a operaţiei* $(\cdot)$, este un tabel cu n linii şi n coloane, unde $n = |G|$. Liniile şi coloanele sunt etichetate într-un mod arbitrar fiecare de cîte unul dintre cele n elemente ale lui G, astfel încât pentru orice $x, y \in G$, elementul din tabel aflat la intersecţia liniei de eticheta x cu coloana de eticheta y să fie elementul $x \cdot y$. Din cele de mai sus se observă că elementele grupoidului G pot fi ordonate în $n!$ moduri distincte, de unde rezultă că tabela Cayley a fiecărui grupoid $(G, \cdot)$ poate fi scrisă în $(n!)^2$ moduri.

Morfisme, izomorfisme şi izotopisme de grupoizi

Fie $(M, \cdot)$ şi $(N, \circ)$ doi grupoizi. Aplicaţia $f : M \to N$ se numeşte *morfism*, *omomorfism*, *homomorfism* al grupoidului $(M, \cdot)$ în grupoidul $(N, \circ)$ dacă este satisfăcută condiţia $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in M$.

Un morfism bijectiv se numeşte *izomorfism*.

Un morfism (respectiv izomorfism) de tipul $f : M \to M$ se numeşte *endomorfism* (*automorfism*) al grupoidului M.

Propoziția 1.9. *Fie $(M, *)$, $(N, \circ)$ şi $(P, \cdot)$ trei grupoizi. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*
1. Funcţia identică $1_M : M \to M$ este un automorfism al lui $(M, *)$;
2. Dacă $f : M \to N$ şi $g : N \to P$ sunt morfisme de grupoizi atunci funcţia $g \circ f : M \to P$ de asemenea este un morfism de grupoizi;
3. Dacă $f : M \to N$ este un izomorfism de grupoizi atunci şi funcţia inversă $f^{-1} : N \to M$ de asemenea este un izomorfism.

Propoziția 1.10. *Fie $(M, *)$ şi $(N, \circ)$ doi grupoizi şi aplicaţia $f : M \to N$ un morfism surjectiv(în particular un izomorfism). Au loc următoarele afirmaţii:*
1. Dacă operaţia $(*)$ este comutativă(respectiv asociativă) atunci şi operaţia $(\circ)$ este comutativă(respectiv asociativă);
2. Dacă e este element unitate pentru $(M, *)$ atunci $f(e)$ este element unitate pentru $(N, \circ)$;
3. Dacă $a \in M$ şi translaţia la stânga $\gamma_a : M \to M$(respectiv translaţia la dreapta $\delta_a : M \to M$) definită de a este surjectivă atunci şi translaţia la stânga $\gamma_{f(a)} : N \to N$(respectiv translaţia la dreapta $\delta_{f(a)} : N \to N$) definită de $f(a)$ este surjectivă.

Fie $(M, \cdot)$ şi $(N, \circ)$ doi grupoizi. Se numeşte *omotopism*, *homotopism* al grupoidului $(M, \cdot)$ în grupoidul $(N, \circ)$ orice triplet ordonat (α, β, γ) care satisface următoarea condiţie $\alpha(x) \circ \beta(y) = \gamma(x \cdot y), \forall x, y \in M$.

Tripletul de permutări (α, β, γ) se numeşte *izotopie*; α-substituţie de stânga (permutarea elementelor după coloane); β-substituţie de dreapta (permutarea elementelor după linii); γ-substituţie principală (permutarea elementelor în interiorul grupoidului). Dacă $\alpha = \beta = \gamma$, atunci izotopismul se transformă în izomorfism. Izotopia de tipul $(T = \alpha, \beta, 1)$ se numeşte principală. Prin *izotopism* al grupoidului $(M, \cdot)$ pe $(N, \circ)$ se înţelege un omotopism (α, β, γ) în care cele trei componente (α, β, γ) sunt bijecţii ale lui M pe N.

Grupoidul $(M, \cdot)$ se numeşte *izotop* cu $(N, \circ)$ (sau al lui $(N, \circ)$), şi se notează $N = M^T$ sau $N = M^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, dacă există măcar un izotopism (α, β, γ) al grupoidului $(M, \cdot)$ pe $(N, \circ)$.

Quasigrupuri şi bucle

Definiția 1.11. *Grupoid $(Q, \cdot)$ se numeşte quasigrup dacă pentru orice $a, b \in Q$, fiecare din ecuaţiile $a \cdot x = b$ şi $y \cdot a = b$ au soluţii unice în Q.*

Elementul $e \in G$ se numeşte *unitate* dacă $ex = xe = x$ pentru fiecare $x \in X$.

Definiția 1.12. *Quasigrupul $(G, \cdot)$ se numeşte medial dacă este satisfăcută legea $xy \cdot zt =$ $= xz \cdot yt$ pentru orice $x, y, z, t \in G$.*

Definiția 1.13. *Quasigrupul $(G, \cdot)$ se numeşte paramedial dacă este satisfăcută legea $xy \cdot zt =$ $= ty \cdot zx$ pentru orice $x, y, z, t \in G$.*

Definiția 1.14. *Quasigrupul $(G, \cdot)$ se numeşte hexagonal dacă el este idempotent, medial şi semisimetric, adică, au loc egalităţile $x \cdot x = x$, $xy \cdot zt = xz \cdot yt$, $x \cdot zx = xz \cdot x = z$ pentru orice $x, y, x, t \in G$.*

Quasigrupul cu element neutru se numeşte *buclă* .

Definiția 1.15. *Dacă quasigrupul medial (paramedial) $(G, \cdot)$ conţine elementul e astfel încât $e \cdot x = x(x \cdot e = x)$ pentru orice x din G, atunci e se numeşte element unitate de stânga (dreapta) în G şi $(G, \cdot)$ se numeşte buclă medială (paramedială) de stânga (dreapta).*

Noţiune de grup

Definiția 1.16. *Mulţimea nevidă G împreună cu operaţia $(\cdot)$ se numeşte grup, dacă pentru orice pereche ordonată de elemenete $(a, b) \in G$ sunt satisfăcute axiomele:*
A1. Închiderii. Oricare ar fi $a, b \in G$ şi rezultatul operaţiei $a \cdot b$ de asemenea este din G.
A2. Asociativităţii. Oricare ar fi $a, b, c \in G$ are loc egalitatea $(ab)c = a(bc)$.
A3. Elementului neutru. Există un element $(e \in G)$, astfel încât oricare ar fi $a \in G$ are loc $ea = ae = a$.
A4. Elementului invers. Oricare ar fi $a \in G$ există astfel de element $b \in G$, astfel încât

$ab = ba = e$, unde e este neutru.

Dacă în plus este satisfăcută şi axioma

A5. Comutativităţii. Oricare ar fi $a, b \in G$ are loc egalitatea $ab = ba$, atunci grupul $(G, \cdot)$ se numeşte grup abelian sau grup comutativ.

Aplicaţia $f : G_1 \to G_2$ se numeşte *monomorfism* dacă omomorfismul aplicaţiei date este injectiv; *epimorfism* dacă aplicaţia f este surjectivă; *izomorfism* dacă aplicaţia f este bijectivă.

Rezultate suplimentare la teoria grupurilor pot fi găsite în [82]–[84].

1.2. Examinarea rezultatelor şi construcţiilor algebrice

Teoria quasigrupurilor şi buclelor începe să se dezvolte la începutul anilor 20-30 ai secolului XX. Pentru prima dată termenul de quasigrup a apărut în lucrarea lui R.Mufang [85] în 1935. În continuare ne vom referi la unele rezultate care ţin de quasigrupurile mediale şi paramediale. În 1937 A.K.Suschkewitsch defineşte quasigrupurile mediale (abeliene).

Din clasa quasigrupurilor, izotope clasei grupurilor, prezintă interes *clasa quasigrupurilor liniare*. După V.D.Belousov, quasigrupul $(Q, \cdot)$ se numeşte liniar peste grupul $(Q, +)$ dacă $(Q, \cdot)$ poate fi reprezentat sub forma

$$xy = \varphi x + q + \psi y$$

unde $\varphi, \psi \in Aut(Q, +)$, q-un element fixat din Q [86].

Drept caz particular al quasigrupurilor liniare sunt considerate quasigrupurile mediale, adică quasigrupurile ce satisfac legea $(ab \cdot cd) = (ac \cdot bd)$. Conform Teoremei lui Bruck-Toyoda, quasigrupurile mediale sunt liniare peste grupul abelian şi automorfismele φ, ψ comutează. Aceste quasigrupuri au fost cercetate de mulţi algebraişti cum ar fi: K.Toyoda [87], D.S.Murdoch [88], R.H.Bruck [15], J.Ježec şi T.Kepka [19], P.Nemec, T.Kepka [20], [21], V.A.Şcerbacov [31], [89], ele joacă un rol important în teoria quasigrupurilor.

Teorema 1.17. *(Teorema Toyoda [17], [16], [87]) Orice quasigrup medial $(Q, \cdot)$ poate fi reprezentat sub forma $x \cdot y = \varphi x + \psi y + a$, pentru orice $x, y \in Q$, unde $(Q, +)$ este grup abelian, φ, ψ sunt automorfisme în $(Q, +)$ astfel încît $\varphi\psi = \psi\varphi$ şi a element fixat din Q.*

Teorema 1.18. *(Teorema Kepka-Němec [20]) Orice quasigrup paramedial $(Q, \cdot)$ poate fi reprezentat sub forma $x \cdot y = \varphi x + \psi y + g$, pentru orice $x, y \in Q$, unde $(Q, +)$ este grup abelian, φ, ψ sunt automorfisme în $(Q, +)$ astfel încît $\varphi\varphi = \psi\psi$ şi g element fixat din Q.*

Teorema 1.19. *([32], [33]) Orice quasigrup medial finit $(Q, \cdot)$ este izomorf cu produsul direct al quasigrupurilor mediale unipotent–solubile $(Q_1, \circ)$ şi $(Q_2, *)$, unde $(Q_2, *)$ este izotop al quasigrupului medial, distributiv $(Q_2, \star)$ de tipul $(\varepsilon, \varepsilon, \gamma)$, $\gamma \in Aut(Q_2, *)$, adică, $(Q, \cdot) \cong (Q_1, \circ) \times (Q_2, *)$.*

Teorema 1.20. *[31] Antiendomorfismul s al quasigrupului paramedial $(Q, \cdot)$ este permutare identică a mulţimiii Q dacă şi numai dacă $(Q, \cdot)$ este quasigrup medial, distributiv şi comutativ de tipul $x \cdot y = \varphi x + \varphi y$ pentru orice $x, y \in Q$, unde $(Q, +)$ este grup abelian, $\varphi \in Aut(Q, +)$.*

Teorema 1.21. *[31] Daca antiendomorfismul s a quasigrupului paramedial $(Q, \cdot)$ de tipul $x \cdot y = \varphi x + \psi y + g$ este permutare identică a mulţimii Q, atunci*

1. aplicaţia $\varphi + \psi$ este automorfism în $(Q, +)$;

2. quasigrupul $(Q, \circ)$ de tipul $x \circ y = s^{-1}(x \cdot y) = (\varphi + \psi)^{-1}\varphi x + (\varphi + \psi)^{-1}\psi y$ este quasigrup medial, distributiv;

3. aplicaţia s este antiautomorfism în $(Q, \circ)$.

În continuare vom defini unele proprietăţi ale AG-grupoizilor [3].

Teorema 1.22. *([90], Teorema 2.2) Dacă în AG-grupoidul G există unitate de stânga e, atunci ea este unică.*

Teorema 1.23. *([90], Teorema 2.3) Dacă AG-grupoidul G posedă unitate de dreapta e, atunci e este de asemenea şi unitate de stânga şi deci este unitate în G.*

Teorema 1.24. *([90], Teorema 2.4) AG-grupoidul G cu unitate de dreapta e este semigrup comutativ cu unitate.*

Teorema 1.25. *[91] Dacă G este AG-grupoid cu unitate de stânga e, atunci $a \cdot (bc) = b \cdot (ac)$ pentru orice $a, b, c \in G$.*

Definiţia 1.26. *[92] AG-grupoidul G se numeşte AG^{**}-grupoid dacă este satisfăcută legea $a \cdot (bc) = b \cdot (ac)$ pentru orice $a, b, c \in G$.*

Conform Teoremei 1.25, orice AG-grupoid cu unitate de stânga este AG^{**}-grupoid.

Propoziţia 1.27. *[92] Dacă G este AG^{**}-grupoid, atunci are loc*

$$(ab) \cdot (cd) = (db) \cdot (ca)$$

pentru orice $a, b, c, d \in G$.

T.Kepka [93] a studiat intensiv quasigrupurile mediale. Lucrearea [19] a lui J.Ježec şi T.Kepka este dedicată studiului grupoizilor mediali.

În [94] sunt studiaţi grupoizii paramediali simpli zeropotenţi. În [95] T.Kepka demonstrează cum poate fi scufundat un grupoid cancelativ paramedial în quasigrup paramedial.

1.3. Studiul noţiunilor topologice fundamentale

Definiția 1.28. *O familie τ de submulţimi ale mulţimii X se numeşte topologie sau structură topologică pe mulţimea X dacă:*
1. $X \in \tau$;
2. $\emptyset \in \tau$;
3. reuniunea unui număr finit sau infinit de mulţimi din τ este o mulţime din τ, adică $\cup\{U_\alpha : \alpha \in A\} \in \tau$ pentru orice familie $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \subset \tau$;
4. intersecţia unui număr finit de mulţimi din τ este o mulţime din τ, adică $U \cap V \in \tau$ pentru orice familie $U, V \in \tau$.

Perechea (X, τ) se numeşte spaţiu topologic, dacă X este o mulţime şi τ este o topologie pe mulţimea X. Elementele din X se numesc *puncte* ale spaţiului topologic. Elementele din τ se numesc *mulţimi deschise* ale spaţiului topologic. Complementarele mulţimilor deschise se numesc *mulţimi închise*.

Pe orice mulţime X pot fi construite mai multe topologii. Printre acestea există două topologii extreme: $\tau_{max} = \{A : A$ - submulţime a mulţimii $X\}$ şi $\tau_{min} = \{\emptyset, X\}$.

Orice altă topologie τ pe X este intermediară, adică $\tau_{min} \subset \tau \subset \tau_{max}$.

Perechea (X, τ_{min}) este spaţiu topologic şi se numeşte *spaţiu topologic antidiscret.*

Perechea (X, τ_{max}) este spaţiu topologic şi se numeşte *spaţiu topologic discret.*

Definiția 1.29. *Perechea (E, d) se numeşte spaţiu metric, unde E este o mulţime şi pentru orice două elemente $x, y \in E$ este dat un număr $d(x, y)$, care satisface condiţiile:*
1. $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Numărul $d(x, y)$ se numeşte *distanţa* dintre punctele x şi y iar funcţia $d : E \times E \to R^+$ se numeşte *metrică* pe mulţimea E.

Mulţimea $U \subset X$ se numeşte *d-deschisă* sau *deschisă* în spaţiul metric (X, d), dacă, pentru orice punct $x \in U$, există un $\varepsilon > 0$, încât $B(x, \varepsilon) \subset U$.

Totalitatea mulţimilor d-deschise se notează prin $\tau(d)$.

Teorema 1.30. *Familia $\tau(d)$ este o topologie pe mulţimea X.*

Corolarul 1.31. *Orice spaţiu metric este şi spaţiu topologic.*

Definiția 1.32. *Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte spaţiu metrizabil, dacă există o metrică d pe X pentru care $\tau = \tau(d)$.*

Baza spaţiului topologic

Fie (X, τ) un spaţiu topologic. Se numeşte *vecinătate* a punctului $x \in X$ orice mulţime deschisă ce conţine punctul x. Vecinătăţile punctului x se notează cu $O_x, V_x, U_x, O_i x, V_i x, U_i x$. Din această definiţie rezultă, că submulţimea nevidă $U \subset X$ este vecinătate a fiecărui punct al ei atunci şi numai atunci, cînd această mulţime U este deschisă, adică atunci cînd $U \in \tau$.

Intersecţia tuturor mulţimilor închise X ce conţin mulţimea A, $A \subset X$, se numeşte *închiderea mulţimii* A şi se notează cu $[A]_X$ sau $[A]$.

Orice vecinătate a căruiva punct este o mulţime deschisă ce conţine acest punct.

Punctul $x \in X$ se numeşte *punct izolat* în (X, τ) dacă mulţimea $\{X\}$ este vecinătate a punctului x.

Definiția 1.33. *Familia* ß *de submulţimi deschise ale spaţiului topologic* (X, τ) *se numeşte bază a topologiei* τ, *dacă pentru fiecare* $x \in X$ *şi orice vecinătate a acestui punct* U_x *există un element* B_x *din* ß, *care satisface condiţia:* $x \in B_x \subset U_x$.

Teorema 1.34. *Familia* ß *de mulţimi deschise ale spaţiului topologic* (X, τ) *formează o bază a topologiei* τ *atunci şi numai atunci, cînd fiecare element din* τ *este o reuniune de elemente din* ß.

Definiția 1.35. *Sistemul de mulţimi deschise* ß *formează o bază în punctul* $x_0 \in X$, *dacă pentru orice vecinătate* O_{x_0} *a puntului* x_0 *în* X *există o mulţime* $U \in$ ß *astfel încât* $x_0 \in U \subset O_{x_0}$.

Dacă în orice punct al spaţiului există bază numărabilă, atunci se spune că spaţiul satisface *prima axiomă de numărabilitate*.

Teorema 1.36. *Orice spaţiu metric satisface prima axiomă de numărabilitate.*

Prin $|A|$ se notează puterea mulţimii A.

Despre spaţiile, topologia cărora posedă bază numărabilă, se spune că satisfac *a doua axiomă de numărabilitate*.

Axiomele de separare

Axioma T_0: Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte T_0-*spaţiu*, dacă pentru orice două puncte diferite $x, y \in X$ există o mulţime deschisă $U \in \tau$ care conţine doar unul din punctele x, y.

Axioma T_1: Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte T_1-*spaţiu*, dacă pentru orice două elemente diferite $x, y \in X$ există două mulţimi deschise $U, V \in \tau$ astfel încât $x \in U, y \in V$ şi $x \notin V, y \notin U$.

Axioma T_2: Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte T_2-*spaţiu* sau *spaţiu Hausdorff*, dacă pentru orice două elemente diferite $x, y \in X$ există două mulţimi deschise U, V astfel încât $x \in U, y \in V$ şi $U \cap V = \emptyset$.

Axioma T_3: Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte T_3-*spaţiu*, dacă pentru orice punct $x \in X$ şi orice mulţime închisă $F \subset X$, astfel încât $x \notin F$, există două mulţimi deschise $U, V \in \tau$ pentru care $x \in U, F \subset V$ şi $U \cap V = \emptyset$.

Axioma T_4: Spaţiul topologic X se numeşte T_4-*spaţiu*, dacă pentru orice mulţimi închise $F_1, F_2 \subset X$, unde $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, există două mulţimi deschise $U, V \in \tau$, astfel încât $F_1 \subset U, F_2 \subset V$ şi $U \cap V = \emptyset$.

Spaţiul (X, τ) se numeşte *regulat*, dacă el este T_1-spaţiu şi T_3-spaţiu.

Spaţiul (X, τ) se numeşte *normal*, dacă el este T_1-spaţiu şi T_4-spaţiu.

Axioma $T_{3\frac{1}{2}}$: Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte $T_{3\frac{1}{2}}$-*spaţiu* sau *spaţiu Tihonoff*, sau *spaţiu complet regulat*, dacă X este T_1-spaţiu şi pentru orice punct $x \in X$ şi orice mulţime închisă $F \subset X$, astfel încât $x \notin F$, există o funcţie continuă $f : X \to [0, 1]$, pentru care $f(x) = 0$ şi $f(y) = 1$ pentru $y \in F$.

Deci, orice spaţiu normal este un spaţiu complet regulat. Orice spaţiu complet regulat este regulat.

Noţiunea de T_0-spaţiu a fost introdusă de matematicianul A.N.Kolmogorov (1935), T_1-spaţiu de matematicianul maghiar F.Riesz (1907), T_2-spaţiu de matematicianul F.Hausdorff (1914), T_3-spaţiu de L.Vietoris (1921) şi noţiunea de T_4-spaţiu de H.Tietze, P.S.Alexandroff, P.S.Urisohn (1923).

Subspaţii topologice

Fixăm spaţiul topologic (X, τ) şi submulţimea $Y \subset X$. Atunci pe Y se poate de construit o topologie care se numeşte *urma topologiei* τ şi care se notează $\tau \mid Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$.

Perechea $(Y, \tau \mid Y)$ este spaţiu topologic şi se numeşte *subspaţiu* al spaţiului topologic (X, τ).

Trecerea la subspaţii ne permite să construim noi spaţii topologice.

Aderenţa unei mulţimi

Definiția 1.37. *Fie $L \subseteq X$ ş $x \in X$. Punctul x se numeşte punct de acumulare sau punct de aderenţă, sau i se mai spune punct aderent al mulţimii L, dacă orice vecinătate V_x a punctului x intersectează mulţimea L.*

Vom nota totalitatea punctelor de acumulare prin clL sau cl_XL. cl_XL se numeşte *aderenţa mulţimii* L sau *închiderea mulţimii* L.

Teorema 1.38. *Aderenţa mulţimilor satisface următoarele condiţii:*
- $cl(\emptyset) = \emptyset$;
- $L \subset clL$;
- $cl(L \cup H) = clL \cup clH$;
- $cl(cl(L)) = clL$.

Dacă $L \subseteq X$ şi $cl_XL = X$, atunci L se numeşte *mulţime densă în* X.

Numărul cardinal $d(X) = min\{|L| : L$ este o mulţime densă în $X\}$ se numeşte *densitatea spaţiului* X.

Aplicaţii continue

Fie două spaţii topologice (X, τ) şi (Y, τ_1).

Definiția 1.39. *Aplicaţia $f : X \to Y$ se numeşte continuă în punctul $x_0 \in X$, dacă pentru orice vecinătate $O_{f(x_0)}$ a punctului $f(x_0)$ în Y există o vecinătate O_{x_0} a punctului x_0 în X astfel încât $f(O_{x_0}) \subset Of(x_0)$.*

Dacă aplicaţia f este continuă în orice punct din X, atunci f se numeşte aplicaţie continuă.

Teorema 1.40. *Pentru aplicaţia $f : X \to Y$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
- *f este o aplicaţie continuă;*
- *dacă mulţimea F este închisă în Y, mulţimea $f^{-1}(F)$ este închisă în X (preimaginea mulţimii închise este o mulţime închisă);*
- *dacă mulţimea U este deschisă în Y, mulţimea $f^{-1}(U)$ este deschisă în X (preimaginea mulţimii deschise este o mulţime deschisă);*
- $f(cl_XL) \subseteq cl_Yf(L)$ *pentru* $L \subseteq X$;
- $cl_Xf^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(cl_Y(H))$ *pentru* $H \subseteq X$.

Definiția 1.41. *Fie X şi Y spaţii topologice. Aplicaţia $f : X \to Y$ se numeşte omeomorfism sau homeomorfism, dacă:*
1. *f este o aplicaţie continuă;*
2. *f este bijectivă;*
3. *f^{-1} este o aplicaţie continuă.*

În acest caz spaţiile topologice X şi Y se numesc spaţii omeomorfe.

Definiția 1.42. *Dacă $f : X \to Y$ este omeomorfism, atunci f se numeşte transformare topologică a spaţiului topologic X.*

Teorema 1.43. *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi fie $f : X \to Y$ o aplicaţie a mulţimii X pe mulţimea Y. Atunci $\tau(Y, f) = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \in \tau\}$ este o topologie pe mulţimea Y şi aplicaţia f este continuă.*

Teorema 1.44. *Topologia $\tau(Y, f)$ construită în Teorema 1.43 se numeşte factor topologie sau topologie - cât pe mulţimea Y.*

Dacă pentru aplicaţia $f : X \to Y$ a spaţiilor topologice (X, τ) şi (Y, τ_1) avem $\tau_1 = \tau(Y, f)$ atunci aplicaţia f se numeşte aplicaţie factor sau aplicaţie-cât.

Mai multe proprietăţi care ţin de construcţii topologice sunt examinate în [83], [96]–[105].

Spaţii compacte

Fixăm spaţiul topologic (X, τ).

Definiția 1.45. *Se numeşte acoperire a mulţimii X o familie $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de submulţimi ale mulţimii X pentru care $X = \cup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Acoperirea γ se numeşte deschisă, dacă elementele ei U_α sunt mulţimi deschise.*

Definiția 1.46. *Acoperirea γ_1 a mulţimii X se numeşte subacoperire a acoperirii γ a aceleeaşi mulţimi X, dacă $\gamma_1 \subset \gamma$.*

Definiția 1.47. *Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte spaţiu compact, dacă orice acoperire deschisă a sa conţine o subacoperire finită.*

Definiția 1.48. *Orice subspaţiu închis al unui spaţiu compact este un spaţiu compact.*

Teorema 1.49. *Imaginea unui spaţiu compact prin orice aplicaţie continuă este un spaţiu compact.*

Definiția 1.50. *Spaţiul topologic X se numeşte numărabil compact, dacă din orice acoperire numărabilă deschisă a sa se poate extrage o subacoperire finită.*

Orice spaţiu compact este şi numărabil compact.

Definiția 1.51. *Spaţiul topologic X se numeşte spaţiu pseudocompact, dacă X este complet regulat şi fiecare funcţie de variabilă reală continuă pe X este mărginită.*

Profesorul A.V.Arhangel'skii examinează mai multe proprietăţi a spaţiilor compacte în lucrările [106], [107].

Spaţii paracompacte şi local compacte

Definiția 1.52. *Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte paracompact dacă satisface condiţiile:*
1. (X, τ) este spaţiu Hausdorff;
2. Orice acoperire deschisă a spaţiului X admite o rafinare deschisă local finită.

Definiția 1.53. *Spaţiul topologic X se numeşte spaţiu Lindelöf dacă X este regulat şi din fiecare acoperire deschisă a spaţiului X poate fi extrasă o subacoperire numărabilă.*

Clasa spaţiilor paracompacte conţine spaţiile compacte, spaţiile metrizabile şi spaţiile Lindelöf.

Definiția 1.54. *Spaţiul topologic X se numeşte local compact dacă pentru orice punct $x \in X$ există o vecinătate U astfel încât $[U]$ este subspaţiu compact în X.*

Orice spaţiul local compact este spaţiu Tihonov.

Spaţii conexe

Definiția 1.55. *Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte conex, dacă nu există două mulţimi deschise şi nevide U, V pentru care $X = U \cup V$, iar $U \cap V = \emptyset$.*

Definiția 1.56. *Mulţimea $A \subset X$ se numeşte conexă, dacă este subspaţiu conex.*

Definiția 1.57. *Considerăm (X, τ) spaţiu topologic. Mulţimea $C(x) = \cup\{A \subset X : x \in A, A$ este o mulţime conexă$\}$ se numeşte componentă conexă a punctului x în spaţiul X.*

Definiția 1.58. *Spaţiul X se numeşte liniar conex, dacă pentru orice două puncte $a, b \in X$ există o aplicaţie continuă $f : [0,1] \to X$ la care $f(0) = a$ şi $f(1) = b$.*

Orice spaţiu liniar conex este conex.

Produsul spaţiilor topologice

Fie $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in A\}$ o familie de spaţii topologice. Pe produsul cartezian $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ construim topologia τ generată de baza ß $= \{\prod\{V_\alpha : \alpha \in A\} : V_\alpha \in \tau_\alpha$ şi $\beta \in A : V_\beta \neq X_\beta$ este o mulţime finită$\}$.

Spaţiul (X, τ) se numeşte *produsul spaţiilor topologice* $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in A\}$. Produsul spaţiilor topologice a fost introdus de Tihonov în anul 1930. Produsul unui număr finit de spaţii topologice a fost cercetat de E.Steinitz (1908) şi de M.Fréchet (1910). A.N.Tihonov a demonstrat, că produsul oricărui număr de spaţii compacte este un spaţiu compact.

Teorema 1.59. *Produsul a T_i-spaţii, unde $i = \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, este un T_i-spaţiu.*

Remarca 1.60. *Produsul a două T_4-spaţii nu întotdeauna este T_4-spaţiu.*

Noţiune de grup topologic

Definiția 1.61. *Grup topologic se numeşte mulţimea G, înzestrată cu structură de spaţiu topologic şi structură de grup astfel încât se îndeplinesc următoarele axiome:*
1. Operaţia $(\cdot)$, adică aplicaţia $G \times G \to G : (x, y) \to xy$ în grupul G este continuă;
2. Aplicaţia $\psi : G \to G, \psi(a) = a^{-1}$, este continuă.

În limbajul vecinătăţilor definim grupul topologic în felul următor:

Definiția 1.62. *Grup topologic se numeşte mulţimea G, înzestrată cu structură de spaţiu topologic şi structura de grup astfel încât se îndeplinesc următoarele axiome:*
1. pentru orice pereche $(a, b) \in G \times G$ şi orice vecinătate W a elementului ab vor exista astfel de vecinătăţi $U \ni a$, a elementului a şi $V \ni b$, a elementului b, astfel încât $UV \subset W$;
2. pentru orice element $a \in G$ şi orice vecinătate V a elementului a^{-1}, va exista estfel de vecinătate U a elementului a, astfel încât $U^{-1} \subset V$.

În lucrările [11]–[110] au fost cercetate şi obţinute rezultate interesante care ţin de grupuri topologice, inele topologice şi module topologice.

O serie de proprietăţi importante despre grupurile topologce au fost stabilite în lucrările [97], [111]–[125].

Proprietăţi topologice definite pe structura de grup

Fie $a \in G$ careva element fixat al grupului topologic G.

Aplicaţia $L_a : G \to G, L_a(g) = ag, g \in G$ se numeşte *translaţie de stânga* a grupului G peste elementul a.

Aplicaţia $R_a : G \to G, R_a(g) = ga, g \in G$ se numeşte *translaţie de dreapta* a grupului G peste elementul a.

Aplicaţia $I_a : G \to G, I_a(g) = aga^{-1}, g \in G$ se numeşte *automorfism intern* a grupului G peste elementul a.

Notăm $\psi : G \to G, \psi(a) = a^{-1}$.

Teorema 1.63. *Aplicaţiile L_a, R_a, I_a, ψ sunt omeomorfisme ale spaţiului topologic G.*

Grupoid topologic

Definiția 1.64. *Dacă grupoidul G este înzestrat cu structură de spaţiu topologic şi operaţia multiplicativă $(a, b) \to a \cdot b$ este continuă, atunci $(G, \cdot)$ se numeşte grupoid topologic.*

Definiția 1.65. *Dacă în grupoidul topologic $(G, \cdot)$, diviziunile primitive l şi r sunt continui, atunci vom spune că $(G, \cdot)$ este grupoid topologic primitiv cu diviziuni continui.*

Definiția 1.66. *Dacă operaţia multiplicativă din quasigrupul $(G, \cdot)$ este continuă atunci G se numeşte quasigrup semitopologic.*

Definiția 1.67. *Dacă în quasigrupul semitopologic $(G, \cdot)$, diviziunile l şi r sunt continui, atunci G se numeşte quasigrup topologic.*

1.4. Analiza rezultatelor şi construcţiilor topologo-algebrice

Izotopi omogeni

Definiția 1.68. *Fie $(G, +)$ grupoid topologic. Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte izotop omogen al grupoidului topologic $(G, +)$ dacă există două automorfisme topologice $\varphi, \psi : (G, +) \to (G, +)$ astfel încât: $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$ pentru orice $x, y \in G$.*

Pentru orice aplicaţie $f : X \to X$ vom nota $f^1(x) = f(x)$ şi $f^{n+1}(x) = = f(f^n(x))$ pentru orice $n \geq 1$.

Definiția 1.69. *Fie $n, m \leq \infty$. Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte (n, m)-izotop omogen al grupoidului topologic $(G, +)$ dacă există două automorfisme topologice $\varphi, \psi : (G, +) \to (G, +)$ astfel încât:*

1. *$x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$ pentru orice $x, y \in G$;*
2. *$\varphi\psi = \psi\varphi$;*
3. *Dacă $n < \infty$, atunci $\varphi^n(x) = x$ pentru orice $x \in G$;*
4. *Dacă $m < \infty$, atunci $\psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$.*

Definiția 1.70. *Fie $(G, +)$ grupoid topologic. Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte izotop al grupoidului $(G, +)$, dacă există două omeomorfisme topologice $\varphi, \psi : (G, +) \to (G, +)$ astfel încât $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$, pentru orice $x, y \in G$.*

Conform Definiţiei 1.70 putem spune că izotopul $(G, \cdot)$ este generat de omeomorfismele φ, ψ ale grupoidului topologic $(G, +)$. Vom nota izotopul dat prin $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi)$.

Teorema 1.71. *Fie $(G, +)$ grupoid topologic, $\varphi, \psi : G \to G$ două automorfisme şi $(G, \cdot) = = g\,(G, +, \varphi, \psi)$. Atunci:*

1. $(G,+) = (G,\cdot,\varphi^{-1},\psi^{-1})$;

2. $(G,\cdot)$ *este grupoid topologic;*

3. *Dacă* $(G,+)$ *este grupoid reductibil, atunci* $(G,\cdot)$ *este de asemenea grupoid reductibil;*

4. *Dacă* $(G,+)$ *este grupoid cu diviziuni, atunci* $(G,\cdot)$ *este de asemenea grupoid cu diviziuni;*

5. *Dacă* $(G,+)$ *este grupoid topologic primitiv cu diviziuni, atunci* $(G,\cdot)$ *este de asemenea grupoid topologic primitiv cu diviziuni;*

6. *Dacă* $(G,+)$ *este quasigrup topologic, atunci* $(G,\cdot)$ *este de asemenea quasigrup topologic;*

7. *Dacă* $n,m,p,k \in N$ *şi* $(G,\cdot)$ *este un* (n,m)*-izotop omogen al grupoidului* $(G,+)$ *şi* e *este* (k,p)*-zero element în* $(G,+)$*, atunci* e *este* (mk,np)*-unitate în* $(G,\cdot)$.

Teorema 1.72. *Fie* $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$ *izotop al grupoidului topologic primitiv* $(G,+)$ *cu diviziunile* $\{r,l\}$, φ,ψ *două automorfisme topologice în* $(G,+)$*, şi* α *este o congruenţă pe grupoidul* $(G,+,l,r)$*. Atunci:*

1. *Dacă* $(G,\cdot)$ *este izotop omogen, atunci există o mulţime numărabilă de congruenţe* $\{\beta_n : n \in N\}$ *în grupoidul* $(G,+)$*, conjugată cu* α*, astfel încât* $\alpha \in \{\beta_n : n \in N\}$ *şi* $\beta = \cap\{\beta_n : n \in N\}$ *este o congruenţă comună a grupoizilor* $(G,+)$ *şi* $(G,\cdot)$.

2. *Dacă* $(G,\cdot)$ *este un* (n,m) *- izotop omogen al grupoidului* $(G,+)$*, şi* $n,m < +\infty$*, atunci există o muţime finită de congruenţe* $\{\beta_i : i \le n\cdot m\}$ *în grupoidul* $(G,+)$*, conjugată cu* α*, astfel încât* $\beta = \cap\{\beta_i : i \le n\cdot m\}$ *este o congruenţă comună a grupoizilor* $(G,+)$ *şi* $(G,\cdot)$.

Demonstraţie. Fie $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ mulţimea numerelor întregi. Dacă $n = 0$, atunci $\varphi^0(x) = x$ pentru orice $x \in G$. Dacă $n \in Z$ şi $n < 0$, atunci $\varphi^n = (\varphi^{-1})^{-n}$. Notăm prin $\{h_n : n \in Z\}$ mulţimea tuturor automorfismelor

$$\{\varphi^{k_1} \circ \psi^{m_1} \circ \varphi^{k_2} \circ \psi^{m_2} \circ ... \circ \varphi^{k_n} \circ \psi^{m_n} : n \in N\}$$

şi

$$\{k_1, m_1, ..., k_n, m_n \in Z\}.$$

Dacă $\varphi\psi = \psi\varphi$, atunci

$$\{h_n : n \in Z\} = \left\{\varphi^k \circ \psi^m : k, m \in Z\right\}.$$

Pentru fiecare $n \in N$ definim congruenţa $\beta_n(x) = h_n(\alpha(x))$ pentru orice $x \in G$.

Notăm $\beta = \cap\{\beta_k : k \in N\}$. Atunci $\varphi(\beta(x)) = \psi(\beta(x)) = \beta(x)$ pentru fiecare $x \in G$. Prin urmare β este o congruenţă comună a grupoizilor $(G, +)$ şi $(G, \cdot)$. Presupunem că automorfismele φ and ψ satisfac Definiţiei 1.69 şi $(G, \cdot)$ este (n, m)-izotop în grupoidul $(G, +)$. În acest caz avem

$$\varphi^{k_1} \cdot \psi^{q_1} \cdot \varphi^{k_2} \cdot \psi^{q_2} \cdot \ldots \cdot \varphi^{k_n} \cdot \psi^{q_n} = \left(\varphi^{k_1+\ldots+k_n}\right) \cdot \left(\psi^{q_1+\ldots+q_n}\right)$$

Astfel

$$\{h_k : k \in N\} = \left\{\varphi^i \cdot \psi^j : i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m\right\} = \{h_k : k \leq n \cdot m\}$$

şi mulţimea $\{\beta_n : n \in N\}$ este finită şi conţine numai mult de $n \cdot m$ elemente distincte.

Teorema este demonstrată.

Remarca 1.73. *Fie α şi β două congruenţe conjugate în grupoidul topologic G. Atunci:*

1. Mulţimile $\alpha(x)$ sunt G_δ-mulţimi dacă şi numai dacă mulţimile $\beta(x)$ sunt G_δ-mulţimi în G.

2. Mulţimile $\alpha(x)$ sunt închise în G dacă şi numai dacă mulţimile $\beta(x)$ sunt închise în G.

3. Mulţimile $\alpha(x)$ sunt deschise în G dacă şi numai dacă mulţimile $\beta(x)$ sunt deschise în G.

Remarca 1.74. *Fie $\{\beta_n : n \in N' \subset N\}$ o familie de congruenţe în grupoidul topologic G şi $\beta = \cap\{\beta_n : n \in N\}$. Atunci:*

1. *Dacă mulţimile $\beta_n(x)$ sunt G_δ-mulţimi în G, atunci mulţimile $\beta(x)$ sunt de asemenea G_δ-mulţimi în G.*

2. *Dacă mulţimea N' este finită şi mulţimile $\beta_n(x)$ sunt deschise, atunci mulţimile $\beta(x)$ sunt de asemenea mulţimi deschise în G.*

Unele proprietăţi a quasigrupurilor omogene au fost examinate în [55], [126] - [129].

Proprietăţi generale a quasigrupurilor topologice mediale

Fie $(G,\cdot)$ quasigrup topologic. În baza Teoremei Toyoda [87] există pe G, o operaţie binară $(+)$, două elemente $0, c \in G$ şi două automorfisme topologice $\varphi, \psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încât $(G,+)$ grup topologic comutativ, 0 este element zero în $(G,+)$ şi quasigrupul $(G,\cdot) = g\,(G,+,\varphi,\psi,0,c)$ este izotop omogen în $(G,+)$. În particular, $\varphi\psi = \psi\varphi$.

În [27], [28] G.B. Belyavskaya a demonstrat o generalizare a Teoremei Toyoda [87].

Teorema 1.75. *Fie $(G,+)$ quasigrup topologic, $0 \in G, 0+0=0, \varphi, \psi$ două automorfisme în $(G,+)$ ş $(G,\cdot) = (G,+,\varphi,\psi)$. Atunci:*

1. *$\{0\}$ este subquasigrup al quasigrupului $(G,+)$ şi $(G,\cdot)$.*

2. *Dacă $n < +\infty$, atunci 0 este (n,∞)-unitate în $(G,\cdot)$ dacă şi numai dacă $\varphi^n(x) = x$ pentru orice $x \in G$.*

3. *Dacă $m < +\infty$, atunci 0 este (∞, m)-unitate în $(G,\cdot)$ dacă şi numai dacă $\psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$.*

4. *Dacă $n, m < +\infty$, atunci 0 este (n,m)-unitate în $(G,\cdot)$ dacă şi numai dacă $\varphi^n(x) = = \psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$.*

Demonstraţie. Fie $n < +\infty$. Dacă $\varphi^n(x) = x$ pentru fiecare $x \in G$, atunci conform Teoremei avem că 0 este $(n,+\infty)$-unitate în $(G,\cdot)$.

Fie 0 este (n,∞)-unitate în $(G,\cdot)$. Din relaţia, $\varphi\,(0) = \psi\,(0) = 0$ şi $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$. Atunci $(x,0)\,k = \varphi^k(x)$ şi $(0,x)\,k = \varphi^k(x)$ pentru orice $k \in N$. Deoarece $(x,0)\,n = x$ obţinem că $\varphi^n(x) = x$.

Teorema este demonstrată.

Considerăm pe G relaţia de echivalenţă α. Notăm prin G/α mulţimea claselor de echivalenţă $\alpha\,(x)$ şi $\pi_\alpha : G \to G/\alpha$ este proiecţie naturală. Pe G/α considerăm topologia cât. Aplicaţia π_α este continuă. Dacă α este o congruenţă în $(G,\cdot)$ (sau în $(G,+)$), atunci aplicaţia π_α este deschisă.

Relaţia de echivalenţă α din G se numeşte compactă dacă mulţimile $\alpha\,(x)$ sunt compacte.

Teorema 1.76. *Fie $(G,+)$ grup topologic comutativ, 0 element zero în $(G,+)$, $c \in G$, φ şi ψ două automorfisme topologice în grupul $(G,+)$ şi $(G,\cdot) = g\,(G,+,\varphi,\psi,0,c)$. Dacă spaţiul G conţine o submulţime compactă nevidă numărabilă F, atunci pentru orice submulţime* *deschisă U din G care conţine elementul 0 există o relaţie de echivalenţă compactă α_U pe G astfel încât:*

1. *$\alpha_U(0) \subseteq U$.*

2. *α_U este congruenţă în $(G, \cdot)$.*

3. *α_U este congruenţă în $(G, +)$.*

4. *Aplicaţia $\pi_U = \pi_{\alpha_U} : G \to G/\alpha_U$ este o aplicaţie deschisă perfectă.*

5. *Spaţiul G/α_U este metrizabil.*

Demonstraţie. Considerăm că $0 \in F \subseteq U$. Fie $\{U_n : n \in N\}$ o secvenţă fixă în submulţimea deschisă G astfel încât pentru orice mulţime deschisă V ce conţine F există $n \in N$ astfel încât $F \subseteq U_n \subseteq V$. Considerăm că $F \subseteq U_n$ şi $U_{n+1} \subseteq U_n$ pentru orice $n \in N$.

Atunci există secvenţa $\{V_n : n \in N\}$ în mulţimile deschise din G astfel încât:

- $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n \subseteq U_n$, $\quad cl_G V_{n+1} \subseteq V_n$ şi $V_n = -V_n$ pentru orice $n \in N$,

- $\varphi(V_{n+1}) \cup \psi(V_{n+1}) \subseteq V_n$ pentru orice $n \in N$.

Fie $H = \cap\{V_n : n \in N\}$. Din relaţia dată, H este subgrupoid compact şi proiecţia sa naturală $\pi : G \to G/H$ este deschisă şi perfectă. Fie $\alpha(x) = x + H$ pentru orice $x \in G$. Atunci α este o congruenţă în $(G, +)$. Presupunem că $x\alpha z$ şi $y\alpha v$. Atunci

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \varphi(x) + \psi(y) + c, \\ z \cdot v &= \varphi(z) + \psi(v) + c, \\ \varphi(x) - \varphi(z) &\in H,\ \psi(y) - \psi(v) \in H. \end{aligned}$$

Astfel

$$(x \cdot y) - (z \cdot v) =$$
$$= (\varphi(x) + \psi(y)) - (\varphi(z) + \psi(v)) =$$
$$= (\varphi(x) - \varphi(z)) + (\psi(y) - \psi(v)) \in H.$$

Prin urmare α este de asemenea o congruenţă în $(G, \cdot)$.

Este clar că spaţiul G/H este metrizabil.

Teorema este demonstrată.

Corolarul 1.77. *Quasigrupul topologic medial numărabil de speţa 1 este metrizabil.*

Spaţiul X se numeşte paracompact p-spaţiu dacă există o aplicaţie perfectă $g : X \to Y$ pe un spaţiu metrizabil Y [107].

Corolarul 1.78. *Dacă quasigrupul topologic medial conţine o submulţime compactă nevidă numărabilă atunci quasigrupul dat este spaţiu paracompact p-spaţiu şi admite un omomorfism deschis perfect pe quasigrupul medial metrizabil.*

Corolarul 1.79. *Quasigrupul medial local compact este paracompact şi admite un omomorfism deschis perfect pe quasigrupul medial local compact metrizabil.*

Rezultate interesante, care ţin de algebra topologică au fost obţinute de academicianul M.Cioban şi discipolii săi în [130]-[153].

Unele proprietăţi a quasigrupurilor mediale şi distributive au fost cercetate în [24], [35], [36], [154]–[160].

În continuare vom examina unele dintre cele mai recente lucrări care se referă la proprietăţile grupoizilor topologici cu diviziuni.

Quasigrupul $(Q, \cdot)$ se numeşte IM-quasigrup dacă sunt satisfăcute relaţiile de idempotenţă $aa = a$ şi medialitate $ab \cdot cd = ac \cdot bd$.

În articolul [161] se studiază quasigrupurile pentagonale, care în principiu sunt IM-quasigrupuri cu o proprietate suplimentară. În acest sens s-a demonstrat că pentru orice quasigrup pentagonal $(Q, \cdot)$ există un grup Abelian $(Q, +)$ cu automorfismul φ astfel încât $\varphi^4 - 3\varphi^3 + 4\varphi^2 - 2\varphi + 1 = 0$ şi $a \cdot b = a + \varphi(b - a)$ pentru orice $a, b \in Q$.

De asemenea a fost demonstrat că: dacă $(Q, \cdot)$ este quasigrup pentagonal şi operaţia binară $* : Q \times Q \to Q$ este definită astfel $a * b = b \cdot (ba \cdot a)a$, atunci $(Q, *)$ este quasigrup pentagonal.

În articolul [162] s-a demonstrat ca în IP-bucla topologică local compactă, a cărei topologie este indusă de o uniformitate invariantă de stânga, există cel puţin o masură Haar de stânga. De asemenea s-a arătat existenţa unei măsuri Haar de dreapta în fiecare IP-buclă topologică local compactă, a cărei topologie este indusă de o uniformitate invariantă de dreapta, care rezultă din existenţa unei măsuri Haar de stânga regulare, din considerentele că IP-bucla topologică G^* este duală pentru G. Se accentuează faptul că măsura Haar nu este unică deoarece pentru orice masură Haar m şi orice număr pozitiv c produsul $c \cdot m$ este de asemenea o măsură Haar.

În [163] s-a examinat o metodă de decompoziţie a grupoidului Abel-Grassmann. În acest context s-a demonstrat că dacă S este un AG^*-grupoid atunci S/ρ este izomorf cu S/σ pentru $n, m \geq 2$, unde ρ, σ sunt relaţii de congruenţă. Mai mult ca atât, S/η este o semilatice separativă omomorfică imaginii unui AG-grupoid S cu unitate de stânga unde η

este o relaţie de congruenţă.

În [164], autorii Hofmann K.H. şi Martin J.R. a fost definit conceptul de buclă topologică de stânga care este o generalizare a noţiunii de buclă topologică.

Bucla topologică de stânga este definită ca o mulţime X cu operaţia multiplicativă $(x, y) \mapsto xy$ şi unitate de dreapta e, adică $xe = x$, pentru orice $x \in X$, astfel încât pentru orice $a, b \in X$, ecuaţia $ax = b$ are soluţie unică pentru x.

Aplicând acest concept au fost studiate unele spaţii topologice. În particular s-a examinat corelaţia dintre bucla topologică de stânga şi H-spaţiu. Pentru spaţiile compacte s-a arătat la fel legătura cu structura buclei topologice de stânga.

În lucrarea [165] s-a făcut o trecere în revistă a teoriei quasigrupurilor distributive. Au fost examinate rezultate, obţinute de diferiţi matematicieni şi în diferite perioade de timp, care se referă la izotopia buclelor, reprezentarea liniară a quasigrupurilor, reprezentarea omogenă a quasigrupurilor.

1.5. Concluzii la Capitolul 1

Cercetările în domeniul algebrei topologice au fost iniţiate în a doua jumătate a secolului XIX-lea. Algebra topologică, ca ramură a matematicii moderne, se află la frontiera dintre topologia generală şi algebra abstractă. Metodele elaborate şi rezultatele obţinute în acest domeniu de mare interes ştiinţific sunt cu succes implementate nu numai în matematica teoretică dar şi în matematica aplicată şi sisteme informaţionale.

După cum s-a menţionat problema principală a algebrei topologice constă în studierea concordanţei dintre proprietăţile algebrice şi topolologice ale E-algebrelor topologice G din clasa $V(E, i, J)$. Această problemă are un aspect larg şi poate fi soluţionată efectiv numai pentru anumite clase de algebre topologice, care se reprezintă prin fixarea operaţiilor algebrice şi identităţilor algebrice.

În acest aspect cecetările fundamentale au fost efectuate pentru grupuri topologice, inele şi module topologice. Dar această problemă este insuficient cercetată pentru grupoizi topologici. Clasa de grupoizi topologici conţine şi clasa de grupuri topologice şi clasa de quasigrupuri topologice.

Un interes ştiinţific special îl reprezintă direcţiile de cercetare în teoria grupoizilor topologici care este determinată atât de cercetările structurilor algebrice precum semigrupuri, monoizi, grupuri şi quasigrupuri cât şi de investigaţiile şi rezultatele în topologia generală.

Menţionăm că clasa de grupoizi topologici este foarte largă. Prin urmare sunt necesare anumite restricţii asupra grupoizilor pentru a cerceta concordanţa dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale acestora. De exemplu, grupoizi cu unităţi multiple, grupoizi cu diviziuni continui etc.

Astfel, studierea concordanţei dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoidului topologic de un anumit tip este o problemă centrală în teoria sistemelor topologo-algerbrice. Aceste aspecte nu au fost studiate în ultimii ani. Din acest punct de vedere este actuală următoare problemă de cercetare.

Problemă de cercetare: *Elaborarea unor noi metode de cercetare a grupoizilor topologici cu diviziuni ce vor conduce la determinarea corelaţiilor dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoizilor cu unităţi multiple şi diviziuni continui.*

Pentru a rezolva problema respectiva este necesar efectuarea cercetărilor care ţin de:

- elaborarea metodelor de cercetare a condiţiilor pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni sunt deschise;

- elaborarea metodelor de studiere a proprietăţilor algebrice a (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici;

- dezvoltarea metodelor de cercetare a proprietăţilor subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni;

- elaborarea metodelor de determinare a condiţiilor pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta;

- elaborarea metodelor de construcţie a quasigrupurilor mediale, neasociative şi neparamediale;

- elaborarea metodelor de construcţie a quasigrupurilor paramediale, neasociative şi nemediale.

2. STUDIUL GRUPOIZILOR TOPOLOGICI CU DIVIZIUNI ŞI UNITĂŢI MULTIPLE

În acest capitol s-au studiat grupoizii topologici care au proprietăţi asemănătoare buclelor topologice.

Astfel, s-au examinat unele proprietăţi ale izotopilor (n, m)-omogeni ai grupoizilor topologici mediali. De asemenea s-au cercetat grupoizii topologici primitivi cu diviziuni, relaţia dintre paramedialitate şi asociativitate.

În paragraful 2.1 s-a definit noţiunea de unitate multiplă introdusă în [46]. Acest concept a facilitat studiul grupoizilor topologici cu (n, m)-unităţi. De asemenea au fost descrise un şir de exemple de grupoizi ce conţin (n, m)-unităţi.

Modul de construcţie a quasigrupurilor mediale, cu (n, m)-unităţi, prin utilizarea izotopiilor în grupurile topologice a fost redat în paragraful 2.2.

Rezultatele indicate în paragraful 2.3 se referă la rezultatele obţinute de M.Cioban şi L.Chiriac [152] şi rezultatele obţinute în lucrările [46, 55, 166, 167, 168]. Vom demonstra că, dacă $(G, +)$ este grupoid topologic medial şi e este element (k, p)-zero, atunci orice (n, m)-izotop omogen $(G, \cdot)$ al lui $(G, +)$ este medial, cu (mk, np)-unitatea e în $(G, \cdot)$. Vom prezenta câteva proprietăţi interesante a clasei de quasigrupuri (n, m)-omogene.

K.Sigmon, continuînd cercetările Profesorului A.D.Wallace, a arătat că ori de câte ori un grupoid topologic medial conţine un element idempotent bijectiv, acesta poate fi obţinut din careva semigrup topologic comutativ [169].

În paragraful 2.4 au fost cercetaţi grupoizii topologici primitivi cu diviziuni utilizând următoarea Teoremă de bază:

Teorema A. *Fie $(G, +)$ grupoid topologic, $\varphi, \psi : (G, +) \to (G, +)$ este omeomorfism şi $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi)$. Atunci:*

1. $(G, +) = g(G, \cdot, \varphi^{-1}, \psi^{-1})$;

2. $(G, \cdot)$ este grupoid topologic;

3. Dacă $(G, +)$ este grupoid reductibil, atunci $(G, \cdot)$ este de asemenea grupoid reductibil;

4. Dacă $(G, +)$ este grupoid cu diviziuni, atunci $(G, \cdot)$ este de asemenea grupoid cu diviziuni;

5. Dacă $(G, +)$ este grupoid topologic primitiv cu diviziuni, atunci $(G, \cdot)$ este de asemenea grupoid topologic primitiv cu diviziuni;

6. Dacă $(G,+)$ este quasigrup topologic, atunci $(G,\cdot)$ este de asemenea quasigrup topologic;

7. Dacă $n,m,p,k \in N$ şi $(G,\cdot)$ este (n,m)-izotop omogen al grupoidului $(G,+)$ şi e este (k,p)-zero în $(G,+)$, atunci e este (mk,np)-unitate în $(G,\cdot)$.

Paragraful 2.5 include studiul (n,m)-izotopilor omogeni în AG-grupoizii topologici cu unităţi multiple şi unele proprietăţi a quasigrupurilor topologice paramediale. Vom demonstra ca, dacă $(G,+)$ este AG-grupoid topologic şi e este $(1,p)$-zero element, atunci orice $(n,1)$-izotop omogen $(G,\cdot)$ al lui $(G,+)$ este AG-grupoid, cu $(1,np)$-unitatea e în $(G,\cdot)$.

În paragraful 2.6 se va demonstra că: dacă P este mulţime compactă deschisă cu unitate de dreapta a buclei paramediale de dreapta G, atunci P conţine o subbuclă paramedială compactă deschisă cu unitate de dreapta Q. Acest rezultat a fost obţinut de către L.S.Pontryagin pentru grupuri topologice în Teorema 16 din [4] şi de către L.L.Chiriac pentru quasigrupuri mediale topologice cu unitate de stânga în [170].

Rezultatele din [56, 171] despre conexiunea dintre paramedialitate şi asociativitate s-au descris în paragrraful 2.7.

Unele proprietăţi ale grupoizilor topologici paramediali, [59, 61], au fost scoase în evidenţă în paragraful 2.8.

În paragraful 2.9 s-a redat modul de obţinere a celor două quasigrupuri paramediale, nemediale şi neizomorfe.

2.1. Conceptul de unitate multiplă. Exemple

Definiția 2.1. *Elementul e se numeşte idempotent dacă $ee = e$. Dacă aplicaţiile $x \to xe$ şi $x \to ex$ sunt omeomorfisme atunci e mai este numit bijectiv.*

Considerăm grupoidul $(G,+)$. Pentru fiecare două elemente $a,b \in (G,+)$ avem:

$$1(a,b,+) = (a,b,+)1 = a+b,$$
$$n(a,b,+) = a + (n-1)(a,b,+),$$
$$(a,b,+)n = (a,b,+)(n-1) + b$$

pentru orice $n \geq 2$.

Dacă operaţia binară $(+)$ este fixată pe mulţimea G, atunci vom folosi notaţiile $n(a,b)$ şi $(a,b)n$ în loc de $n(a,b,+)$ şi $(a,b,+)n$.

Definiția 2.2. *Fie $(G, +)$ grupoid, $n \geq 1$ şi $m \geq 1$. Elementul e al grupoidului $(G, +)$ se numeşte (n, m)-zero în G, dacă:*

1. $e + e = e$;

2. $n(e, x) = x$, pentru orice $x \in G$;

3. $(x, e)m = x$, pentru orice $x \in G$.

Dacă în definiţia 2.2 au loc condiţiile 1 şi 2, vom spune că e se numeşte (n, ∞)-zero, dacă se îndeplinesc condiţiile 1 şi 3, vom spune că e se numeşte (∞, m)-zero. Clar că e este (n, m)-zero, dacă e este în acelaşi timp (n, ∞) şi (∞, m)-zero, pentru orice $x \in G$.

Fie $(G, \cdot)$ grupoid multiplicativ. Atunci elementul e se numeşte (n, m)-*unitate.* Noţiunea de (n, m)-unitate a fost introdusă de către M. Cioban şi L. Chiriac în [46].

Exemplul 2.3. *Fie $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ grupoid. Definim operaţia binară în felul următor $\{\cdot\}$.*

Tabelul 2.1. Exemplu de quasigrup hexagonal necomutativ

$(\cdot)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	8	6	2	9	4	3	7	5
2	4	2	9	5	3	7	6	1	8
3	7	5	3	8	6	1	9	4	2
4	6	1	8	4	2	9	5	3	7
5	9	4	2	7	5	3	8	6	1
6	3	7	5	1	8	6	2	9	4
7	8	6	1	9	4	2	7	5	3
8	2	9	4	3	7	5	1	8	6
9	5	3	7	6	1	8	4	2	9

Atunci $(G, \cdot)$ este quasigrup hexagonal necomutativ şi fiecare element din $(G, \cdot)$ este $(6, 6)$-unitate.

Quasigrupurile haxagonale au fost studiate în [172].

Exemplul 2.4. *Fie $(G, \cdot)$ grupoid paramedial, $e \in G$ şi $ex = x$ pentru orice $x \in G$. Atunci $(G, \cdot)$ este grupoid paramedial şi e este $(1, 2)$-unitate în G. Într-adevăr, dacă $x \in G$, atunci $xe \cdot e = xe \cdot ex = ee \cdot ex = e \cdot ex = e \cdot x = x$.*

Exemplul 2.5. *Fie $(G,\cdot)$ grupoid paramedial, $e \in G$ şi $xe = x$ pentru orice $x \in G$. Atunci $(G,\cdot)$ este grupoid paramedial cu $(2,1)$-unitate e în G. Într-adevăr, dacă $x \in G$, atunci $e \cdot ex = ee \cdot ex = xe \cdot ee = xe \cdot e = xe = x$.*

2.2. Izotopi omogeni

Definiția 2.6. *Fie $(G,+)$ grupoid topologic. Grupoidul $(G,\cdot)$ se numeşte izotop omogen al grupoidului topologic $(G,+)$ dacă există două automorfisme topologice $\varphi,\psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încît: $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$ pentru orice $x, y \in G$.*

Pentru orice aplicaţie $f : X \to X$ vom nota $f^1(x) = f(x)$ şi $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ pentru orice $n \geq 1$.

Definiția 2.7. *Fie $n, m \leq \infty$. Grupoidul $(G,\cdot)$ se numeşte (n,m)-izotop omogen al grupoidului topologic $(G,+)$ dacă există două automorfisme topologice $\varphi,\psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încît:*

1. *$x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$ pentru orice $x, y \in G$;*
2. *$\varphi\psi = \psi\varphi$;*
3. *Dacă $n < \infty$, atunci $\varphi^n(x) = x$ pentru orice $x \in G$;*
4. *Dacă $m < \infty$, atunci $\psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$.*

Definiția 2.8. *Fie $(G,+)$ grupoid topologic. Grupoidul $(G,\cdot)$ se numeşte izotop al grupoidului $(G,+)$, dacă există două omeomorfisme topologice $\varphi,\psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încât $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$, pentru orice $x, y \in G$.*

Conform condiţiilor din Definiţia 2.8 putem spune că izotopul $(G,\cdot)$ este generat de omeomorfismele φ,ψ ale grupoidului topologic $(G,+)$. Vom nota izotopul dat prin $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$.

Exemplul 2.9. *Fie $(G,+)$ grup topologic aditiv, comutativ cu elementul zero.*
1. Considerăm relaţiile $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = -x$ şi legea $x \cdot y = x - y$. Atunci $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$ este quasigrup topologic medial cu $(2,1)$-unitate în $(G,\cdot)$, care coincide cu elementul zero din $(G,+)$.
2. Considerăm relaţiile $\varphi(x) = -x$, $\psi(x) = x$ şi legea $x \cdot y = y - x$. Atunci $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$ este quasigrup topologic medial cu $(1,2)$-unitate în $(G,\cdot)$, care coincide cu elementul zero din $(G,+)$.

Exemplul 2.10. *Notăm cu* $Z_p = Z/pZ = \{0, 1, ..., p-1\}$ *grupul ciclic Abelian de ordinul* p. *Fie grupul comutativ* $(G,+) = (Z_7,+)$, *egalităţile* $\varphi(x) = 3x$, $\psi(x) = 4x$ *şi legea* $x \cdot y = = 3x + 4y$. *Atunci* $(G,\cdot) = = g(G,+,\varphi,\psi)$ *este quasigrup medial cu* $(3,6)$*-unitate în* $(G,\cdot)$, *care coincide cu elementul zero din* $(G,+)$.

Exemplul 2.11. *Fie grupul comutativ* $(G,+) = (Z_5,+)$, $\varphi(x) = 2x, \psi(x) = 3x$ *şi legea* $x \cdot y = 2x + 3y$. *Atunci* $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$ *este quasigrup medial şi elementul* 0 *din* $(G,+)$ *este* $(4,4)$*-unitate în* $(G,\cdot)$.

Exemplul 2.12. *Fie grupul Abelian* $(G,+) = (Z_5,+)$, $\varphi(x) = 4x$, $\psi(x) = 2x$ *şi legea* $x \cdot y = 4x + 2y$. *Atunci* $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$ *este quasigrup medial şi fiecare element din* $(G,\cdot)$ *este* $(4,2)$*-unitate în* $(G,\cdot)$.

Exemplul 2.13. *Considerăm grupul comutativ* $(G,+) = (Z_3,+)$, $\varphi(x) = -x$, $\psi(x) = x$ *şi* $x \cdot y = y - x$. *Atunci* $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$ *este quasigrup medial cu* $(1,2)$*-unitate în* $(G,\cdot)$.

2.3. Unele proprietăţi ale (n,m)-izotopilor omogeni

În acest paragraf vom soluţiona Problema 2 în cazul grupoizilor topologici mediali cu unităţi multiple.

Teorema 2.14. *[59] Dacă* $(G,+)$ *este grupoid topologic medial, şi* e *este* (k,p)*-zero element, atunci fiecare* (n,m)*-izotop omogen* $(G,\cdot)$ *al grupoidului topologic* $(G,+)$, *este medial, cu* (mk,np)*-unitate* e *în* $(G,\cdot)$ *şi are loc relaţia* $(x \cdot y) + (u \cdot v) = (x+u) \cdot (y+v)$ *pentru orice* $x, y, u, v \in G$ *şi* $n, m, p, k \in N$.

Demonstraţie. Faptul că fiecare grupoid topologic $(G,\cdot)$ este (n,m)-izotop omogen al grupoidului topologic $(G,+)$, cu e, (nk,mp)-unitate se demonstrează pe baza algoritmului din [152]. Fie $(G,\cdot)$ (n,m)-izotop omogen al grupoidului $(G,+)$ şi e este (k,p)-zero în $(G,+)$. Menţionăm că $\varphi^r(e) = \psi^r(e) = e$ pentru orice $r \in N$. Dacă $k < +\infty$, atunci în $(G,+)$ are loc $rk(e,x,+) = x$ pentru orice $x \in G$ şi pentru orice $r \in N$. Fie $m < +\infty$ şi $\psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$. În acest caz $1(e,x,\cdot) = 1(e,\psi(x),+)$ şi $r(e,x,\cdot) = r(e,\psi^r(x),+)$ pentru orice $r \geq 1$. Mai mult ca atât,

$$mk(e,x,\cdot) = mk(e,\psi^{mk}(x),+) = mk(e,x,+) = x.$$

Analog obţinem că

$$(e, x, \cdot)np = (e, \varphi^{np}(x), +)np = (e, x, +)np = x.$$

În aşa mod am arătat că e este (mk, np)-unitate în $(G, \cdot)$.

Vom demonstra că (n, m)-izotopul omogen $(G, \cdot)$ al grupoidului topologic medial $(G, +)$ este grupoid topologic medial, adică are loc legea $xy \cdot zt = xz \cdot yt$. Într-adevăr

$$\begin{aligned} xy \cdot zt = \varphi(xy) + \psi(zt) = \varphi(\varphi(x) + \psi(y)) + \psi(\varphi(z) + \psi(t)) = \\ = [\varphi(\varphi(x)) + \varphi(\psi(y))] + [\psi(\varphi(z)) + \psi(\psi(t))] = \\ = [\varphi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(z))] + [\varphi(\psi(y)) + \psi(\psi(t))] = \\ = [\varphi(\varphi(x)) + \varphi(\psi(z))] + [\psi(\varphi(y)) + \psi(\psi(t))] = \\ = \varphi(\varphi(x) + \psi(z)) + \psi(\varphi(y) + \psi(t)) = \varphi(xz) + \psi(yt) = xz \cdot yt \end{aligned}$$

Utilizînd [169] vom demonstra că $(x \cdot y) + (u \cdot v) = (x + u) \cdot (y + v)$. Fie $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$ şi $u \cdot v = \varphi(u) + \psi(v)$. Atunci

$$\begin{aligned} (x \cdot y) + (u \cdot v) = [\varphi(x) + \psi(y)] + [\varphi(u) + \psi(v)] = \\ = [\varphi(x) + \varphi(u)] + [\psi(y) + \psi(v)] = \varphi(x + u) + \psi(y + v) = (x + u) \cdot (y + v). \end{aligned}$$

În acest caz obţinem $(x \cdot y) + (u \cdot v) = (x + u) \cdot (y + v)$.

Teorema este demonstrată.

Corolarul 2.15. *[59] Dacă $(G, +)$ este grupoid topologic medial, atunci fiecare izotop omogen $(G, \cdot)$ al grupoidul topologic $(G, +)$, unde $\varphi\psi = \psi\varphi$ este medial şi are loc relaţia $(x \cdot y) + (u \cdot v) = = (x + u) \cdot (y + v)$.*

Definiția 2.16. *Quasigrupul topologic $(G, \cdot)$ se numeşte:*

- *omogen, dacă $(G, \cdot)$ este izotop omogen al grupului topologic $(G, +)$.*
- *(n, m)-omogen, dacă $(G, \cdot)$ este (n, m)-izotop omogen al grupului topologic $(G, +)$.*

Vom nota prin:

- T clasa quasigrupurilor mediale.
- Q clasa quasigrupurilor omogene.
- $Q(n, m)$ clasa quasigrupurilor (n, m)-omogene.

Considerăm: Clasa $M(n, m) = T \cap Q(n, m)$.

Clasa $M(1, 1)$ coincide cu clasa grupurilor topologice abeliene.

Exemplul 2.17. *Fie $(G,\cdot)$ quasigrup medial, $e \in G$ şi $ex = x$ şi $xx = e$ pentru orice $x \in G$. Atunci $(G,\cdot) \in M(1,2)$ şi $(G,\cdot)$ este quasigrup topologic medial şi e este $(1,2)$-unitate în $(G,\cdot)$.*

Exemplul 2.18. *Fie $(G,\cdot)$ quasigrup medial, $e \in G$ şi $xe = x$ şi $xx = e$ pentru fiecare $x \in G$. Atunci $(G,\cdot) \in M(2,1)$ şi $(G,\cdot)$ este quasigrup topologic medial şi e este $(2,1)$-unitate în $(G,\cdot)$.*

Teorema 2.19. *[59] Fie $Q(n,m)$ clasa quasigrupurilor (n,m)-omogene. Atunci:*
1. Pentru fiecare $G \in Q(n,m)$ există (n,m)-unitate $e \in G$ cu proprietăţile:
1.1 $e \cdot e = e$;
1.2 $n(e,x) = x$;
1.3 $(x,e)m = x$;
1.4 $ex \cdot e = e \cdot xe$.
2. Dacă $\varphi(x) = ex$ şi $\varphi^n(x) = n(e,x) = x$, atunci $\varphi^{-1}(x) = (n-1)(e,x)$;
3. Dacă $\varphi^{-1}(x) = (n-1)(e,x)$ şi $\varphi^n(x) = n(e,x) = x$, atunci $(n-1)(e,ex) = x$;
4. Dacă $\psi(x) = xe$ şi $\psi^m(x) = (x,e)m = x$, atunci $\psi^{-1}(x) = (x,e)(m-1)$;
*5. Dacă $\psi^{-1}(x) = (x,e)(m-1)$ şi $\psi^m(x) = (x,e)m = x$, atunci $(xe,e)(m-1) =$
$= x$.*

Demonstraţie. **1.** Fie $(G,+)$ grup topologic şi $\varphi,\psi : G \to G$ sunt automorfisme topologice ale acestui grup, astfel încât $\varphi^n(x) = \psi^m(x) = x$, $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$, pentru fiecare $x \in G$ şi $(G,\cdot) = = g(G,+,\varphi,\psi)$. Fie e - element (n,m)-zero în $(G,+)$. Conform Teoremei 3 din [152], e este (n,m)-unitate în $(G,\cdot)$. De unde, $e \cdot e = e$, $n(e,x) = x$ şi $(x,e)m = x$. Astfel afirmaţiile 1.1, 1.2 şi 1.3 sunt demonstrate. Uşor observăm că $\varphi(x) = ex$ şi $\psi(x) = xe$. Din egalitatea $\varphi\psi = \psi\varphi$ avem $\varphi\psi = \varphi(xe) = e \cdot xe$ şi $\psi\varphi = \psi(ex) = ex \cdot e$. Mai mult ca atât $e \cdot xe = ex \cdot e$. Afirmaţia 1 este demonstrată.

2. Vom arată că: dacă $\varphi(x) = ex$ şi $\varphi^n(x) = n(e,x) = x$, atunci $\varphi^{-1}(x) = (n-1)(e,x)$. Avem $\varphi(x) = ex$. De aici $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = e \cdot \varphi^{-1}(x)$. Dar $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$. Mai mult ca atât $e \cdot \varphi^{-1}(x) = x$. Deoarece $n(e,x) = x$. Atunci

$$e \cdot (\varphi^{-1}(x)) = n(e,x). \tag{2.1}$$

Din definiţia unităţii multiple avem

$$e \cdot (n-1)(e,x) = n(e,x). \tag{2.2}$$

Din (2.1) şi (2.2) obţinem $\varphi^{-1}(x) = (n-1)(e,x)$. Afirmaţia 2 este demonstrată.

3. Vom demonstra că: dacă $\varphi^{-1}(x) = (n-1)(e,x)$ şi $\varphi^{n}(x) = n(e,x) = x$ atunci $(n-1)(e,ex) = x$. Fie $(n-1)(e,ex) = t$. Atunci

$$e \cdot (n-1)(e,ex) = et. \tag{2.3}$$

Din definiţia unităţii multiple avem

$$e \cdot (n-1) \cdot (e,ex) = n(e,ex) = ex. \tag{2.4}$$

Din (2.3) şi (2.4) rezultă $ex = et$ şi $t = x$. De aici $(n-1)(e,ex) = x$. Afirmaţia 3 este demonstrată.

4. Analog proprietăţii 2 vom demonstra că: dacă $\psi(x) = xe$ şi $\psi^{m}(x) = (x,e)m$, atunci $\psi^{-1}(x) = (x,e)(m-1)$. Avem $\psi(x) = xe$. De aici $\psi^{-1}(\psi(x)) = \psi^{-1}(x) \cdot e$. Dar $\psi^{-1}(\psi(x)) = x$. Atunci $\psi^{-1}(x) \cdot e = x$. Deoarece $(x,e)m = x$ obţinem

$$\psi^{-1}(x) \cdot e = (x,e)m. \tag{2.5}$$

Din definiţia unităţii multiple obţinem

$$(x,e)(m-1) = (x,e)m. \tag{2.6}$$

Din (2.5) şi (2.6) obţinem $\psi^{-1}(x) = (x,e)(m-1)$. Afirmaţia 4 este demonstrată.

5. Similar proprietăţii 3 vom demonstra că: dacă $\psi^{-1}(x) = (x,e)(m-1)$ şi $\psi^{m}(x) = $ $= (x,e)m = x$, atunci $(xe,e)(m-1) = x$.

Fie $(xe,e)(m-1) = t$. Atunci

$$(xe,e)(m-1)e = te. \tag{2.7}$$

Din definiţia unităţii multiple avem

$$(xe,e)(m-1)e = (xe,e)m = xe. \tag{2.8}$$

Din (2.7) şi (2.8) avem $te = xe$ de unde $t = x$. De aici $(xe,e)(m-1) = x$.

Afirmaţia 5 este demonstrată.

Teorema este demonstrată.

Corolarul 2.20. *[59] Clasa $Q(n,m)$ de (n,m)-quasigrupuri omogene formează o varietate.*

Corolarul 2.21. *[59] Clasa $M(n,m)$ de quasigrupi mediale topologice cu (n,m)-unităţi formează o varietate.*

2.4. Grupoizi topologici primitivi cu diviziuni

În acest paragraf vom utiliza următoarea Teoremă de bază din [152].

Teorema A. *Fie* $(G,+)$ *grupoid topologic,* $\varphi, \psi : (G,+) \to (G,+)$ *este omeomorfism şi* $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$. *Atunci:*

1. $(G,+) = g(G,\cdot,\varphi^{-1},\psi^{-1})$*;*

2. $(G,\cdot)$ *este grupoid topologic;*

3. Dacă $(G,+)$ *este grupoid reductibil, atunci* $(G,\cdot)$ *este de asemenea grupoid reductibil;*

4. Dacă $(G,+)$ *este grupoid cu diviziuni, atunci* $(G,\cdot)$ *este de asemenea grupoid cu diviziuni;*

5. Dacă $(G,+)$ *este grupoid topologic primitiv cu diviziuni, atunci* $(G,\cdot)$ *este de asemenea grupoid topologic primitiv cu diviziuni;*

6. Dacă $(G,+)$ *este quasigrup topologic, atunci* $(G,\cdot)$ *este de asemenea quasigrup topologic;*

7. Dacă $n,m,p,k \in N$ *şi* $(G,\cdot)$ *este* (n,m)*-izotop omogen al grupoidului* $(G,+)$ *şi* e *este* (k,p)*-zero în* $(G,+)$*, atunci* e *este* (mk,np)*-unitate în* $(G,\cdot)$*.*

Considerăm grupoidul topologic $(G,+)$. Dacă α este o operaţie binară în G, atunci $\alpha(x) = \{y \in G : x\alpha y\}$ pentru fiecare $x \in G$.
Relaţia de echivalenţă α din G se numeşte relaţie de congruenţă în $(G,+)$ dacă din $(x\alpha y)$ şi $(u\alpha v)$ are loc:

$$(x+y)\alpha\ (u+v) \text{ pentru orice } x,y,u,v \in G.$$

Daca $(G,+)$ este grupoid primitiv cu diviziunile l şi r, atunci putem considera că relaţiile $(l(x,y))\alpha(l(u,v))$ şi $(r(x,y))\alpha(r(u,v))$ demonstrează $x\alpha u$ şi $y\alpha v$.

Fie grupoidul topologic primitiv $(G,+,r,l)$ cu diviziunile r,l şi (k,p)-zero, grupoidul $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$ este (n,m)-izotop omogen. Atunci, în baza Teoremei **A**, e este (mk,np)-unitate în grupoidul topologic primitiv $(G,\cdot)$.

Definiția 2.22. *Subgrupoidul primitiv cu diviziuni* H *a grupoidului primitiv cu diviziuni* $(G,+,r,l)$ *se numeşte subgrupoid normal primitiv cu diviziuni, dacă* $e \in H$ *şi* $H = G(\alpha)$ *pentru careva congruenţă* α*.*

Lema 2.23. *[59] Fie α este o relaţie de congruenţă în grupoidul topologic primitiv cu diviziuni $(G,+,r,l)$. Atunci există un subgrupoid unic normal primitiv cu diviziunea $G(\alpha)$, care se numeşte subgrupoid primitiv cu diviziuni definit de congruenţa α astfel încât $e \in G$.*

Mulţimea $G(\alpha) = \alpha(e) = \{y \in G : e\alpha y\}$ este subgrupoid primitiv cu diviziuni.

Lema este demonstrată.

Definiția 2.24. *Subgrupoizii primitivi cu diviziuni $(H_1,+,r,l)$ şi $(H_2,+,r,l)$ ai grupoidului topologic primitiv cu diviziuni $(G,+,r,l)$ se numesc conjugaţi, dacă $H_2 = h(H_1)$ pentru careva automorfism topologic $h : G \to G$.*

Mulţimea G_δ este o submulţime a spaţiului topologic care este intersecţia unui număr numărabil de mulţimi deschise.

Teorema 2.25. *[59] Fie H subgrupoid primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic cu diviziuni $(G,+,r,l)$ şi $e \in H$. Atunci există astfel de subgrupoid primitiv cu diviziuni Q a grupoizilor topologici primitivi cu diviziuni $(G,+,r,l)$ şi $(G,\cdot,r_1,l_1)$ pentru care:*

1. $e \in Q \subseteq H$.

2. Q este intersecţie a unui număr finit de subgrupoizi primitivi cu diviziuni conjugaţi cu H din $(G,+,r,l)$.

3. Dacă H este mulţime închisă, atunci Q este de asemenea închisă.

4. Dacă H este G_δ mulţime, atunci Q este de asemenea G_δ mulţime.

5. Dacă H este mulţime deschisă, atunci Q este de asemenea deschisă.

6. Dacă H este subgrupoid primitiv normal cu diviziuni, atunci Q este subgrupoid normal primitiv cu diviziuni a lui $(G,+,r,l)$ şi $(G,\cdot,r_1,l_1)$.

Demonstraţie. Notăm

$$\{h_p : p \le n \cdot m\} = \{\varphi^i \circ \psi^j : i \le n, j \le m\}, H_p = h_p(H)$$

şi $Q = \cap\{H_p : p \le n \cdot m\}$.

Considerăm că $h_1(x) = x$ pentru fiecare $x \in H$. Fixăm $i \le n$ şi $j \le n$. Fie $h_p = \varphi^i \circ \psi^j$. Este clar că h_p este automorfism în $(G,+,l,r)$. Astfel $H_p = h_p(H)$ este subgrupoid primitiv cu diviziuni a lui $(G,+,r,l)$ conjugat cu H în $(G,+,r,l)$. Mai mult ca atât Q este subgrupoid primitiv cu diviziuni în $(G,+,r,l)$. Afirmaţiile 1-5 sunt demonstrate.

În prima parte am demonstrat că Q este subgrupoid primitiv cu diviziuni în $(G,\cdot,r_1,l_1)$. Fie $x,y,b \in Q$. Atunci $xy = \varphi(x) + \psi(y)$ şi $\varphi(x), \psi(x) \in H_i$ pentru orice i. Astfel $xy \in Q$.

Dacă $ax = b$, atunci $a = l_1(x, b) \in H_i$ pentru fiecare i şi $a \in Q$. Similar, dacă $xa = b$, atunci $a = r_1(x, b) \in H_i$ pentru orice i şi $a \in Q$. De aici Q este subgrupoid primitiv cu diviziuni în $(G, \cdot, r_1, l_1)$.

Fie α congruenţă în $(G, +, r, l)$. Atunci, în baza Lemei 2.23, există un unic subgrupoid normal primitiv cu diviziuni $H = G(\alpha)$ şi $e \in H$. Deoarece h_p este automorfism topologic în $(G, +r, l)$, atunci $H_p = h_p(H)$ este subgrupoid normal primitiv cu diviziuni în $(G, +, r, l)$ conjugat cu subgrupoidul normal primitiv cu diviziuni H. Mai mult ca atât Q este subgrupoid normal primitiv cu diviziuni în $(G, +, r, l)$ şi Q este subgrupoid normal primitiv cu diviziuni în $(G, \cdot, r_1, l_1)$. Afirmaţia 6 este demonstrată.

Teorema este demonstrată.

2.5. AG-grupoizi topologici şi quasigrupuri paramediale cu unităţi multiple

În acest paragraf vom studia unele proprietăţi ale (n, m)-izotopilor omogeni ai AG-grupoizilor topologici şi quasigrupurilor paramediale topologice cu (n, m)-unităţi. De asemenea vom cerceta unele proprietăţi ale grupoizilor paramediali cu unităţi multiple. Vom exinde afirmaţiile cunoscute despre teoria grupurilor topologice, asupra clasei de quasigrupuri topologice (n, m)-omogene.

În paragraful respectiv vom soluţiona Problema 2 pentru cazul AG-grupoizilor topologici. La fel se vor stabili condiţiile în care grupoidul multiplicativ $(G, \cdot)$ este quasigrup paramedial cu $(2, 1)$-unitate, (Problema 4).

Exemplul 2.26. *Fie $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definim operaţia binară $\{\cdot\}$ în felul următor.*

Tabelul 2.2. Exemplu de AG-quasigrup necommutativ, hexagonal, medial

$(\cdot)$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	*1*	*5*	*4*	*3*	*2*
2	*3*	*2*	*1*	*5*	*4*
3	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
4	*2*	*1*	*5*	*4*	*3*
5	*4*	*3*	*2*	*1*	*5*

Atunci $(G, \cdot)$ este AG-quasigrup necommutativ, hexagonal, medial şi fiecare element din $(G, \cdot)$ este $(2, 4)$-unitate în G.

Exemplul 2.27. *Fie* $(R,+)$ *grup topologic Abelian a numerelor reale.*

1. Dacă $\varphi(x) = 5x$*,* $\psi(x) = x$ *şi* $x \cdot y = 5x + y$*, atunci* $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ *este quasigrup medial şi local compact. În baza Teoremei 7 din [152], pe* $(R, \cdot)$ *există măsură Haar invariantă la stânga.*

2. Dacă $\varphi(x) = 5x$*,* $\psi(x) = 7x$ *şi* $x \cdot y = 5x + 7y$*, atunci* $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ *este quasigrup medial şi local compact. În baza Teoremei 7 din [152] pe* $(R, \cdot)$ *nu există nici o măsură Haar invariantă la stânga sau la dreapta.*

Exemplul 2.28. *Notăm prin* $Z_p = Z/pZ = \{0, 1, ..., p-1\}$ *grupul ciclic Abelian de ordinul* p*. Considerăm grupul comutativ* $(G,+) = = (Z_7,+)$*,* $\varphi(x) = 3x$*,* $\psi(x) = 4x$ *şi* $x \cdot y = 3x + 4y$*. Atunci* $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi)$ *este quasigrup medial, paramedial şi bicomutativ cu* $(3, 6)$*-unitate în* $(G, \cdot)$*, care coincide cu elementul zero în* $(G,+)$*.*

Exemplul 2.29. *Considerăm grupul comutativ* $(G,+) = (Z_5,+), \varphi(x) = 3x, \psi(x) = 2x$ *şi* $x \cdot y = 3x+2y$*. Atunci* $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi)$ *este quasigrup medial, paramedial şi bicomutativ şi elementul zero din* $(G,+)$ *este* $(4, 4)$*-unitate în* $(G, \cdot)$*.*

Exemplul 2.30. *Considerăm grupul comutativ* $(G,+) = (Z_7,+)$*,* $\varphi(x) = 2x$*,* $\psi(x) = 5x$ *şi* $x \cdot y = 2x+5y$*. Atunci* $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi)$ *este quasigrup medial, paramedial şi bicomutativ şi elementul zero din* $(G,+)$ *este* $(6, 3)$*-unitate în* $(G, \cdot)$*.*

Exemplul 2.31. *Considerăm grupul comutativ* $(G,+) = (Z_7,+)$*,* $\varphi(x) = 3x$*,* $\psi(x) = 5x$ *şi* $x \cdot y = 3x + 5y$*. Atunci* $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi)$ *este quasigrup medial şi hexagonal şi fiecare element din* $(G, \cdot)$ *este* $(6, 6)$*-unitate.*

Teorema 2.32. *[53] Dacă* $(G,+)$ *este AG-grupoid şi* $e \in G$ *este* $(1, p)$*-zero, atunci fiecare* $(n, 1)$*-izotop omogen* $(G, \cdot)$ *al grupoidului topologic* $(G,+)$ *este AG-grupoid cu* $(1, np)$*-unitate* e *în* $(G, \cdot)$ *şi* $a + bc = b \cdot (a + c)$*, pentru orice* $a, b, c \in G$ *şi* $n, p \in N$*.*

Demonstraţie. Vom demonstra că e este $(1, np)$-unitate în $(G, \cdot)$ după metoda descrisă în [152]. Fie $(G, \cdot)$ $(n, 1)$-izotop omogen al grupoidului $(G,+)$ şi e este $(1, p)$-zero element în $(G,+)$. Vom menţiona că $\varphi^q(e) = \psi^q(e) = e$ pentru orice $q \in N$. Atunci în $(G,+)$ are loc egalitatea $q \cdot 1(e, x, +) = x$ pentru fiecare $x \in G$ şi pentru orice $q \in N$. Deoarece pentru (n, m)-izotopul omogen $(G, \cdot)$ avem $m = 1$, vom obţine $\psi(x) = x$ pentru orice $x \in G$. Atunci

$$1(e, x, \cdot) = 1(e, \psi(x), +)$$

şi

$$q(e, x, \cdot) = q(e, \psi^q(x), +)$$

pentru fiecare $q \geq 1$. Mai mult ca atât

$$1(e, x, \cdot) = 1(e, \psi(x), +) = 1(e, x, +) = x.$$

Analog obţinem că

$$(e, x, \cdot)np = (e, \varphi^{np}(x), +)np = (e, x, +)np = x.$$

Deci, e este $(1, np)$-unitate în $(G, \cdot)$. Medialitatea în AG-grupoidul topologic $(G, +)$ rezultă din [46]. Într-adevăr,

$$(x + y) + (z + t) = ((z + t) + y) + x = ((y + t) + z) + x = (x + z) + (y + t).$$

Deoarece e este $(1, p)$-zero în $(G, +)$, prin urmare e este element zero de stânga şi $e + x = x$ pentru orice $x \in (G, +)$. În acest caz pentru fiecare AG-grupoid $(G, +)$ cu $(1, p)$-zero avem

$$x + (z + t) = (e + x) + (z + t) = (e + z) + (x + t) = z + (x + t).$$

Vom demonstra că $(n, 1)$-izotopul omogen $(G, \cdot)$ al grupoidului topologic $(G, +)$ este AG-grupoid şi $x \cdot (zt) = z \cdot (xt)$. Deoarece $(G, \cdot)$ este $(n, 1)$-izotop omogen al grupoidului $(G, +)$, atunci $\psi(x) = x$. Deci,

$$x \cdot zt = \varphi(x) + \psi(zt) =$$

$$= \varphi(x) + zt = \varphi(x) + (\varphi(z) + \psi(t)) = \varphi(z) + (\varphi(x) + \psi(t)) =$$

$$= \varphi(z) + xt = \varphi(z) + \psi(xt) = z \cdot xt.$$

Mai mult ca atât în grupoidul $(G, \cdot)$ are loc egalitatea $x \cdot zt = z \cdot xt$. Vom arăta că $a + bc = b \cdot (a + c)$. Într-adevăr,

$$a + bc = (ea) + (bc) = (\varphi(e) + \psi(a)) + (\varphi(b) + \psi(c)) =$$

$$= (\varphi(e) + \varphi(b)) + (\psi(a) + \psi(c)) = \varphi(e + b) + \psi(a + c) =$$

$$= \varphi(b) + \psi(a + c) = b \cdot (a + c).$$

Teorema este demonstrată.

Astfel, Teorema 2.32 soluţionează Problema 2 pentru cazul AG-grupoizilor topologici.

Corolarul 2.33. *[53] Dacă* $(G,+)$ *este AG-grupoid şi e este element zero de stânga, atunci orice* $(1,1)$*-izotop omogen* $(G,\cdot)$ *a grupoidului topologic* $(G,+)$ *este AG-grupoid cu unitate de stânga e în* $(G,\cdot)$ *şi are loc egalitatea* $a+bc=b\cdot(a+c)$, *pentru orice* $a,b,c\in G$.

Unele proprietăţi ale quasigrupurilor paramediale

Teorema 2.34. *[53] Dacă* $(G,\cdot)$ *este grupoid multiplicativ,* $e\in G$ *şi au loc următoarele condiţii:*

1. $xe=x$ *pentru orice* $x\in G$;

2. $x^2=x\cdot x=e$ *pentru orice* $x\in G$;

3. $xy\cdot z=xz\cdot y$ *pentru orice* $x,y,z\in G$;

4. pentru orice $a,b\in G$ *există un punct unic* $y\in G$ *astfel încât* $ya=b$, *atunci e este* $(2,1)$*-unitate în* G.

Demonstraţie. Fie $x\in G$. Alegem $y\in G$ astfel încât $y\cdot ex=x$. Din condiţia 2 a Teoremei date avem că:

$$(y\cdot ex)\cdot x=x\cdot x=e. \tag{2.9}$$

Din condiţia 3 a Teoremei

$$(y\cdot ex)\cdot x=yx\cdot ex. \tag{2.10}$$

Astfel, din (2.9) şi (2.10) vom obţine

$$yx\cdot ex=e. \tag{2.11}$$

Este clar că

$$ex\cdot ex=e. \tag{2.12}$$

Luând în consideraţie relaţiile (2.11) şi (2.12) rezultă

$$yx\cdot ex=ex\cdot ex.$$

Deci, $yx=ex$ şi $y=e$. Mai mul ca atât $y\cdot(e\cdot x)=e\cdot(ex)=x$ şi e este $(2,1)$-unitate în G.

Teorema este demonstrată.

Teorema 2.35. *[53] Dacă* $(G,\cdot)$ *grupoid multiplicativ,* $e\in G$ *şi au loc următoarele condiţii:*

1. $xe=x$ *pentru orice* $x\in G$;

2. $x^2=x\cdot x=e$ *pentru orice* $x\in G$;

3. $x\cdot zt=t\cdot zx$ *pentru orice* $x,t,z\in G$;

4. pentru orice $a,b\in G$ *există un punct unic* $y\in G$ *astfel încât* $ya=b$, *atunci e este* $(2,1)$*-unitate în* G.

Demonstraţie. Fie $x \in G$. Alegem $y \in G$ astfel încât $y \cdot ex = x$. Din condiţia 2 a Teoremei date avem că:

$$x \cdot (y \cdot ex) = x \cdot x = e. \tag{2.13}$$

Din condiţia 3 a Teoremei obţinem

$$x \cdot (y \cdot ex) = ex \cdot yx. \tag{2.14}$$

Astfel, din (2.13) şi (2.14) vom obţine

$$ex \cdot yx = e. \tag{2.15}$$

Este clar că

$$ex \cdot ex = e. \tag{2.16}$$

Luând în consideraţie relaţiile (2.15) şi (2.16) rezultă

$$ex \cdot yx = ex \cdot ex.$$

De unde $yx = ex$ şi $y = e$. Mai mul ca atât $e(ex) = y \cdot (e \cdot x) = x$ şi e este $(2, 1)$-unitate în $(G, \cdot)$.

Teorema este demonstrată.

Remarca 2.36. *Demonstraţiile Teoremelor 2.34 şi 2.35 se bazează pe o metodă generală. Profesorul I. Burdujan a observat o cale mai uşoară pentru demonstraţia Teoremei 2.35 şi anume $e \cdot ex = x \cdot ee = xe = x$, de unde avem că e este $(2, 1)$-unitate în $(G, \cdot)$.*

Teorema 2.37. *[53] Dacă $(G, \cdot)$ este grupoid multiplicativ, $e \in G$ şi au loc următoarele condiţii:*
1. $xe = x$ pentru fiecare $x \in G$;
2. $x^2 = x \cdot x = e$ pentru fiecare $x \in G$;
3. $xy \cdot uv = vy \cdot ux$ pentru orice $x, y, u, v \in G$;
4. dacă $xa = ya$ atunci $x = y$, pentru orice $x, y, a \in G$ atunci $(G, \cdot)$ este quasigrup paramedial şi e este $(2, 1)$-unitate.

Demonstraţie. Dacă $x \in G$, atunci

$$e \cdot ex = ee \cdot ex = xe \cdot ee = xe \cdot e = x \cdot e = x. \tag{2.17}$$

Astfel e este $(2,1)$-unitate. Considerăm ecuaţia $xa = b$. Atunci

$$xa \cdot e = b \cdot e$$

$$xa \cdot ee = be$$

$$ea \cdot ex = be$$

$$(ea \cdot ex) \cdot be = be \cdot be$$

Astfel $(ea \cdot ex) \cdot (be) = e$. Conform condiţiei (3) din Teorema curentă avem

$$(e \cdot ex) \cdot (b \cdot ea) = e. \tag{2.18}$$

Luând în consideraţie relaţia (2.17) $e \cdot ex = x$, identitatea (2.18) o scriem în felul următor

$$x \cdot (b \cdot ea) = e. \tag{2.19}$$

Conform condiţiei (2) din Teorema curentă avem

$$(b \cdot ea) \cdot (b \cdot ea) = e. \tag{2.20}$$

Din (2.19) şi (2.20) avem $x = b \cdot ea$. Deoarece $xa = b$, putem verifica că

$$(b \cdot ea) \cdot a = (b \cdot ea) \cdot (ae) = (e \cdot ea) \cdot (ab) = a \cdot ab = ae \cdot ab = be \cdot aa = be \cdot e = b.$$

Astfel, elementul $x = b \cdot ea$ este unica soluţie a ecuaţiei $xa = b$.

Acum considerăm ecuaţia $ay = b$. În acest caz

$$e \cdot b = e \cdot ay = ee \cdot ay = ye \cdot ae = y \cdot a.$$

Astfel $ya = eb$ şi conform soluţiei ecuaţiei $xa = b$

$$y = eb \cdot ea = ab \cdot ee = ab \cdot e = ab.$$

Deci, $y = ab$ este soluţie unică pentru ecuaţia $ay = b$.

Teorema este demonstrată.

Remarca 2.38. *Menţionăm faptul că afirmaţiile* $2.31 - 2.37$ *care se referă la obiectele algebrice examinate sunt juste pentru orice topologie.*

Corolarul 2.39. *[53] Dacă $(G, \cdot)$ este quasigrup paramedial cu e $(2,1)$-unitate, atunci soluţiile ecuaţiilor $xa = b$ şi $ay = b$ sunt respectiv $x = b \cdot ea$ şi $y = ab$ pentru orice $a, b \in G$.*

Menţionăm faptul că Teoremele 2.34, 2.35 şi 2.37 soluţionează Problema 4.

2.6. Unele proprietăţi topologice ale buclei topologice paramediale de dreapta

În acest paragraf se vor stabili condiţiile în care o submulţime compactă deschisă conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta, (Problema 5).

În continuare vom examina următoarea lemă:

Lema 2.40. *[53] Fie P submulţime a buclei topologice paramediale de dreapta $(G,\cdot)$ şi $e \in P$. Dacă $P_1 = P \cap eP$, atunci:*

1. $eP_1 = P_1$;

2. Dacă P deschisă, atunci P_1 este de asemenea deschisă;

3. Dacă P este închisă, atunci P_1 este de asemenea închisă;

4. Dacă P este compactă, atunci P_1 este de asemenea compactă.

Demonstraţie. Aplicaţia $f : G \to G$, unde $f(x) = ex$, este omeomorfism şi $P_1 = P \cap eP$. Din aceste considerente afirmaţiile 2, 3 şi 4 sunt adevărate. Pentru fiecare $x \in G$ avem $e\cdot ex = x$. Mai mult ca atât $eP_1 = eP\cap(e\cdot eP) = eP\cap P = P_1$. Acest fapt se poate demonstra utilizând paramedialitatea $eP_1 = eP\cap(e\cdot eP) = eP\cap(ee\cdot eP) = eP\cap(Pe\cdot ee) = eP\cap(Pe) =$
$= eP \cap P = P_1$.

Lema este demonstrată.

Propoziția 2.41. *[53] Fie $(G,\cdot)$ buclă paramedială de dreapta. Atunci funcţia $f : G \to G$, unde $f(x) = ex$, este aplicaţie involutivă, adică $f = f^{-1}$.*

Demonstraţie. Este cunoscut că f este o aplicaţie reciproc biunivocă. Soluţia ecuaţiei $ay = b$ este $y = ab$. Prin urmare $a \cdot ab = b$ pentru fiecare $y \in G$. În particular $e \cdot ex = x$ şi $f(f(x)) = x$. Deci, $f = f^{-1}$.

Propoziţia este demonstrată.

Urmează demonstraţia rezultatului principal:

Teorema 2.42. *[53] Fie $(G,\cdot)$ buclă topologică paramedială de dreapta cu unitatea $x^2 = e$. Dacă P este submulţime compactă deschisă astfel încât $e \in P$, atunci P conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta $(Q,\cdot)$ în $(G,\cdot)$.*

Demonstraţie. În baza Lemei 2.40 considerăm că $eP = P$. Notăm

$$Q = \{q \in G : qP \cup Pq \subset P\}.$$

Vom demonstra că Q este subbuclă paramedială compactă deschisă de dreapta. În continuare vom arăta că Q este mulţime deschisă. Fie $q \in Q$, un punct fixat şi x un punct arbitrar din P. Deoarece $xq \in P$ şi P este mulţime deschisă, atunci există astfel de vecinătăţi $U_x \ni x$ şi $V_x \ni q$, astfel încât $U_x V_x \subset P$. În acest caz avem $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i}$. Deoarece mulţimea P este compactă putem extrage un număr finit de submulţimi $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_k}$ astfel încât $P = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$. Notăm $V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$. Atunci $PV \subset P$. Considerăm $qx \in P$. În mod analog demonstrăm că există aşa vecinătate $W \ni q$ astfel încât $WP \subset P$. Notăm $V \cap W = U$. În acest caz $UP \subset P$ şi $PU \subset P$. Prin urmare pentru orice mulţime deschisă $U \ni q$ avem că $U \subset Q$. Rezultă că mulţimea Q este deschisă.

În continuare vom arăta că mulţimea Q este şi închisă. Fie că $p \notin Q$. Atunci pentru careva element $q \in P$ vom avea că $pq \notin P$ ori $qp \notin P$. Fie $pq \notin P$. Atunci există aşa mulţime deschisă U astfel încât $p \in U$ şi $Uq \subset G \setminus P$. În consecinţă $U \cap Q = \emptyset$ şi q nu este punct de limită a mulţimii Q. Rezultă că mulţimea Q este închisă.

Vom arăta că $Q \subset P$. Fie $q \in G$. Atunci $q \in qP \cap Pq$. Deoarece $qP \cup Pq \subset P$, atunci rezultă că $q \in P$. În aşa mod $Q \subset P$. Conform condiţiei Teoremei $eP \cup Pe = P \cup P = P \subset P$. Astfel am arătat că $e \in Q$.

În continuare vom demonstra că Q este buclă paramedială de dreapta. Fixăm $a, b \in Q$. Atunci

$$P \cdot ab = Pe \cdot ab = be \cdot aP = b \cdot aP = b \cdot P \subset P$$

şi

$$ab \cdot P = ab \cdot eP = Pb \cdot ea = P \cdot ea = Pe \cdot ea = ae \cdot eP = a \cdot P \subset P.$$

Prin urmare $a, b \in Q$ şi Q este subgrupoid în G. Dacă $a, b \in Q$ atunci pentru ecuaţia $xa = b$ avem soluţia $x = b \cdot (ea) \in Q$. Într-adevăr, deoarece $e, a \in Q$ avem $ea \in Q$ şi $b \cdot ea \in Q$. Pentru ecuaţia $ay = b$ avem soluţia $y = ab$ care aparţine de asemenea mulţimii $(Q, \cdot)$. Deci, $(Q, \cdot)$ este subbuclă paramedială de dreapta în $(G \cdot)$.

Teorema este demonstrată.

Teorema 2.43. *[53] Fie $(G, \cdot)$ quasigrup topologic paramedial cu $(2,1)$-unitate e şi $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$. Dacă P este o submulţime compactă deschisă din G astfel încât $e \in P$, atunci P conţine un subquasigrup paramedial compact deschis $(Q, \cdot)$ cu $(2,1)$-unitate e.*

Demonstraţie. Demonstraţia Teoremei 2.43 se bazează pe demonstraţiile din Teorema 2.35, Lema 2.40 şi Teorema 2.37.

Ideiile utilizate în demonstraţiile Teoremelor 2.37, 2.42 şi Lemei 2.40 pot fi aplicate pentru bucle topologice mediale de dreapta. În acest sens putem menţiona următoarele remarci.

Remarca 2.44. *[53] Dacă $(G,\cdot)$ este buclă medială de dreapta, atunci aplicaţia $f : G \to G$, unde $f(x) = ex$, este automorfism involutiv, adică $f = f^{-1}$ şi $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in G$.*

Remarca 2.45. *[53] Dacă $(G,\cdot)$ este buclă medială de dreapta, $e \in G$ şi $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$, atunci e este $(2,1)$-unitate.*

Remarca 2.46. *[53] Fie $(G,\cdot)$ buclă medială de dreapta şi $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$. Operaţia relativă $x \circ y = ex \cdot ey$ din G satisface următoarele proprietăţi:*

1. $(G,\circ)$ este quasigrup medial.

2. $e \circ x = x$ pentru orice $x \in G$.

3. $H = \{x \in G : ex = x\}$ este grup comutativ şi subbuclă a buclelor $(G,\cdot)$ şi $(G,\circ)$.

Exemplul 2.47. *Fie $(G,+)$ grup comutativ cu elementul 0. Definim în G operaţia "$\cdot$" în felul următor: $x \cdot y = x - y$ pentru orice $x, y \in G$. Atunci $(G,\cdot)$ este buclă medială de dreapta şi elementul 0 din $(G,+)$ este $(2,1)$-unitate în $(G,\cdot)$.*

2.7. Conexiunea dintre paramedialitate şi asociativitate

Definiția 2.48. *Grupoidul topologic $(G,\cdot)$ se numeşte izotop al grupoidului topologic paramedial $(G,\circ)$ dacă există perechea f, g de omomorfisme în $(G,\circ)$ peste el însuşi astfel încât $x \cdot y = f(x) \circ g(y)$ şi $ff = gg$ pentru orice $x, y \in G$.*

Definiția 2.49. *Grupoidul topologic $(G,\circ)$ se numeşte radical dacă aplicaţia $s : G \to G$ definită prin $s(x) = x \circ x$ este omeomorfism.*

Dacă $(G,\circ)$ este paramedial şi radical atunci s, şi prin urmare s^{-1}, este omomorfism în $(G,\circ)$.

Definiția 2.50. *Grupoidul topologic $(G,\cdot)$, în care operaţia $\{\cdot\}$ este definită prin $x \cdot y = s^{-1}(x) \circ s^{-1}(y) = s^{-1}(y \circ x)$, se numeşte izotop radical al lui $(G,\circ)$.*

Izotopul radical $(G,\cdot)$ al lui $(G,\circ)$ este idempotent deoarece

$$x\cdot x=s^{-1}(x\circ x)=s^{-1}(s(x))=x$$

pentru orice $x\in G$.

În paragraful dat vom examina Problema 6.

Teorema 2.51. *[59] Fie $(G,\cdot)$ grupoid topologic paramedial şi e,e_1 şi e_2 sunt elemente în G pentru care:*

1. $ee_1=e_1$ şi $e_2e=e_2$;

2. Aplicaţiile $x\to e_1x$ şi $x\to xe_2$ sunt omeomorfisme a lui G peste el însuşi;

3. Aplicaţia $x\to xe$ este surjectivă.

Dacă există în G operaţia binară $\{\circ\}$ astfel încât $(e_1x)\circ(ye_2)=yx$, atunci $(G,\circ)$ este semigrup topologic comutativ cu e_1e_2 unitate.

Demonstraţie. Deoarece $x\to e_1x$ şi $x\to xe_2$ sunt omeomorfisme, este clar că operaţia $\{\circ\}$ este continuă.

Folosind surjectivitatea şi faptul că

$$(e_1e_2)\circ(ye_2)=ye_2 \text{ şi } (e_1x)\circ(e_1e_2)=e_1x$$

putem spune că e_1e_2 este unitate în $(G,\circ)$. Observăm că

$xe_1\cdot e_2=xe_1\cdot e_2e=ee_1\cdot e_2x=e_1\cdot e_2x$.

Se poate observa că

$$\begin{aligned}xe_1\cdot zt&=(e_1\cdot zt)\circ(xe_1\cdot e_2)=(ee_1\cdot zt)\circ(xe_1\cdot e_2)=\\&=(te_1\cdot ze)\circ(xe_1\cdot e_2)=[(e_1\cdot ze)\circ(te_1\cdot e_2)]\circ(xe_1\cdot e_2);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}te_1\cdot zx&=(e_1\cdot zx)\circ(te_1\cdot e_2)=(ee_1\cdot zx)\circ(te_1\cdot e_2)=\\&=(xe_1\cdot ze)\circ(te_1\cdot e_2)=[(e_1\cdot ze)\circ(xe_1\cdot e_2)]\circ(te_1\cdot e_2).\end{aligned}$$

Din definiţia paramedialităţii avem:

$$[(e_1\cdot ze)\circ(te_1\cdot e_2)]\circ(xe_1\cdot e_2)=[(e_1\cdot ze)\circ(xe_1\cdot e_2)]\circ(te_1\cdot e_2).$$

Notăm $z=e_2$ şi deoarece $e_2e=e_2$ şi e_1e_2 este unitate obţinem că

$$[e_1e_2\circ(te_1\cdot e_2)]\circ(xe_1\cdot e_2)=[e_1e_2\circ(xe_1\cdot e_2)]\circ(te_1\cdot e_2)$$

şi

$$(te_1 \cdot e_2) \circ (xe_1 \cdot e_2) = (xe_1 \cdot e_2) \circ (te_1 \cdot e_2) \,.$$

Deoarece, $(G, \circ)$ este grupoid topologic comutativ atunci asociativitatea rezultă imediat. Într-adevăr

$$[(te_1 \cdot e_2) \circ (e_1 \cdot ze)] \circ (xe_1 \cdot e_2) = (te_1 \cdot e_2) \circ [(e_1 \cdot ze) \circ (xe_1 \cdot e_2)] \,.$$

Teorema este demonstrată.

Teorema 2.52. *[56] Fie $(G, \cdot)$ grupoidul topologic paramedial care satisface condiţiilor următoare:*

1. *Conţine elementul idempotent e;*
2. *Aplicaţiile $x \to xe$ şi $x \to ex$ sunt omeomorfisme a lui G peste el însuşi;*
3. *În G există operaţia binară $\{\circ\}$ astfel încât $(ex) \circ (ye) = yx$.*

Atunci $(G, \circ)$ este semigrup topologic comutativ ce conţine unitatea e. Mai mult ca atât, aplicaţiile $x \to xe$ şi $x \to ex$ sunt antiomomorfisme în $(G, \circ)$ şi $xe \cdot e = e \cdot ex$.

Demonstraţie. Prima parte a Teoremei 2.52 se demonstrează utilizînd Teorema 2.51 cu $e = e_1 = e_2$. Într-adevăr

$$xe \cdot e = xe \cdot ee = ee \cdot ex = e \cdot ex.$$

Deoarece

$$(ex \circ ye)\, e = yx \cdot e = yx \cdot ee = ex \cdot ey = (e \cdot ey) \circ (ex \cdot e) = (ye \cdot e) \circ (ex \cdot e).$$

obţinem că $x \to xe$ este un antiomomorfism în $(G, \circ)$. Similar

$$e\, (ex \circ ye) = e \cdot yx = ee \cdot yx = xe \cdot ye = (e \cdot ye) \circ (xe \cdot e) = (e \cdot ye) \circ (e \cdot ex).$$

Prin urmare, obţinem că $x \to ex$ este un antiomomorfism în $(G, \circ)$.

Teorema este demonstrată.

2.8. Unele proprietăţi ale grupoizilor topologici paramediali

Teorema 2.53. *[59] Dacă $(G, \circ)$ este grupoid topologic cu unitatea e şi $(G, \cdot)$ este grupoid topologic comutativ, idempotent şi are loc relaţia*

$$(x \circ y) \cdot (z \circ t) = (ty) \circ (zx) \,,$$

atunci $(G, \circ)$ *este semigrup radical comutativ.*

Demonstraţie. Dacă definim $t : G \to G$ prin $t(x) = ex$ atunci t este un antiomomorfism în $(G, \circ)$. Într-adevăr pentru orice $x, y \in G$ avem

$$t(x \circ y) = e(x \circ y) = (e \circ e)(x \circ y) = (ye) \circ (xe) = (ey) \circ (ex) = t(y) \circ t(x).$$

În particular, avem că

$$t(s(x)) = t(x \circ x) = t(x) \circ t(x) = s(t(x));$$

unde $s : G \to G$ se defineşte prin $s(x) = x \circ x$.

De asemenea pentru fiecare $x, y \in G$, şi pentru fiecare unitate e din $(G, \circ)$ avem

$$xy = (e \circ x) \cdot (e \circ y) = (e \circ x) \cdot (y \circ e) = (ex) \circ (ye) =$$
$$= (ex) \circ (ey) = t(x) \circ t(y) = t(y \circ x).$$

De aici $t(s(x)) = t(x \circ x) = xx = x$.

Urmează că t este aplicaţie continuă inversă pentru s astfel încât $(G, \circ)$ este radical. Deoarece $(G, \cdot)$ este comutativ şi $x \circ y = s(xy) = s(yx) = y \circ x$ atunci operaţia $\{\circ\}$ este comutativă. Deoarece $xy = t(y \circ x)$ şi $t = s^{-1}$ atunci $(G, \cdot)$ este izotop radical în $(G, \circ)$. Urmează să demonstrăm că $\{\circ\}$ este asociativă.

Deoarece t este bijectivă şi

$$t[(x \circ y) \circ z] = z \cdot (x \circ y) = (e \circ z) \cdot (x \circ y) = (yz) \circ (xe) =$$
$$= (yz) \circ (ex) = t(z \circ y) \circ t(x) = t(x \circ (z \circ y)) = t(x \circ (y \circ z)).$$

De unde, concludem că $(G, \circ)$ este semigrup radical comutativ.

Teorema este demonstrată.

Propoziția 2.54. *[61] Fie* $(G, \circ)$ *este grupoid topologic asociativ şi comutativ. Dacă există două automorfisme topologice* $\varphi, \psi : (G, \circ) \to (G, \circ)$ *astfel încât:*

1. $x \cdot y = \varphi(x) \circ \psi(x)$;
2. $\varphi\varphi = \psi\psi$,

atunci $(G, \cdot)$ *este grupoid topologic paramedial.*

Demonstraţie. La demonstraţia propoziţiei date vom folosi asociativitate şi comutativitatea în felul următor: $(ab) \cdot c \overset{a}{=} a \cdot (bc) \overset{c}{=} a \cdot (cb) \overset{a}{=} (ac) \cdot b$. Deci, $(ab) \cdot c = (ac) \cdot b$.

$$\begin{aligned} xy \cdot zt &= \varphi(xy) \circ \psi(zt) = \varphi[\varphi(x) \circ \psi(y)] \circ \psi[\varphi(z) \circ \psi(t)] = \\ &= [\varphi\varphi(x) \circ \varphi\psi(y)] \circ [\psi\varphi(z) \circ \psi\psi(t)] \overset{1}{=} [\varphi\varphi(x) \circ (\psi\varphi(z) \circ \psi\psi(t))] \circ \varphi\psi(y) = \\ &= [(\varphi\varphi(x) \circ \psi\varphi(z)) \circ \psi\psi(t)] \circ \varphi\psi(y) = [\psi\psi(t) \circ (\varphi\varphi(x) \circ \psi\varphi(z))] \circ \varphi\psi(y) = \\ &= [\psi\psi(t) \circ \varphi\psi(y)] \cdot [\varphi\varphi(x) \circ \psi\varphi(z)] = [\psi\psi(t) \circ \varphi\psi(y)] \cdot [\psi\varphi(z) \circ \varphi\varphi(x)] \end{aligned}$$

În mod analog demonstrăm că:

$$\begin{aligned} ty \cdot zx &= \varphi(ty) \circ \psi(zx) = \varphi[\varphi(t) \circ \psi(y)] \circ \psi[\varphi(z) \circ \psi(x)] = \\ &= [\varphi\varphi(t) \circ \varphi\psi(y)] \circ [\psi\varphi(z) \circ \psi\psi(x)] \end{aligned}$$

deoarece $\varphi\varphi = \psi\psi$ avem că $xt \cdot zt = ty \cdot zx$.

Propoziţia este demonstrată.

Teorema 2.55. *[64] Dacă $(G, +)$ este grupoid topologic paramedial, şi $e \in G$ este (k, p)-zero element, atunci fiecare (n, m)-izotop omogen $(G, \cdot)$ al grupoidului topologic $(G, +)$, este paramedial, cu e (mk, np)-unitate în $(G, \cdot)$ pentru orice $n, m, p, k \in N$.*

Demonstraţie. Fie e (k, p)-zero element în $(G, +)$ şi $(G, \cdot)$ este (n, m)-izotop omogen al grupoidului topologic $(G, +)$. Vom demonstra că e este (mk, np)-unitate în $(G, \cdot)$. Menţionăm că $\varphi^r(e) = \psi^r(e) = e$ pentru orice $r \in N$. Dacă $k < +\infty$, atunci în $(G, +)$ are loc $rk(e, x, +) = x$ pentru orice $x \in G$ şi pentru orice $r \in N$. Fie $m < +\infty$ şi $\psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$. În acest caz $1(e, x, \cdot) = 1(e, \psi(x), +)$ şi $r(e, x, \cdot) = r(e, \psi^r(x), +)$ pentru orice $r \geq 1$. Mai mult ca atât,

$$mk(e, x, \cdot) = mk(e, \psi^{mk}(x), +) = mk(e, x, +) = x.$$

Analog obţinem că

$$(e, x, \cdot)np = (e, \varphi^{np}(x), +)np = (e, x, +)np = x.$$

În aşa mod am arătat că e este (mk, np)-unitate în $(G, \cdot)$.

Vom demonstra că (n, m)-izotopul omogen $(G, \cdot)$ al grupoidului topologic paramedial

$(G, +)$ este grupoid topologic paramedial şi $xy \cdot yt = ty \cdot zx$. Într-adevăr,

$$
\begin{aligned}
xy \cdot zt = \varphi(xy) + \psi(zt) = \varphi(\varphi(x) + \psi(y)) + \psi(\varphi(z) + \psi(t)) = \\
= [\varphi(\varphi(x)) + \varphi(\psi(y))] + [\psi(\varphi(z)) + \psi(\psi(t))] = \\
= [\psi(\psi(t)) + \varphi(\psi(y))] + [\psi(\varphi(z)) + \varphi(\varphi(x))] = \\
= [\varphi(\varphi(t)) + \varphi(\psi(y))] + [\psi(\varphi(z)) + \psi(\psi(x))] = \\
= \varphi(\varphi(t) + \psi(y)) + \psi(\varphi(z) + \psi(x)) = \varphi(t \cdot y) + \psi(z \cdot x) = ty \cdot zx.
\end{aligned}
$$

Astfel, $(G, \cdot)$ este grupoid topologic paramedial cu e (mk, np)-unitate.

Teorema este demonstrată.

Propoziția 2.56. *[56] Fie $(G, \circ)$ grupoid topologic medial. Dacă există două antiautomorfisme topologice $f, g : (G, \circ) \to (G, \circ)$ astfel încât: $x \cdot y = f(x) \circ g(x)$ şi $fg = gf$ atunci $(G, \cdot)$ este grupoid topologic paramedial.*

Demonstraţie. Fie $x, y, z, t \in G$. Avem

$$
\begin{aligned}
(xy)(zt) = f(xy) \circ g(zt) = f[f(y) \cdot g(x)] \circ g[f(t) \cdot g(z)] = \\
= [f(f(y)) \circ f(g(x))] \circ [g(f(t)) \circ g(g(z))].
\end{aligned}
$$

Similar

$$
\begin{aligned}
(ty) \cdot (zx) = f(ty) \circ g(zx) = f[f(y) \cdot g(t)] \circ g[f(x) \cdot g(z)] = \\
= [f(f(y)) \circ f(g(t))] \circ [g(f(x)) \circ g(g(z))] = \\
= [f(f(y)) \circ g(f(x))] \circ [f(g(t)) \circ g(g(z))].
\end{aligned}
$$

În baza faptului că $fg = gf$ putem afirma că $xy \cdot zt = ty \cdot xz$.

Propoziţia este demonstrată.

2.9. Exemple de quasigrupuri paramediale

Vom prezenta exemple de construire a quasigrupurilor paramediale utilizînd substituţiile α, β, γ.

Exemplul 2.57. *Fie $(G, \cdot)$ un grup Kelly. Definim operaţia binară $(\cdot)$ în felul următor:*

Tabelul 2.3. Grupul Kelly

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Considerăm substituţiile (α, β, γ):

Cazul I $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

$\overrightarrow{\alpha}$

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	2	1
3	2	1	4	3
4	4	3	2	1

$\overrightarrow{\beta}$

$\cdot$	1	2	3	4
1	3	4	2	1
2	1	2	4	3
3	4	3	1	2
4	2	1	3	4

$\overrightarrow{\gamma}$

Tabelul 2.4. Primul quasigrup paramedial, nemedial

$\overrightarrow{\gamma}$

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	3	4	2	1
3	2	1	3	4
4	4	3	1	2

Astfel, obţinem primul quasigrup paramedial care nu este medial. Într-adevăr $(2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 4) \neq$ $\neq (2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 4)$.

Examinăm substituţiile:

Cazul II $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

$\overrightarrow{\alpha}$

·	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	3	4	1	2
3	4	3	2	1
4	1	2	3	4

$\overrightarrow{\beta}$

·	1	2	3	4
1	2	1	3	4
2	3	4	2	1
3	4	3	1	2
4	1	2	4	3

$\overrightarrow{\gamma}$

Tabelul 2.5. Al doilea quasigrup paramedial, nemedial

$\overrightarrow{\gamma}$

·	1	2	3	4
1	2	1	3	4
2	3	4	2	1
3	4	3	1	2
4	1	2	4	3

Astfel, am obţinut al doilea quasigrup paramedial care nu este medial. Într-adevăr $(1 \cdot 3)\cdot$ $\cdot(2 \cdot 4) \neq (1 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 4)$.

Conform Teoremei 3.42 putem menţiona că există 11 quasigrupuri paramediale, neizomorfe de ordinul 4 şi doar două dintre ele sunt paramediale, nemediale, neizomorfe.

Exemplul 2.58. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup abelian. Definim operaţia binară în felul următor:*

Tabelul 2.6. Exemplu de grup abelian utilizat la construcţia quasigrupului bicomutativ

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

Considerăm substituţiile (α, β, γ), *unde*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

$\overrightarrow{\alpha}$

·	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	3	4	1	2
3	2	3	4	1
4	1	2	3	4

$\overrightarrow{\beta}$

·	1	2	3	4
1	3	2	1	4
2	2	1	4	3
3	1	4	3	2
4	4	3	2	1

$\overrightarrow{\gamma}$

Tabelul 2.7. Exemplu de quasigrup bicomutativ

$\cdot$	1	2	3	4
1	4	2	1	3
2	2	1	3	4
3	1	3	4	2
4	3	4	2	1

Astfel obţinem un quasigrup bicomutativ.

Conform Teoremei 3.43 putem afirma că există 11 quasigrupuri neizomorfe bicomutative de ordinul 4.

2.10. Concluzii la Capitolul 2

În acest capitol au fost studiaţi (n, m)-izotopii omogeni ai grupoizilor topologici cu unităţi multiple, quasigrupurile paramediale cu unităţi multiple, proprietăţile grupoizilor primitivi cu diviziuni, buclele topologice paramediale de dreapta, conexiunea dintre paramedialitate şi asociativitate.

În contextul respectiv punctăm următoarele concluzii:

- a fost dezvoltată metoda de cercetare a (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici;
- a fost elaborată metoda de cercetare a subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni;
- a fost dezvoltată metoda de cercetare a buclelor topologice paramediale de dreapta.

Utilizând metodele respective au fost obţinute următoarele rezultate:

- a fost dezvoltat conceptul de (n, m)-unitate, care a facilitat studierea (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoidului topologic care posedă anumite proprietăţi algebrice. Au fost determinate condiţiile pentru care proprietăţile algebrice respective se păstrează la grupoizii (n, m)-omogeni;
- au fost stabilite condiţiile pentru care grupoidul multiplicativ $(G, \circ)$ este quasigrup paramedial cu $(2, 1)$-unitate;
- au fost determinate condiţiile pentru care există un subgrupoid primitiv cu diviziuni care păstrează un şir de proprietăţi topologice ale grupoidului topologic primitiv cu diviziuni;
- au fost stabilite condiţiile pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta;

- au fost determinate condiţiile pentru care un grupoid topologic paramedial poate fi "transformat" în semigrup topologic comutativ.

Metodologia de cercetare propusă în Capitolul 2 poate fi utilizată la:

- introducerea conceptului de unitate multiplă pentru n-grupoizi topologici;
- studierea în profunzime a conexiunilor dintre bicomutativitate şi asociativitate;
- stabilirea condiţiilor pentru care grupoidul multiplicativ $(G, \circ)$ este quasigrup bicomutativ cu un anumit tip de (n, m)-unitate;
- studierea proprietăţilor clasei de (n, m)-grupoizi topologici paramediali;
- stabilirea condiţiilor pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică bicomutativă conţine o subbuclă compactă deschisă bicomutativă.

3. METODE DE CONSTRUCŢII A UNOR STRUCTURI ALGEBRICE ŞI PROBLEMA OMOMORFISMELOR CONTINUI DESCHISE PENTRU CAZUL n-GRUPOIZILOR TOPOLOGICI CU DIVIZIUNI

În paragraful 3.1 au fost cercetate condiţiile pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise, [74].

În paragraful 3.2 au fost examinate tipul unităţilor multiple din produsul grupoizilor Q_1 cu n unităţi multiple şi Q_2 cu t unităţi multiple, [64].

În paragrafele 3.3 şi 3.4 au fost descrise metodele de construire a quasigrupurilor mediale, neparamediale şi paramediale, nemediale utilizând produse directe speciale ale grupurilor comutative, [81], [75].

Existenţa măsurii Haar pe quasigrupurile paramediale a fost demonstrată în paragraful 3.5, [64], [76].

În paragraful 3.6 a fost descrisă relaţia dintre paramedialitate şi distributivitate, [77].

În paragraful 3.7 au fost elaborate unele aplicaţii ale calculatorului la studierea proprietăţilor quasigrupurilor neizomorfe finite, [78], [79].

3.1. Determinarea condiţiilor pentru care omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise

În paragraful 3.1 am soluţionat Problema 7. În acest context am demonstrat Teoremele 3.5 şi 3.7.

Definiția 3.1. *Mulţimea nevidă A se numeşte n-grupoid relativ de operaţia n-ară notată cu ω, dacă pentru orice elemente ordonate $a_1, ..., a_n \in A$ este definit un unic element $\omega(a_1, ..., a_n) \in A$.*

Definiția 3.2. *n-gropoidul A se numeşte n-grupoid cu diviziuni ori nD-grupoid, dacă ecuaţia $\omega(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) = b$ are soluţii nu necesar unice pentru orice $a_1, ..., a_n, b \in A$ şi $1 \leq i \leq n$.*
Dacă în n-grupoidul (A, ω) cu topologie, operaţia n-ară ω este continuă, atunci A se numeşte n-grupoid topologic.

Definiția 3.3. *Diviziunea în nD-grupoidul G este i-continuă, dacă pentru orice $a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n, b \in G$ pentru care $\omega(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) = b$ şi pentru orice vecinătate $O_i \ni a_i$ există vecinătăţile $O_1 \ni a_1$, $O_2 \ni a_2$, ..., $O_n \ni a_n$, $O_b \ni b$, astfel încât pentru orice $a_1^{'} \in O_1$, $a_2^{'} \in O_2, ..., a_n^{'} \in O_n, b^{'} \in O_b$ există $a_i^{'} \in O_i$ pentru care $\omega(a_1^{'}, ..., a_i^{'}, ..., a_n^{'}) = b^{'}$.*

Definiția 3.4. *Dacă în grupoidul topologic $(G, \cdot)$ diviziunea este i-continuă pentru orice $i = \overline{1, n}$, atunci vom spune că G este n-grupoid cu diviziuni continui.*

Aplicaţia $h : X \to Y$ a spaţiului topologic X pe spaţiului topologic Y se numeşte *aproape deschisă* dacă $Inth(U) \neq \emptyset$ pentru orice submulţime deschisă şi nevidă U din X.

Aplicaţia $f : A \to B$ a mulţimii A în mulţimea B se numeşte *aplicaţie cu preimaginea finită* dacă mulţimea $f^{-1}(y)$ este finită pentru orice $y \in B$.

Teorema 3.5. *[74] Fie G şi G_1 n-grupoizi topologici cu diviziuni continui, atunci orice omomorfism continuu aproape deschis $h : G \to G_1$ este deschis.*

Demonstraţie. Fie $a_1 \in U_1, a_2 \in U_2, ..., a_n \in U_n$ şi mulţimile $U_i, i = \overline{1..n}$ sunt deschise în G. Atunci există un aşa punct $c \in G$ şi aşa mulţimi deschise $V_1, V_2, ..., V_n$ şi W în G astfel încât $a_i \in V_i \subseteq U_i$, $c \in W$ şi $\omega(V_1, V_2, ..., W_i, ..., V_n) \subset U$ şi pentrun orice $x_i \in U_i$ şi $y_i \in U$ există $z \in W_i$ astfel încât $\omega(x_1, ..., z, ..., x_n) = y_i$. Notăm

$$H_1 = Inth(V_1)$$

$$H_2 = Inth(V_2)$$

$$.....................$$

$$H_n = Inth(V_n)$$

Fixăm $x_i' \in V_i$ şi $y' \in W_i$ pentru care $h(x_i') \in H_i$ şi $\omega(x_1', ..., y', ..., x_n') = a_i$. Atunci

$$h(\omega(x_1', ..., y', ..., x_n')) = h(a_i)$$

şi

$$h(a_i) = \omega(h(x_1'), ..., h(y'), ..., h(x_n')) \in \omega(H_1, ..., h(y'), ..., H_n) \subseteq$$
$$\omega(h(V_1), ..., h(y'), ..., h(V_n)) \subset h(\omega(V_1, ..., y', ..., V_n)) \subset h(U_i).$$

Deci, $h(a_i) \in Inth(U_i)$ şi mulţimile $h(U_i)$ sunt deschise.

Teorema este demonstrată.

Lema 3.6. *Fie $f : X \to Y$ aplicaţie continuă deschisă, reciproc biunivocă a spaţiul V, care este T_2- spaţiu, peste Spaţiul Y cu proprietatea Baire. Dacă mulţimea F este total densă în X atunci $f(F)$ este total densă în Y.*

Demonstraţie. Fie F mulţime total densă în X şi $U = Intf(F) \neq \emptyset$. Putem spune că $M_n = \{x \in U : y^{-1}(x) = n\}$. Atunci $\cup\{M_i : i \leq n\}$ este mulţine închisă în U pentru fiecare $n \in N$. Subspaţiul U posedă proprietatea Baire. Prin urmare $IntM_k \neq \emptyset$ pentru fiecare $k \in N$. Fixăm $y \in IntM_k$. Fie $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_k\}$. Atunci există astfel de mulţimi deschise $O_{x_1}, ..., O_{x_n}$ în X în aşa fel că sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $x_i \in O_{x_i}$;
2. $O_{x_i} \cap O_{x_j} = \emptyset$;
3. $f(O_{x_i}) \subset IntM_n$;

Putem spune că $V_y = \cap\{f(O_{x_i}) : i = 1, 2, ..., n\}$ şi $W_{x_i} = O_{x_i} \cap f^{-1}(V_y)$. Atunci aplicaţia $f \mid W_{x_i} : W_{x_i} \to V_y$ este omomorfism pentru orice $i \leq n$. Fie

$$F_1 = F \cap (W_{x_1} \cup ... \cup W_{x_n})$$

Evident că $f(F_1) = V_y$. De unde avem că $Int(F_1 \cap W_{x_i}) = \emptyset$ pentru fiecare $i \leq n$. Mai mult ca atât $f(F)$ este total densă în Y.

Lema este demonstrată.

Teorema 3.7. *[74] Fie G şi G_1 n-grupoizi topologici cu diviziuni continui. Fie G spaţiu local compact şi Lindelöf, G_1 este spaţiu Baire şi pentru orice $a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., b \in G_1$ mulţimea soluţiilor $\omega(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) = b$ este finită. Atunci orice omomorfism continuu $g : G \to G_1$ este deschis.*

Demonstraţie. Considerăm ecuaţia $\omega(a, ..., a, c, a, ..., a) = a$ pe G. Fixăm o vecinătate $U \ni a$. Deoarece G este grupoid topologic, atunci există aşa vecinătăţi V a punctului a şi W a punctului c, astfel încât $\omega(V, ..., V, W, V, ..., V) \subset U$. Deoarece G este n-grupoid cu diviziuni continui, pentru orice $x \in V$ şi $y \in U$ există un punct $z \in W$ astfel încât $\omega(x, ..., x, z, x, ..., x) = y$. Vom arăta că pentru orice vecinătate U a punctului a, există aşa vecinătate U' a punctului $g(a)$ astfel încât $g(U) \supset U'$. Translaţiile de tipul $L_a : G \to G$, unde $L_a(x) = ax$ sunt aplicaţii deschise. Familia de submulţimi $\{L_{a_n}(V) : a \in G\}$ formează o acoperire deschisă a mulţimii G. Deoarece G este spaţiu Lindelöf, putem găsi o acoperire numărabilă $\{L_{a_n}(V) : n \in N\}$. Notăm $F = \overline{V}$. Familia de submulţimi $\{F_1', F_2', ...\}$ unde $F_i' = g(L_{a_i}(F))$ este o acoperire numărabilă închisă a mulţimii G_1'. Din Lema 3.6, avem că $H = Int(g(F_{i_0})) \neq \emptyset$ pentru oarecare $i_0 \leq n$. Din Teorema 3.5 urmează că $g(U)$ este mulţime deschisă.

Deci, omomorfismul $g : G \to G_1$ este deschis.

Teorema este demonstrată.

3.2. Produs direct de grupoizi cu unităţi multiple

În paragraful curent vom examina tipul unităţilor multiple din produsul grupoizilor Q_1 cu n unităţi multiple şi Q_2 cu t unităţi multiple.

Iniţial vom reaminti definiţia produsului direct dintre un număr finit de grupoizi.

Definiția 3.8. *Produsul direct $Q_1 \times Q_2 \times ... \times Q_n$ al grupoizilor $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ în raport cu operaţiile $\circ_1, \circ_2, ..., \circ_n$, reprezintă mulţimea ordonată din n-elemente $(q_1, q_2, ..., q_n)$ unde $q_i \in Q_i$, împreună cu operaţia definită astfel:*

$$(q_1, q_2, ..., q_n) \star (h_1, h_2, ..., h_n) = (q_1 \circ_1 h_1, q_2 \circ_2 h_2, ..., q_n \circ_n h_n).$$

Vom nota cel mai mic multiplu comun dintre a şi b astfel: $c(a, b)$.

Teorema 3.9. *[64] Fie $(Q_1, \cdot)$ un grupoid cu (n, m)-unitate şi $(Q_2, \circ)$ un grupoid cu (k, l)-unitate. Atunci produsul direct $G = Q_1 \times Q_2$ este un grupoid cu $(c(n, k), c(m, l))$-unitate. Mai mult ca atât:*

1. dacă $(Q_1, \cdot)$ şi $(Q_2, \circ)$ sunt grupoizi mediali, atunci G este de asemenea medial;

2. dacă $(Q_1 . \cdot)$ şi $(Q_2, \circ)$ sunt grupoizi paramediali, atunci G este de asemenea paramedial;

3. dacă $(Q_1, \cdot)$ şi $(Q_2, \circ)$ sunt grupoizi bicomutativi, atunci G este de asemenea bicomutativ.

Demonstraţie. Fie elementul e_1 (n, m)-unitate pentru grupoidul $(Q_1, \cdot)$ şi elementul e_2 este (k, l)-unitate pentru grupoidul $(Q_2, \circ)$. În acest caz au loc următoarele relaţii în $(Q_1, \cdot)$:

1. $e_1 \cdot e_1 = e_1$;

2. $n(e_1, x) = x$ în raport cu operaţia $(\cdot)$;

3. $(x, e_1)m = x$.

În mod similar în grupoidul $(Q_2, \circ)$ au loc relaţiile respective:

1. $e_2 \circ e_2 = e_2$;

2. $k(e_2, x) = x$ în raport cu operaţia $(\circ)$;

3. $(x, e_2)l = x$.

Vom demonstra că (e_1, e_2) este $(c(n, k), c(m, l))$-unitate pentru grupoidul
$G = Q_1 \times Q_2$. Într-adevăr,

1.$(e_1,e_2)(e_1,e_2) = (e_1 \cdot e_1, e_2 \circ e_2) = (e_1,e_2)$-este unitate;

$$2.[(x,y),(e_1,e_2)]c(n,k) = [(x \cdot e_1, y \circ e_2)(e_1,e_2)](c(n,k)-1) =$$
$$= [((x,e_1) \cdot e_1, (y,e_2) \circ e_2)(e_1,e_2)](c(n,k)-2) = ... =$$
$$= [((x,e_1) \cdot (c(n,k)-1), (y,e_2) \circ (c(n,k)-1))](e_1,e_2) =$$
$$= [(x,e_1) \cdot c(n,k), (y,e_2) \circ c(n,k)] = (x,y);$$

$$3.c(m,l)[(e_1,e_2),(x,y)] = (c(m,l)-1)[(e_1,e_2)(e_1 \cdot x, e_2 \circ y)] =$$
$$= (c(m,l)-2)[(e_1,e_2)(e \cdot (e_1,x), e_2 \circ (e_2,y))] = ... =$$
$$= (e_1,e_2)[((c(m,l)-1) \cdot (e_1,x)), (c(m,l)-1) \circ (e_2,y)] =$$
$$= [(c(m,l) \cdot (e_1,x)), (c(m,l) \circ (e_2,y))] = (x,y).$$

În aşa mod am demonstrat că (e_1,e_2) este $(c(n,k),c(m,l))$-unitate în grupoidul $G = Q_1 \times Q_2$.

Demonstraţia afirmaţiilor 1-3 din Teorema 3.9 se bazează pe bine cunoscuta Teoremă Birkhoff [173].

Teorema este demonstrată.

Corolarul 3.10. *[64] Dacă $(Q_1,\cdot)$ şi $(Q_2,\circ)$ sunt grupoizi cu $(1,m)$-unitate şi respectiv $(n,1)$-unitate, atunci produsul direct $G = Q_1 \times Q_2$ este grupoid cu (n,m)-unitate.*

Demonstraţie. Demonstraţia corolarului dat rezultă din Teorema 3.9.

Avem că pentru grupoidul $(Q_1,\cdot)$ elementul e_1 este $(1,m)$-unitate şi respectiv elementul e_2 este $(n,1)$-unitate pentru grupoidul $(Q_2,\circ)$. Vom utiliza relaţiile din Teorema 3.9. Atunci pentru grupoidul produs $G = Q_1 \times Q_2$ au loc relaţiile:

1.$(e_1,e_2) * (e_1,e_2) = (e_1 \cdot e_1, e_2 \circ e_2) = (e_1,e_2)$-este unitate;

$$2.((x,y),(e_1,e_2))m = ((x \cdot e_1, y \circ e_2) * (e_1,e_2))(m-1) =$$
$$(((x \cdot e_1) \cdot e_1, (y \circ e_2)) * (e_1,e_2))(m-2) = ... = ((x,e_1)(m-1),(y \circ e_2)) * (e_1,e_2) =$$
$$= ((x,e_1)m, (y \circ e_2)) = ((x,e_1)m, y) = (x,y);$$

$$3.n((e_1,e_2),(x,y)) = (n-1)((e_1,e_2) * (e_1 \cdot x, e_2 \circ y)) =$$
$$= (n-2)((e_1,e_2) * ((e_1 \cdot x), e_2 \circ (e_2 \circ y))) = ... = (e_1,e_2) * ((e_1 \cdot x),(n-1)(e_2,y)) =$$
$$= ((e_1 \cdot x), n(e_2,y)) = (x,y).$$

În aşa mod am demonstrat că (e_1,e_2) este (n,m)-unitate în grupoidul $G = Q_1 \times Q_2$.

Corolarul este demonstrat.

Exemplul 3.11. *Fie* $Q_1 = \{1, 2, 3\}$. *Definim operaţia binară* $\{\cdot\}$ *astfel:*

Tabelul 3.1. Exemplu de quasigrup unde 1 este $(2, 1)$**-unitate**

$\cdot$	1	2	3
1	1	3	2
2	2	1	3
3	3	2	1

Atunci $(Q_1, \cdot)$ *este quasigrup şi 1 este* $(2, 1)$*-unitate.*

Fie $Q_2 = \{1, 2, 3, 4\}$. *Definim operaţia binară* $\{\circ\}$ *astfel:*

Tabelul 3.2. Exemplu de quasigrup unde 1 este $(3, 3)$**-unitate**

$\circ$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	3	1	2	4
3	4	2	1	3
4	2	4	3	1

Atunci $(Q_2, \circ)$ *este quasigrup şi 1 este* $(3, 3)$*-unitate. Vom examina produsul direct al quasigrupurilor* Q_1 *şi* Q_2*, notat astfel* $G = Q_1 \times Q_2$.

Tabelul 3.3. Exemplu de quasigrup unde 1 este $(6,3)$-unitate

$(*)$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
1	*1*	*3*	*4*	*2*	*9*	*11*	*12*	*10*	*5*	*7*	*8*	*6*
2	*3*	*1*	*2*	*4*	*11*	*9*	*10*	*12*	*7*	*5*	*6*	*8*
3	*4*	*2*	*1*	*3*	*12*	*10*	*9*	*11*	*8*	*6*	*5*	*7*
4	*2*	*4*	*3*	*1*	*10*	*12*	*11*	*9*	*6*	*8*	*7*	*5*
5	*5*	*7*	*8*	*6*	*1*	*3*	*4*	*2*	*9*	*11*	*12*	*10*
6	*7*	*5*	*6*	*8*	*3*	*1*	*2*	*4*	*11*	*9*	*10*	*12*
7	*8*	*6*	*5*	*7*	*4*	*2*	*1*	*3*	*12*	*10*	*9*	*11*
8	*6*	*8*	*7*	*5*	*2*	*4*	*3*	*1*	*10*	*12*	*11*	*9*
9	*9*	*11*	*12*	*10*	*5*	*7*	*8*	*6*	*1*	*3*	*4*	*2*
10	*11*	*9*	*10*	*12*	*7*	*5*	*6*	*8*	*3*	*1*	*2*	*4*
11	*12*	*10*	*9*	*11*	*8*	*6*	*5*	*7*	*4*	*2*	*1*	*3*
12	*10*	*12*	*11*	*9*	*6*	*8*	*7*	*5*	*2*	*4*	*3*	*1*

În acest caz $G = Q_1 \times Q_2$ *este quasigrup şi* 1 *este* $(6,3)$*-unitate. Menţionăm că quasigrupul produs* G *conţine două subquasigrupuri şi anume:* $G_1 = \{1,5,9\}$ *şi* $G_2 = \{1,2,3,4\}$.

Teorema 3.12. *[64] Fie* $(Q_1,\cdot)$ *grupoid cu* n *unităţi multiple* $(k_1,l_1),(k_2,l_2),...,(k_n,l_n)$ *şi* $(Q,\circ)$ *grupoid cu* t *unităţi multiple* $(m_1,r_1),(m_2,r_2),...,(m_t,r_t)$*. Atunci produsul direct al acestor doi grupoizi este:* $G = Q_1 \times Q_2$ *cu* $n \times t$ *unităţi multiple de tipul:*

1. tip de unităţi	*2. tip de unităţi*	...	*n. tip de unităţi*
$1.(c(k_1,m_1),c(l_1,r_1))$	$1.(c(k_2,m_1),c(l_2,r_1))$	...	$1.(c(k_n,m_1),c(l_n,r_1))$
$2.(c(k_1,m_2),c(l_1,r_2))$	$2.(c(k_2,m_2),c(l_2,r_2))$	...	$2.(c(k_n,m_2),c(l_n,r_2))$
....	....		....
$t.(c(k_1,m_t),c(l_1,r_t))$	$t.(c(k_2,m_t),c(l_2,r_t))$	...	$t.(c(k_n,m_t),c(l_n,r_t))$

Demonstraţie. Fie grupoidul $(Q_1,\cdot)$ cu n unităţi multiple $(k_1,l_1),(k_2,l_2),...,(k_n,l_n)$ şi grupoidul $(Q_1,\circ)$ cu t unităţi multiple $(m_1,r_1),(m_2,r_2),...,(m_t,r_t)$. Vom examina (k_1,l_1)-unitatea din $(Q_1,\cdot)$ cu toate unităţile multiple din $(Q_2,\circ)$. Conform Teoremei 3.9 obţinem primul tip de unităţi:

$1.(c(k_1,m_1),c(l_1,r_1))$ $2.(c(k_1,m_2),c(l_1,r_2))$ ... $t.(c(k_1,m_t),c(l_1,r_t))$.

Conform Teoremei 3.9 pentru unitate (k_2,l_2) din $(Q_1,\cdot)$ şi toate unităţile multiple din $(Q_2,\circ)$ şi obţinem al doilea tip de unităţi:

$1.(c(k_2, m_1), c(l_2, r_1))$ $2.(c(k_2, m_2), c(l_2, r_2))$ ... $t.(c(k_2, m_t), c(l_2, r_t))$.

Continuînd acest proces examinăm, în final, unitatea (k_n, l_n) din $(Q_1, \cdot)$ cu toate unităţile multiple din $(Q_2, \circ)$ şi obţinem al n-lea tip de unităţi:

$1.(c(k_n, m_1), c(l_n, r_1))$ $2.(c(k_n, m_2), c(l_n, r_2))$ ... $t.(c(k_n, m_t), c(l_n, r_t))$.

Astfel am obţinut că în quasigrupul produsul $G = Q_1 \times Q_2$ există $n * t$ unităţi multiple.

Teorema este demonstrată.

Exemplul 3.13. *Fie* $Q = \{1, 2, 3, 4\}$. *Definim operaţia binară* $\{\cdot\}$ *astfel.*

Tabelul 3.4. Exemplu de quasigrup cu 3 unităţi multiple: 1 este $(2,3)$-unitate, 3 este $(3,2)$-unitate şi 4 este $(3,3)$-unitate

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	3	4	2	1
3	4	1	3	2
4	2	3	1	4

Obţinem quasigrupul $(Q_1, \cdot)$ *cu 3 unităţi multiple: 1 este* $(2,3)$*-unitate, 3 este* $(3,2)$*-unitate şi 4 este* $(3,3)$*-unitate.*

Fie $Q = \{1, 2, 3, 4\}$. *Definim operaţia binară* $\{\circ\}$ *astfel:*

Tabelul 3.5. Exemplu de quasigrup cu 2 unităţi multiple: 1 este $(2,2)$-unitate şi 3 este $(3,2)$-unitate

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	3	1	2	4
3	2	4	3	1
4	4	3	1	2

Obţinem quasigrupul $(Q_2, \circ)$ *cu 2 unităţi multiple: 1 este* $(2,2)$*-unitate şi 3 este* $(3,2)$*-unitate.*

Produsul direct al quasigrupurilor Q_1 şi Q_2 este $G = Q_1 \times Q_2$.

Tabelul 3.6. Exemplu de quasigrup cu 6 unităţi multiple

(∗)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	4	3	5	6	8	7	13	14	16	15	9	10	12	11
2	3	1	2	4	7	5	6	8	15	16	14	16	11	9	10	12
3	2	4	3	1	6	8	7	5	14	16	15	13	10	12	11	9
4	4	3	1	2	8	7	5	6	16	15	13	14	12	11	9	10
5	9	10	12	11	13	14	16	15	5	6	8	7	1	2	4	3
6	11	9	10	12	15	13	14	16	7	5	6	8	3	1	2	4
7	10	12	11	9	14	16	15	13	6	8	7	5	2	4	3	1
8	12	11	9	10	16	15	13	14	8	7	5	6	4	3	1	2
9	13	14	16	15	1	2	4	3	9	10	12	11	5	6	8	7
10	15	13	14	16	3	1	2	4	11	9	10	12	7	5	6	8
11	14	16	15	13	2	4	3	1	10	12	11	9	6	8	7	5
12	16	15	13	14	4	3	1	2	12	11	9	10	8	7	5	6
13	5	6	8	7	9	10	12	11	1	2	4	3	13	14	16	15
14	7	5	6	8	11	9	10	12	3	1	2	4	15	13	14	16
15	6	8	7	5	10	12	11	9	2	4	3	1	14	16	15	13
16	8	7	5	6	12	11	9	10	4	3	1	2	16	15	13	14

În acest caz G este quasigrup cu 6 unităţi multiple: 1 *este* $(2,6)$*-unitate,* 3 *este* $(6,6)$*-unitate,* 9 *este* $(6,2)$*-unitate,* 11 *este* $(3,2)$*-unitate,* 13 *este* $(6,6)$*-unitate şi* 15 *este* $(3,6)$*-unitate. Quasigrupul G conţine 4 subquasigrupuri* $G_1 = \{1,2,3,4\}$, $G_2 = \{9,10,11,12\}$, $G_3 = \{13,14,15,16\}$ *şi* $G_4 = \{1,5,9,13\}$.

3.3. Metode de construcţie a quasigrupurilor paramediale şi nemediale

În acest paragraf vom determina în ce condiţii pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară, astfel încât noua structura este quasigrup neasociativ, paramedial şi nemedial, (subpunctul 1 din Problema 9).

Vom examina produse directe speciale prin intermediul cărora putem obţine exemple de quasigrupuri: paramediale şi nemediale, mediale şi neparamediale.

Teorema 3.14. *[81] Fie $(G,+)$ grup comutativ. Mulţimea $G \times G$ cu operaţia*

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_2 + y_2 - x_1, x_1 + y_1 - y_2)$$

este quasigrup neasociativ, paramedial şi nemedial.

Demonstraţie. Vom demonstra că $(G \times G, \circ)$ este:

1. Quasigrup;
2. Quasigrup neasociativ;
3. Quasigrup paramedial;
4. Quasigrup nemedial.

1. Pentru a demonstra că grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup, este necesar să arătăm că ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii unice în grupoidul dat.

Fie ecuaţia $ya = b$. Fie $y = (y_1, y_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ya = b$ putem scrie

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{3.1}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.14 avem că

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_1) = (a_1 + a_2 - y_1, y_1 + y_2 - a_2). \tag{3.2}$$

Din (3.1) şi (3.2) obţinem că

$$a_1 + a_2 - y_1 = b_1 \tag{3.3}$$

şi

$$y_1 + y_2 - a_2 = b_2. \tag{3.4}$$

Din (3.3) avem că

$$y_1 = a_1 + a_2 - b_1. \tag{3.5}$$

Substituim în (3.4) expresia obţinută pentru y_1 şi obţinem

$$y_2 = b_1 + b_2 - a_1. \tag{3.6}$$

Deci, $y_1 = a_1 + a_2 - b_1$ şi $y_2 = b_1 - a_1 + b_2$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu y_1 şi y_2. Presupunem că y_1' şi y_2' este o altă soluţie a ecuaţiei $ya = b$. Atunci

$$(y_1', y_2') \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{3.7}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.14 avem că

$$(y_1', y_2') \circ (a_1, a_1) = (a_1 + a_2 - y_1', y_1' + y_2' - a_2). \tag{3.8}$$

Din (3.7) şi (3.8) obţinem că

$$a_1 + a_2 - y_1' = b_1 \tag{3.9}$$

şi

$$y_1' + y_2' - a_2 = b_2. \tag{3.10}$$

Din (3.9) avem că

$$y_1' = a_1 + a_2 - b_1. \tag{3.11}$$

Substituim în (3.10) expresia obţinută pentru y_1' şi obţinem

$$y_2' = b_1 - a_1 - b_2. \tag{3.12}$$

Deci, $y_1' = a_1 + a_2 - b_1$ şi $y_2' = b_1 - a_1 + b_2$.

Din (3.5) şi (3.11) am obţinut că $y_1 = y_1'$. Din (3.6) şi (3.12) avem că $y_2 = y_2'$.

Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ya = b$ are o singură soluţie.

În mod analog procedăm cu ecuaţia $ax = b$. Fie $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ax = b$ putem scrie

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (b_1, b_2). \tag{3.13}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.14 avem că

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - a_1, a_1 + a_2 - x_2). \tag{3.14}$$

Din (3.13) şi (3.14) obţinem că

$$x_1 + x_2 - a_1 = b_1 \tag{3.15}$$

şi

$$a_1 + a_2 - x_2 = b_2. \tag{3.16}$$

Din (3.16) avem că

$$x_2 = a_1 + a_2 - b_2. \tag{3.17}$$

Substituim în (3.15) expresia obţinută pentru x_2 şi obţinem

$$x_1 = -a_2 + b_2 + b_1. \tag{3.18}$$

Deci, $x_1 = -a_2 + b_2 + b_1$ şi $x_2 = a_1 + a_2 - b_1$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu x_1 şi x_2. Presupunem că x_1' şi x_2' este o altă soluţie a ecuaţiei $ax = b$. Aşa deci,

$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (b_1, b_2). \tag{3.19}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.14 avem că

$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (x_1' + x_2' - a_1, a_1 + a_2 - x_2'). \tag{3.20}$$

Din (3.19) şi (3.20) obţinem că

$$x_1' + x_2' - a_1 = b_1 \tag{3.21}$$

şi

$$a_1 + a_2 - x_2' = b_2. \tag{3.22}$$

Din (3.22) avem că

$$x_2' = a_1 + a_2 - b_2. \tag{3.23}$$

Substituim în (3.21) expresia obţinută pentru x_2' şi obţinem

$$x_1' = -a_2 + b_2 + b_1. \tag{3.24}$$

Deci, $x_1' = -a_2 + b_2 + b_1$ şi $x_2' = a_1 + a_2 - b_1$.

Din (3.18) şi (3.24) avem că $x_2 = x_2'$. Din (3.17) şi (3.23) avem că $x_1 = x_1'$.

Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ax = b$ are o singură soluţie.

Deci, grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup.

2. Vom arăta că în $(G \times G, \circ)$ nu se îndeplineşte legea asociativă, adică nu are loc relaţia $(ab)c = a(bc)$. Notăm $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), c = (x_3, y_3)$. Deci, $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$. Aplicînd legea din Teorema 3.14 pentru $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3)$ avem:

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_2 + y_2 - x_1, x_1 + y_1 - y_2) \circ (x_3, y_3) =$$

$$= (x_3 + y_3 - x_2 - y_2 + x_1, x_2 + y_2 - x_1 + x_1 + y_1 - y_2 - y_3) =$$

$$= (x_3 + y_3 - x_2 - y_2 + x_1, x_2 + y_1 - y_3). \tag{3.25}$$

În mod analog procedăm cu $(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$ şi obţinem

$$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (x_3 + y_3 - x_2, x_2 + y_2 - y_3) =$$

$$= (x_3 + y_3 - x_2 + x_2 + y_2 - y_3 - x_1, x_1 + y_1 - x_2 - y_2 + y_3) =$$

$$= (x_3 + y_2 - x_1, x_1 + y_1 - x_2 - y_2 + y_3). \tag{3.26}$$

Din (3.25) şi (3.26) observăm că nu se îndeplineşte legea asociativă.

3. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este paramedial, adică are loc legea $xy \cdot zt = = ty \cdot zx$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4)) = ((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$. Aplicăm legea din Teorema 3.14 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= (x_2 + y_2 - x_1, x_1 + y_1 - y_2) \circ (x_4 + y_4 - x_3, x_3 + y_3 - y_4) =$$

$$= (x_4 + y_4 - x_3 + x_3 + y_3 - y_4 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_2 - x_1 + x_1 + y_1 - y_2 - (x_3 + y_3 - y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{3.27}$$

În mod similar procedăm cu $((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$ şi avem

$$((x_4, y_4) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_1, y_1)) =$$

$$= (x_2 + y_2 - x_4, x_4 + y_4 - y_2) \circ (x_1 + y_1 - x_3, x_3 + y_3 - y_1) =$$

$$= (x_1 + y_1 - x_3 + x_3 + y_3 - y_1 - (x_2 + y_2 - x_4), x_2 + y_2 - x_4 + x_4 + y_4 - y_2 - (x_3 + y_3 - y_1)) =$$

$$= (x_1 + y_3 - x_2 - y_2 + x_4, x_2 + y_4 - x_3 - y_3 + y_1)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{3.28}$$

Din (3.27) şi (3.28) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este paramedial.

4. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ nu este medial, adică nu are loc legea $xy \cdot zt = xz \cdot yt$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4)) = ((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_4))$. Aplicăm legea din Teorema 3.14 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= (x_2 + y_2 - x_1, x_1 + y_1 - y_2) \circ (x_4 + y_4 - x_3, x_3 + y_3 - y_4) =$$

$$= (x_4 + y_4 - x_3 + x_3 + y_3 - y_4 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_2 - x_1 + x_1 + y_1 - y_2 - (x_3 + y_3 - y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{3.29}$$

În mod similar procedăm cu $((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_4))$ şi avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_3, y_3)) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= (x_3 + y_3 - x_1, x_1 + y_1 - y_3) \circ (x_4 + y_4 - x_2, x_2 + y_2 - y_4) =$$

$$= (x_4 + y_4 - x_2 + x_2 + y_2 - y_4 - (x_3 + y_3 - x_1), x_3 + y_3 - x_1 + x_1 + y_1 - y_3 - (x_2 + y_2 - y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{3.30}$$

Din (3.29) şi (3.30) observăm că nu are loc legea medialităţii în $(G \times G, \circ)$.

Teorema este demonstrată.

Exemplul 3.15. *Fie* $G = \{0, 1\}$. *Definim operaţia* " $+$ " *în felul următor:*

Tabelul 3.7. Exemplu de grup comutativ utilizat la construcţia quasigrupului paramedial

(+)	0	1
0	0	1
1	1	0

$(G, +)$ *este grup comutativ. Examinăm* $(G \times G, \circ)$*, unde* " $\circ$ " *este definită astfel:*

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_2 + y_2 - x_1, x_1 + y_1 - y_2)$$

Obţinem

Tabelul 3.8. Exemplu de quasigrup paramedial, neasociativ şi nemedial

(+)	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	2	3	0
2	3	0	1	2
3	2	1	0	3

Astfel $(G \times G, \circ)$ *este quasigrup paramedial, neasociativ şi nemedial.*

Teorema 3.16. *[75] Fie $(G,+)$ grup comutativ. Mulţimea $G\times G$ cu operaţia*

$$(x_1,y_1)\circ(x_2,y_2)=(-x_2-y_2+x_1,-x_1-y_1+y_2)$$

este quasigrup neasociativ, paramedial şi nemedial.

Demonstraţie. Vom demonstra că $(G\times G,\circ)$ este:

1. Quasigrup;
2. Quasigrup neasociativ;
3. Quasigrup paramedial;
4. Quasigrup nemedial.

1. Pentru a demonstra că grupoidul $(G\times G,\circ)$ este quasigrup, este necesar să arătăm că ecuaţiile $ax=b$ şi $ya=b$ au soluţii unice în grupoidul dat.

Fie ecuaţia $ya=b$. Fie $y=(y_1,y_2)$, $a=(a_1,a_2)$ şi $b=(b_1,b_2)$. Deoarece $ya=b$ putem scrie

$$(y_1,y_2)\circ(a_1,a_1)=(b_1,b_2). \tag{3.31}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.16 avem că

$$(y_1,y_2)\circ(a_1,a_1)=(-a_1-a_2+y_1,-y_1-y_2+a_2). \tag{3.32}$$

Din (3.31) şi (3.32) obţinem că

$$-a_1-a_2+y_1=b_1 \tag{3.33}$$

şi

$$-y_1-y_2+a_2=b_2. \tag{3.34}$$

Din (3.33) avem că

$$y_1=a_1+a_2+b_1. \tag{3.35}$$

Substituim în (3.34) expresia obţinută pentru y_1 şi obţinem

$$y_2=-b_1-a_1-b_2. \tag{3.36}$$

Deci, $y_1=a_1+a_2+b_1$ şi $y_2=-b_1-a_1-b_2$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu y_1 şi y_2. Presupunem că y_1' şi y_2' este o altă soluţie a ecuaţiei $ya=b$. Atunci

$$(y_1',y_2')\circ(a_1,a_1)=(b_1,b_2). \tag{3.37}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.16 avem că

$$(y_1', y_2') \circ (a_1, a_1) = (-a_1 - a_2 + y_1', -y_1' - y_2' + a_2). \tag{3.38}$$

Din (3.37) şi (3.38) obţinem că

$$-a_1 - a_2 + y_1' = b_1 \tag{3.39}$$

şi

$$-y_1' - y_2' + a_2 = b_2. \tag{3.40}$$

Din (3.39) avem că

$$y_1' = a_1 + a_2 + b_1. \tag{3.41}$$

Substituim în (3.40) expresia obţinută pentru y_1' şi obţinem

$$y_2' = -b_1 - a_1 - b_2. \tag{3.42}$$

Deci, $y_1' = a_1 + a_2 + b_1$ şi $y_2' = -b_1 - a_1 - b_2$.

Din (3.35) şi (3.41) am obţinut că $y_1 = y_1'$. Din (3.36) şi (3.42) avem că $y_2 = y_2'$.

Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ya = b$ are o singură soluţie.

În mod analog procedăm cu ecuaţia $ax = b$. Fie $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ax = b$ putem scrie

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (b_1, b_2). \tag{3.43}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.16 avem că

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (-x_1 - x_2 + a_1, -a_1 - a_2 + x_2). \tag{3.44}$$

Din (3.43) şi (3.44) obţinem că

$$-x_1 - x_2 + a_1 = b_1 \tag{3.45}$$

şi

$$-a_1 - a_2 + x_2 = b_2. \tag{3.46}$$

Din (3.46) avem că

$$x_2 = a_1 + a_2 + b_2. \tag{3.47}$$

Substituim în (3.45) expresia obţinută pentru x_2 şi obţinem

$$x_1 = -a_2 - b_2 - b_1. \tag{3.48}$$

Deci, $x_1 = -a_2 - b_2 - b_1$ şi $x_2 = a_1 + a_2 + b_2$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu x_1 şi x_2. Presupunem că x_1' şi x_2' este o altă soluţie a ecuaţiei $ax = b$. Aşa deci,

$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (b_1, b_2). \tag{3.49}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.16 avem că

$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (-x_1' - x_2' + a_1, -a_1 - a_2 + x_2'). \tag{3.50}$$

Din (3.49) şi (3.50) obţinem că

$$-x_1' - x_2' + a_1 = b_1 \tag{3.51}$$

şi

$$-a_1 - a_2 + x_2' = b_2. \tag{3.52}$$

Din (3.52) avem că

$$x_2' = a_1 + a_2 + b_2. \tag{3.53}$$

Substituim în (3.51) expresia obţinută pentru x_2' şi obţinem

$$x_1' = -a_2 - b_2 - b_1. \tag{3.54}$$

Deci, $x_1' = -a_2 - b_2 - b_1$ şi $x_2' = a_1 + a_2 + b_2$.

Din (3.47) şi (3.53) avem că $x_2 = x_2'$. Din (3.48) şi (3.54) avem că $x_1 = x_1'$.

Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ax = b$ are o singură soluţie.

Deci, grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup.

2. Vom arăta că în $(G \times G, \circ)$ nu se îndeplineşte legea asociativă, adică $(ab)c = a(bc)$. Notăm $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), c = (x_3, y_3)$. Deci,
$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$. Aplicînd legea din Teorema 3.16 pentru $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3)$ avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (-x_2 - y_2 + x_1, -x_1 - y_1 + y_2) \circ (x_3, y_3) =$$

$$= (-x_3 - y_3 - x_2 - y_2 + x_1, x_2 + y_2 - x_1 + x_1 + y_1 - y_2 + y_3) =$$

$$= (-x_3 - y_3 - x_2 - y_2 + x_1, x_2 + y_1 + y_3). \tag{3.55}$$

În mod analog procedăm cu $(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$ şi obţinem

$$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (-x_3 - y_3 + x_2, -x_2 - y_2 + y_3) =$$

$$= (x_3 + y_3 - x_2 + x_2 + y_3 - y_3 - x_3, -x_1 - y_1 - x_2 - y_2 + y_3) =$$

$$= (x_3 + y_3 - x_3, -x_1 - y_1 - x_2 - y_2 + y_3). \tag{3.56}$$

Din (3.55) şi (3.56) observăm că nu se îndeplineşte legea asociativă.

3. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este paramedial, adică are loc legea $xy \cdot zt = = ty \cdot zx$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4)) = ((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$. Aplicăm legea din Teorema 3.16 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_2 - y_2 + x_1, -x_1 - y_1 + y_2)) \circ ((-x_4 - y_4 + x_3, -x_3 - y_3 + y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_4 - x_3 + x_3 + y_3 - y_4 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_2 - x_1 + x_1 + y_1 - y_2 - (x_3 + y_3 - y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{3.57}$$

În mod similar procedăm cu $((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$ şi avem

$$((x_4, y_4) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_1, y_1)) =$$

$$= ((-x_2 - y_2 + x_4, -x_4 - y_4 + y_2)) \circ ((-x_1 - y_1 + x_3, -x_3 - y_3 + y_1)) =$$

$$= (x_1 + y_1 - x_3 + x_3 + y_3 - y_1 - (x_2 + y_2 - x_4), x_2 + y_2 - x_4 + x_4 + y_4 - y_2 - (x_3 + y_3 - y_1)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{3.58}$$

Din (3.57) şi (3.58) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este paramedial.

4. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ nu este medial, adică nu are loc legea $xy \cdot zt = xz \cdot yt$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4)) = ((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_4))$. Aplicăm legea din Teorema 3.16 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_2 - y_2 + x_1, -x_1 - y_1 + y_2)) \circ ((-x_4 - y_4 + x_3, -x_3 - y_3 + y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_4 - x_3 + x_3 + y_3 - y_4 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_2 - x_1 + x_1 + y_1 - y_2 - (x_3 + y_3 - y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{3.59}$$

În mod similar procedăm cu $((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_4))$ şi avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_3, y_3)) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_3 - y_3 + x_1, -x_1 - y_1 + y_3)) \circ ((-x_4 - y_4 + x_2, -x_2 - y_2 + y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_4 - x_2 + x_2 + y_2 - y_4 - (x_3 + y_3 - x_1), x_3 + y_3 - x_1 + x_1 + y_1 - y_3 - (x_2 + y_2 - y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_2 - (x_3 + y_3 - x_1), x_3 + y_1 - (x_2 + y_2 - y_4)). \tag{3.60}$$

Din (3.59) şi (3.60) observăm că nu are loc legea medialităţii în $(G \times G, \circ)$.

Teorema este demonstrată.

Exemplul 3.17. *Fie $(G, +)$ grup abelian de ordinul 3.*

Tabelul 3.9. Exemplu de grup abelian de ordinul 3 utilizat la construcţia quasigrupului paramedial

(+)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Examinăm $(G \times G, \circ)$, unde "$\circ$" este definită astfel:

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_2 - y_2 + x_1, -x_1 - y_1 + y_2)$$

Obţinem

Tabelul 3.10. Exemplu de quasigrup paramedial, neasociativ şi nemedial

(+)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	7	5	6	4	2	3	1	8
1	2	6	4	8	3	1	5	0	7
2	1	8	3	7	5	0	4	2	6
3	5	0	7	2	6	4	8	3	1
4	4	2	6	1	8	3	7	5	0
5	3	1	8	0	7	5	6	4	2
6	7	5	0	4	2	6	1	8	3
7	6	4	2	3	1	8	0	7	5
8	8	3	1	5	0	7	2	6	4

Deci, $(G \times G, \circ)$ este quasigrup paramedial, neasociativ şi nemedial.

3.4. Metode de construcţie a quasigrupurilor mediale şi neparamediale

În acest paragraf vom determina în ce condiţii pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită operaţia binară, astfel încât noua structură este quasigrup neasociativ, medial şi neparamedial, (subpunctul 2 din Problema 9).

Teorema 3.18. *[75] Fie $(G, +)$ grup comutativ. Mulţimea $G \times G$ cu operaţia*

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1)$$

este quasigrup neasociativ, neparamedial, medial, AG-quasigrup, AD-quasigrup.

Demonstraţie. Vom demonstra că $(G \times G, \circ)$ este:

1. Quasigrup;
2. Quasigrup neasociativ;
3. Quasigrup medial;
4. AG-quasigrup;
5. AD-quasigrup;
6. Quasigrup neparamedial.

1. Pentru a demonstra că grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup, este necesar să arătăm că ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii unice în grupoidul dat.

Fie ecuaţia $ya = b$. Fie $y = (y_1, y_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ya = b$ putem scrie

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{3.61}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.18 avem că

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_2) = (-y_1 - y_2 + a_2, -a_1 - a_2 + y_1). \tag{3.62}$$

Din (3.61) şi (3.62) obţinem că

$$-y_1 - y_2 + a_2 = b_1 \tag{3.63}$$

şi

$$-a_1 - a_2 + y_1 = b_2. \tag{3.64}$$

Din (3.64) avem că

$$y_1 = a_1 + a_2 + b_2. \tag{3.65}$$

Substituim în (3.63) expresia obţinută pentru y_1 şi obţinem

$$y_2 = -b_2 - a_1 - b_1. \tag{3.66}$$

Deci, $y_1 = a_1 + a_2 + b_2$ şi $y_2 = -b_2 - a_1 - b_1$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu y_1 şi y_2. Presupunem că y_1' şi y_2' este o altă soluţie a ecuaţiei $ya = b$. Atunci

$$(y_1', y_2') \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{3.67}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.18 avem că

$$(y_1', y_2') \circ (a_1, a_2) = (-y_1' - y_2' + a_2, -a_1 - a_2 + y_1'). \tag{3.68}$$

Din (3.67) şi (3.68) obţinem că

$$-y_1' - y_2' + a_2 = b_1 \tag{3.69}$$

şi

$$-a_1 - a_2 + y_1' = b_2. \tag{3.70}$$

Din (3.70) avem că

$$y_1' = a_1 + a_2 + b_2. \tag{3.71}$$

Substituim în (3.69) expresia obţinută pentru y_1' şi obţinem

$$y_2' = -a_1 - b_2 - b_1. \tag{3.72}$$

Deci, $y_1' = a_1 + a_2 + b_2$ şi $y_2' = -b_1 - b_2 - a_1$.

Din (3.65) şi (3.71) am obţinut că $y_1 = y_1'$. Din (3.66) şi (3.72) avem că $y_2 = y_2'$.

Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ya = b$ are o singură soluţie.

În mod analog procedăm cu ecuaţia $ax = b$. Fie $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ax = b$ putem scrie

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (b_1, b_2). \tag{3.73}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.18 avem că

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (-a_1 - a_2 + x_2, -x_1 - x_2 + a_1). \tag{3.74}$$

Din (3.73) şi (3.74) obţinem că

$$-a_1 - a_2 + x_2 = b_1 \tag{3.75}$$

şi
$$-x_1 - x_2 + a_1 = b_2. \tag{3.76}$$
Din (3.755) avem că
$$x_2 = a_1 + a_2 + b_1. \tag{3.77}$$
Substituim în (3.76) expresia obţinută pentru x_2 şi obţinem
$$x_1 = -a_2 - b_2 - b_1. \tag{3.78}$$

Deci, $x_1 = -a_2 - b_2 - b_1$ şi $x_2 = a_1 + a_2 + b_1$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu x_1 şi x_2. Presupunem că x_1' şi x_2' este o altă soluţie a ecuaţiei $ax = b$. Aşa deci,
$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (b_1, b_2). \tag{3.79}$$
Conform condiţiei Teoremei 3.18 avem că
$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (-a_1 - a_2 + x_2', -x_1' - x_2' + a_1). \tag{3.80}$$
Din (3.79) şi (3.80) obţinem că
$$-a_1 - a_2 + x_2' = b_1 \tag{3.81}$$
şi
$$-x_1' - x_2' + a_1 = b_2. \tag{3.82}$$
Din (3.81) avem că
$$x_2' = a_1 + a_2 + b_1. \tag{3.83}$$
Substituim în (3.82) expresia obţinută pentru x_2' şi obţinem
$$x_1' = -b_2 - b_1 - a_2. \tag{3.84}$$

Deci, $x_1' = -a_2 - b_2 - b_1$ şi $x_2' = a_1 + a_2 + b_1$.

Din (3.77) şi (3.83) avem că $x_2 = x_2'$. Din (3.78) şi (3.84) avem că $x_1 = x_1'$. Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ax = b$ are o singură soluţie.

Deci, grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup.

2. Vom arăta că în $(G \times G, \circ)$ nu se îndeplineşte legea asociativă, adică $(ab)c = a(bc)$. Notăm $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), c = (x_3, y_3)$. Deci,

$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$. Aplicînd legea din Teorema 3.18 pentru $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3)$ avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1) \circ (x_3, y_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_2 + x_2 + y_2 - x_1 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1 + x_2 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2). \tag{3.85}$$

În mod analog procedăm cu $(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$ şi obţinem

$$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (-x_2 - y_2 + y_3, -x_3 - y_3 + x_2) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + x_2, x_2 + y_2 - y_3 - x_3 + y_3 - x_4 + x_1) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3, y_2 + x_3 + x_1). \tag{3.86}$$

Din (3.85) şi (3.86) observăm că nu se îndeplineşte legea asociativă.

3. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este medial, adică are loc legea $xy \cdot zt = = xz \cdot yt$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4)) = ((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_7))$. Aplicăm legea din Teorema 3.18 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1)) \circ ((-x_3 - y_3 + y_4, -x_4 - y_4 + x_3)) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_2 + x_2 + y_2 - x_1 - (x_4 + y_4 - x_3), x_3 + y_3 - y_4 + x_4 + y_4 - x_3 - (x_1 + y_1 - y_2)) =$$

$$= (x_3 + y_1 - (x_4 + y_4 - x_2), x_4 + y_4 - (x_1 + y_1 - y_2)). \tag{3.87}$$

În mod similar procedăm cu $((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_4))$ şi avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_3, y_3)) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_1 - y_1 + y_3, -x_3 - y_3 + x_1)) \circ ((-x_2 - y_2 + y_4, -x_4 - y_4 + x_2)) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_3 + x_3 + y_3 - x_1 - (x_4 + y_4 - x_2), x_2 + y_2 - y_4 + x_4 + y_4 - x_2 - (x_1 + y_1 - y_3)) =$$

$$(x_3 + y_1 - (x_4 + y_4 - x_2), x_4 + y_3 - (x_1 + y_1 - y_2)). \tag{3.88}$$

Din (3.87) şi (3.88) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este medial.

4. Demonstrăm că $(G\times G,\circ)$ este AG-grupoid, adică are loc legea $(xy)z = (zy)x$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3)$, atunci $((x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2))\cdot(x_3, y_3) = ((x_3, y_3)\cdot(x_2, y_2))\cdot (x_1, y_1)$. Aplicăm legea din Teorema 3.18 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3)$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1) \circ (x_3, y_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_2 + x_2 + y_2 - x_1 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1 + x_2 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2). \tag{3.89}$$

În mod similar procedăm cu

$((x_3, y_3) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_1, y_1)$ şi avem

$$((x_3, y_3) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_1, y_1) = (-x_3 - y_3 + y_2, -x_2 - y_2 + x_3) \circ (x_1, y_1) =$$

$$= (x_3 + y_3 - y_2 + x_2 + y_2 - x_3 + y_1, -x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + y_2) =$$

$$= (y_3 + x_2 + y_1, -x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + y_2). \tag{3.90}$$

Din (3.89) şi (3.90) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este AG-grupoid.

5. Demonstrăm că $(G\times G,\circ)$ este AD-grupoid, adică are loc legea $x(yz) = z(yx)$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3)$, atunci $(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) = (x_3, y_3) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1))$. Aplicăm legea din Teorema 3.18 pentru $(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3))$ şi obţinem

$$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (-x_2 - y_2 + y_3, -x_3 - y_3 + x_2) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + x_2, y_2 + x_3 + x_1). \tag{3.91}$$

În mod similar procedăm cu

$(x_3, y_3) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1))$ şi avem

$$(x_3, y_3) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_1, y_1)) = (x_3, y_3) \circ (-x_2 - y_2 + y_1, -x_1 - y_1 + x_2) =$$

$$= (-x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + x_2, x_2 + y_2 - y_1 + x_1 + y_1 - x_2 + x_3) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + x_2, y_2 + x_1 + x_3). \tag{3.92}$$

Din (3.91) şi (3.92) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este AD-grupoid.

6. Demonstrăm că $(G\times G,\circ)$ nu este paramedial, adică nu are loc legea $xy \cdot zt = ty \cdot zx$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot$

$(x_4, y_4)) = ((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$. Aplicăm legea din Teorema 3.18 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_2 - y_2 + x_1, -x_1 - y_1 + y_2)) \circ ((-x_4 - y_4 + x_3, -x_3 - y_3 + y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_4 - x_3 + x_3 + y_3 - y_4 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_2 - x_1 + x_1 + y_1 - y_2 - (x_3 + y_3 - y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{3.93}$$

În mod similar procedăm cu $((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$ şi avem

$$((x_4, y_4) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_1, y_1)) =$$

$$= ((-x_4 - y_4 + y_2, -x_2 - y_2 + x_4)) \circ ((-x_3 - y_3 + y_1, -x_1 - y_1 + x_3)) =$$

$$= (x_4 + y_4 - y_2 + x_2 + y_2 - x_4 - (x_1 - y_1 + x_3), x_3 + y_3 - y_1 + x_1 + y_1 - x_3 - (x_4 + y_4 - y_2)) =$$

$$= (x_2 + y_4 - (x_1 + y_1 - x_3), x_1 + y_3 - (x_4 + y_4 - y_2)). \tag{3.94}$$

Din (3.93) şi (3.94) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ nu este paramedial.

Teorema este demonstrată.

Exemplul 3.19. *Fie $(G, +)$ grup abelian de ordinul 3.*

Tabelul 3.11. Exemplu de grup abelian de ordinul 3 utilizat la construcţia quasigrupului medial

(+)	*0*	*1*	*2*
0	*0*	*1*	*2*
1	*1*	*2*	*0*
2	*2*	*0*	*1*

Examinăm $(G \times G, \circ)$, unde "$\circ$" este definită astfel:

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1)$$

Obţinem

Tabelul 3.12. Exemplu de quasigrup medial, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup

(+)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	5	7	2	4	6	1	3	8
1	6	2	4	8	1	3	7	0	5
2	3	8	1	5	7	0	4	6	2
3	7	0	5	6	2	4	8	1	3
4	4	6	2	3	8	1	5	7	0
5	1	3	8	0	5	7	2	4	6
6	5	7	0	4	6	2	3	8	1
7	2	4	6	1	3	8	0	5	7
8	8	1	3	7	0	5	6	2	4

În aşa mod $(G \times G, \circ)$ *este quasigrup medial, neparamedial,* AG*-quasigrup şi* AD*-quasigrup.*

Exemplul 3.20. *Fie* $(G, +)$ *grup abelian de ordinul 4.*

Tabelul 3.13. Exemplu de grup abelian de ordinul 4 utilizat la construcţia quasigrupului medial

(+)	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Examinăm $(G \times G, \circ)$, *unde* " $\circ$ " *este definită astfel:*

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1)$$

Obţinem:

Tabelul 3.14. Exemplu de quasigrup medial, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup

(+)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	7	10	13	3	6	9	12	2	5	8	15	1	4	11	14
1	12	3	6	9	15	2	5	8	14	1	4	11	13	0	7	10
2	8	15	2	5	11	14	1	4	10	13	0	7	9	12	3	6
3	4	11	14	1	7	10	13	0	6	9	12	3	5	8	15	2
4	13	0	7	10	12	3	6	9	15	2	5	8	14	1	4	11
5	9	12	3	6	8	15	2	5	11	14	1	4	10	13	0	7
6	5	8	15	2	4	11	14	1	7	10	13	0	6	9	12	3
7	1	4	11	14	0	7	10	13	3	6	9	12	2	5	8	16
8	10	13	0	7	9	12	3	6	8	15	2	5	11	14	1	4
9	6	9	12	3	5	8	15	2	4	11	14	1	7	10	13	0
10	2	5	8	15	1	4	11	14	0	7	10	13	3	6	9	12
11	14	1	4	11	13	0	7	10	12	3	6	9	15	2	5	8
12	7	10	13	0	6	9	12	3	5	8	15	2	4	11	14	2
13	3	6	9	12	3	5	8	15	1	4	11	14	0	7	10	13
14	15	2	5	8	14	1	4	11	13	0	7	10	12	3	6	9
15	11	14	1	4	10	13	0	7	9	12	3	6	8	15	2	5

În aşa mod $(G \times G, \circ)$ este quasigrup medial, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

Teorema 3.21. *Fie $(G, +)$ grup comutativ. Mulţimea $G \times G$ cu operaţia*

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_1, y_1 + y_2)$$

este buclă medială de stânga.

Demonstraţie. Vom demonstra că $(G \times G, \circ)$ este:

1. Quasigrup;
2. Quasigrup neasociativ;
3. Quasigrup medial;
4. Quasigrup cu unitate de stânga.

Fie ecuaţia $ya = b$. Fie $y = (y_1, y_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ya = b$ putem scrie

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{3.95}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.21 avem că

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_2) = (y_1 + y_2 + a_1 + y_2, a_2 + y_2). \tag{3.96}$$

Din (3.95) şi (3.96) obţinem că

$$y_1 + y_2 + a_1 + y_2 = b_1 \tag{3.97}$$

şi

$$a_2 + y_2 = b_2. \tag{3.98}$$

Din (3.98) avem că

$$y_2 = b_2 - a_2. \tag{3.99}$$

Substituim în (3.97) expresia obţinută pentru y_2 şi obţinem

$$y_1 = b_1 - a_1 - 2(b_2 - a_2). \tag{3.100}$$

Deci, $y_1 = b_1 - a_1 - 2(b_2 - a_2)$ şi $y_2 = b_2 - a_2$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu y_1 şi y_2. Presupunem că y_1' şi y_2' este o altă soluţie a ecuaţiei $ya = b$. Atunci

$$(y_1', y_2') \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{3.101}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.21 avem că

$$(y_1', y_2') \circ (a_1, a_2) = (y_1' + y_2' + a_1 + y_2', a_2 + y_2'). \tag{3.102}$$

Din (3.101) şi (3.102) obţinem că

$$y_1' + y_2' + a_1 + y_2' = b_1 \tag{3.103}$$

şi

$$a_2 + y_2' = b_2. \tag{3.104}$$

Din (3.104) avem că

$$y_2' = b_2 - a_2. \tag{3.105}$$

Substituim în (3.103) expresia obţinută pentru y_2' şi obţinem

$$y_1' = b_1 - a_1 - 2(b_2 - a_2). \tag{3.106}$$

Deci $y_1' = b_1 - a_1 - 2(b_2 - a_2)$ şi $y_2' = b_2 - a_2$.

Din (3.99) şi (3.105) am obţinut că $y_2 = y_2'$. Din (3.100) şi (3.106) avem că $y_1 = y_1'$.

Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ya = b$ are o singură soluţie.

În mod analog procedăm cu ecuaţia $ax = b$. Fie $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ax = b$ putem scrie

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (b_1, b_2). \tag{3.107}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.21 avem că

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (a_1 + a_2 + x_1 + a_2, a_2 + x_2). \tag{3.108}$$

Din (3.107) şi (3.108) obţinem că

$$a_1 + a_2 + x_1 + a_2 = b_1 \tag{3.109}$$

şi

$$a_2 + x_2 = b_2. \tag{3.110}$$

Din (3.109) avem că

$$x_1 = b_1 - a_1 - 2a_2. \tag{3.111}$$

Din (3.110) avem că

$$x_2 = b_2 - a_2. \tag{3.112}$$

Deci $x_1 = b_1 - a_1 - 2a_2$ şi $x_2 = b_2 - a_2$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu x_1 şi x_2. Presupunem că x_1' şi x_2' este o altă soluţie a ecuaţiei $ax = b$. Aşa deci

$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (b_1, b_2). \tag{3.113}$$

Conform condiţiei Teoremei 3.21 avem că

$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (a_1 + a_2 + x_1' + a_2, a_2 + x_2'). \tag{3.114}$$

Din (3.113) şi (3.114) obţinem că

$$a_1 + a_2 + x_1' + a_2 = b_1 \tag{3.115}$$

şi

$$a_2 + x'_2 = b_2. \tag{3.116}$$

Din (3.115) avem că

$$x'_1 = b_1 - 2a_2 - a_1. \tag{3.117}$$

Din (3.116) avem că

$$x'_2 = b_2 - a_2. \tag{3.118}$$

Deci, $x'_1 = b_1 - a_1 - 2a_2$ şi $x'_2 = b_2 - a_2$.

Din (3.111) şi (3.117) avem că $x_1 = x'_1$. Din (3.112) şi (3.118) avem că $x_2 = x'_2$.

Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ax = b$ are o singură soluţie.

Deci, grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup.

2. Vom arăta că în $(G \times G, \circ)$ nu se îndeplineşte legea asociativă, adică $(ab)c = a(bc)$. Notăm $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), c = (x_3, y_3)$. Deci, $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$. Aplicînd legea din Teorema 3.21 pentru $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3)$ avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_1, y_1 + y_2) \circ (x_3, y_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 + x_2 + y_1 + y_1 + y_2 + x_3 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3) =$$

$$= (x_1 + 4y_1 + x_2 + 2y_2 + x_3, y_3 + y_1 + y_2). \tag{3.119}$$

În mod analog procedăm cu $(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$ şi obţinem

$$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (x_2 + y_2 + x_3 + y_2, y_3 + y_2) =$$

$$= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_2 + y_1, y_2 + y_3 + y_1 =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3 + 2y_1 + 2y_2, y_2 + y_3 + y_1). \tag{3.120}$$

Din (3.119) şi (3.120) observăm că nu se îndeplineşte legea asociativă.

3. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este medial, adică are loc legea $xy \cdot zt = = xz \cdot yt$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4)) = ((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_7))$. Aplicăm legea din Teorema 3.21 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((x_1 + y_1 + x_2 + y_1, y_2 + y_1)) \circ ((x_3 + y_3 + x_4 + y_3, y_4 + y_3)) =$$

$$= (x_1 + x_2 + 2y_1 + y_1 + y_2 + x_3 + 2y_3 + x_4 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3 + y_4) =$$

$$= (x_1 + x_2 + 4y_1 + 2y_2 + x_3 + 2y_3 + x_4, y_1 + y_2 + y_3 + y_4). \tag{3.121}$$

În mod similar procedăm cu $((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_4))$ şi avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_3, y_3)) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= (x_1 + y_1 + x_3 + y_1, y_1 + y_3) \circ (x_2 + y_2 + x_4 + y_2, y_2 + y_4) =$$

$$= (x_1 + 2y_1 + x_3 + y_1 + y_3 + x_2 + 2y_2 + x_4 + y_1 + y_3, y_1 + y_3 + y_2 + y_4) =$$

$$= (x_1 + 4y_1 + x_3 + 2y_3 + x_2 + 2y_2 + x_4, y_1 + y_3 + y_2 + y_4). \tag{3.122}$$

Din (3.121) şi (3.122) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este medial.

4. Demonstrăm existenţa unităţii de stânga, adică are loc $ex = x$. Notăm $x = (x_1, x_2)$, $e = (e, e)$, atunci $(e, e) \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Aplicăm legea din Teorema 3.21 pentru $(e, e) \cdot (x_1, x_2)$ şi obţinem

$$(e, e) \cdot (x_1, x_2) = (e + e + x_1 + e, e + x_2) =$$

$$= (e + x_1 + e, e + x_2) = (e + x_1, e + x_2) = (x_1, x_2). \tag{3.123}$$

Deci, există unitate de stânga.

5. Demonstrăm inexistenţa unităţii de dreapta, adică $xe \neq x$. Utilizăm notaţiile $x = (x_1, x_2)$, $e = (e, e)$, atunci $(x_1, x_2) \cdot (e, e) \neq (x_1, x_2)$. Aplicăm legea din Teorema 3.21 pentru $(x_1, x_2) \cdot (e, e)$ şi obţinem

$$(x_1, x_2) \cdot (e, e) = (x_1 + x_2 + e + x_2, x_2 + e) =$$

$$= (x_1 + 2x_2, x_2) \neq (x_1, x_2). \tag{3.124}$$

Deci, nu există unitate de dreapta.

Teorema este demonstrată.

Exemplul 3.22. *Fie $(G, +)$ grup abelian de ordinul 3.*

Tabelul 3.15. Exemplu de grup abelian de ordinul 3 utilizat la construcţia unei bucle neasociative, mediale de stânga

$(+)$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Examinăm mulţimea $(G \times G, \circ)$, unde "$\circ$" este definită astfel:

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_1, y_1 + y_2).$$

Obţinem

Tabelul 3.16. Exemplu de buclă neasociativă, medială de stânga

$(+)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7	8	6	1	2	0	4	5	3
2	5	3	8	8	6	7	2	0	1
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	1	2	0	4	5	3	7	8	6
5	8	6	7	2	0	1	5	3	4
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	4	5	3	7	8	6	1	2	0
8	2	0	1	5	3	4	8	6	7

Deci, $(G \times G, \circ)$ este buclă neasociativă, medială de stânga.

3.5. Quasigrupuri topologice paramediale cu măsura Haar

Notăm cu $B(X)$ familia tuturor submulţimilor Borel din spaţiul X. Valoarea reală, nenegativă a funcţiei μ definită pe familia $B(X)$ a submulţimilor din spaţiul X se numeşte măsură Radon pe X dacă posedă următoarele proprietăţi:

- $\mu(H) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq H, F$ este submulţime compactă din $H\}$ pentru orice $H \in B(X)$;

- pentru orice punct $x \in X$ există o submulţime deschisă V_x astfel încât $x \in V_x$ şi $\mu(V_x) < \infty$.

Definiția 3.23. *Fie* $(A, \cdot)$ *este quasigrup topologic cu diviziunile* (r, l)*. Măsura Radon* μ *pe* A *se numeşte:*

- **măsură Haar invariantă de stânga**, *dacă* $\mu(U) > 0$ *şi* $\mu(xH) = \mu(H)$ *pentru orice mulţime nevidă deschisă* $U \subseteq A$*, punct* $x \in A$ *şi mulţime Borel* $H \in B(A)$*;*

- **măsură Haar invariantă de dreapta**, *dacă* $\mu(U) > 0$ *şi* $\mu(Hx) = \mu(H)$ *pentru orice mulţime nevidă deschisă* $U \subseteq A$*, punct* $x \in A$ *şi mulţime Borel* $H \in B(A)$*;*

- **măsură Haar invariantă**, *dacă* $\mu(U) > 0$ *şi*

$$\mu(xH) = \mu(Hx) = \mu(l(x, H)) = \mu(r(H, x)) = \mu(H)$$

pentru orice mulţime nevidă deschisă $U \subseteq A$*, punct* $x \in A$ *şi mulţime Borel* $H \in B(A)$*.*

Definiția 3.24. *Vom spune că pe quasigrupul topologic* $(A, \cdot)$ ***există o unică măsură Haar invariantă de stânga (de dreapta)****, dacă pentru orice două măsuri Haar invariante de stânga (de dreapta)* μ_1*,* μ_2 *pe* A *există o constantă* $c > 0$ *astfel încât* $\mu_2(H) = c \cdot \mu_1(H)$ *pentru orice mulţime Borel* $H \in B(A)$*.*

Dacă $(G, +)$ este grup comutativ local compact, atunci pe G există o unică măsură invariantă Haar μ_G [174]. Considerăm pe grupul topologic Abelian $(G, +)$ măsura invariantă μ_G. Utilizînd metoda demonstraţiei din [174] vom demonstra următoarele teoreme.

Teorema 3.25. *[64] Fie* $(G, \cdot)$ *quasigrup paramedial local compact. Atunci:*

1. Există grupul topologic comutativ $(G, +)$ *şi* $\varphi, \psi : G \to G$ *sunt automorfisme în* $(G, +), b \in G, \varphi^2 = \psi^2$ *şi* $(G, +, \varphi, \psi, 0, b)$*;*

2. Dacă pe grupul topologic Abelian $(G, +)$ *considerăm măsura Haar invariantă* μ_G*, atunci pe* $(G, \cdot)$ *măsura Haar invariantă de stânga (de dreapta) este unică;*

3. Dacă μ *este măsură Haar invariantă de stânga(de dreapta) pe* $(G, \cdot)$*, atunci* μ *este măsură Haar invariantă de stânga(de dreapta) pe* $(G, +)$ *de asemenea;*

4. Pe $(G, \cdot)$ *există o măsură Haar invariantă de dreapta dacă şi numai dacă* $\mu_G(\varphi(H)) = \mu_G(H)$ *pentru orice* $H \in B(A)$*;*

5. Dacă $n < +\infty$*, şi pe* G *există o* $(n, +\infty)$*-unitate, atunci pe* $(G, \cdot)$ *măsura* μ_G *este unica măsură Haar invariantă de dreapta;*

6. Dacă $m < +\infty$*, şi pe* G *există o* $(+\infty, m)$*-unitate, atunci pe* $(G, \cdot)$ *măsura* μ_G *este unica măsură Haar invariantă de stânga;*

7. Dacă $n, m < +\infty$, şi pe G există o (n, m)-unitate, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura μ_G este unica măsură Haar invariantă.

Demonstraţie. Fie μ măsură Haar invariantă de dreapta pe $(G, \cdot)$. Deoarece $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y) + b$ pentru orice $x, y \in G$, atunci $Hx = \varphi(H) + \psi(H) + b$. Astfel μ este măsură Haar invariantă pe $(G, +)$ şi există o constantă $c > 0$ astfel încât $\mu(H) = c \cdot \mu_G(H)$. Astfel, μ_G este măsură Haar invariantă de dreapta în $(G, \cdot)$. Afirmaţiile 1, 2 şi 3 sunt demonstrate. Fie h automorfism topologic al lui $(G, +)$. Atunci $\mu_h(H) = \mu_G(h(H))$ este măsură Haar invariantă în $(G, +)$ şi există o constantă $c_h > 0$ astfel încât $\mu_h(H) = \mu_G(h(H)) = c_h \cdot \mu_G(H)$ pentru fiecare submulţime Borel $H \in B(G)$. În particular. $\mu_G(h^k(H)) = c_h^k \mu_G(H)$ pentru fiecare $k \in N$. Dacă $n < +\infty$ şi 0 este $(n, +\infty)$-unitate, atunci $\varphi^n(x) = x$ pentru orice $x \in G$ şi $c_\varphi^n = 1$. Astfel, $c_\varphi = 1, \mu_G(H) = \mu_G(h(H))$ şi μ_G este măsură Haar invariantă de dreapta în $(G, \cdot)$. Afirmaţiile 4, 5 şi 6 sunt demonstrate.

Teorema este demonstrată.

Corolarul 3.26. *[76] Fie $(G, \cdot)$ quasigrup paramedial. Atunci există grupul Abelian $(G, +)$, elementul $q \in Q$ şi grupul automorfismelor α, β, astfel încât $x \cdot y = \alpha(x) + \beta(y) + q$ pentru orice $x, y \in Q$ şi are loc relaţia $\alpha\alpha = \beta\beta$.*

Corolarul dat a fost demonstrat în [95, 20, 157].

Teorema 3.27. *[64] Fie $(G, +)$ quasigrup topologic paramedial şi $(G, \cdot)$ (n, m)-izotop omogen a lui $(G, +)$. Atunci:*

1. Pe $(G, +)$ există măsura Haar invariantă de stânga (dreapta) dacă şi numai dacă pe $(G, \cdot)$ există măsura Haar invariantă de stânga (dreapta);

2. Dacă pe $(G, +)$ măsura Haar invariantă de stânga (dreapta) este unică, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura Haar invariantă de stânga (dreapta) este de asemenea unică.

Teorema 3.28. *Quasigrupul paramedial compact G conţine o unică măsură Haar invariantă μ pentru care $\mu(G) = 1$.*

Teoremele 3.25, 3.27 şi 3.28 au fost demonstrate în [152] pentru quasigrupuri topologice mediale.

Exemplul 3.29. *Fie $(R, +)$ grup topologic Abelian a numerelor reale.*

1. Dacă $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x$ şi $x \cdot y = x + y$, atunci $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup paramedial, comutativ şi local compact. În baza Teoremei 3.25, pe $(R, \cdot)$ există măsură Haar invariantă la stânga şi măsură Haar invariantă la dreapta.

2. Dacă $\varphi(x) = 7x$, $\psi(x) = 7x$ şi $x \cdot y = 7x + 7y$, atunci $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup paramedial, comutativ şi local compact. În baza Teoremei 3.25 pe $(R, \cdot)$ nu există nici o măsură Haar invariantă la stânga sau la dreapta.

Exemplul 3.30. *Notăm prin $Z_p = Z/pZ = \{0, 1, ..., p-1\}$ grupul ciclic Abelian de ordinul p. Considerăm grupul comutativ $(G, +) = (Z_7, +)$, $\varphi(x) = 4x$, $\psi(x) = 3x$ şi $x \cdot y = 4x + 3y$. Atunci $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup medial, paramedial şi bicomutativ cu $(3, 6)$-unitate în $(G, \cdot)$, care coincide cu elementul zero în $(G, +)$.*

Exemplul 3.31. *Considerăm grupul comutativ $(G, +) = (Z_7, +), \varphi(x) = 5x, \psi(x) = 3x$ şi $x \cdot y = 5x + 3y$. Atunci $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup medial csi hexagonal, şi fiecare element este din $(G, \cdot)$ este $(6, 6)$-unitate.*

Exemplul 3.32. *Considerăm grupul comutativ $(G, +) = (Z_5, +)$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 4x$ şi $x \cdot y = x + 4y$. Atunci $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup medial, paramedial şi bicomutativ cu $(2, 1)$-unitate în $(G, \cdot)$, care coincide cu elementul zero în $(G, +)$.*

Exemplul 3.33. *Fie $(R, +)$ grupul topologic comutativ al numerelor reale, $a > 0$, $b > 0$, $\varphi(x) = ax$, $\psi(y) = bx$ şi $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$. Atunci $(R, \cdot)$ este quasigrup medial, comutativ, local compact. Dacă $H = [c, d]$, atunci $0 \cdot H = [ac, ad]$ şi $H \cdot 0 = [bc, bd]$. Astfel:*

- pe $(G, \cdot)$ există măsura Haar invariantă de dreapta dacă şi numai dacă $a = 1$;

- pe $(G, \cdot)$ există măsura Haar invariantă de stânga dacă şi numai dacă $b = 1$;

- dacă $a \neq 1$ şi $b \neq 1$, atunci pe $(G, \cdot)$ nu există nici o măsură Haar invariantă de stânga ori de dreapta.

Exemplul 3.34. *Fie $(R, +)$ grupul topologic Abelian al numerelor reale.*

1. *Dacă $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 2x$ şi $x \cdot y = x + 2y$ atunci $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup medial, comutativ, local compact. În virtutea Teoremei 7 din [152] există o unică măsură Haar invariantă de dreapta pe $(R, \cdot)$.*

2. *Fie $\varphi(x) = 3x$, $\psi(x) = x$ şi $x \cdot y = 3x + y$. Atunci $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup medial, comutativ, local compact. Pe $(R, \cdot)$ există o unică măsură Haar invariantă de stânga.*

3. *Dacă $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x + 7$ şi $x \cdot y = x + y + 7$ atunci $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup medial, comutativ, local compact şi $(R, \cdot)$ nu conţine (n, m)-unitate. Dar în virtutea Teoremei 7 din [152] pe $(R, \cdot)$ există o unică măsură Haar invariantă.*

4. *Fie $\varphi(x) = 3x$, $\psi(x) = 2x$ şi $x \cdot y = 3x + 2y$. Atunci $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup medial, comutativ, local compact. Pe $(R, \cdot)$ nu există nici o măsură Haar invariantă de stânga sau de dreapta.*

Exemplul 3.35. *Fie $(R, +)$ grup topologic Abelian al numerelor reale.*

1. Dacă $\varphi(x) = 5x$, $\psi(x) = x$ şi $x \cdot y = 5x + y$, atunci $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup medial comutativ local compact. În baza Teoremei 7 din [152], pe $(R, \cdot)$ există măsură Haar invariantă de stânga.

2. Dacă $\varphi(x) = 5x$, $\psi(x) = 7x$ şi $x \cdot y = 5x + 7y$, atunci $(R, \cdot) = g(R, +, \varphi, \psi)$ este quasigrup medial comutativ local şi pe $(R, \cdot)$ în baza Teoremei 7 din [152], nu există nici o măsură Haar invariantă de stânga sau de dreapta.

3.6. Grupoizi distributivi şi paramedialitatea

Fie $(G, \cdot)$ grupoid topologic distributiv cu un element idempotent.

Fie f aplicaţia $x \to xe$ şi g este aplicaţia $x \to ex$. Este clar că pentru aplicaţiile f şi g are loc $ff = gg$.

Definim pe G operaţia binară $(\circ)$ în felul următor:

$$(ex) \circ (ye) = yx.$$

Atunci $(G, \circ)$ este grupoid topologic cu unitatea e. Notăm faptul că orice element din grupoidul distributiv $(G, \cdot)$, care conţine un element idempotent şi injectiv e este la fel idempotent. Astfel, pentru $x \in G$ avem că:

$$x \cdot e = x \cdot ee = xe \cdot xe = (xx) \cdot e.$$

Deoarece e este injectiv din ultima relaţie rezultă că $x = x \cdot x$.

Fie A o submulţime din G. Mulţimea A se numeşte e-închisă dacă:

1. $x, y \in A$ implică $x \cdot y \in A$;
2. xe, ex din A implică $x \in A$;

Dacă B este o submulţime din G atunci prin B^e vom nota intersecţiile tuturor submulţimilor e-închise din G care conţin B.

Reformulăm Teorema 2.54 în felul următor:

Teorema 3.36. *[77] Dacă grupoidul topologic paramedial $(G, \cdot)$ conţine elementul idempotent bijectiv, e şi operaţia $(\circ)$ este definită pe G conform relaţiei $xy = ey \circ xe$, atunci $(G, \circ)$ este semigrup comutativ ce conţine unitatea e.*

Teorema 3.37. *Fie $(M, \cdot)$ grupoid distributiv cu un element idempotent injectiv e şi a, b două elemente din M. Atunci:*

1. Dacă $ae \cdot eb = be \cdot ea$, atunci $(\{e, a, b\}^e, \cdot)$ este un subgrupoid paramedial din M.

2. Dacă e este idempotent bijectiv, atunci $(\{e, a, b\}^e, \circ)$ unde operaţia $(\circ)$ este definită definită astfel $ex \circ ye = yx$, este semigrup comutativ cu unitatea e.

Demonstraţie. Conform condiţiei Teoremei 3.37 mulţimea $\{e, a, b\}$ este o submulţime paramedială din M. După Lema Zorn $\{e, a, b\}$ se conţine într-o submulţime paramedială maximală G din M. Este clar că G se conţine în G^e. Vom demonstra că $G = G^e$. Este suficient de arătat că G este e-închisă.

Dacă $x, y \in G$, atunci trebuie să demonstrăm că $x \cdot y \in G$.

Fie $u, v, w \in G$. Atunci

$$(xy \cdot u) \cdot (vt) = (xu \cdot yu) \cdot (vt) = (xu \cdot vt) \cdot (yu \cdot vt) =$$
$$= (tu \cdot vx) \cdot (tu \cdot vy) = (tu) \cdot (vx \cdot vy) = (tu) \cdot (v \cdot xy).$$

În mod similar avem că:

$$(u \cdot xy) \cdot (vt) = (ux \cdot uy) \cdot (vt) = (ux \cdot vt) \cdot (uy \cdot vt) =$$
$$= (tx \cdot vu) \cdot (ty \cdot vu) = (tx \cdot ty) \cdot (vu) = (t \cdot xy) \cdot (vu).$$

Similar avem că:

$$(vu) \cdot (xy \cdot t) = (vu) \cdot (xt \cdot yt) = (vu \cdot xt) \cdot (vu \cdot yt) =$$
$$= (tu \cdot xv) \cdot (tu \cdot yv) = (tu) \cdot (xv \cdot yv) = tu \cdot (xy \cdot v).$$

Rezultă că $xy \in G$.

Fie $xe \in G$ şi $ex \in G$. Vom arăta că $x \in G$.

Fie $y, u, v \in G$. Deoarece $e \in G$ şi G este paramedial putem scrie că:

$$(xe \cdot ye) \cdot (ue \cdot ve) = (ve \cdot ye) \cdot (ue \cdot xe)$$

$$(xy \cdot e) \cdot (uv \cdot e) = (vy \cdot e) \cdot (ux \cdot e)$$

$$(xy \cdot uv) \cdot e = (vy \cdot ux) \cdot e.$$

În mod similar avem că:

$$(ex \cdot ey) \cdot (eu \cdot ev) = (ev \cdot ey) \cdot (eu \cdot ex)$$

$$(e \cdot xy) \cdot (e \cdot uv) = (e \cdot vy) \cdot (e \cdot ux)$$

$$e \cdot (xy \cdot uv) = e \cdot (vy \cdot ux).$$

Deoarece e este injectiv, avem că

$$xy \cdot uv = vy \cdot ux.$$

Condiţia de paramedialitate pentru x în altă poziţie se verifică la fel.

Rezultă că $x \in G$ imediat ce $xe \in G$, deoarece G este submulţime paramedială.

Similar se arată că $x \in G$ imediat ce $ex \in G$. Astfel G este e-închisă şi $G = G^e$.

Deoarece $\{e, a, b\}^e$ se conţine în G^e şi G^e este paramedială atunci $(\{e, a, b\}^e, \cdot)$ este subgrupoid paramedial în M.

Dacă e este idempotent bijectiv, atunci definim $(\circ)$ pe $\{e, a, b\}^e$ astfel $(ex) \circ (ye) = yx$. Condiţiile Teoremei 3.37 se îndeplinesc şi rezultă că $(\{e, a, b\}^e, \circ)$ este semigrup comutativ cu unitatea e.

Teorema este demonstrată.

3.7. Unele aplicaţii ale calculatorului la studierea proprietăţilor quasigrupurilor neizomorfe finite

În această secţiune sunt prezentate unele aplicaţii ale informaticii la soluţionarea unor probleme concrete care ţin de structurile algebrice. Au fost examinate următoarele probleme:

Problema A. *Câte quasigrupuri neizomorfe de ordinul 3, 4, 5 şi 6 există?*

Problema B. *Să se calculeze numărul de quasigrupuri neizomorfe de ordinul 3, 4, 5, 6 şi 7 care îndeplinesc condiţia de: buclă, medialitate, paramedialitate, comutativitate, bicomutativitate şi distributivitate?*

Teoremele 3.38 - 3.44 au fost publicate în [78].

Pentru soluţionarea problemelor respective au fost elaboraţi algoritmi, implementaţi la calculator, prin intermediul cărora am obţinut următoarele rezultate:

Teorema 3.38. *Există exact:*

- 5 quasigrupuri neizomorfe de ordinul 3;

- 35 quasigrupuri neizomorfe de ordinul 4;

- *1411 quasigrupuri neizomorfe de ordinul 5;*

- *1130531 quasigrupuri neizomorfe de ordinul 6.*

Teorema 3.39. *Există exact:*

- *3 quasigrupuri comutative neizomorfe de ordinul 3;*

- *7 quasigrupuri comutative neizomorfe de ordinul 4;*

- *11 quasigrupuri comutative neizomorfe de ordinul 5;*

- *491 quasigrupuri comutative neizomorfe de ordinul 6;*

- *6381 quasigrupuri comutative neizomorfe de ordinul 7.*

Teorema 3.40. *Există exact:*

- *1 buclă neizomorfă de ordinul 3;*

- *2 bucle neizomorfe de ordinul 4;*

- *6 bucle neizomorfe de ordinul 5;*

- *109 bucle neizomorfe de ordinul 6;*

- *23746 bucle neizomorfe de ordinul 7.*

Teorema 3.41. *Există exact:*

- *5 quasigrupuri mediale neizomorfe de ordinul 3;*

- *13 quasigrupuri mediale neizomorfe de ordinul 4;*

- *19 quasigrupuri mediale neizomorfe de ordinul 5;*

- *5 quasigrupuri mediale neizomorfe de ordinul 6;*

- *41 quasigrupuri mediale neizomorfe de ordinul 7.*

Teorema 3.42. *Există exact:*

- *5 quasigrupuri paramediale neizomorfe de ordinul 3;*

- *11 quasigrupuri paramediale neizomorfe de ordinul 4;*

- *9 quasigrupuri paramediale neizomorfe de ordinul 5;*

- *5 quasigrupuri paramediale neizomorfe de ordinul 6;*

- *13 quasigrupuri paramediale neizomorfe de ordinul 7.*

Teorema 3.43. *Există exact:*

- *0 quasigrupuri bicomutative neizomorfe de ordinul 3;*

- *11 quasigrupuri bicomutative neizomorfe de ordinul 4;*

- *17 quasigrupuri bicomutative neizomorfe de ordinul 5;*

- *2 quasigrupuri bicomutative neizomorfe, nemediale şi neparamediale de ordinul 6;*

- *8 quasigrupuri bicomutative neizomorfe, nemediale şi neparamediale de ordinul 7.*

Teorema 3.44. *Există exact:*

- *1 quasigrup distributiv neizomorf de ordinul 3;*

- *1 quasigrup distributiv neizomorf de ordinul 4;*

- *3 quasigrupuri distributive neizomorfe de ordinul 5;*

- *0 quasigrupuri distributive neizomorfe de ordinul 6;*

- *5 quasigrupuri distributive neizomorfe de ordinul 7.*

Unele aplicaţii ale algebrelor universale şi automatelor au fost examinate în [175], [176], [177].

3.8. Concluzii la Capitolul 3

În capitolul 3 au fost cercetate omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui, produsul direct de grupoizi cu unităţi multiple, metodele de obţinere a quasigrupurilor neasociative mediale şi paramediale, conexiunea dintre distributivitate şi paramedialitate.

În contextul subiectelor examinate punctăm următoarele concluzii:

- a fost elaborată metoda n-grupoizilor topologici cu diviziuni şi a omomorfismelor continui;

- a fost elaborată o metodă de construcţie a grupoizilor cu unităţi multiple de un anumit tip;

- a fost elaborată metoda de construcţie a quasigrupurilor mediale, neasociative şi neparamediale;

- a fost elaborată metoda de construcţie a quasigrupurilor paramediale, neasociative şi nemediale.

Utilizînd metodele respective au fost obţinute următoarele rezultate:

- au fost stabilite condiţiile pentru ca omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise. Problema omomorfismelor deschise a fost soluţionată de L.Pontryagin pentru o clasă destul de largă de grupuri topologice.

- a fost demonstrat cum se pot construi grupoizi cu unităţi multiple de un anumit tip;

- a fost demonstrat cum se pot construi quasigrupuri mediale, neasociative şi neparamediale utilizând produse directe speciale ale grupurilor comutative;

- a fost demonstrat cum se pot construi quasigrupurilor paramediale, neasociative şi nemediale utilizând produse directe speciale ale grupurilor comutative;

Metodologia de cercetare propusă în Capitolul 3 poate fi utilizată la:

- elaborarea metodelor de construcţie a quasigrupurilor topologice mediale neasociative cu anumite proprietăţi algebrico-topologice;

- elaborarea metodelor de construcţie a quasigrupurilor topologice paramediale neasociative cu anumite proprietăţi algebrico-topologice;

- stabilirea condiţiilor pentru ca omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici de un anumit tip să fie deschise.

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

Cercetările în domeniul algebrei topologice au fost iniţiate în a doua jumătate a secolului XIX-lea. Algebra topologică, ca ramură a matematicii moderne, se află la frontiera dintre topologia generală şi algebra abstractă. Metodele elaborate şi rezultatele obţinute în acest domeniu de mare interes ştiinţific sunt cu succes implementate nu numai în matematica teoretică dar şi în matematica aplicată şi sisteme informaţionale.

Menţionăm că problema principală a algebrei topologice constă în *studierea concordanţei dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale E-algebrelor topologice G din clasa $V(E, i, J)$.* Această problemă are un aspect larg şi poate fi soluţionată efectiv numai pentru anumite clase de algebre topologice, care se reprezintă prin fixarea operaţiilor algebrice şi identităţilor algebrice.

În acest aspect cecetările fundamentale au fost efectuate pentru grupuri topologice, inele şi module topologice. Dar această problemă este insuficient cercetată pentru grupoizi topologici. Clasa de grupoizi topologici conţine şi clasa de grupuri topologice şi clasa de quasigrupuri topologice.

Însă cercetările diferitor clase de grupoizi topologici cu diviziuni au fost modeste, necătînd la rolul lor în multe cercetări aplicative. Rezultatele obţinute în lucrarea respectivă sunt nemijlocit legate de soluţionarea Problemelor 1-9 formulate mai sus.

Rezultatele principale ale lucrării sunt noi. Au fost rezolvate probleme concrete, ori unele aspecte ale problemelor formulate de M.M.Cioban şi L.L.Chiriac. Cercetările realizate în această lucrare se referă la obiectivele propuse pentru investigaţie şi permit să formulăm următoarele concluzii:

1. A fost formulată problema ştiinţifică importantă soluţionată: *Elaborarea unor metode de cercetare a grupoizilor topologici cu diviziuni, ceea ce a condus la determinarea corelaţiilor dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale grupoizilor cu unităţi multiple şi diviziuni continui.*

În prezenta lucrare autorul şi-a adus contribuţia personală la cercetarea grupoizilor topologici cu diviziuni şi determinarea influenţei structurilor de grupoid asupra proprietăţilor topologice ale grupoizilor topologici şi aplicaţiile lor.

2. Au fost elaborate concepte şi metode eficiente de cercetare a diverselor clase de grupoizi topologici:

- metoda n-grupoizilor topologici cu diviziuni şi a omomorfismelor continui;

- metoda de cercetare a (n, m)-izotopilor omogeni ai grupoizilor topologici;
- metoda de cercetare a subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni;
- metoda de cercetare a buclelor topologice paramediale de dreapta;
- metoda de construcţie a quasigrupurilor mediale, neasociative şi neparamediale;
- metoda de construcţie a quasigrupurilor paramediale, neasociative şi mediale.

3. Aplicând metoda n-grupoizilor topologici cu diviziuni şi a omomorfismelor continui s-a reuşit de elaborat o construcţie generală care permite stabilirea condiţiilor pentru ca omomorfismele continui a n-grupoizilor topologici cu diviziuni continui să fie deschise. Afirmaţiile obţinute generalizează unele din rezultatele obţinute de L.Chiriac, care a determinat condiţiile pentru care omomorfismele grupoizilor topologici cu diviziune continuă sunt deschise. Problema omomorfismelor deschise a fost soluţionată de L.Pontryagin pentru o clasă destul de largă de grupuri topologice. M.Cioban a determinat condiţiile pentru ca omomorfismele algebrelor topologice cu signatura continuă să fie deschise.

4. A fost dezvoltat conceptul de (n, m)-unitate introdus de M.Cioban şi L.Chiriac. În cercetările realizate sunt studiaţi (n, m)-izotopii omogeni ai grupoidului topologic care posedă anumite proprietăţi algebrice. Sunt determinate condiţiile pentru care proprietăţile algebrice respective se păstrează la grupoizii (n, m)-omogeni. Au fost stabilite condiţiile pentru care grupoidul multiplicativ $(G, \circ)$ este quasigrup paramedial cu $(2, 1)$-unitate. Metodologia propusă pentru cercetare poate fi utilizată şi la studierea n-grupoizilor cu unităţi multiple.

5. A fost elaborată o metodă de cercetare a subgrupoidului primitiv cu diviziuni al grupoidului topologic primitiv cu diviziuni. Cercetările realizate au condus la determinarea condiţiilor pentru care există un astfel de subgrupoid primitiv cu diviziuni care păstrează un şir de proprietăţi topologice ale grupoidului topologic primitiv cu diviziuni.

6. A fost elaborată o metodă care permite soluţionarea problemei pentru care o submulţime compactă deschisă dintr-o buclă topologică paramedială de dreapta conţine o subbuclă compactă deschisă paramedială de dreapta. Problema submulţimii compacte deschise dintr-un grup topologic care să conţină un subgrup compact deschis a fost rezolvată de L.Pontryagin.

7. A fost elaborată o metodă generală de construcţie a quasigrupurilor mediale, neasociative şi neparamediale şi a quasigrupurilor paramediale, neasociative şi nemediale. În acest scop s-au utilizat grupurile comutative şi produse carteziene speciale. Metoda respectivă permite să se obţină din orice grup comutativ un quasigrup neasociativ medial ori

paramedial.

Luînd în consideraţie rolul grupoizilor topologici cu unităţi multiple în algebra abstractă, topologie, algebra topologică, teoria automatelor putem considera că teoria şi conceptele elaborate pot fi aplicate eficient în cercetările din domeniile menţionate, cît şi în alte direcţii de cercetare.

Se recomandă ca rezultatele obţinute, construcţiile şi metodele elaborate sa fie aplicate:
- la examinarea proprietăţilor topologice ale diverselor clase de grupoizi cu unităţi multiple;
- la investigarea structurilor algebrice şi topologice ale diferitor clase de algebre topologice;
- la cercetarea proprietăţilor topologice şi algebrice ale n-grupoizilor topologici cu unităţi multiple;
- la studierea anumitor clase de automate;
- la elaborarea cursurilor opţionale pentru masteranzi şi doctoranzi.

Obiective de perspectivă. În perspectivă:
- se vor studia mai profund conceptul de unitate multiplă pentru diverse clase de grupoizi topologici;
- se vor studia proprietăţile topologice ale spaţiilor care admit anumite structuri algebrice;
- se va studia rolul grupoizilor topologici în diverse sisteme informaţionale;
- se va elabora un curs opţional pentru masteranzi, doctoranzi în domeniul grupozilor topologici cu unităţi multiple;
- se va continua studierea grupoizilor topologici cu diviziuni continui în vederea determinării concordanţei dintre axiomele de separare;
- se vor determina condiţiile pentru ca un grupoid compact să fie grupoid compact diadic;
- se vor determina condiţiile pentru ca un grupoid topologic cu diviziuni ce satisface primei axiome de numerabilitate să fie metrizabil.

Bibliografie

1. Carruth J.H., Hildebrant, J.A. and Koch R.J. Theory of topological semigroups. Vol. I, Marcel Dekker, 1986.

2. Paalman de Miranda A.B. Topological semigroups. Math. Centrum, Amsterdam, 1964. 174 p.

3. Kazim M. A., Naseeruddin M. On almost-semigroups. In: Aligarh Bulletin of Mathematics, Aligarh Muslim Univ., Aligarh, India, 1978, nr.8, p.67-70.

4. Pontryagin L.S. Neprerivnie gruppi. Moskow, Nauka, 1984.

5. Marcov A.A. On free topological groups. In: Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. matem. 1945, nr.9, p.3-64 (English transl.: Amer. In: Math. Soc. Transl. 1962, nr.8, p.195-272).

6. Graev M.I. Free topological groups. In: Izv. Acad. Nauk SSSR, ser.mat. 1948, nr.12, p.279-324. (English transl.: Amer. Math. Soc. Transl., 1962, v.1, nr.8, p.305-364).

7. Graev M.I. On free product of topological groups. In: Izv. Acad. Nauk SSSR, ser.mat. 1950, nr.14, p.343-354.

8. Graev M.I. Theory of topological groups. In: Uspehi Matematiceskih Nauk, 1950, v.5, N2, p.3-56.

9. Nakayama T. *Note on free topological groups*. In: Proc. Imp. Acad. Tokyo, 19, 1943, p.471-475.

10. Kakutani S.H. Free topological groups and infinite direct products of topological goups. In: Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20, 1944, p.595-598.

11. Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the theory of topological rings and modules. Marcel Dekker. Inc. New York, Basel, Hong Kong, 1996, 502 p.

12. Choban M.M. On the theory of free topological groups. In: Topology theory and applications. Colloquie Math. Soc. J. Bolyai, 41, 1985, p.159-175.

13. Bruck R.H. A survey of binary systems. Spinger-Verlag,Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1958.

14. Bruck R.H. Contribution to the theory of loops. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1964, vol. 60, p.245-354.

15. Bruck R.H. Some results in theory of quasigroups. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1944, vol. 55, p.19-52.

16. Pflugfelder H.O. Quasigroups and loops. Introduction, Heldermann, Berlin, 1990.

17. Belousov V.D. Foundations of the theory of quasigroups and loops. Moscow, Nauka, 1967, 223 p.

18. Belousov V.D. On the n-ary quasigroup. In: Chisinau, Stiinta, 1972, 227 p.

19. Jezek J., Kepka T. Medial groupoids. Rozpravy Ceskoslovenske Academie VED, 1983, vol. 93, sesit 2, Academia, Praha, 1983.

20. Nemec P., Kepka T. T-quasigroups. In: Part.1, Acta. Univ. Carol. Math. Phys., 1971, nr.12, p.39-49.

21. Nemec P., Kepka T. T-quasigroups. In: Part II, Acta Univ. Carol. Math. Phys. 1971, nr.12, p.49-59.

22. Basarab A.S. Loops with weak inverse property. Teză de doctor în ştiinţe fizico-matematice, Chişinău, 1968.

23. Basarab A.S. and Kiriyak L.L. A class of G-loops. In: Mat. Issled. 1983, nr.71, 1983, p.3-6.

24. Florea I.A. Quasigroups with inverse property. Ph.D.Thesis, IM AN MSSR, 1965.

25. Ceban Andrei. Some Systems of Quasigroups With Generalized Identities. Teză de doctor în ştiinţe fizico-matematice, 1972.

26. Gorincioi Pavel. On Varieties Of Totally Symmetric Quasigroups. Teză de doctor în ştiinţe fizico-matematice, Institutul de Matematica al A.S.M., Chişinău, 1982.

27. Beleavscaya G.B. The Left, Right and Middle Kernels and Centre of Quasigroups. Preprint, Chishinau, 1988.

28. Beleavscaya G.B. Quasigroup theory: nuclei, centre, commutants. In: Bul. Acad. Şt. a R. Moldova, Mat. 1996, no. 2(21), p.47-71.

29. Sokhatsky F.M. On Decompositions Of Operations By The Help Of Nonreversible Operations. Teză de doctor în ştiinţe fizico-matematice, 1986.

30. Şcerbacov V. On linear and inverse quasigroups and their applications in code theory. Thesis for a Habilitat Doctors Degree., 2007, 246 p.

31. Şcerbacov V.A., Pushkashu D.I. On the structure of fnite paramedial quasigroups. In: Comment. Math. Univ. Carolin. 1, 2(2010) p.357-370.

32. Şcerbacov V.A. On structure of finite n-ary medial quasigroups and automorphisms groups of these quasigroups. In: Quasigroups Related Systems 13, (2005), nr.1, p.125-156.

33. Şcerbacov V.A. On the structure of finite medial quasigroups. In: Buletinul Academiei de Ştiinţe a RM, 2005, nr.1, p.11-18.

34. Şcerbacov V.A. On Automorphism Groups and Congruences of Quasigroups. Thesis of Ph. Degree. IM AN MSSR, Kishinev, 1991, 88 pages. (in Russian).

35. Dudek W.A. Medial n-groups and skew elements. In: Proceedings of the 5-th Symp. Universal and applied algebra (Turava, Poland), 1988, p.55-80.

36. Dudek W.A. On number of transitive distributive quasigroups. In: Mat. Issled. 1991, nr.120, p.64-76.

37. Dudek W.A. On some old and new problems in n-ary groups. In: Quasigroups Relat. Syst. 2001, nr.8, p.15-36.

38. Dudek W.A. On Some Classes of n-Groups. Teză de doctor în ştiinţe fizico-matematice, 1990.

39. Izbaş V.I. Isomorphisms of quasigroups isotopic to groups. In: Quasigroups Relat. Syst., 1995, nr. 2, p.34-50.

40. Izbaş V.I. Monoquasigroups And Quasigroups With Distributive Lattice Of Subquasigroups. Teză de doctor în ştiinţe fizico-matematice, Chişinău, 1992.

41. Syrbu P. Teoria Quasigrupurilor. Introducere. CEP USM, Chisinau, 2014, 172 p.

42. Syrbu P., Grecu I. On comutants of middle Bol loops. In: Quasigroups and Related Systems. 2014, nr.22, p.81-88.

43. Syrbu P. Orthogonal And Self-orthogonal n-ary Operations, Teză de doctor în ştiinţe fizico-matematice, Chişinău, 1990.

44. Ursu V.I. On quasivarieties of nilpotent Moufang loops. In: I. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 2012, nr.53.3, p.475-489.

45. Ursu V.I. On quasivarieties of nilpotent Moufang loops. In: II. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 2012, nr.53.3, p.491-499.

46. Choban M.M., Kiriyak L.L. The Medial Topological Quasigroups with Multiple Identities. In: The 4^th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Oradea-CAIM, 1995, p.11

47. Bobeica N. On paramedical loops. In: Mahematics and information technologies: research and education. MITRE 2009, Chişinău, October 8-9, p.4.

48. Bobeica N. Topological hexagonal groupoids with multiple identities. In: Mahematics and information technologies: research and education. MITRE 2009, Chişinău, October 8-9, p.5-6.

49. Bobeica N. On paramedial loops. In: The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2009, Constanţa, september 17-20, p.20.

50. Bobeica N. The topological paramedial quasigroups with multiple identities. In: Actual problems of mathematics and informatics. Scientific conference dedicated to the 80^{th} anniversary of the foundation of the Tiraspol State University and of the Faculty of Physics, Mathematics and Information Technologies, Chişinău 2010, september 24-25, p.29-31.

51. Bobeica N. Some properties of non-isomorphic medial and paramedial finite quasigroups. In: The 20^{th} conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu, CAIM 2012, Chişinău, august 22-25, p.28-30.

52. Bobeica N., Chiriac L. On groupoids with multiple identities. In: Actual problems of mathematics and informatics. Scientific conference dedicated to the 80^{th} anniversary of the foundation of the Tiraspol State University and of the Faculty of Physics, Mathematics and Information Technologies, Chişinău 2010, september 24-25, p.31-35.

53. Bobeica N., Chiriac L. On topological AG-groupoids and paramedial quasigroups wiht multiple identities. In: Romai Journal, 2010, vol.6, nr.1, p.5-14.

54. Bobeica N., Chiriac L. On topological AG-groupoids and paramedial quasigroups with multiple identities. In: The 18^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2010, Iaşi, Romania, October 14-17, p.15.

55. Chiriac L.L., Bobeica N. Some properties of the homogeneous isotopies. In: Acta et Commentationes, Universitatea de Stat Tiraspol, Chişinău, 2006, vol. III, p.107-112.

56. Chiriac L.L., Bobeica N. Paramedial topological groupoids. In: 6^{th} Congress of Romanian Mathematicians June 28 - July 4, Bucharest, Romania, 2007, p.25-26.

57. Chiriac L.L., Bobeica N. On topological groupoids and (n,m)- homogeneous isotopies. In: The 16^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM 2008 Oradea, October 9-11, 2008, p.13.

58. Chiriac L., Bobeica N. Topological paramedial groupoids with multiple identities. In: The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2009, Constanţa, september 17-20, p.28-29.

59. Chiriac L., Chiriac L. Jr., Bobeica N. On topological groupoids and multiple identities. In: Buletinul Academiei de Ştiinţe a RM, seria MATEMATICA. 2009, nr.1(59), ISSN 1024-7696, p.67-78.

60. Chiriac L., Bobeica N. Some properties of the homogeneous isotopies. In: The XIV^{th} conference on applied and industrial mathematics, dedicated to the 60^{th} anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University, Satellite Conference of ICM2006, Chişinău 2006, august 17-19, p.116.

61. Chiriac L.L., Bobeica N. Some properties of the bicommutative topological groupoids. In: Math and Informatics. Chisianu, MITRE 1-4 October, 2008, p.5-6

62. Chiriac L., Bobeica N. Despre unele proprietăţi ale grupoizilor topologici paramediali. Conferinţa ştiinţifică Republicană "Matematica - probleme actuale cu aplicaţii", Chişinău 2009, 8 aprilie.

63. Bobeica N. On Haar measures on paramedial quasigroups. In: Mahematics and information technologies: research and education. Dedicated to the 65^{th} anniversary of the Moldova State University, MITRE 2011, Chişină, august 22-25, p.12-13.

64. Bobeica N. Some properties on topological paramedial groupoids with multiple identities. In: Revista Studia Universitatis, seria Ştiinţe Exacte şi Economice, USM, nr. 2 (52), Chişinąu 2012, ISSN 1857-2073, p.35-41.

65. Bobeica N. On invariant Haar measure on topological quasigroups. In: The 19^{th} edition of the annual conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2011, Iaşi, september 22-25, p.19.

66. Bobeica N., Chiriac L. On the structure of grid. In: The 21^{th} Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2013, Bucureşti, 19-22 september, p.75.

67. Chiriac L., Pruteanu M., Bobeica N. Algoritmi şi structuri algebrice. In: Acta et Commentationes, Ştiinţe fizice şi matematice, informatică, didactica fizicii, matematicii şi informaticii, vol.3, Chişinšu 2003, p.111-113.

68. Bobeica N. ş.a. Identificarea structurilor algebrice neizomorfe. In: Acta et Commentationes, Ştiinţe fizice şi matematice, informatică, didactica fizicii, matematicii şi informaticii, vol.3, Chişinšu 2003, p.114-117.

69. Bobeica N. ş.a. Identificarea quasigrupurilor neizomorfe de ordin finit. In: Analele Universităţii de Stat din Tiraspol 2004-2005, Chişinău 2006, p 102-106.

70. Bobeica N. ş.a. Identification of non-isomorphic quasigroups. In: Conferinţa a 2-a a Societăţii Matematice din RM, consacrată aniversării a 40-cea de la fondarea Institutului de Matematică şi Informatică al AŞM, Chişinău 2004, august 17-19, p.109-111.

71. Bobeica N. ş.a. On the non-isomorphic quasigroups. In: The XIV^{th} conference on applied and industrial mathematics, dedicated to the 60^{th} anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University, Satellite Conference of ICM2006, Chişinău 2006, august 17-19, p.114-115.

72. Chiriac L., Bobeica N. Direct products of groupoids with multiple identities. In: Actual problems of mathematics and informatics. Scientific conference dedicated to the 80^{th} anniversary of the foundation of the Tiraspol State University and of the Faculty of Physics, Mathematics and Information Technologies, Chişinău 2010, september 24-25, p.74-77.

73. Chiriac L., Bobeica N. Direct products of groupoids with multiple identities. In: The 18^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2010, Iaşi, Romania, October 14-17, p.26.

74. Chiriac L., Bobeica N. On homorphisms of topological n-groupoids with continuous division. In: Mahematics and information technologies: research and education. Dedicated to the 65^{th} anniversary of the Moldova State University, MITRE 2011, Chişinău, august 22-25, p.35-36.

75. Bobeica N., Chiriac L. Topological quasigroups which are direct products of Abelian topological groups. In: The 22^{th} Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2014, Bacău, România, September 18-21, p.45.

76. Chiriac L., Bobeica N. On homomorphism of topological groupoids with a continuous division. In: The 19^{th} edition of the annual conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2011, Iaşi, september 22-25, p.20.

77. Bobeica N., Chiriac L. Distributive topological groupoids and paramedialitivity. In: The 21^{th} Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2013, Bucureşti, 19-22 september, p.75-76.

78. Chiriac L., Bobeica N., Znaceni A. On the non-isomorphic quasigroups. In: The 20^{th} conference on applied and industrial mathematics dedicated to Academician Mitrofan M. Ciobanu, CAIM 2012, Chişinău, august 22-25, p.63-65.

79. Chiriac L., Bobeica N. On a Method of Constructing Medial Left Loops. In: Mahematics and information technologies: research and education, MITRE 2015, Chişinău, 2-5 iulie, p.22.

80. Chiriac L., Bobeica N., Pavel D. Study on properties of non-isomorphic finite quasigroups using the computer. In: Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, August 19-23, 2014, Chisinau, p.18-21.

81. Chiriac L., Bobeica N. On a Method of Constructing Medial and Paramedial Quasigroups. In: Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, August 19-23, 2014, Chisinau, p.44-47.

82. Hall M. The theory of groups. The Macmillan Company, New York, 1959.

83. Kurosh A.G. On the theory of groups. Moskow, Izd. Nauca, 1967, 648 p.(in Russian).

84. Kurosh A.G. Lectures on general algebra. Gos. izdatel'stvo fiz-mat. literatury, Moscow, 1962, (in Russian).

85. Mufang R. Zur Structur von Alternativ Korpern. In: Math. Ann. 1935, vol.110, p.416-430.

86. Belousov V.D. Uravnoveshennie tojdestva v kvazigrupax. In: Matem. Sbornic, 1966, 70(112),nr.1, p.55-97.

87. Toyoda K. On axiom of linear functions. In: Proc.Imp.Acad. Tokyo, 1941, 17, p.221-227.

88. Murdoch D.S. Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws. In: Amer. J.Math.,1939, vol.61, p.509-522.

89. Şcerbacov V.A. O lineinih cvazigrupax i ih grupax avtomorfizmov. In: Matem. isledovaniea, Chisinau, 1991, ed.120, p.104-113.

90. Mushtaq Q. and Yusuf S.M. On LA-semigroups. In: The Alig. Bull. Math., 8(1978), p.65-70.

91. Mushtaq Q. and Iqbal Q. Decomposition of a locally associative LA-semigroup. In: Semigroup Forum, 41(1990), p.155-164.

92. Protić P.V. and Božinovlć M. Some congruence on an AG^{**}-groupoid. In: Algebra Logic and Discrete Mathematics, Niš, 3, 9(1995), p.879-886.

93. Kepka T. Quasigroups which satisfy certain generalized forms of the Abelian identity. In: Čas. Pěst. Math., 100(1975), p.46-60.

94. Robert el Bashir, Jaroslav Ježek and Tomáš Kepka. Simple zeropotent paramedial groupoids are balanced. Czechoslovak Mathematical Journal, 50 (125) (2000), Praha.

95. Jung Cho, Ježek J., Kepka T. Paramedial groupoids. In: Czechoslovak Mathematical Journal, Volume 49, Number 2, June 1999 , p.277-290

96. Bourbaki N. General Topology. Izd. Mir, Moskow, 1968. (In Russian)

97. Bourbaki N. Topological groups. Izd. Mir, Moskow, 1969. (In Russian)

98. Botnaru D.V. Some categorial aspects of Tihonoff spaces. In: Analele USM, seria matematică, Chişinău, 2000, p.87-94.

99. Botnaru D.V. Local, spectral and nucleary Duality. Thesis for a Habilitat Doctors Degree, 2001, 270 p.

100. Calmutchii L.I. Algebraic and functional methods in the theory of extensions of topological spaces. Thesis for a Habilitat Doctors Degree, 2007, 246 p.

101. Engelking R. General Topology. Warszawa, Polish Scient. Publ., 1977.

102. Ipate D.M. General Problem on approximation of continues mappings of topological spaces. Thesis for a Habilitat Doctors Degree, 2007, 246 pp.

103. Kelley J. General Topology. New York, Van Nostrand, 1955.

104. Kuratowski K. Topology. V.1. Izd. Mir, Moskow, 1966.(in Russian).

105. Kuratowski K. Topology. V.2. Izd. Mir, Moskow, 1969.(in Russian).

106. Arhangel'skii A. V. Bicompact sets and topology of spaces. In: Trudy Moskov. Matem. 13, 1965, p.3-55. English transl.: In: Trans. Mosc. Math. Soc. 13,1965, p.1-62.

107. Arhangel'skii A. V. Mappings and spaces. In: Uspehi Matem. Nauk 21, 1966, 133-184 (English translation: Russian Math. Surveys 21, 1968, 115-162).

108. Arnautov V. I., Mikhalev A. V. Topologies on a ring of polynomials, and a topological analogue of the Hilbert basis theorem. In: Math. USSR, Sb. 44, 1983, N4, p.417-430.

109. Arnautov V. I., Mikhalev A. V. Problems on the possibility of the extention of topologies of a ring and a semigroup to their semigroup ring. In: Proc. Steclov Inst. Math. 1993, 1993, p.19-23.

110. Arnautov V. I.ş.a. Intersection property in the radical theory of topological algebras. In: Contemporary Mathematics. 131, 1992, part 1, p.205-225.

111. Arhangel'skii A. V. On maps associated to topological groups. Docl. Acad. Nauk USSR, 181, 6, 1968, p.1303-1306. (in Russian.)

112. Arhangel'skii A. V. Topological spaces and continuous maps. Remarks on the topological groups. Editing House of the University of Moskow, 1969, 150 pp.(in Russian)

113. Arhangel'skii A. V. Relations among the invariants of topological groups and their subspaces. In: Russ. Math. Surv. 35, N 3, 1980, p.1-23.

114. Arhangel'skii A. V. Classes of topological groups. In: Uspekhi Mat.Nauk USSR, 36, 1, 1981, p.127-146. (in Russian)

115. Arhangel'skii A. V. Each topological group is the factor-group of a null-dimensional group. Docl. Acad. Nauk USSR, 181, 6, 1968, p.1303-1306. (in Russian)

116. Arhangel'skii A. V., Tkacenko M. Topological Groups and Realated Structures. World Scientific Publishing Company. 2008, 781 pp.

117. Bel'nov V.K. On zero-dimensional topological groups. In: Soviet Math. Dokl. 17, 1976, p.749-752.

118. Borubaev A.A. On uniform groups and their completions. In: C. R. Acad. Bulgare Sci., 42, N2, 1989, p.9-11.

119. Husain T. Introduction to topological groups. Philadelphia, W. B. Saunders Co., 1966, 218 p.

120. Hofmann, K.H. Tensorprodukte lokal kompakter abelscher Gruppen. In: J. Reine Angew. Math. 261, 1964, p.134-149.

121. Hofmann, K.H. Introducion to the theory of compact groups. New Orleans, Louisiana: Tulane Univ., Dep. Math. Part I, 1968, p.294.

122. Hofmann K.H., MORRIS S.A. Compact groups with large abelian subgroups. In: Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 133, 2002, p.235-247.

123. Kargapalov M., Merzljakov Yu. Elements de la theory de groups. Moscou, Mir, 1985.

124. Kaplansky I. Topological rings. In: American Journal of Mathematics, 69, 1947, p.153-183.

125. Muhin Iu. N. Topological groups. In: In the book.: Itogi nauki i tehniki. Algebra. Topology. Geometry. V. 20. Moscow. Nauka. 1982, p.3-69.

126. Chiriac L.L. On the homogeneous quasigroups. In: Abstracts of 13^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, Romania, Pitesti, Abstracts, October 14-16, 2005, p.13

127. Chiriac L.L. Some properties of homogeneous isotopies of medial topological groupoids. In: The 14^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics. Chisinau, August 17-19, 2006, p.117-118.

128. Chiriac L.L. Some properties of quasigroups with multiple identities. In: The 5^{th} Edition of the anual Symposion "Mathematics Applied in Biology an Biophysics". Iasi, June 16-17, 2006, Abstracts, 18-19, p.41-42.

129. Chiriac L.L. About properties of the topological primitive groupoids. In: Materialele seminarului "Profesorul Petre Osmatescu-80", 19 noiembrie 2005, Chisinau: UST 2006, p.51-53.

130. Choban M.M. Some topics in topological algebra. In: Topology and its Appl. 54 (1993), p.183-202.

131. Choban M.M. On free topological universal algebras. In: Abstracts: Proc. Nineteenth All-Union Algebraic Conference, L'vov, 1987, p.146.

132. Choban M.M. On the topology of free topological algebras. In: Abstracts: Proc. Sixth Simposium on the Theory of Rings, Algebras and Modules, L'vov, (1990), p.146.

133. Choban M.M. General conditions of the existence of free objects. In: Acta Comment. Univ. Tartuensis 836, 1989, p.157-171.

134. Choban M.M. On the theory of topological algebraic systems. In: Trans. Mosc. Math. Soc. 48, 1986, p.115-159.

135. Choban M.M. Algebras and some questions of the theory of maps. In: Fifth Prague Topol. Symposium 1981, (1983), p.86-97.

136. Choban M.M. On topological homogeneous algebras. In: Interim report of the Prague topological simposium. 2, 1987, p.24

137. Choban M.M. On the theory of stable metrics. In: Math. Balcan., 2, N4, 1988, p.357-373.

138. Choban M.M. The topological structure of subsets of topological groups and their quotient spaces. In: Matem. Isled., Chisinau, 44, 1977, p.117-173.

139. Choban M.M. Universal Topological Algebras. Editing House of the University of Oradea, 1999, 192 pp.

140. Choban M.M. Topological Algebras. Problems. Editing House of the Tiraspol State University, Chişinău, 2006, 84 pp.

141. Choban M.M. and Dumitrascu S.S. On universal algebras with continuous signature. In: Russ. Math. Surv. 36, 1981, p.141-142.

142. Choban M.M. and Valutsa I.I. Outline of the hisory of mathematics and mathematics in the Republic of Moldova. Editing House of the Tiraspol State University, Chişinău, 2006, 380 pp.

143. Choban M.M. Note sur la topologie exponentielle. In: Fund. Math., 1971, 71, 1, p.27-41.

144. Choban M.M., Kiriak L.L. Equations on Universal Algebras and their applications in the Groupoids Theory. In: Binary and n-ary Quasigroups, Matem. Issled. Shtiinta, (Kishinev), 120, 1991, p.96-103. (In Russian).

145. Choban M.M., Kiriak L.L. Universal Covering Algebras. In: Algebraical structure and its conections, Matem. Issled. Shtiinta, (Kishinev), 118, 1990, p.107-114. (In Russian).

146. Choban M.M., Kiriak L.L. On applying uniform structures to study of free topological algebras. In: Sibirskii Matem. J., 33, 5, 1992, p.159-172. (English: Trans. Siberian Mathematical Journal, Springer New York, 0037-4466, 1573-9260, Volume 33, Nr.5, 1992, p.891-904).

147. Choban M.M., Kiriak L.L. Homomorpfisms of Fuzzy Algebras. In: The XVII-th Congress of Romanian-American Academy of Science and Arts, Chisinau, V2, 1993, p.11

148. Choban M.M., Kiriak L.L. On Fuzzy finitely generated quasigroups. In: Fuzzy Sets and Systems, Tiraspol, 1991, p.78-81.

149. Choban M.M., Kiriak L.L. On fuzzy finitely generated groupoids. In: II International Conferences of the Balcanic Union For Fuzzy Systems and Artificial Intelegence. Trabzon, Turkey, p.158-161.

150. Choban M.M., Kiriak L.L. The homomorphisms of fuzzy algebras. In: Analele Universitatii Oradea Fasc . Mat. 8, 2001, p.131-138.

151. Choban M.M., Kiriak L.L. Compact subsets of free algebras with topologies and equivalence of space. In: Hadronic Journal, Volume 25, Number 5, USA, October 2002, p.609-631.

152. Choban M.M., Kiriak L.L. The topological quasigroups with multiple identies. In: Quasigroups and Related Systems, 9, 2002, p.19-31.

153. Choban M.M., Kiriak L.L. Decomposition of some algebras with topologies and their resolvability. In: Buletinul AS a Republicii Moldova, Matematica, 3(37), 2001, p.27-37.

154. Phullendu D. Topological quasigroups. Doctor Phill thesis submitted to University of Calcuta. 1968.

155. Galkin V.M. Left distributive quasigroups. Dissertation of Doctor of Sciences, Steklov Mathematical Institute, Moscow, 1991, (in Russian).

156. Galkin V.M. Quasigroups, Algebra, Topology, Geometry. In: VINITI, Moscow, 1988, vol. 26, p.3-44, (in Russian).

157. Polonijo M. On medial-like identities. In: Quasigroups and Related System, 2005, n.13, p.281-288.

158. Sandu N.I. Medial nilpotent distributive quasigroups and CH-quasigroups. In: Sib. Math. J. 28 (1987), p.307-316, (in Russian).

159. Shchukin K.K. Action of a group on a quasigroup. Kishinev State University Printing House, Kishinev, 1985, (in Russian).

160. Shchukin K.K. On simple medial quasigroups. In: Mat. Issled. 120 (1991), p.114-117.

161. Stipe V. Pentagonal quasigroups. Quasigroups and Related Systems, 2014, nr. 22, p.147-158.

162. Stehlíková B., Markechová D., Tirpáková A. On the existence of a Haar measure in topological IP-loops. Kybernetika, 2011, vol.47, nr.5, p.740-754.

163. Khan M. Decompositions of an Abel-Grassmann's groupoid. Quasigroups and Related Systems, 2010, nr.18, p.143-148.

164. Hofmann K.H., Martin J.R., Topological left-loops. Topological proceedings, 2012, vol.39, p.185-194.

165. Stanovscky D. A quide to self-distributive quasigroups, or latin quandless. Quasigroups and Related Systems, 2015, nr.23, p.91-128.

166. Chiriac L.L. *On topological primitive groupoid with divisions*, In: Acta et Commentationes, vol. III, Universitatea de Stat Tiraspol, Chişinău, 2003, p.175-178.

167. Kiriak L.L.,Choban M.M. About homogeneous isotopies and congruences. In: Învaţamîntul universitar din Moldova la 70 ani, Chişinău, vl.3, 2000, p.33.

168. Kiriak L.L. On Topological Quasigroups and Homogeneous Isotopes. In: Analele Universitatii din Pitesti, Buletin Stiintific, seria Matematica si Informatica, Nr. 9 , 2003, p.191-196.

169. Sigmon K. Medial topological groupoids. In: Aeq. Math. Vol.1, 1968, p.217-234.

170. Chiriac L. L. Topological Algebraic System, Chişinău, Ştiinţa, 2009.

171. Chiriac L.L. On some generalization of commutativity in topological groupoids. In: 6^{th} Congress of Romanian Mathematicians June 28-July 4, Bucharest, Romania, 2007, p.45.

172. Bombardelli M. Finite hexagonal quasigroups. In: Quasigroups and Related Systems 14, 2006, p.157-162.

173. Birkoff G. On the structure of abstract algebras. In: Proc. Cambr. Phil. Soc. 31, 1935, p.433-454.

174. Hewit E.,Ross K. Abstract harmonic analysis, vol.1,Structure of topological groups. Integration theory. Group reprezentations. Springer-Verlag. Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1963.

175. Choban M.M., Chiriac L.L. Universal algebras and automata. In: Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chisinau, August 17-19, 2004, p.102-105.

176. Chiriac L.L. Algebras, automata and machines. In: Abstracts of 12^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, Romania, Pitesti, October 15-17, 2004, p.1

177. Gvaramia A. A. Quasivarieties of automata. Relations with quasigroups. In: Sibirsk. Mat. Zh. 26 (1985), no. 3, p.11-30, (in Russian).

DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnata, declar pe propria mea răspundere că materialele prezentate în teza de doctorat se referă la propriile activităţi şi realizări, în caz contrar urmând să suport consecinţele, în conformitate cu legislaţia în vigoare.

JOSU Natalia

Semnătura:

Data: ________________________________ 2015

CV-ul AUTORULUI

Nume: JOSU

Prenume: Natalia

Adresa: Chişinău, Mesager 5/1, ap. 74

Telefon: +373 69424745

E-mail: nbobeica1978@gmail.com

Cetăţenie: Republica Moldova

Data naşterii: 26.12.1978

EXPERIENŢĂ

01.09.2001 - 01.01.2002: Profesor de informatică la liceul teoretic "Petre Ştefănucă" din or. Ialoveni.

01.01.2002 - prezent: Lector universitar, Catedra Informatica şi Tehnologii Informaţionale, Universitatea de Stat din Tiraspol.

EDUCAŢIE

2003 - 2007: Studii de Doctorat. Catedra Algebră, Geometrie şi Topologie, Universitatea de Stat din Tiraspol.

2002 - 2003: Studii de Masterat la specialitatea Matematică, Universitatea de Stat din Tiraspol.

1996 - 2001: Studii superioare de Licenţă la specialitatea Matematica şi Informatică, Universitatea de Stat din Tiraspol.

PARTICIPĂRI LA CONFERINŢE

Am participat la circa 25 conferinţe ştiinţifico-didactice, dintre care menţionez:

1. The 23^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2015, Suceava, România, 17-20 septembrie.

2. Probleme actuale ale ştiinţelor exacte şi ale naturii. Învăţămîntul superior din RM la 85 ani, UST, Chişinău, 2015, 24-25 septembrie.

3. Mathematics and Information Technologies: Research and Education, MITRE, 2015, Chişinău, 2-5 iulie.

4. Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, Chişinău, 2014, 19-23 august.

5. The 22^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2014, Bacău, România, 18-21 septembrie.

6. The 21^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2013, Bucureşti, 19-22 septembrie.

7. The 20^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to Academician Mitrofan M.Cioban, CAIM, 2012, Chişinău, 22-25 august.

8. Mathematics and Information Technologies: Research and Education. Dedicated to the 65^{th} anniversary of the Moldova State University, MITRE, 2011, Chişinău, 22-25 august.

9. The 19^{th} edition of the annual Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2011, Iaşi, 22-25 septembrie.

10. Actual problems of mathematics and informatics. Scientific conference dedicated to the 80^{th} anniversary of the foundation of the Tiraspol State University and of the Faculty of Physics, Mathematics and Information Technologies, Chişinău, 2010, 24-25 septembrie.

11. The 18^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2010, Iaşi, România, 14-17 octombrie.

12. Mahematics and Information Technologies: Research and Education, MITRE, 2009, Chişinău, 8-9 octombrie.

13. The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2009, Constanţa, 17-20 septembrie.

14. Conferinţa ştiinţifică Republicană "Matematica - probleme actuale cu aplicaţii", Chişinău, 2009, 8 aprilie.

15. Mathematics and Information Technologies: Research and Education, MITRE, 2008, Chişinău, 1-4 octombrie.

16. The 16^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM, 2008, Oradea, 9-11 octombrie.

17. 6^{th} Congress of Romanian Mathematicians, Bucureşti, 2007, România, 28 iunie - 4 iulie.

18. The XIV^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60^{th} anniversary of the foundation of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University, Satellite Conference of ICM, Chişinău, 2006, 17-19 august.

19. Conferinţa a 2-a a Societăţii Matematice din RM, consacrată aniversării a 40-cea de

la fondarea Institutului de Matematică şi Informatică al AŞM, Chişinău, 2004, 17-19 august.

20. Şedinţa specială a seminarului ştiinţific consacrată profesorului Valentin Belousov, Institutul de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Moldovei, Chişinău, 2008-2014.

PUBLICAŢII

Am publicate circa 40 de lucrări ştiinţifico-didactice, dintre care menţionez:

1. Bobeica N., Chiriac L. On topological AG-groupoids and paramedial quasigroups wiht multiple identities. Romai Journal **6** (2010), no. 1, 5-14. ISSN: 1841-5512. (0.67*c.a.*).

2. Bobeica N. Some properties on topological paramedial groupoids with multiple identities. Studia Universitatis, seria Ştiinţe Exacte şi Economice, **52** (2012), no. 2, 35-41. ISSN: 1857-2073. (0.73*c.a.*).

3. Chiriac L., Chiriac L. Jr., Bobeica N. On topological groupoids and multiple identities. Buletinul Academiei de Ştiinţe a RM. MATEMATICA **59** (2009), no. 1, 67-78. ISSN: 1024-7696. (0.88*c.a.*).

4. Chiriac L.L., Bobeica N. Some properties of the homogeneous isotopies. Acta et Commentationes, Analele UST, vol. 3, Ştiinţe Fizico-Matematice şi Informatica, 2006, 107-112. ISSN: 1857-1085. (0.45*c.a.*).

5. Chiriac L., Teleucă M., Guzun S., Danilov N., Bobeica N. Identificarea quasigrupurilor neizomorfe de ordin finit. Acta et Commentationes, Analele UST, vol. 3, Ştiinţe Fizico-Matematice şi Informatica, 2006, 102-106. ISSN: 1857-1085. (0.37*c.a.*).

6. Chiriac L., Pruteanu M., Îndoitu N., Bobeica N. Identificarea structurilor algebrice neizomorfe. Acta et Commentationes, Analele UST, vol. 3, Ştiinţe Fizico-Matematice şi Informatica, 2003, 114-117. ISBN: 9975-9777-6-6. (0.27*c.a.*).

7. Chiriac L., Pruteanu M., Bobeica N., Algoritmi şi structuri algebrice. Acta et Commentationes, Analele UST, vol. 3, Ştiinţe Fizico-Matematice şi Informatica, 2003, 111-113. ISBN:9975-9777-6-6. (0.27*c.a.*).

Sunt membru al Societăţii de Matematică din Republica Moldova şi membru ROMAI.