ACADEMIA DE ŞTIINŢE A MOLDOVEI

INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Cu titlu de manuscris

CZU 517.925

BUJAC CRISTINA

SISTEME DIFERENŢIALE CUBICE CU DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE TOTALĂ OPT

111.02 - Ecuaţii Diferenţiale

Autoreferatul

tezei de doctor în ştiinţe matematice

CHIŞINĂU, 2016

Teza a fost elaborată în laboratorul Ecuaţii Diferenţiale al Institutului de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Moldovei.

Conducător ştiinţific: ***Vulpe Nicolae***, dr.hab. în şt.fiz.-mat., prof. cercet., m.c. al Academiei de Ştiinţe a Moldovei.

Referenţi oficiali:

1. ***Llibre Jaume***, profesor, Departamentul de Matematică, Universitatea Autonomă din Barcelona;

2. ***Cozma Dumitru***, dr.hab. în şt. fiz.-mat., prof.univ., Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chişinău);

Memrii Consiliului Ştiinţific Specializat:

1. ***Perjan Andrei***, dr.hab. în şt. fiz.-mat., prof.univ., Universitatea de Stat din Moldova, preşedinte al C.Ş.S.;

2. ***Orlov Victor***, dr. în şt. fiz.-mat., Universitatea Tehnică a Moldovei, secretar ştiinţific al C.Ş.S.;

3. ***Cioban Mitrofan***, dr.hab. în şt. fiz.-mat., prof.univ., acad., Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chişinău);

4. ***Guţu Valeriu***, dr. în şt. fiz.-mat., conf.univ., Universitatea de Stat din Moldova;

5. ***Popa Mihail***, dr.hab. în şt. fiz.-mat., prof.univ., Insitutul de Matematică şi Informatică al AŞM;

6. ***Şubă Alexandru***, dr.hab. în şt. fiz.-mat., prof.univ., Insitutul de Matematică şi Informatică al AŞM.

Susţinerea tezei va avea loc la 31 martie 2016 la ora 14:00 în şedinţa Consiliului Ştiinţific Specializat D 01.111.02-03 din cadrul Insitutului de Matematică şi Informatică al AŞM (str. Academiei 5, sala 340, Chişinău, MD-2028, Republica Moldova).

Teza de doctor şi autoreferatul pot fi consultate la Biblioteca Ştiinţifică Centrală "A.Lupan" a AŞM şi pe site-ul CNAA (www.cnaa.acad.md).

Autoreferatul a fost expediat la ___ _________ 2016.

Secretar şt. al C.Ş.S. **Orlov Victor**

Conducător şt., dr.hab., prof.cercet., m.c. N. Vulpe **Vulpe Nicolae**

Autor **Bujac Cristina**

REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Descrierea situaţiei în domeniul de cercetare şi identificarea problemelor de cercetare. Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale în plan

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \tag{1.1}$$

unde P şi Q sunt polinoame de x şi y cu coeficienţi reali şi $\max\big(\deg(P), \deg(Q)\big) = n$. Vom numi astfel de sisteme *polinomiale de gradul n.*

Existenţa unor curbe algebrice invariante a fost un element relevant în studiul integrabilităţii sistemelor polinomiale în plan. Una dintre primele publicaţii în această direcţie a fost lucrarea lui Darboux (1878) în care existenţa curbelor invariante a jucat un rol important în vederea determinării integralelor prime ale acestor sisteme. O prezentare modernă a acestei teorii putem găsi în [24, 27].

Existenţa unui număr suficient de drepte invariante ale sistemului (1.1) de asemenea poate fi utilizată la integrarea sistemului (1.1). Au fost scrise multe publicaţii dedicate acestor clase de sisteme în cazul generic, precum şi în cazurile particulare, adică pentru $n = 2, 3, 4$, ş.a.m.d. Sistemele de ecuaţii diferenţiale polinomiale cu drepte invariante în cazul generic au fost investigate de Popa, Sibirski, Kooij, Sokulski, Zhang Xi Kang, Dai Guo Ren, Artes, Llibre, Dolov, Kruglov ş.a. Mai mulţi autori au avut ca obiect de studiu cele mai simple clase de sisteme (1.1) ($n \leq 3$), şi anume Popa, Sibirski, Schlomiuk, Vulpe şi alţi autori.

În teză sunt abordate sistemele de ecuaţii diferenţiale cubice ($n = 3$). *Mulţimea sistemelor diferenţiale cubice* ($\mathbb{CS}$) este descrisă de un număr mare de parametri, în total 20, de aceea examinarea lor începe cu studiul unor subclase din $\mathbb{CS}$. N̂oi suntem cointeresaţi ˆ in studiul familiei de sisteme cubice care posedă *drepte invariante* ($\mathbb{ISL}s$). În lucrarea [1] s-a arătat că numărul maxim de drepte invariante (incluzând dreapta de la infinit şi multiplicităţile dreptelor) pentru un sistem diferenţial polinomial cu infinitul nedegenerat de gradul m este $3m$. Cu alte cuvinte, numărul maxim de drepte invariante (incluzând dreapta de la infinit $Z = 0$) pentru un sistem cubic este cel mult 9. Clasificarea completă a sistemelor din $\mathbb{CS}$ ce posedă un număr maxim de drepte invariante a fost efectuată de Llibre şi Vulpe în [25]. Aici autorii au introdus noţiunea de *configuraţie de drepte invariante* ale sistemelor din $\mathbb{CS}$ şi au detectat pentru aceste sisteme existenţa a 23 configuraţii. Mai mult decât atât, în această lucrare au fost construite condiţiile afin-invariante necesare şi suficiente de realizare ale fiecărei configuraţii obţinute utilizând teoria invarianţilor algebrici a ecuaţiilor diferenţiale. O nouă clasă de sisteme omisă în [25] a fost construită de autorul tezei în [8].

În teza curentă s-a continuat studiul sistemelor cubice care a fost iniţiată în [25], şi anume, în lucrare se examinează familia de sisteme cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt, considerându-se printre ele şi dreapta de la infinit (vom nota această familie de sisteme cu $\mathbb{CSL}_8$). Rezultatele obţinute au fost prezentate în [4-22].

Unele sisteme cubice cu drepte invariante, de asemenea, au fost investigate de Lyubimova [26], Şubă, Puţuntică, Repeşco [29,30] şi de alţi matematicieni (Llibre, Mahdi, Vulpe, Cozma, Chan Guo Wei). Lyubimova a considerat sistemele cubice din $\mathbb{CSL}_8$ cu 7 $\mathbb{IL}s$ afine, toate reale şi distincte, şi a construit în acest caz 4 configuraţii. Şubă împreună cu elevii săi, utilixând noţiunea de *multiplicitate paralelă*, au depistat 17 configuraţii de $\mathbb{IL}s$ care au coincis cu cele obţinute în clasificarea noastră în cazul sistemelor cubice cu patru *puncte singulare la infinit* ($\mathbb{ISP}s$). Însă, spre deosebire de lucrările lor, în teză pentru fiecare configuraţie detectată au fost construite şi condiţiile necesare şi suficiente de realizare a ei, exprimată prin polinoame invariante în raport cu grupul de transformări afine şi rescalarea timpului. Menţionăm că, polinoamele date au fost construite aplicând teoria invarianţilor ecuaţiilor diferenţiale, fondată de C. Sibirschi şi dezvoltată de discipolii săi (Lunchevici, Marinciuc, Gasinschi–Chirniţchi, Dang Dini Bic, Tacu, Vulpe, Popa, Boularas Driss, Baltag, Calin, Daniliuc şi alţii).

Scopul şi obiectivele tezei de doctor. Scopul principal al tezei este de a efectua clasificarea completă a sistemelor diferenţiale cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală 8. Această clasificare presupune realizarea următorilor obiective principale:

1. depistarea tuturor configuraţiilor de drepte invariante pentru familia de sisteme diferenţiale de ecuaţii polinomiale cubice ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 8;

2. construirea condiţiilor necesare şi suficiente afin invariante de realizare ale fiecărei configuraţii depistate.

Metodologia cercetării ştiinţifice. Cercetările care se efectuează în această lucrare se bazează pe metodele teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, teoriei invarianţilor a ecuaţiilor diferenţiale, teoriei bifurcaţiilor a sistemelor dinamice şi algebrei computaţionale.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. În lucrare, pentru familia de sisteme cubice, pentru prima dată au fost construite toate configuraţiile posibile de drepte invariante de multiplicitate totală opt. Mulţimea configuraţiilor obţinute conţine, în calitate de cazuri particulare, toate configuraţiile depistate de alţi autori în cazul unor clase speciale de sisteme cubice din

$\mathbb{CSL}_8$(vezi [26], [29,30]). Adiţional, în contrast cu alte lucrări, au fost determinate condiţiile necesare şi suficiente de realizarea ale fiecărei configuraţii obţinute în teză pentru aceste sisteme. De asemenea, a fost completată clasificarea matematicienilor Llibre şi Vulpe cu o noua clasă de sisteme cubice care posedă drepte invariante de multiplicitate totală 9.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în clasificarea completă a familiei de sisteme cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt în raport cu configurаţiile acestor drepte; aceasta clasificare este un element foarte util în vederea clasificării topologice complete ale acestei familii de sisteme şi în vederea studiului integrabilităţii acestor sisteme.

Semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele ce ţin de sistemele cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt, obţinute în teză, reprezintă un pas semnificativ în algebra teoriei sistemelor cubice.

Rezultatele principale înaintate spre susţinere:

(a) toate configuraţiile possibile de drepte invariante (51 la număr) pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale cubice care posedă drepte invariante de multiplicitate totală opt;

(b) condiţiile necesare şi sufficiente afin invariante de realizare ale fiecărei configuraţii construite;

(c) formele canonice ale familiei de sisteme cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt după modulul grupului afin şi rescalarea timpului;

(d) formele canonice perturbate care caracterizează vecinătăţile sistemelor cubice din $\mathbb{CSL}_8$;

(e) o nouă clasă de sisteme cubice care are drepte invariante de multiplicitate totală nouă şi care completează clasificarea efectuată de Llibre şi Vulpe în [25].

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele ştiinţifice obţinute în teză pot fi implementate în studiul mai profund a sistemelor cubice din $\mathbb{CSL}_8$, şi anume:

- configuraţiile de drepte invariante şi formele canonice pot fi un element foarte util în vederea clasificării topologice a sistemelor în acest caz;

- drept bază în vederea determinării integralelor prime ale sistemelor studiate;

- condiţiile necesare şi suficiente afin-invariante, exprimate prin pominoame invariante cosntruite în teză, pot fi aplicate oricărui sistem cubic în vederea cunoaşterii dacă acest sistem aparţine sau nu clasei $\mathbb{CSL}_8$ şi în caz afirmativ, de a specifica configuraţia de drepte specifică sistemului.

- în vederea investigării ulterioare a sistemelor cubice cu drepte invariante de multiplicitate mai mică decât 8;

- în studiul diverselor modele matematice care descriu diferite procese din fizică, chimie, medicină ş.a.m.d;

- drept suport pentru perfectarea cursurilor speciale universitare şi post-universitare.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele obţinute în această lucrare au fost examinate şi aprobate în cadrul diferitor seminare ştiinţifice: "Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale ", U.S.M., 2015; "Algebra şi Ecuaţii diferenţiale", U.S.T., 2013, 2014; Departamentul de Ecuaţii Diferenţiale şi Analiza Sistemelor al Universităţii de Stat din Belorus, Minsk, 2013; Departmentul de Matematică al Universităţii Normale din Shanghai din China (Shanghai Normal University), 2015.

Elaborările legate de tema tezei de doctor au fost de asemenea prezentate în cadrul multor forumuri ştiinţifice: International Conference of Young Researchers, X-th Edition, Chişinău, 2012; Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), Chişinău: U.S.T., 2012, 2014, 2015; International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education" (MITRE), Chişinău: U.S.M., 2013-2015; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor "Tendinţe Contemporane ale Dezvoltării Ştiinţei: Viziuni ale Tinerilor Cercetători", Chişinău: AŞM, 2014, 2015; The Third Conference of Mathematical Society of Moldova (IMCS-50), Chişinău: AŞM, 2014; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională cu participare internaţională "Probleme actuale ale ştiinţelor exacte şi ale naturii", Chişinău: U.S.T., 2015.

Publicaţiile la tema tezei. Rezultatele obţinute în teză sunt oglindite în 19 lucrări ştiinţifice: 3 preprinturi, 6 articole în reviste recenzate (dintre care 4 sunt reviste cotate ISI), 10 teze la forumurile ştiinţifice; 6 publicaţii sunt de un singur autor.

Cuvintele-cheie: sistem differenţial cubic, polinom afin invariant, dreaptă invariantă, multiplicitatea unei curbei algebrice, configuraţia dreptelor invariante, sistem perturbat.

Volumul şi structura tezei. Teza de doctor este scisă în limba engleză ¸ conţine 154 pagini (text de bază) şi este structurată în felul următor: introducere, 4 capitole, conlcuzii generale şi recomandări, bibliografia care conţine 140 referinţe, 28 figuri.

CONŢINUTUL TEZEI DE DOCTOR

În **Introducere** are loc revelarea situaţiei curente a problemei de cercetare, principalelor motive pentru efecuarea cercetărilor propuse, scopului şi obiectivelor tezei, importanţei şi avantajelor investigaţiilor ştiinţifice efectuate, noutăţii şi originalităţii ştiinţifice, problemei ştiinţifice importante soluţionate, rezultateleor ştiinţifice care urmează să fie înaintate spre susţinere, precum şi aprobarea rezultatelor ştiinţifice obţinute.

Capitolul 1 conţine o trecere în revistă a celor mai importante rezultate referitor la scopul şi obiectivele tezei de doctor. În prima parte a acestui capitol au fost examinate sistemele cubice cu drepte invariante. Mai exact, s-a discutat despre teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale şi importanţa de a studia configuraţiile de drepte invariante, care pot servi un element util în vederea completării întregului disc Poincaré cu traiectoriile soluţiilor sistemelor în discuţie. Cu alte cuvinte, lucrarea noastră parţial a fost motivată de problema de clasificare topologică a sistemelor diferenţiale cubice. Al doilea paragraf urmăreşte problema integrabilităţii sistemelor diferenţiale (1.1). Având toate formele canonice pentru sistemele cubice din $\mathbb{CSL}_8$, construite în teză, problema integrabilităţii ar putea fi rezolvată şi aceasta de asemenea a motivat cercetările noastre. Ultimul paragraf este dedicat conceptului de invariant şi utilizarea invarianţilor în problema de clasificare. Aici noi am revizuit pe scurt teoria clasică a invarianţilor şi analogul său pentru teoria câmpurilor vectoriale polinomiale dezvoltată de şcoala Sibirskii şi noile progrese de activitate comună a şcolii Chişinău, şcoalii Barcelona şi Schlomiuk.

În **Capitolul 2** mai întâi sunt aduse unele definiţii şi rezultate preliminare necesare în această lucrare. Acest compartiment este dedicat unor aspecte ce ţin de teoria invarianţilor şi, pe lângă unele polinoame invariante construite anterior în [25], se expun 52 de polinoame invariante noi construite care, de facto, sunt $CT-$comitanţi.

Considerăm sistemul cubic de ecuaţii diferenţiale:

$$(S)\quad \dot{x} = p_0 + p_1(x, y) + p_2(x, y) + p_3(x, y), \quad \dot{y} = q_0 + q_1(x, y) + q_2(x, y) + q_3(x, y). \qquad (1)$$

Fie $f, g \in \mathbb{R}[a, x, y]$ şi $(f, g)^{(k)} = \sum_{h=0}^{k}(-1)^h \binom{k}{h} \dfrac{\partial^k f}{\partial x^{k-h}\partial y^h} \dfrac{\partial^k g}{\partial x^h \partial y^{k-h}}$. Polinomul $(f, g)^{(k)} \in \mathbb{R}[a, x, y]$ se numeşte *transvectant de ordinul* k al polinoamelor f şi g.

Pentru de a defini polinoamele invariante necesare, în primul rând, se construiesc următorii comitanţi de gradul doi în raport cu coeficienţii sistemului iniţial:

$$
\begin{array}{llll}
S_1=(C_0,C_1)^{(1)}, & S_8=(C_1,C_2)^{(2)}, & S_{15}=(C_2,D_2)^{(1)}, & S_{22}=(D_2,D_3)^{(1)},\\
S_2=(C_0,C_2)^{(1)}, & S_9=(C_1,D_2)^{(1)}, & S_{16}=(C_2,C_3)^{(1)}, & S_{23}=(C_3,C_3)^{(2)},\\
S_3=(C_0,D_2)^{(1)}, & S_{10}=(C_1,C_3)^{(1)}, & S_{17}=(C_2,C_3)^{(2)}, & S_{24}=(C_3,C_3)^{(4)},\\
S_4=(C_0,C_3)^{(1)}, & S_{11}=(C_1,C_3)^{(2)}, & S_{18}=(C_2,C_3)^{(3)}, & S_{25}=(C_3,D_3)^{(1)},\\
S_5=(C_0,D_3)^{(1)}, & S_{12}=(C_1,D_3)^{(1)}, & S_{19}=(C_2,D_3)^{(1)}, & S_{26}=(C_3,D_3)^{(2)},\\
S_6=(C_1,C_1)^{(2)}, & S_{13}=(C_1,D_3)^{(2)}, & S_{20}=(C_2,D_3)^{(2)}, & S_{27}=(D_3,D_3)^{(2)}.\\
S_7=(C_1,C_2)^{(1)}, & S_{14}=(C_2,C_2)^{(2)}, & S_{21}=(D_2,C_3)^{(1)}, &
\end{array}
$$

Sunt utilizate şi următoarele polinoame invariante, care au fost construite în [25] pentru a caracteriza familia de sisteme cubice cu numărul maxim (adică 9) de drepte invariante: $\mathcal{D}_1(a)=6S_{24}^3-\big[(C_3,S_{23})^{(4)}\big]^2$, $\mathcal{D}_2(a,x,y)=-S_{23}$, $\mathcal{D}_3(a,x,y)=(S_{23},\ S_{23})^{(2)}-6C_3(C_3,\ S_{23})^{(4)}$, $\mathcal{D}_4(a)=(C_3,\ \mathcal{D}_2)^{(4)}$, $\mathcal{V}_1(a,x,y)=S_{23}+2D_3^2$, $\mathcal{V}_2(a,x,y)=S_{26}$, $\mathcal{V}_3(a,x,y)=6S_{25}-3S_{23}-2D_3^2$, $\mathcal{V}_4(a,x,y)=C_3\Big[(C_3,S_{23})^{(4)}+36\,(D_3,S_{26})^{(2)}\Big]$, $\mathcal{L}_1(a,x,y)=9C_2\,(S_{24}+24S_{27})-12D_3\,(S_{20}+8S_{22})-12\,(S_{16},D_3)^{(2)}-3\,(S_{23},C_2)^{(2)}-16\,(S_{19},C_3)^{(2)}+12\,(5S_{20}+24S_{22},C_3)^{(1)}$, $\mathcal{L}_2(a,x,y)=32\,(13\,S_{19}+33\,S_{21},D_2)^{(1)}+84\,(9\,S_{11}-2\,S_{14},D_3)^{(1)}-448\,(S_{18},C_2)^{(1)}+8D_2\,(12S_{22}+35S_{18}-73S_{20})-56\,(S_{17},C_2)^{(2)}-63\,(S_{23},C_1)^{(2)}+756D_3S_{13}-1944D_1S_{26}+112\,(S_{17},D_2)^{(1)}-378\,(S_{26},C_1)^{(1)}+9C_1\,(48S_{27}-35S_{24})$, $\mathcal{U}_1(a)=S_{24}-4S_{27}$, $\mathcal{U}_2(a,x,y)=6(S_{23}-3S_{25},S_{26})^{(1)}-3S_{23}(S_{24}-8S_{27})-24S_{26}^2+2C_3(C_3,S_{23})^{(4)}+24D_3(D_3,S_{26})^{(1)}+24D_3^2S_{27}$.

Polinoamele invariante de mai sus s-au dovedit a nu fi suficiente pentru caracterizarea sistemelor cubice ce posedă 8 drepte invariante, considerându-se şi dreapta de la infinit, precum şi multiplicităţile tuturor dreptelor. Astfel, în teză au fost construite următoarele polinoame invariante noi:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_5(a,x,y) &= 6T_1(9A_5-7A_6)+2T_2(4T_{16}-T_{17})-3T_3(3A_1+5A_2)+3A_2T_4+36T_5^2-3T_{44},\\
\mathcal{V}_6(a,x,y) &= 6D_3^2+S_{23}+6S_{25},\quad \mathcal{L}_6(a)=2A_3-19A_4,\quad \mathcal{L}_7(a,x,y)=(T_{10},T_{10})^{(2)},\\
\mathcal{K}_1(a,x,y) &= \big(3223T_2^2T_{140}+2718T_4T_{140}-829T_2^2T_{141},T_{133}\big)^{(10)}/2,\quad \mathcal{K}_2(a,x,y)=T_{74},\\
\mathcal{K}_3(a,x,y) &= Z_1Z_2Z_3,\quad \mathcal{K}_4(a,x,y)=T_{13}-2T_{11},\\
\mathcal{K}_5(a,x,y) &= 45T_{42}-T_2T_{14}+2T_2T_{15}+12T_{36}+45T_{37}-45T_{38}+30T_{39},\\
\mathcal{K}_6(a,x,y) &= 4T_1T_8(2663T_{14}-8161T_{15})+6T_8(178T_{23}+70T_{24}+555T_{26})+\\
&\quad 18T_9(30T_2T_8-488T_1T_{11}-119T_{21})+5T_2(25T_{136}+16T_{137})-\\
&\quad 15T_1(25T_{140}-11T_{141})-165T_{142},\quad \mathcal{K}_7(a)=A_1+3A_2,\\
\mathcal{K}_8(a,x,y) &= 10A_4T_1-3T_2T_{15}+4T_{36}-8T_{37},\ \mathcal{K}_9(a,x,y)=3T_1(11T_{15}-8T_{14})-T_{23}+5T_{24},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_1(a,x,y) &= S_{13}, \quad N_2(a,x,y)=T_9, \quad N_3(a,x,y)=C_2D_3+3S_{16},\\
N_4(a,x,y) &= -S_{14}^2-2D_2^2(3S_{14}-8S_{15})-12D_3(S_{14},C_1)^{(1)}+\\
&\quad +D_2(-48D_3S_9+16(S_{17},C_1)^{(1)}),\\
N_5(a,x,y) &= 36D_2D_3(S_8-S_9)+D_1(108D_2^2D_3-54D_3(S_{14}-8S_{15}))+\\
&\quad +2S_{14}(S_{14}-22S_{15})-8D_2^2(3S_{14}+S_{15})-9D_3(S_{14},C_1)^{(1)}-16D_2^4,\\
N_6(a,x,y) &= 40D_3^2(15S_6-4S_3)-480D_2D_3S_9-20D_1D_3(S_{14}-4S_{15})+\\
&\quad +160D_2^2S_{15}-35D_3(S_{14},C_1)^{(1)}+8\big((S_{23},C_2)^{(1)},C_0\big)^{(1)},\\
N_7(a,x,y) &= 18C_2D_2(9D_1D_3-S_{14})-2C_1D_3(8D_2^2-3S_{14}-74S_{15})-\\
&\quad -432C_0D_3S_{21}48S_7(8D_2D_3+S_{17})+6S_{10}(12D_2^2+151S_{15})-\\
&\quad -51S_{10}S_{14}-162D_1D_2S_{16}+864D_3(S_{16},C_0)^{(1)},\\
N_8(a,x,y) &= -32D_3^2S_2-108D_1D_3S_{10}+108C_3D_1S_{11}-18C_1D_3S_{11}-27S_{10}S_{11}+\\
&\quad +4C_0D_3(9D_2D_3+4S_{17})+108S_4S_{21},\\
N_9(a,x,y) &= 11S_{14}^2-16D_1D_3(16D_2^2+19S_{14}-152S_{15})-8D_2^2(7S_{14}+32S_{15})-\\
&\quad -2592D_1^2S_{25}+88D_2(S_{14},C_2)^{(1)},\\
N_{10}(a,x,y) &= -24D_1D_3+4D_2^2+S_{14}-8S_{15},\\
N_{11}(a,x,y) &= S_{14}^2+D_1[16D_2^2D_3-8D_3(S_{14}-8S_{15})]-2D_2^2(5S_{14}-8S_{15})+\\
&\quad +8D_2(S_{14},C_2)^{(1)},\\
N_{12}(a,x,y) &= -160D_2^4-1620D_3^2S_3+D_1(1080D_2^2D_3-135D_3(S_{14}-20S_{15}))-\\
&\quad -5D_2^2(39S_{14}-32S_{15})+85D_2(S_{14},C_2)^{(1)}+81\big((S_{23},C_2)^{(1)},C_0\big)^{(1)}+5S_{14}^2,\\
N_{13}(a,x,y) &= 2(136D_3^2S_2-126D_2D_3S_4+60D_2D_3S_7+63S_{10}S_{11})-\\
&\quad -18C_3D_1(S_{14}-28S_{15})-12C_1D_3(7S_{11}-20S_{15})-192C_2D_2S_{15}+\\
&\quad +4C_0D_3(21D_2D_3+17S_{17})+3C_2(S_{14},C_2)^{(1)},\\
N_{14}(a,x,y) &= -6D_1D_3-15S_{12}+2S_{14}+4S_{15},\\
N_{15}(a,x,y) &= 216D_1D_3(63S_{11}-104D_2^2-136S_{15})+4536D_3^2S_6+4096D_2^4+\\
&\quad +120S_{14}^2+992D_2(S_{14},C_2)^{(1)}-135D_3\big[28(S_{17},C_0)^{(1)}+5(S_{14},C_1)^{(1)}\big],\\
N_{16}(a,x,y) &= 2C_1D_3+3S_{10},\ N_{17}(a,x,y)=6D_1D_3-2D_2^2-(C_3,C_1)^{(2)},\\
N_{18}(a,x,y) &= 2D_2^3-6D_1D_2D_3-12D_3S_5+3D_3S_8,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_{19}(a,x,y) &= C_1D_3(18D_1^2-S_6)+C_0(4D_2^3-12D_1D_2D_3-18D_3S_5+9D_3S_8)+6C_2D_1S_8+\\
&\quad +2\big(9D_2D_3S_1-4D_2^2S_2+12D_1D_3S_2-9C_3D_1S_6-9D_3(S_4,C_0)^{(1)}\big),\\
N_{20}(a,x,y) &= 3D_2^4-8D_1D_2^2D_3-8D_3^2S_6-16D_1D_3S_{11}+16D_2D_3S_9,\\
N_{21}(a,x,y) &= 2D_1D_2^2D_3-4D_3^2S_6+D_2D_3S_8+D_1(S_{23},C_1)^{(1)},\\
N_{22}(a,x,y) &= T_8, \quad N_{23}(a,x,y)=T_6, \quad N_{24}(a,x,y)=2T_3T_{74}-T_1T_{136},\\
N_{25}(a,x,y) &= 5T_3T_6-T_1T_{23},\ N_{26}=9T_{135}-480T_6T_8-40T_2T_{74}-15T_2T_{75},\\
N_{27}(a,x,y) &= 9T_2T_9(2T_{23}-5T_{24}-80T_{25})+144T_{25}(T_{23}+5T_{24}+15T_{26})-\\
&\quad -9(T_{23}^2-5T_{24}^2-33T_9T_{76}), \quad N_{28}(a,x,y)=T_3+T_4,\\
W_1(a,x,y) &= 2C_2D_3-3C_3D_2,\\
W_2(a,x,y) &= 6C_3(S_{12}+6S_{11})-9C_1(S_{23}+S_{25})-8(S_{16},C_2)^{(1)}-C_3D_2^2,\\
W_3(a,x,y) &= 12D_1C_3-S_{10},\ W_4(a,x,y)=-27S_4+4S_7,\\
W_5(a,x,y) &= 3D_1^2C_1+4D_1S_2-3(S_4,C_0)^{(1)},\\
W_6(a,x,y) &= 2C_2D_1+3S_4,\ W_7(a,x,y)=(S_{10},D_2)^{(1)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_8(a,x,y) &= 4C_2(27D_1D_3-8D_2^2)+2C_2(20S_{15}-4S_{14}+39S_{12})+18C_1(3S_{21}-D_2D_3)+\\
&\quad +54D_3(3S_4-S_7)-288C_3S_9+54(S_7,C_3)^{(1)}-567(S_4,C_3)^{(1)}+135C_0D_3^2,\\
W_9(a,x,y) &= 3S_6D_2^2+4S_3D_2^2-6D_1D_2S_9,\\
W_{10}(a,x,y) &= 18D_1^2C_2+15S_6C_2-6D_1C_1D_2+4C_0D_2^2+27D_1S_4-6C_1S_9,\\
W_{11}(a,x,y) &= 9C_0D_3^5-6D_3^4(C_1D_2-S_7)+4C_2D_3^3(D_2^2+S_{14}-2S_{15})-\\
&\quad -12C_3D_3^2[5D_2S_{14}-4D_2S_{15}-7(S_{14},C_2)^{(1)}],\\
W_{12}(a,x,y) &= -480T_6T_8+9T_{135}-40T_2T_{74}-15T_2T_{75},
\end{aligned}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 2C_1D_2D_3-9C_0(S_{25}+2D_3^2)+4C_2(9D_1D_3+S_{14})-3C_3(6D_1D_2+5S_8)+36D_3S_4,\\
Z_2 &= 12D_1S_{17}+2D_2(3S_{11}-2S_{14})+6D_3(S_8-6S_5)-9(S_{25},C_0)^{(1)},\\
Z_3 &= 48D_1^3C_3+12D_1^2(C_1D_3-C_2D_2)+36D_1(C_0S_{17}-C_3S_6)-16D_2^2S_2-16S_2S_{14}+\\
&\quad +2C_0D_2(3S_{11}+2S_{14})+3D_3(8D_2S_1+3C_0S_8-2C_1S_6)-9S_4S_8\\
&\quad -216C_3(S_5,C_0)^{(1)})+6C_2(D_2S_6-4(S_{14},C_0)^{(1)})+54D_1D_2(S_4+D_3C_0).
\end{aligned}
$$

Polinoamele

$$
\begin{aligned}
A_1 &= S_{24}/288, \quad A_2 = S_{27}/72, \; A_3 = \big(72D_1A_2 + \big(S_{22}, D_2\big)^{(1)}\big)/24,\\
A_4 &= \big[9D_1(S_{24}-288A_2)+4\big(9S_{11}-2S_{14}, D_3\big)^{(2)}+8\big(3S_{18}-S_{20}-4S_{22}, D_2\big)^{(1)}\big]/2^7/3^3,\\
A_5 &= \big(S_{23}, C_3\big)^{(4)}/2^7/3^5, \quad A_6 = \big(S_{26}, D_3\big)^{(2)}/2^5/3^3
\end{aligned}
$$

sunt invarianţi afini, în timp ce polinoamele

$$
\begin{aligned}
T_1 &= C_3, \quad T_2 = D_3, \quad T_3 = S_{23}/18, \quad T_4 = S_{25}/6, \quad T_5 = S_{26}/72,\\
T_6 &= \big[3C_1(D_3^2 - 9T_3 + 18T_4) - 2C_2(2D_2D_3 - S_{17} + 2S_{19} - 6S_{21}) +\\
&\quad +2C_3(2D_2^2 - S_{14} + 8S_{15})\big]/2^4/3^2,\\
T_8 &= \big[5D_2(D_3^2 + 27T_3 - 18T_4) + 20D_3S_{19} + 12\big(S_{16}, D_3\big)^{(1)} - 8D_3S_{17}\big]/5/2^5/3^3,\\
T_9 &= \big[9D_1(9T_3-18T_4-D_3^2)+2D_2(D_2D_3-3S_{17}-S_{19}-9S_{21})+18\big(S_{15}, C_3\big)^{(1)}-\\
&\quad -6C_2(2S_{20} - 3S_{22}) + 18C_1S_{26} + 2D_3S_{14}\big]/2^4/3^3,\\
T_{11} &= \big[\big(D_3^2 - 9T_3 + 18T_4, C_2\big)^{(2)} - 6\big(D_3^2 - 9T_3 + 18T_4, D_2\big)^{(1)} - 12\big(S_{26}, C_2\big)^{(1)} +\\
&\quad +12D_2S_{26} + 432(A_1 - 5A_2)C_2\big]/2^7/3^4,\\
T_{13} &= \big[27(T_3, C_2)^{(2)} - 18(T_4, C_2)^{(2)} + 48D_3S_{22} - 216(T_4, D_2)^{(1)} + 36D_2S_{26} -\\
&\quad -1296C_2A_1 - 7344C_2A_2 + (D_3^2, C_2)^{(2)}\big]/2^7/3^4,\\
T_{14} &= \big[\big(8S_{19} + 9S_{21}, D_2\big)^{(1)} - D_2(8S_{20} + 3S_{22}) + 18D_1S_{26} + 1296C_1A_2\big]/2^4/3^3,\\
T_{15} &= 8\big(9S_{19} + 2S_{21}, D_2\big)^{(1)} + 3\big(9T_3 - 18T_4 - D_3^2, C_1\big)^{(2)} - 4\big(S_{17}, C_2\big)^{(2)} +\\
&\quad +4\big(S_{14} - 17S_{15}, D_3\big)^{(1)} - 8\big(S_{14} + S_{15}, C_3\big)^{(2)} + 432C_1(5A_1 + 11A_2) +\\
&\quad +36D_1S_{26} - 4D_2(S_{18} + 4S_{22})\big]/2^6/3^3,\\
T_{21} &= \big(T_8, C_3\big)^{(1)}, \quad T_{23} = \big(T_6, C_3\big)^{(2)}/6, \quad T_{24} = \big(T_6, D_3\big)^{(1)}/6,\\
T_{26} &= \big(T_9, C_3\big)^{(1)}/4, \quad T_{30} = \big(T_{11}, C_3\big)^{(1)}, \quad T_{31} = \big(T_8, C_3\big)^{(2)}/24,\\
T_{32} &= \big(T_8, D_3\big)^{(1)}/6, \quad T_{36} = \big(T_6, D_3\big)^{(2)}/12, \quad T_{37} = \big(T_9, C_3\big)^{(2)}/12,\\
T_{38} &= \big(T_9, D_3\big)^{(1)}/12, \quad T_{39} = \big(T_6, C_3\big)^{(3)}/2^4/3^2, \quad T_{42} = \big(T_{14}, C_3\big)^{(1)}/2,\\
T_{44} &= \big((S_{23}, C_3)^{(1)}, D_3\big)^{(2)}/5/2^6/3^3,\\
T_{74} &= \big[27C_0(9T_3 - 18T_4 - D_3^2)^2 + C_1\big(- 62208T_{11}C_3 - 3(9T_3 - 18T_4 - D_3^2) \times\\
&\quad \times(2D_2D_3 - S_{17} + 2S_{19} - 6S_{21})\big) + 20736T_{11}C_2^2 + C_2(9T_3 - 18T_4 - D_3^2) \times\\
&\quad \times(8D_2^2+54D_1D_3-27S_{11}+27S_{12}-4S_{14}+32S_{15})-54C_3(9T_3-18T_4-D_3^2) \times\\
&\quad \times(2D_1D_2 - S_8 + 2S_9) - 54D_1(9T_3 - 18T_4 - D_3^2)S_{16} -\\
&\quad -576T_6(2D_2D_3 - S_{17} + 2S_{19} - 6S_{21})\big]/2^8/3^4, \quad T_{133} = (T_{74}, C_3)^{(1)},
\end{aligned}
$$

$$T_{136} = \big(T_{74}, C_3\big)^{(2)}/24, \quad T_{137} = \big(T_{74}, D_3\big)^{(1)}/6, \quad T_{140} = \big(T_{74}, D_3\big)^{(2)}/12,$$
$$T_{141} = \big(T_{74}, C_3\big)^{(3)}/36, \quad T_{142} = \big((T_{74}, C_3)^{(2)}, C_3\big)^{(1)}/72$$

sunt elementele bazei polinomiale a T-comitanţilor până la gradul 6 pentru sistemele (1.1), construite de Iu. Calin [23].

Considerăm operatorul diferenţial $\mathcal{L} = x \cdot \mathbf{L}_2 - y \cdot \mathbf{L}_1$ [3] ce acţionează pe $\mathbb{R}[a, x, y]$, unde $\mathbf{L}_1 = 3a_{00}\frac{\partial}{\partial a_{10}} + 2a_{10}\frac{\partial}{\partial a_{20}} + a_{01}\frac{\partial}{\partial a_{11}} + \frac{1}{3}a_{02}\frac{\partial}{\partial a_{12}} + \frac{2}{3}a_{11}\frac{\partial}{\partial a_{21}} + a_{20}\frac{\partial}{\partial a_{30}} + 3b_{00}\frac{\partial}{\partial b_{10}} + 2b_{10}\frac{\partial}{\partial b_{20}} + b_{01}\frac{\partial}{\partial b_{11}} + \frac{1}{3}b_{02}\frac{\partial}{\partial b_{12}} + \frac{2}{3}b_{11}\frac{\partial}{\partial b_{21}} + b_{20}\frac{\partial}{\partial b_{30}}$, $\mathbf{L}_2 = 3a_{00}\frac{\partial}{\partial a_{01}} + 2a_{01}\frac{\partial}{\partial a_{02}} + a_{10}\frac{\partial}{\partial a_{11}} + \frac{1}{3}a_{20}\frac{\partial}{\partial a_{21}} + \frac{2}{3}a_{11}\frac{\partial}{\partial a_{12}} + a_{02}\frac{\partial}{\partial a_{03}} + 3b_{00}\frac{\partial}{\partial b_{01}} + 2b_{01}\frac{\partial}{\partial b_{02}} + b_{10}\frac{\partial}{\partial b_{11}} + \frac{1}{3}b_{20}\frac{\partial}{\partial b_{21}} + \frac{2}{3}b_{11}\frac{\partial}{\partial b_{12}} + b_{02}\frac{\partial}{\partial b_{03}}$.

Cu ajutorul acestui operator şi invariantului afin $\mu_0 = \text{Resultant}_x\big(p_3(a, x, y), q_3(a, x, y)\big)/y^9$ se construiesc următoarele polinoame: $\mu_i(a, x, y) = \frac{1}{i!}\mathcal{L}^{(i)}(\mu_0)$, $i = 1, .., 9$, unde $\mathcal{L}^{(i)}(\mu_0) = \mathcal{L}(\mathcal{L}^{(i-1)}(\mu_0))$ şi $\mathcal{L}^{(0)}(\mu_0) = \mu_0$. Aceste polinoame sunt responsabile de multiplicitatea totală a punctelor singulare finite ale unui sistem cubic [2, 3]. Mai mult decât atât, $\mu_i(a, x, y) = 0$, pentru fiecare $i = 0, ...9$, dacă şi numai dacă acest sistem este degenerat.

În acest capitol de asemenea se descrie schema demonstraţiilor teoremelor de bază. Fie $L(x, y) = Ux + Vy + W = 0$ o dreaptă invariantă a unui sistem cubic (S). Conform definiţiei dreptei invariante avem $UP(x, y) + VQ(x, y) \equiv (Ux + Vy + W)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)$. Această identitate produce următoarele 10 relaţii: $Eq_1 = (a_{30} - A)U + b_{30}V = 0$, $Eq_2 = (3a_{21} - 2B)U + (3b_{21} - A)V = 0$, $Eq_3 = (3a_{12} - C)U + (3b_{12} - 2B)V = 0$, $Eq_4 = a_{03}U + (b_{03} - C)V = 0$, $Eq_5 = (a_{20} - D)U + b_{20}V - AW = 0$, $Eq_6 = (2a_{11} - E)U + (2b_{11} - D)V - 2BW = 0$, $Eq_7 = a_{02}U + (b_{02} - E)V - CW = 0$, $Eq_8 = (a_{10} - F)U + b_{10}V - DW = 0$, $Eq_9 = a_{01}U + (b_{01} - F)V - EW = 0$, $Eq_{10} = a_{00}U + b_{00}V - FW = 0$.

În conformitate cu [28], vom numi **configuraţie de drepte invariante** a sistemului (1.1), o mulţime de drepte invariante ale sistemului, fiecare dreaptă dotată cu propria sa multiplicitate, şi împreună cu toate punctele singulare reale ale acestui sistem aflate pe aceste drepte invariante, fiecare punct considerat cu propria sa multiplicitate.

Un sistem cubic din $\mathbb{CSL}_8$ formează o *configuraţie de tipul* $(3, 2, 1, 1)$ dacă există un triplet şi o pereche de drepte invariante paralele şi în plus încă două drepte, fiecare mulţime de drepte orientată diferit una faţă de alta. În acelaşi mod sunt definite *configuraţiile de tipul* $(3, 3, 1)$, $(3, 2, 2)$ şi $(2, 2, 2, 1)$. Aceste patru tipuri de configuraţii acoperă toate posibilităţile de configuraţii formate din 8 drepte invariante. Menţionăm că, în toate aceste configuraţii, nu este indicată dreapta de la infinit.

În conformitate cu [25, Lemma 5], întreaga familie de sisteme cubice a fost divizată în nouă subfamilii în funcţie de numărul punctelor singulare de la infinit (finite sau infinite) a sistemelor (S), care sunt determinate de factorii liniari ai polinomului $C_3(x, y) = yp_3(x, y) - xq_3(x, y)$. Pentru fiecare subfamilie demostraţia teoremelor de bază a decurs după următorii paşi:

(i) se construiesc omogenităţile cubice $(\tilde{P}_3, \tilde{Q}_3)$ ale sistemelor care satisfac condiţiile necesare de a avea un număr dat de triplete sau/şi perechi de drepte invariante în direcţia respectivă, furnizate de Teorema 1.2 a tezei de doctor;

(ii) fixând în sistem părţile cubice $\dot{x} = \tilde{P}_3,\ \dot{y} = \tilde{Q}_3$, se ataşează toţi celălaţi termeni (adică pătratici, lineari şi constanţi) şi în continuare, utilizând ecuaţiile $Eq_1 - Eq_{10}$ se determină aceşti termeni, pentru a avea numărul necesar de drepte invariante în configuraţia dată; cu alte cuvinte, în etapa a doua se construiesc formele canonice ale sistemelor cu drepte invariante în configuraţia respectivă;

(iii) pentru sistemele cubice, construite la etapa precedentă, se construiesc condiţiile necesare şi suficiente afin invariante de realizare ale configuraţiilor respective;

(iv) în cazul existenţei dreptelor invariante multiple ce se află într-o potenţială configuraţie, se construiesc sistemele perturbate corespunzătoare, ce posedă 8 drepte invariante distincte (considerându-se şi dreapta de la infinit).

În secţiunea 2.2 a acestui capitol, în funcţie de configuraţii de drepte invariante, se enunţă şi se demonstrează teorema de clasificare Teorema A (Main Theorem A) a sistemelor cubice din $\mathbb{CSL}_8$ care au patru $\mathbb{ISP}s$. Această clasificare, obţinută după modulul grupului de transformări afine reale şi scalarea timpului, este efectuată cu polinoame afin invariante (invarianţi şi comitanţi). Pentru această familie de sisteme, de asemenea, se construiesc sistemele canonice asociate configuraţiilor.

Teorema A. *Fie un sistem cubic nedegenerat ($\sum_{i=0}^{9} \mu_i^2 \neq 0$) ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală opt, considerând dreapta de la infinit cu multiplicitatatea ei, şi fie că acest sistem are patru puncte distincte la infinit. Atunci:*

I. *Sistemul posedă doar una dintre cele 17 configuraţii posibile Config. 8.1 – Config. 8.17 de drepte invariante, prezentate în Figura 2.1;*

II. *Acest sistem posedă configuraţia specifică Config. 8.j ($j \in \{1, 2, \dots, 17\}$ dacă şi numai dacă condiţiile corespunzătoare aduse mai jos sunt satisfăcute. Mai mult decât atât, cu ajutorul unei transformări afine şi rescalării timpului, sistemul poate fi adus la forma canonică asociată configuraţiei:*

1) *Patru puncte singulare la infinit, reale şi distincte* $\Leftrightarrow \mathcal{D}_1 > 0,\ \mathcal{D}_2 > 0,\ \mathcal{D}_3 > 0:$

A_1) *Configuraţia de tipul* $(3,3,1)$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{K}_1 = 0,\ \mathcal{K}_2 \neq 0;$

- *Config. 8.1* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_3 > 0$: $\dot{x} = x(x+1)(x-a),\ \dot{y} = y(y+1)(y-a),\ 0<a\neq 1;$
- *Config. 8.2* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_3 < 0$: $\dot{x} = x\big[(x+a)^2+1\big],\ \dot{y} = y\big[(y+a)^2+1\big],\ a\neq 0;$
- *Config. 8.3* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_3 = 0$: $\dot{x} = x^2(1+x),\quad \dot{y} = y^2(1+y);$

A_2) *Configuration of type* $(3,2,1,1)$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}_5 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_6 = 0,\quad \mathcal{D}_4 \neq 0:$

- *Config. 8.4* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_1 \neq 0$ *şi* $\mathcal{K}_7 > 0$: $\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(x+r), \quad r > 0, \\ \dot{y} = y(y-1)\big[(1-r)x + ry + r\big]; \end{cases}$
- *Config. 8.5* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_1 \neq 0$ *şi* $\mathcal{K}_7 < 0$: $\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(x+r), \quad r < 0, \\ \dot{y} = y(y-1)\big[(1-r)x + ry + r\big]; \end{cases}$
- *Config. 8.6* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_1 = 0$: $\dot{x} = rx^3,\quad \dot{y} = (r-1)xy^2 + y^3,\ r \neq 0;$

A_3) *Configuraţia de tipul* $(2,2,2,1)$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}_3 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_8 = 0,\quad \mathcal{D}_4 \neq 0:$

- *Config. 8.7* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_9 > 0$: $\begin{cases} \dot{x} = (x^2-1)(rx+2y+ry),\ r(r^2-1) \neq 0, \\ \dot{y} = (y^2-1)(x+2rx+y), (r+2)(2r+1)\neq 0; \end{cases}$
- *Config. 8.8* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_9 < 0$: $\begin{cases} \dot{x} = (x^2+1)(rx+2y+ry),\ r(r^2-1) \neq 0, \\ \dot{y} = (y^2+1)(x+2rx+y), (r+2)(2r+1)\neq 0; \end{cases}$
- *Config. 8.9* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_9 = 0$: $\begin{cases} \dot{x} = x^2(rx+2y+ry),\ r(r^2-1) \neq 0, \\ \dot{y} = y^2(x+2rx+y),\ (r+2)(2r+1) \neq 0; \end{cases}$

2) *Două puncte singulare la infinit reale şi două complexe* $\Leftrightarrow \mathcal{D}_1 < 0:$

A_4) *Configuraţia de tipul* $(3,3,1)$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{K}_1 = 0,\ \mathcal{K}_2 \neq 0;$

- *Config. 8.10* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_3 > 0$: $\begin{cases} \dot{x} = (1-r^2)x/4 + x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} = (1-r^2)y/4+2xy+3x^2y-y^3, r^2\neq 0, 1/9,\ 1; \end{cases}$
- *Config. 8.11* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_3 < 0$: $\begin{cases} \dot{x} = (1+r^2)x/4 + x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} = (1+r^2)y/4 + 2xy + 3x^2y - y^3, \quad r \neq 0; \end{cases}$
- *Config. 8.12* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_3 = 0$: $\begin{cases} \dot{x} = x/4 + x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} = y/4 + 2xy + 3x^2y - y^3; \end{cases}$

A_5) *Configuraţia de tipul* $(3,2,1,1)$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}_5 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_6 = 0,\quad \mathcal{D}_4 \neq 0:$

- *Config. 8.13* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_1 \neq 0$: $\begin{cases} \dot{x} = (1+r^2)x\big[(x+r)^2+1\big], \quad r \neq 0, \\ \dot{y} = (1+r^2)^2y + 2r(1+r^2)xy - rx^3 \\ \qquad + r^2x^2y - rxy^2 - y^3; \end{cases}$

- *Config. 8.14* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_1 = 0$: $\begin{cases} x = (1+r^2)x^3, \quad r \neq 0, \\ \dot{y} = -rx^3 + r^2x^2y - rxy^2 - y^3; \end{cases}$

A_6) *Configuraţia de tipul* $(2,2,2,1)$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}_3 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_8 = 0, \;\; \mathcal{D}_4 \neq 0$:

- *Config. 8.15* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_9 > 0$: $\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(1+r^2-2x+2ry), \; r \neq 0, \\ \dot{y} = -(1+r^2)y + (3+r^2)xy - rx^3 \\ \qquad -3x^2y - 2ry^2 + rxy^2 - y^3; \end{cases}$

- *Config. 8.16* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_9 < 0$: $\begin{cases} \dot{x} = 2(1+x^2)(ry - x - r), \; r \neq 0, \\ \dot{y} = r(r^2+3)x + (1-r^2)y - rx^3 \\ \qquad -3x^2y + rxy^2 - y^3; \end{cases}$

- *Config. 8.17* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_9 = 0$: $\begin{cases} \dot{x} = -2x^2(x - ry), \; r \neq 0, \\ \dot{y} = -2ry^2 - rx^3 - 3x^2y + rxy^2 - y^3; \end{cases}$

III. *Acest sistem nu poate avea drepte invariante (considerând şi dreapta de la infinit) în configuraţia de tipul* $(3,2,2)$ *şi nici 4 singularităţi infinite, toate complexe.*

Remarca 2.3. Pe discurile Poincaré dreptele invariante reale (complexe) sunt reprezentate prin linii continuie (întrerupte). Dacă dreapta invariantă are multiplicitatea $k > 1$, atunci numărul k apare lângă dreapta dată şi această dreaptă este mai îngroşată. Punctele singulare reale situate pe drepte invariante vor fi reprezentate împreună cu multiplicitatea sa, care va fi indicată în paranteze rotunde. Vom nota cu (a, b) numărul maxim de puncte singulare a (respectiv b) infinite (respectiv finite), care pot fi obţinute prin perturbarea punctelor multiple.

Capitolul 3 este dedicat sistemelor cubice din $\mathbb{CSL}_8$ cu 3 $\mathbb{ISP}s$ sau un singur punct. Astfel, sunt enunţate şi demonstrate două teoreme, şi anume: Teorema B (în cazul sistemelor cu 3 $\mathbb{ISP}s$) şi Teorema C (în cazul sistemelor cu un punct singular de la infinit). Se detectează toate configuraţiile posibile de drepte invariante pentru aceste subfamilii de sisteme cubice şi pentru fiecare dintre aceste configuraţii se construiesc criteriile afin invariante de realizare, precum şi formele canonice asociate configuraţiei . Aici, pentru prima dată, apare multiplicitatea, aşa numită, "neparalelă" a dreptei. Pentru a demonstra că o dreapta multiplă într-adevăr are mutiplicitatea dată, se construiesc sistemele perturbate corespunzătoare formelor canonice, asociate configuraţiilor de drepte invariante.

Teorema B. *Dacă un sistem cubic nedegenerat (* $\sum_{i=0}^{9} \mu_i^2 \neq 0$*) posedă drepte invariante de mutiplicitate totală 8, considerând dreapta de la infinit cu multiplicitatea ei, şi, în plus, acest sistem are trei puncte singulare la infinit, adică au loc condiţiile:* $\mathcal{D}_1 = 0, \;\; \mathcal{D}_3 \neq 0$*, atunci:*

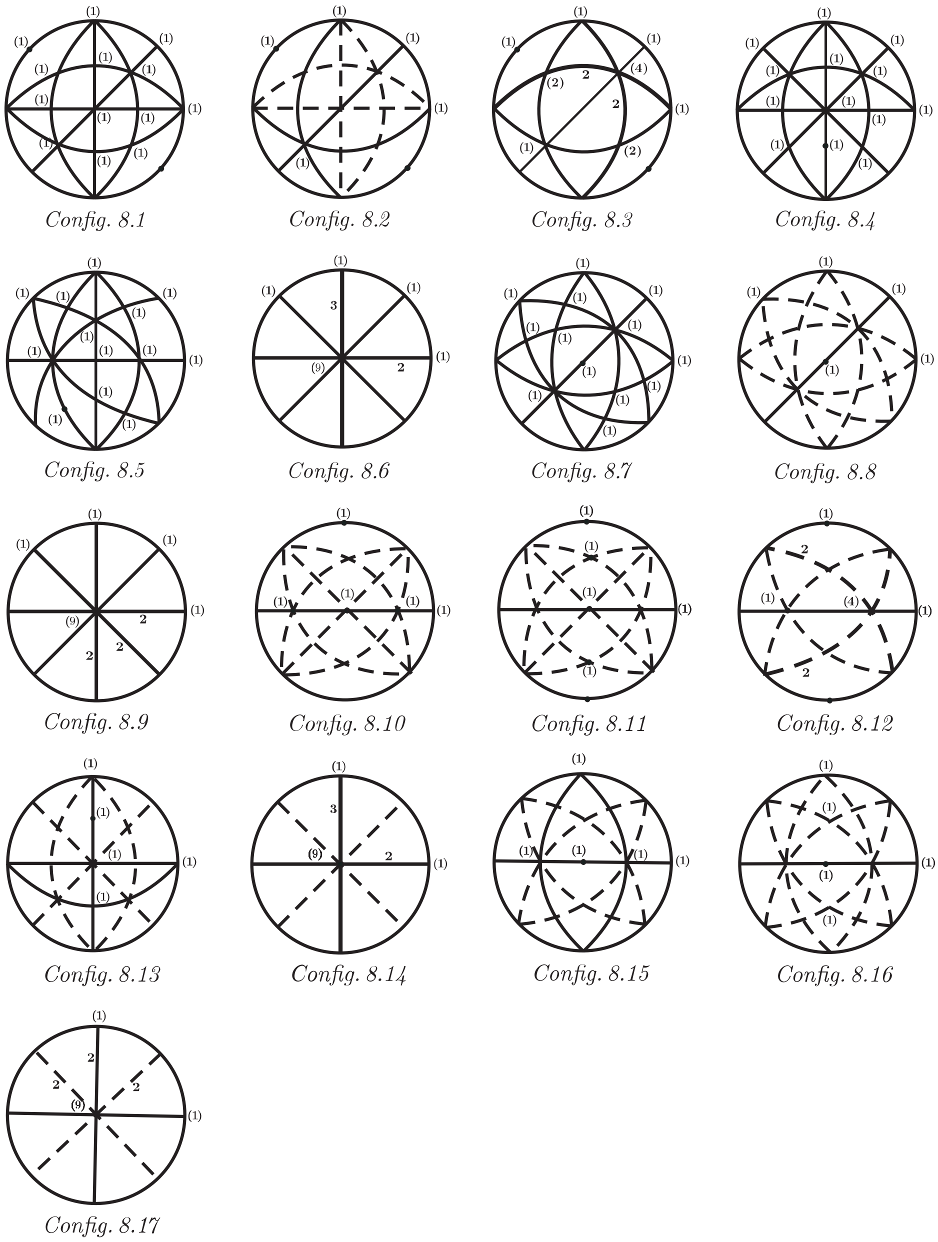

Fig. 2.1. Configuraţii de drepte invariante ale sistemelor din $\mathbb{CSL}_8$ cu 4 $\mathbb{ISP}s$

I. *Toate punctele singulare ale acetui sistem sunt reale şi sistemul poate avea una dintre cele 5 configuraţii prezentate în Figura 3.1, specificate împreună cu condiţiile afin invariante de realizare ale lor. Mai mult decât atât, cu ajutorul unei transformări afine şi rescalării timpului, sistemul poate fi adus la una dintre formele canonice de mai jos, ataşate configuraţiilor;*

II. *Sistemul nu poate avea configuraţii (potenţiale) de drepte invariante de multiplicitate totală opt de tipul* $(3,3,1)$ *şi* $(3,2,2)$*, dar poate avea:*

B_1) *Configuraţia de tipul* $(3,2,1,1)$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_5 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_6 = 0$;

- *Config. 8.18* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_7 \neq 0$, $\mathcal{L}_1 \neq 0$: $\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - 9x - xy - y^2), \\ \dot{y} = -y^2(9+y); \end{cases}$

- *Config. 8.19* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_7 \neq 0$, $\mathcal{L}_1 = 0$: $\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - xy - y^2), \\ \dot{y} = -y^3; \end{cases}$

- *Config. 8.20* $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} \mathcal{K}_7 = 0,\ \mathcal{L}_1 \neq 0, \\ \mathcal{V}_5 = \mathcal{L}_6 = 0 \end{matrix}$: $\begin{cases} \dot{x} = (1-x)x(1+y), \\ \dot{y} = y(1 - x + y - x^2); \end{cases}$

B_2) *Configurattia de tipul* $(2,2,2,1)$ $\Leftrightarrow \mathcal{V}_3 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_8 = 0, \quad \mathcal{L}_7 \neq 0;$

- *Config. 8.21* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_9 > 0$: $\begin{cases} \dot{x} = (x^2-1)(x+y), \\ \dot{y} = 2x(y^2-1); \end{cases}$

- *Config. 8.22* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}_9 < 0$: $\begin{cases} \dot{x} = (1+x^2)(x+y), \\ \dot{y} = 2x(1+y^2). \end{cases}$

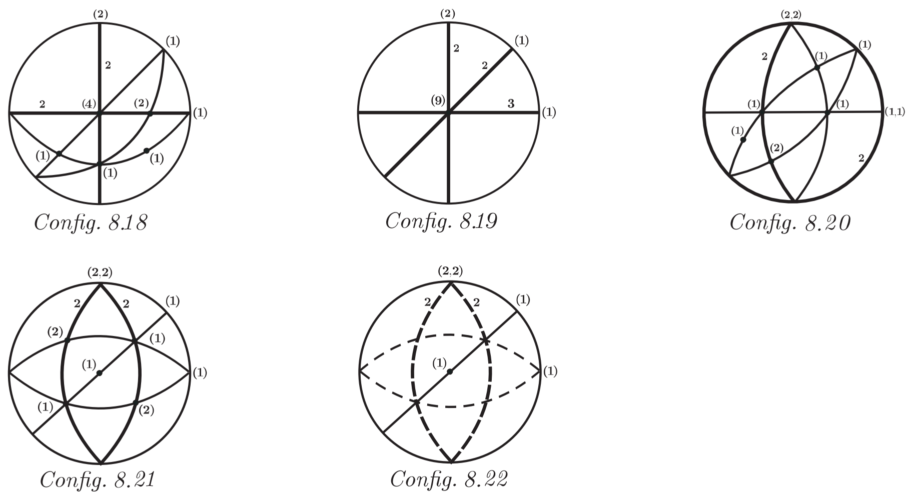

Fig. 3.1. Configuraţii de drepte invariante din $\mathbf{CSL_8}$ cu 3 $\mathbb{ISP}s$

Teorema C. *Fie un sistem nedegenerat ($\sum_{i=0}^{9} \mu_i^2 \neq 0$) care are drepte invariante de multiplicitate totală 8 (incluzând dreapta de la infinit şi multiplicitatea ei) şi fie că acest sistem are exact un punct singular la infinit, determinat de un factor real de gradul patru a polinomului $C_3(x,y)$, adică au loc condiţiile $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = 0$. Atunci sistemul posedă configuraţia specifică Config. 8.j ($j \in \{48, \ldots, 51\}$) (vezi Figura 3.2) dacă şi numai dacă condiţiile corespunzătoare specificate mai jos sunt satisfăcute. Mai mult decât atât, cu ajutorul unei transformări afine şi rescalării timpului, el poate fi adus la forma canonică corespunzătoare, asociată configuraţiei:*

Config. 8.48 $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{matrix} \mathcal{V}_1 = \mathcal{L}_2 = N_{23} = W_1 = W_2 = \\ = W_3 = W_4 = 0 \end{matrix} \right]$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -2y - x^3; \end{cases}$

$$\textit{Config. 8.49} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 = \mathcal{L}_2 = N_{23} = W_1 = W_2 = \\ = N_{16} = W_5 = 0,\ W_6 \neq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y - x^2 - x^3; \end{cases}$$

$$\textit{Config. 8.50} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 = \mathcal{L}_2 = N_3 = W_7 = W_8 = \\ = W_9 = W_{10} = 0,\ N_{23} \neq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = x(1+x), \\ \dot{y} = y + xy - x^3; \end{cases}$$

$$\textit{Config. 8.51} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V}_5 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_8 = \mathcal{K}_9 = \\ = N_2 = \mathcal{K}_6 = W_{11} = W_{12} = 0, \\ \mathcal{V}_1 \neq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = x^2(1+x), \\ \dot{y} = -1 - 3x + x^2y - x^3. \end{cases}$$

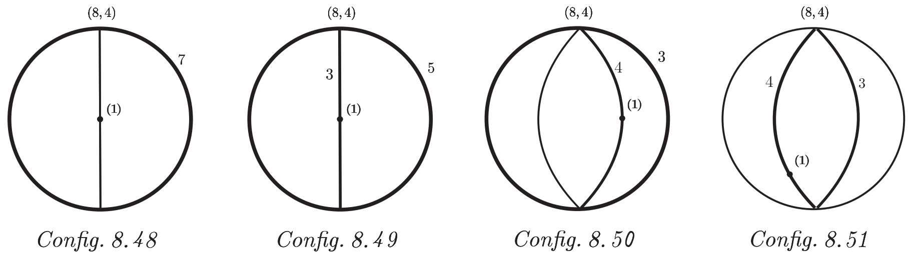

Fig. 3.2. Configuraţii de drepte invariante din CSL$_8$ cu 1 $\mathbb{ISP}$

În **Capitolul 4** se enunţă şi se demonstrează teorema de clasificare pentru sistemele cubice din $\mathbb{CSL}_8$ care conţin două puncte singulare de la infinit. Se construiesc toate configuraţiile posibile de drepte invariante şi condiţiile necesare şi suficiente, afin invariante, de realizare ale fiecărei configuraţii depistate. Pentru fiecare formă canonică construită, asociată configuraţiei respective, se construiesc sistemele perturbate.

Teorema D. *Fie un sistem cubic nedegenerat ($\sum_{i=0}^{9} \mu_i^2 \neq 0$) ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 8, enumerându-se şi dreapta de la infinit cu multiplicitatea ei. Adiţional, fie că acest system are două puncte singulare distincte de la inifint, adică au loc condiţiile $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_3 = 0$ şi $\mathcal{D}_2 \neq 0$. Atunci:*

I. *Sistemul nu poate avea puncte singulare de la infinit determinate de doi factori de gradul doi ai polinomului $C_3(x, y)$;*

II. *Acest sistem are singularităţi infinite determinate de un factor triplu şi unul simplu al polinomului $C_3(x, y)$ (adică $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_4 = 0$ şi $\mathcal{D}_2 \neq 0$) şi posedă exact 25 configuraţii posibile de drepte invariante Config. 8.23 – Config. 8.47, prezentate în Figura 4.1;*

III. *Sistemul are configuraţia specifică Config. 8.j ($j \in \{23, 24, \ldots, 47\}$) de drepte invariante dacă şi numai dacă condiţiile de mai jos, specificate lângă configuraţie, sunt satisfăcute. Mai mult decât atât, prin aplicarea unei transformări afine şi rescalării timpului, acest sistem poate fi adus la forma canonică, asociată configuraţiei:*

- *Config. 8.23* $\Leftrightarrow N_2N_3 \neq 0, \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_3 = \mathcal{K}_5 = N_1 = N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 0$:
$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)x(1+x), \\ \dot{y} = x - y + x^2 + 3xy; \end{cases}$$

- *Config. 8.24 - 8.27* $\Leftrightarrow N_2 \neq 0, N_3 = 0,\ \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_3 = \mathcal{K}_5 = N_1 = N_4 = N_6 = N_8 = 0, N_9 \neq 0$:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(r + 2x + x^2), \\ \dot{y} = (r+2x)y,\ r(9r-8) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \textit{Config. 8.24} \Leftrightarrow N_{11} < 0\ (r<0); \\ \textit{Config. 8.25} \Leftrightarrow N_{10} > 0, N_{11} > 0\ (0<r<1); \\ \textit{Config. 8.26} \Leftrightarrow N_{10} = 0\ (r=1); \\ \textit{Config. 8.27} \Leftrightarrow N_{10} < 0\ (r>1); \end{cases}$$

- *Config. 8.28 - 8.30* $\Leftrightarrow N_2 \neq 0, N_3 = 0,\ \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_3 = \mathcal{K}_5 = N_1 = N_5 = N_8 = N_{12} = 0, N_{13} \neq 0$:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(r - 2x + x^2), (9r-8) \neq 0 \\ \dot{y} = 2y(x-r), r(r-1) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \textit{Config. 8.28} \Leftrightarrow N_{15} < 0\ (r<0); \\ \textit{Config. 8.29} \Leftrightarrow N_{14} < 0, N_{15} > 0\ (0<r<1); \\ \textit{Config. 8.30} \Leftrightarrow N_{14} > 0\ (r>1); \end{cases}$$

- *Config. 8.31, 8.32* $\Leftrightarrow N_2 = N_3 = 0,\ \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_3 = \mathcal{K}_5 = N_1 = N_{17} = N_{18} = 0, N_{10}N_{16} \neq 0$:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(r + x^2), \\ \dot{y} = x - 2ry,\ r \in \{-1, 1\}; \end{cases} \quad \begin{cases} \textit{Config. 8.31} \Leftrightarrow N_{10} < 0\ (r=-1); \\ \textit{Config. 8.33} \Leftrightarrow N_{10} > 0,\ (r=1); \end{cases}$$

- *Config. 8.33* $\Leftrightarrow N_2 = N_3 = 0, \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_3 = \mathcal{K}_5 = N_1 = N_{10} = N_{17} = N_{18} = 0, N_{16} \neq 0$:
$$\begin{cases} \dot{x} = x^3, \\ \dot{y} = 1 + x; \end{cases}$$

- *Config. 8.34 - 8.38* $\Leftrightarrow N_2 = N_3 = 0, \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_3 = \mathcal{K}_5 = N_1 = N_{16} = N_{19} = 0, N_{18} \neq 0$:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(r + x + x^2), \\ \dot{y} = 1 + ry, (9r-2) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \textit{Config. 8.34} \Leftrightarrow N_{21} < 0\ (r<0); \\ \textit{Config. 8.35} \Leftrightarrow N_{20} > 0, N_{21} > 0\ (0<r<1/4); \\ \textit{Config. 8.36} \Leftrightarrow N_{20} = 0\ (r=1/4); \\ \textit{Config. 8.37} \Leftrightarrow N_{20} < 0\ (r>1/4); \\ \textit{Config. 8.38} \Leftrightarrow N_{21} = 0\ (r=0); \end{cases}$$

- *Config. 8.39, 8.40* $\Leftrightarrow \mathcal{V}_1 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = N_{22} = N_{23} = N_{24} = 0,\ \mathcal{V}_3\mathcal{K}_6 \neq 0$:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(r + x + x^2), \\ \dot{y} = (r + 2x + 3x^2)y; \end{cases} \quad \begin{cases} \textit{Config. 8.39} \Leftrightarrow \mu_6 < 0\ (r<1/4); \\ \textit{Config. 8.40} \Leftrightarrow \mu_6 > 0\ (r>1/4); \end{cases}$$

- *Config. 8.41 - 8.43* $\Leftrightarrow \mathcal{V}_1 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = N_{22} = N_{23} = \mathcal{K}_6 = 0,\ \mathcal{V}_3N_{24} \neq 0$:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(r + x^2), \\ \dot{y} = 1 + ry + 3x^2y; \end{cases} \quad \begin{cases} \textit{Config. 8.41} \Leftrightarrow \mu_6 < 0\ (r<0); \\ \textit{Config. 8.42} \Leftrightarrow \mu_6 = 0\ (r=0); \\ \textit{Config. 8.43} \Leftrightarrow \mu_6 > 0\ (r>0); \end{cases}$$

- *Config. 8.44 - 8.47* $\Leftrightarrow \mathcal{V}_5 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_6 = N_{24} = N_{25} = N_{26} = N_{27} = 0$, $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1+x)[r+2+(r+1)x], \\ \dot{y} = [r+2+(3+2r)x+rx^2]y; \end{cases} \quad \begin{cases} \textit{Config. 8.44} \Leftrightarrow \mu_6 < 0 \ (-2 < r < -1); \\ \textit{Config. 8.45} \Leftrightarrow \mu_6 > 0, N_{28} < 0 \ (r < -2); \\ \textit{Config. 8.46} \Leftrightarrow \mu_6 > 0, N_{28} > 0 \ (r > -1); \\ \textit{Config. 8.47} \Leftrightarrow \mu_6 = 0 \ (r = -1). \end{cases}$$

În capitolul 2 de asemenea a fost depistată o nouă clasa de sisteme cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală 9, care s-a dovedit a fi omisă din lista configuraţiilor obţinute de J.Llibre şi N.Vulpe în clasificarea lor efectuată în [25, 2006]. Clasa dată este descrisă de sistemul (S_9): $\dot{x} = x(2+3x)(4+3x)/9, \quad \dot{y} = 2(4+9x)y/9$ şi posedă următoarele drepte invariante: $x = 0$ (triplă), $x = -2/3$ (dublă), $x = -4/3$ and $y = 0$ (ambele simple) şi dreapta de la infinit: $Z = 0$ (dublă). În Figura 4.16 este reprezentată configuraţia de drepte invariante ce corespunde systemului (S_9).

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

Teza de doctor este dedicată problemei clasificării unei familii de sisteme cubice care posedă drepte invariante în raport cu configuraţiile acestor drepte. În studiul calitativ al ecuaţiilor diferenţiale această problemă, care este foarte dificilă chiar şi în cazul simplist al sistemelor diferenţiale pătratice, este parţial motivată de problema clasificării topologice a tuturor portretelot fazice ale sistemelor cubice.

În general, sistemele diferentiale cubice sunt mai greu de studiat în comparaţie cu cele pătratice din cauza fenomenelor care pot avea loc în această clasă, însă care nu se întâlnesc în acea pătratică. De exemplu, prezenţa în comun a ciclurilor limită şi singularităţilor care sunt centre este un fenomen care are loc la sisteme cubice, dar nu apare în familia pătratică. În plus, sistemele cubice formează o familie de sisteme care depinde de 20 parametri, în timp ce familia de sisteme diferenţiale pătratice depinde doar de 12 parametri.

În această lucrare se consideră $\mathbb{CSL}_8$ familia de sisteme cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt (considerându-se dreapta de la infinit). Studiul acestor sisteme s-a bazat pe unele concepte, precum: dreapta invariantă, multiplicitatea dreptelor (punctelor singulare, finite şi infinite), cât şi configuraţia de drepte invariante.

Un alt aspect al valorii teoretice şi practice a tezei de doctor este că având toate formele canonice ale sistemelor din $\mathbb{CSL}_8$, construite în lucrare, problema integrabilităţii a unor astfel de sisteme ar putea fi rezolvată. Desigur, ne dăm seama că, la prima vedere, clasa $\mathbb{CSL}_8$ este una foarte specifică, mai mult decât atât cazurile de sisteme integrabile sunt rare, dar după cum a spus Arnold în [1, p.405] " ... aceste cazuri integrabile ne permit să colectăm o cantitate mare de informaţii despre mişcarea în sistemele mult mai importante ... ".

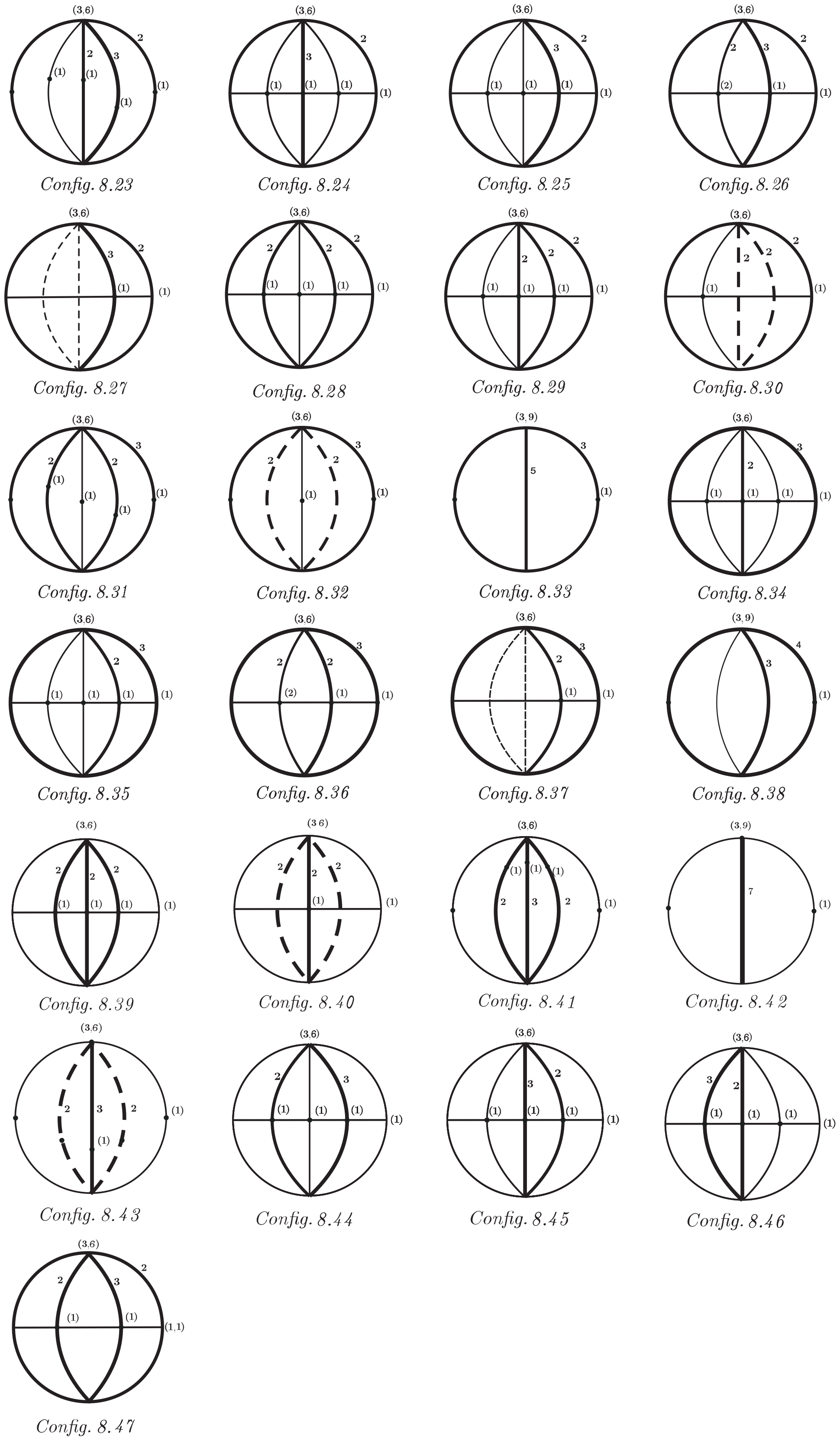

Fig. 4.1. Configuraţii de drepte invariante pentru sistemele din $\mathbf{CSL_8}$ cu 2 $\mathbb{ISP}s$

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în clasificarea completă a familiei de sisteme cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt în raport cu configuraţiile

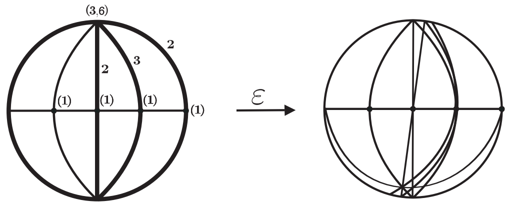

Fig. 4.16. Configuraţia de $\mathbb{IL}s$ ce corespunde sistemului (S_9)

acestor drepte; aceasta clasificare este un element foarte util în vederea clasificării topologice complete ale acestei familii de sisteme şi în vederea studiului integrabilităţii acestor sisteme.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică a cercetărilor din teză constă în faptul că aici pentru prima dată au fost construite toate configuraţiile posibile de drepte invariante pentru sistemele din $\mathbb{CSL}_8$ şi rezultatele obţinute sunt reflectate în lucrările [8-26]. Acestă mulţime de configuraţii obţinute conţine, în calitate de cazuri particulare, toate configuraţiile construite de alţi autori (vezi [26], [29, 30]). De fapt, cercetările efectuate în teză sunt o continuare a studiului sistemelor cubice ce posedă un număr maxim de drepte invariante (adică 9) iniţiat în [25]. Pentru aceasta familie de sisteme au fost depistate 23 configuraţii distincte, însă autorul tezei a detectat o nouă configuraţie de drepte invariante care s-a dovedit a fi omisă în clasificarea efectuată în [25] şi deci, a completat această clasificare. Prin urmare, pentru sistemele din $\mathbb{CSL}_8$ s-au obţinut 51 configuraţii diferite de drepte invariante. Mai exact, au fost detectate 17 (respectiv 5; 25; 4) configuraţii distincte pentru subfamiliile de sisteme cu patru (repectiv trei; două; unul) puncte singulare distincte de la infinit, reale sau/şi complexe. În acelaşi timp au fost construite 33 forme canonice ale sistemelor din $\mathbb{CSL}_8$, dintre care 19 depind de un singur paramentru şi 14 sunt cu coeficienţi constanţi.
De asemenea, pentru a caracteriza vecinătatea sistemelor din $\mathbb{CSL}_8$, au fost construit formele canonice perturbate.

Avantajul elaborărilor noastre este că această clasificare a sistemelor din $\mathbb{CSL}_8$ este dată prin polinoame invariante în raport cu acţiunea grupului de transformări afine şi rescalarea timpului. Toate aceste configuraţii de drepte se disting prin intermediul a 52 polinoame invariante, care au fost construite de autorul lucrării, pe lângă cele 20 polinoame care au fost preluate din [25]. Este demn de menţionat că s-a efectuat un lucru imens deoarece acest proces de consrtuire a polinoamelor invariante necesită timp şi este anevoios. Invarianţii şi comitanţii algebrici permit verificarea pentru orice sistem cubic cu infinitul nedegenerat dacă are sau nu drepte invariante de multiplicitate totală opt şi să precizeze configuraţia de drepte invariante, înzestrată cu punctele singulare reale ale sistemului. Important este faptul că toate calculele pot fi puse în aplicare pe claculator.

De rând cu investigarea complexă realizată asupra problemei clasificării sistemelor din $\mathbb{CSL}_8$, aportul autorului se concretizează şi în o serie de concluzii şi recomandări cu o valoare teoreică şi practică deosebită, şi anume:

Concluzii generale:

1) În cadrul acestui studiu a fost cercetată întreaga familie de sisteme cubice, care posedă drepte invariante de multiplicitate totală 8. S-a arătat că sistemele din această familie, pe care am notat-o prin $\mathbb{CSL}_8$, depind de cel mult un parametru. Pentru a obţine rezultate globale sau generale, s-a folosit teoria invariantţilor a sistemelor diferenţiale polinomiale, dezvoltată de Sibirschi şi şcoala sa. Această metodă ne-a permis să unim într-o diagramă globală unică diagramele de bifurcaţie ale mai multor forme normale necesare în studiul acestei familii.

2) Rezultatul global menţionat mai sus este o diagramă de bifurcare în spaţiul parametrilor de dimensiunea 20 a sistemelor diferenţiale cubice. Acest lucru ne furnizează un algoritm de a decide dacă un sistem cubic aparţine sau nu acestei familii şi în cazul afirmativ ne permite să determinăm eficient configuraţia sa specifică de drepte invariante. S-a demonstrat în teză că această familie de sisteme posedă 51 configuraţii posibile de drepte invariante.

3) Teza de asemenea ne conduce la următoarele rezultate globale noi:

(i) un sistem din $\mathbb{CSL}_8$ posedă la infinit cel puţin un punct singular real;

(ii) un sistem cubic din $\mathbb{CSL}_8$ nu poate avea puncte singulare reale la infinit definite prin doi factori dubli ai polinomului $C_3(x,y) = yP_3(x,y) - xQ(x,y)$.

Rezultatele ştiinţifice obţinute în teză pot fi aplicate în studiul mai adânc al sistemelor cubice care posedă drepte invariante de multiplicitate totală opt, enumerându-se şi dreapta de la infinit. Se propun următoarele **recomandări**:

1. configuraţiile de drepte invariante şi formele canonice depistate pot fi utilizate la clasificarea topologică a sistemelor din această clasă;

2. formele canonice construite ale sistemelor din $\mathbb{CSL}_8$ pot servi drept bază pentru determinarea integralelor prime ale acestor sisteme;

3. clasificarea sistemelor din $\mathbb{CSL}_8$, efectuată în teză, poate fi folosită pentru investigarea ulterioară a sistemelor cu drepte invariante de multiplicitate totală mai mică decât 8;

4. rezultatele din teză pot fi aplicate în studiul diverselor modele matematice care descriu diferite procese din fizică , chimie, medicină ş.a.m.d.

5. investigaţiile prezentate în teză pot fi implementate în calitate de suport pentru perfectarea cursurilor speciale universitare şi post-universitare.

REFERENCES

1. Artes J., Grünbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems. In: Pacific J. Math. 184 (1998), no. 2, p. 207–230.

2. Baltag V.A. Algebraic equations with invariant coefficients in qualitative study of the polynomial homogeneous differential systems. In: Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 2003, no. 2(42), p. 13–27.

3. Baltag V.A., Vulpe N.I. Total multiplicity of all finite critical points of the polynomial differential system. Planar nonlinear dynamical systems (Delft, 1995). In: Differ. Equ. Dyn. Syst. 5(1997), no. 3-4, p. 455–471.

4. **Bujac C. The topological classification of a family of cubic systems with invariant straight lines. In: Scientific Abstracts of The International Conference of Young Researchers, X-th Edition. Chişinău, 2012, p. 100.**

5. **Bujac C. Cubic systems with one simple and one triple real infinite singularities with invariant lines of total multiplicity eight. In: "Tendinţe contemporane ale dezvoltării Ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători". Tezele conf. şt. internaţionale a doctoranzilor . Chişinău: AŞM, 2014, p. 11.**

6. **Bujac C. Cubic systems with two distinct infinite singularities and 8 invariant lines. In: Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50. Chişinău: AŞM, 2014, p. 229–232.**

7. **Bujac C. A subfamily of cubic sstems with invariant lines of total multiplicity 8. In: Book of Abstracts of the 22th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2014). Bacău (România), 2014, p. 26.**

8. **Bujac C. One new class of cubic systems with maximum number of invariant lines omitted in the classification of J.Llibre and N.Vulpe**. **In: Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2014, no. 2(75), p. 102-105**.

9. **Bujac C. One subfamily of cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with two distinct real infinite singularities**. **In: Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2015, no. 1(77), p. 48–86**.

10. **Bujac C. Configurations of invariant lines for the family of cubic systems with homogeneous cubic part** $(x^3, 0)$. **In: "Tendinţe contemporane ale dezvoltării Ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători". Tezele conf. şt. internaţionale a doctoranzilor. Chişinău: AŞM, 2015, p. 15.**

11. **Bujac C. Neccessary and sufficient conditions for a straight line to be invariant of multiplicity k. In: Probleme actuale ale Ştiinţelor exacte şi ale naturii. Materialele conf. şt. naţ. cu participare internaţională. Chişinău: U.S.T., 2015, p. 16–17.**

12. **Bujac C., Vulpe N. Configurations of invariant lines of total multiplicity 8 for cubic systems with four real distinct infinite singularities. In: Comunications of the 20th Conf. on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2012). Chişinău: U.S.T., 2012, p. 44.**

13. **Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities. Prepublicació Núm. 10. Universitat Autónoma de Barcelona, 2013. 51 p.**

14. **Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with three distinct infinite singularities. Preprint: CRM - 3331. Montreal, 2013. 29 p. http://www.crm.umontreal.ca/pub/Rapports/3300-3399/3331.pdf**

15. **Bujac C., Vulpe N. Configurations of invariant lines of total multiplicity 8 for cubic systems with two real and two complex distinct infinite singularities. In: Mathematics and IT, Research and Education (MITRE-2013). Abstracts of the International Conference. Chişinău, 2013, p. 16–17.**

16. **Bujac C., Vulpe N. Classification of a subfamily of cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with two infinite singularities. In: Mathematics and IT, Research and Education (MITRE-2015). Abstracts of the International Conference. Chişinău: U.S.M, 2015, p. 12.**

17. **Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight possessing exactly one infinite singularity. In: Book of Abstracts of the 23th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2015). Suceava (Romania), 2015, p. 23–24.**

18. **Bujac C., Vulpe N. Classification of a subfamily of cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight. Prepublicació Núm 6. Universitat Autónoma de Barcelona, 2015. 35 p..**

19. **Bujac C., Vulpe N. Cubic differential systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities. In: J. Math. Anal. Appl., 2015, no. 2(423), p. 1025–1080.**

20. **Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant straight lines of total multiplicity eight and with three distinct infinite singularities. In: Qual. Theory Dyn. Syst., 2015, Volume 14, Issue 1, p. 109–137.**

21. **Bujac C., Vulpe N. Classification of cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight and two distinct infinite singularities. In: Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2015, no. 74, p. 1–38.**

22. **Bujac C., Vulpe N. Cubic Differential Systems with Invariant Straight Lines of Total Multiplicity Eight possessing One Infinite Singularity. Submitted to Qual. Theory Dyn. Syst., 2015. 24 p.**

23. Calin Iu. Private communication. Chişinău, 2010.

24. Christopher C., Llibre J. Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems. In: Ann. Differ. Equations, 2000, vol. 16, no. 1, p. 5–19.

25. Llibre J., Vulpe N.I. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines. In: Rocky Mountain J. Math., 36(2006), no. 4, p. 1301–1373.

26. Lyubimova R.A. On some differential equation possesses invariant lines. In: Differential and integral equations, Gorky Universitet, 8(1984), p. 66–69 (Russian).

27. Schslomiuk D. Elementary first integrals and algebraic invariant curves of differential equations. In: Expo. Math. 11, 1993 , p. 433–154.

28. Schlomiuk D., Vulpe N. Global classification of the planar Lotka–Volterra differential systems according to their configurations of invariant straight lines . In: J. Fixed Point Theory Appl., 8(2010), no.1, p. 177–245.

29. Şubă A., Repeşco V., Puţuntică V. Cubic systems with seven invariant straight lines of configuration $(3, 3, 1)$. In: Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat. 2012, no. 2(69), p. 81–98.

30. Şubă A., Repeşco V., Puţuntică, V. Cubic systems with invariant affine straight lines of total parallel multiplicity seven. In: Electron. J. Differential Equations 2013, no. 274, p. 1–22.

C.Z.U: 517.925

ADNOTARE

Bujac Cristina, "Sisteme diferenţiale cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt", doctor în ştiinţe matematice, Chişinău, 2016.

Lucrarea este scrisă în limba engleză, conţine 154 pagini text de bază şi are următoarea structură: introducere, 4 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografia (care include 140 titluri). Rezultatele obţinute sunt publicate în 19 lucrări ştiinţifice.

Cuvintele cheie: sistem differenţial cubic, polinom afin invariant, dreaptă invariantă, multiplicitatea curbei algebrice, configuraţie de drepte invariante, sistem perturbat.

Domeniul de studiu al tezei: teoria calitativă a sistemelor dinamice, teoria invarianţilor algebrici a ecuaţiilor diferenţiale.

Scopul şi obiectivele lucrării: de a efectua clasificarea completă a familiei de sisteme cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală 8; această clasificare presupune determinarea tuturor configuraţiilor de drepte invariante posibile pentru această familie de sisteme cubice şi construirea condiţiilor necesare şi suficiente afin invariante pentru realizarea fiecarei dintre configuraţiile depistate.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. În lucrare au fost construite pentru prima dată toate configuraţiile posibile de drepte invariante de multiplicitate totală opt ale familiei de sisteme diferenţiale cubice. Această mulţime de configuraţii conţine toate configuraţiile depistate de alţi autori pentru unele clase speciale de sisteme cubice. Adiţional, s-au determinat condiţiile necesare şi suficiente afin-invariante pentru realizarea fiecăreia dintre configuraţiile construite. De asemenea a fost completată clasificarea realizată de Llibre şi Vulpe depistând o noua clasă de sisteme cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală nouă.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în clasificarea completă a familiei de sisteme cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt în raport cu configurąţiile acestor drepte; aceasta clasificare este un element foarte util în vederea clasificării topologice complete ale acestei familii de sisteme şi în vederea studiului integrabilităţii acestor sisteme.

Semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele ce ţin de sistemele cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt obţinute în teză reprezintă un pas important în studiul algebro-geometric al familiei de sisteme cubice diferenţiale bidimensionale.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice: *(i)* drept bază pentru determinarea integralelor prime ale acestor sisteme; *(ii)* pentru investigarea ulterioară a sistemelor cubice cu drepte invariante de multiplicitate mai mică decât 8; *(iii)* în studiul diverselor modele matematice care descriu diferite procese din fizică , chimie, medicină ş.a.m.d.; *(iv)* în calitate de suport pentru perfectarea cursurilor speciale universitare şi post-universitare.

УДК 517.925

АННОТАЦИЯ

Bujac Cristina, “ Кубические дифференциальные системы с инвариантными прямыми суммарной кратности восемь”, степень доктора математических наук, Chişinău, 2016.

Работа написана на английском языке. Она состоит из введения, 4-х глав, общих выводов и рекомендаций, 140 источников литературы, 154 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 19 научных работах.

Ключевые слова: кубическая дифференциальная система, аффинно-инвариантный полином, инвариантная прямая, кратность прямой, конфигурация инвариантных прямых, возмущенные системы.

Цель и задачи диссертации: построить полную классификацию семейства плоских кубических систем дифференциальных уравнений в соответствии с конфигурациями инвариантных прямых общей кратности восемь, а именно: определить все возможные такие конфигурации и построить необходимые и достаточные аффинно-инвариантные условия для реализации каждого из обнаруженных конфигураций.

Область исследования: Качественная теория динамических систем, теория инвариантов дифференциальных уравнений.

Научная новизна и оригинальность. В диссертации впервые построены все возможные конфигурации инвариантных прямых суммарной кратности восемь для семьи плоских кубических систем дифференциальных уравнений. Этот набор конфигураций содержит все конфигурации, другими авторами для частных классов кубических систем. Кроме того, мы определили необходимые и достаточные условия для реализации каждой из полученных конфигураций. Дополнительно обнаружили новый класс кубических систем с инвариантными прямыми суммарной кратности 9, тем самым дополняя классификацию Llibre и Vulpe.

Основная решенная научная задача состоит в полной классификации двумерных кубических систем дифференциальных уравнений в соответствии с их конфигурациями инвариантных прямых общей кратности 8, основанной на применении теории инвариантов дифференциальных уравнений. Эта классификация генерирует полезную базу для дальнейшей полной топологической классификации данного семейства систем.

Теоретическое и практическое значение работы. Полученные в данной работе результаты, касающиеся кубических систем с инвариантными прямыми суммарной кратностью 8, представляют собой важный шаг в классификации всего множества кубических систем.

Реализация научных результатов. Результаты могут быть применены: *(i)* в качестве основы для определения первых интегралов таких систем; *(ii)* для дальнейших исследований более общих кубических систем с инвариантными прямыми суммарной кратностью менее чем 8; *(iii)* в изучении некоторых математических моделей, описывающих процессы в физике, химии, медицине и т.д.; *(iv)* для разработки специальных курсов в системе высшего образования.

C.Z.U: 517.925

ANNOTATION

Bujac Cristina, " Cubic differential systems with invariant lines of total multiplicity eight ", Doctor degree in Mathematics, Chişinău, 2016.

The language of the Thesis is English. It comprises 154 base pages and has the following structure: Introduction, 4 Chapters, General Conclusions and Recommendations, Bibliography with 140 References. Research outcomes were reflected in 19 scientific publications.

Keywords: cubic differential system, affine invariant polynomial, invariant straight line, multiplicity of a line, configuration of invariant straight lines, perturbed system.

Field of study: Qualitative Theory of Dynamical Systems, Invariant Theory of Differential Equations.

The purpose and objectives: to give a full classification for the family of cubic systems with invariant straight lines of total multiplicity eight; this classifications supposes the detection of all possible configurations of invariant lines for this family and the construction of affine invariant criteria for the realization of each one of the detected configurations.

Novelty and scientific originality. In our Thesis for the first time there are constructed all the possible configurations of invariant lines of total multiplicity eight for cubic systems. Our set of configurations contains as particular cases all the configurations detected by other authors in special cases. Additionally we give necessary and sufficient conditions for the realization of each one of the corresponding configurations. Moreover we completed the classification of Llibre and Vulpe detecting a new class of cubic systems with invariant lines of total multiplicity nine.

The main scientific problem which is solved in this Thesis consists in classifying the whole family of cubic differential systems possessing invariant lines of total multiplicity eight according to configurations of these lines; this classification is very helpful for obtaining the complete topological classification of this family and is useful for the study of integrability of these systems.

The significance of theoretical and practical values of the work. The obtained in this thesis results concerning cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight represent an important step in algebraic and geometric studies of cubic differential systems.

Implementation of the scientific results. They could be applied: *(i)* as a basis for determining of the first integrals of such systems; *(ii)* for further investigations of cubic systems with invariant lines of total multiplicity less then 8; *(iii)* in the study of some mathematical models which describe processes in physics, chemistry, medicine and so on; *(iv)* as a support for teaching courses in higher education.

BUJAC CRISTINA

SISTEME DIFERENŢIALE CUBICE CU DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE TOTALĂ OPT

111.02 - Ecuaţii Diferenţiale

Autoreferatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar: ___.___.2016	Formatul hârtiei: 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset.	Tirajul ___ ex.
Coli de tipar: 1.6	Comanda Nr. ______

Tipografia U.P.S. “Ion Creangă”,
str. I. Creangă, nr.1, MD 2069