UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

Facultatea de Matematică și Informatică

Cu titlu de manuscris

C.Z.U: 519.83

GRIGORIU NICOLAE

GRAFURI TRANZITIV ORIENTABILE

112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ
ȘI CERCETĂRI OPERAȚIONALE

Autoreferatul tezei de doctor în științe matematice

CHIȘINĂU, 2016

Teza a fost elaborată în cadrul Departamentului Matematici Aplicate al Universității de Stat din Moldova, Chișinău

Conducător științific:

CATARANCIUC Sergiu, doctor habilitat în științe matematice, profesor universitar

Referenți oficiali:

LOZOVANU Dumitru, doctor habilitat în științe matematice, profesor universitar;

PRISĂCARU Anatol, doctor în științe matematice, conferențiar universitar.

Componența consiliului științific specializat:

MIȘCOI Gheorghe, doctor habilitat în matematică, profesor universitar, membru titular al Academiei de Științe a Moldovei – **președinte CȘS;**

HÂNCU Boris, doctor în matematică, conferențiar universitar – **secretar CȘS;**

SOLOMON Dumitru, doctor habilitat în tehnică, profesor universitar;

GUȚULEAC Emilian, doctor habilitat în informatică, profesor universitar;

ZAMBIȚCHI Dumitru, doctor în matematică, conferențiar universitar.

Susținerea va avea loc la **13.04.2016, ora 14:20**, în ședința Consiliului științific specializat **D 30.112.03 – 04** în cadrul Universității de Stat din Moldova, str. A. Mateevici 60, Chișinău, MD-2009, Republica Moldova, bloc IV, sala 222/4.

Teza de doctor și autoreferatul pot fi consultate la biblioteca Universității de Stat din Moldova și pe pagina web a CNAA (www.cnaa.acad.md).

Autoreferatul a fost expediat la 12 martie2016

Secretar științific al Consiliului științific specializat, dr. _____________ Hâncu Boris

Conducător științific, dr. hab., prof. univ. _____________ Cataranciuc Sergiu

Autor _____________ Grigoriu Nicolae

REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea și importanța temei de cercetare este determinată de rolul grafurilor tranzitiv orientabile la soluționarea problemelor teoretico-aplicative din diverse domenii. Deja sunt bine cunoscute unele rezultate ce țin de analiza existenței instrucțiunilor de ieșire în codul sursă al programelor, decompoziția rețelelor Petri[19], analiza grafurilor moleculare [4], etc.[14] Rezultatele obținute la moment generează la rândul sau mai multe probleme care necesită studii suplimentare pentru obținerea unei caracterizări a grafurilor tranzitiv orientabile pentru problemele legate de orientarea specială a muchiilor acestora. E de menționat faptul că grafurile tranzitiv orientabile servesc drept model eficient pentru soluționarea în timp polinomial a unor probleme importante care în caz general sunt NP-complete. De exemplu, pe clasa de grafuri menționată se rezolvă în mod eficient problema determinării clicii maximale ponderate, determinarea numărului de stabilitate internă al unui graf neorientat [15], precum și unele variații ale problemei de colorare a grafurilor[2].

De asemenea, este știut că problema de sortare încă rămâne a fi o problemă actuală în combinatorică și informatică. Sortarea mulțimilor parțial ordonate este un domeniu cu multe rezultate valoroase ce au multe aplicații în diverse domenii ale matematicii și informaticii. Este știut faptul că mulțimile parțial ordonate pot fi reprezentate prin clasa grafurilor tranzitiv orientabile [6]. Astfel, reorientarea arcelor într-un graf tranzitiv orientabil duce la sortarea elementelor mulțimii parțial ordonate ce este reprezentată prin graful tranzitiv orientabil.

În prezent sunt cunoscute rezultate legate de studierea grafurilor tranzitiv orientabile, obținute de către Ghouila-Houri A., Gilmore P.C., Hoffman A. J., Golumbic M.C. [7], Shevrin L.N., Filipov N.D., Wolk E.S. ș.a. La baza acestor cercetări stau așa structuri ca subgraf stabil, clase de implicații, cu ajutorul cărora sunt obținute un șir de proprietăți speciale care permit construirea unor orientări tranzitive ale grafului. Totuși, în baza rezultatelor cunoscute nu putem obține răspunsuri la o serie de probleme importante: există oare o caracterizare structurală a grafurilor tranzitiv orientabile; obținerea unei formule simple de calcul a unei orientări tranzitive; determinarea condițiilor de existență a orientărilor tranzitive parțiale ale unui graf, etc.

Scopul și obiectivele lucrării.

Realizarea prezentei teze a pretins implicit atingerea următorului scop: caracterizarea structurală a grafurilor tranzitiv orientabile; elaborarea în baza structurilor obținute a algoritmilor de construire a orientărilor tranzitive pentru grafurile neorientate cu restricții asupra muchiilor, obținerea formulei recurente pentru determinarea numărului de orientări tranzitive într-un graf.

În conformitate cu scopul enunțat au fost stabilite următoarele obiective ale cercetării:

- determinarea rolului lanțurilor netriangulate în construirea orientărilor tranzitive ale grafurilor;
- examinarea proprietăților subgrafurilor B-stabile și rolul acestora la construirea grafurilor factor;
- studierea șirului complet de grafuri factor pentru descrierea problemei orientărilor tranzitive ale unui graf neorientat;
- determinarea formulei recurente de calculare a numărului de orientări tranzitive ale grafului;
- elaborarea algoritmilor pentru construirea orientărilor tranzitive cu restricții asupra muchiilor orientabile;
- propunerea algoritmilor pentru editarea unei orientări tranzitive cu restricții impuse arcelor în orientarea existentă;
- implementarea algoritmilor elaborați.

Suportul metodologic al cercetărilor include unele noțiuni și metode din teoria grafurilor, metode de optimizare, teoria algoritmilor, etc. Aceste noțiuni sunt descrise în majoritatea surselor bibliografice.

Noutatea științifică a rezultatelor obținute. Gradul de noutate privind cercetările efectuate în lucrare rezultă din următoarele rezultate:

- a fost studiată o nouă clasă de subgrafuri stabile, utile pentru soluționarea problemei orientării tranzitive a grafurilor neorientate;
- au fost descrise proprietățile lanțurilor netriangulate în raport cu clasa subgrafurilor stabile într-un graf tranzitiv orientabil;
- în baza clasei de subgrafuri stabile au fost formulate condițiile necesare și suficiente pentru ca un graf să fie tranzitiv orientabil;
- în baza șirului complet de grafuri factor a fost dedusă formula recurentă de calcul a numărului de orientări tranzitive;
- a fost elaborată o serie de algoritmi în baza structurilor menționate pentru construirea unei orientări tranzitive cu restricții asupra muchiilor orientabile;
- au fost elaborați algoritmi pentru modificarea unei orientări tranzitive prin inversarea unei mulțimi de arce.

Problema științifică importantă soluționată *constă în* determinarea unei clase de subgrafuri stabile folosite la studierea problemei de orientare tranzitivă şi caracterizarea structurală a grafurilor tranzitiv orientabile, *care au condus la* obținerea unei metode eficiente pentru construirea orientărilor tranzitive și calcularea numărului acestor orientări.

Importanța teoretică. Prin cercetările efectuate a fost obținută o caracterizare structuralăeficientă a grafurilor tranzitiv orientabile, care conduce, la rândul său, la soluționarea unor probleme importante, examinate în lucrare. Se propune o metodă eficientă de studiere a orientărilor tranzitive în baza unui șir complet de grafuri factor. Rezultatele obținute pot servi pentru inițierea unor cercetări în domeniu de către studenți și masteranzii universităților,și servesc drept suport pentru unele cursuri opționale.

Valoarea aplicativă a lucrării este determinată de multitudinea de probleme practice, soluționarea cărora se reduce la necesitatea studierii grafurilor tranzitiv orientabile drept model matematic pentru obținerea soluției. Structurile, reprezentate prin clase speciale de subgrafuri, examinate în lucrare, permit elaborarea unor metode și algoritmi eficienți de soluționare a problemei de analiză și optimizarea codului sursă a programelor de calculator, de dirijarea rețelei de transport într-o localitate, de analiză a grafurilor moleculare etc.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele obținute pot servi drept bază pentru inițierea unor cercetări în domeniu de către studenții ciclurilor I și II din cadrul universităților, pentru elaborarea unor cursuri opționale, soluționarea problemelor practice din diverse domenii de activitate (informatică – examinarea codului sursă al unui program, chimie – analiza structurilor moleculare, sociologie – studierea comportamentului social al unei colectivități, economie – optimizarea rețelelor de transport etc.). Algoritmii elaborați sunt realizați sub formă de programe în limbajul Javascript.

Aprobarea rezultatelor științifice. Rezultatele științifice de bază, obținute de către autor și reflectate în prezenta lucrare, au fost prezentate sub formă de: **a) Teze la conferințe științifice de rang internațional:***The Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE – 2013), August 18-22, 2013, Chișinău, Republic of Moldova*;*Conferința științifică internațională a doctoranzilor „Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători.", 10 martie 2015 Chișinău,*;*The Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE –2015), July 2-5, 2015, Chișinău, Republic of Moldova*;*The 23rd conference on applied and industrial mathematics (CAIM-2015), September 17-20, 2015, Suceava, Romania.***b) Teze la conferințe științifice de rang național:***Conferința interuniversitară. „Educație prin cercetare – garant al performanței* *învățământului superior", Chișinău, 3-4 mai 2012*;*The 20th conference on applied and industrial mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu, Chișinău, 22-25 august 2012*; *Conferința Științifică „Integrare prin Cercetare și Inovare", Chișinău 10-11 noiembrie 2015.* **c) Comunicări la seminare științifice:***Seminarul de cercetare „Analiză și Optimizare" din cadrul Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca (29 noiembrie 2012)*; *Seminarul științific „ProblemeActuale de Matematică și Informatică" din cadrul laboratorului "Modelare Matematică și Optimizare" de pe lângă Universitatea de Stat dinMoldova, Facultatea de Matematică și Informatică, conducător acad. P. Soltan (20 martie 2013, 5 noiembrie 2014,8 aprilie 2015).* **d) Comunicări în cadrul școlilor doctorale de vară:***„Doctoral Intensive Summer School on Evolutionary Computing in Optimisation and Data Mining (ECODAM)", România, Iași, 17-24 iunie 2012*;*„Summer School Marktoberdorf 2013"Software Systems Safety, Germany, Marktoberdorf, July 30 to August 11, 2013*; **e)Articole științifice publicate în reviste de specialitate din țară și de peste hotare, precum și în analele (proceedings) conferințelor:** *Analele conferinței științifice internaționale "Modelarea Matematică, Optimizare și Tehnologii Informaționale",Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Chișinău (Ediția III - 19-23 martie, 2012, Ediția IV-25-28 martie 2014); Proceedings of the third conference of mathematical society of the Republic of Moldova dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science, IMCS-50, Chisinau, August 19-23, 2014*; *Computer Science Journal of Moldova*, Vol. 23, Nr. 1(67), 2015;*Studia UniversitatisMoldaviae, Seria „Științe exacte și economice"*,Nr.2(82),2015; *StudiaUniversitatisBabeș-Bolyai, Informatica*, Vol.LX, Nr.2, 2015;

Publicații la tema tezei. În total la tema tezei au fost publicate 14 lucrări științifice: 7 articole, dintre care 3 articole de fond în reviste științifice recenzate (a se vedea [23], [24], [29] din lista bibliografică); 10 publicații fără coautori (a se vedea [27] - [36] din lista bibliografică); 10participări cu comunicări la conferințe, dintre care 8 de rang internațional (a se vedea [26], [28], [30] – [34] și [36] din lista bibliografică).

Volumul și structura tezei: Teza este scrisă în limba română și conține introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie ce cuprinde 119 de titluri și două anexe. Volumul total al tezei este de 143 de pagini, dintre care 113 pagini text de bază.

Cuvinte cheie: graf tranzitiv orientabil, subgraf stabil, lanț netriangulat, graf factor, orientare tranzitivă, graf de comparabilitate.

CONȚINUTUL TEZEI

În **Introducere** se argumentează actualitatea temei investigate, se face o sinteză a publicațiilor corespunzătoare din literatura de specialitate,se definesc obiectivele cercetării și se dă o caracteristică generală a rezultatelor expuse în lucrare.

Primul capitol al tezei poartă un caracter introductiv și are drept scop examinarea situației în domeniul de studiu cu cercetarea ulterioară a principalelor structuri folosite pentru descrierea grafurilor tranzitiv orientabile. În acest capitol se descriu succint evoluția și metodele de cercetare caracteristice teoriei grafurilor, în mod special a clasei de grafuri tranzitiv orientabile, utile la soluționarea problemelor teoretico-aplicative [1], [9], [16]. Sunt analizate primele rezultate ce țin de studierea grafurilor tranzitiv orientabile obținute de Shevrin L.N. și Filipov N.D. bazate pe mulțimile parțial ordonate. Se apelează în mod special la rezultatele lui Wolk E.S. care descriu orientările tranzitive ale arborilor. Este analizat aportul și altor matematicieni la dezvoltarea direcției menționate de cercetare. Se examinează principalele structuri cu ajutorul cărora sunt caracterizate grafurile tranzitiv orientabile. Aceste structuri reprezintă clase de implicații și subgrafuri stabile. Sunt descrise proprietățile de bază ale subgrafurilor stabile cunoscute în literatura de specialitate care urmează a fi utilizate în lucrare. Proprietățile menționate urmează a fi generalizate în capitolul 2 al tezei. Este argumentată valoarea aplicativă a grafurilor tranzitiv orientabile prin soluționarea unor probleme practice.

Problema de cercetare ține de continuarea studierii grafurilor tranzitiv orientabile prin elaborarea și studierea metodelor de construire a orientărilor tranzitive, chestiune neîntâlnită la alți autori și importantă pentru unele probleme, cum ar fi: sortarea mulțimilor parțial ordonate. În baza metodelor menționate se elaborează algoritmi de construire a orientărilor tranzitive cu analiza eficienții acestora și estimarea vitezei de lucru.

Pe lângă examinarea problemei de bază au fost obținute și o serie de rezultate auxiliare, importante pentru soluționarea în ansamblu a grafurilor: determinarea formulei recurente de calcul a numărului de orientări tranzitive, caracterizarea clasei de grafuri factor pentru construirea orientărilor tranzitive ale grafului, obținerea unor proprietăți speciale pentru subgrafurile stabile pentru determinarea șirului de grafuri factor.

În **Capitolul doi** sunt expuse principalele rezultate care conduc la soluționarea problemei orientării tranzitive a grafurilor. Studiul respectiv este generat, în mare parte, de importanța unor probleme practice, soluționarea cărora se reduce la examinarea modelelor matematice reprezentate prin grafuri tranzitive [3], [10], [12].

Un graf orientat $\vec{G} = (X; \vec{U})$ se numește tranzitiv dacă pentru orice trei vârfuri $\{x, y, z\} \in X_G$ se respectă relația de tranzitivitate: $[x, y] \in \overrightarrow{U_G}$, $[y, z] \in \overrightarrow{U_G}$ implică $[x, z] \in \overrightarrow{U_G}$. Graful neorientat $G = (X; U)$ se va numi tranzitiv orientabil dacă muchiile acestuia pot fi orientat în așa mod ca în rezultat să fie obținut un graf tranzitiv orientat [21].

Soluționarea problemei orientării tranzitive a unui graf neorientat se obține prin utilizarea proprietăților speciale ale unor structuri examinate în acest capitol: subgrafurile B-stabile, graful factor, lanțurile netriangulate ale unui graf neorientat, etc.

Elementele de bază în procesul de studiere a grafurilor tranzitiv orientabile sunt lanțurile netriangulate și subgrafurile stabile. În **paragraful 2.1** sunt expuse principalele proprietăți ale acestor structuri, care vor fi utilizate în caracterizarea grafurilor tranzitiv orientabile.

Fie $G = (X; U)$ un graf neorientat şi $F \subset X$ o submulţime arbitrară de vârfuri a acestui graf. Vom nota prin $G(F)$ subgraful grafului G, generat de F.

De rând cu notația $x \sim y$ de adiacență a vârfurilor $x, y \in X$, în cele ce urmează vom mai folosi următoarele notații:

$x \sim F$ — vârful *x* este adiacent cu toate vârfurile din F.

$x \nsim F$ — vârful *x* nu este adiacent cu nici unul din vârfurile din F.

Definiția 2.1 [21]. *Subgraful* $G(F)$ *se numește subgraf stabil al grafului* G, *dacă pentru* $\forall x \in X \setminus F$ *are loc una dintre următoarele relații:*

$$x \sim F \text{ sau } x \nsim F.$$

Lanțurilor netriangulate le revine un rol aparte în studierea problemei menționate. Această structură apare la studierea proprietăților subgrafurilor stabile minimale, folosite la elaborarea metodelor de construire a orientărilor tranzitive. Consecutivitatea de vârfuri $\mathrm{l} = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{p}]$ pentru care în graful $\mathrm{G} = (\mathrm{X}; \mathrm{U})$ nu există muchii de tipul: $[\mathrm{x}_\mathrm{i}, \mathrm{x}_{\mathrm{i}+2}]$ se va numi lanț netriangulat.

Lema 2.5. *Dacă* $a \sim b$ *atunci* $S(\{a, b\})$ *coincide cu mulțimea tuturor vârfurilor* x *din* G *pentru care există lanț netriangulat* $l = [a, b, \dots, x]$.

Teorema 2.1. *Dacă* $G = (X; U)$ *este un graf neorientat conex ce nu conține cicluri de lungimea 3, atunci pentru* G *există lanț netriangulat ce trece prin toate muchiile sale.*

În **paragraful 2.2** sunt continuate cercetările prin extinderea structurilor clasice care descriu grafurile tranzitiv orientabile pentru construirea orientărilor tranzitive,ce se bazează pe generarea unui șir finit de grafuri factor. „Cărămizile” principale la construirea unui graf factor sunt subgrafurile stabile (minimale, complete maximale, vide maximale).

Definiția 2.7. *Subgraful stabil vid Q se numește maximal dacă acesta nu se conține într-un oarecare alt subgraf stabil vid din graful $G = (X; U)$.*

Definiția 2.8. *Subgraful stabil propriu conex M se numeștesubgraf stabil minimal dacă nu este complet și nu conține alte subgrafuri stabile din graful $G = (X; U)$.*

Definiția 2.9. *Subgraful stabil complet H se numește maximal, dacă acesta nu se conține în alt subgraf stabil complet din G.*

Definiția 2.10. *Subgraful stabil F se numește subgraf B-stabil dacă pentru orice subgraf stabil M din $G = (X; U)$ are loc una din relațiile:*

$$F \subseteq M \text{ sau } F \cap M = \emptyset.$$

Lema 2.8. *Dacă graful neorientat $G = (X; U)$ conține subgrafuri stabile, atunci G conține cel puțin un subgraf B-stabil.*

Prin teorema 2.5 este obținută caracterizarea subgrafurilor stabile minimale: un subgraf generat de o mulțime de vârfuri $X_F \in X_G$ este stabil minimal dacă și numai dacă în graful G există lanț netriangulat ce conține doar vârfurile din X_F. Subgrafurile stabile studiate în paragraful 2.2 se includ în clasa subgrafurilor B-stabile ale unui graf neorientat.

Teorema 2.5. *Un subgraf F al grafului neorientat $G = (X; U)$, generat de mulțimea de vârfuri $X_F = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}\}$, este stabil minimal, dacă și numai dacă mulțimea X_F poate fi acoperită cu un lanț netriangulat.*

În baza rezultatelor obținute în paragrafele anterioare, în **paragraful 2.3** sunt prezentate proprietățile și condițiile necesare pentru orientarea tranzitivă a unui graf neorientat, în special poate fi evidențiată teorema 2.6 prin care se menționează că în orice orientare tranzitivă a unui graf toate arcele adiacente unui subgraf B-stabil sunt orientate într-o singură direcție, fie spre subgraful B-stabil, fie de la subgraf.

Teorema 2.6. *Dacă F este un subgraf B-stabil al unui graf neorientat $G = (X; U)$, iar $x \in X_G \setminus X_F$ un vârf adiacent mulțimii X_F, atunci în orice orientare tranzitivă $\vec{G}$ se respectă una din următoarele două condiții:*

1. $[x, y] \in \overrightarrow{U_G}, \forall y \in X_F$;
2. $[y, x] \in \overrightarrow{U_G}, \forall y \in X_F$.

Fie $G = (X; U)$ un graf tranzitiv orientabil și F un subgraf din G. Construim o orientare tranzitivă $\vec{G} = (X; \vec{U})$ a grafului G. Notăm prin $\vec{F} = (X_F; \overrightarrow{U_F})$ subgraful orientat din $\vec{G}$, determinat de F. Evident, are loc egalitatea: $\vec{U}_{\vec{G}} = \vec{U}_{\vec{G}/\vec{F}} \cup \vec{U}_{\vec{F}}$, unde $\vec{U}_{\vec{G}/\vec{F}}$ reprezintă mulțimea tuturor arcelor din orientarea $\vec{G}$ ce nu aparțin subgrafului $\vec{F}$. Vom spune că F este un subgraf independent tranzitiv orientabil în G, dacă pentru orice orientare tranzitivă $\vec{F}^*$ a lui F, mulțimea de arce $\vec{U}_{\vec{G}/\vec{F}} \cup \vec{U}_{\vec{F}^*}$ determină o orientare tranzitivă $\vec{G}^*$ a grafului G. În cele ce urmează, subgraful independent tranzitiv orientabil se va numi ITO-subgraf. Din cele spuse rezultă că, dacă într-o orientare tranzitivă $\vec{G}$ a grafului neorientat $G = (X; U)$ efectuăm o altă orientare tranzitivă $\vec{G}$ a subgrafului independent tranzitiv orientabil F, atunci în rezultat obținem o nouă orientare a grafului G, care este, de asemenea, orientare tranzitivă.

Un rol important îl are teorema 2.6 prin care se argumentează că orientarea oricărui subgraf B-stabil se face în mod independent de orientarea întregului graf G. În baza rezultatelor teoretice menționate în lucrare, au fost formulați algoritmi pentru construirea orientării tranzitive pentru diferite tipuri de subgrafuri B-stabile.

Teorema 2.7. *Subgraful F al grafului tranzitiv orientabil $G = (X; U)$ este B-stabil dacă și numai dacă F este ITO-subgraf al lui G.*

Lema 2.14. *Dacă F este un subgraf B-stabil al unui graf neorientat $G = (X; U)$, atunci doar una din următoare afirmații este adevărată:*

1) *F este subgraf stabil complet maximal;*
2) *F este subgraf stabil vid maximal;*
3) *F este subgraf stabil minimal.*

Determinarea numărului de orientări tranzitive ale unui graf are un rol important în studierea clasei de grafuri tranzitiv orientabile. În **paragraful 2.4** este descrisă o clasă specială de grafuri numită grafuri factor. Grafurile factor reprezintă ideea principală în procesul de determinare a numărului de orientări tranzitive precum și construirea unei astfel de orientări.

Fie F un subgraf B-stabil al grafului $G = (X; U)$. Vom nota prin G/F graful ce se obține din G, după următoarele reguli:

1. subgraful stabil F se înlocuiește printr-un vârf x';
2. toate muchiile $[x, z], \forall x \in X_F, z \in X \setminus X_F$ se înlocuiesc cu muchia $[x', z]$.

Graful G/F se va numi **graf factor** corespunzător subgrafului B-stabil F.

Vom nota prin G^0 graful G, iar prin $G^1 = G^0/F_0$. Dacă acest graf factor mai conține un subgraf B-stabil, atunci continuăm operația descrisă mai sus până când obținem un alt graf factor ce nu conține subgrafuri B-stabile. Conform celor descrise pentru un graf arbitrar $G = (X; U)$, obținem șirul de grafuri factor neorientate:

$$G^0 = G, G^1 = G^0/F_0, G^2 = G^1/F_1, \dots, G^k = G^{k-1}/F_{k-1} \quad (2.10)$$

cu proprietățile:

1. F_i este subgraf B-stabil în graful G^i, unde $0 \leq i \leq k-1$;
2. ultimul graf $G^k = G^{k-1}/F_{k-1}$ nu conține subgrafuri B-stabile.

Vom numi șirul (2.10) construit conform regulilor descrisemai sus, **șir complet de grafuri factor** al grafului G. Menționăm că șirul dat conține $k+1$ grafuri neorientate. Obținerea unui șir complet de grafuri factor este un proces iterativ.

O importanță deosebită în procesul de construire a numărului de orientări tranzitive îl are lema 4, prin care se menționează că într-un graf neorientat, toate șirurile complete de grafuri factor au aceeași lungime.

Lema 2.18. *Dacă*

$$G^0 = G, G^1 = G^0/A_0, G^2 = G^1/A_1, \dots, G^k = G^{k-1}/A_{k-1}$$

$$G^0 = G, G^1 = G^0/B_0, G^2 = G^1/B_1, \dots, G^t = G^{t-1}/B_{t-1}$$

sunt două șiruri complete de grafuri factor ale grafului G, atunci are loc egalitatea $k = t$.

Este cunoscut faptul că un graf poate avea mau multe orientări tranzitive. Prin utilizarea șirului complet de grafuri factor poate fi descrisă metoda de construire a unei orientări tranzitive specifice sau metoda de trecere de la o orientare tranzitivă la alta. Prin orientarea muchiilor unui subgraf B-stabil dintr-un graf factor poate fi obținută o orientare tranzitivă, iar prin schimbarea orientării tranzitive a unui subgraf asupra căruia poate fi aplicată operația de factorizare determină o orientare tranzitivă nouă. În asemenea caz, fiecare șir complet de grafuri factor, generează mai multe orientări tranzitive, iar toate șirurile complete de grafuri factor permit construirea tuturor orientărilor tranzitive ale unui graf neorientat.

Lema 2.16. *Dacă graful $\vec{G}$ este tranzitiv orientat, atunci și graful $\overleftarrow{G}$ este tranzitiv orientat*

Lema 2.19. *Dacă $G = (X; U)$ este un graf tranzitiv orientabil și F un subgraf stabil vid maximal din G, iar G/F graful factor corespunzător, atunci numărul de orientări tranzitive ale grafului G este egal nu numărul de orientări tranzitive ale grafului G/F.*

Vom nota prin $\tau(G)$ numărul de orientări tranzitive ale grafului G.

Lema 2.20. *Pentru graful G, asupra căruia nu poate fi aplicată operația de factorizare, este adevărată una din relațiile:*

1. $\tau(G) = 0$;
2. $\tau(G) = 2$;
3. $\tau(G) = |X_G|!$.

Cunoscând șirul complet de grafuri factor, cu un efort nu prea mare putem construi o oarecare orientare tranzitivă a grafului G. Pentru aceasta, se parcurge șirul complet de grafuri factor în ordine inversă și la fiecare iterație subgrafului B-stabil vizat i se atribuie o orientare tranzitivă, după algoritmii descriși în paragraful 2.3. Algoritmul rulează până când se ajunge la graful G.

Algoritmul de construire a unei orientări tranzitive

Date de intrare: Șirul complet de grafuri factor:

$G^0 = G, G^1 = G^0/F_0, G^2 = G^1/F_1, \ldots, G^p = G^{p-1}/F_{p-1}$.

Date de ieșire: O orientare tranzitivă $\vec{G}$ a grafului G.

Procedura $TRO(G^0, \ldots, G^p)$

$i \coloneqq p$;

$While\ \boldsymbol{i} > 0\ do$:

Se obține orientarea tranzitivă a grafului factor G^i/F_i;

$i \coloneqq i - 1$;

Se construiește orientarea tranzitivă a subgrafului B-stabil F_i;

$EndWhile$;

Se returnează orientarea tranzitivă a grafului $G_0 = G$;

În cele ce urmează în lema 2.21 este descrisă formula pentru determinarea numărului de orientări tranzitive într-un graf. În baza rezultatelor teoretice din acest paragraf, precum și cele din secțiunile anterioare este formulat algoritmul pentru construirea orientării tranzitive a unui graf.

Lema 2.21. *Numărul de orientări tranzitive ale unui graf neorientat G se calculează în* *mod recurent prin formula*:

$$\tau(G) = \tau(G^{p+1}) \prod_{i=1}^{p} \tau(F_i). \quad (2)$$

În paragraful 2.5 sunt expuse concluziile referitoare la capitolul 2.

În **Capitolul 3** se examinează câteva probleme ce țin de orientarea tranzitivă a grafurilor, care pot fi considerate drept generalizări ale problemei examinate în capitolul precedent. Cunoaștem că deseori problemele practice se modelează cu ajutorul unor grafuri neorientate și, precum a fost menționat în capitolul întâi, soluționarea propriu zisă a problemei poate fi redusă la problema construirii orientării tranzitive a modelului respectiv. În această situație poate fi menționat că în unele cazuri modelul matematic care descrie un anumit proces se reprezintă printr-un graf mixt, adică un graf în care unele muchii sunt deja orientate (sunt arce). Desigur, prezintă interes soluționarea problemei orientării tranzitive a unor astfel de grafuri.

O altă problemă din cele expuse în capitolul precedent ar fi problema reorientării arcelor unui graf tranzitiv orientat. Cu alte cuvinte s-ar cere de examinat condițiile în care schimbarea orientărilor unor arce ale grafului tranzitiv orientat conduce la obținerea unui graf nou, care de asemenea este tranzitiv orientat. Această problemă se examinează în două aspecte:

a) determinarea submulțimii minimale de arce, reorientarea cărora păstrează proprietatea grafului de a fi tranzitiv orientat;
b) determinarea condițiilor în care reorientarea arcelor unei submulțimi oarecare de arce ale grafului nu schimbă orientarea tranzitivă în ansamblu a grafului.

Pentru problemele enunțate se face studiul teoretic respectiv, în baza căruia se elaborează algoritmi de soluționare cu estimarea complexității acestora.

În **paragraful 3.1** este examinată problema de reorientare a unei submulțimi de arce ale unui graf tranzitiv orientat și vom determina condițiile în care această reorientare conduce la obținerea unui graf nou care rămâne tranzitiv orientat. Conform lemei 2.16, orice graf tranzitiv orientabil conține cel puțin două orientări tranzitive opuse una alteia. Astfel, schimbarea direcției arcelor unui graf tranzitiv orientat va oferi o nouă orientare tranzitivă. Totuși, dacă graful G are mai mult de două orientări tranzitive, o altă orientare poate fi obținută prin reorientarea parțială a unui număr mai mic de arce.

Fie $G = (X; U)$ un graf neorientat care este tranzitiv orientabil. Să admitem că pentru acest graf există mai mult decât două orientări tranzitive. Vom nota prin $\vec{G}$ una dintre orientările tranzitive ale grafului. În legătură cu problema examinată în acest paragraf este necesar mai întâi de a răspunde la întrebarea: Există oare în orientarea $\vec{G}$ o submulțime de arce $\vec{E} \neq \overrightarrow{U_G}$ la schimbarea orientării cărora obținem un graf nou care rămâne tranzitiv orientat? Răspuns la această întrebare ne dă următoarea

Teorema 3.1. *Dacă $\vec{G}$ este o orientare tranzitivă a unui graf neorientat $G = (X; U)$ ce admite mai mult de două orientări tranzitive atunci există o submulțime de arce $\vec{E} \neq \overrightarrow{U_G}$, $\vec{E} \neq \emptyset$ încât în rezultat schimbării orientărilor arcelor din $\vec{E}$ obținem o nouă orientare tranzitivă a grafului G.*

Problema 3.1. Fie $G = (X; U)$ un graf tranzitiv orientabil, iar $\vec{G}$ o orientare tranzitivă a sa. Să se determine mulțimea minimală de arce $\overrightarrow{E_G} \subset \overrightarrow{U_G}$ a căror direcție trebuie inversată, încât orientarea obținută $\overrightarrow{G'} = (X_G; \overrightarrow{U_{G'}})$ să fie la fel tranzitivă. $\overrightarrow{U_{G'}} = \left(\overrightarrow{U_G} \setminus \overrightarrow{E_G}\right) \cup \overleftarrow{E_G}$, unde $\overleftarrow{E_G}$ se obține din $\overrightarrow{E_G}$ prin inversarea direcției tuturor arcelor.

Definiția 3.1. *Dacă $F = (X_F; U_F)$ este un subgraf B-stabil al grafului tranzitiv orientabil G, atunci mulțimea de muchii U_F se va numi factor intern determinat de subgraful F.*

Factorul intern determinat de subgraful B-stabil F se va nota prin I_F.

Observația 3.2. *Dacă F este un subgraf stabil vid maximal, atunci factorul intern determinat de F este o mulțime vidă.*

Observația 3.3. *Dacă graful tranzitiv orientabil $G = (X; U)$ nu conține subgraf B-stabil, atunci mulțimea de muchii U_G determină factorul intern al grafului G.*

Definiția 3.2. *Dacă F este un subgraf B-stabil al grafului tranzitiv orientabil G, iar $x \in X_G \setminus X_F$ este un vârf adiacent mulțimii X_F, atunci, mulțimea de muchii $\{[x, y] | \forall y \in X_F\}$ se va numi factor extern determinat de subgraful F.*

Factorul extern determinat de subgraful B-stabil F se va nota prin E_F.

Din definițiile 3.1 și 3.2 problema reconstruirii orientării tranzitive poate fi formulată utilizând noțiunile de factor intern și factor extern în modul următor: *să se determine factorul minimal al grafului tranzitiv orientabil G, astfel încât toate arcele dintr-un subgraf tranzitiv orientat ce corespund factorului minimal pot fi inversate, astfel încât să fie păstrată proprietatea de tranzitivitate a orientării noi obținute.*

Fie $G^0 = G, G^1 = G^0/F_0, G^2 = G^1/F_1, \dots, G^k = G^{k-1}/F_{k-1}$ șirul complet de grafuri factor al grafului tranzitiv orientabil G, determinate de subgrafurile B-stabile $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{k-1}$ respectiv. Este adevărată următoarea

Teorema 3.2. *Dacă* E_{F_i} *este factor extern determinat de subgraful B-stabil* F_i, *atunci există factorul intern* I_{F_j}, *astfel încât* $E_{F_i} \subseteq I_{F_j}$, $0 \le i \le k-2, i+1 \le j \le k-1$.

Din proprietatea subgrafului B-stabil de a fi independent tranzitiv orientabil, rezultă că într-o orientarea tranzitivă toate arcele subgrafului care determină un factor intern pot fi reorientate, astfel încât orientarea nouă a întregului graf să fie la fel tranzitivă. Dacă în șirul complet de grafuri factor un vârf al subgrafului B-stabil reprezintă un alt subgraf B-stabil factorizat la un pas anterior, atunci schimbarea orientării tranzitive a lui la fel generează o orientare tranzitivă nouă. Totodată, poate fi observat, că orice muchie adiacentă unui astfel de vârf într-un graf factor precedent reprezintă un factor extern. Într-o orientare tranzitivă direcția unei astfel de muchii determină orientarea întregului subgraf B-stabil din care aceasta face parte. În asemenea caz vom spune că muchia $[x_i, x_j]$ influențează orientarea tranzitivă a subgrafului F. Din cele menționate este adevărată următoarea

Lema 3.1. *Dacă* $E_{F_i} \subset I_{F_j}$, *atunci factorul extern* E_{F_i} *influențează orientarea tranzitivă a factorului intern* I_{F_j}.

În baza rezultatelor obținute putem descrie un algoritm ce garantează reorientarea minimală a orientării tranzitive a unui graf. Mai întâi se parcurge șirul de grafuri factor până când este depistat un factor minimal. Dacă factorul depistat nu conține vârfuri factor, atunci se reorientează arcele factorului dat. După reorientarea factorului ales, se aplică procedura inversă operației de factorizare până când se ajunge la graful inițial cu o orientare tranzitivă nouă.

Algoritmul de reorientare tranzitivă minimală a grafului

Date de intrare: Șirul de grafuri factor $G/F_0, G/F_1, \dots, G/F_k$, orientarea tranzitivă $\vec{G}$.

Date de ieșire: Orientarea tranzitivă $\overrightarrow{G'} \neq \vec{G}$.0

Procedura $MinReverseTro(G^0, \dots, G^k)$

$i \coloneqq 0, F_i = \emptyset, \overrightarrow{G'} = \emptyset$;

$While$ $\boldsymbol{F_i}$ $\boldsymbol{conține\ vârf\ factor}$ || $\boldsymbol{U_{F_i}} = \emptyset$ do:

  $i; = i + 1$;

  Se obține subgraful B-stabil F_i;

$EndWhile$;

$While$ $\boldsymbol{i} > 0$ do:

$\overrightarrow{G'} := \overrightarrow{G/F_i}$

$If\ \boldsymbol{F_i - graf\ complet}\ do$:

Se inversează arcul $[x_i, x_j]$ unde $g^+(x_i) = 1$ și $g^+(x_j) = 0$;

$ElseIf\ \boldsymbol{F_i - subgraf\ stabil\ minimal}\ do$:

Se inversează arcele din $\overrightarrow{F_i}$;

$EndIf$;

$EndWhile$;

Se returnează $\overrightarrow{G'}$;

În **paragraful 3.2** este descrisă situația când schimbarea orientării unui singur arc păstrează proprietatea orientării tranzitive a grafului.

Fie $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p} = x_{i_1}]$ un ciclu oarecare al grafului neorientat $G = (X; U)$. Orice muchie $[x_{i_j}, x_{i_{j+2}}]$ unde $1 \le j \le p - 2$, se numește **t-coardă** a ciclului respectiv.

Teorema 3.4. *Dacă $[x, y] \in \overrightarrow{U_G}$ este un arc al orientării tranzitive $\vec{G}$ ce aparține unui ciclu fără t-coarde atunci schimbarea orientării arcului $[x, y]$ conduce la obținerea unui graf care nu mai este orientat tranzitiv.*

Fie că $[x_0, y_0]$ este arcul inițial dat care forțează construirea unei orientări tranzitive noi, atunci sunt adevărate următoarele:

Teorema 3.5. *Dacă arcul inițial dat $[x_0, y_0]$ aparține unui factor intern I_F determinat de un subgraf B-stabil F, atunci pentru construirea unei orientări tranzitive noi în șirul complet de grafuri factor se orientează toate arcele din graful care nu conține vârfuri factor.*

Teorema 3.6. *Dacă arcul inițial dat $[x_0, y_0]$ aparține unui factor extern E_{F_i} determinat de subgraful B-stabil F_i, atunci inversarea arcelor din factorul extern E_{F_j}, unde $j < i$ determinat de subgraful B-stabil F_j adiacente subgraful B-stabil F_j care nu conține vârfuri factor generează o orientarea tranzitivă.*

În **paragraful 3.2** se generalizează problema reorientării tranzitive a unui graf forțată de un arc apriori dat,și anume, se construiește reorientarea tranzitivă forțată de o mulțime de arce $\overrightarrow{E_G} \subset \overrightarrow{U_G}$, $1 < |\overrightarrow{E_G}| < |\overrightarrow{U_G}|$.

Vom nota prin $\overrightarrow{E_0} \subset \overrightarrow{U_G}$, $\overrightarrow{E_0} \cap \vec{E} = \emptyset$ mulțimea de arce ce trebuie reorientate concomitent cu reorientarea arcelor din $\vec{E}$ pentru a obține din nou o orientare tranzitivă a grafului. Vom numi mulțimea de arce $\overrightarrow{E_0}$ **atașament** al mulțimii $\vec{E}$. Evident, în cazul $\overrightarrow{E_0} = \emptyset$ obținem problema examinată în paragraful 3.1.

Lema 3.4. *Pentru orice mulțime de arce* $\vec{E} \subset \overrightarrow{U_G}$ *a unei orientări tranzitive* $\vec{G}$ *astfel încât* $|\vec{E}| > 1$ *inversarea direcției arcelor mulțimii* $\vec{E} \cup \overrightarrow{E_0}$ *generează o nouă orientare tranzitivă.*

Problema 3.3. Fie $G = (X; U)$ un graf tranzitiv orientabil, iar $\vec{G} = (X_G; \overrightarrow{U_G})$ o orientare tranzitivă a sa, și $\overrightarrow{E_G} \subset \overrightarrow{U_G}$, unde $2 < |\overrightarrow{E_G}| < |\overrightarrow{U_G}|$. Să se determine o orientare tranzitivă nouă $\overrightarrow{G'} = (X_G; \overrightarrow{U'_G})$, astfel încât $\overleftarrow{E_G} \subset \overrightarrow{U'_G}$, unde $\overleftarrow{E_G} = \{[x,y] | [y,x] \in \overrightarrow{E_G}\}$.

Deoarece mulțimea $\overleftarrow{E_G}$ se obține prin inversarea arcelor din $\overrightarrow{E_G}$, putem ușor observa că orientarea nou obținută va fi la fel tranzitivă.

În **paragraful 3.4** este analizat cazul de construire a unei orientări tranzitive dată de un singur arc.

Fie dat graful tranzitiv orientabil G, și muchia $[x,y] \in U_G$. Să se construiască o orientare tranzitivă $\vec{G} = (X_G; \overrightarrow{U_G})$ știind că muchia $[x,y]$ din U_G trebuie să formeze arcul $[x,y]$ din $\overrightarrow{U_G}$.

Pentru soluționarea problemei menționate, vom folosi noțiunile de factor intern și factor extern din paragraful 3.1. Luând în considerare acest fapt, putem observa că sunt posibile trei cazuri.

1. Arcul inițial $[x,y]$ aparține unui factor intern;
2. Arcul inițial $[x,y]$ aparține unui factor extern;
3. Arcul inițial nu aparține nici factorului intern și nici factorului extern.

În cele ce urmează vom analiza fiecare caz în parte:

1. Fie că arcul inițial $[x,y]$ aparține unui factor intern I_F.

Conform teoremei 2.7, orientarea factorului intern nu influențează orientarea tranzitivă a întregului graf. Deci, problema construirii unei orientări tranzitive a grafului G în cazul dat se reduce la construirea unei orientări tranzitive a factorului intern I_F. Conform observației 3.1, mulțimea de vârfuri a subgrafului B-stabil F, ce formează un factor intern, poate fi sau subgraf stabil minimal sau subgraf stabil complet maximal.

Dacă F este un subgraf stabil minimal, atunci pentru construirea orientării tranzitive având arcul $[x,y]$, putem aplica procedura $OrientareSSMin$ din paragraful 2.3, dacă alegem în calitate de arc inițial $[x, y]$.

În cazul construirii unei orientări tranzitive pentru un subgraf stabil complet maximal este posibil ca direcția arcului $[x, y]$ să aparțină mai multor astfel de orientări. Deoarece nu sunt puse alte restricții asupra muchiilor din graful G și respectiv din subgraful B-stabil F, vom modifica algoritmul de construire a unei orientări tranzitive a grafului complet, descris în paragraful 2.3 prin reordonarea vârfurilor în mulțimea $X_F = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}\}$, astfel încât în șirul vârfurilor ordonate vârful x să fie primul, iar y al doilea.

Având metoda de orientare a factorului intern, orientarea întregului graf se face aplicând aceeași operație de factorizare ca și pentru construirea unei orientări tranzitive arbitrare.

2. Vom analiza cazul când arcul inițial$[x, y]$ aparține unui factor extern E_F.

Conform teoremei 3.1, este cunoscut faptul că factorul extern în șirul de grafuri factor este și factor intern pentru un graf factor. Totuși, la fiecare pas al operației de factorizare este necesar de luat în considerare faptul că muchiile factorilor externi se comasează în una singură. Astfel, orientarea arcului din factorul extern factorizat trebuie să corespundă orientării arcului în graful factor obținut.

Dacă muchia obținută în graful factor rezultant la fel aparține unui factor extern, atunci se aplică operația descrisă mai sus. Dacă însă muchia aparține unui factor intern atunci se aplică operația descrisă în punctul 1.

3. Arcul nu aparține nici factorului intern și nici factorului extern.

Este evident faptul că sunt posibile cazurile când arcul inițial dat nu aparține nici unui factor intern și nici extern. Din teorema 3.1 rezultă că situația 3 descrisă mai sus se reduce la una din situațiile 1 sau 2.

În **paragraful 3.5** este generalizată problema de construire a unei orientări tranzitive forțată de o mulțime de arce.

Este evident că nu orice mulțime de arce $\overrightarrow{A_G}$ este submulțime a $\overrightarrow{U_G}$, unde $\vec{G} = (X_G; \overrightarrow{U_G})$ este o orientare tranzitivă. În continuare vom stabili unele condiții impuse mulțimii $\overrightarrow{A_G}$, astfel încât relația $\overrightarrow{A_G} \subseteq \overrightarrow{U_G}$ să fie adevărată.

Lema 3.5. *Dacă arcele* $\{[x, y], [y, z], [z, x]\} \subseteq \overrightarrow{A_G}$ *atunci această mulțime nu generează o orientare tranzitivă.*

Fie F un subgraf B-stabil al grafului tranzitiv orientabil G, iar I_F este un factor intern determinat de subgraful F, atunci este adevărată următoarea observație.

Lema 3.6. *Dacă* $[x, y]$ *și* $[s, t]$ *sunt două arce care aparțin factorului intern* I_F *determinat de subgraful B-stabil* F*, atunci orientarea tranzitivă generată de arcul* $[x, y]$ *coincide cu orientarea tranzitivă generată de arcul* $[s, t]$.

Lema 3.7. *Dacă* F *este un subgraf B-stabil al grafului tranzitiv orientabil* G*, iar* E_F *este un factor extern determinat de subgraful* F*, atunci toate arcele din* E_F *au aceeași direcție.*

Algoritmul de construire a orientării tranzitive în baza unei mulțimi de arce este divizat în două etape. În prima etapă vom construi șirul de grafuri factor. Această operație va fi aplicată și asupra mulțimii $\overrightarrow{A_G}$, după cum este descris în paragraful 3.3. În a doua etapă va fi construită orientarea tranzitivă prin parcurgerea în direcție inversă a șirului de grafuri factor.

Algoritm de construire a orientării tranzitive având o mulțime de arce date

Date de intrare: Graful tranzitiv orientabil G, mulțimea de arce $\overrightarrow{A_G}$

Date de ieșire: Orientarea tranzitivă $\vec{G}$

Etapa I

Pas 1. $i \coloneqq 1$

Pas 2. Dacă $\overrightarrow{A_{G^i}}$ nu respectă condiția de tranzitivitate: **STOP** – *Nu poate fi construită o orientare tranzitivă cu condițiile date*

Pas 3. $\overrightarrow{A_{G^0/F_0}} = \overrightarrow{A_G}$

Pas 4. Se determină subgraful B-stabil F_i

Pas 5. Se determină graful factor G^i/F_i

Pas 6. Se determină mulțimea $\overrightarrow{A_{G^i/F_i}}$

Pas 7. Dacă $G^i/F_i = G^{i-1}/F_{i-1}$: **STOP** – *Trec la Etapa a II-a*

Pas 8. $i \coloneqq i + 1$. Trec la Pas 2.

Etapa a II-a

Pas 1. $i \coloneqq k$

Pas 2. $p_i = |A_{G/F_i}|, j \coloneqq 1$

Pas 3. Dacă arcul $u_{i_j} \in \overrightarrow{A_{G^i/F_i}}$ generează o altă orientare tranzitivă: **STOP** – *Nu poate fi* *construită o orientare tranzitivă cu condițiile date*

Pas 4. Se construiește orientarea tranzitivă $\overrightarrow{G^{\iota}/F_{\iota}}$ indusă de arcul u_{i_j}

Pas 5. Dacă $j \geq p_i$: Trecem la Pas 7

Pas 6. $j \coloneqq j + 1$: Trecem la Pas 3

Pas 7. Se orientează muchiile care nu sunt dependente de $\overrightarrow{A_{G^{\iota}/F_{\iota}}}$

Pas 8. Dacă $i = 0$: **STOP** – Se r*eturnează* $\overrightarrow{G^0/F_0}$

Pas 9. $i \coloneqq i - 1$: Trec la Pas 2

În **paragraful 3.6** sunt expuse concluziile referitoare la capitolul 3.

În **Anexa 1** este prezentat codul sursă a procedurilor $Potential$ și SBS pentru determinarea unui subgraf B-stabil implementat în limbajul Javascript. Aceste proceduri sunt descrise detaliat în paragraful 2.2.

În **Anexa 2** este prezentat codul sursă implementat în limbajul Javascript al algoritmilor de construire și reconstruire a unei orientări tranzitive prezentate în capitolul 3.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Concluzii generale asupra rezultatelor obținute: Problema examinată în teza de doctor „*Grafuri tranzitiv orientabile*” face parte de direcția de cercetare din matematică ce ține de elaborarea modelelor și metodelor corespunzătoare pentru soluționarea problemelor teoretico-aplicative din diverse domenii. Rezultatele teoretice obținute în legătură cu studierea orientărilor tranzitive ale grafurilor neorientate, precum și aplicațiile acestora la studierea unor probleme de ordin aplicativ, conduc la următoarele concluzii:

1. au fost formulate problemele de caracterizare structurală a grafurilor tranzitiv orientabile, ce au permis obținerea soluției de construire a tuturor orientărilor tranzitive într-un graf. Acest rezultat este important din punct de vedere teoretic prin faptul că permite o vizualizare integrală a orientărilor tranzitive a unui graf;
2. caracterizarea grafurilor tranzitiv orientabile a devenit posibilă datorită unor proprietăți noi demonstrate ale lanțurilor netriangulate și ale subgrafurilor stabile. În mod special, cunoașterea proprietăților subgrafurilor B-stabile și a șirului complet de grafuri factor a permis caracterizarea completă a tuturor orientărilor tranzitive, precum și obținerea unei formule recurente de calculare a numărului de orientări tranzitive;

3. elaborarea metodelor și algoritmilor eficienți ce vizează problema orientării tranzitive a grafurilor neorientate a devenit posibilă datorită rezultatelor teoretice ce țin de studierea proprietăților lanțurilor netriangulate și a subgrafurilor stabile;
4. cunoașterea mecanismului de obținere a tuturor orientărilor tranzitive ale unui graf neorientat a permis soluționarea unor cazuri speciale de orientare sau reorientare tranzitivă a grafului determinată de o mulțime de arce apriori dată;
5. rezultatele teoretice obținute și metodele generate de acestea cu privire la orientarea tranzitivă a grafurilor pot servi drept bază pentru soluționarea unor probleme importante cu caracter teoretico-aplicativ, cum ar fi decompoziția rețelelor Petri, analiza codului sursă a programelor;
6. rezultatele obținute pot servi drept punct de reper pentru studierea problemei orientării tranzitive mixte, ceea ce constituie extinderea cercetării în domeniul vizat în lucrare.

Teza conține și o componentă practică, algoritmii propuși au fost realizați sub formă de bibliotecă, scrisă în limbajul javascript care a fost implementată într-un modul, realizat în limbajul PHP al platformei Drupal.

Rezultatele prezentate în lucrare pot servi ca suport pentru continuarea cercetărilor din domeniul teoriei grafurilor, prin examinarea unor cazuri speciale de colorarea grafurilor, determinării mulțimii stabile interior etc., precum și soluționarea diverselor probleme din domeniul informaticii, cum ar fi gestionarea memoriei cache în procesoarele de tip stream, decompoziția rețelelor Petri, analiza codului sursă a programelor, etc.

Avantajele și valoarea elaborărilor propuse: Rezultatele prezentate constau în lărgirea ariei de cercetare și aplicare a grafurilor perfecte, în special a grafurilor tranzitiv orientabile prin definirea a noi clase de subgrafuri stabile, precum și prin formalizarea metodelor de construire a orientărilor tranzitive și reconstruire a lor în baza unor condiții inițiale date. Elaborările propuse au o valoare științifică importantă datorită gradelor lor de noutate și originalitate. Rezultatele obținute pot fi utilizate în diverse domenii și pot avea aplicații practice în sortarea mulțimilor parțial ordonate, gestionarea memoriei cache în procesoarele de tip stream, decompoziția rețelelor Petri.

Recomandări: Investigațiile efectuate ar putea servi drept imbold pentru examinarea și soluționarea unor probleme derivate a celor expuse în lucrare:

- în contextul rezultatelor obținute merită interes studierea cazului grafurilor infinite;
- rezultatele prezentate în lucrare pot servi ca suport pentru continuarea cercetărilor

cu privire la orientarea tranzitivă mixtă a grafurilor, chestiune ce nu se regăsește la soluționarea unor probleme practice;

- rezultatele obținute pot fi aplicate pentru soluționarea problemelor actuale ce pot fi modelate cu ajutorul grafurilor tranzitiv orientabile.
- rezultatele tezei pot servi drept suport pentru un curs opțional la masterat.

BIBLIOGRAFIE

1. Berge C., *Perfect Graphs*, vol. 11, 1975, p. 1-22.
2. Bonomo F., Mattia S., Oriolo G.,*Bounded coloring of co-comparability graphs and the pickup and delivery tour combination problem,*Theoretical Computer Science, vol. 412, no. 45, 2011, p. 6261-6268.
3. Brandstädt A., Bang L.V., Spinrad J. P., *Graph Classes: A Survey*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999, p.55.
4. Cornelsen S., Di Stefano G., *Treelike comparability graphs: Characterization, Recognition, and Applications*, Elsevier, vol. 157, no. 8, 2009, p. 1711–1722.
5. Curtis A.R., Clemente I, Benson J., Lundberg S., *An implicit representation of chordal comparability graphs in linear time,* Discrete Applied Mathematic, vol. 158, 2010, p. 869-875.
6. Daskalakis C., Karp R.M, Mossel E., Riesenfeld S.J., Verbin E., *Sorting and selection in posets*, SIAM Journal on Computing, vol. 40, no. 3, 2011, p. 597-622.
7. Golumbic M.C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs* (Annals of Discrete Mathematics). Amsterdam: North-Holland Publishing Co., vol. 57, 2004, p. 340.
8. Grobelna I., *Formal verification of embedded logic controller specifcation with computer deduction in temporal logic*,Electrical Review, no. 12a, 2011, p. 40-43.
9. Gross J. L., Yellen J., Zhang P., *Handbook of Graph Theory*, 2nd ed.: Chapman and Hall/CRC, 2013, p. 1630.
10. Heggernes P., Mancini F., Papadopoulos C., *Making arbitrary graphs transitively orientable: Minimal comparability completions,*Algorithms and Computation. Kolkata: Springer Berlin Heidelberg, vol. 4288, 2006, p.419-428.
11. Heggernes P., Mancini F., Papadopoulos C., *Minimal comparability completions of arbitrary graphs*,Discrete Applied Mathematics, vol. 156, no. 5, 2008, p. 705-718.
12. Klavík P., Kratochvíl J., Krawczyk T., Walczak B., *Extending Partial Representations of Function Graphs and Permutation Graphs*, Algorithms –– ESA 2012 20th Annual European Symposium, Ljubljana, Slovenia, September 10-12, 2012. Proceedings, vol.

7501, 2012,p. 671-682.

13. Milik A., Hrynkiewicz E., *Synthesis and Implementation of Reconfigurable PLC on FPGA Platform*,International Journal of Electronics, vol. 58, no. 1, 2012, p. 85-94.
14. Möhring R.H., *Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs*, Graphs and Order, Springer Netherlands, vol. 147,1985, p. 41-101.
15. Shamir R., *Advanced Topics in Graph Algorithms*, Sariel Har-Peled, Ed. Tel-Aviv: Tel-Aviv University, 1994, p. 51.
16. Toadere T., *Grafe: teorie, algoritmi și aplicații*, Smaranda Derveșeanu, Ed. Cluj-Napoca: Editura Albastră, 2009, p. 198.
17. Wen-Lian H., Tze-Heng M., *Fast and simple algorithms for recognizing chordal comparability graphs and interval graphs*,SIAM J.Comput., vol. 28, 1999, p. 1004-1020.
18. Wisniewska M., *Application of Hypergraphs in Decomposition*, University of Zielona Góra, Zielona Góra, Lecture Notes in Control and Computer Science Vol. 23 ser. LNCCS, 2012, p. 147.
19. Wisniewski R., Karatkevich A., Adamski M, Kur D., *Application of comparability graphs in decomposition of Petri nets*,Human System Interactions (HSI), 2014 7th International Conference, 2014, p. 216-220.
20. Xuejun Y, Li W., Jingling X, Yu D, Ying Z., *Comparability Graph Coloring for Optimizing Utilization of Stream Register Files in Stream Processors*,Proceedings of the 14th ACM SIGPLAN symposium on Principles and practice of parallel programming, vol. 44, no. 4, 2009, p. 111-120.
21. ЗыковА.А., *Основы теории графов*. Москва: Вузовская книга, 2004, c. 664.
22. Евстигнеев В.А., *Применение теории графов в программировании.* Москва: Наука, 1985, 352 c.

PUBLICAȚIILE AUTORULUI LA TEMA TEZEI

23. Cataranciuc S., Grigoriu N. *Algorithmic Approach in Reorientation of Comparability Graphs*, Studia Universitatis Babeș-Bolyai, Informatica, 2015, vol. LX, no. 2, p. 37-46.
24. Cataranciuc S., Grigoriu N. *Clase de subgrafuri stabile în orientarea tranzitivă a grafurilor*, Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Științe exacte și economice”.2015, No.2(82), p. 21-30.
25. Cataranciuc S., Grigoriu N. Lanțuri netriangulate și mulțimi stabile într-un graf neorientat, *Conferința interuniversitară.* Educație prin cercetare – garant al performanței învățământului superior., Chișinău, 2012, p. 88-90.

26. Cataranciuc S., Grigoriu N. *Transitive orientations on undirected graphs*, Proceedings of the „Doctoral Intensive Summer School on Evolutionary Computing in Optimisation and Data Mining (ECODAM)”, Iași, 2012, p. 165-169.
27. Grigoriu N. *Asupra numărului de orientări tranzitive într-un graf*, Conferinţa Ştiinţifică, „Integrare prin Cercetare şi Inovare”, Chișinău, 10-11 noiembrie 2015, p.180 – 182.
28. Grigoriu N. *B-stable subgraphs in undirected graphs,*Proceedings of the third conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chișinău, 2014, p.354-357.
29. Grigoriu N. *Construction of a transitive orientation using B-stable subgraphs*, Computer Science Journal of Moldova, 2015, vol. 23, no. 67, p. 11-23.
30. Grigoriu N. *Minimal stable subgraphs in undirected graphs*, International conference, Mathematics & Information Technologies: Research and Education(MITRE-2013), Chișinău, 2013, p. 48-49.
31. Grigoriu N. *Number of transitive orientations in an undirected graph*, International conference, Mathematics & Information Technologies: Research and Education(MITRE-2015), Chișinău, 2015, p. 42-43.
32. Grigoriu N. *Orientarea tranzitivă a grafurilor ce nu conține subgrafuri stabile maximale*, Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии,Proceedings, Chișinău, 2014, p. 87-94.
33. Grigoriu N. *Stable subgraphs and non-triangulated chains*, The 20th conference on applied and industrial mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu, Chișinău, 2012, p. 118-119.
34. Grigoriu N. *Subgrafuri stabile într-un graf neorientat*, Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale. Conferința internațională, Proceedings, Chișinău, 2012, p.19-23.
35. Grigoriu N. *Subgrafurile B-stabile în orientarea tranzitivă a grafurilor*, Conferința Științifică Internațională a doctoranzilor Tendințe Contermporane ale Dezvoltării Științei: Viziuni ale Tinerilor Cercetători, Chișinău, 2015, p. 19.
36. Grigoriu N. *Transitive Orientation of Graph using B-stable subgraphs*, The 23rd Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2015), Suceava, 2015, p. 65.

ADNOTARE

la teza de doctor „***Grafuri tranzitiv orientabile***”,
înaintată de către Grigoriu Nicolae pentru obținerea titlului de doctor în științe matematice la specialitatea 112.03 – Cibernetică Matematică și Cercetări Operaționale

Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău în anul 2016.

Structura tezei: Teza este scrisă în limba română și conține introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie ce cuprinde 119 de titluri. Lucrarea conține 113 pagini text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 14 lucrări științifice.

Cuvintele cheie: graf tranzitiv orientabil, subgraf stabil, lanț netriangulat, graf factor, orientare tranzitivă, graf de comparabilitate.

Domeniul de studiu al tezei: Teoria grafurilor

Scopul și obiectivele lucrării. Caracterizarea structurală a grafurilor tranzitiv orientabile și elaborarea în baza acesteia a algoritmilor de construire a orientărilor tranzitive pentru grafurile neorientate cu restricții asupra muchiilor. Obiective: determinarea rolului lanțurilor netriangulate în construirea orientărilor tranzitive a grafurilor; examinarea proprietăților subgrafurilor B-stabile și rolul acestora la construirea grafurilor factor; studierea șirului complet de grafuri factor pentru descrierea problemei orientărilor tranzitive ale unui graf neorientat; determinarea formulei recurente de calcul a numărului de orientări tranzitive ale grafului; elaborarea algoritmilor pentru construirea orientărilor tranzitive cu restricții asupra muchiilor orientabile.

Noutatea și originalitatea științifică constă în studierea unei clase noi de grafuri stabile și construirea în baza proprietăților acestora a șirului complet de grafuri factor, folosit la soluționarea problemei orientării tranzitive a grafurilor neorientate, precum și la soluționarea problemei de enumerare a acestor orientări prin deducerea unei formule recurente.

Problema științifică importantă soluționată*constă în* determinarea unei clase de subgrafuri stabile folosite la studierea problemei de orientare tranzitivă și caracterizarea structurală a grafurilor tranzitiv orientabile, *care au condus la* obținerea unei metode eficiente pentru construirea orientărilor tranzitive și calcularea numărului acestor orientări.

Semnificația teoretică este determinată de obținerea unei caracterizări structurale a grafurilor tranzitiv orientabile. Se propune o metodă eficientă de studiere a orientărilor tranzitive în baza unui șir complet de grafuri factor.

Valoare aplicativă. Se propun algoritmi de construire a orientărilor tranzitive ale unui graf neorientat ce completează aspectul aplicativ al problemei studiate la soluționarea problemelor practice: testarea codului sursă al programelor, decompoziția rețelelor Petri, etc.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele obținute pot servi pentru inițierea unor cercetări în domeniu pentru studenții și masteranzii universităților, pot servi drept suport pentru unele cursuri opționale, pentru soluționarea problemelor practice. Algoritmii elaborați sunt realizați sub formă de programe în limbajul Javascript.

АННОТАЦИЯ

диссертационной работы “***Транзитивно ориентируемые графы***”, представленной автором Николае Григориу на соискание учёной степени кандидата математических наук по специальности 112.03 – Математическая Кибернетика и Исследование Операций

Диссертация выполнена в МолдавскомГосударственномУниверситете,Кишинёв, 2016.

Структура работы: Диссертация написана на румынском языке и содержит введение, три главы, заключение с рекомендациями, список цитированной литературы из 119 наименований. Работа содержит113страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 14 научных работах.

Ключевые слова:транзитивно ориентируемый граф, стабильный подграф, нетриангулированная цепь, граф фактор, транзитивная ориентация, граф сравнения.

Область исследования: Теория графов.

Цель исследования.Структурная характеристика транзитивно ориентируемых графов и разработка алгоритмов для построения транзитивной ориентаций с ограничениями по дугам графа; определения ролинетриангулированных цепей в построении транзитивных ориентаций; изучение свойств Б-стабильных подграфов для построения графов фактор, изучение полного ряда графов фактор для описания проблемы транзитивных ориентаций неориентированного графа; определения рекурсивной формулы для подсчета количество транзитивных ориентаций графа.

Научная новизна и оригинальностьвыражается в том, что был описан новый класс стабильных подграфов и построение полного ряда графов фактор на основе их свойств, используемый для решения задачи транзитивной ориентации неориентированныхграфов, в том числе и для решения проблемы подсчета этих ориентаций через дедукции рекурсивной формулы.

Решенная важная научная задача*состоит в* определения нового класса стабильных подграфов, используемых для транзитивной ориентации и структурируемой характеристики транзитивно ориентируемых графов *которое привело к* получению эффективного метода для построения транзитивных ориентаций и подсчета их количество.

Теоретическая ценность работы определяется получением структурной характеристики транзитивно ориентируемых графов. Предлагается эффективный метод для изучения транзитивных ориентаций на основе полного ряда графов фактор.

Практическая ценность работы. Предлагаются алгоритмы построения транзитивных ориентаций неориентированного графа, которые дополняют практическую часть изучаемой задачи решением практических задач: анализ исходного кода программ, декомпозиция сетей Петри, и др.

Внедрениенаучныхрезультатов.Полученные результаты могут лечь в основу выборатем для обучения студентов. Разработанные алгоритмы реализованы в виде программ на программном языке Javascript.

ANNOTATION

of the thesis “**Transitively orientable graphs**”
submitted by Nicolae Grigoriu for obtaining the Doctor degree in Mathematics,
specialty 112.03 – Mathematical Cybernetics and Operations Research

The thesis has been elaborated in Chisinau, Moldova State University, in 2016.

Thesis structure: The thesis is written in Romanian language and contains an introduction, three chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography of 119 titles, 113 pages of main text. Obtained results were published in 14 scientific papers.

Keywords: transitively orientable graph, stable subgraph, non-triangulated chain, graph factor, transitive orientation, comparability graph.

The field of study: Graph theory

The aim of the research. Structural characterization of the transitively orientable graphs and elaboration of the algorithms for the transitive orientation construction based on these characterizations. Objectives: definition of the non-triangulates chains role in construction of the transitive orientations, examination of the B-stabile subgraph properties and their role in construction of the graphs factor, study of the complete sequence of the graphs factor for the transitive orientation problem, definition of a recurrence formula for calculation of the number of transitive orientations in a graph.

The scientific novelty and originality is reflected in the following: there was described a new class of the stable subgraphs and based on their properties there was defined the complete sequence of graphs factor, that are used for the solution of the transitive orientation of undirected graphs, as well for the problem of the counting the number of transitive orientations of a graph.

Important scientific problem solved in the research *consists in* definition of a new class of stable subgraphs used for the study of the transitive orientation problem and structural characterization of the transitive orientable graphs, *which leads to* the obtaining of an efficient method for construction of transitive orientations of the graph and counting number of them.

The theoretical significance of the work is defined by the results which describe the structural characterization of transitive orientable subgraphs. It is proposed an efficient method of study of the transitive orientations based on a complete sequence of graphs factor.

The applicative value of the paper. There are proposed algorithms for construction of transitive orientations of an undirected graph, which completes the practical aspect of the studied problem for the solution of practical problems: testing of the source code of the programs, decomposition of the Petri nets, etc.

The implementation of the scientific results: The results might provide a basis for selecting thethemes for students. The developed algorithms are implemented as a software in Javascript programming language.

GRIGORIU NICOLAE

GRAFURI TRANZITIV ORIENTABILE

112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ
ȘI CERCETĂRI OPERAȚIONALE

Autoreferatul tezei de doctor în științe matematice

Aprobat spre tipar: 10.03.2016	Formatul hârtiei: 60x84 $^1/_{16}$
Hârtie ofset. Tipar ofset.	Tiraj 50 ex.
Coli de tipar: 1,7	Comanda nr. 180

Centrul Editorial-Poligrafic al USM
str. Alexe Mateevici, nr. 60, Chișinău, MD-2009