

ТИРАСПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

MSC: 16W60, 13A18

УДК: 512.556.3

АЛЕЩЕНКО СВЕТЛАНА

**ПОЛУИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ
ПСЕВДОНОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ И ЕГО СВОЙСТВА**

**111.03 – МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И
ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

Диссертация на соискание ученой степени доктора математических наук

Научный руководитель: _____ Арнаутов В.И.,
профессор, доктор
хабилитат физико-
математических наук,
академик АН Молдовы

Автор: _____

КИШИНЕВ, 2016

UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL

Cu titlu de manuscris

MSC: 16W60, 13A18

C.Z.U.: 512.556.3

ALIOȘCENCO SVETLANA

**IZOMORFISMUL SEMIIZOMETRIC AL INELELOR
PSEUDONORMATE ȘI PROPRIETĂȚILE LUI**

111.03 – LOGICĂ MATEMATICĂ, ALGEBRA ȘI TEORIA NUMERELOR

Teză de doctor în științe matematice

Conducător științific: _____ Arnautov Vladimir,
doctor habilitat în științe
fizico-matematice,
profesor universitar,
academician al A.Ș.M.

Autorul: _____

CHIȘINĂU, 2016

© Alioşcenco Svetlana 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Adnotare (на румынском, русском и английском).....	6
ВВЕДЕНИЕ.....	9
1. ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗОМОРФИЗМОВ КОЛЕЦ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.....	16
1.1. Истоки исследования колец с дополнительными структурами	16
1.2. Обзор работ по исследованию гомоморфизмов и изоморфизмов топологических колец	19
1.3. Выводы по главе 1.....	40
2. ТЕОРЕМЫ О СУЖЕНИИ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ГОМОМОРФИЗМОВ ДЛЯ ПСЕВДОНОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ.....	41
2.1. Сужение изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на различные подкольца	41
2.2. Сужение изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на односторонний идеал	43
2.3. Сужение изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на двусторонний идеал.....	51
2.4. Сужение изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на достижимое подкольцо	61
2.5. Выводы по главе 2.....	78
3. КОНСТРУКЦИИ ПСЕВДОНОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ, СОХРАНЯЮЩИЕ ПОЛУИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ	81
3.1. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к подкольцам и факторкольцам псевдонормированных колец.....	81
3.2. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к пополнению псевдонормированных колец	86
3.3. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к пределу семейства псевдонорм	91
3.4. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к супремуму семейства псевдонорм	97
3.5. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к конечной прямой сумме псевдонормированных колец.....	102

3.6. Полуизометрический изоморфизм в кольце матриц	108
3.7. Выводы по главе 3.....	121
ОБЩИЕ ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ	125
БИБЛИОГРАФИЯ	128
ДЕКЛАРАЦИЯ ОБ ОТВЕТСТВЕННОСТИ	134
CURRICULUM VITAE	135

ADNOTARE
la teză de doctor a dnei Alioșcenco Svetlana
“Izomorfismul semiizometric al inelelor pseudonormate și proprietățile lui”

Teza este înaintată pentru obținerea gradului de doctor în științe matematice, la specialitatea 111.03 – Logică matematică, algebră și teoria numerelor. Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Tiraspol, Chișinău, în anul 2016.

Structura tezei. Teză este scrisă în limba rusă și constă din introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie din 85 titluri, 127 pagini de text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 15 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: inel pseudonormat, ideal, inel factor, subinel, ideal unilateral, subinel accesibil, omomorfism izometric, izomorfism semiizometric.

Domeniul de studiu al tezei: studiul proprietăților omomorfismelor și izomorfismelor de inele pseudonormate și aplicațiile lor.

Scopul și obiectivele lucrării:

- determinarea claselor de izomorfisme speciale ale inelelor pseudonormate pentru care există analoage ale celei de a doua teoreme de izomorfism;
- studiul proprietăților izomorfismelor speciale ale inelelor pseudonormate;
- studiul construcțiilor cu inele pseudonormate care păstrează izomorfismele speciale.

Noutatea și originalitatea științifică:

- au fost definite conceptele de izomorfism semiizometric (semiizometric la stânga, semiizometric la dreapta) pentru inelele pseudonormate;
- au fost elaborate criterii de izomorfism semiizometric (semiizometric la stânga, semiizometric la dreapta);
- au fost stabilite unele proprietăți ale izomorfismului semiizometric (semiizometric la stânga, semiizometric la dreapta);
- au fost demonstrate teoremele despre păstrarea izomorfismului semiizometric (semiizometric la stânga, semiizometric la dreapta) pentru unele construcții cu inele pseudonormate.

Problema științifică importantă soluționată constă în determinarea claselor de izomorfisme ale inelelor pseudonormate pentru care există analoage ale celei de a doua teoreme de izomorfism și studiul proprietăților lor, ceea ce a condus la investigarea construcțiilor cu inele pseudonormate care păstrează aceste izomorfisme.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării constă în elaborarea unor metode de cercetare a izomorfismelor de inele pseudonormate privind semiizometricitatea (semiizometricitatea la stânga, semiizometricitatea la dreapta), stabilirea unor condiții suficiente de păstrare a izomorfismului semiizometric (semiizometric la stânga, semiizometric la dreapta) pentru unele construcții cu inele pseudonormate.

Implementarea rezultatelor științifice:

- rezultatele și metodele dezvoltate în teză pot fi aplicate în investigațiile ulterioare ale izomorfismelor și omomorfismelor de inele pseudonormate și de inele Banach;
- rezultatele din teză pot fi aplicate în construirea teoriei generale a radicalilor pentru inelele pseudonormate;
- rezultatele din teză pot servi drept suport pentru teme de masterat și pot constitui conținutul unor cursuri speciale pentru studenții și masteranzii de la specialitățile matematice.

АННОТАЦИЯ

на диссертацию Алещенко Светланы

«Полуизометрический изоморфизм псевдонормированных колец и его свойства»

Диссертация представлена на соискание ученой степени доктора математических наук, специальность 111.03 – Математическая логика, алгебра и теория чисел. Диссертация разработана в Тираспольском Государственном Университете, г. Кишинев, в 2016 году.

Структура диссертации. Диссертация написана на русском языке и состоит из введения, трех глав, общих выводов и рекомендаций, списка цитируемой литературы из 85 наименований, 127 страниц основного текста. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ.

Ключевые слова: псевдонормированное кольцо, идеал, факторкольцо, подкольцо, односторонний идеал, достижимое подкольцо, изометрический гомоморфизм, полуизометрический изоморфизм.

Область исследования: изучение свойств гомоморфизмов и изоморфизмов псевдонормированных колец и их приложения.

Цель и задачи исследования:

- определение классов специальных изоморфизмов псевдонормированных колец, для которых имеют место аналоги второй теоремы об изоморфизме;
- исследование свойств специальных изоморфизмов псевдонормированных колец;
- исследование конструкций псевдонормированных колец, сохраняющих специальные изоморфизмы.

Научная новизна и оригинальность:

- были определены понятия полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) псевдонормированных колец;
- были доказаны критерии полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа);
- были установлены некоторые свойства полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа);
- были доказаны теоремы о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) для некоторых конструкций псевдонормированных колец.

Решенная важная научная проблема заключается в определении и изучении классов изоморфизмов псевдонормированных колец, для которых имеют место аналоги второй теоремы об изоморфизме, что приведет к исследованию конструкций псевдонормированных колец, сохраняющих такие изоморфизмы.

Теоретическое значение и практическая ценность работы состоит в разработке методов исследования изоморфизмов псевдонормированных колец на полуизометричность (полуизометричность слева, полуизометричность справа), установлении достаточных условий сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) для некоторых конструкций псевдонормированных колец.

Внедрение научных результатов:

- результаты и методы, разработанные в диссертации, могут быть применены в дальнейших исследованиях изоморфизмов и гомоморфизмов псевдонормированных и банаховых колец;
- результаты диссертации могут быть применены при построении общей теории радикалов псевдонормированных колец;
- результаты диссертации могут служить пособием для студентов при выполнении магистерских диссертаций и могут составлять содержание некоторых спецкурсов для студентов математических специальностей бакалавриата и магистратуры.

ANNOTATION
of PHD thesis by Aleschenko Svetlana
“A semi-isometric isomorphism of pseudonormed rings and its properties”

This thesis is submitted to obtain a doctoral degree in Mathematics, specialty 111.03 – Mathematical logic, algebra and numbers theory. It was elaborated at Tiraspol State University, in Chisinau, 2016.

Thesis structure: the thesis is written in Russian and consists of an introduction, three chapters, general conclusions and recommendations, bibliography of 85 titles, 127 pages of main text. The obtained results are published in 15 scientific papers.

Keywords: pseudonormed ring, ideal, quotient ring, subring, one-sided ideal, accessible subring, isometric homomorphism, semi-isometric isomorphism.

Field of study of the thesis: belongs to study of properties of homomorphisms and isomorphisms of pseudonormed rings and their applications.

Thesis aim and objectives:

- determination of classes of special isomorphisms of pseudonormed rings for which analogues of the second isomorphism theorem hold;
- study of properties of special isomorphisms of pseudonormed rings;
- study of constructions of pseudonormed rings which are preserving special isomorphisms.

Scientific novelty and originality:

- were defined concepts of a semi-isometric isomorphism (semi-isometric isomorphism on the left, semi-isometric isomorphism on the right) of pseudonormed rings;
- were proved criterions of a semi-isometric isomorphism (semi-isometric isomorphism on the left, semi-isometric isomorphism on the right);
- were established some properties of a semi-isometric isomorphism (semi-isometric isomorphism on the left, semi-isometric isomorphism on the right);
- were proved theorems about preservation of a semi-isometric isomorphism (semi-isometric isomorphism on the left, semi-isometric isomorphism on the right) for some constructions of pseudonormed rings.

The important scientific solved problem consists of determination of classes of special isomorphisms of pseudonormed rings for which analogues of the second isomorphism theorem hold and study of their properties which led to study of constructions of pseudonormed rings which are preserving these isomorphisms.

The theoretical significance and applicative value of the thesis consists in development of research methods for isomorphisms of pseudonormed rings on semi-isometry (semi-isometry on the left, semi-isometry on the right), establishment of sufficient conditions of preservation of semi-isometric isomorphism (semi-isometric isomorphism on the left, semi-isometric isomorphism on the right) for some constructions of pseudonormed rings.

The implementation of the scientific results:

- the results and methods which are developed in the thesis can be applied for further investigations of isomorphisms and homomorphisms of pseudonormed rings and Banach rings;
- the results of the thesis can be applied to the construction of the general theory of radicals of pseudonormed rings;
- the results of the thesis can serve as support for master thesis and can be used as content for some special courses of undergraduate and graduate programs for students of mathematical specialties.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы.

В 40-х годах прошлого столетия начала активно развиваться теория топологических колец и групп. Исследованиями в области топологических колец и групп занимались такие математики как Л.С. Понтрягин, Л.А. Скорняков, В.А. Андрунакиевич, В.И. Арнаут, М.И. Водинчар, А.В. Михалев, С.Т. Главацкий, М.И. Урсул, и многие другие. В этой области топологической алгебры получен ряд фундаментальных результатов, которые отражены в работах [8], [10], [14], [15], [19], [20], [29], [37], [39], [62], [69], [70].

Важным классом топологических колец являются кольца, топологии которых заданы некоторой псевдонормой. В работах [14], [62] рассмотрены критерии псевдонормируемости топологических колец, тел, модулей и векторных пространств, задание псевдонормы на факторкольце; в работах [15], [62] рассмотрены вопросы, связанные с пополнением топологических и, в частности, псевдонормированных колец, прямые произведения топологических колец. Исследования, связанные с вопросами существования нормы и псевдонормы, также представлены в работах [8], [76], [77], [78], [79], [81], [82] – [85].

Наиболее изученным классом псевдонормированных колец являются нормированные и банаховы кольца. В этой области исследованиями занимались такие математики как И.М. Гельфанд, Д.А. Райков, Г.Е. Шилов, М.А. Наймарк, А.Я. Хелемский, Ч.Е. Рикарт, и другие. Результаты этих исследований отражены в работах [22], [34], [42], [67], [80].

В 50-годах XX века зародилась общая теория радикалов дискретных колец, с развитием которой в 50-60-х годах начала развиваться и теория радикалов топологических колец. Основоположником теории радикалов дискретных колец является А.Г. Курош. В работе [31] А.Г. Курош заложил основу для дальнейшего плодотворного исследования в теории радикалов дискретных и топологических колец. Исследованиями в области теории радикалов дискретных и топологических колец занимались многие математики, в частности, А.Г. Курош, В.А. Андрунакиевич, Ю.М. Рябухин, В.И. Арнаут, М.И. Водинчар, С.Т. Главацкий и А.В. Михалев. Результаты исследований по теории радикалов дискретных колец отражены в работах [5], [30], [31]; исследования по радикалам топологических колец представлены в работах [6], [7], [9], [10], [11], [12], [13], [16], [17], [21], [23], [24], [63].

В современной алгебре и теории радикалов часто применяется следующая теорема об изоморфизме (вторая теорема об изоморфизме).

Пусть R – кольцо, B – подкольцо кольца R . Если N – идеал кольца R , то факторкольца $B/(B \cap N)$ и $(B + N)/N$ изоморфны.

Для топологических и псевдонормированных колец теорема об изоморфизме не всегда верна ([59], теорема 1; [53], теорема 2.1). Поэтому необходимо выделить условия, при которых имеют место аналоги теоремы об изоморфизме для топологических и псевдонормированных колец.

Аналоги теоремы об изоморфизме для топологических колец и групп были изучены В.И. Арнаутовым в работах [10], [59], [60], [61]. Были получены аналоги теоремы об изоморфизме для случаев, когда: B является идеалом топологического кольца; B является достижимым подкольцом топологического кольца; B является односторонним идеалом топологического кольца. Также были изучены аналоги теоремы об изоморфизме для топологических групп. Эти теоремы применяются при исследовании радикалов и квазирадикалов топологических колец, как мы можем видеть в работах [9], [10], [16], [17], [21], [63].

Для построения общей теории радикалов псевдонормированных колец необходимо иметь аналоги теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец, а также теорию изоморфизмов и гомоморфизмов псевдонормированных колец. Аналоги теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец ранее изучены не были; общая теория радикалов и теория изоморфизмов и гомоморфизмов псевдонормированных колец ранее не подвергалась глубокому исследованию.

Цель и задачи исследования заключаются в исследовании специальных изоморфизмов псевдонормированных колец и построении их общей теории. В частности:

- определение классов специальных изоморфизмов псевдонормированных колец, для которых имеют место аналоги второй теоремы об изоморфизме;
- исследование свойств специальных изоморфизмов псевдонормированных колец;
- исследование конструкций псевдонормированных колец, сохраняющих специальные изоморфизмы.

Научная новизна и оригинальность:

- были определены понятия полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) псевдонормированных колец;
- были доказаны критерии полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа);
- были установлены некоторые свойства полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа);
- были доказаны теоремы о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) для некоторых конструкций псевдонормированных колец.

Решенная важная научная проблема заключается в определении и изучении классов изоморфизмов псевдонормированных колец, для которых имеют место аналогии второй теоремы об изоморфизме, что приведет к исследованию конструкций псевдонормированных колец, сохраняющих такие изоморфизмы.

Теоретическое значение и практическая ценность работы состоит в разработке методов исследования изоморфизмов псевдонормированных колец на полуизометричность (полуизометричность слева, полуизометричность справа), установлении достаточных условий для сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к некоторым конструкциям псевдонормированных колец, что позволит в дальнейшем применить их в теории псевдонормированных колец и модулей, в теории банаховых алгебр, а также при построении общей теории радикалов псевдонормированных колец.

Положения, выносимые на защиту:

1. Кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ псевдонормированных колец является полуизометрическим слева тогда и только тогда, когда
$$\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(a)} \leq \bar{\xi}(\varphi(b)) \leq \xi(b)$$
 для любых $a, b \in R \setminus \{0\}$.

2. Кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ псевдонормированных колец является полуизометрическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(a)} \leq \bar{\xi}(\varphi(b)) \leq \xi(b)$ и $\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(b)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ для любых $a, b \in R \setminus \{0\}$.
3. Кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ псевдонормированных колец является суперпозицией n полуизометрических изоморфизмов тогда и только тогда, когда φ можно продолжить до изометрического гомоморфизма $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$, где (R, ξ) является достижимым подкольцом ступени не больше чем n кольца $(\hat{R}, \hat{\xi})$.
4. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа), $\bar{J}$ – замкнутый идеал в $(\bar{R}, \bar{\xi})$, $\Phi(r + \varphi^{-1}(\bar{J})) = \varphi(r) + \bar{J}$, то изоморфизм $\Phi: (R, \xi)/\varphi^{-1}(\bar{J}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})/\bar{J}$ также является полуизометрическим изоморфизмом (полуизометрическим слева, полуизометрическим справа).
5. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа), и (R, ξ) имеет элемент, не являющийся обобщенным делителем нуля (правым обобщенным делителем нуля, левым обобщенным делителем нуля), то изоморфизм φ можно продолжить до полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\tilde{\bar{R}}, \tilde{\bar{\xi}})$, где $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ и $(\tilde{\bar{R}}, \tilde{\bar{\xi}})$ – пополнения псевдонормированных колец (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$, соответственно.
6. Если $\varphi_k: (R_k, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}_k, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) для всех $k = 1, 2, \dots, n$, $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ и $\bar{R} = \bigoplus_{k=1}^n \bar{R}_k$ – прямые суммы колец, $\zeta_\gamma(r) = \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(r_k))^\gamma \right)^{1/\gamma}$, $\zeta_\infty(r) = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k(r_k)$, $\bar{\zeta}_\gamma(\bar{r}) = \left(\sum_{k=1}^n (\bar{\xi}_k(\bar{r}_k))^\gamma \right)^{1/\gamma}$, $\bar{\zeta}_\infty(\bar{r}) = \max_{1 \leq k \leq n} \bar{\xi}_k(\bar{r}_k)$, то для любых $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$ отобра-

жение $\Phi: (R, \zeta_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ является полуизометрическим изоморфизмом (полуизометрическим слева, полуизометрическим справа), где

$$\Phi((r_1, r_2, \dots, r_n)) = (\varphi_1(r_1), \varphi_2(r_2), \dots, \varphi_n(r_n)).$$

7. Если $\gamma, \sigma \geq 1$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$, то функция $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}(A) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$ задает

псевдонорму в кольце матриц R_n .

8. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа), $\Phi: R_n \rightarrow \bar{R}_n$ – изоморфизм, действующий по

правилу $\Phi(A) = (\varphi(a_{ij}))_{i,j=1}^n$, и $1 \leq \gamma = \bar{\gamma} \leq \infty$, $1 \leq \sigma = \bar{\sigma} \leq \infty$, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$

$(1 \leq \gamma = \bar{\gamma} \leq \infty, 1 \leq \sigma \leq \bar{\sigma} \leq \infty, \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1; 1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty, 1 \leq \sigma = \bar{\sigma} \leq \infty, \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1)$,

то $\Phi: (R_n, \eta_{\xi, \gamma, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, \bar{\sigma}})$ является полуизометрическим изоморфизмом (полуизометрическим слева, полуизометрическим справа).

Апробация результатов.

Результаты диссертационного исследования были представлены на следующих научных конференциях и семинарах:

- Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 40 anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science of ASM (Chisinau, 2004);
- IV Международная научно-практическая конференция “Математическое моделирование в образовании, науке и производстве” (Тирасполь, 2005);
- 5th International Algebraic Conference in Ukraine (Odessa, 2005);
- International Conference on Radicals, ICOR-2006 (Kyiv, 2006);
- The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics (Chisinau, 2006);
- 6th International Algebraic Conference in Ukraine (Kamyanets-Podilsky, 2007);
- International Conference Algebraic Systems and their Applications in Differential Equations and other domains of mathematics dedicated to Vladimir A. Andrunachievici (1917-1997), Constantin S. Sibirschi (1928-1990) (Chisinau, 2007);

- 7th International Algebraic Conference in Ukraine (Kharkov, 2009);
- The 20-th Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu (Chisinau, 2012);
- VIII Международная научно-практическая конференция “Математическое моделирование в образовании, науке и производстве” (Тирасполь, 2013).

Публикации.

Основные результаты были опубликованы в 15 научных работах: 5 статьях ([1], [2], [48], [53], [56]) и 10 тезисах конференций ([3], [4], [46], [47], [49], [50], [51], [52], [54], [55]).

Структура работы.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, общих выводов и рекомендаций, списка цитируемой литературы. Работа изложена на 127 страницах и содержит 85 библиографических ссылок.

В первой главе диссертационной работы рассматриваются истоки исследования колец с дополнительными структурами, обсуждаются условия развития общей теории радикалов в алгебраических системах, приводится обзор научных работ в области исследования гомоморфизмов и изоморфизмов топологических колец, рассматриваются основные понятия и теоремы теории псевдонормированных колец, а также основные неравенства, используемые в диссертационном исследовании. На основе анализа исследований в области топологических колец и общей теории радикалов топологических колец сформулированы цель и задачи данной работы.

Во второй главе изучаются аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец. Рассматривается сужение изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на различные подкольца, односторонние идеалы, двусторонние идеалы, достижимые подкольца. Для псевдонормированных колец вводятся понятия полуизометрического изоморфизма слева, полуизометрического изоморфизма справа и двустороннего полуизометрического изоморфизма. Доказываются критерии полуизометрического изоморфизма слева (справа) и двустороннего полуизометрического изоморфизма. Изучаются свойства полуизометрического изоморфизма слева (справа), двустороннего полуизометрического изоморфизма. Доказываются теоремы о суперпозиции полуизометрических изоморфизмов.

В третьей главе изучаются конструкции, сохраняющие односторонний и двусторонний полуизометрический изоморфизм. Доказываются теоремы о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к подкольцам, при переходе к факторкольцам. Изучаются условия, при которых сохраняется полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) при переходе к пополнениям псевдонормированных колец. Доказываются теоремы о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к пределу семейства псевдонорм, при переходе к супремуму семейства псевдонорм. Изучаются условия, при которых сохраняется полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) при переходе к конечной прямой сумме псевдонормированных колец. Рассматривается конструкция псевдонормы в кольце матриц, и доказываются достаточные условия корректности данной конструкции. Приводятся контрпримеры, показывающие невозможность использования данной конструкции для колец действительных матриц при нарушении этих условий. Изучаются условия, при которых сохраняется полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) в кольце матриц над псевдонормированным кольцом с введенной конструкцией псевдонормы.

Ключевые слова: псевдонормированное кольцо, идеал, факторкольцо, подкольцо, односторонний идеал, достижимое подкольцо, изометрический гомоморфизм, полуизометрический изоморфизм.

1. ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗОМОРФИЗМОВ КОЛЕЦ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1. Истоки исследования колец с дополнительными структурами

В теории дискретных колец и теории дискретных групп и, в частности, в общей теории радикалов колец и групп большую роль играют следующие теоремы об изоморфизмах.

Первая теорема об изоморфизме. Любой идеал (нормальный делитель) I кольца (группы) R определяет структуру кольца (группы) на фактормножестве R/I , причем R/I является гомоморфным образом кольца (группы) R с ядром I . Обратно: каждый гомоморфный образ $R' = f(R)$ кольца (группы) R изоморфен $R/\text{Ker } f$.

Вторая теорема об изоморфизме. Пусть R – кольцо (группа), S – подкольцо (подгруппа), I – идеал (нормальный делитель) в R . Тогда факторкольца (факторгруппы) $(S+I)/I$ и $S/(S \cap I)$ изоморфны. В частности, если $S \cap I = \{0\}$, то тогда кольца (группы) S и $(S+I)/I$ изоморфны.

Третья теорема об изоморфизме. Пусть R – кольцо (группа), S – идеал (нормальный делитель) в R . Если I – такой идеал (нормальный делитель) в R , что $I \subset S$, то тогда факторкольца (факторгруппы) R/S и $(R/I)/(S/I)$ изоморфны.

Если кольцо или группа R имеет дополнительную структуру, а именно топологию, псевдонорму или порядок, то при формулировке аналогов теорем об изоморфизмах естественно требовать, чтобы изоморфизм сохранял эту дополнительную структуру.

Так, например:

если (R, τ) – топологическое кольцо (топологическая группа), то изоморфизм должен быть и гомеоморфизмом соответствующих топологических пространств;

если (R, ξ) – псевдонормированное кольцо, то изоморфизм должен быть изометрией соответствующих метрических пространств.

Для гомоморфизмов топологических колец (групп) нужно рассматривать условия непрерывности гомоморфизма и открытости гомоморфизма.

Поэтому для колец с дополнительной структурой дело обстоит сложнее.

Во-первых, нужно на факторкольце (факторгруппе) R/I определить соответствующую структуру.

Наиболее удачной топологией на факторкольце (факторгруппе) R/I является наибольшая топология, для которой естественный гомоморфизм $\varphi: R \rightarrow R/I$ является непрерывным.

Аналогично, псевдонормой на факторкольце R/I псевдонормированного кольца (R, ξ) является псевдонорма $\bar{\xi}$ такая, что $\bar{\xi}(r + I) = \inf \{ \xi(r + a) \mid a \in I \}$.

Кроме того, для того, чтобы определённая на факторкольце (факторгруппе) R/I топология $\bar{\tau}$ ($\bar{\tau} = \tau_{\bar{\xi}}$, если (R, ξ) – псевдонормированное кольцо) была отделимой, необходимо и достаточно, чтобы I был замкнутым идеалом в (R, τ) (см. [14], теорема 1.3.2).

Во-вторых, для введенных таким образом на факторкольце топологии и псевдонормы вторая теорема об изоморфизме не всегда верна, а первая и третья теоремы об изоморфизмах остаются справедливыми (например, см. [14], следствие 1.5.14).

Как показано в работе [59], изоморфизм, указанный во второй теореме об изоморфизме, для топологических колец в случае, когда S – подкольцо, является всего лишь непрерывным изоморфизмом. Поэтому возникает необходимость рассмотрения и непрерывных изоморфизмов.

Начало общей теории радикалов дискретных колец было положено в 1953 году А. Г. Курошем в работе [31]. Им введены основные понятия и указаны основные методы построения радикалов.

В работе [31] было замечено, что общую теорию радикалов можно развивать в любых алгебраических системах, в которых имеет смысл понятие ядра гомоморфизма с его обычными свойствами (ядра гомоморфизмов должны быть подсистемами или подалгебрами, должны быть верны теоремы об изоморфизмах и т.п.).

В работе [31] были рассмотрены следующие понятия.

- Пусть $\mathfrak{K}$ – некоторый класс колец (групп), в котором выполнены условия:
 1. Если кольцо (группа) R принадлежит классу $\mathfrak{K}$ и I – двусторонний идеал (нормальный делитель) кольца (группы) R , то кольцо (группа) I также принадлежит классу $\mathfrak{K}$.
 2. Если кольцо (группа) R принадлежит классу $\mathfrak{K}$ и I – двусторонний идеал (нормальный делитель) кольца (группы) R , то и факторкольцо (факторгруппа) R/I принадлежит классу $\mathfrak{K}$.

- Говорят, что в классе $\mathfrak{K}$ колец (групп) определен радикал ρ , если свойство кольца (группы) быть ρ -кольцом (ρ -группой) удовлетворяет следующим условиям:
 1. Пусть кольца (группы) R и $\hat{R}$ принадлежат классу $\mathfrak{K}$ и кольцо (группа) $\hat{R}$ является гомоморфным образом кольца (группы) R . Если кольцо (группа) R является ρ -кольцом (ρ -группой), то и $\hat{R}$ является ρ -кольцом (ρ -группой).
 2. В любом кольце (группе) R из класса $\mathfrak{K}$ существует такой идеал (нормальный делитель) $\rho(R)$, что кольцо (группа) $\rho(R)$ является ρ -кольцом (ρ -группой) и содержит всякий идеал (нормальный делитель) кольца (группы) R , являющийся ρ -кольцом (ρ -группой).
 3. Для любого кольца (группы) R из класса $\mathfrak{K}$ факторкольцо (факторгруппа) $R/\rho(R)$ не содержит ненулевых идеалов (нормальных делителей), являющихся ρ -кольцами (ρ -группами).

Ясность изложения и богатство идей основополагающей работы [31] дало толчок многочисленным исследованиям по общей теории радикалов дискретных колец. Основные результаты, методы и конструкции общей теории радикалов дискретных колец изложены в монографии [5].

Как следует из работы Куроша [31], справедливость всех трех теорем об изоморфизмах является необходимым условием построения и развития общей теории радикалов любых алгебраических систем.

Следовательно, для построения общей теории радикалов колец (групп) с дополнительной структурой нужно определить условия, при которых аналоги второй теоремы об изоморфизме имеют место для данного класса колец (групп).

В общей теории радикалов вторая теорема об изоморфизме применяется чаще всего для случая, когда S является двусторонним идеалом. Для исследования наследственности радикалов для тех или иных подколец приходится использовать вторую теорему об изоморфизме, когда подкольцо обладает дополнительными свойствами (является односторонним идеалом или достижимым подкольцом).

Поэтому аналог второй теоремы об изоморфизме приходится рассматривать для случая, когда подкольцо S удовлетворяет дополнительным условиям (S – двусторонний идеал, односторонний идеал, достижимое подкольцо или просто подкольцо кольца R).

1.2. Обзор работ по исследованию гомоморфизмов и изоморфизмов топологических колец

С развитием общей теории радикалов дискретных колец и теории топологических алгебр начала развиваться теория радикалов топологических колец. Большинство результатов по теории радикалов топологических колец имели аналоги в дискретных кольцах. Однако наличие топологии в кольцах, требование замкнутости некоторых идеалов и того, что вторая теорема об изоморфизме для топологических колец не всегда верна, придали свою специфику в общей теории радикалов топологических колец.

Основные результаты исследований по теории радикалов топологических колец отражены в работах [6], [7], [9] – [13], [21], [63]. Построение теории радикалов алгебраических объектов с топологиями или другими дополнительными структурами привели к необходимости специального изучения гомоморфизмов и изоморфизмов таких структур.

Для топологических колец и групп аналоги второй теоремы об изоморфизме были изучены в работах [10], [59], [60], [61]; а именно:

случай, когда S является подгруппой топологической группы R , изучен в [59];

случай, когда S является подкольцом топологического кольца R , изучен в [59];

случай, когда S является нормальной подгруппой топологической группы R , изучен в [59];

случай, когда S является двусторонним идеалом топологического кольца R , изучен в [10];

случай, когда S является односторонним идеалом топологического кольца R , изучен в [61];

случай, когда S является достижимым подкольцом топологического кольца R , изучен в [60].

Важным классом топологических колец являются кольца, топологии которых заданы некоторой псевдонормой. Аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец ранее изучены не были.

В работе [10] было введено следующее понятие.

Пусть $\mathfrak{K}$ – некоторый класс топологических колец. Непрерывный изоморфизм φ топологического кольца $(R, \tau) \in \mathfrak{K}$ на топологическое кольцо $(\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ называется полутопологическим изоморфизмом в классе $\mathfrak{K}$ топологических колец, если существует такое топологическое кольцо $(\hat{R}, \hat{\tau}) \in \mathfrak{K}$, содержащее (R, τ) в качестве идеала, что φ мож-

но продолжить до топологического гомоморфизма $\hat{\varphi} : (\hat{R}, \hat{\tau}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$, т.е. непрерывного и открытого гомоморфизма.

Очевидно, что всякий полутопологический изоморфизм является непрерывным изоморфизмом, но не всякий непрерывный изоморфизм является полутопологическим.

Если в общей теории радикалов топологических колец (см. [9]) вместо непрерывного изоморфизма рассматривать полутопологический изоморфизм, то можно построить аналог общей теории радикалов топологических колец, которая имеет более общий вид, чем общая теория радикалов топологических колец, причем для любого класса дискретных колец совпадает с обычной общей теорией радикалов.

В работе [10] проводится исследование свойств полутопологических изоморфизмов топологических колец. Было доказано, что если $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов топологических колец:

1. класс всех топологических колец;
2. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из подгрупп аддитивной группы кольца,

то для того, чтобы непрерывный изоморфизм φ кольца $(R, \tau) \in \mathfrak{K}$ на кольцо $(\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ был полутопологическим изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $b \in R$ и любой окрестности нуля V в (R, τ) существовали такие окрестности нуля U в (R, τ) и W в $(\bar{R}, \bar{\tau})$, что

$$b \cdot \varphi^{-1}(W) + \varphi^{-1}(W) \cdot b + \varphi^{-1}(W) \cdot U + U \cdot \varphi^{-1}(W) \subseteq V.$$

Также в работе [10] было показано, что:

- Если $\mathfrak{K}$ – класс всех топологических колец и R – кольцо с нулевым умножением, т.е. $a \cdot b = 0$ для любых $a, b \in R$, то всякий непрерывный изоморфизм кольца R является полутопологическим изоморфизмом в классе $\mathfrak{K}$.
- Если $\mathfrak{K}$ – класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из подгрупп, то всякий непрерывный изоморфизм кольца с нулевым умножением является полутопологическим изоморфизмом в $\mathfrak{K}$.
- Если в некотором классе топологических колец $\mathfrak{K}$ топологическое кольцо R обладает нетривиальным полутопологическим изоморфизмом (т.е. полутопологическим изоморфизмом, который не является топологическим изоморфизмом), то любой элемент из R является обобщенным делителем нуля.

- Топологическое кольцо R с единицей не обладает нетривиальным полутопологическим изоморфизмом в любом классе топологических колец.
- Если $\mathfrak{K}$ – класс всех ограниченных слева топологических колец, то для того чтобы непрерывный изоморфизм φ кольца $(R, \tau) \in \mathfrak{K}$ на $(\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ был полутопологическим изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $b \in R$ и любой окрестности нуля U в R существовала такая окрестность нуля V в $\bar{R}$, что
$$b \cdot \varphi^{-1}(V) + \varphi^{-1}(V) \cdot R \subseteq U.$$
- Если $\mathfrak{K}$ – класс всех ограниченных слева топологических колец, то всякий непрерывный изоморфизм кольца с нулевым умножением является полутопологическим изоморфизмом в классе $\mathfrak{K}$.
- Если $\mathfrak{K}$ – класс всех ограниченных слева топологических колец, $R, \bar{R} \in \mathfrak{K}$ и φ – полутопологический изоморфизм R на $\bar{R}$, то существует такое кольцо $\tilde{R} \in \mathfrak{K}$, содержащее R в качестве идеала, что φ можно продолжить до топологического гомоморфизма f кольца $\tilde{R}$ на $\bar{R}$, причем идеал $J = \{a \in \tilde{R} \mid f(a) = 0\}$ – кольцо с нулевым умножением.
- Если $\mathfrak{K}$ – класс всех ограниченных слева топологических колец, и φ – полутопологический изоморфизм кольца без нильпотентных идеалов R на $\bar{R}$ в $\mathfrak{K}$, то для любого непрерывно изоморфного образа R_I кольца R существует такое топологическое кольцо $\tilde{R}$, которое является одновременно непрерывно изоморфным образом топологических колец $\bar{R}$ и R_I .
- Если $\mathfrak{K}$ – класс всех ограниченных слева топологических колец, а f и φ – полутопологические изоморфизмы топологического кольца R без нильпотентных идеалов соответственно на R_I и $\bar{R}$, то существует такое топологическое кольцо $\tilde{R}$, которое является одновременно полутопологически изоморфным образом колец R_I и $\bar{R}$.
- Если $\mathfrak{K}$ – класс всех ограниченных топологических колец или класс всех колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из идеалов, то для того чтобы непрерывный изоморфизм φ кольца $(R, \tau) \in \mathfrak{K}$ на $(\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ был полутопологическим изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности нуля U в R существовала такая окрестность нуля V в $\bar{R}$, что
$$R \cdot \varphi^{-1}(V) + \varphi^{-1}(V) \cdot R \subseteq U.$$

- Если все кольца из класса $\mathfrak{K}$ обладают базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из идеалов, то всякий полутопологический изоморфизм φ кольца R , у которого любой идеал топологически идемпотентен на кольцо $\bar{R}$, является топологическим изоморфизмом.

В работе [59] было доказано, что:

Если $\varphi: (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ – непрерывный изоморфизм топологических колец (R, τ) и $(\bar{R}, \bar{\tau})$, то тогда существует такое топологическое кольцо $(\hat{R}, \hat{\tau})$ и такой топологический (открытый и непрерывный) гомоморфизм $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\tau}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$, что выполнены следующие условия:

1. $\hat{\tau}|_R = \tau$, т.е. (R, τ) – подкольцо топологического кольца $(\hat{R}, \hat{\tau})$;
2. $\hat{\varphi}|_R = \varphi$, т.е. гомоморфизм $\hat{\varphi}$ является продолжением изоморфизма φ .

В работе [61] было введено следующее понятие.

Непрерывный изоморфизм φ топологического кольца (R, τ) на топологическое кольцо $(\bar{R}, \bar{\tau})$ называется полутопологическим изоморфизмом слева (справа) в классе $\mathfrak{K}$ топологических колец, если существует такое топологическое кольцо $(\hat{R}, \hat{\tau}) \in \mathfrak{K}$, содержащее (R, τ) в качестве левого (правого) идеала, что φ можно продолжить до топологического гомоморфизма $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\tau}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$.

В работе [61] проводится исследование свойств односторонних полутопологических изоморфизмов топологических колец. Было доказано следующее:

- Пусть $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов топологических колец:
 1. класс всех топологических колец;
 2. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из подгрупп аддитивной группы кольца;
 3. класс всех ограниченных справа топологических колец;
 4. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из левых идеалов кольца.

Если $(R, \tau), (\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и $\varphi: (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ является непрерывным изоморфизмом, то тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Изоморфизм φ является полутопологическим изоморфизмом слева в классе $\mathfrak{K}$.

2. Для любого элемента $b \in R$ и произвольной окрестности нуля U в (R, τ) существуют такие окрестности нуля $\bar{V}$ и V в $(\bar{R}, \bar{\tau})$ и (R, τ) , соответственно, что $\varphi^{-1}(\bar{V}) \cdot b \subseteq U$ и $\varphi^{-1}(\bar{V}) \cdot V \subseteq U$.
3. Существует топологическое кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\tau}) \in \mathfrak{K}$ такое, что топологическое кольцо (R, τ) является левым идеалом топологического кольца $(\tilde{R}, \tilde{\tau})$, а изоморфизм φ может быть продолжен до топологического гомоморфизма $\tilde{\varphi} : (\tilde{R}, \tilde{\tau}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$, и $(\ker \tilde{\varphi})^2 = \{0\}$.

- Пусть $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов топологических колец:
 1. класс всех топологических колец;
 2. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из подгрупп аддитивной группы кольца;
 3. класс всех ограниченных слева топологических колец;
 4. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из правых идеалов кольца.

Если $(R, \tau), (\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и $\varphi : (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ является непрерывным изоморфизмом, то следующие утверждения эквивалентны:

1. Изоморфизм φ является полутопологическим изоморфизмом справа в классе $\mathfrak{K}$.
2. Для любого элемента $b \in R$ и произвольной окрестности нуля U в (R, τ) существуют такие окрестности нуля $\bar{V}$ и V в $(\bar{R}, \bar{\tau})$ и (R, τ) , соответственно, что $b \cdot \varphi^{-1}(\bar{V}) \subseteq U$ и $V \cdot \varphi^{-1}(\bar{V}) \subseteq U$.
3. Существует топологическое кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\tau}) \in \mathfrak{K}$ такое, что топологическое кольцо (R, τ) является правым идеалом топологического кольца $(\tilde{R}, \tilde{\tau})$, а изоморфизм φ может быть продолжен до топологического гомоморфизма $\tilde{\varphi} : (\tilde{R}, \tilde{\tau}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$, и $(\ker \tilde{\varphi})^2 = \{0\}$.

Также в работе [61] было показано, что:

- Если $(R, \tau), (\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и изоморфизм $\varphi : (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ является полутопологическим слева и полутопологическим справа в классе $\mathfrak{K}$, то φ является полутопологическим

изоморфизмом в классе $\mathfrak{K}$ в случае, когда $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов топологических колец:

1. класс всех топологических колец;
 2. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из подгрупп аддитивной группы кольца.
- Пусть $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов топологических колец:
 1. класс всех ограниченных слева топологических колец;
 2. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из правых идеалов кольца;
 3. класс всех ограниченных топологических колец;
 4. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из идеалов кольца.

Если $(R, \tau), (\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и изоморфизм $\varphi: (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ является непрерывным изоморфизмом, то следующие утверждения эквивалентны:

1. изоморфизм φ является полутопологическим изоморфизмом слева в классе $\mathfrak{K}$;
 2. для произвольной окрестности нуля U в (R, τ) существует такая окрестность нуля $\bar{V}$ в $(\bar{R}, \bar{\tau})$, что $\varphi^{-1}(\bar{V}) \cdot R \subseteq U$;
 3. существует топологическое кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\tau}) \in \mathfrak{K}$ такое, что топологическое кольцо (R, τ) является левым идеалом топологического кольца $(\tilde{R}, \tilde{\tau})$, а изоморфизм φ может быть продолжен до топологического гомоморфизма $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\tau}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$, и $(\ker \tilde{\varphi})^2 = \{0\}$.
- Пусть $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов топологических колец:
 1. класс всех ограниченных справа топологических колец;
 2. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из левых идеалов кольца;
 3. класс всех ограниченных топологических колец;
 4. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из идеалов кольца.

Если $(R, \tau), (\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и изоморфизм $\varphi: (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ является непрерывным изоморфизмом, то следующие утверждения эквивалентны:

1. изоморфизм φ является полутопологическим изоморфизмом справа в классе $\mathfrak{K}$;
 2. для произвольной окрестности нуля U в (R, τ) существует такая окрестность нуля $\bar{V}$ в $(\bar{R}, \bar{\tau})$, что $R \cdot \varphi^{-1}(\bar{V}) \subseteq U$;
 3. существует топологическое кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\tau}) \in \mathfrak{K}$ такое, что топологическое кольцо (R, τ) является правым идеалом топологического кольца $(\tilde{R}, \tilde{\tau})$, а изоморфизм φ может быть продолжен до топологического гомоморфизма $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\tau}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$, и $(\ker \tilde{\varphi})^2 = \{0\}$.
- Если $\mathfrak{K}$ – класс всех ограниченных топологических колец или класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из идеалов кольца, то непрерывный изоморфизм $\varphi: (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ является полутопологическим тогда и только тогда, когда для каждой окрестности нуля U в (R, τ) существует окрестность нуля $\bar{V}$ в $(\bar{R}, \bar{\tau})$ такая, что $\varphi^{-1}(\bar{V}) \cdot R \subseteq U$ и $R \cdot \varphi^{-1}(\bar{V}) \subseteq U$;
 - Пусть $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов топологических колец:
 1. класс всех ограниченных топологических колец;
 2. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из идеалов кольца.

Если $(R, \tau), (\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и изоморфизм $\varphi: (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ является полутопологическим слева, и полутопологическим справа в классе $\mathfrak{K}$, то φ – полутопологический изоморфизм в классе $\mathfrak{K}$.

В работе [60] проводится исследование свойств суперпозиции полутопологических изоморфизмов топологических колец. Было доказано следующее:

- Пусть $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов:
 1. класс всех топологических колец;
 2. класс всех топологических коммутативных колец;
 3. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из подгрупп;
 4. класс всех топологических коммутативных колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из подгрупп.

Если $(R, \tau), (\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и $\varphi: (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ – кольцевой изоморфизм, то следующие утверждения эквивалентны:

1. существует топологическое кольцо $(\hat{R}, \hat{\tau}) \in \mathfrak{K}$ такое, что топологическое кольцо (R, τ) является достижимым подкольцом степени не больше чем n топологического кольца $(\hat{R}, \hat{\tau})$, а изоморфизм φ продолжается до топологического гомоморфизма $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\tau}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$;
 2. изоморфизм φ является суперпозицией n полутопологических изоморфизмов, т.е. существуют такие топологические кольца $(R, \tau) = (R_0, \tau_0), (R_1, \tau_1), (R_2, \tau_2), \dots, (R_n, \tau_n) = (\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и такие полутопологические изоморфизмы $\varphi_i: (R_i, \tau_i) \rightarrow (R_{i+1}, \tau_{i+1})$ для $i = 0, 1, \dots, n-1$, что $\varphi = \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_0$;
- Пусть $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов:
 1. класс всех топологических колец;
 2. класс всех топологических коммутативных колец;
 3. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из подгрупп;
 4. класс всех топологических коммутативных колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля, который состоит из подгрупп.

Если $(R, \tau), (\bar{R}, \bar{\tau}) \in \mathfrak{K}$, R – нильпотентное кольцо индекса n , то всякий непрерывный изоморфизм $\varphi: (R, \tau) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\tau})$ является суперпозицией n полутопологических изоморфизмов.

В работе [59] изучаются изоморфизмы топологических групп. Было доказано, что:

Если $\xi: (G, \tau) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})$ – непрерывный изоморфизм топологических групп (G, τ) и $(\bar{G}, \bar{\tau})$, то тогда существует топологическая группа $(\hat{G}, \hat{\tau})$ и топологический (открытый и непрерывный) гомоморфизм $\hat{\xi}: (\hat{G}, \hat{\tau}) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})$ такие, что выполнены следующие условия:

1. $\hat{\tau}|_G = \tau$, т.е. (G, τ) – подгруппа топологической группы $(\hat{G}, \hat{\tau})$;

2. $\hat{\xi}|_G = \xi$, т.е. гомоморфизм $\hat{\xi}$ является продолжением изоморфизма ξ .

В работе [59] было введено следующее понятие.

Непрерывный изоморфизм $\xi: (G, \tau) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})$ топологических групп называется полутопологическим изоморфизмом, если существует топологическая группа $(\hat{G}, \hat{\tau})$ и топологический (открытый и непрерывный) гомоморфизм $\hat{\xi}: (\hat{G}, \hat{\tau}) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})$ такие, что выполнены следующие условия:

1. G – нормальная подгруппа в группе $\hat{G}$;
2. $\hat{\tau}|_G = \tau$, т.е. (G, τ) – подгруппа топологической группы $(\hat{G}, \hat{\tau})$;
3. $\hat{\xi}|_G = \xi$, т.е. гомоморфизм $\hat{\xi}$ является продолжением изоморфизма ξ .

В работе [59] проводится исследование свойств полутопологических изоморфизмов топологических групп. Было показано, что:

- Если $\xi: (G, \tau) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})$ – непрерывный изоморфизм топологических групп (G, τ) и $(\bar{G}, \bar{\tau})$, то изоморфизм ξ является полутопологическим тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. для любой окрестности V_0 единицы в топологической группе (G, τ) существуют окрестности $\bar{V}_1$ и V_1 единицы в $(\bar{G}, \bar{\tau})$ и (G, τ) , соответственно, такие, что $v \cdot V_1 \cdot v^{-1} \subseteq V_0$ для любого $v \in \xi^{-1}(\bar{V}_1)$;
2. для любой окрестности V_0 единицы в топологической группе (G, τ) и любого элемента $g \in G$ существует окрестность $\bar{V}_1$ единицы в $(\bar{G}, \bar{\tau})$ такая, что $g \cdot v \cdot g^{-1} \cdot v^{-1} \in V_0$ для любого $v \in \xi^{-1}(\bar{V}_1)$.

- Пусть (G, τ) – группа с дискретной топологией, $(\bar{G}, \bar{\tau})$ – топологическая группа и $\xi: (G, \tau) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})$ – непрерывный изоморфизм. Изоморфизм ξ является полутопологическим тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$ существует окрестность $\bar{V}$ единицы в $(\bar{G}, \bar{\tau})$ такая, что $g \cdot (\xi^{-1}(\bar{v})) = (\xi^{-1}(\bar{v})) \cdot g$ для любого $\bar{v} \in \bar{V}$.

- Пусть G и $\bar{G}$ – группы и $f : G \rightarrow \bar{G}$ – некоторый групповой изоморфизм. Если $\{\tau_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ и $\{\bar{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ – семейства групповых топологий на G и $\bar{G}$, соответственно, такие, что для каждого $\gamma \in \Gamma$ изоморфизм $f : (G, \tau_\gamma) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau}_\gamma)$ является полутопологическим, то тогда изоморфизм $f : (G, \tau) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})$ также является полутопологическим, где $\tau = \sup\{\tau_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ и $\bar{\tau} = \sup\{\bar{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$.

- Пусть (G, τ) и $(\bar{G}, \bar{\tau})$ – топологические группы и $\xi : (G, \tau) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})$ – полутопологический изоморфизм. Если A – подгруппа группы G и $\bar{A} = \xi(G)$, то $\xi|_A : (A, \tau) \rightarrow (\bar{A}, \bar{\tau})$ – полутопологический изоморфизм.

- Пусть (G, τ) и $(\bar{G}, \bar{\tau})$ – топологические группы и $\xi : (G, \tau) \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})$ – полутопологический изоморфизм. Если A – нормальная подгруппа группы G и заданы отображения

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\xi} & \bar{G} \\ \eta \downarrow & & \downarrow \bar{\eta} \\ G/A & \xrightarrow{\xi} & \bar{G}/\xi(A) \end{array}$$

такие, что:

$\eta : G \rightarrow G/A$ – канонический гомоморфизм (т.е. $\eta(g) = g \cdot A$),

$\bar{\eta} : \bar{G} \rightarrow \bar{G}/\xi(A)$ – канонический гомоморфизм (т.е. $\bar{\eta}(\bar{g}) = \bar{g} \cdot \xi(A)$),

$\hat{\xi} : G/A \rightarrow \bar{G}/\xi(A)$ – канонический изоморфизм (т.е. $\hat{\xi}(g \cdot A) = \xi(g) \cdot \xi(A)$),

то тогда $\hat{\xi} : (G, \tau)/A \rightarrow (\bar{G}, \bar{\tau})/\xi(A)$ – полутопологический изоморфизм.

- Пусть $\{(G_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ и $\{(\bar{G}_\gamma, \bar{\tau}_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ – два семейства топологических групп и для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует полутопологический изоморфизм $\xi_\gamma : (G_\gamma, \tau_\gamma) \rightarrow (\bar{G}_\gamma, \bar{\tau}_\gamma)$.

Если $(\hat{G}, \hat{\tau}) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (G_\gamma, \tau_\gamma)$ и $(\tilde{G}, \tilde{\tau}) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (\bar{G}_\gamma, \bar{\tau}_\gamma)$ – прямые произведения этих семейств,

оснащенные тихоновской топологией и $\hat{\xi} : \hat{G} \rightarrow \tilde{G}$ – канонический изоморфизм (т.е.

$\xi_\gamma(pr_\gamma(\hat{g})) = pr_\gamma \hat{\xi}(\hat{g})$ для любого $\gamma \in \Gamma$), то $\hat{\xi} : (\hat{G}, \hat{\tau}) \rightarrow (\tilde{G}, \tilde{\tau})$ является полутопологическим изоморфизмом.

На основе понятия полутопологического изоморфизма топологических колец в работе [10] были рассмотрены понятия квазитопологического гомоморфизма и квазирадикала топологических колец:

- Пусть $\mathfrak{K}$ – класс топологических колец, $(R, \tau), (\hat{R}, \hat{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и $\psi: (R, \tau) \rightarrow (\hat{R}, \hat{\tau})$ – непрерывный гомоморфизм. Тогда отображение ψ называется квазитопологическим гомоморфизмом в классе $\mathfrak{K}$ топологических колец, если существуют такие топологические кольца $(R, \tau) = (R_1, \tau_1), (R_2, \tau_2), \dots, (R_n, \tau_n) = (\hat{R}, \hat{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и такие сюръективные отображения $\varphi_i: (R_i, \tau_i) \rightarrow (R_{i+1}, \tau_{i+1})$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$, что $\psi = \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_1$ и все отображения φ_i являются либо топологическими гомоморфизмами либо полутопологическими изоморфизмами в $\mathfrak{K}$.
- Говорят, что в классе $\mathfrak{K}$ топологических колец определен квазирадикал ρ , если свойство топологического кольца быть ρ -кольцом удовлетворяет следующим условиям:

1. Пусть $(R, \tau), (\hat{R}, \hat{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и топологическое кольцо $(\hat{R}, \hat{\tau})$ является квазитопологическим гомоморфным образом топологического кольца (R, τ) . Если топологическое кольцо (R, τ) является ρ -кольцом, то и топологическое кольцо $(\hat{R}, \hat{\tau})$ является ρ -кольцом.
2. в любом топологическом кольце $(R, \tau) \in \mathfrak{K}$ существует такой замкнутый идеал $\rho(R)$, что топологическое кольцо $(\rho(R), \tau|_{\rho(R)})$ является ρ -кольцом и содержит всякий идеал I топологического кольца (R, τ) , являющийся ρ -кольцом;
3. для любого топологического кольца $(R, \tau) \in \mathfrak{K}$ факторкольцо $R/\rho(R)$ не содержит ненулевых идеалов, являющихся ρ -кольцами.

На основе понятия полутопологического изоморфизма в работе [21] были рассмотрены следующие понятия:

- Радикал ρ , определенный в классе $\mathfrak{K}$ топологических колец, называется полуалгебраическим радикалом, если для любых топологических колец R и $\hat{R}$ из класса $\mathfrak{K}$ таких, что топологическое кольцо $\hat{R}$ является полутопологически изоморфным образом топологического кольца R в классе $\mathfrak{K}$ из ρ -радикальности кольца $\hat{R}$ следует ρ -радикальность кольца R .

- Пусть $\mathfrak{K}$ – класс топологических колец, $(R, \tau), (\hat{R}, \hat{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и $\varphi: (R, \tau) \rightarrow (\hat{R}, \hat{\tau})$ – кольцевой изоморфизм. Тогда отображение φ называется полуоткрытым изоморфизмом в классе $\mathfrak{K}$ топологических колец, если существуют такие топологические кольца $(R, \tau) = (R_1, \tau_1), (R_2, \tau_2), \dots, (R_n, \tau_n) = (\hat{R}, \hat{\tau}) \in \mathfrak{K}$ и такие сюръективные отображения $\varphi_i: (R_i, \tau_i) \rightarrow (R_{i+1}, \tau_{i+1})$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$, что $\varphi = \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_1$ и все отображения φ_i являются либо открытыми изоморфизмами либо полутопологическими изоморфизмами в $\mathfrak{K}$.

В работе [21] изучены свойства полуалгебраического радикала. Было показано, что:

- Если ρ – наследственный наднильпотентный радикал, определенный в классе $\mathfrak{K}$, то ρ является полуалгебраическим радикалом в случае, когда $\mathfrak{K}$ – один из следующих классов топологических колец:
 1. класс всех ограниченных слева топологических колец;
 2. класс всех ограниченных справа топологических колец;
 3. класс всех ограниченных топологических колец;
 4. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля из левых идеалов;
 5. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля из правых идеалов;
 6. класс всех топологических колец, обладающих базисом фильтра окрестностей нуля из идеалов.
- Пусть ρ – наследственный наднильпотентный радикал, определенный в классе $\mathfrak{K}$ топологических колец и $\mathcal{M}$ – класс всех топологических колец (R, τ) из $\mathfrak{K}$, удовлетворяющих условиям:
 1. (R, τ) – первичное ρ -полупростое кольцо;
 2. если $(A, \tau|_A)$ – достижимое подкольцо топологического кольца (R, τ) и $(\tilde{A}, \tilde{\tau})$ – такое топологическое кольцо из класса $\mathfrak{K}$, что существует полуоткрытый изоморфизм $\varphi: (A, \tau|_A) \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{\tau})$, то $(\tilde{A}, \tilde{\tau})$ является ρ -полупростым кольцом.

Тогда $\mathcal{M}$ является наибольшим специальным классом, содержащимся в совокупности всех ρ -полупростых колец.

- Пусть ρ – наследственный наднильпотентный полуалгебраический радикал, определенный в классе $\mathfrak{K}$ топологических колец. Тогда совокупность всех первичных ρ -полупростых колец из класса $\mathfrak{K}$ является наибольшим специальным классом, содержащимся в совокупности всех ρ -полупростых колец.
- Пусть ρ – наследственный наднильпотентный полуалгебраический радикал, определенный в классе $\mathfrak{K}$ топологических колец; σ – наименьший специальный радикал среди специальных радикалов в классе $\mathfrak{K}$, больше либо равных радикала ρ . Тогда $\rho(R) = \sigma(R)$ в каждом из следующих случаев:

1. топологическое кольцо (R, τ) удовлетворяет условию минимальности для замкнутых идеалов;
2. топологическое кольцо (R, τ) удовлетворяет условию максимальности для замкнутых идеалов.

Как мы видим из работ [9], [10], [16], [21], [60], [61], [63], в теории радикалов и квазирадикалов топологических колец большую роль играет понятие полутопологического изоморфизма топологических колец, которое получено при дополнительном требовании на подкольцо S во второй теореме об изоморфизме: S должно быть двусторонним идеалом кольца R .

Исследования по радикалам дискретных колец и групп представлены в работах [5], [30], [31], [38]; по радикалам модулей в работах [71] – [75]; по радикалам топологических колец и групп в работах [6], [7], [9] – [13], [16], [17], [23], [24], [59] – [61], [63].

В работе [16] рассматривается топологический первичный квазирадикал $\mu(R)$ – пересечение всех замкнутых первичных идеалов в топологическом кольце R . В работе приведены примеры, которые показывают отличие $\mu(R)$ от ранее изучаемых топологических аналогов первичного радикала; доказаны свойства $\mu(R)$; исследованы топологические первичные квазирадикалы колец матриц и колец многочленов.

В работе [17] рассматриваются разные подходы к определению топологического первичного радикала топологической группы. Сначала первичный квазирадикал $\eta(G)$ определяется как пересечение всех замкнутых первичных нормальных подгрупп в топологической группе G , исследуются свойства $\eta(G)$. Затем рассматривается множество $\eta'(G)$ всех топологически строго энгелевых элементов топологической группы G , исследуются

свойства $\eta''(G)$. Доказано, что в классе всех топологических групп G , обладающих базисом фильтра окрестностей единицы, состоящим из нормальных подгрупп, $\eta''(G)$ является радикалом.

Заметим, что в работах [16], [17] не рассматривался случай, когда топология в кольце (группе) задается псевдонормой; в работе [16] не рассмотрен случай, когда топология в кольце матриц порождается псевдонормой $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ (см. теорему 3.17).

Класс псевдонормированных колец является одним из классов топологических колец. Наличие псевдонормы, порождающей топологию в таких кольцах, позволяет разработать более тонкий инструмент для исследования псевдонормированных колец и построения общей теории радикалов псевдонормированных колец. Исследования по псевдонормированным кольцам представлены в работах [8], [14], [15], [22], [25], [32], [34], [40], [41], [43] – [45], [62], [68], [76] – [79], [81] – [85].

В работах [14] (см. 1.1.12), [29] (см. гл. 6, §4), [62] (см. 1.1.12) были рассмотрены следующие понятия:

- Вещественнозначную функцию ξ , заданную в кольце R , называют псевдонормой, если выполнены следующие условия:

- I. $\xi(r) \geq 0$ для любого $r \in R$;
- II. $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;
- III. $\xi(-r) = \xi(r)$ для любого $r \in R$;
- IV. $\xi(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$;
- V. $\xi(r_1 \cdot r_2) \leq \xi(r_1) \cdot \xi(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in R$.

- Кольцо R с заданной в нем псевдонормой называют псевдонормированным кольцом и обозначают (R, ξ) .

- Если вещественнозначная функция ξ является псевдонормой в кольце R и

$$\xi(r_1 \cdot r_2) = \xi(r_1) \cdot \xi(r_2) \text{ для любых } r_1, r_2 \in R,$$

то ξ называют нормой, а (R, ξ) называют нормированным кольцом.

Также в работах [14] и [62] указано, что:

- Условия III и IV определения псевдонормы можно заменить следующим условием:

$$\xi(r_1 - r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2) \text{ для любых } r_1, r_2 \in R.$$

- Если (R, ξ) – псевдонормированное кольцо и для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ задано множество

$$V_\varepsilon = \{x \in R \mid \xi(x) < \varepsilon\},$$

то совокупность подмножеств V_ε является базисом фильтра окрестностей нуля для некоторой кольцевой топологии τ_ξ . И, значит, всякая псевдонорма ξ задаёт на кольце R некоторую отделимую кольцевую топологию τ_ξ . Однако, одна и та же топология может быть задана различными псевдонормами.

В работах [14], [62] рассмотрены критерии псевдонормируемости топологических колец, тел, модулей и векторных пространств; задание псевдонормы на факторкольце.

В работах [14] (см. 1.5.36) и [62] (см. 1.5.36) было показано, что:

- Если (R, ξ) – псевдонормированное кольцо, J – замкнутый идеал в (R, ξ) , то тогда функция

$$\tilde{\xi}(r + J) = \inf \{ \xi(r + j) \mid j \in J \}$$

является псевдонормой факторкольца $R/J = \tilde{R}$.

В работах [14] (см. §1.5), [34] (см. гл. 2, §9) и [62] (см. §1.5) были рассмотрены следующие понятия:

- Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм. Изоморфизм φ называют изометрическим, если

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) = \xi(r)$$

для всех $r \in R$.

- Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой гомоморфизм. Гомоморфизм φ называют изометрическим, если

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) = \inf \{ \xi(r + j) \mid j \in \ker \varphi \}$$

для всех $r \in R$.

Заметим, что для псевдонормированных колец остаются в силе такие понятия как топологический изоморфизм и топологический гомоморфизм, поскольку класс псевдонормированных колец является одним из классов топологических колец. Однако вторая теорема об изоморфизме не имеет места ни для изометрических изоморфизмов, ни для то-

пологических изоморфизмов псевдонормированных колец. Другие виды изоморфизмов и гомоморфизмов псевдонормированных колец ранее не были изучены.

В работах [15] (см. §1.1) и [62] (см. §3.1) было рассмотрено следующее понятие:

- Последовательность $\{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ псевдонормированного кольца (R, ξ) называется сходящейся, если существует элемент a в кольце R такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(a_n - a) = 0$, т.е. для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров n , начиная с номера $N(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$$\xi(a_n - a) < \varepsilon.$$

При этом элемент a называют пределом последовательности $\{a_n | n = 1, 2, \dots\}$.

Заметим, что если (R, ξ) – псевдонормированное кольцо, и последовательность $\{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу a в (R, ξ) , то тогда числовая последовательность $\{\xi(a_n) | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к числу $\xi(a)$, т.е. псевдонорма $\xi: R \rightarrow [0; +\infty)$ является непрерывным отображением.

В работе [34] (см. гл. 1, §4) было определено следующее понятие:

- Псевдонормы ξ и η кольца R называются топологически эквивалентными, если топологии, задаваемые псевдонормами ξ и η совпадают, т.е. последовательность $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу r в кольце (R, ξ) тогда и только тогда, когда последовательность $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу r в кольце (R, η) .

Также в работе [34] замечено, что если существуют положительные числа α и β такие, что $\xi(r) \leq \alpha \cdot \eta(r)$ и $\eta(r) \leq \beta \cdot \xi(r)$ для любого $r \in R$, то псевдонормы ξ и η кольца R являются топологически эквивалентными.

Отметим, что топологическая эквивалентность псевдонорм ξ и η кольца R равносильна тому, что псевдонормированные кольца (R, ξ) и (R, η) топологически изоморфны.

В работах [15], [62] рассмотрены вопросы, связанные с полнотой и пополнением топологических и, в частности, псевдонормированных колец; прямые произведения топологических колец.

В работах [15] (см. §1.1 – 1.3) и [62] (см. §3.1 – 3.3) были рассмотрены следующие понятия:

- Последовательность $\{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ псевдонормированного кольца (R, ξ) называется фундаментальной или последовательностью Коши, если $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \xi(a_n - a_m) = 0$, т.е. для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров n и m , начиная с номера $N(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$$\xi(a_n - a_m) < \varepsilon.$$

- Псевдонормированное кольцо (R, ξ) называют полным, если любая фундаментальная последовательность $\{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ элементов кольца (R, ξ) является сходящейся в кольце (R, ξ) .
- Множество $G \subset R$ называют всюду плотным в псевдонормированном кольце (R, ξ) , если для любого элемента $r \in R$ можно найти последовательность $\{a_n | n = 1, 2, \dots\} \subset G$ такую, что последовательность $\{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу r в кольце (R, ξ) .
- Пусть (R, ξ) – псевдонормированное кольцо. Псевдонормированное кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ называют пополнением псевдонормированного кольца (R, ξ) , если:

1. R является подкольцом кольца $\tilde{R}$;
2. $\tilde{\xi}(r) = \xi(r)$ для всех $r \in R$;
3. $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ является полным псевдонормированным кольцом;
4. R всюду плотно в кольце $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$.

В работах [15] (см. 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4, 1.3.5) и [62] (см. §3.3) была доказана теорема о пополнении:

- Каждое псевдонормированное кольцо (R, ξ) имеет пополнение $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$, и это пополнение единственно с точностью до изометрического изоморфизма, сохраняющего неподвижными элементы из кольца R .

Заметим, что из определения пополнения и теоремы о пополнении следует, что если $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ – пополнение псевдонормированного кольца (R, ξ) , то тогда каждый элемент $\tilde{r} \in (\tilde{R}, \tilde{\xi})$ можно представить в виде

$$\tilde{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \text{ в } (\tilde{R}, \tilde{\xi}),$$

где $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ – некоторая фундаментальная последовательность псевдонормированного кольца (R, ξ) , и при этом псевдонорма $\tilde{\xi}$ в кольце $\tilde{R}$ задается формулой

$$\tilde{\xi}(\tilde{r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(r_n),$$

и кольцевые операции в $\tilde{R}$ определены соотношениями

$$\tilde{r} + \tilde{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n + q_n) \text{ в } (\tilde{R}, \tilde{\xi}),$$

$$\tilde{r} \cdot \tilde{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n \cdot q_n) \text{ в } (\tilde{R}, \tilde{\xi}),$$

где $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ и $\{q_n | n = 1, 2, \dots\}$ – фундаментальные последовательности в кольце (R, ξ) такие, что $\tilde{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ и $\tilde{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ в $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$.

В работах [14] (см. §1.8), [22] (см. глава 2, §10) и [62] (см. §1.8) были рассмотрены следующие понятия:

- Элемент $a \in (R, \xi)$ называют левым обобщенным делителем нуля, если в кольце (R, ξ) найдется последовательность $\{x_n | n = 1, 2, \dots\}$, удовлетворяющая условиям:

1. существует такое действительное число $\varepsilon > 0$, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\xi(x_n) \geq \varepsilon;$$

2. последовательность $\{a \cdot x_n | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к нулю в кольце (R, ξ) .

- Элемент $a \in (R, \xi)$ называют правым обобщенным делителем нуля, если в кольце (R, ξ) найдется последовательность $\{x_n | n = 1, 2, \dots\}$, удовлетворяющая условиям:

1. существует такое действительное число $\varepsilon > 0$, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\xi(x_n) \geq \varepsilon;$$

2. последовательность $\{x_n \cdot a | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к нулю в кольце (R, ξ) .

- Элемент $a \in (R, \xi)$ называют обобщенным делителем нуля, если a является и левым, и правым обобщенным делителем нуля.

Заметим, что понятие обобщенного делителя нуля (топологического делителя нуля) тесно связано с пополнением псевдонормированных колец и вопросом сохранения изоморфизмов некоторых видов при переходе к пополнению.

В работах [15] (см. §1.1) и [62] (см. §3.1) были рассмотрены следующие понятия:

- Направленным множеством называют частично упорядоченное множество Γ , удовлетворяющее следующему условию: для любых двух элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ найдется элемент $\gamma_3 \in \Gamma$ такой, что $\gamma_3 \geq \gamma_1$ и $\gamma_3 \geq \gamma_2$.

- Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $\{x_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ – последовательность элементов из (X, τ) по направленному множеству Γ . Элемент $a \in X$ называется пределом последовательности $\{x_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ по направленному множеству Γ , если для любой окрестности V точки a в (X, τ) найдется такой элемент $\gamma_0 \in \Gamma$, что $x_\gamma \in V$ для всех $\gamma \geq \gamma_0$. Обозначают $a = \lim_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$.

Заметим, что понятие предела по направленному множеству позволяет изучать семейства псевдонорм в кольцах, строить новые псевдонормы в этих кольцах и изучать изоморфизмы некоторых видов при переходе к пределу по направленному множеству в семействе псевдонорм.

В работе [32] (см. глава 5, §16) было рассмотрено следующее понятие:

- Подкольцо A кольца R называется достижимым подкольцом ступени не больше чем n кольца R , если существует такая цепочка $A = R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots \subseteq R_n = R$ подколец, что R_i является идеалом в R_{i+1} для $i = 0, 1, \dots, n-1$. В дальнейшем это будем обозначать так:

$$A = R_0 \triangleleft R_1 \triangleleft R_2 \triangleleft \dots \triangleleft R_n = R.$$

Заметим, что понятие достижимого подкольца тесно связано с вопросом суперпозиции некоторых видов изоморфизмов топологических и псевдонормированных колец.

В работах [41] (см. §2.8, стр. 38-39) и [68] были рассмотрено следующее понятие:

- Действительные числа γ и γ^* , где $\gamma > 1$ и $\gamma^* > 1$, называют сопряженными, если

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^*} = 1.$$

В работах [41] (см. §2.8, теоремы 13, 14; §2.10, теоремы 19, 20; §2.11, теорема 25), [25] (см. глава 2, §1) и [68] были доказаны следующие предложения:

- Для любых действительных чисел $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, где $k = 1, 2, \dots, n$, и для любого действительного числа $\gamma > 1$ справедливо неравенство Гёльдера

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^\gamma \right)^{1/\gamma} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^{\gamma^*} \right)^{1/\gamma^*},$$

где γ^* – сопряженное число к γ .

- Для любых действительных чисел $a_{ik} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$, и для любого действительного числа $\gamma > 1$ справедливо неравенство Минковского

$$\left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} \right)^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^\gamma \right)^{1/\gamma}.$$

- Пусть для действительных чисел $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, задано семейство функций

$$\{G_\gamma(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid 1 \leq \gamma \leq \infty\} \text{ таких, что } G_\gamma(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^\gamma \right)^{1/\gamma} \text{ при } 1 \leq \gamma < \infty \text{ и}$$

$$G_\infty(a_1, \dots, a_n) = \max\{a_1, \dots, a_n\} \text{ при } \gamma = \infty. \text{ Тогда справедливы следующие утверждения:}$$

- 1) для любых действительных чисел $a_k \geq 0$, где $k = 1, 2, \dots, n$, и для всех

$1 \leq \gamma \leq \sigma \leq \infty$ справедливо неравенство Иенсена

$$G_\gamma(a_1, \dots, a_n) \geq G_\sigma(a_1, \dots, a_n);$$

- 2) $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} G_\gamma(a_1, \dots, a_n) = G_\infty(a_1, \dots, a_n)$ для любых $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;

- 3) $\sup_{\gamma > 1} G_\gamma(a_1, \dots, a_n) = G_1(a_1, \dots, a_n)$ для любых $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Заметим, что неравенства Гёльдера, Минковского и Иенсена имеют широкое применение в теории банаховых колец. Однако в общей теории псевдонормированных колец эти неравенства ранее не были рассмотрены. Неравенства Гёльдера, Минковского и Иенсена позволят определить различные конструкции псевдонорм в кольцах, прямой сумме колец и кольце матриц, а также изучить вопрос сохранения некоторых видов изоморфизмов псевдонормированных колец.

В работе [44] вводится понятие центрального сопряжения для ассоциативных алгебр и доказывается, что альтернативные алгебры с центральным сопряжением обладают мультипликативной вещественной нормой степени выше 2, которая может иметь несколько разных, но эквивалентных представлений. Для алгебр бикватернионов, дикватернионов

и биоктавы результаты представлены в изотропных базисах. В работе [45] рассматриваются неассоциативные алгебры с центральным сопряжением. Доказывается, что альтернативные алгебры с центральным сопряжением обладают мультипликативной нормой степени 2. На примере алгебры бикватернионов рассматриваются некоторые возможности для применения полученного аппарата в геометрии и физике; показывается, что рассмотрение 4-нормы в теории поля делает естественным переход от электродинамики Максвелла к электродинамике Борна-Инфельда. Отметим, что в работах [44], [45] не рассматривались полинормы, порожденные псевдонормами.

В работе [40] показано, что матрице n -го порядка можно сопоставить положительное число, играющее роль ее псевдонормы, и получена соответствующая формула; доказано, что для псевдонорм $|A|$ и $|B|$ матриц A и B , выполняется неравенство $|A||B| \geq |AB|$; показано, что каждому такому неравенству соответствует определенное равенство, которые соответствуют неравенствам Шварца-Коши-Буняковского для скалярных произведений, причем каждому такому неравенству соответствуют некоторые гиперкомплексные числа. Однако не сложно заметить, что псевдонорма, предложенная для матриц в работе [40], является всего лишь частным случаем псевдонормы $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ в кольце матриц при $\gamma = \sigma = 2$ (см. теорему 3.17).

Одним из наиболее изученных классов колец являются линейные нормированные и банаховы кольца. Исследования по нормированным и банаховым кольцам отражены в работах [22], [25], [34], [42], [57], [58], [64], [65], [67], [80].

В работах [22] и [34] изучаются линейные нормированные кольца и радикал обобщенных нульстепенных элементов в линейных нормированных кольцах (при этом для коммутативных колец в работе [22] обобщенные нульстепенные элементы определяются как элементы, удовлетворяющие условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$; для некоммутативных колец в работе [34] обобщенный нульстепенный элемент – элемент x_0 кольца R такой, что $(e + yx_0)_l^{-1}$ существует для любого элемента $y \in R$ в случае, когда кольцо R содержит единицу e , либо элемент x_0 кольца R такой, что элемент $\alpha x_0 + zx_0$ имеет левый квазиобратный при любых $z \in R$ и любых числах α в случае, когда кольцо R не содержит единицу).

Отметим, что в теории банаховых колец кроме радикала обобщенных нульстепенных элементов другие радикалы не были рассмотрены; общая теория радикалов банаховых ко-

лец не была построена, поскольку кроме топологических и изометрических изоморфизмов другие изоморфизмы в теории банаховых колец не рассматривались.

1.3. Выводы по главе 1

Из приведенного выше литературного обзора видно, что для построения общей теории радикалов псевдонормированных колец необходимо исследовать гомоморфизмы и изоморфизмы определенных видов, иметь аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец, а также теорию изоморфизмов и гомоморфизмов псевдонормированных колец.

Аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец ранее изучены не были; общая теория радикалов и теория изоморфизмов и гомоморфизмов псевдонормированных колец ранее не подвергалась глубокому исследованию. Поэтому в научной литературе отсутствуют работы, содержащие глубокие исследования по этой теории для псевдонормированных колец.

В результате анализа исследований в области общей теории радикалов топологических колец и изучения состояния вопроса в области теории изоморфизмов и гомоморфизмов псевдонормированных колец была сформулирована проблема исследования.

Проблема исследования: Определение и изучение классов изоморфизмов псевдонормированных колец, для которых имеют место аналоги второй теоремы об изоморфизме, что приведет к исследованию конструкций псевдонормированных колец, сохраняющих такие изоморфизмы.

Решение поставленной проблемы исследования позволит в дальнейшем построить общую теорию радикалов псевдонормированных колец.

Цель и задачи исследования заключаются в исследовании специальных изоморфизмов псевдонормированных колец и построении их общей теории. В частности:

- определение классов специальных изоморфизмов псевдонормированных колец, для которых имеют место аналоги второй теоремы об изоморфизме;
- исследование свойств специальных изоморфизмов псевдонормированных колец;
- исследование конструкций псевдонормированных колец, сохраняющих специальные изоморфизмы.

2. ТЕОРЕМЫ О СУЖЕНИИ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ГОМОМОРФИЗМОВ ДЛЯ ПСЕВДОНОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ

2.1. Сужение изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на различные подкольца

В работе рассматриваются не обязательно ассоциативные псевдонормированные кольца (см. [14], определение 1.1.12).

В этом параграфе рассматривается вопрос о справедливости второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец.

2.1. Теорема. Пусть (R, ξ) , $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм. Неравенство $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$ выполнено для всех $r \in R$ тогда и только тогда, когда существуют псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$ и гомоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{R} \rightarrow \bar{R}$ такие, что:

1) R является подкольцом кольца $\hat{R}$, $\hat{\xi}|_R = \xi$ и $\hat{\varphi}|_R = \varphi$;

2) $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является изометрическим гомоморфизмом псевдонормированных колец.

Доказательство.

Необходимость. Пусть для любого $r \in R$ выполнено неравенство $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$, и пусть $\hat{R}$ – прямое произведение колец R и $\bar{R}$, т.е. $\hat{R} = \{ \hat{r} = (a, \bar{b}) \mid a \in R, \bar{b} \in \bar{R} \}$ с операциями сложения $\hat{r}_1 + \hat{r}_2 = (a_1 + a_2, \bar{b}_1 + \bar{b}_2)$ и умножения $\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 = (a_1 \cdot a_2, \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2)$, где $\hat{r}_1 = (a_1, \bar{b}_1)$ и $\hat{r}_2 = (a_2, \bar{b}_2)$.

Определим псевдонорму $\hat{\xi}$ на кольце $\hat{R}$ следующим образом:

$\hat{\xi}(\hat{r}) = \max \{ \xi(a), \bar{\xi}(\bar{b}) \}$, где $\hat{r} = (a, \bar{b})$. Легко убедиться в том, что эта функция удовлетворяет аксиомам псевдонормы.

Рассмотрим подкольцо $R' = \{ a' = (a, \varphi(a)) \mid a \in R \}$ кольца $\hat{R}$. Так как

$\bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$, то $\hat{\xi}(a') = \hat{\xi}((a, \varphi(a))) = \max \{ \xi(a), \bar{\xi}(\varphi(a)) \} = \xi(a)$.

Если элементу $a \in R$ поставить в соответствие элемент $(a, \varphi(a)) \in R''$, то кольца (R, ξ) и (R', ξ') будут изометрически изоморфными. В дальнейшем мы отождествим элемент $a \in R$ с элементом $(a, \varphi(a)) \in R''$. Следовательно, не будем различать кольца (R, ξ) и (R', ξ') , т.е. можем считать, что (R, ξ) является подкольцом кольца $(\hat{R}, \hat{\xi})$.

В качестве отображения $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ рассмотрим $\hat{\varphi}((a, \bar{b})) = \bar{b}$. Тогда $\hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}((a, \varphi(a))) = \varphi(a)$ для любого $a \in R$, т.е. $\hat{\varphi}$ является продолжением изоморфизма φ .

Рассмотрим $\ker \hat{\varphi} = \{ \hat{r} \in \hat{R} \mid \hat{\varphi}(\hat{r}) = 0 \} = \{ (a, \bar{b}) \in \hat{R} \mid \bar{b} = 0 \} = \{ (a, 0) \mid a \in R \}$. Тогда $\ker \hat{\varphi}$ является идеалом кольца $\hat{R}$, причём

$$\inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) \mid \hat{a} \in \ker \hat{\varphi} \} = \inf \{ \hat{\xi}((r, \bar{r}) + (a, 0)) \mid a \in R \} = \inf \{ \hat{\xi}((r+a, \bar{r})) \mid a \in R \} =$$

$$= \inf_{a \in R} \{ \max \{ \xi(r+a), \bar{\xi}(\bar{r}) \} \} \leq \max \{ \xi(r+a), \bar{\xi}(\bar{r}) \} \Big|_{a=-r} = \max \{ \xi(0), \bar{\xi}(\bar{r}) \} =$$

$$= \bar{\xi}(\bar{r}) = \bar{\xi}(\hat{\varphi}((r, \bar{r}))) = \bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r})).$$

Таким образом,

$$\bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r})) \geq \inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) \mid \hat{a} \in \ker \hat{\varphi} \}. \quad (2.1)$$

С другой стороны, для любых $a \in \ker \varphi$ и $\hat{r} = (r, \bar{r}) \in \hat{R}$ имеет место неравенство

$$\max \{ \xi(r+a), \bar{\xi}(\bar{r}) \} \geq \bar{\xi}(\bar{r}).$$

Множество $\{ \max \{ \xi(r+a), \bar{\xi}(\bar{r}) \} \mid a \in \ker \varphi \}$ ограничено снизу числом $\bar{\xi}(\bar{r})$, значит,

$$\inf \{ \max \{ \xi(r+a), \bar{\xi}(\bar{r}) \} \mid a \in \ker \varphi \} \geq \bar{\xi}(\bar{r}).$$

Имеем

$$\inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) \mid \hat{a} \in \ker \hat{\varphi} \} = \inf \{ \hat{\xi}((r+a, \bar{r})) \mid a \in R \} =$$

$$= \inf_{a \in \ker \hat{\varphi}} \{ \max \{ \xi(r+a), \bar{\xi}(\bar{r}) \} \} \geq \bar{\xi}(\bar{r}) = \bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r})).$$

Следовательно,

$$\inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) \mid \hat{a} \in \ker \hat{\varphi} \} \geq \bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r})). \quad (2.2)$$

Из неравенств (2.1) и (2.2) получим требуемое равенство:

$$\bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r})) = \inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) \mid \hat{a} \in \ker \hat{\varphi} \}, \quad (2.3)$$

т.е. $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является изометрическим гомоморфизмом.

Достаточность. Пусть существуют такое псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$, что (R, ξ) является подкольцом в $(\hat{R}, \hat{\xi})$ и такой изометрический гомоморфизм $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$, который является продолжением изоморфизма φ . Тогда

$$\xi(r) = \hat{\xi}(r) \geq \inf \{ \hat{\xi}(r + a) \mid a \in \ker \hat{\varphi} \} = \bar{\xi}(\varphi(r)),$$

т.е. неравенство $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$ выполнено для любого $r \in R$. $\square$

2.2. Замечание. Легко заметить, что в условиях теоремы 2.1 псевдонормированные кольца $(\hat{R}, \hat{\xi})/N$ и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ являются изометрически изоморфными, где $N = \{ (a, 0) \mid a \in R \}$ – идеал в кольце $\hat{R}$ и $N \cap R = \{ 0 \}$.

2.3. Замечание. Из теоремы 2.1 видно, что ничего больше, чем неравенство $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$ для кольцевого изоморфизма φ , получить нельзя. Поэтому на подкольцо R кольца $\hat{R}$ мы будем накладывать дополнительные условия:

- 1) R односторонний идеал в $\hat{R}$;
- 2) R двусторонний идеал в $\hat{R}$;
- 3) R достижимое подкольцо в $\hat{R}$.

2.4. Замечание. Из построения кольца $\hat{R}$ в теореме 2.1 видно, что если кольцо R является ассоциативным (коммутативным), то и кольцо $\hat{R}$ будет таковым. Следовательно, теорема 2.1 верна и в классе всех ассоциативных (коммутативных) псевдонормированных колец.

2.2. Сужение изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на односторонний идеал

Как видно из теоремы 2.1, вторая теорема об изоморфизме для псевдонормированных колец не верна в случае изометрического изоморфизма. Для изучения аналогов второй теоремы об изоморфизме требуются дополнительные условия и изоморфизмы, отлич-

ные от топологических и изометрических. Рассмотрим случай, когда подкольцо является односторонним идеалом.

2.5. Определение. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца. Изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ назовём полуизометрическим слева (справа), если существует такое псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$, что выполнены следующие условия:

- R является левым (правым) идеалом в кольце $\hat{R}$;
- $\hat{\xi}|_R = \xi$;
- изоморфизм φ может быть продолжен до изометрического гомоморфизма

$\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ псевдонормированных колец.

Следующие теоремы (теорема 2.6 и теорема 2.7) показывают, что дополнительное требование для подкольца быть односторонним идеалом приводят нас к аналогам второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец.

2.6. Теорема. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ кольцевой изоморфизм. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева;
2. $\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(a)} \leq \bar{\xi}(\varphi(b)) \leq \xi(b)$ для любых $a, b \in R \setminus \{0\}$;
3. существуют псевдонормированное кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ и гомоморфизм $\tilde{\varphi}: \tilde{R} \rightarrow \bar{R}$ такие, что:
 - а) R является левым идеалом кольца $\tilde{R}$, причём $\tilde{\xi}|_R = \xi$ и $\tilde{\varphi}|_R = \varphi$;
 - б) гомоморфизм $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является изометрическим гомоморфизмом псевдонормированных колец;
 - в) $(\ker \tilde{\varphi})^2 = 0$.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$. Пусть $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева. Тогда существует псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$ такое, что псевдонормированное кольцо

(R, ξ) является левым идеалом псевдонормированного кольца $(\hat{R}, \hat{\xi})$, и изоморфизм φ может быть продолжен до изометрического гомоморфизма $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$.

Пусть $a, b \in R$ и $\varepsilon > 0$. Так как $\hat{\varphi}$ является продолжением изоморфизма φ , то $R \cap \ker \hat{\varphi} = \ker \varphi = \{0\}$. И поскольку R – левый идеал $\hat{R}$ и $\ker \hat{\varphi}$ – идеал $\hat{R}$, то $d \cdot a \in R \cap \ker \hat{\varphi} = \{0\}$ для любого $d \in \ker \hat{\varphi}$, т.е. $(\ker \hat{\varphi}) \cdot a = 0$.

Так как $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – изометрический гомоморфизм, то $\bar{\xi}(\hat{\varphi}(b)) = \inf \{ \hat{\xi}(b + j) \mid j \in \ker \hat{\varphi} \}$. Следовательно, $\bar{\xi}(\hat{\varphi}(b)) \leq \hat{\xi}(b) = \xi(b)$ и существует элемент $c \in \ker \hat{\varphi}$ такой, что

$$\hat{\xi}(b + c) < \bar{\xi}(\hat{\varphi}(b)) + \varepsilon = \bar{\xi}(\varphi(b)) + \varepsilon.$$

И так как $c \cdot a \in (\ker \hat{\varphi}) \cdot a = 0$, то

$$\begin{aligned} \xi(b \cdot a) &= \hat{\xi}(b \cdot a) = \hat{\xi}(b \cdot a + c \cdot a) = \hat{\xi}((b + c) \cdot a) \leq \hat{\xi}(b + c) \cdot \hat{\xi}(a) = \\ &= \hat{\xi}(b + c) \cdot \xi(a) < (\bar{\xi}(\varphi(b)) + \varepsilon) \cdot \xi(a). \end{aligned}$$

Совершая предельный переход в неравенстве $\xi(b \cdot a) < (\bar{\xi}(\varphi(b)) + \varepsilon) \cdot \xi(a)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $\xi(b \cdot a) \leq \bar{\xi}(\varphi(b)) \cdot \xi(a)$.

Таким образом, для любых $a, b \in R \setminus \{0\}$ справедливы неравенства

$$\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(a)} \leq \bar{\xi}(\varphi(b)) \leq \xi(b).$$

Импликация $1 \Rightarrow 2$ доказана.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – изоморфизм такой, что неравенства $\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(a)} \leq \bar{\xi}(\varphi(b)) \leq \xi(b)$ выполнены для любых $a, b \in R \setminus \{0\}$.

Проведем доказательство в несколько этапов.

I. Построение кольца $\tilde{R}$ и проверка некоторых его свойств.

I.1. Рассмотрим такое дискретное кольцо $\tilde{R}$, что его аддитивная группа является прямой суммой аддитивных групп колец R и $\bar{R}$, и умножение в кольце $\tilde{R}$ определим следующим образом: $(r_1, \bar{r}_1) \cdot (r_2, \bar{r}_2) = (r_1 \cdot r_2, \varphi(r_1) \cdot \bar{r}_2)$.

I.2. Легко заметить, что $\tilde{R}$ является кольцом по отношению к этим операциям сложения и умножения, и множество $R'' = \{(r, 0) \mid r \in R\}$ является левым идеалом кольца $\tilde{R}$.

I.3. Определим отображение $\alpha: R \rightarrow \tilde{R}$ следующим образом: $\alpha(r) = (r, 0)$ для любого $r \in R$. Легко заметить, что $\alpha: R \rightarrow R'' = \{(r, 0) \mid r \in R\}$ – кольцевой изоморфизм. Следовательно, если мы отождествим элемент $r \in R$ с элементом $(r, 0) \in R''$, то мы можем полагать, что R является левым идеалом кольца $\tilde{R}$.

I.4. Определим отображение $\tilde{\varphi}: \tilde{R} \rightarrow \bar{R}$ следующим образом: $\tilde{\varphi}((r, \bar{r})) = \varphi(r)$. Легко заметить, что $\tilde{\varphi}: \tilde{R} \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой гомоморфизм, и, учитывая I.3,

$\tilde{\varphi}(r) = \tilde{\varphi}((r, 0)) = \varphi(r)$ для любого $r \in R$, т.е. $\tilde{\varphi}|_R = \varphi$. Так как $\ker \tilde{\varphi} = \{(0, \bar{r}) \mid \bar{r} \in \bar{R}\}$, то $(\ker \tilde{\varphi})^2 = 0$.

II. Определение псевдонормы $\tilde{\xi}$ и проверка некоторых ее свойств.

II.1. Определим действительную функцию $\tilde{\xi}$ на кольце $\tilde{R}$ следующим образом:

$\tilde{\xi}(\tilde{r}) = \tilde{\xi}((r, \bar{r})) = \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})$ для любого $\tilde{r} = (r, \bar{r}) \in \tilde{R}$.

II.2. Проверим, что функция $\tilde{\xi}$ является псевдонормой в кольце $\tilde{R}$.

Легко заметить, $\tilde{\xi}(-\tilde{r}) = \tilde{\xi}(\tilde{r}) \geq 0$ для любого $\tilde{r} \in \tilde{R}$, и $\tilde{\xi}(\tilde{r}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{r} = 0$, т.е. условия I – III определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) выполнены. Пусть $\tilde{r}_1 = (r_1, \bar{r}_1) \in \tilde{R}$ и $\tilde{r}_2 = (r_2, \bar{r}_2) \in \tilde{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2) &= \tilde{\xi}((r_1, \bar{r}_1) + (r_2, \bar{r}_2)) = \tilde{\xi}((r_1 + r_2, \bar{r}_1 + \bar{r}_2)) = \\ &= \xi(r_1 + r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \\ &= \xi(r_1 + r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_1) - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) \leq \\ &\leq \xi(r_1 - \varphi^{-1}(\bar{r}_1)) + \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\bar{r}_1) + \bar{\xi}(\bar{r}_2) = \tilde{\xi}(\tilde{r}_1) + \tilde{\xi}(\tilde{r}_2). \end{aligned}$$

Кроме того, поскольку неравенства $\xi(b \cdot a) \leq \bar{\xi}(\varphi(b)) \cdot \xi(a)$ и $\bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ справедливы для любых $a, b \in R$ (см. утверждение 2 формулировки теоремы), то мы имеем:

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}(\tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_2) &= \tilde{\xi}((r_1, \bar{r}_1) \cdot (r_2, \bar{r}_2)) = \tilde{\xi}((r_1 \cdot r_2, \varphi(r_1) \cdot \bar{r}_2)) = \\
&= \xi(r_1 \cdot r_2 - \varphi^{-1}(\varphi(r_1) \cdot \bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\varphi(r_1) \cdot \bar{r}_2) = \\
&= \xi(r_1 \cdot r_2 - r_1 \cdot \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\varphi(r_1) \cdot \bar{r}_2) = \\
&= \xi(r_1 \cdot (r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2))) + \bar{\xi}(\varphi(r_1) \cdot \bar{r}_2) \leq \\
&\leq \bar{\xi}(\varphi(r_1)) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\varphi(r_1) \cdot \bar{r}_2) = \\
&= \bar{\xi}(\varphi(r_1)) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}((\varphi(r_1) - \bar{r}_1 + \bar{r}_1) \cdot \bar{r}_2) \leq \\
&\leq \bar{\xi}(\varphi(r_1)) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}((\varphi(r_1) - \bar{r}_1) \cdot \bar{r}_2) + \bar{\xi}(\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) \leq \\
&\leq \bar{\xi}(\varphi(r_1)) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\varphi(r_1) - \bar{r}_1) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) + \bar{\xi}(\bar{r}_1) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) \leq \\
&\leq \bar{\xi}(\varphi(r_1)) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \xi(r_1 - \varphi^{-1}(\bar{r}_1)) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) + \bar{\xi}(\bar{r}_1) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) = \\
&= \bar{\xi}(\varphi(r_1) - \bar{r}_1 + \bar{r}_1) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \xi(r_1 - \varphi^{-1}(\bar{r}_1)) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) + \bar{\xi}(\bar{r}_1) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) \leq \\
&\leq \bar{\xi}(\varphi(r_1) - \bar{r}_1) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\bar{r}_1) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \\
&\quad + \xi(r_1 - \varphi^{-1}(\bar{r}_1)) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) + \bar{\xi}(\bar{r}_1) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) \leq \\
&\leq \xi(r_1 - \varphi^{-1}(\bar{r}_1)) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\bar{r}_1) \cdot \xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \\
&\quad + \xi(r_1 - \varphi^{-1}(\bar{r}_1)) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) + \bar{\xi}(\bar{r}_1) \cdot \bar{\xi}(\bar{r}_2) = \\
&= (\xi(r_1 - \varphi^{-1}(\bar{r}_1)) + \bar{\xi}(\bar{r}_1)) \cdot (\xi(r_2 - \varphi^{-1}(\bar{r}_2)) + \bar{\xi}(\bar{r}_2)) = \tilde{\xi}(\tilde{r}_1) \cdot \tilde{\xi}(\tilde{r}_2).
\end{aligned}$$

Таким образом, функция $\tilde{\xi}$ удовлетворяет условиям IV – V определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12). Значит, функция $\tilde{\xi}$ является псевдонормой в кольце $\tilde{R}$.

II.3. Так как $\tilde{\xi}(r) = \tilde{\xi}((r, 0)) = \xi(r) + \bar{\xi}(0) = \xi(r)$ для любого $r \in R$, то $\tilde{\xi}|_R = \xi$.

II.4. Проверим, что отображение $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является изометрическим гомоморфизмом, т.е. $\bar{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r})) = \inf \{ \tilde{\xi}(\tilde{r} + \tilde{a}) \mid \tilde{a} \in \ker \tilde{\varphi} \}$ для любого $\tilde{r} \in \tilde{R}$.

Пусть $\tilde{r} = (r, \bar{r}) \in \tilde{R}$. Тогда $\tilde{r}_1 = (0, \varphi(r) - \bar{r}) \in \ker \tilde{\varphi}$, и

$$\begin{aligned}
\inf \{ \tilde{\xi}(\tilde{r} + \tilde{a}) \mid \tilde{a} \in \ker \tilde{\varphi} \} &\leq \tilde{\xi}(\tilde{r} + \tilde{r}_1) = \tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \varphi(r) - \bar{r})) = \\
&= \tilde{\xi}((r, \bar{r} + \varphi(r) - \bar{r})) = \tilde{\xi}((r, \varphi(r))) =
\end{aligned}$$

$$= \xi(r - \varphi^{-1}(\varphi(r))) + \bar{\xi}(\varphi(r)) = \bar{\xi}(\varphi(r)) = \bar{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r})).$$

Следовательно, $\inf \{ \tilde{\xi}(\tilde{r} + \tilde{a}) \mid \tilde{a} \in \ker \tilde{\varphi} \} \leq \bar{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r})).$

С другой стороны, поскольку $\bar{\xi}(\varphi(b)) \leq \xi(b)$ для любого элемента $b \in R$, то для любого элемента $\tilde{a} = (0, \bar{a}) \in \ker \tilde{\varphi}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\tilde{r} + \tilde{a}) &= \tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{a})) = \tilde{\xi}((r, \bar{r} + \bar{a})) = \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r} + \bar{a})) + \bar{\xi}(\bar{r} + \bar{a}) \geq \\ &\geq \bar{\xi}(\varphi(r - \varphi^{-1}(\bar{r} + \bar{a}))) + \bar{\xi}(\bar{r} + \bar{a}) \geq \bar{\xi}(\varphi(r - \varphi^{-1}(\bar{r} + \bar{a})) + \bar{r} + \bar{a}) = \\ &= \bar{\xi}(\varphi(r) - \bar{r} - \bar{a} + \bar{r} + \bar{a}) = \bar{\xi}(\varphi(r)) = \bar{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r})). \end{aligned}$$

Это означает, что $\inf \{ \tilde{\xi}(\tilde{r} + \tilde{a}) \mid \tilde{a} \in \ker \tilde{\varphi} \} \geq \bar{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r})).$

Мы видим, что кольцевой гомоморфизм $\tilde{\varphi}: \tilde{R} \rightarrow \bar{R}$ удовлетворяет условию $\inf \{ \tilde{\xi}(\tilde{r} + \tilde{a}) \mid \tilde{a} \in \ker \tilde{\varphi} \} = \bar{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r}))$ для любого $\tilde{r} \in \tilde{R}$. Следовательно, $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является изометрическим гомоморфизмом.

Таким образом, импликация $2 \Rightarrow 3$ доказана.

Импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна, поскольку псевдонормированное кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$, определенное в утверждении 3 теоремы удовлетворяет всем условиям из определения 2.5. $\square$

Переходя к антиизоморфным кольцам, из теоремы 2.6 легко получить следующую теорему.

2.7. Теорема. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ кольцевой изоморфизм. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом справа;
2. $\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(b)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ для любых $a, b \in R \setminus \{0\}$;
3. существуют псевдонормированное кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ и гомоморфизм $\tilde{\varphi}: \tilde{R} \rightarrow \bar{R}$ такие, что:
 - а) R является правым идеалом кольца $\tilde{R}$, причём $\tilde{\xi}|_R = \xi$ и $\tilde{\varphi}|_R = \varphi$;

б) гомоморфизм $\tilde{\varphi} : (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является изометрическим гомоморфизмом псевдонормированных колец;

с) $(\ker \tilde{\varphi})^2 = 0$.

2.8. Замечание. Если кольца R и $\bar{R}$ ассоциативны, то кольцо $\tilde{R}$, построенное в доказательстве теоремы 2.6 также ассоциативно. Следовательно, теоремы 2.6 и 2.7 справедливы и для ассоциативных колец.

2.9. Замечание. Если рассматривать класс всех коммутативных колец, то односторонний идеал является двусторонним, и тогда, согласно замечанию 2.23, теоремы 2.6 и 2.7 также верны и для случая коммутативных колец.

2.10. Следствие. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi : R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева (справа) и кольцо (R, ξ) имеет элемент, не являющийся правым (левым) обобщенным делителем нуля, то кольца (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ топологически изоморфны.

Доказательство.

Пусть последовательность $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу r в кольце (R, ξ) , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(r_n - r) = 0$. Тогда из неравенства $\bar{\xi}(\varphi(r_n) - \varphi(r)) = \bar{\xi}(\varphi(r_n - r)) \leq \xi(r_n - r)$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}(\varphi(r_n) - \varphi(r)) = 0$. Значит, последовательность $\{\varphi(r_n) | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу $\varphi(r)$ в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$.

Обратно. Пусть последовательность $\{\bar{r}_n | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу $\bar{r}$ в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}(\bar{r}_n - \bar{r}) = 0$. Тогда для любого $q \in R \setminus \{0\}$ из неравенства $\xi((\varphi^{-1}(\bar{r}_n) - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot q) = \xi((\varphi^{-1}(\bar{r}_n - \bar{r})) \cdot q) \leq \bar{\xi}(\bar{r}_n - \bar{r}) \cdot \xi(q)$ получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi((\varphi^{-1}(\bar{r}_n) - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot q) = 0$. И если $q \in (R, \xi)$ – элемент, не являющийся правым обобщенным делителем нуля, то тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(\varphi^{-1}(\bar{r}_n) - \varphi^{-1}(\bar{r})) = 0$ (см. [14], §1.8). Следовательно, последовательность $\{\varphi^{-1}(\bar{r}_n) | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу $\varphi^{-1}(\bar{r})$ в кольце (R, ξ) .

Мы показали, что последовательность $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу r в

кольце (R, ξ) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\varphi(r_n) | n = 1, 2, \dots\}$ сходится к элементу $\varphi(r)$ в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$. Значит, псевдонормированные кольца (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ являются топологически изоморфными. $\square$

2.11. Следствие. Если (R, ξ) – псевдонормированное кольцо с единицей e и $\xi(e) = 1$, то всякий его полуизометрический изоморфизм слева (справа) является изометрическим.

Доказательство. Действительно, рассматривая неравенство

$$\frac{\xi(a \cdot b)}{\xi(b)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$$

при $b = e$, мы получим

$$\xi(a) = \frac{\xi(a \cdot e)}{1} = \frac{\xi(a \cdot e)}{\xi(e)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a),$$

откуда следует $\bar{\xi}(\varphi(a)) = \xi(a)$. $\square$

2.12. Следствие. Если (R, ξ) – нормированное кольцо, то всякий его полуизометрический изоморфизм слева (справа) является изометрическим.

Доказательство. В самом деле, в нормированных кольцах справедливо равенство $\xi(a \cdot b) = \xi(a) \cdot \xi(b)$, из которого следует, что

$$\xi(a) = \frac{\xi(a) \cdot \xi(b)}{\xi(b)} = \frac{\xi(a \cdot b)}{\xi(b)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a).$$

Значит, $\bar{\xi}(\varphi(a)) = \xi(a)$. $\square$

2.13. Следствие. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца и $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева (справа). Если $\tilde{\xi}$ – такая псевдонорма на $\bar{R}$, что $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \tilde{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$ для каждого $r \in R$, то $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \tilde{\xi})$ также является полуизометрическим изоморфизмом слева (справа).

Доказательство. Действительно, $\frac{\xi(r \cdot q)}{\xi(q)} \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \tilde{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(q)$. Значит,

$\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \tilde{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева. $\square$

2.3. Сужение изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на двусторонний идеал

Как было отмечено выше, вторая теорема об изоморфизме для псевдонормированных колец в общем случае не верна. Поэтому на подкольцо приходится накладывать дополнительные ограничения. В предыдущем параграфе был рассмотрен случай, когда подкольцо является односторонним идеалом. В настоящем параграфе изучим случай, когда подкольцо является двусторонним идеалом.

2.14. Определение. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца. Изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ назовём полуизометрическим, если существует такое псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$, что выполнены следующие условия:

- R является идеалом в кольце $\hat{R}$;
- $\hat{\xi}|_R = \xi$;
- изоморфизм φ может быть продолжен до изометрического гомоморфизма

$\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ псевдонормированных колец.

Следующая теорема показывает, что дополнительное требование для подкольца быть двусторонним идеалом приводит нас к другому аналогу второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец.

2.15. Теорема. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ кольцевой изоморфизм. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом псевдонормированных колец;
2. $\frac{\xi(a \cdot b)}{\xi(b)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ и $\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(b)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ для любых $a \in R$ и $b \in R \setminus \{0\}$;
3. существуют псевдонормированное кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ и гомоморфизм $\tilde{\varphi}: \tilde{R} \rightarrow \bar{R}$ такие, что:
 - а) R является идеалом кольца $\tilde{R}$, причём $\tilde{\xi}|_R = \xi$ и $\tilde{\varphi}|_R = \varphi$;

б) $\bar{\xi}(\varphi(r)) = \min\{\tilde{\xi}(r+a) \mid a \in \ker \tilde{\varphi}\}$ для каждого $r \in R$, т.е. для любого $r \in R$

существует такой элемент $a_r \in \ker \tilde{\varphi}$, что $\bar{\xi}(\varphi(r)) = \tilde{\xi}(r+a_r)$.

Доказательство.

1 $\Rightarrow$ 2 следует из теорем 2.6 и 2.7.

2 $\Rightarrow$ 3. Пусть $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ обладает следующими свойствами:

1. φ – изоморфизм;
2. $\bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ для любого $a \in R$;
3. $\frac{\xi(a \cdot b)}{\xi(b)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a))$ и $\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(b)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a))$ для любых $a \in R$, $b \in R \setminus \{0\}$.

Докажем, что выполнено утверждение 3.

Рассмотрим кольцо $\tilde{R} = R \oplus \bar{R} = \{(r, \bar{r}) \mid r \in R, \bar{r} \in \bar{R}\}$, которое является прямой суммой колец R и $\bar{R}$. Определим на $\tilde{R}$ вещественно значную функцию

$$\tilde{\xi}((r, \bar{r})) = \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})$$

и отображение $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$, действующее по правилу

$$\tilde{\varphi}((r, \bar{r})) = \varphi(r).$$

I. Покажем, что $\tilde{\xi}$ – псевдонорма на кольце $\tilde{R}$.

I.1. Очевидно, что $\tilde{\xi}((r, \bar{r})) \geq 0$ для всех $r \in R$ и $\bar{r} \in \bar{R}$, поскольку псевдонормы ξ и $\bar{\xi}$ принимают неотрицательные значения.

I.2. Так как $\xi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ и $\bar{\xi}(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = 0$, то

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}((r, \bar{r})) = 0 &\Leftrightarrow \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) = 0 \\ \bar{\xi}(\bar{r}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r - \varphi^{-1}(\bar{r}) = 0 \\ \bar{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \bar{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (r, \bar{r}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие I определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) выполнено:

$$\tilde{\xi}((r, \bar{r})) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } (r, \bar{r}) = 0.$$

I.3. Поскольку $\xi(-x) = \xi(x)$ и $\bar{\xi}(-\bar{y}) = \bar{\xi}(\bar{y})$ для всех $x \in R$ и $\bar{y} \in \bar{R}$, то

$$\tilde{\xi}((-r, -\bar{r})) = \xi(-r - \varphi^{-1}(-\bar{r})) + \bar{\xi}(-\bar{r}) = \xi(r + \varphi^{-1}(-\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r}) =$$

$$= \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r}) = \tilde{\xi}((r, \bar{r})).$$

I.4. Для любых $x_1, x_2 \in R$ и $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{R}$ выполнены неравенства

$\xi(x_1 + x_2) \leq \xi(x_1) + \xi(x_2)$ и $\bar{\xi}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \leq \bar{\xi}(\bar{y}_1) + \bar{\xi}(\bar{y}_2)$, поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}((r+q, \bar{r}+\bar{q})) &= \xi(r+q - \varphi^{-1}(\bar{r}+\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{r}+\bar{q}) = \\ &= \xi(r+q - \varphi^{-1}(\bar{r}) - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{r}+\bar{q}) = \xi((r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + (q - \varphi^{-1}(\bar{q}))) + \\ &+ \bar{\xi}(\bar{r}+\bar{q}) \leq \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{r}) + \bar{\xi}(\bar{q}) = (\xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})) + \\ &+ (\xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{q})) = \tilde{\xi}((r, \bar{r})) + \tilde{\xi}((q, \bar{q})). \end{aligned}$$

Мы показали, что выполнено условие IV определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12):

$$\tilde{\xi}((r+q, \bar{r}+\bar{q})) \leq \tilde{\xi}((r, \bar{r})) + \tilde{\xi}((q, \bar{q})) \text{ для всех } r, q \in R \text{ и } \bar{r}, \bar{q} \in \bar{R}.$$

I.5. Проверим выполнение неравенства $\tilde{\xi}((r \cdot q, \bar{r} \cdot \bar{q})) \leq \tilde{\xi}((r, \bar{r})) \cdot \tilde{\xi}((q, \bar{q}))$ для произвольных $r, q \in R$ и $\bar{r}, \bar{q} \in \bar{R}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}((r \cdot q, \bar{r} \cdot \bar{q})) &= \xi(r \cdot q - \varphi^{-1}(\bar{r} \cdot \bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{r} \cdot \bar{q}) = \xi(r \cdot q - \varphi^{-1}(\bar{r}) \cdot \varphi^{-1}(\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{r} \cdot \bar{q}) = \\ &= \xi((r \cdot q - r \cdot \varphi^{-1}(\bar{q})) + (r \cdot \varphi^{-1}(\bar{q}) - \varphi^{-1}(\bar{r}) \cdot \varphi^{-1}(\bar{q}))) + \bar{\xi}(\bar{r} \cdot \bar{q}). \end{aligned}$$

Так как для любых $x_1, x_2 \in R$ выполнено неравенство $\xi(x_1 + x_2) \leq \xi(x_1) + \xi(x_2)$, то

$$\begin{aligned} \xi((r \cdot q - r \cdot \varphi^{-1}(\bar{q})) + (r \cdot \varphi^{-1}(\bar{q}) - \varphi^{-1}(\bar{r}) \cdot \varphi^{-1}(\bar{q}))) + \bar{\xi}(\bar{r} \cdot \bar{q}) &\leq \\ \leq \xi(r \cdot q - r \cdot \varphi^{-1}(\bar{q})) + \xi(r \cdot \varphi^{-1}(\bar{q}) - \varphi^{-1}(\bar{r}) \cdot \varphi^{-1}(\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{r} \cdot \bar{q}) &= \\ = \xi(r \cdot (q - \varphi^{-1}(\bar{q}))) + \xi((r - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot \varphi^{-1}(\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{r} \cdot \bar{q}). \end{aligned}$$

Поскольку для любых $x_1, x_2 \in R$ выполнены неравенства $\xi(x_1 \cdot x_2) \leq \bar{\xi}(\varphi(x_1)) \cdot \xi(x_2)$ и

$$\xi(x_1 \cdot x_2) \leq \xi(x_1) \cdot \bar{\xi}(\varphi(x_2)), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \xi(r \cdot (q - \varphi^{-1}(\bar{q}))) + \xi((r - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot \varphi^{-1}(\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{r} \cdot \bar{q}) &\leq \\ \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\varphi(\varphi^{-1}(\bar{q}))) + \bar{\xi}(\bar{r} \cdot \bar{q}). \end{aligned}$$

Для любых $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{R}$ выполнено неравенство $\bar{\xi}(\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2) \leq \bar{\xi}(\bar{y}_1) \cdot \bar{\xi}(\bar{y}_2)$, поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) + \bar{\xi}(\bar{r} \cdot \bar{q}) &\leq \\ \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) + \bar{\xi}(\bar{r}) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) &= \\ = \bar{\xi}((\varphi(r) - \bar{r}) + \bar{r}) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) + \bar{\xi}(\bar{r}) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}). \end{aligned}$$

Так как для любых $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{R}$ выполнено неравенство $\bar{\xi}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \leq \bar{\xi}(\bar{y}_1) + \xi(\bar{y}_2)$, то

$$\begin{aligned} & \bar{\xi}((\varphi(r) - \bar{r}) + \bar{r}) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) + \bar{\xi}(\bar{r}) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) \leq \\ & \leq (\bar{\xi}(\varphi(r) - \bar{r}) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) + \bar{\xi}(\bar{r}) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) = \\ & = (\bar{\xi}(\varphi(r) - \bar{r}) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + (\xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}). \end{aligned}$$

Поскольку для любого $x \in R$ выполнено неравенство $\bar{\xi}(\varphi(x)) \leq \xi(x)$, то

$$\begin{aligned} & (\bar{\xi}(\varphi(r) - \bar{r}) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + (\xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) \leq \\ & \leq (\xi(\varphi^{-1}(\varphi(r) - \bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + (\xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) = \\ & = (\xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot \xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + (\xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot \bar{\xi}(\bar{q}) = \\ & = (\xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot (\xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{q})) = \tilde{\xi}((r, \bar{r})) \cdot \tilde{\xi}((q, \bar{q})). \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено условие V определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12):

$$\tilde{\xi}((r \cdot q, \bar{r} \cdot \bar{q})) \leq \tilde{\xi}((r, \bar{r})) \cdot \tilde{\xi}((q, \bar{q})) \text{ для произвольных } r, q \in R \text{ и } \bar{r}, \bar{q} \in \bar{R}.$$

Мы показали, что функция $\tilde{\xi}((r, \bar{r})) = \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})$ действительно задаёт псевдонорму на кольце $\tilde{R}$.

II. Кольцо (R, ξ) отождествим с совокупностью пар $\{(r, 0) \mid r \in R\}$ с псевдонормой

$\xi((r, 0)) = \xi(r)$. Очевидно, что R является идеалом в $\hat{R}$. Рассмотрим сужение псевдонормы $\tilde{\xi}$ и гомоморфизма $\tilde{\varphi}$ на кольцо R , т.е.

$$\tilde{\xi}((r, 0)) = \xi(r - \varphi^{-1}(0)) + \bar{\xi}(0) = \xi(r - 0) + 0 = \xi(r) \text{ и } \tilde{\varphi}((r, 0)) = \varphi(r).$$

Получили, что $\tilde{\xi}|_R = \xi$ и $\tilde{\varphi}|_R = \varphi$.

III. Покажем, что $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – изометрический гомоморфизм.

III.1. Учитывая, что φ – изоморфизм и $\tilde{\varphi}|_R = \varphi$, получим

$$\begin{aligned} \ker \tilde{\varphi} &= \{\tilde{r} \in \tilde{R} \mid \tilde{\varphi}(\tilde{r}) = 0\} = \{(r, \bar{r}) \in \tilde{R} \mid \tilde{\varphi}((r, \bar{r})) = 0\} = \{(r, \bar{r}) \in \tilde{R} \mid \varphi(r) = 0\} = \\ &= \{(r, \bar{r}) \in \tilde{R} \mid r = 0\} = \{(0, \bar{r}) \mid \bar{r} \in \bar{R}\}. \end{aligned}$$

Значит, ядро гомоморфизма $\ker \tilde{\varphi} = \{(0, \bar{r}) \mid \bar{r} \in \bar{R}\}$.

III.2. Возьмём произвольные $(r, \bar{r}) \in \tilde{R}$ и $(0, \bar{j}) \in \ker \tilde{\varphi}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) &= \tilde{\xi}((r, \bar{r} + \bar{j})) = \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r} + \bar{j})) + \bar{\xi}(\bar{r} + \bar{j}) = \\ &= \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r}) - \varphi^{-1}(\bar{j})) + \bar{\xi}(\bar{r} + \bar{j}) \geq \bar{\xi}(\varphi(r) - \bar{r} - \bar{j}) + \bar{\xi}(\bar{r} + \bar{j}) \geq \bar{\xi}(\varphi(r)).\end{aligned}$$

Таким образом, при фиксированном значении $(r, \bar{r}) \in \tilde{R}$ и произвольном $(0, \bar{j}) \in \ker \tilde{\varphi}$ справедливо неравенство $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}))$. Значит, $\bar{\xi}(\varphi(r))$ – одна из нижних граней множества $\{\tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \tilde{\varphi}\}$. Отсюда вытекает неравенство

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \inf \{ \tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \tilde{\varphi} \}, \quad (2.4)$$

которое выполнено для любого $(r, \bar{r}) \in \tilde{R}$.

III.3. Возьмём произвольный элемент $(r, \bar{r}) \in \tilde{R}$, и пусть $\bar{j}_0 = \varphi(r) - \bar{r} \in \bar{R}$. Тогда

$$\begin{aligned}(r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0) &= (r, \bar{r}) + (0, \varphi(r) - \bar{r}) = (r, \varphi(r)), \text{ и значит} \\ \tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0)) &= \tilde{\xi}((r, \varphi(r))) = \xi(r - \varphi^{-1}(\varphi(r))) + \bar{\xi}(\varphi(r)) = \xi(r - r) + \\ &+ \bar{\xi}(\varphi(r)) = \xi(0) + \bar{\xi}(\varphi(r)) = 0 + \bar{\xi}(\varphi(r)) = \bar{\xi}(\varphi(r)).\end{aligned}$$

Мы получили, что для любого $(r, \bar{r}) \in \tilde{R}$ существует элемент $\bar{j}_0 = (0, \varphi(r) - \bar{r}) \in \ker \tilde{\varphi}$ такой, что $\tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0)) = \bar{\xi}(\varphi(r))$.

Отсюда следует неравенство

$$\inf \{ \tilde{\xi}(\tilde{r} + j) \mid j \in \ker \tilde{\varphi} \} \leq \tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0)) = \bar{\xi}(\varphi(r)). \quad (2.5)$$

Из неравенств (2.4) и (2.5) следует равенство

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) = \inf \{ \tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \tilde{\varphi} \}.$$

Кроме того, из равенства $\tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0)) = \bar{\xi}(\varphi(r))$ следует, что

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) = \min \{ \tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \tilde{\varphi} \} = \min \{ \tilde{\xi}((r, 0) + (0, \bar{i})) \mid (0, \bar{i}) \in \ker \tilde{\varphi} \},$$

где $(0, \bar{i}) = ((0, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \in \ker \tilde{\varphi}$.

Мы показали, что существуют такое псевдонормированное кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ и такой гомоморфизм $\tilde{\varphi}: \tilde{R} \rightarrow \bar{R}$, что:

$$\text{а) } R \text{ является идеалом кольца } \tilde{R}, \text{ причём } \tilde{\xi}|_R = \xi \text{ и } \tilde{\varphi}|_R = \varphi;$$

б) $\bar{\xi}(\varphi(r)) = \min\{\tilde{\xi}((r, 0) + (0, \bar{i})) \mid (0, \bar{i}) \in \ker \tilde{\varphi}\}$ для каждого $r \in R$, т.е. для

любого $r \in R$ существует такой элемент $(0, \bar{a}_r) \in \ker \tilde{\varphi}$, что

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) = \tilde{\xi}((r, 0) + (0, \bar{a}_r)).$$

3 $\Rightarrow$ 1.

Выше было доказано, что существует такое псевдонормированное кольцо $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$,

что:

– R является идеалом в $\tilde{R}$;

– $\tilde{\xi}|_R = \xi$;

– $\bar{\xi}(\varphi(r)) = \min\{\tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \tilde{\varphi}\}$ для любых $r \in R$ и $\bar{r} \in \bar{R}$.

Так как $\tilde{\varphi}((r, \bar{r})) = \varphi(r)$, то $\bar{\xi}(\varphi(r)) = \bar{\xi}(\tilde{\varphi}((r, \bar{r})))$. Следовательно,

$\bar{\xi}(\tilde{\varphi}((r, \bar{r}))) = \min\{\tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \tilde{\varphi}\}$. Так как для любого множества дей-

ствительных чисел S , имеющего наименьший элемент, этот элемент совпадает с $\inf S$,

то

$$\bar{\xi}(\tilde{\varphi}((r, \bar{r}))) = \inf\{\tilde{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \tilde{\varphi}\}.$$

Таким образом, изоморфизм φ продолжается до изометрического гомоморфизма

$\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$, и из определения 2.14 следует, что $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом. $\square$

2.16. Следствие. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ кольцевой изоморфизм. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева и полуизометрическим изоморфизмом справа, то $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом.

2.17. Следствие. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ кольцевой изоморфизм. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом и кольцо (R, ξ) имеет элемент, не являющийся обобщенным делителем нуля, то кольца (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ топологически изоморфны.

2.18. Следствие. Если (R, ξ) – псевдонормированное кольцо с единицей e и $\xi(e) = 1$, то всякий его полуизометрический изоморфизм является изометрическим.

2.19. Следствие. Если (R, ξ) – нормированное кольцо, то всякий его полуизометрический изоморфизм является изометрическим.

2.20. Следствие. Пусть R и $\bar{R}$ – кольца с нулевым умножением, т.е. $a \cdot b = 0$ для всех $a, b \in R$ и $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ для всех $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{R}$. Если ξ и $\bar{\xi}$ – псевдонормы на R и $\bar{R}$, соответственно, и $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм такой, что $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$ для каждого $r \in R$, то изоморфизм φ является полуизометрическим.

Доказательство. Действительно, $\frac{\xi(r \cdot q)}{\xi(q)} = 0 \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(q)$. $\square$

2.21. Следствие. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца и $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм. Если $\tilde{\xi}$ – такая псевдонорма на $\bar{R}$, что $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \tilde{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$ для каждого $r \in R$, то $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \tilde{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом.

Следующая теорема дает еще один аналог второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец.

2.22. Теорема. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\xi(a) \geq \bar{\xi}(\varphi(a))$ и $\xi(a \cdot b) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(b))$ для любых $a, b \in R$;
2. существуют псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$ и гомоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{R} \rightarrow \bar{R}$ такие, что выполнены следующие условия:
 - а) R является идеалом в $\hat{R}$, причём $\hat{\xi}|_R = \xi$ и $\hat{\varphi}|_R = \varphi$;
 - б) $\bar{\xi}(\varphi(r)) = \min \{ \hat{\xi}(r + a) \mid a \in \ker \hat{\varphi} \}$ для каждого $r \in R$, т.е. для любого $r \in R$ существует такой элемент $a_r \in \ker \hat{\varphi}$, что $\bar{\xi}(\varphi(r)) = \hat{\xi}(r + a_r)$;
 - в) аннулятор кольца $\hat{R}$ содержит $\ker \hat{\varphi}$, т.е. $\ker \hat{\varphi} \subseteq \{ a \in \hat{R} \mid a \cdot \hat{R} = \hat{R} \cdot a = 0 \}$. В частности, $(\ker \hat{\varphi})^2 = 0$.

Доказательство.

1 $\Rightarrow$ 2 . Пусть $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ обладает следующими свойствами:

1. φ – изоморфизм;
2. $\bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ для любого $a \in R$;
3. $\xi(a \cdot b) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(b))$ для любых $a, b \in R$.

Докажем, что выполнено утверждение 2.

Пусть $(\bar{R}'', \bar{\xi})$ – кольцо с нулевым умножением, элементы которого принадлежат $\bar{R}$.

Рассмотрим кольцо $\hat{R} = R \oplus \bar{R}' = \{(r, \bar{r}) \mid r \in R, \bar{r} \in \bar{R}'\}$, которое является прямой суммой колец R и $\bar{R}''$. Как и в теореме 2.15, определим на $\hat{R}$ вещественнозначную функцию $\hat{\xi}$,

$$\hat{\xi}((r, \bar{r})) = \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r}),$$

и отображение $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$, действующее по правилу

$$\hat{\varphi}((r, \bar{r})) = \varphi(r).$$

I. Покажем, что $\hat{\xi}$ – псевдонорма на кольце $\hat{R}$.

Проверку выполнения условий I – IV определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) можно провести аналогично теореме 2.15.

Проверим выполнение условия V определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12). Для произвольных $r, q \in R$ и $\bar{r}, \bar{q} \in \bar{R}''$ имеем

$$\hat{\xi}((r, \bar{r}) \cdot (q, \bar{q})) = \hat{\xi}((r \cdot q, \bar{r} \cdot \bar{q})) = \hat{\xi}((r \cdot q, 0)) = \xi(r \cdot q).$$

Так как выполнено неравенство $\xi(a \cdot b) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(b))$ для любых $a, b \in R$, то

$$\xi(r \cdot q) \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(q)) = \bar{\xi}((\varphi(r) - \bar{r}) + \bar{r}) \cdot \bar{\xi}((\varphi(q) - \bar{q}) + \bar{q}).$$

Поскольку для любых $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{R}''$ выполнено неравенство $\bar{\xi}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \leq \bar{\xi}(\bar{y}_1) + \bar{\xi}(\bar{y}_2)$, то

$$\bar{\xi}((\varphi(r) - \bar{r}) + \bar{r}) \cdot \bar{\xi}((\varphi(q) - \bar{q}) + \bar{q}) \leq (\bar{\xi}(\varphi(r) - \bar{r}) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot (\bar{\xi}(\varphi(q) - \bar{q}) + \bar{\xi}(\bar{q})).$$

По условию теоремы $\bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ для любого $a \in R$, следовательно

$$\begin{aligned} & (\bar{\xi}(\varphi(r) - \bar{r}) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot (\bar{\xi}(\varphi(q) - \bar{q}) + \bar{\xi}(\bar{q})) \leq \\ & \leq (\xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})) \cdot (\xi(q - \varphi^{-1}(\bar{q})) + \bar{\xi}(\bar{q})) = \hat{\xi}((r, \bar{r})) \cdot \hat{\xi}((q, \bar{q})). \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено условие V определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12):

$$\hat{\xi}((r \cdot q, \bar{r} \cdot \bar{q})) \leq \hat{\xi}((r, \bar{r})) \cdot \hat{\xi}((q, \bar{q})) \text{ для произвольных } r, q \in R \text{ и } \bar{r}, \bar{q} \in \bar{R}''.$$

Значит, функция $\hat{\xi}((r, \bar{r})) = \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r})) + \bar{\xi}(\bar{r})$ действительно задаёт псевдонорму на кольце $\hat{R}$.

II. Как и при доказательстве импликации $2 \Rightarrow 3$ теоремы 2.15, отождествим кольцо R с совокупностью пар $\{(r, 0) \mid r \in R\}$, которая является идеалом в кольце $\hat{R}$.

Рассмотрим сужение псевдонормы $\hat{\xi}$ и гомоморфизма $\hat{\varphi}$ на кольцо R , т.е.

$$\hat{\xi}((r, 0)) = \xi(r - \varphi^{-1}(0)) + \bar{\xi}(0) = \xi(r - 0) + 0 = \xi(r) \text{ и } \hat{\varphi}((r, 0)) = \varphi(r).$$

Получили, что $\hat{\xi}|_R = \xi$ и $\hat{\varphi}|_R = \varphi$.

III. Покажем, что аннулятор кольца $\hat{R}$ содержит $\ker \hat{\varphi}$.

Так как $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – изоморфизм, то

$$\ker \hat{\varphi} = \{(r, \bar{r}) \in \hat{R} \mid \hat{\varphi}((r, \bar{r})) = 0\} = \{(r, \bar{r}) \in \hat{R} \mid \varphi(r) = 0\} = \{(0, \bar{r}) \in \hat{R} \mid \bar{r} \in \bar{R}'\}.$$

Поскольку $(0, \bar{r}) \cdot (a, \bar{a}) = (0 \cdot a, \bar{r} \cdot \bar{a}) = (0, 0)$ и $(a, \bar{a}) \cdot (0, \bar{r}) = (a \cdot 0, \bar{a} \cdot \bar{r}) = (0, 0)$ для любых $(0, \bar{r}) \in \ker \hat{\varphi}$ и $(a, \bar{a}) \in \hat{R}$, то $\ker \hat{\varphi} \subset \text{ann } \hat{R}$.

IV. Покажем, что $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – изометрический гомоморфизм.

Проведём доказательство аналогично теореме 2.15. Возьмём произвольные $(r, \bar{r}) \in \hat{R}$ и

$(0, \bar{j}) \in \ker \hat{\varphi}$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) &= \hat{\xi}((r, \bar{r} + \bar{j})) = \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r} + \bar{j})) + \bar{\xi}(\bar{r} + \bar{j}) = \\ &= \xi(r - \varphi^{-1}(\bar{r}) - \varphi^{-1}(\bar{j})) + \bar{\xi}(\bar{r} + \bar{j}) \geq \bar{\xi}(\varphi(r) - \bar{r} - \bar{j}) + \bar{\xi}(\bar{r} + \bar{j}) \geq \bar{\xi}(\varphi(r)). \end{aligned}$$

Таким образом, при фиксированном значении $(r, \bar{r}) \in \hat{R}$ и произвольном $(0, \bar{j}) \in \ker \hat{\varphi}$

справедливо неравенство $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}))$. Значит, $\bar{\xi}(\varphi(r))$ – одна из нижних

граней множества $\{\hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \hat{\varphi}\}$. Отсюда вытекает неравенство

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \inf \{\hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \hat{\varphi}\}, \quad (2.6)$$

которое выполнено для любого $(r, \bar{r}) \in \hat{R}$.

Возьмём произвольный элемент $(r, \bar{r}) \in \hat{R}$, и пусть $\bar{j}_0 = \varphi(r) - \bar{r} \in \bar{R}$. Тогда

$$(r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0) = (r, \bar{r}) + (0, \varphi(r) - \bar{r}) = (r, \varphi(r)), \text{ и значит}$$

$$\begin{aligned} \hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0)) &= \hat{\xi}((r, \varphi(r))) = \xi(r - \varphi^{-1}(\varphi(r))) + \bar{\xi}(\varphi(r)) = \xi(r - r) + \\ &+ \bar{\xi}(\varphi(r)) = \xi(0) + \bar{\xi}(\varphi(r)) = 0 + \bar{\xi}(\varphi(r)) = \bar{\xi}(\varphi(r)). \end{aligned}$$

Мы получили, что для любого $(r, \bar{r}) \in \hat{R}$ существует элемент $\bar{j}_0 = (0, \varphi(r) - \bar{r}) \in \ker \hat{\varphi}$ такой, что $\hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0)) = \bar{\xi}(\varphi(r))$.

Отсюда следует неравенство

$$\inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + j) \mid j \in \ker \hat{\varphi} \} \leq \hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0)) = \bar{\xi}(\varphi(r)). \quad (2.7)$$

Из неравенств (2.6) и (2.7) следует равенство

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) = \inf \{ \hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \hat{\varphi} \}.$$

Кроме того, из равенства $\hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j}_0)) = \bar{\xi}(\varphi(r))$ следует, что

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(\varphi(r)) &= \min \{ \hat{\xi}((r, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \mid (0, \bar{j}) \in \ker \hat{\varphi} \} = \\ &= \min \{ \hat{\xi}((r, 0) + (0, \bar{i})) \mid (0, \bar{i}) \in \ker \hat{\varphi} \}, \text{ где } (0, \bar{i}) = ((0, \bar{r}) + (0, \bar{j})) \in \ker \hat{\varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом, существуют псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$ и гомоморфизм

$\hat{\varphi}: \hat{R} \rightarrow \bar{R}$ такие, что:

а) R является идеалом кольца $\hat{R}$, причём $\hat{\xi}|_R = \xi$ и $\hat{\varphi}|_R = \varphi$;

б) $\bar{\xi}(\varphi(r)) = \min \{ \hat{\xi}((r, 0) + (0, \bar{i})) \mid (0, \bar{i}) \in \ker \hat{\varphi} \}$ для каждого $r \in R$, т.е. для любого $r \in R$ существует такой элемент $(0, \bar{a}_r) \in \ker \hat{\varphi}$, что

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) = \hat{\xi}((r, 0) + (0, \bar{a}_r));$$

в) Аннулятор кольца $\hat{R}$ содержит $\ker \hat{\varphi}$.

2 $\Rightarrow$ 1.

Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм и существуют такое псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$ и такой гомоморфизм

$\hat{\varphi}: \hat{R} \rightarrow \bar{R}$, что выполнены следующие условия:

а) R является идеалом кольца $\hat{R}$, причём $\hat{\xi}|_R = \xi$ и $\hat{\varphi}|_R = \varphi$;

б) $\bar{\xi}(\varphi(r)) = \min\{\hat{\xi}(r+a) \mid a \in \ker \hat{\varphi}\}$ для каждого $r \in R$;

с) Аннулятор кольца $\hat{R}$ содержит $\ker \hat{\varphi}$.

Тогда по теореме 2.15 выполнено неравенство $\xi(a) \geq \bar{\xi}(\varphi(a))$ для любого $a \in R$.

Покажем, что выполняется также и неравенство

$$\xi(a \cdot b) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(b))$$

для любых $a, b \in R$. По условию теоремы

$$\bar{\xi}(\varphi(a)) = \min\{\hat{\xi}(a+i) \mid i \in \ker \hat{\varphi}\} = \hat{\xi}(a+i_a),$$

$$\bar{\xi}(\varphi(b)) = \min\{\hat{\xi}(b+j) \mid j \in \ker \hat{\varphi}\} = \hat{\xi}(b+j_b),$$

где i_a, j_b – некоторые элементы из $\ker \hat{\varphi}$. Значит,

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(b)) &= \hat{\xi}(a+i_a) \cdot \hat{\xi}(b+j_b) \geq \\ &\geq \hat{\xi}((a+i_a) \cdot (b+j_b)) = \hat{\xi}(a \cdot b + a \cdot j_b + i_a \cdot b + i_a \cdot j_b). \end{aligned}$$

Поскольку $i_a, j_b \in \ker \hat{\varphi} \subset \text{ann } \hat{R}$, то $a \cdot j_b = i_a \cdot b = i_a \cdot j_b = 0$. Следовательно,

$$\bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(b)) \geq \hat{\xi}(a \cdot b + a \cdot j_b + i_a \cdot b + i_a \cdot j_b) = \hat{\xi}(a \cdot b)$$

для любых $a, b \in R$.

Таким образом,

$$\xi(a) \geq \bar{\xi}(\varphi(a)) \text{ и } \xi(a \cdot b) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(b))$$

для любых $a, b \in R$. $\square$

2.23. Замечание. Из построения колец $\tilde{R}$ и $\hat{R}$ в теоремах 2.15 и 2.22, соответственно, видно, что если кольцо R является ассоциативным (коммутативным), то и кольца $\tilde{R}$ и $\hat{R}$ будут таковыми. Следовательно, теоремы 2.15 и 2.22 верны и в классе всех ассоциативных (коммутативных) псевдонормированных колец.

2.4. Сужение изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на достижимое подкольцо

Ранее было показано, что для изучения аналогов второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец на подкольцо приходится накладывать дополнительные

условия. В предыдущих параграфах были изучены случаи, когда подкольцо является односторонним или двусторонним идеалом. В настоящем параграфе рассмотрим случай, когда подкольцо является достижимым подкольцом.

Следующее предложение играет важную роль в доказательстве основной теоремы настоящего параграфа (теоремы 2.25).

2.24. Предложение. Пусть:

- $(\hat{R}, \hat{\xi})$ – псевдонормированное кольцо;
- R – идеал в $\hat{R}$,
- $\hat{I}$ – замкнутый идеал в $(\hat{R}, \hat{\xi})$ и $I = \hat{I} \cap R$;
- $\tilde{I} = [I]_{(\hat{R}, \hat{\xi})}$ и $\tilde{R} = R + \tilde{I}$;
- $\bar{\varepsilon} : R/I \rightarrow (R + \hat{I})/I$ – естественное вложение;
- $\hat{\omega} : \hat{R} \rightarrow \hat{R}/I$ и $\tilde{\omega} : \hat{R}/I \rightarrow \hat{R}/\tilde{I}$ – канонические гомоморфизмы.

Тогда $\tilde{\omega}|_{R/I} : (\bar{R}, \bar{\xi}) = (R, \hat{\xi}|_R)/I \rightarrow (\tilde{R}, \hat{\xi}|_{\tilde{R}})/\tilde{I} = (\bar{\tilde{R}}, \bar{\xi})$ является изометрическим изоморфизмом.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 R & \subseteq & \tilde{R} = R + \tilde{I} & \subseteq & \hat{R} \\
 \hat{\omega}|_R \downarrow & & \hat{\omega}|_{\tilde{R}} \downarrow & & \hat{\omega} \downarrow \\
 R/I & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & \tilde{R}/I & \subseteq & \hat{R}/I \\
 \parallel & & \tilde{\omega}|_{\tilde{R}/I} \downarrow & & \tilde{\omega} \downarrow \\
 R/I & \xrightarrow{\tilde{\omega}|_{R/I}} & \tilde{R}/\tilde{I} & \subseteq & \hat{R}/\tilde{I}
 \end{array}$$

Так как $I \subseteq \tilde{I}$, то $\inf \{ \hat{\xi}(r+i) \mid i \in I \} \geq \inf \{ \hat{\xi}(r+i) \mid i \in \tilde{I} \}$ для любого $r \in R$, и, значит,

$$\bar{\xi}(\bar{r}) \geq \bar{\xi}(\tilde{\omega}(\bar{r})) \text{ для любого } \bar{r} \in \bar{R}.$$

Проверим обратное неравенство.

Пусть $\bar{r}$ – произвольный элемент из $\bar{R} = R/I$ и $\varepsilon > 0$. Если $r \in R$ – такой элемент, что $\bar{r} = r + I$, то существует такой элемент $\tilde{i}_0 \in \tilde{I}$, что $\bar{\xi}(\tilde{\omega}(\bar{r})) + \frac{\varepsilon}{2} > \hat{\xi}(r + \tilde{i}_0)$.

Так как $\tilde{i}_0 \in \tilde{I} = [I]_{(\hat{R}, \hat{\xi})}$, то существует такой элемент $i_0 \in I$, что $\hat{\xi}(i_0 - \tilde{i}_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(\bar{r}) &= \inf \left\{ \hat{\xi}(r+i) \mid i \in I \right\} \leq \hat{\xi}(r+i_0) = \hat{\xi}(r+\tilde{i}_0 - \tilde{i}_0 + i_0) \leq \\ &\leq \hat{\xi}(r+\tilde{i}_0) + \hat{\xi}(i_0 - \tilde{i}_0) < \bar{\xi}(\tilde{\omega}(\bar{r})) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \bar{\xi}(\tilde{\omega}(\bar{r})) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\bar{\xi}(\bar{r}) \leq \bar{\xi}(\tilde{\omega}(\bar{r})), \text{ и, значит, } \bar{\xi}(\bar{r}) = \bar{\xi}(\tilde{\omega}(\bar{r})). \quad \square$$

Следующая теорема показывает, что дополнительное условие для подкольца быть достижимым подкольцом также приводит нас к аналогу второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец.

2.25. Теорема. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ кольцевой изоморфизм. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. существуют псевдонормированное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$ и гомоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{R} \rightarrow \bar{R}$ такие, что:
 - а) R является достижимым подкольцом степени не больше чем n кольца $\hat{R}$,
 $\hat{\xi}|_R = \xi$ и $\hat{\varphi}|_R = \varphi$;
 - б) гомоморфизм $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является изометрическим гомоморфизмом псевдонормированных колец;
2. изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является суперпозицией n полуизометрических изоморфизмов, т.е. существуют такие псевдонормированные кольца

$$(R, \xi) = (R_0, \xi_0), (R_1, \xi_1), (R_2, \xi_2), \dots, (R_n, \xi_n) = (\bar{R}, \bar{\xi})$$

и такие полуизометрические изоморфизмы $\varphi_i: (R_i, \xi_i) \rightarrow (R_{i+1}, \xi_{i+1})$ для

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \text{ что } \varphi = \varphi_{n-1} \circ \varphi_{n-2} \circ \dots \circ \varphi_0.$$

Доказательство.

1 $\Rightarrow$ 2.

Пусть $R = \hat{R}_0 \triangleleft \hat{R}_1 \triangleleft \hat{R}_2 \triangleleft \dots \triangleleft \hat{R}_n = \hat{R}$ – такая цепочка подколец, что $\hat{R}_i$ является идеалом в $\hat{R}_{i+1}$ для $i = 0, 1, \dots, n-1$, и изоморфизм $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ может быть продолжен до изометрического гомоморфизма $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$.

Если $\hat{I} = \ker \hat{\varphi}$ и $\tilde{\omega} : \hat{R}_n \rightarrow \hat{R}_n / \hat{I}$ – канонический гомоморфизм (т.е. $\tilde{\omega}(r) = r + \hat{I}$), то существует такой изометрический изоморфизм $\eta : (\hat{R}_n, \hat{\xi}_n) / \hat{I} \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$, что $\hat{\varphi} = \eta \circ \tilde{\omega}$.

Рассмотрим следующую диаграмму (входящие в диаграмму отображения определяются ниже).

$$\begin{array}{ccccccc}
 R = \hat{R}_0 & \triangleleft & \dots & \triangleleft & \hat{R}_k & \triangleleft & \hat{R}_{k+1} = \hat{R}_{k+1} = \hat{R} \\
 \parallel & & & & \omega|_{\hat{R}_k} \downarrow & & \omega \downarrow \\
 R & \xrightarrow{\varphi_0} & \dots & \xrightarrow{\varphi_{k-1}} & \hat{R}_k / I & \triangleleft & \hat{R}_{k+1} / I \quad \downarrow \tilde{\omega} \\
 \varphi \downarrow & & & & \varphi_k \downarrow & & \tilde{\omega} \downarrow \\
 \bar{R} & = & & & \hat{R}_{k+1} / \hat{I} = \hat{R}_{k+1} / \hat{I} = \hat{R}_{k+1} / \hat{I} & \xrightarrow{\eta} & \bar{R}
 \end{array}$$

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по числу n .

Если $n = 1$, то (R, ξ) является достижимым подкольцом степени 1 (т.е. является идеалом) псевдонормированного кольца $(\hat{R}, \hat{\xi})$, и изоморфизм φ продолжается до изометрического гомоморфизма $\hat{\varphi} : (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$. Следовательно, $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом.

Допустим, что теорема верна для $n = k$, и пусть $n = k + 1$.

Так как $\hat{R}_k$ и $\hat{I}$ являются идеалами в $\hat{R}_{k+1}$, то $I = \hat{R}_k \cap \hat{I}$ также будет идеалом в $\hat{R}_{k+1}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $I = \hat{R}_k \cap \hat{I}$ является замкнутым идеалом в $(\hat{R}_{k+1}, \hat{\xi})$.

Если $\omega : \hat{R}_{k+1} \rightarrow \hat{R}_{k+1} / I$ – канонический гомоморфизм, то

$\omega|_{\hat{R}_k} : (\hat{R}_k, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k}) \rightarrow (\hat{R}_k, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k}) / I$ является изометрическим гомоморфизмом. Так как

$$\hat{R}_0 \cap \ker \omega|_{\hat{R}_k} = \hat{R}_0 \cap I = \hat{R}_0 \cap \hat{I} = \hat{R}_0 \cap \ker \hat{\varphi} = \ker \varphi = \{0\}$$

и

$$\hat{R}_k = \hat{R}_k \cap \hat{R} = \hat{R}_k \cap (R + \hat{I}) = R + (\hat{R}_k \cap \hat{I}) = R + I,$$

то $\omega|_{\hat{R}_0} : \hat{R}_0 \rightarrow \hat{R}_k / I$ является изоморфизмом, и, по допущению, $\omega|_{\hat{R}_0}$ является суперпозицией k полуизометрических изоморфизмов, т.е. существуют такие псевдонормированные кольца

$$(R, \xi) = (R_0, \xi_0), (R_1, \xi_1), \dots, (R_k, \xi_k) = \left(\hat{R}_k, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k} \right) / I$$

и такие полуизометрические изоморфизмы $\varphi_i : (R_i, \xi_i) \rightarrow (R_{i+1}, \xi_{i+1})$ для $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, что $\omega|_{\hat{R}_0} = \varphi_{k-1} \circ \varphi_{k-2} \circ \dots \circ \varphi_0$.

Так как $I = \hat{I} \cap R_k = (\ker \hat{\varphi}) \cap R_k = \ker(\hat{\varphi}|_{R_k})$ и $\bar{R} = \varphi(R) = \hat{\varphi}(R)$, то

$\hat{R}_k + \hat{I} = \hat{R}_0 + \hat{I} = \hat{R}_{k+1}$, и, значит, $\varphi_k = \hat{\omega}|_{\hat{R}_k / I} : \hat{R}_k / I \rightarrow \hat{R}_{k+1} / \hat{I}$ является изоморфизмом.

Поскольку $\hat{R}_k / I$ является идеалом в $\hat{R}_{k+1} / I$, то $\varphi_k : \left(\hat{R}_k, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k} \right) / I \rightarrow \left(\hat{R}_{k+1}, \hat{\xi} \right) / \hat{I}$

является полуизометрическим изоморфизмом, и, значит, $\eta \circ \varphi_k : \left(\hat{R}_k, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k} \right) / I \rightarrow (\bar{R}_{k+1}, \bar{\xi})$

будет полуизометрическим изоморфизмом, причем

$$(\eta \circ \varphi_k) \circ \varphi_{k-1} \circ \varphi_{k-2} \circ \dots \circ \varphi_0 = \eta \circ \varphi_k \circ \omega|_{\hat{R}_0} = \eta \circ \tilde{\omega}|_{\hat{R}_0} = \hat{\varphi}|_{\hat{R}_0} = \varphi,$$

т.е. в случае, когда I является замкнутым идеалом в $(\hat{R}_{k+1}, \hat{\xi})$, изоморфизм φ является суперпозицией $k+1$ полуизометрических изоморфизмов.

Рассмотрим теперь случай, когда $I = \hat{R}_k \cap \hat{I}$ не является замкнутым идеалом в $(\hat{R}_{k+1}, \hat{\xi})$. Обозначим через $\tilde{I}$ замыкание I в $(\hat{R}_{k+1}, \hat{\xi})$ и рассмотрим диаграмму, полученную дополнением к диаграмме, указанной выше в этой теореме, еще одной строки (определение неизвестных до сих пор колец и отображений см. ниже).

$$\begin{array}{ccccccc}
 R = \hat{R}_0 & \triangleleft & \dots & \triangleleft & \hat{R}_k & \triangleleft & \hat{R}_{k+1} = \hat{R}_{k+1} = \hat{R} \\
 \parallel & & & & \omega|_{\hat{R}_k} \downarrow & & \omega \downarrow \\
 R & \xrightarrow{\varphi_0} & \dots & \xrightarrow{\varphi_{k-1}} & \hat{R}_k / I & \triangleleft & \hat{R}_{k+1} / I \\
 & & & & \bar{\eta} \downarrow & & \omega' \downarrow \\
 \varphi \downarrow & & & & (\hat{R}_k + \tilde{I}) / \tilde{I} & \triangleleft & \hat{R}_{k+1} / \tilde{I} \quad \downarrow \bar{\omega} \quad \downarrow \hat{\varphi} \\
 & & & & \varphi'_k \downarrow & & \bar{\omega} \downarrow \\
 \bar{R} & = & & & \hat{R}_{k+1} / \hat{I} & = & \hat{R}_{k+1} / \hat{I} = \hat{R}_{k+1} / \hat{I} \xrightarrow{\eta} \bar{R}
 \end{array}$$

Так как $\hat{R}_k$ является идеалом в $\hat{R}_{k+1}$, то $I = \hat{R}_k \cap \hat{I}$ будет идеалом в $\hat{R}$, и, значит, $\tilde{I}$ будет замкнутым идеалом в $(\hat{R}, \hat{\xi}) = (\hat{R}_{k+1}, \hat{\xi})$. Тогда $(\hat{R}_{k+1}, \hat{\xi}) / \tilde{I}$ и $(\hat{R}_k + \tilde{I}, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k + \tilde{I}}) / \tilde{I}$ – псевдонормированные кольца. Если $\omega: \hat{R} \rightarrow \hat{R} / I$, $\omega': \hat{R} / I \rightarrow \hat{R} / \tilde{I}$ и $\bar{\omega}: \hat{R} / \tilde{I} \rightarrow \hat{R} / \hat{I}$ – канонические гомоморфизмы, то $\tilde{\omega} = \bar{\omega} \circ \omega' \circ \omega$. Так как $(\hat{R}_k + \tilde{I}) / \tilde{I}$ является идеалом в $\hat{R}_{k+1} / \tilde{I}$, то

$$\varphi_k'' = \bar{\omega}|_{(\hat{R}_k + \tilde{I}) / \tilde{I}} : (\hat{R}_k + \tilde{I}, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k + \tilde{I}}) / \tilde{I} \rightarrow (\hat{R}_{k+1}, \hat{\xi}) / \hat{I}$$

является полуизометрическим изоморфизмом.

Согласно предложению 2.24 отображение

$\bar{\eta} = \omega'|_{(\hat{R}_k / I)} : (\hat{R}_k, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k}) / I \rightarrow (\hat{R}_k + \tilde{I}, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k + \tilde{I}}) / \tilde{I}$ является изометрическим изоморфизмом, и, значит, $\bar{\eta} \circ \omega|_{\hat{R}_k} : (\hat{R}_k, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k}) \rightarrow (\hat{R}_k + \tilde{I}, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k + \tilde{I}}) / \tilde{I}$ является изометрическим гомоморфизмом.

Согласно индуктивному допущению существуют такие псевдонормированные кольца

$$(R, \xi) = (R_0, \xi_0), (R_1, \xi_1), \dots, (R_k, \xi_k) = (\hat{R}_k, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k}) / I$$

и такие полуизометрические изоморфизмы $\varphi_i : (R_i, \xi_i) \rightarrow (R_{i+1}, \xi_{i+1})$ для

$i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, что $\bar{\eta} \circ \omega|_{\hat{R}_0} = \varphi_{k-1} \circ \varphi_{k-2} \circ \dots \circ \varphi_0$.

Так как η , $\bar{\eta}$ – изометрические изоморфизмы, а φ_k'' – полуизометрический изоморфизм, то

$$\varphi_k' = \eta \circ \varphi_k \circ \bar{\eta} : (\hat{R}_k, \hat{\xi}|_{\hat{R}_k}) / I \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$$

является полуизометрическим изоморфизмом, причем

$$\begin{aligned} \varphi = \hat{\varphi}|_R &= \eta \circ \tilde{\omega}|_R = \eta \circ \bar{\omega} \circ \omega' \circ \omega|_R = \eta \circ \varphi_k' \circ \bar{\eta} \circ \omega|_R = \varphi_k' \circ \bar{\eta} \circ \omega|_R = \\ &= \varphi_k' \circ \varphi_{k-1} \circ \varphi_{k-2} \circ \dots \circ \varphi_0, \end{aligned}$$

т.е. изоморфизм φ является суперпозицией $k+1$ полуизометрических изоморфизмов и для случая незамкнутого идеала I .

Таким образом, мы доказали импликацию $1 \Rightarrow 2$ для любого натурального числа n .

$2 \Rightarrow 1$.

Пусть существуют такие псевдонормированные кольца

$(R, \xi) = (R_0, \xi_0), (R_1, \xi_1), (R_2, \xi_2), \dots, (R_n, \xi_n) = (\bar{R}, \bar{\xi})$ и такие полуизометрические изоморфизмы $\varphi_i : (R_i, \xi_i) \rightarrow (R_{i+1}, \xi_{i+1})$ для $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, что φ является суперпозицией этих изоморфизмов, т.е. $\varphi = \varphi_{n-1} \circ \varphi_{n-2} \circ \dots \circ \varphi_0$.

Для любых $0 \leq i \leq j \leq n$ рассмотрим изоморфизм $f_{i,j} = \varphi_{j-1} \circ \dots \circ \varphi_i : R_i \rightarrow R_j$ для $i < j$ и $f_{i,i} : R_i \rightarrow R_i$ – тождественное отображение.

Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

Этап I. Построение кольца $\hat{R}$ и проверка некоторых его алгебраических свойств.

Определим на множестве $\hat{R} = \{(r_0, r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in R_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ операции сложения и умножения следующим образом:

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) + (b_0, b_1, \dots, b_n) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

и

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \cdot (b_0, b_1, \dots, b_n) = (r_0, r_1, \dots, r_n),$$

где

$$r_i = a_i \cdot b_i, \quad i \in \{0, n\}$$

и

$$r_i = a_i \cdot b_i + (f_{0,i}(a_0) - a_i) \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1}) + \varphi_i^{-1}(a_{i+1}) \cdot (f_{0,i}(b_0) - b_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Используя то, что отображения $\varphi_i : R_i \rightarrow R_{i+1}$ и $f_{0,i} : R_0 \rightarrow R_i$ являются изоморфизмами, легко проверяется, что:

I.1. $\hat{R}$ относительно этих операций является, вообще говоря, не ассоциативным кольцом (даже если исходные кольца были ассоциативными).

I.2. Для любого $0 \leq k < n$ множество $\hat{R}_k = \{(r_0, \dots, r_n) \in \hat{R} \mid r_i = 0 \text{ при } i > k\}$ является идеалом в кольце $\hat{R}_{k+1} = \{(r_0, \dots, r_n) \in \hat{R} \mid r_i = 0 \text{ при } i > k+1\}$.

I.3. $\hat{R}_0 = \{(r_0, \dots, r_n) \in \hat{R} \mid r_i = 0 \text{ при } i \geq 1\}$ является достижимым подкольцом степени не больше чем n кольца $\hat{R}_n = \hat{R}$.

I.4. Отображение $\psi : \hat{R}_0 \rightarrow R_0 = R$, переводящее элемент $(a, 0, \dots, 0) \in \hat{R}_0$ в элемент $a \in R_0$, является изоморфным.

I.5. Из определения операций сложения и умножения в кольце $\hat{R}$ легко следует, что $\hat{I} = \{(0, r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in R_i, i = 1, \dots, n\}$ является идеалом в кольце $\hat{R}$, причем $\hat{R}_0 \cap \hat{I} = \{0\}$ и $\hat{R}_0 + \hat{I} = \hat{R}$.

I.6. Если $\hat{\varphi}: \hat{R} \rightarrow \bar{R}$ такое отображение, что $\hat{\varphi}(r_0, r_1, \dots, r_n) = \varphi(r_0)$ для любого $(r_0, r_1, \dots, r_n) \in \hat{R}$, то легко заметить, что $\hat{\varphi}: \hat{R} \rightarrow \bar{R}$ является кольцевым гомоморфизмом, причем $\ker \hat{\varphi} = \hat{I}$ и $\hat{\varphi}|_{\hat{R}_0} = \varphi$.

Отождествляя элементы вида $(a, 0, \dots, 0) \in \hat{R}_0$ с элементами $a \in R_0$, мы отождествим кольцо R_0 с кольцом $\hat{R}_0$, поэтому мы можем считать, что $R = R_0$ является достижимым подкольцом ступени не больше чем n кольца $\hat{R}_n = \hat{R}$.

Этап II. Задание псевдонормы $\hat{\xi}$ в кольце $\hat{R}$ и проверка некоторых свойств псевдонормированного кольца $(\hat{R}, \hat{\xi})$.

Для каждого $(r_0, r_1, \dots, r_n) \in \hat{R}$ положим

$$\hat{\xi}((r_0, r_1, \dots, r_n)) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(r_i - \varphi_i^{-1}(r_{i+1})) + \xi_n(r_n).$$

II.1. Проверим, что $\hat{\xi}$ является псевдонормой в кольце $\hat{R}$.

Из определения $\hat{\xi}$ легко следует, что $\hat{\xi}((-r_0, -r_1, \dots, -r_n)) = \hat{\xi}((r_0, r_1, \dots, r_n)) \geq 0$, т.е. выполнены условия I и III определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12).

Так как $(0, 0, \dots, 0)$ является нулем в кольце $\hat{R}$, то из определения $\hat{\xi}$ легко следует, что $\hat{\xi}((r_0, r_1, \dots, r_n)) = 0$ тогда и только тогда, когда $(r_0, r_1, \dots, r_n) = (0, 0, \dots, 0)$, т.е. условие II определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) также выполнено.

Пусть $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \hat{R}$ и $b = (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \hat{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(a+b) &= \hat{\xi}((a_0, a_1, \dots, a_n) + (b_0, b_1, \dots, b_n)) = \hat{\xi}((a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(a_i + b_i - \varphi_i^{-1}(a_{i+1} + b_{i+1})) + \xi_n(a_n + b_n) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_i(a_i - \varphi_i^{-1}(a_{i+1})) + \xi_i(b_i - \varphi_i^{-1}(b_{i+1}))) + \xi_n(a_n) + \xi_n(b_n) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(a_i - \varphi_i^{-1}(a_{i+1})) + \xi_n(a_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(b_i - \varphi_i^{-1}(b_{i+1})) + \xi_n(b_n) = \hat{\xi}(a) + \hat{\xi}(b). \end{aligned}$$

Значит, условие IV определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) выполнено.

Если

$$r = (r_0, r_1, \dots, r_n) = a \cdot b = (a_0, a_1, \dots, a_n) \cdot (b_0, b_1, \dots, b_n),$$

то

$$r_i = a_i \cdot b_i \text{ для } i \in \{0, n\}$$

и

$$r_i = a_i \cdot b_i + (f_{0,i}(a_0) - a_i) \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1}) + \varphi_i^{-1}(a_{i+1}) \cdot (f_{0,i}(b_0) - b_i) \text{ для } 0 < i < n.$$

Пусть $h_i = a_i - \varphi_i^{-1}(a_{i+1})$ и $h'_i = b_i - \varphi_i^{-1}(b_{i+1})$ для $0 < i < n$; $h_n = a_n$ и $h'_n = b_n$.

Учитывая определения отображений $f_{i,j}$, индукцией по числу $j - i$ легко доказыва-
ется, что

$$\begin{aligned} f_{i,j}(a_i) - a_j &= f_{i,j}(a_i) - \varphi_{j-1}(\varphi_{j-1}^{-1}(a_j)) = f_{i,j}(a_i) - f_{i,j}(\varphi_i^{-1}(a_{i+1})) + f_{i,j}(\varphi_i^{-1}(a_{i+1})) - \\ &- f_{j-1,j}(\varphi_{j-1}^{-1}(a_j)) = f_{i,j}(a_i - \varphi_i^{-1}(a_{i+1})) + f_{i,j}(\varphi_i^{-1}(a_{i+1})) - f_{j-1,j}(\varphi_{j-1}^{-1}(a_j)) = \\ &= f_{i,j}(h_i) + f_{i+1,j}(a_{i+1}) - f_{j-1,j}(\varphi_{j-1}^{-1}(a_j)) = f_{i,j}(h_i) + f_{i+1,j}(h_{i+1}) + \dots + f_{j-1,j}(h_{j-1}) \end{aligned}$$

для любых $0 \leq i < j \leq n$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(a \cdot b) &= \hat{\xi}((r_0, r_1, \dots, r_n)) = \xi_n(r_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(r_i - \varphi_i^{-1}(r_{i+1})) = \xi_n(a_n \cdot b_n) + \\ &+ \xi_0(a_0 \cdot b_0 - \varphi_0^{-1}(a_1 \cdot b_1 + (\varphi_0(a_0) - a_1) \cdot \varphi_1^{-1}(b_2) + \varphi_1^{-1}(a_2) \cdot (\varphi_0(b_0) - b_1))) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i(a_i \cdot b_i + (f_{0,i}(a_0) - a_i) \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1}) + \varphi_i^{-1}(a_{i+1}) \cdot (f_{0,i}(b_0) - b_i) - \\ &- \varphi_i^{-1}(a_{i+1} \cdot b_{i+1} + (f_{0,i+1}(a_0) - a_{i+1}) \cdot \varphi_{i+1}^{-1}(b_{i+2}) + \varphi_{i+1}^{-1}(a_{i+2}) \cdot (f_{0,i+1}(b_0) - b_{i+1}))) + \\ &+ \xi_{n-1}(a_{n-1} \cdot b_{n-1} + (f_{0,n-1}(a_0) - a_{n-1}) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(b_n) + \varphi_{n-1}^{-1}(a_n) \cdot (f_{0,n-1}(b_0) - b_{n-1}) - \varphi_{n-1}^{-1}(a_n \cdot b_n)) = \\ &= \xi_n(a_n \cdot b_n) + \xi_0(a_0 \cdot b_0 - \varphi_0^{-1}(a_1) \cdot \varphi_0^{-1}(b_1) - (a_0 - \varphi_0^{-1}(a_1)) \cdot \varphi_0^{-1}(\varphi_1^{-1}(b_2)) - \\ &- \varphi_0^{-1}(\varphi_1^{-1}(a_2)) \cdot (b_0 - \varphi_0^{-1}(b_1))) + \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i(a_i \cdot b_i + (f_{0,i}(a_0) - a_i) \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1}) + \\ &+ \varphi_i^{-1}(a_{i+1}) \cdot (f_{0,i}(b_0) - b_i) - \varphi_i^{-1}(a_{i+1}) \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1}) - \\ &- \varphi_i^{-1}(f_{0,i+1}(a_0) - a_{i+1}) \cdot \varphi_i^{-1}(\varphi_{i+1}^{-1}(b_{i+2})) - \varphi_i^{-1}(\varphi_{i+1}^{-1}(a_{i+2})) \cdot \varphi_i^{-1}(f_{0,i+1}(b_0) - b_{i+1})) + \\ &+ \xi_{n-1}(a_{n-1} \cdot b_{n-1} + (f_{0,n-1}(a_0) - a_{n-1}) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(b_n) + \varphi_{n-1}^{-1}(a_n) \cdot (f_{0,n-1}(b_0) - b_{n-1}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi_{n-1}^{-1}(a_n) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(b_n) = \xi_n(a_n \cdot b_n) + \xi_0(a_0 \cdot b_0 - (a_0 - h_0) \cdot (b_0 - h'_0) - \\
& \quad - h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(b_1 - h'_1) - \varphi_0^{-1}(a_1 - h_1) \cdot h_0) + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i \left(a_i \cdot b_i + \left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h_k) \right) \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1}) + \varphi_i^{-1}(a_{i+1}) \cdot \left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h'_k) \right) - \right. \\
& \quad \left. - \varphi_i^{-1}(a_{i+1}) \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1}) - \varphi_i^{-1} \left(\left(\sum_{k=0}^i f_{k,i+1}(h_k) \right) \cdot \varphi_{i+1}^{-1}(b_{i+2}) + \varphi_{i+1}^{-1}(a_{i+2}) \cdot \left(\sum_{k=0}^i f_{k,i+1}(h'_k) \right) \right) \right) + \\
& \quad + \xi_{n-1} \left(a_{n-1} \cdot b_{n-1} + \left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h_k) \right) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(b_n) + \varphi_{n-1}^{-1}(a_n) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h'_k) \right) - \right. \\
& \quad \left. - \varphi_{n-1}^{-1}(a_n) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(b_n) \right) = \xi_n(a_n \cdot b_n) + \xi_0(a_0 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_0 + h_0 \cdot b_0 + a_0 \cdot h'_0 - h_0 \cdot h'_0 - \\
& \quad - h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(b_1) + h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(h'_1) - \varphi_0^{-1}(a_1) \cdot h'_0 + \varphi_0^{-1}(h_1) \cdot h_0) + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i \left(a_i \cdot b_i + \left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h_k) \right) \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1} - \varphi_{i+1}^{-1}(b_{i+2})) + \right. \\
& \quad \left. + \varphi_i^{-1}(a_{i+1} - \varphi_{i+1}^{-1}(a_{i+2})) \cdot \left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h'_k) \right) - \right. \\
& \quad \left. - (a_i - h_i) \cdot (b_i - h'_i) - h_i \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1} - h'_{i+1}) - \varphi_i^{-1}(a_{i+1} - h_{i+1}) \cdot h_i \right) + \\
& \quad + \xi_{n-1} \left(a_{n-1} \cdot b_{n-1} + \left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h_k) \right) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(b_n) + \varphi_{n-1}^{-1}(a_n) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h'_k) \right) - \right. \\
& \quad \left. - (a_{n-1} - h_{n-1}) \cdot (b_{n-1} - h'_{n-1}) \right) = \xi_n(a_n \cdot b_n) + \xi_0(h_0 \cdot (b_0 - \varphi_0^{-1}(b_1)) + (a_0 - \varphi_0^{-1}(a_1)) \cdot h'_0 - \\
& \quad - h_0 \cdot h'_0 + h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(h'_1) + \varphi_0^{-1}(h_1) \cdot h_0) + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i \left(a_i \cdot b_i + \left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h_k) \right) \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1}) + \varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot \left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h'_k) \right) - a_i \cdot b_i + h_i \cdot b_i + \right. \\
& \quad \left. + a_i \cdot h'_i - h_i \cdot h'_i - h_i \cdot \varphi_i^{-1}(b_{i+1}) + h_i \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1}) - \varphi_i^{-1}(a_{i+1}) \cdot h_i + \varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot h_i \right) + \\
& \quad + \xi_{n-1} \left(a_{n-1} \cdot b_{n-1} + \left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h_k) \right) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(h'_n) + \varphi_{n-1}^{-1}(h_n) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h'_k) \right) - \right. \\
& \quad \left. - a_{n-1} \cdot b_{n-1} + h_{n-1} \cdot b_{n-1} + a_{n-1} \cdot h'_{n-1} - h_{n-1} \cdot h'_{n-1} \right) = \\
& \quad = \xi_n(a_n \cdot b_n) + \xi_0(h_0 \cdot h'_0 + h_0 \cdot h'_0 - h_0 \cdot h'_0 + h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(h'_1) + \varphi_0^{-1}(h_1) \cdot h_0) + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i \left(\left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h_k) \right) \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1}) + \varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot \left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h'_k) \right) + h_i \cdot (b_i - \varphi_i^{-1}(b_{i+1})) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_i - \varphi_i^{-1}(a_{i+1})) \cdot h'_i - h_i \cdot h'_i + h_i \cdot \varphi_i^{-1}(h_{i+1}') + \varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot h_i \Big)' + \\
& + \xi_{n-1} \left(\left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h_k) \right) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(h'_n) + \varphi_{n-1}^{-1}(h_n) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h_k') \right) + \right. \\
& + h_{n-1} \cdot (h'_{n-1} + \varphi_{n-1}^{-1}(h_n')) + (h_{n-1} + \varphi_{n-1}^{-1}(h_n)) \cdot h'_{n-1} - h_{n-1} \cdot h_{n-1}' \Big) = \\
& = \xi_n(a_n \cdot b_n) + \xi_0(h_0 \cdot h'_0 + h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(h_1') + \varphi_0^{-1}(h_1) \cdot h_0) + \\
& + \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i \left(\left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h_k) \right) \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1}) + \varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot \left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h_k') \right) + \right. \\
& \quad \left. + h_i \cdot h'_i + h_i \cdot h'_i - h_i \cdot h_i' + h_i \cdot \varphi_i^{-1}(h_{i+1}') + \varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot h_i \right) + \\
& + \xi_{n-1} \left(\left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h_k) \right) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(h'_n) + \varphi_{n-1}^{-1}(h_n) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h_k') \right) + \right. \\
& + h_{n-1} \cdot h'_{n-1} + h_{n-1} \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(h_n') + h_{n-1} \cdot h_{n-1}' + \varphi_{n-1}^{-1}(h_n) \cdot h_{n-1}' - h_{n-1} \cdot h_{n-1}' \Big) = \\
& = \xi_n(a_n \cdot b_n) + \xi_0(h_0 \cdot h'_0 + h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(h_1') + \varphi_0^{-1}(h_1) \cdot h_0) + \\
& + \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i \left(\left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h_k) \right) \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1}) + \varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot \left(\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,i}(h_k') \right) + \right. \\
& \quad \left. + h_i \cdot h'_i + h_i \cdot \varphi_i^{-1}(h_{i+1}') + \varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot h_i \right) + \\
& + \xi_{n-1} \left(\left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h_k) \right) \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(h'_n) + \varphi_{n-1}^{-1}(h_n) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} f_{k,n-1}(h_k') \right) + \right. \\
& \quad \left. + h_{n-1} \cdot h'_{n-1} + h_{n-1} \cdot \varphi_{n-1}^{-1}(h_n') + \varphi_{n-1}^{-1}(h_n) \cdot h_{n-1}' \right) = \\
& = \xi_n(a_n \cdot b_n) + \xi_0(h_0 \cdot h'_0 + h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(h_1') + \varphi_0^{-1}(h_1) \cdot h_0) + \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} (f_{k,i}(h_k) \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1})) + \sum_{k=0}^{i-1} (\varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot f_{k,i}(h_k')) + \right. \\
& \quad \left. + h_i \cdot h'_i + h_i \cdot \varphi_i^{-1}(h_{i+1}') + \varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot h_i \right) \leq \\
& \leq \xi_n(a_n) \cdot \xi_n(b_n) + \xi_0(h_0) \cdot \xi_0(h'_0) + \xi_0(h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(h_1')) + \xi_0(\varphi_0^{-1}(h_1) \cdot h_0) + \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \xi_i(f_{k,i}(h_k) \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1})) + \sum_{k=0}^{i-1} \xi_i(\varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot f_{k,i}(h_k')) + \right. \\
& \quad \left. + \xi_i(h_i) \cdot \xi_i(h'_i) + \xi_i(h_i \cdot \varphi_i^{-1}(h_{i+1}')) + \xi_i(\varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot h_i) \right).
\end{aligned}$$

Так как для каждого $0 \leq i \leq n$ изоморфизм $\varphi_i : (R_i, \xi_i) \rightarrow (R_{i+1}, \xi_{i+1})$ является полу-изометрическим, то, согласно теореме 2.15, выполняются следующие неравенства

$$\frac{\xi_i(a_i \cdot b_i)}{\xi_i(b_i)} \leq \xi_{i+1}(\varphi_i(a_i)) \leq \xi_i(a_i) \text{ и } \frac{\xi_i(a_i \cdot b_i)}{\xi_i(a_i)} \leq \xi_{i+1}(\varphi_i(b_i)) \leq \xi_i(b_i),$$

и тогда из определения изоморфизмов $f_{k,i}$ для $k \leq i$ следует, что

$$\xi_i(f_{k,i}(h_k)) \leq \xi_k(h_k) \text{ и } \xi_i(f_{k,i}(h'_k)) \leq \xi_k(h'_k) \text{ для любых } 0 \leq k \leq i \leq n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \xi_n(a_n) \cdot \xi_n(b_n) + \xi_0(h_0) \cdot \xi_0(h'_0) + \xi_0(h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(h_1)) + \xi_0(\varphi_0^{-1}(h_1) \cdot h_0) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \xi_i(f_{k,i}(h_k) \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1})) + \sum_{k=0}^{i-1} \xi_i(\varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot f_{k,i}(h'_k)) + \right. \\ & \quad \left. + \xi_i(h_i) \cdot \xi_i(h'_i) + \xi_i(h_i \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1})) + \xi_i(\varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot h_i) \right) \leq \\ & \leq \xi_n(a_n) \cdot \xi_n(b_n) + \xi_0(h_0) \cdot \xi_0(h'_0) + \xi_0(h_0 \cdot \varphi_0^{-1}(h_1)) + \xi_0(\varphi_0^{-1}(h_1) \cdot h_0) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \xi_i(f_{k,i}(h_k) \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1})) + \sum_{k=0}^{i-1} \xi_i(\varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot f_{k,i}(h'_k)) + \right. \\ & \quad \left. + \xi_i(h_i) \cdot \xi_i(h'_i) + \xi_i(h_i \cdot \varphi_i^{-1}(h'_{i+1})) + \xi_i(\varphi_i^{-1}(h_{i+1}) \cdot h_i) \right) \leq \\ & \leq \xi_n(a_n) \cdot \xi_n(b_n) + \xi_0(h_0) \cdot \xi_0(h'_0) + \xi_0(h_0) \cdot \xi_1(h_1) + \xi_1(h_1) \cdot \xi_0(h_0) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \xi_i(f_{k,i}(h_k)) \cdot \xi_{i+1}(h'_{i+1}) + \sum_{k=0}^{i-1} \xi_{i+1}(h_{i+1}) \cdot \xi_i(f_{k,i}(h'_k)) + \right. \\ & \quad \left. + \xi_i(h_i) \cdot \xi_i(h'_i) + \xi_i(h_i) \cdot \xi_{i+1}(h'_{i+1}) + \xi_{i+1}(h_{i+1}) \cdot \xi_i(h_i) \right) \leq \\ & \leq \xi_n(a_n) \cdot \xi_n(b_n) + \xi_0(h_0) \cdot \xi_0(h'_0) + \xi_0(h_0) \cdot \xi_1(h_1) + \xi_1(h_1) \cdot \xi_0(h_0) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \xi_k(h_k) \cdot \xi_{i+1}(h'_{i+1}) + \sum_{k=0}^{i-1} \xi_{i+1}(h_{i+1}) \cdot \xi_k(h'_k) + \right. \\ & \quad \left. + \xi_i(h_i) \cdot \xi_i(h'_i) + \xi_i(h_i) \cdot \xi_{i+1}(h'_{i+1}) + \xi_{i+1}(h_{i+1}) \cdot \xi_i(h_i) \right) = \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \xi_i(h_i) \cdot \xi_j(h'_j) + \xi_n(a_n) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(h'_j) \right) + \\ & \quad + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(h_i) \right) \cdot \xi_n(b_n) + \xi_n(a_n) \cdot \xi_n(b_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(h_i) + \xi_n(a_n) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(h'_j) + \xi_n(b_n) \right) = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(a_i - \varphi_i^{-1}(a_{i+1})) + \xi_n(a_n) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(b_j - \varphi_j^{-1}(b_{j+1})) + \xi_n(b_n) \right) = \hat{\xi}(a) \cdot \hat{\xi}(b).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что $\hat{\xi}(a \cdot b) \leq \hat{\xi}(a) \cdot \hat{\xi}(b)$, т.е. условие V определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) выполнено. Значит, $(\hat{R}, \hat{\xi})$ является псевдонормированным кольцом.

П.2. Так как $\hat{\xi}(r, 0, \dots, 0) = \xi_0(r - 0) + \xi_1(0) + \dots + \xi_n(0) = \xi(r)$ для любого $r \in R$, и мы ранее отождествили элемент $r \in R$ с элементом $(r, 0, \dots, 0) \in \hat{R}$ (см. I.5), то $\hat{\xi}|_R = \xi$.

П.3. Покажем, что $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ (см. I.6) является изометрическим гомоморфизмом, т.е. $\inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) \mid \hat{a} \in \hat{I} \} = \bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r}))$ для любого $\hat{r} \in \hat{R}$.

Пусть $\hat{r} = (r_0, r_1, \dots, r_n) \in \hat{R}$ и $\hat{b} = (0, f_{0,1}(r_0) - r_1, \dots, f_{0,n}(r_0) - r_n)$. Тогда $\hat{b} \in \hat{I}$, и значит,

$$\begin{aligned}
&\inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) \mid \hat{a} \in \hat{I} \} \leq \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{b}) = \\
&= \hat{\xi}((r_0, r_1, \dots, r_n) + (0, f_{0,1}(r_0) - r_1, \dots, f_{0,n}(r_0) - r_n)) = \\
&= \hat{\xi}((r_0, f_{0,1}(r_0), \dots, f_{0,n}(r_0))) = \xi_0(r_0 - \varphi_0^{-1}(f_{0,1}(r_0))) + \\
&+ \xi_1(f_{0,1}(r_0) - \varphi_1^{-1}(f_{0,2}(r_0))) + \dots + \xi_{n-1}(f_{0,n-1}(r_0) - \varphi_{n-1}^{-1}(f_{0,n}(r_0))) + \xi_n(f_{0,n}(r_0)) = \\
&= \xi_0(0) + \xi_1(0) + \dots + \xi_{n-1}(0) + \xi_n(\varphi(r_0)) = \bar{\xi}(\varphi(r_0)) = \bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r})).
\end{aligned}$$

С другой стороны, так как $f_{0,n} = \varphi$ и $\xi_i(d_i) \geq \xi_n(f_{i,n}(d_n))$ для любого $d_i \in R_i$ и произвольного $0 \leq i \leq n$, то для любого элемента $\hat{a} = (0, a_1, \dots, a_n) \in \hat{I}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) = \hat{\xi}((r_0, r_1, \dots, r_n) + (0, a_1, \dots, a_n)) = \hat{\xi}((r_0, r_1 + a_1, \dots, r_n + a_n)) = \\
&= \xi_0(r_0 - \varphi_0^{-1}(r_1 + a_1)) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(r_i + a_i - \varphi_i^{-1}(r_{i+1} + a_{i+1})) + \xi_n(r_n + a_n) \geq \\
&\geq \xi_n(f_{0,n}(r_0) - f_{0,n}(\varphi_0^{-1}(r_1 + a_1))) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_n(f_{i,n}(r_i + a_i) - f_{i,n}(\varphi_i^{-1}(r_{i+1} + a_{i+1}))) + \\
&+ \xi_n(r_n + a_n) = \xi_n(f_{0,n}(r_0) - f_{1,n}(r_1 + a_1)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_n (f_{i,n}(r_i + a_i) - f_{i+1,n}(r_{i+1} + a_{i+1})) + \xi_n(r_n + a_n) \geq \\
& \geq \xi_n \left(f_{0,n}(r_0) - f_{1,n}(r_1 + a_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{i,n}(r_i + a_i) - f_{i+1,n}(r_{i+1} + a_{i+1})) + r_n + a_n \right) = \\
& = \xi_n(f_{0,n}(r_0)) = \xi_n(\varphi(r_0)) = \bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r})).
\end{aligned}$$

Из произвольности элемента $\hat{a} \in \hat{I}$ следует, что $\inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) \mid \hat{a} \in \hat{I} \} \geq \bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r}))$, и

значит, $\inf \{ \hat{\xi}(\hat{r} + \hat{a}) \mid \hat{a} \in \hat{I} \} = \bar{\xi}(\hat{\varphi}(\hat{r}))$. Этим импликация $2 \Rightarrow 1$ доказана. $\square$

2.26. Замечание. Если все кольца $R_0, R_1, \dots, R_n$ являются коммутативными, то и кольцо $\hat{R}$, построенное в теореме 2.25, является коммутативным.

Следующая теорема является аналогом второй теоремы об изоморфизме для ассоциативных нильпотентных псевдонормированных колец.

2.27. Теорема. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – ассоциативные псевдонормированные кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм и $R^n = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$ для любого $r \in R$;
2. существуют псевдонормированные кольца $(R_0, \xi_0), (R_1, \xi_1), \dots, (R_n, \xi_n)$ и изоморфизмы $\varphi_i: R_i \rightarrow R_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, такие, что выполнены следующие условия:
 - а) $(R, \xi) = (R_0, \xi_0)$ и $(\bar{R}, \bar{\xi}) = (R_n, \xi_n)$;
 - б) $\varphi_i: (R_i, \xi_i) \rightarrow (R_{i+1}, \xi_{i+1})$ – полуизометрический изоморфизм, $i = 0, 1, \dots, n-1$;
 - в) $\varphi = \varphi_{n-1} \circ \varphi_{n-2} \circ \dots \circ \varphi_1 \circ \varphi_0$;
3. существуют псевдонормированное неассоциативное кольцо $(\hat{R}, \hat{\xi})$ и гомоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{R} \rightarrow \bar{R}$ такие, что:
 - а) R является достижимым подкольцом степени n кольца $\hat{R}$, $\hat{\xi}|_R = \xi$ и $\hat{\varphi}|_R = \varphi$;
 - б) гомоморфизм $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является изометрическим гомоморфизмом псевдонормированных колец.

Доказательство.

1 $\Rightarrow$ 2 .

Определим кольца R_k . Пусть $R_k = R$ для $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и $R_n = \bar{R}$.

Определим изоморфизмы $\varphi_k : R_k \rightarrow R_{k+1}$. Положим $\varphi_{n-1} = \varphi$ и $\varphi_k = \varepsilon$ для $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$, где ε – тождественное отображение.

Определим псевдонормы ξ_k в кольцах R_k . Положим:

$$\xi_0(r) = \xi(r) \text{ в кольце } R_0;$$

$$\begin{aligned} \xi_k(r) &= \sup \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r)), \frac{\xi_{k-1}(r \cdot a)}{\xi_{k-1}(a)}, \frac{\xi_{k-1}(a \cdot r)}{\xi_{k-1}(a)} \mid a \in R \setminus \{0\} \right\} = \\ &= \max \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r)), \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_{k-1}(r \cdot a)}{\xi_{k-1}(a)}, \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_{k-1}(a \cdot r)}{\xi_{k-1}(a)} \right\} \text{ в кольце } R_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-2; \\ \xi_{n-1}(r) &= \sup \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r)), \frac{\xi_{n-2}(r \cdot a)}{\xi_{n-2}(a)}, \frac{\xi_{n-2}(a \cdot r)}{\xi_{n-2}(a)} \mid a \in R \setminus \{0\} \right\} = \bar{\xi}(\varphi(r)) \text{ в кольце } R_{n-1}; \\ \xi_n(\bar{r}) &= \bar{\xi}(\bar{r}) \text{ в кольце } R_n. \end{aligned}$$

Покажем, что функция ξ_k действительно является псевдонормой в кольце R_k для каждого $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Доказательство проведем по индукции.

При $k = 0$ в кольце $R_0 = R$ функция $\xi_0 = \xi$ является псевдонормой.

Предположим, что при некотором k таком, что $1 \leq k \leq n-2$, функция ξ_k является псевдонормой в кольце $R_k = R$, и покажем, что тогда функция ξ_{k+1} будет псевдонормой в кольце $R_{k+1} = R$.

Проверим, удовлетворяет ли функция ξ_{k+1} определению псевдонормы (см. [14], 1.1.12). Выполнение условий I – III очевидно. Покажем, что для любых $r_1, r_2 \in R_{k+1}$ выполнено неравенство

$$\xi_{k+1}(r_1 + r_2) \leq \xi_{k+1}(r_1) + \xi_{k+1}(r_2).$$

Действительно, для любого $a \in R \setminus \{0\}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\xi_k((r_1 + r_2) \cdot a)}{\xi_k(a)} &= \frac{\xi_k(r_1 \cdot a + r_2 \cdot a)}{\xi_k(a)} \leq \frac{\xi_k(r_1 \cdot a)}{\xi_k(a)} + \frac{\xi_k(r_2 \cdot a)}{\xi_k(a)} \leq \\ &\leq \sup_{b \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(r_1 \cdot b)}{\xi_k(b)} + \sup_{b \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(r_2 \cdot b)}{\xi_k(b)} \leq \xi_{k+1}(r_1) + \xi_{k+1}(r_2); \\ \frac{\xi_k(a \cdot (r_1 + r_2))}{\xi_k(a)} &= \frac{\xi_k(a \cdot r_1 + a \cdot r_2)}{\xi_k(a)} \leq \frac{\xi_k(a \cdot r_1)}{\xi_k(a)} + \frac{\xi_k(a \cdot r_2)}{\xi_k(a)} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{b \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(b \cdot r_1)}{\xi_k(b)} + \sup_{b \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(b \cdot r_2)}{\xi_k(b)} \leq \xi_{k+1}(r_1) + \xi_{k+1}(r_2);$$

$$\bar{\xi}(\varphi(r_1 + r_2)) = \bar{\xi}(\varphi(r_1) + \varphi(r_2)) \leq \bar{\xi}(\varphi(r_1)) + \bar{\xi}(\varphi(r_2)) \leq \xi_{k+1}(r_1) + \xi_{k+1}(r_2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \xi_{k+1}(r_1 + r_2) &= \max \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r_1 + r_2)), \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k((r_1 + r_2) \cdot a)}{\xi_k(a)}, \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(a \cdot (r_1 + r_2))}{\xi_k(a)} \right\} \leq \\ &\leq \xi_{k+1}(r_1) + \xi_{k+1}(r_2). \end{aligned}$$

Условие IV определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) для функции ξ_{k+1} выполнено.

Покажем, что для любых $r_1, r_2 \in R_{k+1}$ выполнено неравенство

$$\xi_{k+1}(r_1 \cdot r_2) \leq \xi_{k+1}(r_1) \cdot \xi_{k+1}(r_2).$$

Действительно, для любого $a \in R \setminus \{0\}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\xi_k((r_1 \cdot r_2) \cdot a)}{\xi_k(a)} &= \frac{\xi_k(r_1 \cdot (r_2 \cdot a))}{\xi_k(a)} = \frac{\xi_k(r_1 \cdot (r_2 \cdot a))}{\xi_k(r_2 \cdot a)} \cdot \frac{\xi_k(r_2 \cdot a)}{\xi_k(a)} \leq \\ &\leq \sup_{b \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(r_1 \cdot b)}{\xi_k(b)} \cdot \sup_{c \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(r_2 \cdot c)}{\xi_k(c)} \leq \xi_{k+1}(r_1) \cdot \xi_{k+1}(r_2), \text{ если } r_2 \cdot a \neq 0; \\ \frac{\xi_k(a \cdot (r_1 \cdot r_2))}{\xi_k(a)} &= \frac{\xi_k((a \cdot r_1) \cdot r_2)}{\xi_k(a)} = \frac{\xi_k(a \cdot r_1)}{\xi_k(a)} \cdot \frac{\xi_k((a \cdot r_1) \cdot r_2)}{\xi_k(a \cdot r_1)} \leq \\ &\leq \sup_{b \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(b \cdot r_1)}{\xi_k(b)} \cdot \sup_{c \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(c \cdot r_2)}{\xi_k(c)} \leq \xi_{k+1}(r_1) \cdot \xi_{k+1}(r_2), \text{ если } a \cdot r_1 \neq 0; \\ \bar{\xi}(\varphi(r_1 \cdot r_2)) &= \bar{\xi}(\varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2)) \leq \bar{\xi}(\varphi(r_1)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(r_2)) \leq \xi_{k+1}(r_1) \cdot \xi_{k+1}(r_2). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \xi_{k+1}(r_1 \cdot r_2) &= \max \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r_1 \cdot r_2)), \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k((r_1 \cdot r_2) \cdot a)}{\xi_k(a)}, \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(a \cdot (r_1 \cdot r_2))}{\xi_k(a)} \right\} \leq \\ &\leq \xi_{k+1}(r_1) \cdot \xi_{k+1}(r_2). \end{aligned}$$

Условие V определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) для функции ξ_{k+1} выполнено.

Таким образом, функция ξ_{k+1} является псевдонормой в кольце $R_{k+1} = R$. Следовательно, по индукции, каждая из функций ξ_k задает псевдонорму в кольце R_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Докажем, что $\varphi_k : (R_k, \xi_k) \rightarrow (R_{k+1}, \xi_{k+1})$ – полуизометрический изоморфизм для $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$.

1. Покажем, что $\xi_{k+1}(\varphi_k(r)) \leq \xi_k(r)$ для любого $r \in R_k$.

Так как $\xi_k(r \cdot a) \leq \xi_k(r) \cdot \xi_k(a)$ и $\xi_k(a \cdot r) \leq \xi_k(r) \cdot \xi_k(a)$ для любого $a \in R$, то

$$\frac{\xi_k(r \cdot a)}{\xi_k(a)} \leq \xi_k(r) \text{ и } \frac{\xi_k(a \cdot r)}{\xi_k(a)} \leq \xi_k(r) \text{ для любого } a \in R \setminus \{0\}. \text{ Следовательно,}$$

$$\sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(r \cdot a)}{\xi_k(a)} \leq \xi_k(r) \text{ и } \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(a \cdot r)}{\xi_k(a)} \leq \xi_k(r).$$

Поскольку $\xi_k(r) = \sup \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r)), \frac{\xi_{k-1}(r \cdot a)}{\xi_{k-1}(a)}, \frac{\xi_{k-1}(a \cdot r)}{\xi_{k-1}(a)} \mid a \in R \setminus \{0\} \right\}$, то

$\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi_k(r)$. Учитывая неравенство $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi_k(r)$, получим

$$\begin{aligned} \xi_{k+1}(r) &= \sup \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r)), \frac{\xi_k(r \cdot a)}{\xi_k(a)}, \frac{\xi_k(a \cdot r)}{\xi_k(a)} \mid a \in R \setminus \{0\} \right\} = \\ &= \max \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r)), \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(r \cdot a)}{\xi_k(a)}, \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(a \cdot r)}{\xi_k(a)} \right\} \leq \xi_k(r). \end{aligned}$$

Таким образом, $\xi_{k+1}(\varphi_k(r)) = \xi_{k+1}(\varepsilon(r)) = \xi_{k+1}(r) \leq \xi_k(r)$ для любого $r \in R_k$.

2. Покажем, что $\xi_k(r \cdot q) \leq \xi_{k+1}(\varphi_k(r)) \cdot \xi_k(q)$ для любых $r, q \in R_k$.

Для любого $q \neq 0$ имеем

$$\frac{\xi_k(r \cdot q)}{\xi_k(q)} \leq \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(r \cdot a)}{\xi_k(a)} \leq \max \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r)), \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(r \cdot a)}{\xi_k(a)}, \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(a \cdot r)}{\xi_k(a)} \right\} = \xi_{k+1}(r),$$

откуда

$$\xi_k(r \cdot q) \leq \xi_{k+1}(r) \cdot \xi_k(q) = \xi_{k+1}(\varepsilon(r)) \cdot \xi_k(q) = \xi_{k+1}(\varphi_k(r)) \cdot \xi_k(q).$$

3. Покажем, что $\xi_k(q \cdot r) \leq \xi_{k+1}(\varphi_k(r)) \cdot \xi_k(q)$ для любых $r, q \in R_k$.

Для любого $q \neq 0$ имеем

$$\frac{\xi_k(q \cdot r)}{\xi_k(q)} \leq \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(a \cdot r)}{\xi_k(a)} \leq \max \left\{ \bar{\xi}(\varphi(r)), \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(r \cdot a)}{\xi_k(a)}, \sup_{a \in R \setminus \{0\}} \frac{\xi_k(a \cdot r)}{\xi_k(a)} \right\} = \xi_{k+1}(r).$$

Следовательно,

$$\xi_k(q \cdot r) \leq \xi_{k+1}(r) \cdot \xi_k(q) = \xi_{k+1}(\varepsilon(r)) \cdot \xi_k(q) = \xi_{k+1}(\varphi_k(r)) \cdot \xi_k(q).$$

Выполнены все условия теоремы 2.15. Значит, $\varphi_k : (R_k, \xi_k) \rightarrow (R_{k+1}, \xi_{k+1})$ – полуизометрический изоморфизм для $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$.

Рассмотрим $\varphi_{n-1} : (R_{n-1}, \xi_{n-1}) \rightarrow (R_n, \xi_n)$. Так как $\xi_{n-1}(r) = \bar{\xi}(\varphi(r))$ для любого $r \in R$, то изоморфизм $\varphi_{n-1} = \varphi : (R_{n-1}, \xi_{n-1}) = (R, \xi_{n-1}) \rightarrow (R_n, \xi_n) = (\bar{R}, \bar{\xi})$ является изометрическим.

Таким образом, мы показали, что существуют псевдонормированные кольца $(R_0, \xi_0), (R_1, \xi_1), \dots, (R_n, \xi_n)$ и изоморфизмы $\varphi_i : R_i \rightarrow R_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, такие, что выполнены следующие условия:

- а) $(R, \xi) = (R_0, \xi_0)$ и $(\bar{R}, \bar{\xi}) = (R_n, \xi_n)$;
- б) $\varphi_i : (R_i, \xi_i) \rightarrow (R_{i+1}, \xi_{i+1})$ – полуизометрический изоморфизм, $i = 0, 1, \dots, n-1$;
- в) $\varphi = \varphi_{n-1} \circ \varphi_{n-2} \circ \dots \circ \varphi_1 \circ \varphi_0$;

Импликация $1 \Rightarrow 2$ доказана.

Импликация $2 \Rightarrow 3$ следует из теоремы 2.25.

Импликация $3 \Rightarrow 1$ следует из теоремы 2.1. $\square$

2.5. Выводы по главе 2

1. Изучен класс изоморфизмов псевдонормированных колец, являющихся сужениями изометрических гомоморфизмов на различные подкольца. Показано, что:

- кольцевой изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является сужением некоторого изометрического гомоморфизма на подкольцо тогда и только тогда, когда неравенство $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$ выполнено для всех $r \in R$.

Доказано, что вторая теорема об изоморфизме для псевдонормированных колец не верна в случае изометрического изоморфизма.

2. Изучен класс изоморфизмов псевдонормированных колец, являющихся сужениями изометрических гомоморфизмов на односторонние идеалы. Введены следующие понятия:

- кольцевой изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ называется полуизометрическим изоморфизмом слева, если φ является сужением некоторого изометрического гомоморфизма на левый идеал;

- кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ называется полуизометрическим изоморфизмом справа, если φ является сужением некоторого изометрического гомоморфизма на правый идеал.

Показано, что:

- кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in R$ выполнены неравенства

$$\xi(a \cdot b) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \xi(b) \text{ и } \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a);$$

- кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом справа тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in R$ выполнены неравенства

$$\xi(b \cdot a) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \xi(b) \text{ и } \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a).$$

Доказано, что в случае одностороннего полуизометрического изоморфизма имеют место аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец.

3. Установлена связь между односторонним полуизометрическим, изометрическим и топологическим изоморфизмом. Показано, что:

- если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева (справа) и кольцо (R, ξ) имеет элемент, не являющийся правым (левым) обобщенным делителем нуля, то кольца (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ топологически изоморфны;
- если (R, ξ) – псевдонормированное кольцо с единицей e и $\xi(e) = 1$, то всякий его полуизометрический изоморфизм слева (справа) является изометрическим;
- если (R, ξ) – нормированное кольцо, то всякий его полуизометрический изоморфизм слева (справа) является изометрическим.

4. Изучен класс изоморфизмов псевдонормированных колец, являющихся сужениями изометрических гомоморфизмов на двусторонние идеалы. Введено следующее понятие:

- кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ называется полуизометрическим изоморфизмом, если φ является сужением некоторого изометрического гомоморфизма на двусторонний идеал;

Показано, что:

- кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in R$ выполнены неравенства

$$\xi(a \cdot b) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \xi(b), \quad \xi(b \cdot a) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \xi(b) \quad \text{и} \quad \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a).$$

Доказано, что в случае двустороннего полуизометрического изоморфизма имеют место аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец.

- Изучены некоторые свойства полуизометрического изоморфизма. Показано, что:
 - $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда φ является полуизометрическим изоморфизмом и слева, и справа;
 - если (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – кольца с нулевым умножением, то любой кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$, удовлетворяющий условию $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$, является полуизометрическим;
 - кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является сужением изометрического гомоморфизма $\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ на идеал (R, ξ) и $\ker \hat{\varphi} \subseteq \text{Ann } \hat{R}$ тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in R$ выполнены неравенства $\xi(a) \geq \bar{\xi}(\varphi(a))$ и $\xi(a \cdot b) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \bar{\xi}(\varphi(b))$.
- Изучен класс изоморфизмов псевдонормированных колец, являющихся сужениями изометрических гомоморфизмов на достижимые подкольца. Показано, что:
 - кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является сужением некоторого изометрического гомоморфизма псевдонормированных колец на достижимое подкольцо ступени не больше чем n тогда и только тогда, когда φ является суперпозицией n полуизометрических изоморфизмов;
 - если R – ассоциативное и нильпотентное кольцо, то кольцевой изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является суперпозицией полуизометрических изоморфизмов тогда и только тогда, когда для любого $r \in R$ выполнено неравенство $\bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r)$.

3. КОНСТРУКЦИИ ПСЕВДОНОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ, СОХРАНЯЮЩИЕ ПОЛУИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ

3.1. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к подкольцам и факторкольцам псевдонормированных колец

В настоящем параграфе рассматривается вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к подкольцам и факторкольцам псевдонормированных колец.

Следующая теорема изучает сужение полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) на подкольца.

3.1. Теорема. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, A – подкольцо кольца R , $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:

I. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, то изомор-

физм $\varphi|_A: (A, \xi|_A) \rightarrow (\varphi(A), \bar{\xi}|_{\varphi(A)})$ также является полуизометрическим слева;

II. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа, то изомор-

физм $\varphi|_A: (A, \xi|_A) \rightarrow (\varphi(A), \bar{\xi}|_{\varphi(A)})$ также является полуизометрическим справа;

III. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм псевдонормирован-

ных колец, то $\varphi|_A: (A, \xi|_A) \rightarrow (\varphi(A), \bar{\xi}|_{\varphi(A)})$ также является полуизометрическим

изоморфизмом.

Доказательство. Обозначим:

подкольца $A = R_0$ и $\varphi(A) = \bar{R}_0$;

псевдонормы $\xi|_A = \xi_0$ и $\bar{\xi}|_{\varphi(A)} = \bar{\xi}_0$;

отображение $\varphi|_A = \varphi_0$, $\varphi_0: (R_0, \xi_0) \rightarrow (\bar{R}_0, \bar{\xi}_0)$.

I. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, то по теореме

2.6 выполнены неравенства $\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(a)} \leq \bar{\xi}(\varphi(b)) \leq \xi(b)$ для любых $a, b \in R \setminus \{0\}$. Тогда для

изоморфизма $\varphi_0 : (R_0, \xi_0) \rightarrow (\bar{R}_0, \bar{\xi}_0)$ также справедливы неравенства

$\frac{\xi_0(b \cdot a)}{\xi_0(a)} \leq \bar{\xi}_0(\varphi_0(b)) \leq \xi_0(b)$ для любых $a, b \in R_0 \setminus \{0\}$. Следовательно, по теореме 2.6

$\varphi_0 : (R_0, \xi_0) \rightarrow (\bar{R}_0, \bar{\xi}_0)$ является полуизометрическим изоморфизмом слева.

II. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа, то по теореме

2.7 выполнены неравенства $\frac{\xi(b \cdot a)}{\xi(b)} \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ для любых $a, b \in R \setminus \{0\}$. Тогда

для изоморфизма $\varphi_0 : (R_0, \xi_0) \rightarrow (\bar{R}_0, \bar{\xi}_0)$ также справедливы неравенства

$\frac{\xi_0(b \cdot a)}{\xi_0(b)} \leq \bar{\xi}_0(\varphi_0(a)) \leq \xi_0(a)$ для любых $a, b \in R_0 \setminus \{0\}$. Следовательно, по теореме 2.7

$\varphi_0 : (R_0, \xi_0) \rightarrow (\bar{R}_0, \bar{\xi}_0)$ является полуизометрическим изоморфизмом справа.

III. Если изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом

псевдонормированных колец, то $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим

изоморфизмом слева и полуизометрическим изоморфизмом справа. Тогда из доказанных

утверждений I и II следует, что $\varphi_0 : (R_0, \xi_0) \rightarrow (\bar{R}_0, \bar{\xi}_0)$ является полуизометрическим

изоморфизмом слева и полуизометрическим изоморфизмом справа. Значит, согласно

следствию 2.16 изоморфизм $\varphi_0 : (R_0, \xi_0) \rightarrow (\bar{R}_0, \bar{\xi}_0)$ является полуизометрическим изо-

морфизмом псевдонормированных колец. $\square$

Следующая теорема изучает вопрос сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к факторкольцам.

3.2. Теорема. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $\bar{J}$ – замкнутый идеал в $(\bar{R}, \bar{\xi})$, отображение $\varphi : R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, $(R, \xi) / \varphi^{-1}(\bar{J}) = (\hat{R}, \hat{\xi})$ и $(\bar{R}, \bar{\xi}) / \bar{J} = (\tilde{R}, \tilde{\xi})$ – факторкольца колец (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$, соответственно, $\Phi : \hat{R} \rightarrow \tilde{R}$ –

отображение, действующее по правилу

$$\Phi(r + \varphi^{-1}(\bar{J})) = \varphi(r) + \bar{J}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, то изоморфизм $\Phi : (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\tilde{R}, \tilde{\xi})$ также является полуизометрическим слева;
- II. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа, то изоморфизм $\Phi : (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\tilde{R}, \tilde{\xi})$ также является полуизометрическим справа;
- III. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм псевдонормированных колец, то $\Phi : (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\tilde{R}, \tilde{\xi})$ также является полуизометрическим изоморфизмом.

Доказательство. Так как $\bar{J}$ – замкнутый идеал в $(\bar{R}, \bar{\xi})$, то функция

$\tilde{\xi}(\bar{r} + \bar{J}) = \inf \{ \bar{\xi}(\bar{r} + \bar{j}) \mid \bar{j} \in \bar{J} \}$ является псевдонормой в кольце $\bar{R}/\bar{J} = \tilde{R}$ (см. [14], теорема 1.5.36).

Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа), то для любых $a \in R$ выполнено неравенство $\bar{\xi}(\varphi(a)) \leq \xi(a)$ (см. теоремы 2.15, 2.6, 2.7), из которого следует, что изоморфизм φ является непрерывным. Так как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении также является замкнутым множеством, то $\varphi^{-1}(\bar{J})$ является замкнутым идеалом в кольце (R, ξ) . Значит, функция $\hat{\xi}(r + \varphi^{-1}(\bar{J})) = \inf \{ \xi(r + j) \mid j \in \varphi^{-1}(\bar{J}) \}$ является псевдонормой в кольце $R/\varphi^{-1}(\bar{J}) = \hat{R}$.

В дальнейшем будем обозначать замкнутый идеал $\varphi^{-1}(\bar{J}) = J$.

Согласно второй теореме об изоморфизме указанное выше отображение $\Phi : \hat{R} \rightarrow \tilde{R}$ будет кольцевым изоморфизмом.

I. Пусть $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева. Проверим выполнение условий теоремы 2.6 для отображения $\Phi : (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\tilde{R}, \tilde{\xi})$.

I.1. Покажем, что для любых $\hat{a}, \hat{r} \in \hat{R} \setminus \{0\}$ выполнено неравенство

$$\frac{\hat{\xi}(\hat{r} \cdot \hat{a})}{\hat{\xi}(\hat{a})} \leq \tilde{\xi}(\Phi(\hat{r})).$$

Для элементов $\hat{a}, \hat{r} \in \hat{R} \setminus \{0\}$ существуют такие элементы $a, r \in R \setminus J$, что $\hat{a} = a + J$,

$\hat{r} = r + J$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно. Так как

$$\tilde{\xi}(\Phi(\hat{r})) = \tilde{\xi}(\varphi(r) + \bar{J}) = \inf \{ \bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i)) \mid i \in J \},$$

то для положительного числа $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \varepsilon$ найдётся элемент $i_1 \in J$ такой, что

$$\bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i_1)) < \tilde{\xi}(\varphi(r) + \bar{J}) + \varepsilon_1.$$

Поскольку $\hat{\xi}(\hat{r}) = \hat{\xi}(r + J) = \inf \{ \xi(r + i) \mid i \in J \}$, то для положительного числа

$$\varepsilon_2 = \min \left\{ \frac{1}{2} \hat{\xi}(a + J), \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot \frac{\hat{\xi}(a + J)}{\bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i_1))} \right\} \text{ найдётся такой элемент } i_2 \in J, \text{ что}$$

$$\xi(a + i_2) \geq \hat{\xi}(a + J) > \xi(a + i_2) - \varepsilon_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\xi}(\hat{r} \cdot \hat{a})}{\hat{\xi}(\hat{a})} &= \frac{\hat{\xi}((r + J) \cdot (a + J))}{\hat{\xi}(a + J)} \leq \frac{\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2))}{\hat{\xi}(a + J)} < \frac{\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2))}{\xi(a + i_2) - \varepsilon_2} = \\ &= \frac{\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2))}{\xi(a + i_2)} + \left(\frac{\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2))}{\xi(a + i_2) - \varepsilon_2} - \frac{\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2))}{\xi(a + i_2)} \right). \end{aligned}$$

Оценим разность $\frac{\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2))}{\xi(a + i_2) - \varepsilon_2} - \frac{\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2))}{\xi(a + i_2)}$. Так как $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ –

полуизометрический изоморфизм слева, то

$$\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2)) \leq \bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i_1)) \cdot \xi(a + i_2),$$

и значит,

$$\begin{aligned} \frac{\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2))}{\xi(a + i_2) - \varepsilon_2} - \frac{\xi((r + i_1) \cdot (a + i_2))}{\xi(a + i_2)} &= \xi((r + i_1) \cdot (a + i_2)) \cdot \frac{\varepsilon_2}{\xi(a + i_2)(\xi(a + i_2) - \varepsilon_2)} \leq \\ &\leq \bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i_1)) \cdot \xi(a + i_2) \cdot \frac{\varepsilon_2}{\xi(a + i_2) \cdot (\xi(a + i_2) - \varepsilon_2)} = \\ &= \bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i_1)) \cdot \frac{\varepsilon_2}{\xi(a + i_2) - \varepsilon_2} \leq \bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i_1)) \cdot \frac{\varepsilon_2}{\hat{\xi}(a + J) - \varepsilon_2} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i_1)) \cdot \frac{\varepsilon_2}{\frac{1}{2}\hat{\xi}(a+J)} = \frac{2\bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i_1))}{\hat{\xi}(a+J)} \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\xi}(\hat{r} \cdot \hat{a})}{\hat{\xi}(\hat{a})} &= \frac{\hat{\xi}((r+J) \cdot (a+J))}{\hat{\xi}(a+J)} < \frac{\xi((r+i_1) \cdot (a+i_2))}{\xi(a+i_2)} + \varepsilon_1 \leq \bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i_1)) + \varepsilon_1 < \\ &< \tilde{\xi}(\varphi(r) + \bar{J}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \tilde{\xi}(\varphi(r) + \bar{J}) + \varepsilon = \tilde{\xi}(\Phi(r+J)) + \varepsilon = \tilde{\xi}(\Phi(\hat{r})) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Совершая предельный переход в неравенстве

$$\frac{\hat{\xi}(\hat{r} \cdot \hat{a})}{\hat{\xi}(\hat{a})} < \tilde{\xi}(\Phi(\hat{r})) + \varepsilon$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\hat{\xi}(\hat{r} \cdot \hat{a})}{\hat{\xi}(\hat{a})} \leq \tilde{\xi}(\Phi(\hat{r})).$$

1.2. Покажем, что для любого $\hat{r} \in \hat{R}$ выполнено неравенство

$$\tilde{\xi}(\Phi(\hat{r})) \leq \hat{\xi}(\hat{r}).$$

Пусть $r \in R$ такой элемент, что $\hat{r} = r + J$. Поскольку $\varphi: (R, \xi) \mapsto (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, то

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\Phi(\hat{r})) &= \tilde{\xi}(\varphi(r) + \bar{J}) = \inf \{ \bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(j)) \mid j \in J \} \leq \\ &\leq \bar{\xi}(\varphi(r) + \varphi(i)) = \bar{\xi}(\varphi(r+i)) \leq \xi(r+i) \end{aligned}$$

для любого $i \in J$. Мы видим, что число $\tilde{\xi}(\Phi(\hat{r}))$ является одной из нижних граней множества $\{\xi(r+i) \mid i \in J\}$. Следовательно,

$$\tilde{\xi}(\Phi(\hat{r})) \leq \inf \{ \xi(r+i) \mid i \in J \} = \hat{\xi}(r+J) = \hat{\xi}(\hat{r}).$$

Таким образом, для любых $\hat{a}, \hat{r} \in \hat{R} \setminus \{0\}$ выполнены неравенства

$$\frac{\hat{\xi}(\hat{r} \cdot \hat{a})}{\hat{\xi}(\hat{a})} \leq \tilde{\xi}(\Phi(\hat{r})) \leq \hat{\xi}(\hat{r}).$$

Значит, по теореме 2.6 изоморфизм $\Phi: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\tilde{R}, \tilde{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева. Утверждение I доказано.

Утверждение II теоремы доказывается аналогично утверждению I; утверждение III теоремы следует из I и II. $\square$

3.2. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к пополнению псевдонормированных колец

Рассмотрим вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к пополнению псевдонормированных колец.

Установим связь между фундаментальными последовательностями полуизометрически изоморфных (полуизометрически изоморфных слева, полуизометрически изоморфных справа) псевдонормированных колец.

3.3. Предложение. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца,

$\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, и псевдонормированное кольцо (R, ξ) имеет элемент, не являющийся правым обобщенным делителем нуля, то последовательность $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ является фундаментальной в кольце (R, ξ) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\bar{r}_n = \varphi(r_n) | n = 1, 2, \dots\}$ является фундаментальной в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$;
- II. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа, и псевдонормированное кольцо (R, ξ) имеет элемент, не являющийся левым обобщенным делителем нуля, то последовательность $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ является фундаментальной в кольце (R, ξ) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\bar{r}_n = \varphi(r_n) | n = 1, 2, \dots\}$ является фундаментальной в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$;
- III. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм псевдонормированных колец, и псевдонормированное кольцо (R, ξ) имеет элемент, не являющийся обобщенным делителем нуля, то последовательность $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ является фундаментальной в кольце (R, ξ) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\bar{r}_n = \varphi(r_n) | n = 1, 2, \dots\}$ является фундаментальной в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$.

Доказательство.

I. Пусть $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, элемент $a \in (R, \xi)$ не является правым обобщенным делителем нуля, и $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ – произвольная фундаментальная последовательность в кольце (R, ξ) . Рассмотрим последовательность $\{\bar{r}_n = \varphi(r_n) | n = 1, 2, \dots\}$ в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$. Поскольку последовательность $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ фундаментальна в (R, ξ) , то для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров n и m , начиная с номера $N(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$$\xi(r_n - r_m) < \varepsilon.$$

Из теоремы 2.6 следует, что

$$\bar{\xi}(\varphi(r_n - r_m)) \leq \xi(r_n - r_m).$$

Так как $\varphi : R \rightarrow \bar{R}$ – изоморфизм, то $\varphi(r_n - r_m) = \varphi(r_n) - \varphi(r_m) = \bar{r}_n - \bar{r}_m$, и мы получаем неравенство:

$$\bar{\xi}(\bar{r}_n - \bar{r}_m) = \bar{\xi}(\varphi(r_n - r_m)) \leq \xi(r_n - r_m) < \varepsilon.$$

Значит, каждой фундаментальной последовательности $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ в кольце (R, ξ) соответствует фундаментальная последовательность $\{\bar{r}_n = \varphi(r_n) | n = 1, 2, \dots\}$ в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$.

Обратно. Пусть $\{\bar{r}_n | n = 1, 2, \dots\}$ – произвольная фундаментальная последовательность в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$. Рассмотрим последовательность $\{r_n = \varphi^{-1}(\bar{r}_n) | n = 1, 2, \dots\}$ в кольце (R, ξ) . Покажем, что последовательность $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ фундаментальна в кольце (R, ξ) . По теореме 2.6 мы имеем неравенство

$$\frac{\xi((r_n - r_m) \cdot a)}{\xi(a)} \leq \bar{\xi}(\varphi(r_n - r_m)).$$

Так как $\varphi(r_n - r_m) = \varphi(r_n) - \varphi(r_m) = \bar{r}_n - \bar{r}_m$, то получим

$$\xi((r_n - r_m) \cdot a) \leq \bar{\xi}(\varphi(r_n - r_m)) \cdot \xi(a) = \bar{\xi}(\bar{r}_n - \bar{r}_m) \cdot \xi(a).$$

Поскольку последовательность $\{\bar{r}_n | n = 1, 2, \dots\}$ фундаментальна в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$, то

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \bar{\xi}(\bar{r}_n - \bar{r}_m) = 0. \text{ Тогда из неравенства}$$

$$\xi((r_n - r_m) \cdot a) \leq \bar{\xi}(\varphi(r_n - r_m)) \cdot \xi(a) = \bar{\xi}(\bar{r}_n - \bar{r}_m) \cdot \xi(a) \text{ мы получим}$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \xi((r_n - r_m) \cdot a) = 0. \text{ И так как элемент } a \text{ не является правым обобщенным делителем}$$

нуля в кольце (R, ξ) , то из определения правого обобщенного делителя нуля следует, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \xi(r_n - r_m) = 0. \text{ Значит, каждой фундаментальной последовательности } \{\bar{r}_n | n = 1, 2, \dots\}$$

в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$ соответствует фундаментальная последовательность

$$\{r_n = \varphi^{-1}(\bar{r}_n) | n = 1, 2, \dots\} \text{ в кольце } (R, \xi). \text{ Утверждение I доказано.}$$

Утверждение II теоремы доказывается аналогично утверждению I; утверждение III теоремы следует из I и II. $\square$

Следующая теорема изучает вопрос сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к пополнению псевдонормированных колец.

3.4. Теорема. Пусть (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ и $(\tilde{\bar{R}}, \tilde{\bar{\xi}})$ – пополнения (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$, соответственно, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева и псевдонормированное кольцо (R, ξ) имеет элемент, не являющийся правым обобщенным делителем нуля, то тогда изоморфизм φ можно продолжить до

$$\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\tilde{\bar{R}}, \tilde{\bar{\xi}}) \text{ – полуизометрического изоморфизма слева;}$$

- II. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа и псевдонормированное кольцо (R, ξ) имеет элемент, не являющийся левым обобщенным делителем нуля, то тогда изоморфизм φ можно продолжить до

$$\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\tilde{\bar{R}}, \tilde{\bar{\xi}}) \text{ – полуизометрического изоморфизма справа;}$$

III. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм псевдонормированных колец и псевдонормированное кольцо (R, ξ) имеет элемент, не являющийся обобщенным делителем нуля, то тогда изоморфизм φ можно продолжить до полуизометрического изоморфизма $\tilde{\varphi} : (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$.

Доказательство.

I. Пусть $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, и $a \in (R, \xi)$ – элемент, не являющийся правым обобщенным делителем нуля.

Рассмотрим пополнения $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ и $(\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$ псевдонормированных колец (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$, соответственно. Построим отображение $\tilde{\varphi} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{\tilde{R}}$. Пусть $\tilde{r}$ – произвольный элемент кольца $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$. Тогда по определению пополнения элемент $\tilde{r}$ можно представить в виде $\tilde{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ в кольце $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$, где $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ – некоторая фундаментальная последовательность в кольце (R, ξ) . Из предложения 3.3 следует, что последовательность $\{\varphi(r_n) | n = 1, 2, \dots\}$ является фундаментальной в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$, и значит, имеет предел в кольце $(\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$. Положим

$$\tilde{\varphi}(\tilde{r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n) \text{ в } (\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}}).$$

Покажем, что отображение $\tilde{\varphi} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{\tilde{R}}$ является биективным. Действительно, пусть $\tilde{\tilde{r}} \in (\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$ – произвольный элемент. Согласно определению пополнения элемент $\tilde{\tilde{r}}$ можно представить в виде $\tilde{\tilde{r}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{r}_n$ в кольце $(\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$, где $\{\bar{r}_n | n = 1, 2, \dots\}$ – некоторая фундаментальная последовательность в кольце $(\bar{R}, \bar{\xi})$. Из предложения 3.3 следует, что последовательность $\{\varphi^{-1}(\bar{r}_n) | n = 1, 2, \dots\}$ является фундаментальной в кольце (R, ξ) , и значит, имеет предел в кольце $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$. Поэтому мы можем определить

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\tilde{r}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(\bar{r}_n) \text{ в } (\tilde{R}, \tilde{\xi}).$$

Отображение $\tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\tilde{R}} \rightarrow \tilde{R}$, построенное таким образом, является обратным к отображению $\tilde{\varphi} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{\tilde{R}}$. Следовательно, $\tilde{\varphi} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{\tilde{R}}$ – биекция.

Покажем, что $\tilde{\varphi} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{\tilde{R}}$ – кольцевой изоморфизм. Действительно, Пусть $\tilde{r}, \tilde{q} \in \tilde{R}$ – произвольные элементы. Тогда $\tilde{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ и $\tilde{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ в кольце $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$, где $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ и $\{q_n | n = 1, 2, \dots\}$ – некоторые фундаментальные последовательности в кольце (R, ξ) , и при этом $\tilde{r} + \tilde{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n + q_n)$ и $\tilde{r} \cdot \tilde{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n \cdot q_n)$ в кольце $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ согласно определению пополнения. Поскольку $\varphi : R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, то по определению отображения $\tilde{\varphi}$ мы имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\tilde{r} + \tilde{q}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n + q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(r_n) + \varphi(q_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(q_n) = \tilde{\varphi}(\tilde{r}) + \tilde{\varphi}(\tilde{q}); \\ \tilde{\varphi}(\tilde{r} \cdot \tilde{q}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n \cdot q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(r_n) \cdot \varphi(q_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(q_n) = \tilde{\varphi}(\tilde{r}) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{q}).\end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{\varphi} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{\tilde{R}}$ – кольцевой изоморфизм.

Покажем, что $\tilde{\varphi} : (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$ – продолжение изоморфизма $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$.

Действительно, для элемента $r \in R$, рассматривая его как элемент кольца $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$, возьмем последовательность $\{r_n = r | n = 1, 2, \dots\}$, фундаментальную в кольце (R, ξ) . Тогда по определению отображения $\tilde{\varphi}$ мы имеем

$$\tilde{\varphi}(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r) = \varphi(r).$$

Таким образом, $\tilde{\varphi}(r) = \varphi(r)$ для всех $r \in R$.

Покажем, что $\tilde{\varphi} : (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$ – полуизометрический изоморфизм слева. Пусть

$\tilde{r}, \tilde{q} \in \tilde{R}$ – произвольные элементы. Тогда $\tilde{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ и $\tilde{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ в кольце $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$, где $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ и $\{q_n | n = 1, 2, \dots\}$ – некоторые фундаментальные последовательности в кольце (R, ξ) . При этом в силу определения пополнения имеют место соотношения

$$\tilde{\xi}(\tilde{r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(r_n), \quad \tilde{\xi}(\tilde{q}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(q_n), \quad \tilde{\xi}(\tilde{r} \cdot \tilde{q}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(r_n \cdot q_n) \quad \text{и} \quad \tilde{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}(\varphi(r_n)).$$

Так как $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, то по теореме 2.6 выполнены неравенства

$$\xi(r_n \cdot q_n) \leq \bar{\xi}(\varphi(r_n)) \cdot \xi(q_n) \text{ и } \bar{\xi}(\varphi(r_n)) \leq \xi(r_n).$$

Тогда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\tilde{\xi}(\tilde{r} \cdot \tilde{q}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(r_n \cdot q_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}(\varphi(r_n)) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(q_n) = \tilde{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r})) \cdot \tilde{\xi}(\tilde{q}),$$

$$\tilde{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}(\varphi(r_n)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(r_n) = \tilde{\xi}(\tilde{r}).$$

Таким образом, для всех $\tilde{r}, \tilde{q} \in \tilde{R} \setminus \{0\}$ выполнены неравенства

$$\frac{\tilde{\xi}(\tilde{r} \cdot \tilde{q})}{\tilde{\xi}(\tilde{q})} \leq \tilde{\xi}(\tilde{\varphi}(\tilde{r})) \leq \tilde{\xi}(\tilde{r}).$$

Значит, по теореме 2.6 изоморфизм $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева. Утверждение I доказано.

Утверждения II и III теоремы доказываются аналогично утверждению I. $\square$

3.5. Замечание. Если каждый элемент псевдонормированного кольца (R, ξ) является обобщенным делителем нуля (правым обобщенным делителем нуля, левым обобщенным делителем нуля), и $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа), то тогда отображение

$\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$, определенное соотношением

$$\tilde{\varphi}(\tilde{r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n),$$

где $\tilde{r} \in (\tilde{R}, \tilde{\xi})$ и $\{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ – некоторая фундаментальная последовательность в кольце (R, ξ) , не является биективным отображением псевдонормированного кольца $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ в псевдонормированное кольцо $(\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{\xi}})$.

3.3. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к пределу семейства псевдонорм

Рассмотрим вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к пределу по параметру семейства псевдонорм.

Определим достаточные условия, при которых предел по параметру семейства псевдонорм является псевдонормой.

3.6. Предложение. Пусть R – кольцо, Γ – направленное множество, $\{\xi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ – семейство псевдонорм в кольце R . Если для любого $r \in R$ существует предел $\lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ по направленному множеству Γ , причем $\lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r) \neq 0$ для каждого $r \neq 0$, то функция ξ , заданная как $\xi(r) = \lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ для каждого $r \in R$, является псевдонормой в кольце R .

Доказательство. Покажем, что ξ является псевдонормой в кольце R . Очевидно, что следующие условия определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) выполнены:

- I. $\xi(r) \geq 0$ для любого $r \in R$;
- II. $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;
- III. $\xi(-r) = \xi(r)$ для всех $r \in R$.

Покажем, что для всех $r_1, r_2 \in R$ выполнены условия: $\xi(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2)$ и $\xi(r_1 \cdot r_2) \leq \xi(r_1) \cdot \xi(r_2)$. Из определения предела по направленному множеству (см. [15], 1.1.11) следует, что для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Gamma$ такие, что

$$\begin{aligned} |\xi_\gamma(r_1) - \xi(r_1)| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_1, \\ |\xi_\gamma(r_2) - \xi(r_2)| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_2, \\ |\xi_\gamma(r_1 + r_2) - \xi(r_1 + r_2)| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_3, \\ |\xi_\gamma(r_1 \cdot r_2) - \xi(r_1 \cdot r_2)| &< \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_4. \end{aligned}$$

Поскольку Γ – направленное множество (см. [15], 1.1.1), то существует $\gamma_5 \in \Gamma$ такое, что $\gamma_5 \geq \gamma_1$, $\gamma_5 \geq \gamma_2$, $\gamma_5 \geq \gamma_3$ и $\gamma_5 \geq \gamma_4$. Тогда для всех $\gamma \geq \gamma_5$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \xi(r_1 + r_2) &< \xi_\gamma(r_1 + r_2) + \varepsilon \leq \xi_\gamma(r_1) + \xi_\gamma(r_2) + \varepsilon < \xi(r_1) + \xi(r_2) + 3\varepsilon; \\ \xi(r_1 \cdot r_2) &< \xi_\gamma(r_1 \cdot r_2) + \varepsilon \leq \xi_\gamma(r_1) \cdot \xi_\gamma(r_2) + \varepsilon < (\xi(r_1) + \varepsilon) \cdot (\xi(r_2) + \varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

- IV. $\xi(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2)$ для всех $r_1, r_2 \in R$;
- V. $\xi(r_1 \cdot r_2) \leq \xi(r_1) \cdot \xi(r_2)$ для всех $r_1, r_2 \in R$.

Значит, функция ξ действительно задает псевдонорму в кольце R . $\square$

Следующая теорема изучает вопрос сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к пределу по параметру семейства псевдонорм.

3.7. Теорема. Пусть R и $\bar{R}$ – кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – направленное множество, и выполнены следующие условия:

- 1) в кольце R задано семейство псевдонорм $\{\xi_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ такое, что для любого $r \in R$ существует предел $\lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ по направленному множеству Γ ;
- 2) в кольце R задана функция ξ такая, что $\xi(r) = \lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ для любого $r \in R$;
- 3) в кольце $\bar{R}$ задано семейство псевдонорм $\{\bar{\xi}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ такое, что для любого $\bar{r} \in \bar{R}$ существует предел $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ по направленному множеству Γ , и $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r}) \neq 0$ для каждого $\bar{r} \neq 0$;
- 4) в кольце $\bar{R}$ задана функция $\bar{\xi}$ такая, что $\bar{\xi}(\bar{r}) = \lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ для любого $\bar{r} \in \bar{R}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\varphi: (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм слева для каждого $\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим слева;
- II. Если $\varphi: (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм справа для каждого $\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим справа;
- III. Если $\varphi: (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм для каждого $\gamma \in \Gamma$, то $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим изоморфизмом псевдонормированных колец.

Доказательство. Если $\varphi: (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический изоморфизм слева, полуизометрический изоморфизм справа) для каждого $\gamma \in \Gamma$, то тогда для всех $r \in R$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнено неравенство

$$\bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \leq \xi_\gamma(r) \text{ (см. теоремы 2.6, 2.7, 2.15). Значит, } \lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(r) \neq 0 \text{ для каждого } r \neq 0.$$

Тогда из предложения 3.6 следует, что функции ξ и $\bar{\xi}$ являются псевдонормами в кольцах R и $\bar{R}$, соответственно.

I. Пусть $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм слева для каждого $\gamma \in \Gamma$. Покажем, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева.

Поскольку при каждом $\gamma \in \Gamma$ отображение $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом слева, то по теореме 2.6 для любых $r, q \in R$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнены неравенства

$$\xi_\gamma(r \cdot q) \leq \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \cdot \xi_\gamma(q) \text{ и } \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \leq \xi_\gamma(r).$$

Из определения предела по направленному множеству (см. [15], 1.1.11) следует, что для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Gamma$ такие, что

$$|\xi_\gamma(r) - \xi(r)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_1,$$

$$|\xi_\gamma(q) - \xi(q)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_2,$$

$$|\xi_\gamma(r \cdot q) - \xi(r \cdot q)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_3,$$

$$|\bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) - \bar{\xi}(\varphi(r))| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_4.$$

Поскольку Γ – направленное множество (см. [15], 1.1.1), то существует $\gamma_5 \in \Gamma$ такое, что $\gamma_5 \geq \gamma_i$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда для всех $\gamma \geq \gamma_5$ выполнены неравенства

$$\xi(r \cdot q) < \xi_\gamma(r \cdot q) + \varepsilon \leq \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \cdot \xi_\gamma(q) + \varepsilon < (\bar{\xi}(\varphi(r)) + \varepsilon) \cdot (\xi(q) + \varepsilon) + \varepsilon;$$

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) < \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) + \varepsilon \leq \xi_\gamma(r) + \varepsilon < \xi(r) + 2\varepsilon.$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, для всех $r, q \in R$ получим

$$\xi(r \cdot q) \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \xi(q) \text{ и } \bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r),$$

откуда по теореме 2.6 следует, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева.

II. Пусть $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм справа для каждого $\gamma \in \Gamma$. Покажем, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа.

Так как при каждом $\gamma \in \Gamma$ отображение $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом справа, то по теореме 2.7 для любых $r, q \in R$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнены неравенства

$$\xi_\gamma(q \cdot r) \leq \xi_\gamma(q) \cdot \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \text{ и } \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \leq \xi_\gamma(r).$$

Из определения предела по направленному множеству (см. [15], 1.1.11) следует, что для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Gamma$ такие, что

$$|\xi_\gamma(r) - \xi(r)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_1,$$

$$|\xi_\gamma(q) - \xi(q)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_2,$$

$$|\xi_\gamma(q \cdot r) - \xi(q \cdot r)| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_3,$$

$$|\bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) - \bar{\xi}(\varphi(r))| < \varepsilon \text{ для всех } \gamma \geq \gamma_4.$$

Поскольку Γ – направленное множество (см. [15], 1.1.1), то существует $\gamma_5 \in \Gamma$ такое, что $\gamma_5 \geq \gamma_i$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда для всех $\gamma \geq \gamma_5$ выполнены неравенства

$$\xi(q \cdot r) < \xi_\gamma(q \cdot r) + \varepsilon \leq \xi_\gamma(q) \cdot \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) + \varepsilon < (\xi(q) + \varepsilon) \cdot (\bar{\xi}(\varphi(r)) + \varepsilon) + \varepsilon;$$

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) < \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) + \varepsilon \leq \xi_\gamma(r) + \varepsilon < \xi(r) + 2\varepsilon.$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, для всех $r, q \in R$ получим

$$\xi(q \cdot r) \leq \xi(q) \cdot \bar{\xi}(\varphi(r)) \text{ и } \bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r),$$

откуда по теореме 2.7 следует, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа.

III. Если изоморфизм $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом, то $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом слева и полуизометрическим изоморфизмом справа. Тогда из I и II следует, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева и полуизометрическим изоморфизмом справа. Значит, согласно следствию 2.16 изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом. $\square$

3.8. Следствие. Пусть R и $\bar{R}$ – кольца, $\varphi : R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – направленное множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце R задано семейство псевдонорм $\{\xi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ такое, что для любого $r \in R$ существует предел $\lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ по направленному множеству Γ ;

2) в кольце R задана функция ξ такая, что $\xi(r) = \lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ для любого $r \in R$;

3) в кольце $\bar{R}$ задана псевдонорма $\bar{\xi}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева для каждого $\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим слева;
- II. Если $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа для каждого $\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим справа;
- III. Если $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм для каждого $\gamma \in \Gamma$, то $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим изоморфизмом псевдонормированных колец.

3.9. Следствие. Пусть R и $\bar{R}$ – кольца, $\varphi : R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – направленное множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце R задана псевдонорма ξ ;

2) в кольце $\bar{R}$ задано семейство псевдонорм $\{\bar{\xi}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ такое, что для любого $\bar{r} \in \bar{R}$ существует предел $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ по направленному множеству Γ , и $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r}) \neq 0$ для каждого $\bar{r} \neq 0$;

3) в кольце $\bar{R}$ задана функция $\bar{\xi}$ такая, что $\bar{\xi}(\bar{r}) = \lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ для любого $\bar{r} \in \bar{R}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм слева для каждого $\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим слева;

II. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм справа для каждого

$\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим справа;

III. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм для каждого

$\gamma \in \Gamma$, то $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим изоморфизмом псевдонормированных колец.

3.4. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к супремуму семейства псевдонорм

Рассмотрим вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к супремуму по параметру семейства псевдонорм.

Определим достаточные условия, при которых супремум по параметру семейства псевдонорм является псевдонормой.

3.10. Предложение. Пусть R – кольцо, Γ – некоторое множество, $\{\xi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ – семейство псевдонорм в кольце R . Если для любого $r \in R$ множество $\{\xi_\gamma(r) \mid \gamma \in \Gamma\}$ ограничено сверху, то функция ξ , заданная как $\xi(r) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ для каждого $r \in R$, является псевдонормой в кольце R .

Доказательство. Покажем, что ξ является псевдонормой в кольце R . Очевидно, что следующие условия определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) выполнены:

I. $\xi(r) \geq 0$ для любого $r \in R$;

II. $\xi(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;

III. $\xi(-r) = \xi(r)$ для всех $r \in R$.

Покажем, что для всех $r_1, r_2 \in R$ выполнены условия: $\xi(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2)$ и $\xi(r_1 \cdot r_2) \leq \xi(r_1) \cdot \xi(r_2)$. Так как $\xi(r_1 + r_2) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r_1 + r_2)$ и $\xi(r_1 \cdot r_2) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r_1 \cdot r_2)$, то из определения супремума следует, что для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ такие, что

$$\xi(r_1 + r_2) - \varepsilon < \xi_{\gamma_1}(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1 + r_2),$$

$$\xi(r_1 \cdot r_2) - \varepsilon < \xi_{\gamma_2}(r_1 \cdot r_2) \leq \xi(r_1 \cdot r_2).$$

Тогда будут выполнены неравенства

$$\xi(r_1 + r_2) < \xi_{\gamma_1}(r_1 + r_2) + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_1}(r_1) + \xi_{\gamma_1}(r_2) + \varepsilon \leq \xi(r_1) + \xi(r_2) + \varepsilon;$$

$$\xi(r_1 \cdot r_2) < \xi_{\gamma_2}(r_1 \cdot r_2) + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_2}(r_1) \cdot \xi_{\gamma_2}(r_2) + \varepsilon \leq \xi(r_1) \cdot \xi(r_2) + \varepsilon.$$

Совершая предельный переход в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\text{IV. } \xi(r_1 + r_2) \leq \xi(r_1) + \xi(r_2) \text{ для всех } r_1, r_2 \in R;$$

$$\text{V. } \xi(r_1 \cdot r_2) \leq \xi(r_1) \cdot \xi(r_2) \text{ для всех } r_1, r_2 \in R.$$

Таким образом, функция $\xi(r) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_{\gamma}(r)$ задает псевдонорму в кольце R . $\square$

Следующая теорема изучает вопрос сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к супремуму по параметру семейства псевдонорм.

3.11. Теорема. Пусть R и $\bar{R}$ – кольца, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – некоторое множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце R задано семейство псевдонорм $\{\xi_{\gamma} | \gamma \in \Gamma\}$ такое, что для любого $r \in R$ множество $\{\xi_{\gamma}(r) | \gamma \in \Gamma\}$ ограничено сверху;

2) в кольце R задана функция ξ такая, что $\xi(r) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_{\gamma}(r)$ для любого $r \in R$;

3) в кольце $\bar{R}$ задано семейство псевдонорм $\{\bar{\xi}_{\gamma} | \gamma \in \Gamma\}$;

4) в кольце $\bar{R}$ задана функция $\bar{\xi}$ такая, что $\bar{\xi}(\bar{r}) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_{\gamma}(\bar{r})$ для любого $\bar{r} \in \bar{R}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

I. Если $\varphi: (R, \xi_{\gamma}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_{\gamma})$ – полуизометрический изоморфизм слева для каждого

$\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим слева;

II. Если $\varphi: (R, \xi_{\gamma}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_{\gamma})$ – полуизометрический изоморфизм справа для каждого

$\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим справа;

III. Если $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм для каждого

$\gamma \in \Gamma$, то $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим изоморфизмом псевдонормированных колец.

Доказательство. Если $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический изоморфизм слева, полуизометрический изоморфизм справа) для каждого $\gamma \in \Gamma$, то тогда для всех $r \in R$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнено неравенство

$$\bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \leq \xi_\gamma(r) \quad (\text{см. теоремы 2.6, 2.7, 2.15}). \text{ Значит, любого } \bar{r} \in \bar{R} \text{ множество}$$

$\{\bar{\xi}_\gamma(\bar{r}) \mid \gamma \in \Gamma\}$ ограничено сверху. Тогда из предложения 3.10 следует, что функции ξ и $\bar{\xi}$ являются псевдонормами в кольцах R и $\bar{R}$, соответственно.

I. Пусть $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм слева для каждого $\gamma \in \Gamma$. Покажем, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева.

Поскольку при каждом $\gamma \in \Gamma$ отображение $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом слева, то по теореме 2.6 для любых $r, q \in R$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнены неравенства

$$\xi_\gamma(r \cdot q) \leq \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \cdot \xi_\gamma(q) \text{ и } \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \leq \xi_\gamma(r).$$

Из определения точной верхней грани следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ такие, что

$$\begin{aligned} \xi(r \cdot q) - \varepsilon &< \xi_{\gamma_1}(r \cdot q) \leq \xi(r \cdot q), \\ \bar{\xi}(\varphi(r)) - \varepsilon &< \bar{\xi}_{\gamma_2}(\varphi(r)) \leq \bar{\xi}(\varphi(r)). \end{aligned}$$

Тогда выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \xi(r \cdot q) &< \xi_{\gamma_1}(r \cdot q) + \varepsilon \leq \bar{\xi}_{\gamma_1}(\varphi(r)) \cdot \xi_{\gamma_1}(q) + \varepsilon \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \xi(q) + \varepsilon, \\ \bar{\xi}(\varphi(r)) &< \bar{\xi}_{\gamma_2}(\varphi(r)) + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_2}(r) + \varepsilon \leq \xi(r) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, для всех $r, q \in R$ получим

$$\xi(r \cdot q) \leq \bar{\xi}(\varphi(r)) \cdot \xi(q) \text{ и } \bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r),$$

откуда по теореме 2.6 следует, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева.

II. Пусть $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм справа для каждого $\gamma \in \Gamma$. Покажем, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа.

Поскольку при каждом $\gamma \in \Gamma$ отображение $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом справа, то по теореме 2.7 для любых $r, q \in R$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнены неравенства

$$\xi_\gamma(q \cdot r) \leq \xi_\gamma(q) \cdot \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \text{ и } \bar{\xi}_\gamma(\varphi(r)) \leq \xi_\gamma(r).$$

Из определения точной верхней грани следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ такие, что

$$\xi(q \cdot r) - \varepsilon < \xi_{\gamma_1}(q \cdot r) \leq \xi(q \cdot r),$$

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) - \varepsilon < \bar{\xi}_{\gamma_2}(\varphi(r)) \leq \bar{\xi}(\varphi(r)).$$

Тогда выполнены неравенства

$$\xi(q \cdot r) < \xi_{\gamma_1}(q \cdot r) + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_1}(q) \cdot \bar{\xi}_{\gamma_1}(\varphi(r)) + \varepsilon \leq \xi(q) \cdot \bar{\xi}(\varphi(r)) + \varepsilon,$$

$$\bar{\xi}(\varphi(r)) < \bar{\xi}_{\gamma_2}(\varphi(r)) + \varepsilon \leq \xi_{\gamma_2}(r) + \varepsilon \leq \xi(r) + \varepsilon.$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$, для всех $r, q \in R$ получим

$$\xi(q \cdot r) \leq \xi(q) \cdot \bar{\xi}(\varphi(r)) \text{ и } \bar{\xi}(\varphi(r)) \leq \xi(r),$$

откуда по теореме 2.7 следует, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа.

III. Если изоморфизм $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом, то $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ является полуизометрическим изоморфизмом слева и полуизометрическим изоморфизмом справа. Тогда из I и II следует, что $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева и полуизометрическим изоморфизмом справа. Значит, согласно следствию 2.16 изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ является полуизометрическим изоморфизмом. $\square$

3.12. Следствие. Пусть R и $\bar{R}$ – кольца, $\varphi : R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – некоторое множество, и выполнены следующие условия:

1) в кольце R задано семейство псевдонорм $\{\xi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ такое, что для любого $r \in R$ множество $\{\xi_\gamma(r) \mid \gamma \in \Gamma\}$ ограничено сверху;

2) в кольце R задана функция ξ такая, что $\xi(r) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ для любого $r \in R$;

3) в кольце $\bar{R}$ задана псевдонорма $\bar{\xi}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева для каждого $\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим слева;
- II. Если $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа для каждого $\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим справа;
- III. Если $\varphi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм для каждого $\gamma \in \Gamma$, то $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим изоморфизмом псевдонормированных колец.

3.13. Следствие. Пусть R и $\bar{R}$ – кольца, $\varphi : R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, Γ – некоторое множество, и выполнены следующие условия:

- 1) в кольце R задана псевдонорма ξ ;
- 2) в кольце $\bar{R}$ задано семейство псевдонорм $\{\bar{\xi}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$;
- 3) в кольце $\bar{R}$ задана функция $\bar{\xi}$ такая, что $\bar{\xi}(\bar{r}) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$ для любого $\bar{r} \in \bar{R}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм слева для каждого $\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим слева;
- II. Если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм справа для каждого $\gamma \in \Gamma$, то изоморфизм $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим справа;

III. Если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм для каждого

$\gamma \in \Gamma$, то $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим изоморфизмом псевдонормированных колец.

3.5. Сохранение полуизометрического изоморфизма при переходе к конечной прямой сумме псевдонормированных колец

Рассмотрим вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к прямой сумме псевдонормированных колец.

Определим некоторые конструкции вседонормы для прямого произведения псевдонормированных колец.

3.14. Предложение. Пусть (R_k, ξ_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, – псевдонормированные кольца, и

$R = \bigoplus_{k=1}^n R_k = \{r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \mid r_k \in R_k, 1 \leq k \leq n\}$ – прямая сумма колец R_k , $1 \leq k \leq n$. Тогда каждая из функций

$$\zeta_\gamma(r) = \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(r_k))^\gamma \right)^{1/\gamma}, \quad 1 \leq \gamma < \infty,$$

$$\zeta_\infty(r) = \max \{ \xi_k(r_k) \mid 1 \leq k \leq n \}$$

задает псевдонорму в кольце R .

Доказательство. Рассмотрим функцию $\zeta_\gamma(r) = \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(r_k))^\gamma \right)^{1/\gamma}$, $1 < \gamma < \infty$. Пока-

жем, что ζ_γ является псевдонормой в кольце R .

Очевидно, что следующие условия определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12) выполнены:

I. $\zeta_\gamma(r) \geq 0$ для любого $r \in R$;

II. $\zeta_\gamma(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;

III. $\zeta_\gamma(-r) = \zeta_\gamma(r)$ для всех $r \in R$.

Покажем, что выполнено условие

IV. $\zeta_\gamma(a+b) \leq \zeta_\gamma(a) + \zeta_\gamma(b)$ для всех $a, b \in R$.

Так как ξ_k — псевдонорма в кольце R_k , то для любых $a_k, b_k \in R_k$ имеем

$$\xi_k(a_k + b_k) \leq \xi_k(a_k) + \xi_k(b_k).$$

Из неравенства Минковского (см. [41], §2.11) получим

$$\begin{aligned} \zeta_\gamma(a+b) &= \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k + b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k) + \xi_k(b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} + \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} = \zeta_\gamma(a) + \zeta_\gamma(b). \end{aligned}$$

Покажем, что выполнено условие

$$V. \quad \zeta_\gamma(a \cdot b) \leq \zeta_\gamma(a) \cdot \zeta_\gamma(b) \text{ для всех } a, b \in R.$$

Так как ξ_k — псевдонорма в кольце R_k , то для любых $a_k, b_k \in R_k$ имеем

$$\xi_k(a_k \cdot b_k) \leq \xi_k(a_k) \cdot \xi_k(b_k).$$

Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k \cdot b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k))^\gamma \cdot (\xi_k(b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma}.$$

Так как $\xi_k(b_k) \leq \max\{\xi_1(b_1), \xi_2(b_2), \dots, \xi_n(b_n)\}$, то

$$\left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k))^\gamma \cdot (\xi_k(b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} \cdot \max\{\xi_1(b_1), \xi_2(b_2), \dots, \xi_n(b_n)\}.$$

Из неравенства Иенсена (см. [41], §2.10) следует, что

$$\max\{\xi_1(b_1), \xi_2(b_2), \dots, \xi_n(b_n)\} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma},$$

и мы получим

$$\begin{aligned} \zeta_\gamma(a \cdot b) &= \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k \cdot b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k))^\gamma \cdot (\xi_k(b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} \cdot \max\{\xi_1(b_1), \xi_2(b_2), \dots, \xi_n(b_n)\} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(b_k))^\gamma \right)^{1/\gamma} = \zeta_\gamma(a) \cdot \zeta_\gamma(b). \end{aligned}$$

Значит, функция ζ_γ действительно задаёт псевдонорму в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ для каж-

дого $\gamma \in (1, +\infty)$.

Рассмотрим $\zeta_1(r) = \sum_{k=1}^n \xi_k(r_k)$. Из неравенства Иенсена (см. [41], §2.10) следует, что

$\zeta_1(r) = \sup_{\gamma > 1} \zeta_\gamma(r)$ для всех $r \in R$. Так как функции ζ_γ являются псевдонормами в кольце

$R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ для всех $\gamma \in (1, +\infty)$, то из предложения 3.10 следует, что функция ζ_1 также за-

даёт псевдонорму в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$.

Рассмотрим $\zeta_\infty(r) = \max\{\xi_k(r_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$. Из неравенства Иенсена (см. [41], §2.10)

следует, что $\zeta_\infty(r) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \zeta_\gamma(r)$ для всех $r \in R$. Так как функции ζ_γ являются псевдо-

нормами в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ для всех $\gamma \in (1, +\infty)$, то из предложения 3.6 следует, что

функция ζ_∞ также задаёт псевдонорму в кольце $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$.

Таким образом, каждая из функций ζ_γ , $1 \leq \gamma \leq \infty$, задаёт псевдонорму в кольце

$R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$. $\square$

Следующая теорема изучает вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к прямой сумме псевдонормированных колец.

3.15. Теорема. Пусть (R_k, ξ_k) и $(\bar{R}_k, \bar{\xi}_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, – псевдонормированные

кольца; $\varphi_k : R_k \rightarrow \bar{R}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, – кольцевые изоморфизмы; $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ и $\bar{R} = \bigoplus_{k=1}^n \bar{R}_k$ –

прямые суммы колец; $\Phi : R \rightarrow \bar{R}$ – изоморфизм, действующий по правилу

$$\Phi((r_1, r_2, \dots, r_n)) = (\varphi_1(r_1), \varphi_2(r_2), \dots, \varphi_n(r_n));$$

ζ_γ и $\bar{\zeta}_\gamma$ – псевдонормы колец R и $\bar{R}$, соответственно, где $\zeta_\gamma(r) = \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(r_k))^\gamma \right)^{1/\gamma}$ при

$1 \leq \gamma < \infty$, $\zeta_\infty(r) = \max\{\xi_k(r_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$ при $\gamma = \infty$, $\bar{\zeta}_\gamma(\bar{r}) = \left(\sum_{k=1}^n (\bar{\xi}_k(\bar{r}_k))^{\bar{\gamma}} \right)^{1/\bar{\gamma}}$ при

$1 \leq \bar{\gamma} < \infty$, $\bar{\zeta}_\infty(\bar{r}) = \max\{\bar{\xi}_k(\bar{r}_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$ при $\bar{\gamma} = \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. если $\varphi_k : (R_k, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}_k, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм слева для всех $k = 1, 2, \dots, n$, то $\Phi : (R, \zeta_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ также является полуизометрическим изоморфизмом слева для любых $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$;
- II. если $\varphi_k : (R_k, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}_k, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм справа для всех $k = 1, 2, \dots, n$, то $\Phi : (R, \zeta_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ также является полуизометрическим изоморфизмом справа для любых $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$;
- III. если $\varphi_k : (R_k, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}_k, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм для всех $k = 1, 2, \dots, n$, то $\Phi : (R, \zeta_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ также является полуизометрическим изоморфизмом для любых $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$.

Доказательство.

I. Пусть $\varphi_k : (R_k, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}_k, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм слева для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Проверим выполнение условий теоремы 2.6 для отображения $\Phi : (R, \zeta_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ в случае $1 < \gamma \leq \bar{\gamma} < \infty$.

Так как $\varphi_k : (R_k, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}_k, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм слева, то для любых $a_k, b_k \in R_k$ выполнены неравенства

$$\bar{\xi}_k(\varphi_k(a_k)) \leq \xi_k(a_k) \text{ и } \xi_k(a_k \cdot b_k) \leq \bar{\xi}_k(\varphi_k(a_k)) \cdot \xi_k(b_k).$$

Тогда из этих неравенств с учетом неравенства Иенсена (см. [41], §2.10) для произвольных $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}(\Phi(a)) &= \left(\sum_{k=1}^n (\bar{\xi}_k(\varphi_k(a_k)))^{\bar{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k))^{\bar{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k))^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \zeta_\gamma(a); \\ \zeta_\gamma(a \cdot b) &= \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(a_k \cdot b_k))^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\bar{\xi}_k(\varphi_k(a_k)) \cdot \xi_k(b_k))^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \\ &\leq \max \{ \bar{\xi}_k(\varphi_k(a_k)) \mid 1 \leq k \leq n \} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(b_k))^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n (\bar{\xi}_k(\varphi_k(a_k)))^{\bar{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(b_k))^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}(\Phi(a)) \cdot \zeta_\gamma(b). \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $a, b \in R$ выполнены неравенства

$$\zeta_\gamma(a \cdot b) \leq \bar{\zeta}_\gamma(\Phi(a)) \cdot \zeta_\gamma(b) \text{ и } \bar{\zeta}_\gamma(\Phi(a)) \leq \zeta_\gamma(a).$$

Значит, по теореме 2.6 отображение $\Phi: (R, \zeta_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_\gamma)$ действительно является полуизометрическим изоморфизмом слева при $1 < \gamma \leq \bar{\gamma} < \infty$.

Рассмотрим предельные случаи для γ и $\bar{\gamma}$. Рассуждения проводим на основе неравенства Иенсена (см. [41], §2.10).

Если $\gamma = 1$ и $1 < \bar{\gamma} < \infty$, то $\zeta_1 = \sup_{\gamma > 1} \zeta_\gamma$. Тогда из следствия 3.12 следует, что

$\Phi: (R, \zeta_1) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ – полуизометрический изоморфизм слева.

При $\gamma = \bar{\gamma} = 1$ имеем $\zeta_1 = \sup_{\gamma > 1} \zeta_\gamma$ и $\bar{\zeta}_1 = \sup_{\bar{\gamma} > 1} \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$. Тогда из теоремы 3.11 следует, что

$\Phi: (R, \zeta_1) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_1)$ – полуизометрический изоморфизм слева.

Если $\bar{\gamma} = \infty$ и $1 < \gamma < \infty$, то $\bar{\zeta}_\infty = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow +\infty} \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$. Тогда из следствия 3.9 следует, что

$\Phi: (R, \zeta_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_\infty)$ – полуизометрический изоморфизм слева. Применяя следствие 3.12,

получим, что при $\bar{\gamma} = \infty$ и $\gamma = 1$ отображение $\Phi: (R, \zeta_1) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_\infty)$ также является полуизометрическим изоморфизмом слева.

Если $\gamma = \bar{\gamma} = \infty$, то имеем $\zeta_\infty = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \zeta_\gamma$ и $\bar{\zeta}_\infty = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow +\infty} \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$. Тогда из теоремы 3.7 следует, что $\Phi: (R, \zeta_\infty) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_\infty)$ – полуизометрический изоморфизм слева.

Таким образом, каковы бы ни были $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$, отображение

$\Phi: (R, \zeta_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$, где $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ и $\bar{R} = \bigoplus_{k=1}^n \bar{R}_k$, является полуизометрическим изоморфизмом слева прямых сумм псевдонормированных колец. Утверждение I доказано.

Утверждения II и III теоремы доказываются аналогично утверждению I. $\square$

3.16. Следствие. Пусть R и $\bar{R}$ – кольца, $\phi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, и выполнены следующие условия:

1) в кольце R заданы псевдонормы $\{\xi_k | k = 1, 2, \dots, n\}$;

2) в кольце R заданы функции $\{\zeta_\gamma | 1 \leq \gamma \leq \infty\}$ такие, что $\zeta_\gamma(r) = \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(r))^\gamma \right)^{1/\gamma}$,

$1 \leq \gamma < \infty$, $\zeta_\infty(r) = \max \{ \xi_k(r) | 1 \leq k \leq n \}$ для любого $r \in R$;

3) в кольце $\bar{R}$ заданы псевдонормы $\{\bar{\xi}_k | k = 1, 2, \dots, n\}$;

4) в кольце R заданы функции $\{\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}} \mid 1 \leq \bar{\gamma} \leq \infty\}$ такие, что $\bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}(\bar{r}) = \left(\sum_{k=1}^n (\bar{\xi}_k(\bar{r}))^{\bar{\gamma}} \right)^{1/\bar{\gamma}}$,

$1 \leq \bar{\gamma} < \infty$, $\bar{\zeta}_{\infty}(\bar{r}) = \max\{\bar{\xi}_k(\bar{r}) \mid 1 \leq k \leq n\}$ для любого $\bar{r} \in \bar{R}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

I. Если $\varphi: (R, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм слева для каждого

$k = 1, 2, \dots, n$, то отображение $\varphi: (R, \zeta_{\gamma}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ также является полуизометрическим изоморфизмом слева для всех $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$;

II. Если $\varphi: (R, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм справа для каждого

го $k = 1, 2, \dots, n$, то отображение $\varphi: (R, \zeta_{\gamma}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ также является полуизометрическим изоморфизмом справа для всех $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$;

III. Если $\varphi: (R, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм для каждого

$k = 1, 2, \dots, n$, то отображение $\varphi: (R, \zeta_{\gamma}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ также является полуизометрическим изоморфизмом для всех $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$.

Доказательство. Пусть $\varphi: (R, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический изоморфизм слева, полуизометрический изоморфизм справа) для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Положим $R_k = R$ и $\bar{R}_k = \bar{R}$ для каждого $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть

$$\hat{R} = \bigoplus_{k=1}^n R_k, \quad \hat{\zeta}_{\gamma}((r_1, \dots, r_n)) = \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(r_k))^{\gamma} \right)^{1/\gamma}, \quad \hat{\zeta}_{\infty}((r_1, \dots, r_n)) = \max\{\xi_k(r_k) \mid 1 \leq k \leq n\};$$

$$\hat{\bar{R}} = \bigoplus_{k=1}^n \bar{R}_k, \quad \hat{\bar{\zeta}}_{\bar{\gamma}}((\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)) = \left(\sum_{k=1}^n (\bar{\xi}_k(\bar{r}_k))^{\bar{\gamma}} \right)^{1/\bar{\gamma}}, \quad \hat{\bar{\zeta}}_{\infty}((\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)) = \max\{\bar{\xi}_k(\bar{r}_k) \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Тогда из предложения 3.14 следует, что $\{\hat{\zeta}_{\gamma} \mid 1 \leq \gamma \leq \infty\}$ и $\{\hat{\bar{\zeta}}_{\bar{\gamma}} \mid 1 \leq \bar{\gamma} \leq \infty\}$ являются семействами псевдонорм в кольцах $\hat{R}$ и $\hat{\bar{R}}$, соответственно. По теореме 3.15 отображение

$\hat{\varphi}: (\hat{R}, \hat{\zeta}_{\gamma}) \rightarrow (\hat{\bar{R}}, \hat{\bar{\zeta}}_{\bar{\gamma}})$ такое, что $\hat{\varphi}((r_1, \dots, r_n)) = (\varphi(r_1), \dots, \varphi(r_n))$, также является полу-

изометрическим изоморфизмом (полуизометрическим изоморфизмом слева, полуизометрическим изоморфизмом справа) для всех $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$. Кольца R и $\bar{R}$ можно отождествить с подкольцами $\{(r, r, \dots, r) \mid r \in R_k, 1 \leq k \leq n\}$ и $\{(\bar{r}, \bar{r}, \dots, \bar{r}) \mid \bar{r} \in \bar{R}_k, 1 \leq k \leq n\}$ колец

$\hat{R}$ и $\hat{\bar{R}}$, соответственно. Тогда $\hat{\zeta}_\gamma|_R = \zeta_\gamma$, $\hat{\zeta}_{\bar{\gamma}}|_{\bar{R}} = \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}}$, $\hat{\varphi}|_R = \varphi$. Следовательно, по теореме 3.1 изоморфизм $\varphi: (R, \zeta_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\zeta}_{\bar{\gamma}})$ является полуизометрическим (полуизометрическим слева, полуизометрическим справа) для всех $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$. $\square$

3.6. Полуизометрический изоморфизм в кольце матриц

Рассмотрим вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к кольцу матриц.

Пусть (R, ξ) – псевдонормированное кольцо, и R_n – кольцо матриц $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ порядка $n \times n$ над кольцом R с естественными операциями сложения и умножения. Если $\{\eta_{\xi,\gamma,\sigma} | 0 < \gamma, \sigma \leq \infty\}$ – семейство функций в кольце R_n таких, что

$$\begin{aligned}\eta_{\xi,\gamma,\sigma}(A) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 < \gamma, \sigma < \infty, \\ \eta_{\xi,\gamma,\infty}(A) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\max_{1 \leq j \leq n} \xi(a_{ij}) \right)^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 < \gamma < \infty, \quad \sigma = \infty, \\ \eta_{\xi,\infty,\sigma}(A) &= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \gamma = \infty, \quad 0 < \sigma < \infty, \\ \eta_{\xi,\infty,\infty}(A) &= \max_{1 \leq i, j \leq n} \xi(a_{ij}), \quad \gamma = \sigma = \infty,\end{aligned}$$

то определим достаточные условия, при которых функции $\eta_{\xi,\gamma,\sigma}$ являются псевдонормами в кольце R_n . Справедлива следующая теорема.

3.17. Теорема. Пусть (R, ξ) – псевдонормированное кольцо и R_n – кольцо матриц порядка $n \times n$ над кольцом R с естественными операциями сложения и умножения. Тогда для всех γ и σ таких, что $1 \leq \gamma, \sigma \leq \infty$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$ функции $\eta_{\xi,\gamma,\sigma}$ являются псевдонормами в кольце матриц R_n .

Доказательство. Обозначим $\eta_{\xi, \gamma, \sigma} = \eta$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$. Проверим вы-

полнение условий определения псевдонормы для функции η при $1 < \gamma, \sigma < \infty$, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$.

$$\text{I. } \eta(-A) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(-a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \eta(A) \geq 0 \text{ для всех}$$

$A \in R_n$, так как $\xi(a_{ij}) \geq 0$ для всех $a_{ij} \in R$.

$$\text{II. } \eta(A) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \xi(a_{ij}) = 0 \text{ для всех}$$

$1 \leq i, j \leq n$, и, поскольку ξ – псевдонорма в кольце R , то это равносильно тому, что $a_{ij} = 0$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, т.е. $A = 0$.

$$\text{III. Рассмотрим } \eta(A+B) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij} + b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Так как ξ – псевдонорма в кольце R (см. [14], определение 1.1.12), то

$$\xi(a_{ij} + b_{ij}) \leq \xi(a_{ij}) + \xi(b_{ij}) \text{ для всех } 1 \leq i, j \leq n.$$

Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij} + b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}) + \xi(b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Применяя по параметру σ неравенство Минковского (см. [41], §2.11) при $\alpha_j = \xi(a_{ij})$ и

$\beta_j = \xi(b_{ij})$, получим

$$\left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}) + \xi(b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}) + \xi(b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right)^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Применим по параметру γ неравенство Минковского (см. [41], §2.11) при

$$\alpha_i = \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \text{ и } \beta_i = \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right)^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \\ & \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $A, B \in R_n$

$$\eta(A+B) \leq \eta(A) + \eta(B).$$

$$\text{IV. Рассмотрим } \eta(A \cdot B) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Поскольку $\xi(a+b) \leq \xi(a) + \xi(b)$ и $\xi(a \cdot b) \leq \xi(a) \cdot \xi(b)$, то

$$\xi \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \leq \sum_{k=1}^n \xi(a_{ik} \cdot b_{kj}) \leq \sum_{k=1}^n \xi(a_{ik}) \xi(b_{kj}).$$

Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(a_{ik}) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Применяя по параметру σ неравенство Минковского (см. [41], §2.11), имеем

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(a_{ik}) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ik}) \xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} = \\ & = \sum_{k=1}^n \left(\xi(a_{ik}) \cdot \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right). \end{aligned}$$

Применим по параметру σ неравенство Гёльдера (см. [41], §2.8) и получим

$$\sum_{k=1}^n \left(\xi(a_{ik}) \cdot \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right) \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi(a_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}},$$

где σ^* – сопряженное число к σ (см. [41], §2.8). Тогда

$$\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(a_{ik}) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi(a_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}},$$

$$\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(a_{ik}) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi(a_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\sigma^*}},$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(a_{ik}) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (\xi(a_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\sigma^*}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(a_{ik}) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (\xi(a_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}}.$$

Мы получили неравенство

$$\begin{aligned} \eta(A \cdot B) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(a_{ik}) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (\xi(a_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}} = \eta(A) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$ и $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^*} = 1$, то $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^*}$, откуда имеем $\frac{1}{\gamma} \geq \frac{1}{\sigma^*}$, т.е.

$\gamma \leq \sigma^*$. В силу неравенства Иенсена (см. [41], §2.10) из неравенства $\gamma \leq \sigma^*$ следует, что

$$\left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \eta(B).$$

Таким образом,

$$\eta(A \cdot B) \leq \eta(A) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(b_{kj}))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}} \leq \eta(A) \cdot \eta(B).$$

Мы получили, что при $1 < \gamma, \sigma < \infty$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$ функция $\eta = \eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ удовлетворяет всем условиям определения псевдонормы (см. [14], 1.1.12). Следовательно, функция $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ действительно задает псевдонорму в кольце матриц R_n при $1 < \gamma, \sigma < \infty$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$.

Так как функции $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ являются псевдонормами в кольце R_n для всех $\gamma > 1$ таких, что $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$ при фиксированном $\sigma \in (1, +\infty)$, то согласно предложения 3.10 функция $\eta_{\xi, 1, \sigma} = \sup_{1 < \gamma \leq \frac{\sigma}{\sigma-1}} \eta_{\xi, \gamma, \sigma} = \sup_{\gamma > 1} \eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ задает псевдонорму в кольце R_n для всех $1 < \sigma < \infty$. Отсюда в силу предложений 3.10 и 3.6 следует, что функции $\eta_{\xi, 1, 1} = \sup_{\sigma > 1} \eta_{\xi, 1, \sigma} = \sup_{\gamma, \sigma > 1} \eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ и $\eta_{\xi, 1, \infty} = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \eta_{\xi, 1, \sigma}$ также являются псевдонормами в кольце R_n .

Поскольку функции $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ являются псевдонормами в кольце R_n , для всех $\sigma > 1$ таких, что $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$ при фиксированном $\gamma \in (1, +\infty)$, то согласно предложения 3.10 функция $\eta_{\xi, \gamma, 1} = \sup_{1 < \sigma \leq \frac{\gamma}{\gamma-1}} \eta_{\xi, \gamma, \sigma} = \sup_{\sigma > 1} \eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ задает псевдонорму в кольце R_n для всех $1 < \gamma < \infty$. И в силу предложения 3.6 функция $\eta_{\xi, \infty, 1} = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \eta_{\xi, \gamma, 1}$ также является псевдонормой в кольце R_n .

Таким образом, функция $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ задает псевдонорму в кольце матриц R_n при всех $1 \leq \gamma, \sigma \leq \infty$ таких, что $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$. $\square$

3.18. Замечание. Условия $\gamma, \sigma \geq 1$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$ являются существенными. Рассмотрим примеры, которые показывают, что если эти условия не выполнены, то функция $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ не является псевдонормой в кольце R_n .

Пусть R – кольцо действительных чисел и $\xi(r) = |r|$ – норма в кольце R ;

пусть R_2 – кольцо действительных матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\eta = \eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ в кольце R_2 ,

$\gamma, \sigma > 0$.

1. Если $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} < 1$, то

$$\eta(A \cdot B) = 2^{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} + 1} > 2^{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma}} \cdot 2^{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma}} = \eta(A) \cdot \eta(B).$$

2. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\gamma = \infty, \sigma > 1$, то

$$\eta(A \cdot B) = 2^{1 + \frac{1}{\sigma}} > 2^{\frac{1}{\sigma}} \cdot 2^{\frac{1}{\sigma}} = \eta(A) \cdot \eta(B).$$

3. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\sigma = \infty, \gamma > 1$, то

$$\eta(A \cdot B) = 2^{\frac{1}{\gamma} + 1} > 2^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 2^{\frac{1}{\gamma}} = \eta(A) \cdot \eta(B).$$

4. Если $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\gamma = \sigma = \infty$, то $\eta(A \cdot B) = 2 > 1 \cdot 1 = \eta(A) \cdot \eta(B)$.

5. Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\sigma < 1$, то

$$\eta(A + B) = 2^{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma}} > 2^{\frac{1}{\gamma}} + 2^{\frac{1}{\sigma}} = \eta(A) + \eta(B).$$

6. Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\gamma < 1$, то

$$\eta(A + B) = 2^{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma}} > 2^{\frac{1}{\gamma}} + 2^{\frac{1}{\sigma}} = \eta(A) + \eta(B).$$

7. Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\gamma = \infty, \sigma < 1$, то

$$\eta(A \cdot B) = 2^{\frac{1}{\sigma}} > 1 + 1 = \eta(A) + \eta(B).$$

8. Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\sigma = \infty, \gamma < 1$, то

$$\eta(A + B) = 2^{\frac{1}{\gamma}} > 1 + 1 = \eta(A) + \eta(B).$$

Мы видим, что функция $\eta = \eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ не удовлетворяет определению псевдонормы (см. [14], определение 1.1.12). Следовательно, $\eta = \eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ не является псевдонормой в кольце R_2 , если условия $\gamma, \sigma \geq 1$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$ не выполнены.

Найдем условия, при которых сохраняется полуизометрический изоморфизм (полуизометрический изоморфизм слева, полуизометрический изоморфизм справа) в кольце R_n . Справедлива следующая теорема.

3.19. Теорема. Пусть (R, ξ) , $(\bar{R}, \bar{\xi})$ – псевдонормированные кольца, R_n – кольцо матриц над кольцом R , $\bar{R}_n$ – кольцо матриц над кольцом $\bar{R}$, $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ – кольцевой изоморфизм, $\Phi: R_n \rightarrow \bar{R}_n$ – изоморфизм, действующий по правилу

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \dots & \varphi(a_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(a_{n1}) & \dots & \varphi(a_{nn}) \end{pmatrix},$$

$\eta = \eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ – псевдонорма в кольце R_n , $\bar{\eta} = \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, \bar{\sigma}}$ – псевдонорма в кольце $\bar{R}_n$ (см. 3.17), где $1 \leq \gamma, \sigma, \bar{\gamma}, \bar{\sigma} \leq \infty$, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$, $\frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \geq 1$ (см. 3.17). Тогда справедливы следующие утверждения:

- I. если $\bar{\gamma} = \gamma$, $\bar{\sigma} \geq \sigma$ и $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, то $\Phi: (R_n, \eta) \rightarrow (\bar{R}_n, \bar{\eta})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева;
- II. если $\bar{\sigma} = \sigma$, $\bar{\gamma} \geq \gamma$ и $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа, то $\Phi: (R_n, \eta) \rightarrow (\bar{R}_n, \bar{\eta})$ является полуизометрическим изоморфизмом справа;
- III. если $\bar{\gamma} = \gamma$, $\bar{\sigma} = \sigma$ и $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм, то $\Phi: (R_n, \eta) \rightarrow (\bar{R}_n, \bar{\eta})$ является полуизометрическим изоморфизмом.

Доказательство.

I. Пусть $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм слева, $1 < \gamma = \bar{\gamma} < \infty$, $1 < \sigma \leq \bar{\sigma} < \infty$ и $1 \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\bar{\sigma}}$. Проверим выполнение условий теоремы 2.6 для изоморфизма $\Phi: (R_n, \eta) \rightarrow (\bar{R}_n, \bar{\eta})$.

Для любых $A, B \in R_n$ докажем неравенство

$$\eta(A \cdot B) \leq \bar{\eta}(\Phi(A)) \cdot \eta(B).$$

Рассмотрим

$$\eta(A \cdot B) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Поскольку $\xi(a+b) \leq \xi(a) + \xi(b)$ и $\xi(a \cdot b) \leq \bar{\xi}(\varphi(a)) \cdot \xi(b)$, то

$$\xi \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \leq \sum_{k=1}^n \xi(a_{ik} \cdot b_{kj}) \leq \sum_{k=1}^n \bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \xi(b_{kj}),$$

и мы получим

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Применяя по параметру σ неравенство Минковского (см. [41], §2.11), имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} &\leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right). \end{aligned}$$

Применим по параметру $\bar{\sigma}$ неравенство Гёльдера (см. [41], §2.8) и получим

$$\sum_{k=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right) \leq \left(\sum_{k=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \right)^{\bar{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\sigma}^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^*}},$$

где $\bar{\sigma}^*$ – сопряженное число к $\bar{\sigma}$ (см. [41], §2.8). Тогда

$$\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \right)^{\bar{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\sigma}^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^*}},$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} &\leq \left(\sum_{k=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \right)^{\bar{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}^*}}, \\ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \right)^{\bar{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}^*}}, \\ \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \right)^{\bar{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^*}}. \end{aligned}$$

Мы получили неравенство

$$\begin{aligned} \eta(A \cdot B) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ik})) \right)^{\bar{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^*}} = \bar{\eta}(\Phi(A)) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^*}}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \geq 1$ и $\frac{1}{\bar{\sigma}} + \frac{1}{\bar{\sigma}^*} = 1$, то $\gamma \leq \bar{\sigma}^*$. В силу неравенства Иенсена (см. [41],

§2.10) из неравенства $\gamma \leq \bar{\sigma}^*$ следует, что

$$\left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^*}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \eta(B).$$

Таким образом,

$$\eta(A \cdot B) \leq \bar{\eta}(\Phi(A)) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{kj}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^*}} \leq \bar{\eta}(\Phi(A)) \cdot \eta(B).$$

Для любых $A \in R_n$ докажем неравенство

$$\bar{\eta}(\Phi(A)) \leq \eta(A).$$

Так как $\bar{\xi}(\varphi(a_{ij})) \leq \xi(a_{ij})$ и $\bar{\sigma} \geq \sigma$, то в силу неравенства Иенсена (см. [41], §2.10) имеем

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(\Phi(A)) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ij})) \right)^{\bar{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(a_{ij}) \right)^{\bar{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\bar{\sigma}}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(a_{ij}) \right)^{\sigma} \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \eta(A).\end{aligned}$$

Таким образом, для всех $A, B \in R_n$ выполнены неравенства $\eta(A \cdot B) \leq \bar{\eta}(\Phi(A)) \cdot \eta(B)$ и $\bar{\eta}(\Phi(A)) \leq \eta(A)$. Значит, по теореме 2.6 изоморфизм $\Phi: (R_n, \eta) \rightarrow (\bar{R}_n, \bar{\eta})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева при $1 < \gamma = \bar{\gamma} < \infty$, $1 < \sigma \leq \bar{\sigma} < \infty$ и

$$1 \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma}.$$

Рассмотрим предельные случаи параметров γ , σ и $\bar{\sigma}$.

Так как $\Phi: (R_n, \eta_{\xi, \gamma, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \gamma, \bar{\sigma}})$ является полуизометрическим изоморфизмом

слева при фиксированных $1 < \sigma \leq \bar{\sigma} < \infty$ для всех $\gamma > 1$ таких, что $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \geq 1$, и

$$\eta_{\xi, 1, \sigma} = \sup_{1 < \gamma \leq \frac{\sigma}{\sigma-1}} \eta_{\xi, \gamma, \sigma}, \quad \eta_{\bar{\xi}, 1, \bar{\sigma}} = \sup_{1 < \gamma \leq \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}-1}} \eta_{\bar{\xi}, \gamma, \bar{\sigma}},$$

то из теоремы 3.11 следует, что

$\Phi: (R_n, \eta_{\xi, 1, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, \bar{\sigma}})$ – полуизометрический изоморфизм слева для всех $1 < \sigma \leq \bar{\sigma} < \infty$.

Поскольку $\eta_{\xi, 1, 1} = \sup_{\sigma > 1} \eta_{\xi, 1, \sigma}$, то в силу следствия 3.12 изоморфизм

$\Phi: (R_n, \eta_{\xi, 1, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, \bar{\sigma}})$ является полуизометрическим слева для всех $1 < \bar{\sigma} < \infty$. И

так как $\eta_{\bar{\xi}, 1, 1} = \sup_{\bar{\sigma} > 1} \eta_{\bar{\xi}, 1, \bar{\sigma}}$, $\eta_{\bar{\xi}, 1, \infty} = \lim_{\bar{\sigma} \rightarrow +\infty} \eta_{\bar{\xi}, 1, \bar{\sigma}}$, то каждое из отображений

$\Phi: (R_n, \eta_{\xi, 1, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, 1})$ и $\Phi: (R_n, \eta_{\xi, 1, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, \infty})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева согласно следствиям 3.13 и 3.9, соответственно.

Применяя аналогичные рассуждения, получаем, что полуизометрическими изоморфизмами слева являются $\Phi: (R_n, \eta_{\xi, 1, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, \infty})$ для всех $1 < \sigma < \infty$,

$$\Phi : (R_n, \eta_{\xi, 1, \infty}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, \infty}), \quad \Phi : (R_n, \eta_{\xi, \gamma, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \gamma, \bar{\sigma}}) \text{ для всех } \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \geq 1,$$

$$\Phi : (R_n, \eta_{\xi, \gamma, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \gamma, 1}) \text{ для всех } 1 < \gamma < \infty \text{ и } \Phi : (R_n, \eta_{\xi, \infty, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \infty, 1}).$$

Таким образом, изоморфизм $\Phi : (R_n, \eta_{\xi, \gamma, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \gamma, \bar{\sigma}})$ является полуизометрическим слева для всех $1 \leq \gamma = \bar{\gamma} \leq \infty$ и $1 \leq \sigma \leq \bar{\sigma} \leq \infty$ таких, что $1 \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma}$. Утверждение I доказано.

II. Пусть $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм справа,

$1 < \gamma \leq \bar{\gamma} < \infty$, $1 < \sigma = \bar{\sigma} < \infty$ и $1 \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{1}{\sigma}$. Проверим выполнение условий теоремы 2.7 для изоморфизма $\Phi : (R_n, \eta) \rightarrow (\bar{R}_n, \bar{\eta})$.

Для любых $A, B \in R_n$ докажем неравенство

$$\eta(B \cdot A) \leq \bar{\eta}(\Phi(A)) \cdot \eta(B).$$

Так как $\xi\left(\sum_{k=1}^n b_{ik} \cdot a_{kj}\right) \leq \sum_{k=1}^n \xi(b_{ik} \cdot a_{kj}) \leq \sum_{k=1}^n \xi(b_{ik}) \bar{\xi}(\varphi(a_{kj}))$, то

$$\eta(B \cdot A) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi\left(\sum_{k=1}^n b_{ik} \cdot a_{kj}\right) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(b_{ik}) \bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Применяя по параметру σ неравенство Минковского (см. [41], §2.11), имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(b_{ik}) \bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} &\leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(b_{ik}) \bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\xi(b_{ik}) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right). \end{aligned}$$

Применим по параметру σ неравенство Гёльдера (см. [41], §2.8) и получим

$$\sum_{k=1}^n \left(\xi(b_{ik}) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right) \leq \left(\sum_{k=1}^n \left(\xi(b_{ik}) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}},$$

где σ^* – сопряженное число к σ (см. [41], §2.8). Тогда

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(b_{ik}) \bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} &\leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi(b_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}}, \\
\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(b_{ik}) \bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} &\leq \left(\sum_{k=1}^n (\xi(b_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\sigma^*}}, \\
\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(b_{ik}) \bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (\xi(b_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma}{\sigma^*}}, \\
\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(b_{ik}) \bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (\xi(b_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}}.
\end{aligned}$$

Мы получили неравенство

$$\begin{aligned}
\eta(B \cdot A) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi \left(\sum_{k=1}^n b_{ik} \cdot a_{kj} \right) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \xi(b_{ik}) \bar{\xi}(\varphi(a_{kj})) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (\xi(b_{ik}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}} = \eta(B) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}}.
\end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$ и $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^*} = 1$, то $\bar{\gamma} \leq \sigma^*$. В силу неравенства Иенсена (см. [41],

§2.10) из неравенства $\bar{\gamma} \leq \sigma^*$ следует, что

$$\left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})))^\sigma \right)^{\frac{\bar{\gamma}}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} = \bar{\eta}(\Phi(A)).$$

Таким образом,

$$\eta(B \cdot A) \leq \eta(B) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\bar{\xi}(\varphi(a_{kj})))^\sigma \right)^{\frac{\sigma^*}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma^*}} \leq \eta(B) \cdot \bar{\eta}(\Phi(A)).$$

Для любых $A \in R_n$ докажем неравенство

$$\bar{\eta}(\Phi(A)) \leq \eta(A).$$

Так как $\bar{\xi}(\varphi(a_{ij})) \leq \xi(a_{ij})$ и $\bar{\gamma} \geq \gamma$, то в силу неравенства Йенсена (см. [41], §2.10) имеем

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\Phi(A)) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\bar{\xi}(\varphi(a_{ij})) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\gamma}}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(a_{ij}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\bar{\gamma}}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\xi(a_{ij}) \right)^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \eta(A). \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $A, B \in R_n$ выполнены неравенства $\eta(B \cdot A) \leq \bar{\eta}(\Phi(A)) \cdot \eta(B)$

и $\bar{\eta}(\Phi(A)) \leq \eta(A)$. Значит, по теореме 2.7 изоморфизм $\Phi : (R_n, \eta) \rightarrow (\bar{R}_n, \bar{\eta})$ является изометрическим изоморфизмом справа при $1 < \gamma \leq \bar{\gamma} < \infty$, $1 < \sigma = \bar{\sigma} < \infty$ и

$$1 \leq \frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma}.$$

Рассмотрим предельные случаи параметров γ , $\bar{\gamma}$ и σ .

Так как $\Phi : (R_n, \eta_{\xi, \gamma, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, \bar{\sigma}})$ является полуизометрическим изоморфизмом

справа при фиксированных $1 < \gamma \leq \bar{\gamma} < \infty$ для всех $\sigma > 1$ таких, что $\frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$, и

$$\eta_{\xi, \gamma, 1} = \sup_{1 < \sigma \leq \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}} \eta_{\xi, \gamma, \sigma}, \quad \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, 1} = \sup_{1 < \sigma \leq \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}} \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, \sigma},$$

то из теоремы 3.11 следует, что

$$\Phi : (R_n, \eta_{\xi, \gamma, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, 1}) \text{ — полуизометрический изоморфизм справа для всех}$$

$$1 < \gamma \leq \bar{\gamma} < \infty.$$

Поскольку $\eta_{\xi, 1, 1} = \sup_{\gamma > 1} \eta_{\xi, \gamma, 1}$, то в силу следствия 3.12 изоморфизм

$$\Phi : (R_n, \eta_{\xi, 1, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, 1}) \text{ является полуизометрическим справа для всех } 1 < \bar{\gamma} < \infty. \text{ И}$$

так как $\eta_{\bar{\xi}, 1, 1} = \sup_{\bar{\gamma} > 1} \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, 1}$, $\eta_{\bar{\xi}, \infty, 1} = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow +\infty} \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, 1}$, то согласно следствиям 3.13 и 3.9 каждое из

отображений $\Phi : (R_n, \eta_{\xi, 1, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, 1})$ и $\Phi : (R_n, \eta_{\xi, 1, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \infty, 1})$, соответственно,

является полуизометрическим изоморфизмом справа.

Применяя аналогичные рассуждения, получаем, что полуизометрическими изоморфизмами справа являются $\Phi : (R_n, \eta_{\xi, \gamma, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, \infty})$ для всех $1 < \gamma < \infty$,

$$\Phi : (R_n, \eta_{\xi, \infty, 1}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \infty, 1}), \quad \Phi : (R_n, \eta_{\xi, 1, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, \sigma}) \text{ для всех } \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1,$$

$$\Phi : (R_n, \eta_{\xi, 1, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, \sigma}) \text{ для всех } 1 < \sigma < \infty \text{ и } \Phi : (R_n, \eta_{\xi, 1, \infty}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, 1, \infty}).$$

Таким образом, изоморфизм $\Phi : (R_n, \eta_{\xi, \gamma, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, \sigma})$ является полуизометрическим справа для всех $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$ и $1 \leq \sigma = \bar{\sigma} \leq \infty$ таких, что $1 \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{1}{\bar{\sigma}}$. Утверждение II доказано.

III. Пусть $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм, $1 < \gamma = \bar{\gamma} < \infty$,

$1 < \sigma = \bar{\sigma} < \infty$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$. Тогда φ является полуизометрическим изоморфизмом слева и

полуизометрическим изоморфизмом справа. Из I и II следует, что $\Phi : (R_n, \eta) \rightarrow (\bar{R}_n, \bar{\eta})$ является полуизометрическим изоморфизмом слева и полуизометрическим изоморфизмом справа. Значит, Φ – полуизометрический изоморфизм согласно следствию 2.16. $\square$

3.7. Выводы по главе 3

1. Изучен вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к подкольцам. Показано, что:
 - сужение полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) на подкольцо также является полуизометрическим изоморфизмом (полуизометрическим слева, полуизометрическим справа).
2. Изучен вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при взятии факторколец. Показано, что:
 - полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ при переходе к факторкольцам $(R, \xi) / \varphi^{-1}(\bar{J}) = (\hat{R}, \hat{\xi})$ и $(\bar{R}, \bar{\xi}) / \bar{J} = (\tilde{R}, \tilde{\xi})$, где $\bar{J}$ – замкнутый идеал в $(\bar{R}, \bar{\xi})$,

индуцирует полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) $\Phi: (\hat{R}, \hat{\xi}) \rightarrow (\tilde{R}, \tilde{\xi})$, где $\Phi(r + \varphi^{-1}(\bar{J})) = \varphi(r) + \bar{J}$.

3. Изучен вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к пополнениям псевдонормированных колец. Показано, что:
 - если $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа), и (R, ξ) имеет элемент, не являющийся обобщенным делителем нуля (правым обобщенным делителем нуля, левым обобщенным делителем нуля), то изоморфизм φ можно продолжить до полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) $\tilde{\varphi}: (\tilde{R}, \tilde{\xi}) \rightarrow (\tilde{\bar{R}}, \tilde{\bar{\xi}})$, где $(\tilde{R}, \tilde{\xi})$ и $(\tilde{\bar{R}}, \tilde{\bar{\xi}})$ – пополнения псевдонормированных колец (R, ξ) и $(\bar{R}, \bar{\xi})$, соответственно.
4. Изучен вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к пределу по параметру семейства псевдонорм. Показано, что:
 - если Γ – направленное множество, $\varphi: (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) для каждого $\gamma \in \Gamma$, существуют пределы $\lim_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r) = \xi(r)$, $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r}) = \bar{\xi}(\bar{r})$, причем $\lim_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r}) \neq 0$ для каждого $\bar{r} \neq 0$, то $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также является полуизометрическим изоморфизмом (полуизометрическим слева, полуизометрическим справа).
5. Изучен вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к супремуму по параметру семейства псевдонорм. Показано, что:
 - если $\varphi: (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_\gamma)$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) для каждого $\gamma \in \Gamma$, и множество $\{\xi_\gamma(r) | \gamma \in \Gamma\}$ ограничено сверху для любого $r \in R$, то $\varphi: (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ также

является полуизометрическим изоморфизмом (полуизометрическим слева, полуизометрическим справа), где $\xi(r) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma(r)$ и $\bar{\xi}(\bar{r}) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \bar{\xi}_\gamma(\bar{r})$.

6. Изучен вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к прямой сумме псевдонормированных колец. Показано, что:

– если $\varphi_k : (R_k, \xi_k) \rightarrow (\bar{R}_k, \bar{\xi}_k)$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) для всех $k = 1, 2, \dots, n$, $R = \bigoplus_{k=1}^n R_k$ и

$\bar{R} = \bigoplus_{k=1}^n \bar{R}_k$ – прямые суммы колец, $\xi_\gamma(r) = \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k(r_k))^\gamma \right)^{1/\gamma}$, $\xi_\infty(r) = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k(r_k)$,

$\bar{\xi}_{\bar{\gamma}}(\bar{r}) = \left(\sum_{k=1}^n (\bar{\xi}_k(\bar{r}_k))^{\bar{\gamma}} \right)^{1/\bar{\gamma}}$, $\bar{\xi}_\infty(\bar{r}) = \max_{1 \leq k \leq n} \bar{\xi}_k(\bar{r}_k)$, то для любых $1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty$ ото-

бражение $\Phi : (R, \xi_\gamma) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi}_{\bar{\gamma}})$ является полуизометрическим изоморфизмом (полуизометрическим слева, полуизометрическим справа), где

$$\Phi((r_1, r_2, \dots, r_n)) = (\varphi_1(r_1), \varphi_2(r_2), \dots, \varphi_n(r_n)).$$

7. Изучены некоторые конструкции псевдонормы в кольце матриц R_n над псевдонормированным кольцом (R, ξ) на основе семейства функций $\{\eta_{\xi, \gamma, \sigma} \mid 0 < \gamma, \sigma \leq \infty\}$, где

$$\eta_{\xi, \gamma, \sigma}(A) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{\gamma}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 < \gamma, \sigma < \infty,$$

$$\eta_{\xi, \gamma, \infty}(A) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\max_{1 \leq j \leq n} \xi(a_{ij}) \right)^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 < \gamma < \infty, \quad \sigma = \infty,$$

$$\eta_{\xi, \infty, \sigma}(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n (\xi(a_{ij}))^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \gamma = \infty, \quad 0 < \sigma < \infty,$$

$$\eta_{\xi, \infty, \infty}(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} \xi(a_{ij}), \quad \gamma = \sigma = \infty.$$

Определены достаточные условия, при которых функции $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ являются псевдонормами в кольце R_n . Показано, что:

- если $\gamma, \sigma \geq 1$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$, то функция $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ задает псевдонорму в кольце матриц

R_n ;

- в кольце матриц над кольцом действительных чисел при нарушении условий

$\gamma, \sigma \geq 1$ и $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$ функции $\eta_{\xi, \gamma, \sigma}$ не являются псевдонормами.

8. Изучен вопрос о сохранении полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к кольцу матриц. Показано, что:

- если $\varphi : (R, \xi) \rightarrow (\bar{R}, \bar{\xi})$ – полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа), $\Phi : R_n \rightarrow \bar{R}_n$ – изоморфизм, действующий по правилу $\Phi(A) = \left(\varphi(a_{ij}) \right)_{i,j=1}^n$, и $1 \leq \gamma = \bar{\gamma} \leq \infty$, $1 \leq \sigma = \bar{\sigma} \leq \infty$, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$

$$(1 \leq \gamma = \bar{\gamma} \leq \infty, \quad 1 \leq \sigma \leq \bar{\sigma} \leq \infty, \quad \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \geq 1; \quad 1 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \infty, \quad 1 \leq \sigma = \bar{\sigma} \leq \infty,$$

$\frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{1}{\sigma} \geq 1$), то $\Phi : (R_n, \eta_{\xi, \gamma, \sigma}) \rightarrow (\bar{R}_n, \eta_{\bar{\xi}, \bar{\gamma}, \bar{\sigma}})$ является полуизометрическим изоморфизмом (полуизометрическим слева, полуизометрическим справа).

ОБЩИЕ ВЫВОодЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Общие выводы.

В современной алгебре и, в частности, теории радикалов колец теоремы об изоморфизмах применяются очень часто. В случае псевдонормированных колец вторая теорема об изоморфизме не имеет места. Поэтому возникает необходимость идентифицировать гомоморфизмы и изоморфизмы определенных видов, для которых можно было бы установить аналоги упомянутой теоремы. В настоящей работе рассматриваются полуизометрические (полуизометрические слева, полуизометрические справа) изоморфизмы псевдонормированных колец, аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец, свойства этих изоморфизмов и конструкции псевдонормированных колец, сохраняющие эти изоморфизмы.

Решенная важная научная проблема заключается в определении и изучении классов изоморфизмов псевдонормированных колец, для которых имеют место аналоги второй теоремы об изоморфизме, что привело к исследованию конструкций псевдонормированных колец, сохраняющих такие изоморфизмы.

Таким образом, в работе:

1. Был изучен класс изоморфизмов псевдонормированных колец, являющихся сужениями изометрических гомоморфизмов на различные подкольца. Было доказано, что вторая теорема об изоморфизме для псевдонормированных колец не верна в случае изометрического изоморфизма (Теорема 2.1).

2. Был изучен класс изоморфизмов псевдонормированных колец, являющихся сужениями изометрических гомоморфизмов на односторонние идеалы. Были доказаны аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец в случае одностороннего полуизометрического изоморфизма (Теорема 2.6, Теорема 2.7).

3. Был изучен класс изоморфизмов псевдонормированных колец, являющихся сужениями изометрических гомоморфизмов на двусторонние идеалы. Были доказаны аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец в случае двустороннего полуизометрического изоморфизма (Теорема 2.15, Теорема 2.22).

4. Был изучен класс изоморфизмов псевдонормированных колец, являющихся сужениями изометрических гомоморфизмов на достижимые подкольца. Были доказаны аналоги второй теоремы об изоморфизме для псевдонормированных колец в случае суперпозиции полуизометрических изоморфизмов (Теоремы 2.25, Теорема 2.27).

5. Была установлена взаимосвязь между односторонним полуизометрическим изоморфизмом, двусторонним полуизометрическим изоморфизмом, изометрическим изоморфизмом и топологическим изоморфизмом псевдонормированных колец (Следствия 2.10 – 2.12, 2.16 – 2.19).

6. Было показано, что полуизометрический изоморфизм (полуизометрический слева, полуизометрический справа) сохраняется при переходе к подкольцам псевдонормированных колец (Теорема 3.1).

7. Были получены достаточные условия сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при взятии факторколец псевдонормированных колец (Теорема 3.2).

8. Были получены достаточные условия сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к пополнению псевдонормированных колец (Теорема 3.4).

9. Были получены достаточные условия сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к пределу или супремуму семейства псевдонорм (Теорема 3.7, Теорема 3.11).

10. Были получены достаточные условия сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к конечной прямой сумме псевдонормированных колец и при переходе к другим псевдонормам в кольцах (Теорема 3.15, Следствие 3.16).

11. Были изучены некоторые конструкции псевдонормы в кольце матриц и определены достаточные условия корректности этих конструкций (Теорема 3.17, Замечание 3.18).

12. Были получены достаточные условия сохранения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) при переходе к кольцу матриц над псевдонормированным кольцом (Теорема 3.19).

Личный вклад автора состоит в разработке конструкций псевдонормы в кольце матриц, разработке конструкций псевдонорм подколец в доказательстве теоремы о суперпозиции полуизометрических изоморфизмов нильпотентных псевдонормированных колец, доказательстве всех теорем и предложений параграфов 3.2 – 3.6.

Рекомендации:

1. Результаты диссертации могут служить пособием для студентов при выполнении магистерских диссертаций и могут составлять содержание некоторых спецкурсов для студентов математических специальностей бакалавриата и магистратуры.

2. Результаты диссертации могут быть применены при построении общей теории радикалов псевдонормированных колец.
3. Исследование может быть продолжено в следующих направлениях:
 - исследование поведения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) в других конструкциях псевдонормированных колец (полупрямые произведения, тихоновские произведения, обратные пределы);
 - исследование поведения полуизометрического изоморфизма (полуизометрического слева, полуизометрического справа) в псевдонормированных кольцах с дополнительными свойствами;
 - применение полуизометрических изоморфизмов (полуизометрических слева, полуизометрических справа) в теории банаховых колец;
 - применение в теории банаховых колец конструкции псевдонормы, разработанной для кольца матриц.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Алещенко С.А. Конструкции псевдонормированных колец, сохраняющие полуизометрический изоморфизм. În: Studia Universitatis Moldaviae. Științe Exacte și Economice, 2013, т. 67, № 7, с. 19–27.
2. Алещенко С.А. Некоторые конструкции псевдонормированных колец. В: Вестник науки Приднестровья, 2012, № 2, с. 147–155.
3. Алещенко С.А. Односторонний полуизометрический изоморфизм в кольце матриц. В: Математическое моделирование в образовании, науке и производстве. Тезисы VIII Международной конференции. Тирасполь: Изд. Приднестровского Университета, 2013, с. 131–132.
4. Алещенко С.А., Арнаут В.И. Сужение изометрического гомоморфизма на достижимое подкольцо псевдонормированного кольца. В: Математическое моделирование в образовании, науке и производстве. Материалы IV Международной научно-практической конференции. Тирасполь: Изд. Приднестровского Университета, 2005, с. 163–164.
5. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. Москва: Наука, 1979. 496 с.
6. Арнаут В.И. Дополнительные радикалы в топологических кольцах. В: Математические исследования, 1968, т. 3, № 2, с. 16–30.
7. Арнаут В.И. Дополнительные радикалы в топологических кольцах II. В: Математические исследования, 1969, т. 4, № 1, с. 3–16.
8. Арнаут В.И. Критерий псевдонормируемости топологических колец. В: Алгебра и Логика, 1965, №4, с. 3–24.
9. Арнаут В.И. Общая теория радикалов топологических колец. В: Известия АН РМ. Математика, 1996, т. 21, № 2, с. 5–45.
10. Арнаут В.И. Полутопологический изоморфизм топологических колец. В: Математические исследования, 1969, т. 4, № 2, с. 3–16.
11. Арнаут В.И. Радикалы в кольцах с базисом групповых окрестностей нуля. В: Математические исследования, 1968–69, т. 3, № 4, с. 3–17.
12. Арнаут В.И. Радикалы в ограниченных кольцах. В: Известия АН МССР. Сер. Физ.-тех. и мат., 1969, №2, с. 3–8.
13. Арнаут В.И., Водинчар М.И. Радикалы топологических колец. В: Математические исследования, 1968, т. 3, № 2, с. 31–61.

14. Арнаутков В.И., Водичар М.И., Михалев А.В. Введение в теорию топологических колец и модулей. Кишинев: Штиинца, 1981. 176 с.
15. Арнаутков В.И., Водичар М.И., Михалев А.В. Конструкции топологических колец и модулей. Кишинев: Штиинца, 1981. 172 с.
16. Базигаран Б., Главацкий С.Т., Михалев А.В. Топологический первичный квазирадикал. В: Фундаментальная и прикладная математика, 2004, т. 10, № 3, с. 11–22.
17. Базигаран Б., Главацкий С.Т., Михалев А.В. Топологический первичный радикал группы. В: Фундаментальная и прикладная математика, 2004, т. 10, № 4, с. 15–22.
18. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. Москва: Наука, 1968. 272 с.
19. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. Москва: Наука, 1969. 392 с.
20. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. Москва: ИЛ, 1959. 410 с.
21. Водичар М.И. Наследственные и специальные радикалы в топологических кольцах. В: Математические исследования, 1969, т. 4, № 2, с. 17–31.
22. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. Москва: Физматгиз, 1960. 316 с.
23. Главацкий С.Т., Михалев А.В., Тензина В.В. Топологический радикал Джекобсона колец. I. В: Фундаментальная и прикладная математика, 2010, т. 16, №8, с. 49–68.
24. Главацкий С.Т., Михалев А.В., Тензина В.В. Топологический радикал Джекобсона колец. II. В: Фундаментальная и прикладная математика, 2012, т. 17, № 1, с. 53–64.
25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1968. 496 с.
26. Крылов П.А. О группе K_0 кольца обобщенных матриц. В: Алгебра и логика, 2013, т. 52, № 3, с. 370–385.
27. Крылов П.А., Таганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители. В: Фундаментальная и прикладная математика, 2014, т. 19, №1, с. 65–119.
28. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Москва: Наука, 1968. 431 с.
29. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. Москва: Наука, 1973. 400 с.
30. Курош А.Г. Радикалы в теории групп. В: Сиб. матем. ж., 1962, т. 3, № 6, с. 912–931.
31. Курош А.Г. Радикалы колец и алгебр. В: Математический сборник, 1953, т. 33(75), №1, с. 13–26.
32. Курош А.Г. Теория групп. Москва: Наука, 1967. 648 с.
33. Ленг С. Алгебра. Москва: Мир, 1968. 565 с.
34. Наймарк М.А. Нормированные кольца. Москва: Наука, 1968. 664 с.

35. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть I. В: Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ., 2014, т. 26, № 2, с. 152–171.
36. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть II. Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ., 2015, т. 27, № 1, с. 181–201.
37. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. Москва: Наука, 1973. 527 с.
38. Рябухин Ю.М., Рябухина Л.М. Радикальные подкольца в поле $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. В: Вестник Приднестровского университета, 2013, № 3, стр. 63–65.
39. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. Москва: Наука, 1983. 272 с.
40. Соловей Л.Г. Равенства, соответствующие псевдонормам матриц n -го порядка и неравенствам Шварца-Коши-Буняковского. В: Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2007, т. 4, №1(7), с. 109–132.
41. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Поля Г. Неравенства. Москва: ИЛ, 1948. 456 с.
42. Хелемский А.Я. Банаховы и полинормированные алгебры. Общая теория, представления, гомологии. Москва: Наука, 1989. 464 с.
43. Элиович А.А., Санюк В.И. Некоторые аспекты применения полинорм в теории поля. В: ТМФ, 2010, т. 162, №2, с. 163–178.
44. Элиович А.А. О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением. В: Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2004, том 1, №2, с. 24–50.
45. Элиович А.А. О полинормах на неассоциативных алгебрах и их возможном применении в физике. В: Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2008, том 5, №2, с. 131–159.
46. Aleschenko S.A. A semi-isometric isomorphism on a ring of matrices. In: International Conference Algebraic Systems and their Applications in Differential Equations and other domains of mathematics. Chisinau: Institute of Mathematics and Computer Science of ASM, 2007, p. 5–6.
47. Aleschenko S. A semi-isometric isomorphism on a ring of matrices 2. In: The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu. Chişinău: Tiraspol State University, 2012, p. 8.
48. Aleschenko S. A semi-isometric isomorphism on a ring of matrices. In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2014, vol. 75, nr. 2, p. 74–84.

49. Aleschenko S.A. On some constructions of pseudonormed rings preserving semi-isometric isomorphisms. In: 5th International Algebraic Conference in Ukraine. Odessa: Odessa I.I. Mechnikov National University, 2005, p. 15–16.
50. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. About superposition of semi-isometric isomorphisms for nilpotent pseudonormed rings. In: 6th International Algebraic Conference in Ukraine. Kamyanets-Podilsky: Kamyanets-Podilsky State University, 2007, p. 16–17.
51. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Completion of of pseudonormed rings and semi-isometric isomorphism. In: 7th International Algebraic Conference in Ukraine. Kharkov: V.N. Karazin Kharkov State University, 2009, p. 12–13.
52. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Factor rings of pseudonormed rings. In: Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 40 anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science of ASM. Chişinău: Institute of Mathematics and Computer Science of ASM, 2004, p. 9–12.
53. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Quotient rings of pseudonormed rings. In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2006, vol. 44, nr. 1, p. 3–16.
54. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Properties of accessible subrings of pseudonormed rings when taking factor rings. In: The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics. Chisinau: Institute of Mathematics and Computer Science of ASM, 2006, p. 7–9.
55. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Properties of one-side ideals of pseudonormed rings when taking the quotient rings. In: International Conference on Radicals ICOR-2006. Kyiv: Kyiv National Taras Shevchenko University, 2006, p. 9–10.
56. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Properties of one-sided ideals of pseudonormed rings when taking the quotient rings. In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2008, vol. 58, nr. 3, p. 3–8.
57. Arens R.F. Algebraic extension of normed algebras. In: Proc. Amer. Math. Soc., 1956, vol. 7, nr. 2, p. 203–210.
58. Arens R.F. Inverse-producing extensions of normed algebras. In: Trans. Amer. Math. Soc., 1958, vol. 88, p. 536–548.
59. Arnautov V.I. Semitopological isomorphism of topological groups. In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2004, vol. 44, nr. 1, p. 15–25.
60. Arnautov V.I. Properties of accessible subrings of topological rings when taking quotient rings. In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2007, vol. 54, nr. 2, p. 4–18.

61. Arnautov V.I. Properties of one-sided ideals of topological rings. In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2006, vol. 50, nr. 1, p. 3–14.
62. Arnautov V.I., Glavatsky S.T., Mikhalev A.V. Introduction to the theory of topological rings and modules. New York: Marcel Dekker, Inc., 1996. 502 p.
63. Arnautov V.I. The theory of radicals of topological rings. In: Mathematica Japonica, 1998, vol. 47, nr. 3, p. 439–544.
64. Aurora S. Normed fields which extend normed rings of integers. In: Pacif. J. Math., 1970, vol. 33, nr. 1, p. 21–28.
65. Aurora S. On normed rings with monothone multiplication. In: Pacif. J. Math., 1970, vol. 33, nr. 1, p. 15–20.
66. Faith C. Algebra II Ring Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1976. 304 p.
67. Gelfand I.M. Normierte Ringe. In: Math. Sb., 1941, nr. 9, p. 3–24.
68. Hardy G. H., Littlewood J. E. and Pólya G. Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press, 1952. 324 p.
69. Kaplansky I. Topological algebra. Notas de matemática; nr.16. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1959. p. 87.
70. Kaplansky I. Topological rings. In: Amer. J. Math., 1947, vol. 69, nr. 1, p. 153–183.
71. Kashu A.I. Closure operators in the categories of modules. Part I (Weakly hereditary and idempotent operators). In: Algebra and Discrete Mathematics, 2013, vol. 15, nr. 2, p. 213–228.
72. Kashu A.I. Closure operators in the categories of modules. Part II (Hereditary and cohereditary operators). In: Algebra and Discrete Mathematics, 2013, vol. 16, nr. 1, p. 81–95.
73. Kashu A.I. Closure operators in the categories of modules. Part III (Operators in CO and their properties). In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2014, vol. 74, nr. 1, p. 90–100.
74. Kashu A.I. Closure operators in the categories of modules. Part IV (Relation between the operators and preradicals). In: Bulletin of Academy of Sciences of the Republic of Moldova. Mathematics, 2014, vol. 76, nr. 3, p. 13–22.
75. Kashu A.I. Preradicals, closure operators in $\mathbf{R}\text{-Mod}$ and connection between them. In: Algebra and Discrete Mathematics, 2014, vol. 18, nr. 1, p. 86–96.
76. Lipkina Z.S. On pseudo-normalizability of topological rings. In: Sib. Math. J., 1965, nr.6, p. 1046–1052.
77. Mil'man D.P. Normalizability of topological rings. In: DAN SSSR, 1945, nr. 47, p. 162–164.

78. Pyartli S.A. On the simultaneous extension of the topology and pseudonorm of a monoid to its semigroup ring. In: *Mat. Zametki*, 1993, vol. 53, nr. 2, p. 110–113.
79. Pyartli S.A. Pseudonormability of topological semigroup rings. In: *Usp. Math. Nauk*, 1992, vol. 47, nr. 3, p. 171–172.
80. Rickart Ch.E. General theory of Banach algebras. New York: Robert E. Krieger Publishing, 1960. 405 p.
81. Vizitiu V.N. Extension of pseudo-norm of fields. In: *Mat. Issled.*, 1981, nr. 62, p. 3–8.
82. Vodinchar M.I. Criterion of pseudo-normalizability of topological algebras. In: *Mat. Issled.*, 1967, vol. 2, nr. 1, p. 133–140.
83. Warner S. Normability of certain topological rings. In: *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 33, nr. 2: p. 423–427.
84. Yunusova D.I. On extension of a norm of a group and a ring to their group ring. In: *Mat. Issled. Algebras and rings*, 1986, nr. 90, p. 137–146.
85. Yunusova D.I. On extension of pseudo-norm of a ring, seminorm and metric of a semigroup to their semigroup ring. In: *Mat. Issled. Rings and topologies*, 1988, nr. 105, p. 172–194.

ДЕКЛАРАЦИЯ ОБ ОТВЕТСТВЕННОСТИ

Я, нижеподписавшийся, заявляю под личную ответственность, что материалы, представленные в докторской диссертации, являются результатом личных научных исследований и разработок. Осознаю, что в противном случае буду нести ответственность в соответствии с действующим законодательством.

Алещенко Светлана

CURRICULUM VITAE

Фамилия Алещенко
Имя Светлана
Дата рождения 12.08.1970
Место рождения г. Тирасполь, Молдова
Гражданство Молдова



ОБРАЗОВАНИЕ

1987 – 1992 Киевский Национальный Университет им. Тараса Шевченко,
Механико-Математический Факультет,
Специальность: Математика. Преподаватель математики.
2011 – 2014 Докторантура, Тираспольский Государственный Университет,
Специальность: Математическая Логика, Алгебра и Теория Чисел.

ОБЛАСТЬ НАУЧНЫХ ИНТЕРЕСОВ

Исследование гомоморфизмов и изоморфизмов топологических колец с нормированием и их приложения.

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

С 1992 – преподаватель математики в Приднестровском Государственном Университете, г. Тирасполь.

УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ

- 2004 Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 40 anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science of ASM (Chisinau, 2004);
- 2005 IV Международная научно-практическая конференция “Математическое моделирование в образовании, науке и производстве” (Тирасполь, 2005);
- 2005 5th International Algebraic Conference in Ukraine (Odessa, 2005);
- 2006 International Conference on Radicals, ICOR-2006 (Kyiv, 2006);
- 2006 The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics (Chisinau, 2006);
- 2007 6th International Algebraic Conference in Ukraine (Kamyanets-Podilsky, 2007);

- 2007 International Conference Algebraic Systems and their Applications in Differential Equations and other domains of mathematics dedicated to Vladimir A. Andrunachievici (1917-1997), Constantin S. Sibirschi (1928-1990) (Chisinau, 2007);
- 2009 7th International Algebraic Conference in Ukraine (Kharkov, 2009);
- 2012 The 20-th Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu (Chisinau, 2012);
- 2013 VIII Международная научно-практическая конференция “Математическое моделирование в образовании, науке и производстве” (Тирасполь, 2013).

ПУБЛИКАЦИИ

За время занятий научной деятельностью по тематике диссертации было опубликовано

– 5 статей в научных журналах

1. Алещенко С.А. Конструкции псевдонормированных колец, сохраняющие полуизометрический изоморфизм В сб.: *Studia Universitatis Moldaviae, Ştiinţe Exacte şi Economice*. – Chisinau, 2013. - Т. 67, № 7, стр. 19-27.
2. Алещенко С.А. Некоторые конструкции псевдонормированных колец. В сб.: *Вестник науки Приднестровья*. – Тирасполь, 2012. - № 2, стр. 147-155.
3. Aleschenko S. A semi-isometric isomorphism on a ring of matrices. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova*, 2014, V. 2(75), p. 74 – 84.
4. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Quotient rings of pseudonormed rings. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova*, 2006, V. 1(44), p. 3 – 16.
5. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Properties of one-sided ideals of pseudonormed rings when taking the quotient rings. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova*, 2008, V. 3(58), p. 3 – 8.

– 10 докладов в сборниках материалов научных конференций

6. Алещенко С.А. Односторонний полуизометрический изоморфизм в кольце матриц. VIII Международная конференция “Математическое моделирование в образовании, науке и производстве”, Тирасполь, 3-5 октября, 2013, стр. 131-132.
7. Алещенко С.А., Арнаут В.И. Сужение изометрического гомоморфизма на достижимое подкольцо псевдонормированного кольца. IV Международная конференция “Математическое моделирование в образовании, науке и производстве”, Тирасполь, 5-9 июня, 2005, стр. 163-164.

8. Aleschenko S.A. A semi-isometric isomorphism on a ring of matrices. International Conference Algebraic Systems and their Applications in Differential Equations and other domains of mathematics, Chisinau, 2007, august 21-23, p. 5 – 6.
9. Aleschenko S. A semi-isometric isomorphism on a ring of matrices 2. The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu, Chisinau, 2012, august 22-25, p. 8.
10. Aleschenko S.A. On some constructions of pseudonormed rings preserving semi-isometric isomorphisms. 5th International Algebraic Conference in Ukraine, Odessa, 2005, p. 15 – 16.
11. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. About superposition of semi-isometric isomorphisms for nilpotent pseudonormed rings. 6th International Algebraic Conference in Ukraine, Kamyanets-Podilsky, Ukraine, July 1 – 7, 2007, p. 16-17.
12. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Completion of pseudonormed rings and semi-isometric isomorphism. 7th International Algebraic Conference in Ukraine, Kharkov, 2009, august 18 – 23, p. 12 – 13.
13. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Factor rings of pseudonormed rings. Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 40 anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science of ASM. Chisinau, 2004, august 17-19, p. 9-12.
14. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Properties of accessible subrings of pseudonormed rings when taking factor rings. The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Chisinau, 2006, august 17-19, p. 7-9.
15. Aleschenko S.A., Arnautov V.I. Properties of one-side ideals of pseudonormed rings when taking the quotient rings. International Conference on Radicals, ICOR-2006, Kyiv, Ukraine, July 30 – August 5, 2006, p. 9-10.

ЗНАНИЕ ЯЗЫКОВ

Русский – родной. Английский – хорошо. Румынский – со словарем.

КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

Адрес: дом. – Молдова, Тирасполь MD3300, ул. Юности, 12/2, 48;

раб. – Молдова, Тирасполь MD3300, ул 25 Октября, 128.

Телефон: дом. – (+373) 53328085; моб. – (+373) 77862894.

Электронный адрес: alesch.svet@gmail.com.