

**MINISTERUL EDUCAȚIEI DIN REPUBLICA MOLDOVA
ACADEMIA DE ȘTIINȚE A MOLDOVEI
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**

Cu titlu de manuscris

C.Z.U.: 519.872

ȚICU RODICA IONELA

**MODELE MATEMATICE ȘI ALGORITMI PENTRU
EFICIENTIZAREA ACTIVITĂȚII TERMINALELOR
PORTULUI CONSTANȚA**

**112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ ȘI CERCETĂRI
OPERAȚIONALE**

Teză de doctor în științe matematice

Conducător științific:

Gheorghe Mișcoi

Dr.hab. în șt. fiz-mat., prof. Univ.,

Academician al A.Ș.M

Autorul:

Țicu Rodica Ionela

CHIȘINĂU, 2016

© Țicu Rodica Ionela, 2016

CUPRINS

ADNOTĂRI	5
LISTA ABREVIERILOR	8
INTRODUCERE	11
1. STADIUL ACTUAL DE CUNOAȘTERE AL SISTEMELOR DE AȘTEPTARE CU O SINGURĂ STAȚIE APLICATE ÎN ACTIVITATEA PORTUARĂ	17
1.1. Scurtă descriere a activității în cadrul portului maritim Constanța	17
1.2. Utilizarea sistemul M/M/1 în activitatea portuară	22
1.3. Aplicarea sistemul de așteptare M/E _k /1 în portul maritim Constanța	29
1.4. Sisteme cu flux de intrare și (sau) timp de servire determinat	33
1.5. Sistemul de așteptare M/G/1	37
1.6. Concluzii la capitolul 1	53
2. CERCETĂRI PRIVIND SISTEMELE CU RESTRICȚII FOLOSITE PENTRU OPERAREA NAVELOR ÎN CADRUL TERMINALELOR MARITIME	54
2.1. Metoda lui Gnedenko pentru studiul timpului de așteptare în sistemul M/G/1	54
2.2. Modele cu șir de așteptare limitat	59
2.3. Modele cu prioritate	64
2.4. Modele cu prioritate absolută	67
2.5. Modelul M/G/1 cu intrări în grup	72
2.6. Modele în care prioritatea se atribuie prin clasificarea unităților	73
2.6.1. Sistemul M/M/S ($S < \infty$)	77
2.6.2. Sistemul M/M/S ($S = \infty$)	88
2.7. Evaluarea situației curente a terminalelor și operatorilor din portul maritim Constanța	91
2.8. Concluzii la capitolul 2	94
3. MODELE MATEMATICE ȘI ALGORITMI PENTRU EFICIENTIZAREA ACTIVITĂȚII TERMINALELOR DIN PORTUL CONSTANȚA	95
3.1. Algoritmi de evaluare a caracteristicilor sistemului de așteptare generalizat	95
3.1.1. Sistemul G1/M/S	95

3.1.2. Modele cu S stații în serie	98
3.2. Concepte referitoare la testele de concordanță	106
3.3. Algoritmi de modelare a funcțiilor de repartiție și a timpului de așteptare în cazul sistemului M/G/1 în cadrul terminalelor din portul Constanța	114
3.3.1. Servire în ordine inversă (LIFO)	114
3.3.2. În cazul în care servirea este în ordine directă (FIFO)	123
3.4. Concluzii la capitolul 3	136
CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI	137
BIBLIOGRAFIE	140
ANEXA 1. SOFTUL ALGORITMILOR ELABORAȚI	150
ANEXA 2. MODEL PROGRAM DE ACOSTARE TERMINAL CSCT	156
ANEXA 3. MODEL BULETIN INFORMATIV – OPERARE NAVE - ANR	157
ANEXA 4. PROGRAME DE ACOSTARE TERMINAL CSCT	160
ANEXA 5. BULETINE INFORMATIVE – NAVE SUB OPERARE - ANR	180
ANEXA 6. ACT DE IMPLEMENTARE	188
DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII	189
CURRICULUM VITAE	190

ADNOTARE

La teza de doctorat a doamnei Țicu Rodica Ionela „Modele matematice și algoritmi pentru eficientizarea activității terminalelor portului Constanța”

Teza este înaintată pentru obținerea titlului de doctor în științe fizico-matematice la specialitatea 112.03 – Cibernetică matematică și cercetări operaționale. Ea a fost elaborată la Academia de Științe a Moldovei, Chișinău, în anul 2016.

Structura tezei: Teza este scrisă în limba română și constă din introducere, trei capitole, 6 anexe, concluzii generale și recomandări, bibliografie ce cuprinde 137 titluri. Lucrarea conține 139 pagini de text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 15 lucrări științifice.

Cuvintele-cheie: transformata Laplace-Stieltjes, modele generalizate de așteptare, timp de așteptare, variabile aleatoare, teoria așteptării, port maritim.

Domeniul de studiu al tezei: Teoria sistemelor de așteptare.

Scopul și obiectivele lucrării: Datorită dezvoltării rapide a portului maritim Constanța cât și a sistemelor a apărut necesitatea aplicării unor sisteme îmbunătățite de așteptare care necesită crearea unor noi modele matematice de așteptare.

Lucrarea noastră are ca scop extinderea rezultatelor deja cunoscute în ceea ce privește Teoria Așteptării, elaborarea unor algoritmi matematici de eficientizare a timpului de așteptare în cadrul unui terminal maritim, toate acestea ducând atât la scăderea timpului de așteptare cât și la reducerea costurilor în cadrul întregii activități portuare.

Pentru realizarea scopului propus s-au parcurs următoarele obiective ale lucrării:

- prezentarea mai multor modele matematice care se pot aplica în activitatea portului maritim Constanța;
- analiza unor funcții de repartiție din cadrul mai multor modele matematice;
- determinarea cu ajutorul unor metode de calcul a celei mai eficiente funcții de repartiție care poate fi aplicată în cadrul activității portuare;
- prezentarea și analiza a două terminale maritime din portul Constanța;
- elaborarea unui algoritm de calcul în C++ pentru optimizarea timpului de așteptare în cadrul modelului de așteptare M/G/1, realizat pentru mai multe funcții de repartiție;
- descrierea algoritmului realizat în vederea estimării parametrilor funcțiilor de repartiție ce intervin în optimizarea timpului de așteptare al unei nave în cadrul terminalelor maritime.

Noutatea și originalitatea științifică: Au fost generalizate și descrise mai multe modele matematice de așteptare. În plus au fost analizate mai multe funcții de repartiție pentru fiecare model, aplicarea acestor rezultate conducând la elaborarea algoritmilor de calcul pentru patru funcții de repartiție.

Au fost descrise și analizate buletinele informative din cadrul a două terminale maritime din portul Constanța. În urma acestor analize și în conformitate atât cu modelele matematice abordate, dar și ținând cont de funcțiile lor de repartiție am putut face posibilă implementarea în viitor a acestui algoritm matematic de calcul.

Problema științifică importantă soluționată: rezidă în determinarea unor timpi de așteptare mai mici a navelor în cadrul terminalelor maritime, rezultate obținute atât în urma analizei modelelor de așteptare, dar și a funcțiilor de repartiție pentru aceste modele.

Semnificația teoretică: Rezultatele prezentate în lucrare pot servi ca suport pentru continuarea cercetărilor științifice în studierea și determinarea altor caracteristici probabilistice pentru diferite tipuri de modele de așteptare.

Valoarea aplicativă a lucrării: Rezultatele obținute pot fi aplicate în sistemele portuare, pot fi extinse și pentru activitatea de încărcare a mărfii pe diverse tipuri de nave (tip container, tancuri etc.), care pot fi modelate matematic cu ajutorul modelelor studiate în teză.

Implementarea rezultatelor științifice: Algoritmii elaborați au fost implementați în formă de program soft în limbajul de programare C++.

АННОТАЦИЯ

к кандидатской диссертации "**Математические модели и алгоритмы для эффективной деятельности морских терминалов порту г.Констанца**"

представленная Родикой-Ионела Цику для получения звания доктора математических наук по специальности 112.03-Математическая кибернетика и оперативные исследования.

Диссертация была разработана в Академии наук Молдовы, Кишинёв, 2016 г..

Структура диссертации: Диссертация написана на румынском языке и содержит введение, три главы, выводы и рекомендации, библиография, содержащая 137 наименований, 6 приложения к ней. Она содержит 139 страниц основного текста.

Результаты исследования опубликованы в 15 научных работах.

Ключевые слова: Преобразование Лапласа-Стилтьеса, обобщённые модели ожидания, время ожидания, случайные величины, теории ожидания, морской порт.

Область исследования диссертации: Теория систем ожидания.

Цель и задачи. Благодаря быстрому развитию морского порта г.Констанца и его систем, возникла необходимость применения усовершенствованных систем ожидания, которые требуют создания новых математических моделей ожидания.

Наша диссертация направлена на расширение уже известных результатов касающихся Теории Ожидания, разработку математических алгоритмов для оптимизации времени ожидания в морском терминале, ведущие к сокращению времени ожидания и расходов в общей деятельности морского порта.

Для достижения поставленной цели, были выполнены следующие задачи:

- представление нескольких математических моделей, которые могут быть применены в деятельности морского порта г.Констанца;
- анализ функций распределения в рамках нескольких математических моделей;
- определение с помощью методов расчёта наиболее эффективной функции распределения, которая может быть применена в деятельности порта;
- представление и анализ двух морских терминалов в порту г.Констанца;
- разработка алгоритма в C++ для оптимизации время ожидания при модели ожидания M/G/1, выполненной для нескольких функций распределения;
- описание алгоритма, разработанного для оценки параметров функций распределения, которые присутствуют в оптимизации время ожидания судна в морских терминалах.

Научная новизна заключается в обобщении и описании нескольких математических моделей ожидания. В дополнении производился анализ нескольких функций распределения для каждой модели; применение этих результатов привело к разработке алгоритмов, необходимых для четырёх функций распределения.

При двух морских терминалов в порту г.Констанца, были описаны и анализированы информативные справки. После проведённого анализа и в соответствии с приведёнными математическими моделями, а также имея в виду их функции распределения мы смогли провести возможность внедрения в будущем данного алгоритма математического расчёта.

Важная научная проблема которая была решена состоит в установлении меньшего времени ожидания судов в морских терминалах, полученные результаты, исходящие из анализа моделей в режиме ожидания, а также функций распределения для этих моделей.

Теоретическое значение. Представленные результаты могут служить опорой для дальнейших научных исследований в области изучения и определения других характеристик вероятностей для разных моделей ожидания.

Практическая ценность. Полученные результаты можно применить в портовых системах, а также они могут быть применены для погрузки-разгрузки товаров с/на разных видов судов (контейнеровоз, танкер, и.т.д); они могут быть математически моделированы с помощью моделей исследованных в нашей диссертации.

Внедрение научных результатов. Разработанные алгоритмы были реализованы в виде программного обеспечения на языке программирования C++.

ANNOTATION

to the PhD thesis "**Mathematical models and numerical algorithms for the efficient activity of Constanța Sea Port**"

submitted by Țicu Rodica Ionela for obtaining the PhD title in mathematical sciences for the specialty 112.03- Mathematical Cybernetics and Operational Research

The thesis was developed at the Academy of Sciences of Moldova, Chisinau, in 2016.

Structure of the thesis: The thesis is written in Romanian and contains an introduction, three chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography comprising 137 titles, 6 annexes. The thesis contains 139 pages of main text. The results obtained are published in 15 scientific papers.

Keywords: Laplace-Stieltjes transform, generalized waiting models, waiting time, random variables, queuing theory, maritime port.

Field of study of the thesis: The Theory of waiting systems

The purpose and objectives of the work. Because of the rapid development of Constanța Sea Port, as well as of systems, the need for applying upgraded waiting systems requiring the creation of new mathematical waiting models has appeared.

The thesis aims at expanding the results already known in terms of the queuing theory and at developing mathematical algorithms to streamline the waiting time in a marine terminal, all that leading both to lowering the waiting time and to reducing the costs within the entire port activity.

The following objectives of the work have been browsed in order to achieve its purpose:

- the presentation of several mathematical models that can be applied in the activity of Constanța Sea Port;
- the analysis of distribution functions from several mathematical models;
- the determination with the help of calculating methods, of the most efficient distribution function which can be applied in the port activity;
- the presentation and analysis of two maritime terminals in the port of Constanta;
- the development of an algorithm in C ++ for optimizing the waiting time within the waiting model M/G/1 conducted for several distribution functions;
- the description of the algorithm developed to estimate the parameters of the distribution functions that occur in optimizing the waiting time of a ship in the maritime terminals.

The scientific novelty and originality of the thesis lie in generalization and description of several mathematical models. Moreover were analyzed several key functions for each model, the application of these results leading to the elaboration of algorithms for four key functions.

Have been described and analysed within the newsletters of two maritime terminals in the port of Constanța. As a result of such analysis and in accordance both with mathematical models, but also in the light of their key functions we could make it possible to implement in the future of this mathematical calculation algorithm.

The important scientific problem solved lies in establishing smaller waiting times of ships in the sea terminals, results obtained from the analysis of waiting models and also of distribution functions for these models.

The theoretical significance. The results presented in this thesis may serve as a basis for further research and scientific study of the determination of other probabilistic features for different models for waiting.

Applicative value of the work. The results obtained can be applied in the port systems can be extended for loading cargo on various types of ships (container, tank, etc.), which can be modeled mathematically with the help of the models studied in this thesis.

The implementation of the scientific results. The developed algorithms were implemented as software program in the programming language C ++.

LISTA ABREVIERILOR

δ_{ij} – simbolul lui Kronecker;

$[c]$ – partea întreagă a numărului c ;

$\psi_n = \psi * \psi \dots * \psi$ – produsul de convoluție de n ori al funcției ψ prin ea însăși;

t_n – momentul intrării în sistem a celei de a n -a, unități;

$\tau_n = t_{n+1} - t_n$ – intervalul de timp dintre momentele în care intră în sistem a n -a, și a $(n + 1)$ -a unitate;

t_n^* – momentul în care părăsește sistemul a n -a unitate servită;

$\tau_n^* = t_{n+1}^* - t_n^*$ – intervalul de timp dintre momentele în care părăsesc sistemul a n -a și a $(n + 1)$ -a unitate servită;

s_n – timpul de servire a celei de a n -a unități;

$F(x) = P\{\tau_n \leq x\}$ – funcția de repartiție a variabilei aleatoare τ_n ;

$0 \leq x < \infty$

$F^*(x) = P\{\tau_0 \leq x\} = P\{t_1 \leq x\}$ – funcția de repartiție a variabilei aleatoare τ_0 ;

$H(x) = P\{s_n \leq x\}$ – funcția de repartiție a variabilei aleatoare s_n ;

$0 \leq x < \infty$

S – numărul stațiilor de servire;

M – flux de intrare poissonian sau repartiție exponențială negativă a timpului de servire;

D – flux de intrare determinat (regulat) sau timp de servire constant;

E_K – flux de intrare Erlang sau repartiție Erlang a timpului de servire;

GI – flux de intrare general independent;

G – repartiție oarecare (cu valoarea medie finită) a timpului de servire;

$\xi(t)$ – numărul unităților în sistem la momentul $t(t \geq 0)$;

$\xi(t_n - 0) = \xi_n$ – numărul unităților în sistem imediat înaintea intrării celei de a n -a, unități;

$\xi(t_n^* + 0) = \xi_n^*$ – numărul unităților în sistem imediat după plecarea celei de a n -a unități servite;

$\xi^*(t)$ – numărul fazelor în sistem la momentul $t(t \geq 0)$;

$\tilde{\xi}(t)$ – numărul stadiilor completate la momentul $t(t \geq 0)$;

$X(t)$ – numărul de unități care intră în sistem în intervalul de timp $(0, t]$;

$Y(t)$ – numărul unităților servite în intervalul de timp $(0, t]$;

Y_n^* – numărul de unități care intră în sistem în timp ce n -a unitate se află în stația de servire;

$w(t)$ – timpul virtual de așteptare (timpul cât așteaptă în șir o unitate care intră în sistem în momentul $t(t \geq 0)$);

$w(t_n - 0) = w_n$ – timpul virtual de așteptare al celei de a n -a unități;

$w^*(t)$ – timpul de așteptare în sistem a unității care sosește în momentul $t(t \geq 0)$;

$\theta(t)$ – perioada de ocupare a stației inițiată în momentul $t, t \geq 0$;

θ_i – perioada de ocupare a stației inițiată de i unități;

$W(t, x) = P\{w(t) \leq x\}$ – funcția de repartiție a timpului virtual de așteptare;

$\Gamma(t, x) = P\{\theta(t) \leq x | w(0) = 0\}$ – funcția de repartiție a perioadei de ocupare în ipoteza că în momentul inițial $t = 0$ sistemul este liber;

$\Gamma^*(x) = P\{\theta(0) \leq x | w(0) \neq 0\}$ – funcția de repartiție a perioadei inițiale de ocupare;

$\bar{\Psi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\Psi(x)$ – transformată Laplace-Stieltjes a funcției Ψ ;

uneori $\bar{\Psi}$ – transformată Laplace a funcției Ψ ;

ψ – densitatea de repartiție a repartiției Ψ ;

$E[\alpha]$ – valoarea medie a variabilei aleatoare α ;

$a = E[\tau_n]$ – valoarea medie a intervalului de timp dintre momentele de intrare în sistem a celei de a n -a și a $(n + 1)$ -a unitate;

$\lambda = \frac{1}{a}$ – intensitatea fluxului de intrare poissonian;

$b = E[s_n]$ – valoarea medie a timpului de servire a celei de a n -a unități;

$\mu = \frac{1}{b}$ – intensitatea serviciilor, în ipoteza că timpul de servire are o repartiție exponențială negativă;

$\rho = \frac{b}{sa}$ – factorul de serviciu al sistemului cu S stații (intensitatea relativă de trafic);

$D^2[\alpha] = \sigma^2$ – dispersia variabilei aleatoare α ;

$D[\alpha] = \sigma$ – abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare;

$P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}$ – probabilitatea condiționată ca la momentul $t(t > 0)$ să fie j unități în sistem, știind că în momentul inițial $t = 0$ au fost i unități;

$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ – probabilitatea de mai sus în cazul procesului staționar;

$P_j(t) = P\{\xi(t) = j\}$ – probabilitatea ca la momentul $t(t \geq 0)$ să fie j unități în sistem;

$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t)$ – probabilitatea de mai sus în cazul procesului staționar;

$G_i(z, t) = \sum_{j=0}^\infty P_{ij}(t) z^j$ – funcția generatoare a variabilei aleatoare ξ ;

q_s – probabilitatea ca, în starea staționară a sistemului cu S stații, o unitate să fie servită complet;

r_k – probabilitatea ca, în starea staționară, să fie ocupate $k \leq S$ stații de servire.

În stare staționară:

U_M – numărul mediu de unități în sistem;

U_M^* – numărul mediu de unități în șirul de așteptare;

\tilde{W} – timpul mediu de așteptare în sistem;

W^* – timpul mediu de așteptare în șir;

S_M – numărul mediu de stații ocupate;

L_M – numărul mediu de stații libere;

$Q = U_T$ – numărul mediu de unități servite într-o perioadă de ocupare;

ψ_M – numărul mediu de faze în sistem;

M_r^* – momentul binomial de ordinul r .

INTRODUCERE

Actualitatea și importanța problemei abordate

Modelele de așteptare ocupă un loc important în Teoria Așteptării, Statistică Matematică cât și în Teoria Probabilităților, dar și în toate cercetările care se realizează pe baza acestor discipline, inclusiv în activitatea portului maritim Constanța. Activitatea portuară fiind foarte complexă, aplicarea modelelor de așteptare, cât și a funcțiilor de repartiție ajută la simplificarea proceselor și activităților desfășurate în cadrul portului maritim. Deoarece portul maritim Constanța este într-o continuă și permanentă dezvoltare ne permite realizarea permanentă a noi algoritmi de eficientizare a întregii activități portuare. Putem spune că portul maritim este un izvor nesecat de noi și noi idei și direcții de cercetare științifică.

În practică, mijloacele materiale investite pentru crearea sau perfecționarea unui sistem de așteptare sunt limitate și obligația principală constă în a le utiliza în mod economic și științific justificat. Din acest punct de vedere, putem afirma că problema principală de aplicare a teoriei așteptării constă în stabilirea și justificarea cheltuielilor materiale necesare pentru atingerea unui nivel dat al calității servirii în fenomenele de așteptare cu caracter de masă. Rezultă că un rol important îl au indicatorii cantitativi ai calității servirii: lungimea șirului de așteptare (în activitatea unui terminal în cadrul unui port, pentru obținerea unei legături telefonice, la atelierul de reparații etc.), volumul serviciilor efectuate într-o unitate de timp și alții.

Portul Constanța, porturile Midia și Mangalia și portul turistic Tomis sunt porturi maritime publice-private aflate în proprietatea statului român, care asigură reglementarea și funcționarea lor prin sarcinile încredințate și îndeplinite de C.N. Administrația Porturilor Maritime S.A. Constanța (APM) și Autoritatea Navală Română (ANR), ambele instituții fiind subordonate Ministerului Transporturilor și Infrastructurii. [128]

Serviciile pentru mărfuri și pentru nave în portul Constanța sunt realizate în principal de către companii private, într-un mediu competitiv, în care se aplică principiile pieței libere.

Coordonarea traficului de nave maritime și fluviale, stabilirea ordinii de intrare/ieșire și a tranzitului navelor maritime și fluviale în porturile Constanța, Mangalia și Midia, precum și alocarea danelor se realizează de către Comisia de coordonare a mișcării navelor maritime și fluviale în porturile maritime Constanța, Mangalia și Midia (CCMN), care își desfășoară activitatea în portul Constanța. Comisia se întrunește zilnic, iar președinția și secretariatul sunt asigurate de CN APM SA Constanța, care editează zilnic, pe suport de hârtie și în format electronic, Buletinul informativ al navelor maritime și fluviale, ce conține date referitoare la

identificarea navelor maritime și fluviale, date privind desfășurarea operațiunilor portuare, precum și date de identificare a mărfurilor. [127]

Terminalele maritime sunt facilități portuare specializate pentru manipularea mărfurilor sub diverse forme și modalități de ambalare care au utilaje specializate pentru diverse tipuri de mărfuri și care fac conexiunea între navele maritime și celelalte tipuri de transport de mărfuri.

Terminalele sunt dotate cu dane de operare maritime precum și mijloace de infrastructură care fac legătura între transportul rutier, fluvial sau maritim. [131]

În portul Constanța există terminale pentru următoarele tipuri de mărfuri: vrac lichid, vrac solid, containere, mărfuri generale, RoRo/Ferry, pasageri, barje și remorchere fluviale și terminal GPL.

Toată activitatea portuară are la bază modele matematice și algoritmi care influențează traficul în cadrul activității portuare. Aceste modele matematice se regăsesc în teoria așteptării, ramură a matematicii care oferă numeroase tipuri de sisteme și modele folosite și în activitatea portuară.

Modelele fenomenelor de așteptare descriu sisteme și procese de servire cu caracter de masă, care se întâlnesc în cele mai variate domenii ale activității practice: industrie, transport, telecomunicații, comerț etc.

Cele mai multe dintre noțiunile utilizate în teoria așteptării pot fi ilustrate chiar prin exemplul furnizat de problema care stă la originea constituirii teoriei așteptării și care constă în determinarea încărcării optime a unui terminal maritim. Pentru rezolvarea acestei probleme este necesar să se urmărească cererile de servicii (nave) care sosesc în mod întâmplător și să se înregistreze timpul necesar pentru obținerea timpului optim de așteptare. Întrucât problema de bază constă în satisfacerea cât mai promptă a cererilor de servicii, în condiții economice cât mai avantajoase, un astfel de model s-a numit model (sistem) de așteptare (servire).[125]

Ne întâlnim frecvent și cu alte exemple tipice de fenomene de așteptare: cererile la ghișeele poștale și ale diverselor instituții, cererile de serviciu la magazine, policlinici, spitale, cererile de trafic (feroviar, rutier, naval, aerian), cererile pentru repararea utilajelor și mașinilor defecte, pentru utilizarea liniilor de montaj etc. De asemenea, numeroase procese tehnologice precum și unele procese fizice, chimice, biologice, fiziologice etc. pot fi reprezentate prin modele de așteptare.

Evident, modelele de așteptare descriu proprietățile generale importante ale fenomenelor de așteptare, independent de natura lor fizică și materială. [124]

Trăsătura caracteristică comună obținută la o primă vedere a diverselor sisteme de așteptare (terminal maritim, centrală telefonică, cabinet medical, atelier de reparații etc.) o

constituie existența unui flux de cereri pentru servirea, așa-numitul flux de intrare. Fluxul de intrare se caracterizează prin numărul de cereri care intră în sistem într-o unitate de timp. Cererile pot apărea în mod uniform sau neuniform. De cele mai multe ori este imposibil să se prevadă momentele intrării unităților care solicită servirea (cererile) în sistemul de așteptare. Cu toată verificarea minuțioasă a utilajului înaintea începerii lucrului, în procesul de producție pot apărea defecțiuni deci și cerințe pentru reparații. În cazul cererilor de servicii ale cumpărătorilor este, evident, imposibil să se elaboreze un program după care să solicite clienții diverse mărfuri. În aceste cazuri spunem că fluxul de intrare are un caracter aleator. Acest aspect cel mai general și mai complex al fluxului de intrare este studiat de teoria așteptării. [82], [125]

În fiecare sistem de așteptare există elemente care efectuează serviciile, elemente numite stații sau canale de servirea. Sistemele pot avea una sau mai multe stații de servirea. În limbajul teoriei așteptării, atât terminalele maritime, vânzătorul din magazin, cât și centrala telefonică automată, încasatorul de la autobuz, funcționarul de la ghișeu poștal, mecanicul de întreținere și reparații etc. constituie stații de servirea. [97]

Pentru servirea fiecărei unități (cereri) este necesar un timp oarecare în cursul căruia stația este ocupată și nu poate servi alte unități (nu poate satisface alte cereri). În mod frecvent nu se poate prevedea durata servirii unei anumite unități. În acest caz durata serviciului este aleatoare. De exemplu, durata descărcării unei nave poate să varieze în funcție de felul de marfă, numărul de dane existente într-un terminal, capacitatea navei etc. [101]

Scopul și obiectivele tezei. Datorită dezvoltării rapide a portului maritim Constanța cât și a sistemelor a apărut necesitatea aplicării unor sisteme îmbunătățite de așteptare care necesită crearea unor noi modele matematice de așteptare.

Lucrarea noastră are ca scop extinderea rezultatelor deja cunoscute în ceea ce privește Teoria Așteptării, elaborarea unor algoritmi matematici de eficientizare a timpului de așteptare în cadrul unui terminal maritim, toate acestea ducând atât la scăderea timpului de așteptare cât și la reducerea costurilor în cadrul întregii activități portuare.

La baza realizării acestei teze am avut în vedere, ca obiectiv general, eficientizarea activității din cadrul terminalelor maritime prin determinarea de modelele și algoritmi matematici.

Pentru realizarea obiectivului general propus s-au folosit următoarele obiective specifice:

- Cercetări privind sistemele de așteptare cu mai multe stații practicate în cadrul terminalelor maritime;
- Cercetări privind sistemele cu restricții folosite pentru operarea navelor în cadrul terminalelor maritime;

- Cercetarea sistemelor generalizate de așteptare cu priorități și analiza modelului matematic pentru astfel de sisteme;
- Studierea unor funcții de repartiție;
- Elaborarea și argumentarea teoretică a algoritmilor de determinare a funcțiilor de repartiție pentru sistemele generalizate de așteptare cu priorități;
- Implementarea algoritmilor elaborați.

Noutatea și originalitatea științifică: Au fost generalizate și descrise mai multe modele matematice de așteptare. În plus, au fost analizate mai multe funcții de repartiție pentru fiecare model, aplicarea acestor rezultate conducând la elaborarea algoritmilor de calcul pentru patru funcții de repartiție.

Au fost descrise și analizate buletinele informative din cadrul a două terminale maritime din portul Constanța. În urma acestor analize și în conformitate atât cu modelele matematice abordate, dar și ținând cont de funcțiile lor de repartiție am putut face posibilă implementarea în viitor a acestui algoritm matematic de calcul.

Rezultatele obținute:

- S-au studiat funcțiile de repartiție;
- S-au elaborat algoritmi pentru realizarea acestor modele.

Problema științifică importantă soluționată: rezidă în determinarea unor timpi de așteptare mai mici a navelor în cadrul terminalelor maritime, rezultate obținute atât în urma analizei modelelor de așteptare, dar și a funcțiilor de repartiție pentru aceste modele.

Importanța teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele teoretice prezentate sunt date de câteva modele de așteptare, funcțiile lor de repartiție, timpul de așteptare și inversa lui obținută prin transformata Laplace.

Implementarea rezultatelor teoretice din teză pe anumite modele de așteptare a permis calculul timpului de așteptare și inversa lui pentru navele aflate într-un terminal maritim. Acestea pot fi, cu mici modificări, aplicate și asupra unor modele neabordate din punct de vedere matematic.

Aprobarea rezultatelor. Rezultatele de bază ale tezei au fost discutate și aprobate în cadrul mai multor conferințe naționale și internaționale: Analele Universității Maritime Constanța, România, 2012; The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2012, România; Conferința științifică internațională „Strategii de dezvoltare socio-economică a societății în condițiile globalizării”, Universitatea Liberă Internațională din Moldova; The 21 th conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2013, România; Conferința internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”, Academia de

Transporturi, Informatică și Comunicații, Moldova; Conferința internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”, Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Moldova; Conferința internațională Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50th anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science „IMCS-50”; Analele Universității Maritime Constanța, România, 2015; International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education, MITRE 2015; Conferința internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”, Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Moldova; International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education, MITRE 2016; Computer Science Journal of Moldova, Ponte Academic Journal, dar și în mod periodic în cadrul Seminarului Științific al Departamentului Matematici Aplicate a Facultății de Matematică a Universității de Stat din Moldova; Revista Științifică a Universității de Stat din Moldova „Studia Universitatis Moldaviae”, 2016.

Rezultatele științifice obținute au fost aprobate în cadrul proiectului AȘM „Modele de așteptare semi-Markov”, Programul Tineri Cercetători, 13.819.18.05A. [82], [83], [84], [103], [104]; [105]

Sumarul compartimentelor tezei

Capitolul 1 fixează cadrul de sinteză al tezei. Este realizată o analiză a situației în domeniul teoriei așteptării, punând accent pe dezvoltarea mai multor modele de așteptare, cum ar fi, sistemul $M/M/1$ în activitatea portuară (secțiunea 1.2) și sisteme cu flux de intrare și/sau timp de servire determinat (secțiunea 1.4), aplicarea sistemului de așteptare $M/E_k/1$ în portul maritim Constanța (secțiunea 1.3), caracteristici generale ale sistemului de așteptare $M/G/1$ (secțiunea 1.5).

În **Capitolul 2** s-au formulat și demonstrat o serie de rezultate cu privire la modelele de așteptare aplicate în portul Constanța. În primul subcapitol (secțiunea 2.1.) este prezentat cadrul general pentru Metoda lui Gnedenko folosită în studiul timpului de așteptare în sistemul $M/G/1$, ca apoi în secțiunea 2.2. să determinăm Modele cu șir de așteptare limitat. Tot în acest capitol am tratat aplicarea modelelor cu prioritate (secțiunea 2.3.), modele cu prioritate absolută (secțiunea 2.4.), modelul $M/G/1$ cu intrări în grup (secțiunea 2.5.) , modele în care prioritatea se atribuie prin clasificarea unităților (secțiunea 2.6.). În continuare am studiat sistemul $M/M/S$ ($S < \infty$) și sistemul $M/M/S$ ($S = \infty$) (subsecțiunile 2.6.1. și 2.6.2.). Partea finală este rezervată studiului terminalelor maritime din portul Constanța, analizând atât situația actuală care se regăsește în port, situație pe baza căreia a fost realizată cercetarea din capitolul următor, dar și câteva

perspective de îmbunătățire a activității în cadrul terminalelor maritime din portul Constanța (secțiunea 2.7.).

Capitolul 3 este dedicat modelelor matematice și algoritmilor pentru eficientizarea activității terminalelor maritime din Constanța. În prima parte au fost prezentate câteva elemente ce vizează algoritmi de evaluare a caracteristicilor sistemului de așteptare generalizat (secțiunea 3.1), urmând ca în cel de-al doilea subcapitol, intitulat Concepte referitoare la testele de concordanță, să fie prezentate teste care pun în evidență concordanța dintre modelul empiric și modelul teoretic pe care îl considerăm adecvat domeniului maritim (secțiunea 3.2.).

În secțiunea 3.3. a fost calculat în cadrul sistemului M/G/1, pentru patru funcții de repartiție și pentru două cazuri ale timpului de așteptare (FIFO, LIFO), atât timpul de așteptare cât și inversa acestuia obținută cu ajutorul transformatei Laplace. Toate aceste date au fost obținute cu ajutorul unui algoritm de calcul realizat în C++, tinând cont de buletinele informative din portul maritim Constanța.

Cu ajutorul mediului de programare C++, folosind modelul M/G/1, și nu numai, am obținut codul sursă. Astfel, au fost validate din punct de vedere al simulării statistice timpii de așteptare (Anexa 1). Totodată am interpretat și analizat date din port care ne-au ajutat la obținerea rezultatelor finale (Anexele 2, 3, 4, 5 și 6).

În final, sunt prezentate concluziile ce pot fi creionate în urma lecturării acestui material, precum și, contribuțiile originale și dezvoltările ulterioare de cercetare ce au ca bază aspectele teoretice și practice din teză.

1. STADIUL ACTUAL DE CUNOAȘTERE AL SISTEMELOR DE AȘTEPTARE CU O SINGURĂ STAȚIE APLICATE ÎN ACTIVITATEA PORTUARĂ

1.1. Scurtă descriere a activității în cadrul portului maritim Constanța

Deoarece această teză abordează problema întregii activități din cadrul terminalelor maritime din portul maritim Constanța am considerat necesară descrierea în acest subcapitol a proceselor de referință cât și pregătirea documentației necesare pentru operarea navelor, fiind suport pentru analiza și alegerea celui mai adecvat model de așteptare pentru realizarea obiectivului tezei.

Descriere proces/subproces de referință.

Procedura descrie activitățile realizate în cadrul CSR (China Shipping Romania) privind pregătirea documentației și furnizarea de suport pentru operarea navei. Pentru a veni în sprijinul importatorilor și exportatorilor români și nu numai, CSR oferă servicii complete de transport maritim containerizat în și dinspre portul Constanța, din și către principalele porturi ale Orientului Îndepărtat și Orientului Mijlociu. Mărfurile de import și export au sosiri și plecări săptămânale în și din portul Constanța spre destinațiile finale, prin serviciile de linie ABX (Asia Black Sea Express) și GEM (Gulf East Mediteranean). [136], [137]



Sursa: <http://www.csromania.ro/>

Fig. 1.1. China Shipping Romania

În cadrul companiei prestatoare de servicii de transport maritim există un departament responsabil cu actualizarea, monitorizarea și controlul execuției acestei proceduri de lucru și a procesului aferent, numit Departament Operațiuni Portuare. Procesul este format din următoarele subprocese, desfășurate în paralel: „Pregătire documentație și furnizare suport descărcare”, „Pregătire documentație și furnizare suport încărcare” și „Pregătire documentație și furnizare

suport transshipment”. Această procedură detaliază exclusiv primele două subprocesse menționate mai sus. [127]

Angajatul Departamentului Operațiuni Portuare responsabil cu pregătirea documentației și acordarea de suport pentru operare nave:

1. *Pregătește documentația aferentă și furnizează suport pentru descărcare.* Subprocesul descrie activitățile realizate de către angajatul companiei în vederea pregătirii documentației și furnizării de asistență la descărcarea navei.

1.1. În baza recepționării fișierului ABX Daily Position privind planificarea rutelor, angajatul extrage freight/cargo manifestele de descărcare din TS.

1.2. Importă freight manifeste în CSAS.

1.3. Întocmește/generează listele și manifestele de descărcare.

Regula de lucru. În vederea prelucrării manifestelor de descărcare, angajatul trebuie să respecte dispozițiile CSCL, înscrise în Agency Manual, capitolul VI. Related Rules Against Terrorism, secțiunile 6.2.Contents & Requirements of the Cargo Manifest Documentation, 6.3. Empty bill filling request și 6.7. Input, amendment and deletion of manifest. Apoi obține documentația pentru marfă periculoasă descărcată (IMO Mulți Modal Transport Form, MSDS, Dangerous Goods manifest).

1.4. Se coordonează cu Departamentul Customer Service Import privind manifestele de descărcare și alte aspecte necesare (modalitate de plecare, acuratețea datelor privind primitorul etc.).

1.5. În cazul în care nava este operată de CSCL, vizualizează Stowage plan-ul în programul CASP (Computer Automated Stowage Planning).

În cazul în care nava nu este operată de CSCL, transmite documentația de descărcare, după verificările interne, către agent linie parteneră, după ce a verificat în prealabil și cu avizarea acestora.

1.6. Verifică Stowage Plan-ul cu listele de descărcare.

În cazul în care există diferențe, soluționează diferențele cu planner ABX CSCL, agentul din portul de încărcare, sau alte părți competente/responsabile în acest sens.

1.7. Colectează toate documentele și alte informații necesare de la agenții celorlalte linii partenere, în cazul în care nava este CSCL.

1.8. Transmite documentația de descărcare și alte instrucțiuni necesare către toate părțile interesate: CSCT (inclusiv stowage plan), BVCS etc. În mod normal cererea este că aceste mesaje să fie transmise cu măcar 24 ore înainte de sosirea navei, după măsura posibilităților.

Documente descărcare specifice întocmite și trimise via e-mail/suport hârtie (unde este

cazul) înainte de sosirea navei:

- Lista descărcare (în format Excel) – Se transmite către CSCT, Biroul Vamal Cta Sud, ANSVS, IJPFCT (Garda de Coastă);
- Cargo Manifeste descărcare (format PDF) – Se transmit către CSCT, Biroul Vamal Constanța Sud, ANSVS, IJPFCT (Garda de Coastă);
- Stowage plan sosire – BAPLIE (format EDI) - Se transmite către CSCT;
- Documentație marfă IMO – Se transmite către CSCT, IJPFCT (Garda de Coastă).

2. *Pregătește documentația aferentă și furnizează suport pentru încărcare.* Subprocesul descrie activitățile realizate de către angajatul companiei în vederea pregătirii documentației și furnizării de asistență la încărcarea navei.

2.1. Întocmește/emite rapoartele de rezervare spațiu la navă (Vessel's Booking).

2.2. Colectează declarațiile vamale pentru containerele de export.

2.3. Întocmește manifest preliminar de export conform cerințelor vamale locale.

2.4. În paralel, în cazul în care marfa iese din spațiul comunitar, întocmește EXS, doar pentru marfa de T/S ce depășește termenul legal conform regulamentului vamal EU (14 zile).

2.5. În cazul în care marfa încărcată este periculoasă, atunci:

- Obține documentație pentru marfă periculoasă (IMO Mulți Modal Transport Form, MSDS).
- Întocmește IMO Dangerous Goods Manifest.

Regula de lucru. Potrivit Agency Manual, capitolul VIII. Shipping and Operation Management, secțiunea 8.3. Shipping Documents:

➤ Documentația de marfă periculoasă include și o listă a mărfurilor periculoase (hazardous cargo list) întocmită de CSR (în calitate de agent CS al portului de încărcare) care trebuie să respecte dispozițiile liniei privind informațiile conținute obligatoriu: număr B/L, număr container, poziție (conform stowage plan), denumirea mărfii, clasă, număr UN, tipul pachetului, descrierea și numărul de pe ambalaj, masă netă și alte detalii relevante. În baza recepționării acestei liste de la angajat, agentul de navă trebuie să monitorizeze semnarea acestei liste de către comandantul navei și să se asigure de păstrarea ei la bordul navei până la sosirea în portul de descărcare.

➤ IMO Dangerous Cargo Manifest trebuie completat și transmis către comandantul navei.

➤ Pentru încărcarea mărfii IMO este necesară aprobare, atât de la CSCL cât și de la operatorul navei partenere dacă este cazul. Procedura diferă în funcție de caz:

- pentru container CSCL și nava CSCL este nevoie de aprobare doar de la operatorul de serviciu CSCL
- pentru container CSCL și navă parteneră se face cerere către operatorul de serviciu CSCL. Acesta va obține de la omologul partener aprobarea. Această aprobare va fi furnizată către agentul local partener
- pentru container aparținând partenerilor se va ocupa agentul local partener iar aprobarea obținută va fi furnizată către noi.

Observație: Pentru marfa încărcată în containere speciale (20/40'FR, 20/40'OT, 45'), care depășește dimensiunile standard ale echipamentelor OOG, există procedura similară cu marfa IMO. În funcție de dimensiunile depășirilor se va proceda cu cereri scrise către linia care operează nava (sunt aceleași 3 posibilități ca la 2.5.2.) și către CSCT dacă este cazul.

2.7. În cazul în care există marfă care implică congelare/refrigerare, întocmește Reefer Manifest. Aceste containere se avizează către linia care operează nava, și sunt considerate echipamente speciale.

2.8. După întocmirea documentației specifice privind containere CSCL de încărcat, în cazul în care nava este operată de CSCL, colectează documentațiile de încărcare de la agenții partenerilor de linie.

În cazul în care nava nu este operată de CSCL, atunci transmite documentația de încărcare și alte instrucțiuni necesare către agent navă linie parteneră.

2.9. Verifică documentațiile transmise de agenții liniilor parteneri, doar pentru navele CSCL.

2.10. Întocmește listele finale de încărcare și raportul de rezervare spațiu final (Final Booking).

Regula de lucru. Potrivit Agency Manual, capitolul VIII. Shipping and Operation Management, secțiunea 8.3. Shipping Documents raportul de rezervare de spațiu trebuie finalizat și transmis către CSCL, și agent partener de linie dacă este cazul, cu minim 2 zile înainte de sosirea navei.

- Certifică prin ștampilare și semnătura documentația de încărcare.
- Verifică Stowage Plan întocmit de Stowage Center al CSCL cu Raport Rezervare Spațiu final și cu listă de încărcare.

În cazul în care sunt diferențe, atunci soluționează diferențele cu planner ABX al CSCL.

[124]

Regula de lucru. Potrivit Agency Manual, capitolul VIII. Shipping and Operation

Management, secțiunea 8.2. Operation of Vessels și și 8.3. Shipping Documents.

În maxim 3 ore de la plecarea navei din port agentul de navă trebuie să transmită pe mail către Stowage Center Shanghai Departure Report și Final Stowage Plan, având în vedere că Stowage Center Shanghai este responsabil cu gestionarea informațiilor privind încărcarea navei și distribuția containerelor la bordul ei.

2.14. Transmite documentația de încărcare către agentul partener de linie, dacă este cazul.

2.15. Transmite către vamă listele de încărcare și manifestele de încărcare.

2.16. Transmite către CSCT listele de încărcare și manifestele aferente, stowage plan-ul (Movins) și instrucțiunile de încărcare (inclusiv pentru containere goale, restow, etc).

3. Imediat după plecarea navei în bune condiții întocmește TDR (Terminal departure report) în baza listelor descărcare/încărcare și datelor furnizate de Agenturarea Nave.

4. Primește Stowage Plan plecare (format EDI) de la CSCT. Verifică și transformă în format CASP (ASC).

5. Primește Tank Statement pentru plecare de la navă, preluat de către agent.

6. Întocmește lista specială pentru descărcare/încărcare doar pentru containerele CSCL.

7. Transmite TDR, Tank Statement, liste speciale și Stowage Plan plecare către toate părțile interesate. În cazul navelor CSCL, către agenții liniilor partene se întocmește și transmite un TDR special (doar pentru containerele lor) și o listă ce confirmă încărcarea pentru containerele respective. [126], [136], [137]

Documente încărcare specifice întocmite și trimise via e-mail/suport hârtie (unde este cazul):

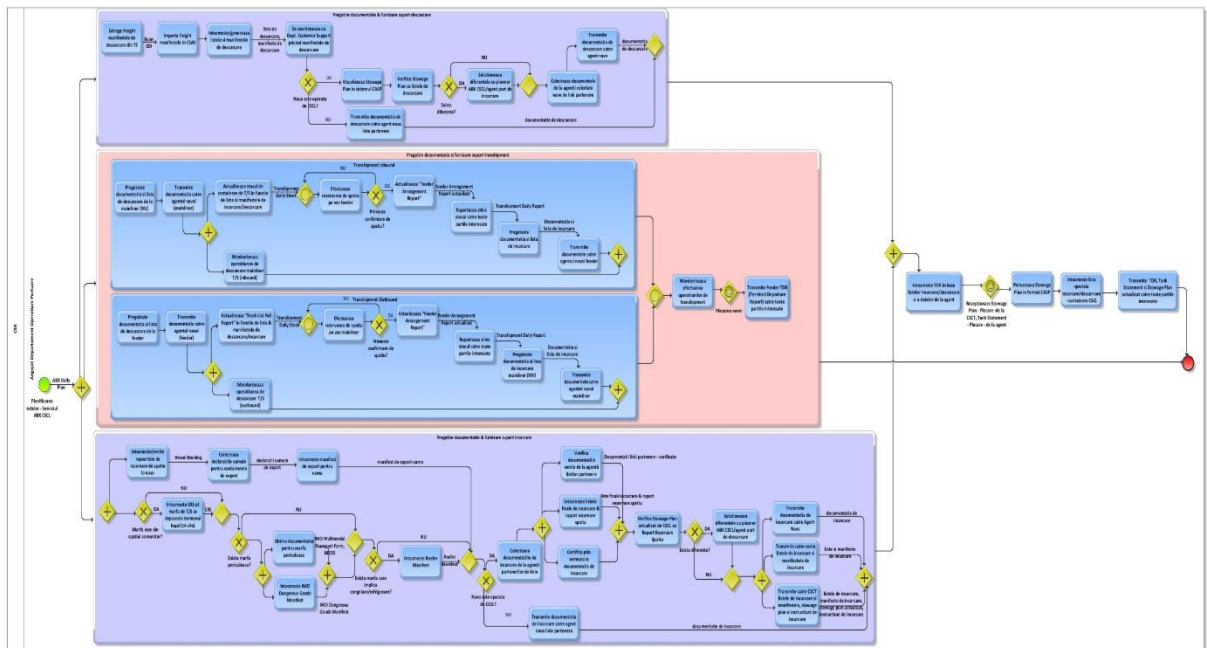
➤ Înainte de sosirea navei (în mod normal cererea este că aceste mesaje să fie transmise cu măcar 24 ore înainte de sosirea navei, după măsura posibilităților):

- Listă încărcare (în format Excel) – Se transmite către CSCT, Biroul Vamal Constanța Sud, ANSVS, IJPFCT (Garda de Coastă);
- Cargo Manifeste încărcare (format Excel) – Se transmit către CSCT, Biroul Vamal Cta Sud, ANSVS, IJPFCT (Garda de Coastă);
- Stowage plan (format EDI) – Se transmit către CSCT (Movins);
- Documentație marfă IMO – Se transmite către CSCT.

➤ După plecarea navei:

- Stowage plan (format ASC) – transmis către Stowage Center al CSCL, agentul următorului port din rotație, operatorul de serviciu ABX și alte părți interesate din cadrul CSCL;

- TDR (format Excel) – transmis către Stowage Center al CSCL, agentul următorului port din rotație, operatorul de serviciu ABX și alte părți interesate din cadrul CSCL. – nu mai târziu de 12 ore pentru navele partenere;
- Tank Statement (format PDF) – transmis către Stowage Center al CSCL, agentul următorului port din rotație, operatorul de serviciu ABX și alte părți interesate din cadrul CSCL;
- Lista încărcare/descărcare containere CSCL (format Excel) - transmis către Stowage Center al CSCL, agentul următorului port din rotație, operatorul de serviciu ABX și alte părți interesate din cadrul CSCL;
- TDR Special pentru parteneri (format Excel) - transmis către toți agenții liniilor partenere;
- Lista confirmare specială pentru parteneri (format Excel) – transmis către toți agenții liniilor partenere.



Sursa: <http://www.dpworld.ro/>

Fig. 1.2. Diagrama procesului de încărcare/descărcare containere

1.2. Utilizarea sistemul M/M/1 în activitatea portuară

Să considerăm un sistem de așteptare în care venirile urmează un proces Poisson de parametru $\lambda (0 < \lambda < \infty)$, iar serviciile sunt efectuate de o singură stație de servire. Timpul de servire a unei unități oarecare este o variabilă aleatoare independentă cu funcția de repartiție.

[88]

$$H(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & , \text{dacă } x \geq 0 \\ 0 & , \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Unitățile sunt servite în ordinea sosirii lor în sistem și după servire părăsesc sistemul.

Evident, valoarea medie a intervalelor de timp τ_n , $n \in N$ dintre două intrări consecutive în sistem este $E(\tau_n) = \lambda^{-1}$, iar timpul mediu de servire are valoarea

$$b = \int_0^{\infty} \mu x e^{-\mu x} dx = \mu^{-1}.$$

Avem deci

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Dacă $\rho \geq 1$ există o aglomerare nelimitată a sistemului, iar dacă $\rho < 1$ capacitatea sistemului este corespunzătoare.

Notând prin $X(t)$ numărul unităților care intră în sistem în intervalul de timp $(0, t]$ avem

$$P\{X(t) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n \in N^*.$$

Analog, dacă notăm prin $Y(t)$ numărul de unități servite care părăsesc sistemul în intervalul de timp $(0, t]$ și ținem seama că timpul de servire are o repartiție exponențială negativă rezultă că $\{Y(t)\}$ este de asemenea un proces Poisson cu

$$P\{Y(t) = n\} = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!}, n \in N^*.$$

Mai mult, intrările și plecările din sistem care au loc în intervalul de timp $(t, t + u)$, $u > t > 0$ sunt independente de desfășurarea procesului în intervalul de timp $(0, t]$. [73]

Să considerăm sistemul la momentul inițial $t = 0$ și să presupunem că prima unitate sosește la momentul $h > 0$. Avem

$$P\{X(h) = 1\} = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h - \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \dots = \lambda h + \lambda h \left(-\frac{\lambda h}{2} + \dots \right) = \lambda h + h\theta_1(h),$$

unde $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_2(h) = 0$, adică

$$P\{X(h) = 1\} = \lambda h + 0(h). \quad (1.1)$$

În același mod se arată că probabilitatea ca o unitate servită să plece din sistem la momentul $h > 0$ este dată de

$$P\{Y(h) = 1\} = \mu h + h\theta_2(h)$$

unde $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_2(h) = 0$. Așadar

$$P\{Y(h) = 1\} = \mu h + 0(h). \quad (1.2)$$

Deoarece venirile și plecările care au loc în intervalul de timp $(t, t + h)$ sunt independente de desfășurarea procesului în intervalul $(0, t]$, rezultă că probabilitatea ca o unitate să intre în

sistem în intervalul de timp $(t, t + h)$ este $\lambda h + 0(h)$, iar probabilitatea ca o unitate să părăsească sistemul în intervalul $(t, t + h)$ este $\lambda h + 0(h)$.

Fie acum $\xi(t)$ numărul de unități existente în sistem (în șirul de așteptare, inclusiv unitatea care se află în curs de servire), la momentul $t(t \geq 0)$. Să notăm probabilitățile de trecere corespunzătoare prin

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}, t > 0, i, j \in N^*$$

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

Convenim ca $P_{ij}(t) \equiv 0$ ori de câte ori cel puțin unul dintre indicii i, j este negativ. Procesul $\{\xi(t), t \geq 0\}$ este un proces Markov numărabil cu stările $0, 1, 2, \dots$. Deoarece

$$P\{\xi(t) = j | \xi(u) = i\} = P_{ij}(t - u), 0 \leq u < t,$$

procesul $\{\xi(t), t \geq 0\}$ este omogen.

Din cele de mai sus obținem

$$P_{ii+1}(h) = \lambda h + 0(h) \tag{1.3}$$

$$P_{ii-1}(h) = \mu h + 0(h)$$

$$P_{ii}(h) = 1 - (\lambda + \mu)h + 0(h)$$

și $P_{ih}(h) = 0(h)$ pentru orice alte valori ale indicilor i și j . Ecuțiile (1.3) arată că procesul $\{\xi(t), t \geq 0\}$ este un proces de naștere și moarte și deci probabilitățile de trecere $P_{ij}(t + h), i, j \in N^*$ satisfac ecuațiile lui Chapman-Kolmogorov [72]

$$P_{ij}(t + h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(t), \quad i, j \in N^*. \tag{1.4}$$

Înlocuind (1.3) în (1.4) obținem

$$P_{ij}(t + h) = [1 - (\lambda + \mu)h]P_{ij}(t) + \lambda h P_{ij-1}(t) + \mu h P_{ij+1}(t) + 0(h) \tag{1.5}$$

Dacă $h \rightarrow 0(h > 0)$, din (1.5) rezultă că $P_{ij}(t + h) \rightarrow P_{ij}(t)$. De asemenea, dacă în (1.5) înlocuim t prin $t - h$ și facem $h \rightarrow 0(h > 0)$ obținem $P_{ij}(t - h) \rightarrow P_{ij}(t)$.

Să introducem transformatele Laplace ale funcțiilor $G(u, t)$ și $P_{ij}(t)$

$$\bar{G}(u, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} G(u, t) dt, \quad \text{Re}(s) > 0 \tag{1.6}$$

și

$$\bar{P}_{ij}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_{ij}(t) dt, \quad \text{Re}(s) > 0 \tag{1.7}$$

și observăm că

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial G(u, t)}{\partial t} dt = -u^i + s\bar{G}(u, s).$$

Rezultă

$$\bar{G}(u, s) = \frac{u^{i+1} - \mu(1-u)\bar{P}_{i0}(s)}{(\lambda + \mu + s)u - \mu - \lambda u^2}. \quad (1.8)$$

Deoarece transformata Laplace $\bar{G}(u, s)$ este convergentă pentru $|u| \leq 1$, $Re(s) > 0$, zerourile numărătorului și numitorului membrului drept al relației (1.8) trebuie să coincidă. Zerourile u_k ($k = 1, 2$) ale numitorului le determinăm rezolvând ecuația

$$\lambda u^2 - (\lambda + \mu + s)u + \mu = 0.$$

De aici, folosind transformarea inversă, se determină imediat probabilitatea

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= \frac{2\rho^{\frac{j-i}{2}}}{\pi} e^{-(\lambda+\mu)t} \int_0^\pi e^{2t\sqrt{\lambda\mu}} \cos \omega \\ &\times \left[\sin i\omega - \rho^{\frac{1}{2}} \sin(i+1)\omega \right] \left[\sin j\omega - \rho^{\frac{1}{2}} \sin(j+1)\omega \right] \left[1 \right. \\ &\left. - 2\rho^{\frac{1}{2}} \cos \omega + \rho \right]^{-1} d\omega + \begin{cases} \rho^j(1-\rho), & \text{dacă } \rho < 1 \\ 0, & \text{dacă } \rho \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se poate obține, de asemenea, o expresie explicită pentru probabilitățile de trecere $P_{ij}(t)$ folosind o metodă combinatorială propusă de Champernowne. [32]

Ecuatiile sistemului M/M/1 în cazul echilibrului statistic. În cazul echilibrului statistic, pentru care

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = 0, \quad i, j \in N^*$$

și $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = p_{ij}$, sistemul de ecuații devine

$$\begin{aligned} -\lambda p_{i0} + \mu p_{i1} &= 0 \\ \lambda p_{ij-1} - (\lambda + \mu)p_{ij} + \mu p_{ij+1} &= 0, \quad j \in N \end{aligned}$$

Din prima ecuație rezultă $p_{i1} = \rho p_{i0}$. Luând apoi $j = 1, 2, \dots$ în ecuația a doua și calculând din aproape în aproape p_{i2}, \dots , găsim

$$p_{ij} = \rho^j p_{i0} \quad (1.10)$$

Sumând după j în egalitatea (1.10) și ținând seama că $\sum_{j \in N^*} p_{ij} = 1$, iar $\sum_{j \in N^*} \rho^j = \frac{1}{1-\rho}$ dacă $\rho < 1$, obținem

$$p_0 = 1 - \rho$$

Adică

$$p_{ij} = (1 - \rho)\rho^j \quad (1.11)$$

Să observăm că valoarea maximă a probabilității p_{ij} se obține pentru $\rho = \frac{j}{j+1}$.

Observație. Relația (1.11) se obține de asemenea cu ușurință, trecând la limită pentru $t \rightarrow \infty$ avem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = p_{ij} = \begin{cases} (1 - \rho)\rho^j, & \text{dacă } \rho < 1 \\ 0, & \text{dacă } \rho \geq 1 \end{cases}$$

deoarece

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \beta_r(v) = \frac{e^v}{\sqrt{2\pi v}}.$$

Rezultatul obținut aici arată că independent de numărul inițial i de unități existente în sistem, șirul de așteptare va conține o infinitate de unități după un timp suficient de mare de funcționare a sistemului dacă $\rho \geq 1$; dimpotrivă, dacă $\rho < 1$ repartiția procesului $\xi(t)$ atinge echilibrul statistic, tinzând către repartiția geometrică $(1 - \rho)\rho^j, j \in N^*$. Această repartiție limită este staționară, în sensul că dacă $\xi(0)$ are repartiția $(1 - \rho)\rho^j, j \in N^*$ atunci $\xi(t)$ are aceeași repartiție pentru orice $t > 0$. [29]

Caracteristicile sistemului. Fie

$$E\{\xi(t)|\xi(0) = i\} = \sum_{j=0}^{\infty} jP_{ij}(t)$$

valoarea medie a procesului $\xi(t)$. Introducând în această relație expresia lui $P_{ij}(t)$ dată prin (1.9), după efectuarea calculelor obținem

$$E\{\xi(t)|\xi(0) = i\} = \frac{2\rho^{\frac{1-i}{2}}}{\pi} e^{-(\lambda+\mu)t} \int_0^\pi e^{2t\sqrt{\lambda\mu}\cos\omega} \cdot \sin\omega \cdot \left[1 - 2\rho^{\frac{1}{2}}\cos\omega + \rho\right]^{-2} \left[\sin i\omega - \rho^{\frac{1}{2}}\sin(i+1)\omega\right] d\omega + \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho}, & \text{dacă } \rho < 1 \\ 0, & \text{dacă } \rho \geq 1 \end{cases}$$

În cazul staționar avem

$$E\{\xi(t)\} = U_M = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}, \rho < 1.$$

Numărul mediu de unități în șirul de așteptare este

$$U_M^* = \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)p_{ij} = (1-\rho) \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)\rho^j = (1-\rho)(\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \dots) = (1-\rho)\rho^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right)$$

și deci

$$U_M^* = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Între caracteristicile U_M și U_M^* avem relația

$$\frac{U_M}{U_M^*} = \rho^{-1}$$

care este utilă în aplicații.

Vom analiza în continuare perioada de ocupare a sistemului, presupunând că la momentul inițial $t = 0$ în sistem se află $i, j \in N^*$ unități. Dacă $\theta_i > 0$ este momentul când stația se eliberează, atunci evident, perioada de ocupare inițiată de i unități este θ_i . Așadar

$$\theta_i = \inf\{t | \xi(t) = 0, \xi(0) = i\}. \quad (1.12)$$

Fie

$$F_i(t) = P\{\theta_i \leq t\}, t \geq 0$$

funcția de repartiție a variabilei aleatoare θ_i și

$$Q_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j; \theta_i > t | \xi(0) = i\}, i, j \in N^*$$

probabilitatea ca la momentul t să fie j unități în sistem, în ipoteza că la momentul inițial $t = 0$ erau i unități; în intervalul de timp $(0, t]$ stația este permanent ocupată. [26]

$$Q_{ij}(t) = P\{\xi(t) \leq j - 1 | \xi(0) = i - 1\} - P\{\xi(t) \leq j - 1 | \xi(0) = i\} = P_{j-i}(t) - \rho^{-1} P_{j+i}(t) \quad i, j \in N^* \quad (1.13)$$

Determinăm mai departe repartiția numărului de unități servite într-o perioadă de ocupare precum și lungimea medie a acestei perioade.

În acest scop reamintim că dacă avem $\xi_n = j$, atunci sistemul atinge starea E_j după n pași. Notând prin $p_{00}^{(n)}$ probabilitatea ca, plecând din starea E_0 sistemul să revină în aceeași stare pentru prima dată după n pași (probabilitatea ca într-o perioadă de ocupare să fie servite n unități), avem

$$\pi_{00}^{(n)} = p_{00}^{(n)} + p_{00}^{(n-1)} \pi_{00}^{(1)} + \dots + p_{00}^{(1)} \pi_{00}^{(n-1)} \quad n \in N^*.$$

Introducând funcția generatoare găsim

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} u^n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \pi_{00}^{(n)} u^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{00}^{(n)} u^n}$$

Numărul mediu de unități servite într-o perioadă de ocupare este

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} n p_{00}^{(n)} = \alpha'(1) = \frac{1}{1-\rho}, \text{ dacă } \rho < 1,$$

unde $\alpha'(1) = \left. \frac{d\alpha}{du} \right|_{u=1}$. Dacă $\rho \geq 1, Q \rightarrow \infty$.

De aici rezultă că lungimea medie a perioadei de ocupare este $Q\mu^{-1} = \frac{1}{\mu-\lambda}$, dacă $\lambda < \mu$. Evident, dacă $\lambda = \mu$, avem $Q\mu^{-1} = \infty$. Se poate demonstra de asemenea relația importantă în aplicații

$$\frac{Q-1}{\lambda} = \frac{Q}{\mu}$$

Vom studia în cele ce urmează timpul de așteptare al unei unități oarecare, care ia loc în șirul de așteptare la momentul $t (t > 0)$. Fie, $w(t)$ timpul virtual de așteptare la momentul t și

$$P\{w(t) \leq T; \xi(0) = i\} = W(t, T)$$

funcția de repartiție corespunzătoare. Presupunând $\xi(t) = j$, rezultă că timpul necesar pentru completarea serviciului celor j unități prezente la momentul t este suma a j variabile aleatoare independente. Funcția de repartiție a fiecăreia dintre aceste variabile aleatoare fiind $H(T) = 1 - e^{-\mu T} (T \geq 0)$ rezultă

$$W(t, T) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) H_j(T) \quad (1.14)$$

unde $H_j(T)$ este convoluția iterată de ordinul j a funcției H prin ea însăși. Dacă $t \rightarrow \infty$, atunci $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_j = p_{ij} = (1 - \rho)\rho^j$ pentru $\rho < 1$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = 0$, pentru $\rho \geq 1$.

Relația (1.14) se mai scrie

$$W(t, T) = P_{i0}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(t) \int_0^T e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{j-1}}{(j-1)!} \mu dx$$

și deci, pentru $\lambda < \mu$, obținem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, T) = W(T) = (1 - \rho) \left[1 + \lambda \int_0^T e^{(\lambda - \mu)x} dx \right]$$

iar pentru $\lambda \geq \mu$, $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, T) = 0$, pentru orice valori ale lui T . Așadar, dacă $\lambda < \mu$ avem

$$W(T) = \begin{cases} 1 - \rho e^{(\lambda - \mu)T}, & \text{dacă } T \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } T < 0 \end{cases}$$

În cazul repartiției staționare a timpului virtual de așteptare,

$$P\{w(t) \leq T\} = W(T), \quad t \geq 0.$$

În acest caz timpul mediu de așteptare este dat de $W^* = E\{w(t)\} = \int_0^{\infty} T dW(T) = \frac{\rho}{-\lambda + \mu}$.

Dacă notăm prin $w_u = w(t_n - 0)$ timpul de așteptare al celei de a n -a unități, cu $P\{w_n \leq x\} = W_n(x)$, $x \geq 0$, atunci

$$w_{n+1} = \max[0, w_n + s_n - \tau_u], \quad n \in N^*, \quad (1.15)$$

unde s_n reprezintă timpul de servire a celei de a n -a unități, iar $\tau_n = t_{n+1} - t_u$ reprezintă intervalul de timp dintre momentele în care au intrat în sistem a n -a și a $n + 1$ -a unitate. $\{s_n\}$ și $\{\tau_n\}$ sunt șiruri independente de variabile aleatoare independente, identic repartizate, cu funcțiile de repartiție $P\{s_n \leq x\} = H(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$

$$P\{\tau_n \leq x\} = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \quad (1.16)$$

Introducând transformata Laplace-Stieltjes

$$\bar{W}_n(s) = E\{e^{-sw_n}\}$$

și folosind (1.15) și (1.16) avem

$$(\lambda - s)\bar{W}_{n+1}(s) = \frac{\lambda\mu}{\mu+s}\bar{W}_n(s) - sP\{w_{n+1} = 0\}, Re(s) \geq 0.$$

De aici

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_n(s)z^n = \frac{(\mu + s)(\lambda - s)\bar{W}_1(s) - s \sum_{n=2}^{\infty} P\{w_n = 0\}z^n}{(\mu + s)(\lambda - s) - \lambda\mu z}, |z| < 1, \quad (1.17)$$

Dacă $Re(s) \geq 0$ și $|z| < 1$, singura rădăcină a numitorului expresiei din partea dreaptă a acestei egalități este

$$s(z) = \frac{\lambda - \mu + \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu z}}{2}$$

Se demonstrează [68] că dacă $\lambda < \mu$ repartiția limită $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{w_n \leq x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(x)$ există și este independentă de repartiția inițială. Ne vom limita la a găsi forma explicită a acestei repartiții limită. În acest scop vom presupune că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(sx) = W(x)$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{W}_n(s) = \bar{W}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dW(x), Re(s) \geq 0$$

există, ceea ce este posibil deoarece $W_n(x)$ și $\bar{W}(s)$ satisfac condițiile teoremei lui Helly-Bray [35]. Din cele de mai sus rezultă $\bar{W}(s)$ că este transformata Laplace-Stieltjes a funcției $W(x)$.

Efectuând transformarea inversă găsim

$$W(x) = \begin{cases} 1 - \rho e^{(\lambda-\mu)x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

dacă $\rho < 1$. $W(x) = 0$, dacă $\rho \geq 1$. Rezultatul obținut arată că repartiția limită a șirului $\{w_n\}_{n \in N^*}$ are aceeași expresie ca și repartiția limită a procesului $\{w(t), t \geq 0\}$, ceea ce era de așteptat. Din (1.18) rezultă că probabilitatea ca o unitate să aștepte un timp mai mare decât x este $\rho e^{(\lambda-\mu)x}, x > 0, \lambda < \mu$. În particular, dacă $x = 0$, obținem probabilitatea ca o unitate oarecare să nu aștepte, care este egală cu $1 - \rho$, rezultat pe care l-am stabilit și pe altă cale. [17]

1.3. Aplicarea sistemul de așteptare M/E_k/1 în portul maritim Constanța

Să considerăm sistemul monocanal M/E_k/1 caracterizat prin aceea că, fluxul de intrare este poissonian cu media λ^{-1} ($0 < \lambda < \infty$), iar timpul de servire are repartiția Erlang [54]

$$dH(x) = \frac{e^{-\mu kx} (k\mu)^k x^{k-1}}{(k-1)!} dx \quad (0 < x < \infty) \quad (1.19)$$

cu valoarea medie μ^{-1} . Evident, în cazul acestui sistem procesul $\{\xi(t), t \geq 0\}$ nu este un proces Markov. Vom observa, însă, că aici mecanismul de servire prezintă o caracteristică esențială, ceea ce ne permite să reducem studiul procesului $\{\xi(t), t \geq 0\}$ la studiul unui proces Markov. Într-adevăr, în sistemul $M/E_k/1$ serviciul poate fi interpretat ca efectuându-se în k faze consecutive, duratele de timp necesare pentru fiecare fază fiind variabile aleatoare independente cu repartiția exponențială negativă $k\mu e^{-\mu kx} dx$ ($0 < x < \infty$); o unitate este servită complet la încheierea serviciului în faza k . Intrările în sistem și în fiecare dintre cele k faze precum și ieșirile din cele k faze urmează un proces Poisson de parametru $k\mu$. Așadar, dacă notăm prin $\xi^*(t)$ numărul de faze din sistem la momentul t ($t \geq 0$), atunci evident $\{\xi^*(t), t \geq 0\}$ este un proces Markov omogen numărabil. Deoarece între numărul de unități din sistem $\xi(t), t \geq 0$ și numărul de faze $\xi^*(t), t \geq 0$ avem relația

$$\xi(t) = \left[\frac{\xi^*(t) + k - 1}{k} \right],$$

unde $[A]$ reprezintă cel mai mare întreg conținut în A , rezultă că este suficient să studiem procesul $\{\xi^*(t), t \geq 0\}$. [2]

Această interpretare a mecanismului de servire din sistemul cu repartiția timpului de servire (1.19) se datorează lui Erlang [54], care a obținut repartiția limită a procesului $\{\xi^*(t), t \geq 0\}$.

Transformările care au loc în sistem într-un interval infinitezimal $(t, t + h)$ ($t, h > 0$) sunt caracterizate prin probabilitățile de trecere

$$P_{ii}(h) = c_{ij}h + 0(h) \quad i \neq j \quad (1.20)$$

$$P_{ii}(h) = 1 - c_{ii}h + 0(h),$$

unde

$$c_{00} = \lambda, c_{i,i-1} = k\mu, c_{ii} = \lambda + k\mu, i \in N$$

$$c_{i,i+k} = \lambda, i \in N^*;$$

în toate celelalte cazuri $c_{ij} = 0$. Probabilitățile (1.20) satisfac ecuațiile lui Chapman-Kolmogorov [64]

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = -c_{jj}P_{ij}(t) + \sum_{l \neq j} P_{il}c_{lj}, \quad i, j \in N^*$$

de unde, în condițiile de mai sus, găsim

$$\frac{dP_{i0}(t)}{dt} = -\lambda P_{i0}(t) + k\mu P_{i1}(t)$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu)P_{ij}(t) + k\mu P_{i,j+1}(t) \quad (j = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu)P_{ij}(t) + k\mu P_{ij+1}(t) + \lambda P_{ij-k}(t), (j = k, k+1, \dots)$$

Folosind funcția generatoare $G_i(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)z^j$, $|z| < 1$, obținem ecuația

$$z = \frac{\partial G_i(z, t)}{\partial t} = [\lambda z^{k+1} + k\mu - (\lambda + k\mu)z]G_i(z, t) - k\mu(1-z)P_{i0}(t)$$

care, cu ajutorul transformatei Laplace $\bar{G}_i(z, s)$, se reduce la

$$\bar{G}_i(z, s) = \frac{z^{i+1} - k\mu(1-z)\bar{P}_{i0}(s)}{(\lambda + k\mu + s)z - k\mu - \lambda z^{k+1}} (|z| < 1, Re(s) > 0) \quad (1.21)$$

Aici

$$\bar{G}_i(z, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} G_i(z, t) dt, Re(s) > 0$$

$$P_{ij}(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_{ij}(t) dt, Re(s) > 0$$

Deoarece, pentru $Re(s) > 0$, în cercul $|z| = 1$, numitorul expresiei din membrul drept al egalității (1.21) are o singură rădăcină, rezultă

$$\bar{P}_{i0}(s) = \frac{\alpha^{i+1}}{k\mu(1-\alpha)},$$

unde $\alpha = \alpha(s)$ este rădăcina în z a ecuației $-\lambda z^{k+1} + (\lambda + k\mu + s)z - k\mu = 0$, $|z| = 1$.

Așadar, egalitatea (1.21) se scrie

$$\bar{G}_i(z, s) = \frac{z^{i+1} - (1-z)\frac{\alpha^{i+1}}{1-\alpha}}{(\lambda + k\mu + s)z - k\mu - \lambda z^{k+1}} (|z| < 1, e(s) > 0).$$

În cazul procesului staționar $\xi^*(t)$ avem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = P_j, j \in N^*$$

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i0}(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \bar{P}_{i0}(s)$$

și, deci, din (1.21) rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_i(z, t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \bar{G}_i(z, s) = \frac{k\mu P_0(1-z)}{\lambda z^{k+1} - (\lambda + k\mu)z + k\mu} (|z| \leq 1) \quad (1.22)$$

Vom putea așadar să determinăm $\lim_{t \rightarrow \infty} G_i(z, t)$ dacă vom cunoaște zerourile expresiei $\lambda z^{k+1} - (\lambda + k\mu)z + k\mu$. Acestea sunt chiar rădăcinile ecuației

$$z = \frac{\lambda z^{k+1} + k\mu}{\lambda + k\mu} = u(z)$$

Ori este cunoscut că această ecuație are o rădăcină $0 < \alpha_0 < 1$ dacă și numai dacă

$$\left. \frac{du}{dz} \right|_{z=1} = u'(1) = \frac{\lambda(k+1)}{\lambda + k\mu} > 1$$

adică dacă și numai dacă $\rho > 1$. Evident, în ipoteza că α_0 există, avem $\lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha(s) = \alpha_0$.

Derivând apoi expresia $(\lambda + k\mu + s)\alpha - k\mu - \lambda\alpha^{k+1} = 0$ în raport cu s obținem

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s) = \begin{cases} \frac{1}{k(\lambda - \mu)}, & \text{dacă } \rho < 1; \\ \infty, & \text{dacă } \rho = 1. \end{cases}$$

Folosind acest rezultat găsim valoarea lui P_0 , pentru $\rho \leq 1$. Avem

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i0}(t) = \begin{cases} 1 - \rho, & \text{dacă } \rho < 1; \\ 0, & \text{dacă } \rho = 1. \end{cases}$$

Repartiția limită a timpului de așteptare w , se obține acum cu ușurință. Dacă sistemul este liber atunci evident $w = 0$ și $P\{w = 0\} = 1 - \rho$, iar dacă serviciul se efectuează în $j \in N$ faze, atunci w este timpul necesar pentru completarea acestor j faze. [54]

$$P\{x < w < x + dx\} = \sum_{j=1}^{\infty} [(1 - \rho) \sum_{n=1}^k C_n z_n^{-j}] e^{-k\mu x} \frac{(k\mu)^j}{(j-1)!} x^{j-1} dx = (1 - \rho) \sum_{n=1}^k C_n \frac{1}{z_n} k\mu e^{-k\mu(1-\frac{1}{z_n})x} dx, \quad (0 < x < \infty)$$

numărul mediu de faze ψ_M se determină folosind relația

$$\left(1 + \frac{1}{k}\rho\right) \sum_{j=1}^{\infty} j^2 P_j = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 P_{j+1} + \frac{1}{k}\rho \sum_{j=k}^{\infty} j^2 P_{j-k}$$

sau

$$\left(1 + \frac{1}{k}\rho\right) \rho \sum_{j=1}^{\infty} j^2 P_j = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)^2 P_j + \frac{1}{k}\rho \sum_{j=0}^{\infty} (j+k)^2 P_j$$

obținem

$$2(1 - \rho)\psi_M = (1 - P_0) + \rho k$$

adică

$$\psi_M = \frac{\rho(1 + k)}{2(1 - \rho)}$$

Timpul mediu de așteptare pentru o fază este

$$\frac{\psi_M}{\mu} = \frac{\rho(1 + k)}{2\mu(1 - \rho)}$$

De aici, împărțind prin k obținem numărul mediu de unități din sistem U_M și timpul mediu de așteptare în șir W^* . Avem

$$U_M = \frac{\psi_M}{k} = \frac{\rho(1 + k)}{2k(1 - \rho)}$$

$$W^* = \frac{\psi_M}{k\mu} = \frac{\rho(1 + k)}{2k\mu(1 - \rho)}$$

1.4. Sisteme cu flux de intrare și (sau) timp de servire determinat

În acest subcapitol vom trata sistemul de așteptare D/D/1 și unele variante ale lui obținute în ipoteza că numai fluxul de intrare sau numai duratele de servire sunt determinate (regulate). [65]

Sistemul de așteptare D/D/1. Să presupunem că intrările unităților în sistemul de așteptare cu o singură stație au loc la intervale egale de timp și timpul de servire este constant, același pentru toate unitățile. Servirea unităților se efectuează în ordinea intrării acestora în sistem.

Dacă unitățile sosesc în sistem la intervale egale de timp a (adică intensitatea fluxului de intrare este $\frac{1}{a}$ și fiecare unitate este servită într-o perioadă de lungime b (intensitatea servirii este $\frac{1}{b}$), atunci pentru $\frac{b}{a} < 1$ unitățile nu așteaptă pentru a fi servite, ci – îndată ce sosesc – începe servirea lor. Dacă $\frac{b}{a} > 1$, șirul de așteptare va crește nelimitat. Evident, în cazul $b = a$ unitățile nu așteaptă, dacă în momentul inițierii serviciului nu există nici o unitate în sistem; în caz contrar se formează un șir de așteptare de lungime constantă. [61]

Fie $\frac{b}{a} < 1$ și să presupunem că la momentul inițial există n ($n \geq 2$) unități în șirul de așteptare. La sfârșitul perioadei de timp de lungime nb toate unitățile sunt servite. În acest timp sosesc încă $\left[\frac{nb}{a}\right]$ noi unități, care vor lua loc, în ordinea sosirii, în șirul de așteptare. Timpul de servire al acestor $\left[\frac{nb}{a}\right]$ unități este $\left[\frac{nb}{a}\right]b$; în acest timp sosesc încă $\left[\frac{\left[\frac{nb}{a}\right]b}{a}\right] + 1$ unități. Deoarece $\frac{b}{a} < 1$, avem

$$\left[\frac{nb}{a}\right] > \left[\frac{\left[\frac{nb}{a}\right]b}{a}\right] + 1.$$

De aici rezultă că numărul unităților care sosesc în perioada de timp necesară pentru servirea unităților existente deja în sistem se micșorează treptat până se ajunge la situația când unitățile nou sosite vor fi servite imediat, fără a mai aștepta. [73]

Să notăm prin

$$P_{nm}(t) = P\{\xi(t) = m | \xi(0) = n\}, m, n, \in N^*$$

unde $\xi(t)$ reprezintă numărul unităților existente în șirul de așteptare la momentul t ($t > 0$).

Avem de asemenea

$$P_{nm}(0) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } m = n \\ 0, & \text{dacă } m \neq n \end{cases}$$

Putem determina acum cu ușurință numărul $\xi(t)$ al unităților care așteaptă serviciul precum și timpul de așteptare al unei unități oarecare. Este suficient să observăm că, pentru $t \geq 0$, probabilitatea $P_{nm}(t)$, $m \in N^*$, ia numai valorile 0 sau 1.

Fie, la un moment oarecare, încă j unități nou sosite în șirul de așteptare. Atunci a $(j + 1)$ -a unitate nou sosită va începe serviciul după ce s-a încheiat perioada necesară pentru servirea celor $n + j$ unități existente deja în șirul de așteptare, adică după $(n + j)b \leq (j + 1)a$ unități de timp. Dar $j = \left\lfloor \frac{nb - a}{a - b} \right\rfloor + 1$, și deci timpul T , necesar pentru servirea unităților din șirul de așteptare este

$$T = \left(n + \left\lfloor \frac{nb - a}{a - b} \right\rfloor + 1 \right) b = \left\lfloor \frac{na - b}{a - b} \right\rfloor$$

deoarece din $(n + j)b \leq (j + 1)a$ rezultă

$$nb - a \leq j(a - b)$$

Observăm că putem obține unele variante ale acestui model pentru care se găsesc de asemenea expresii simple, dar mai importante – pentru diverse caracteristici. De exemplu, poate fi considerat cazul când a se divide prin b și t se divide prin a . Să studiem creșterea timpului de servire, care apare ca urmare a faptului că $b < a$. Astfel, pentru fiecare unitate care intră în sistem există o rezervă de $a - b$ unități de timp. Fiecăreia dintre cele $n - 1$ unități existente inițial în șirul de așteptare ar trebui deci să-i mai adăugăm $\frac{b}{a - b}$ unități pentru ca timpul cât este stația liberă să poată fi determinat. Deoarece prima unitate a intrat deja în sistem, mai trebuie să intre $\frac{b}{a - b}(a - 1)$ unități.

Așadar, numărul de unități existente în șirul de așteptare după începerea procesului de servire este :

$$n - 1 + \frac{b}{a - b}(a - 1) = \frac{a(n - 1)}{a - b}$$

Dacă includem aici și prima unitate atunci numărul acestor unități este

$$\frac{a(n - 1)}{a - b} + 1 = \frac{na - b}{a - b}$$

De aici, rezultă că lungimea θ^* a primei perioade de ocupare este

$$\theta^* = \frac{b(na - b)}{a - b} \tag{1.23}$$

Astfel, dacă o unitate sosește în momentul $t < \theta^*$, atunci înaintea ei au intrat deja în sistem $\frac{t}{a}$ unități și numărul total al unităților existente în șirul de așteptare înainte de momentul t ($t > 0$) este

$$\frac{t}{a} + n - 1.$$

În timpul t sunt servite $\frac{t}{b}$ unități. Deci imediat înainte de momentul t în șirul de așteptare se află $\frac{t}{a} + n - 1 - \frac{t}{b}$ unități.

Timpul de așteptare al unității care sosește în momentul $t + a$ este

$$w(t) = \begin{cases} 0 & , \text{dacă } \theta^* \leq t, \\ \left[n + \frac{t(b-a)}{ab} \right] b, & \text{dacă } 0 < t \leq \theta^* \end{cases} \quad (1.24)$$

și

$$w(0) = (N - 1)b$$

deoarece $w(0)$ reprezintă timpul de așteptare în șir a celei de a N -a unități din cele $n, n \in N^*$ unități inițiale.

Soluția (1.24) depinde evident de timp și de numărul inițial de unități din sistem. Starea staționară se atinge numai după momentul θ^* . Timpul de rămânere în sistem a unității care sosește în momentul $t + a$ a este

$$w^*(t) = \begin{cases} b & , \text{dacă } \theta^* \leq t \\ \left(\frac{t}{a} + n - \frac{t}{b} \right) b, & \text{dacă } 0 < t \leq \theta^* \\ Nb & , \text{dacă } t = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Să presupunem acum că în cursul perioadei de ocupare θ^* au loc modificări atât ale duratei de servire cât și ale lungimilor intervalelor de timp dintre două intrări consecutive. Fie a^* și b^* , respectiv, noile valori ale acestor mărimi și să admitem că această modificare se produce în momentul $t_0 < \theta^*$. Servirea unității care se află în stație se va face tot în timpul b . Apoi unitățile care intră în sistem și unitatea care va fi servită definesc starea inițială a unui nou proces. Suntem astfel conduși la o nouă valoare θ^* , pe care o notăm θ_1^* ; de asemenea se va schimba timpul de așteptare în șir și în sistem. Noua perioadă de ocupare θ_1^* va depinde de alegerea numerelor a^* și b^* și deci este posibil ca $\theta_1^* < \theta^*$. Evident, $\theta_1^* = \theta^*$ dacă și numai dacă $a = a^*, b = b^*$ ceea ce se poate arăta utilizând relația (1.23). [92]

Sistemul de așteptare M/D/1. Considerăm acum un sistem de așteptare monocanal, în care fluxul de intrare urmează o lege Poisson de parametru λ , iar timpul de servire este o constantă. Disciplina de servire respectă principiul „primul venit, primul servit”.

Ne limităm aici la determinarea funcției de repartiție a timpului de așteptare, în cazul staționar.

Utilizând notațiile cunoscute avem

$$w_{n+1} = \max(w_n + s_n - \tau_n, 0), n \in N$$

și

$$W(t) = P\{\bar{w} \leq t\}, t \geq 0 \quad (1.26)$$

unde $\bar{w}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n w_n(t)$ reprezintă densitatea de probabilitate a repartiției timpului de așteptare. Aici $P_n(t) = P\{\xi(t) = n\}, t \geq 0$.

În cele ce urmează presupunem $t > 0$, adică a $(n + 1)$ -a unitate trebuie să aștepte pentru a fi servită. În acest caz

$$P\{w_{n+1} < \bar{w}\} = P\{w_n + s_n - \tau_n < w\} = P\{w_n < w - s_n - \tau_n\}$$

Variabilele aleatoare independente s_n și τ_n , au respectiv repartițiile

$$H(y) = \begin{cases} 1, & y > 1 \\ 0, & y < 1 \end{cases} \quad (1.27)$$

$$H(1 + 0) - H(1 - 0) = 1$$

și

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x < \infty \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Relația (1.27) pune în evidență faptul că durata de servire este o constantă, egală cu o unitate de timp. [97], [98]

Menționăm că timpul de așteptare al celei de a n -a unități nu depinde de durata servirii ei și de intervalul de timp în care sosește a $(n + 1)$ -a unitate. Rezultă că probabilitatea evenimentului compus ca $w_n < \bar{w} - s_n + \tau_n$ dacă $x \leq \tau_n < x + dx$ și $y \leq s_n < y + dy$ este

$$P\{w_n < \bar{w} + x - y\} dF(x) dH(y)$$

De aici, după însumare și trecere la limită, găsim că

$$P\{w_{n+1} < \bar{w}\} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P\{w_n < \bar{w} + x - y\} dF(x) dH(y)$$

sau

$$P\{\bar{w}\} = W = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P\{\bar{w} + x - y\} dF(x) dH(y) \quad (1.29)$$

deoarece este cunoscut că în cazul procesului staționar toate unitățile au aceeași repartiție W a timpului de așteptare. Substituind în (1.29) funcția H prin expresia sa (1.27) obținem [114]

$$W = \int_0^{\infty} P\{\bar{w} + x - 1\} dF(x), \bar{w} \geq 1 \quad (1.30)$$

iar pentru $\bar{w} < 0$ avem $W = 0$. Pentru, $0 \leq \bar{w} < 1$ putem scrie

$$\int_{1-\bar{w}}^{\infty} P\{\bar{w} + x - 1\} dF(x) \quad (1.31)$$

care, după integrarea prin părți, ne conduce la transformata Laplace-Stieltjes a funcției W

$$\bar{W}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\bar{w}} dW = s \int_0^{\infty} e^{-s\bar{w}} P\{\bar{w}\} d\bar{w}, \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

Această transformată [98] se calculează imediat dacă în (1.31) înlocuim funcția F prin expresia sa (1.28) și apoi efectuăm calculele. Găsim

$$\bar{W}(s) = s \int_0^1 e^{-s\bar{w}} d\bar{w} \int_{1-\bar{w}}^{\infty} \dots + s \int_1^{\infty} e^{-s\bar{w}} d\bar{w} \int_0^{\infty} \dots$$

care se mai scrie

$$\bar{W}(s) = \frac{se^{-\lambda}}{\lambda e^{-s} - \lambda + s} \bar{W}(\lambda), \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

Dacă $s \rightarrow 0$, atunci $\bar{W}(s) \rightarrow 1$ și $e^{-\lambda} \bar{W}(\lambda) \rightarrow 1 - \lambda > 0$ (pentru procesul staționar este îndeplinită condiția $\lambda < 1$). Așadar

$$\bar{W}(s) = \frac{(1-\lambda)s}{\lambda e^{-s} - \lambda + s}, \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

Funcția original $W = P\{\bar{w}\}$ se obține acum utilizând formula pentru transformarea inversă. [112]. Rezultă

$$W = (1-\lambda) \sum_{n=0}^{[t]} \frac{(n-t)^n}{n!} \lambda^n e^{\lambda(t-n)}$$

1.5. Caracteristici generale ale sistemului de așteptare M/G/1

Să presupunem că unitățile sosesc într-un sistem cu o singură stație la momentele $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ și că intervalele de timp dintre două intrări consecutive $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ ($n \in N^*$; $t_0 = 0$) sunt variabile aleatoare independente cu repartiția

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

adică fluxul de intrare este un proces Poisson de parametru λ . Duratele serviciilor succesive sunt de asemenea variabile aleatoare independente între ele și independente de $\{t_n\}$ cu funcția de repartiție H și valoarea medie finită $b(0 \leq b < \infty)$. Disciplina de servire este „primul venit, primul servit”. [63]

Fie $w(t)$ timpul virtual de așteptare la momentul $t(t \geq 0)$. Dacă repartiția numărului de unități existente în sistem la momentul t , $\xi(t)$ poate fi determinată atunci repartiția lui $w(t)$ se poate obține cu ușurință, așa cum am văzut în cazul sistemului M/M/1. Totuși procedeul obișnuit de determinare a repartiției timpului virtual de așteptare $w(t)$ prin intermediul repartiției lui $\xi(t)$ este incomod în cazul general când procesul $\{\xi(t), t \geq 0\}$ nu este un proces Markov. Takacs [98]

a propus o metodă simplă de determinare directă a repartiției lui $w(t)$, arătând că în sistemul M/G/1 procesul $\{w(t), t \geq 0\}$ este un proces Markov mixt cu parametru continuu.

Într-adevăr, procesul $\{w(t), t \geq 0\}$ poate fi descris astfel. La momentul inițial $t = 0$ este posibil ca $w(0) = 0$ sau $w(0) \neq 0$. Dacă $w(0) = 0$, stația este liberă la momentul $t = 0$ și unitatea care intră în sistem în acest moment va fi servită imediat. Dacă $w(0) \neq 0$ și până în momentul $w(0)$ nici o unitate nu intră în sistem, atunci $w(0)$ reprezintă timpul total de servire a unităților existente în sistem la momentul $t = 0$. Altfel spus, $w(0) \neq 0$ este momentul în care se încheie prima perioadă de ocupare (de încărcare) a stației, dacă nici o unitate nu intră în sistem. La momentul $t_n, n \in N, w$ are un salt de mărime s_n , unde s_n reprezintă timpul de servire a celei de a n -a unități. Funcția w descrește liniar cu câte o unitate. Dacă, $w(t) = 0, t > 0$, atunci timpul virtual de așteptare w va rămâne egal cu zero până în momentul $t_k > t, k \in N$ când o nouă unitate intră în sistem. Așadar tranzițiile dintr-o stare în alta a procesului $\{w(t), t \geq 0\}$, au loc fie prin salturi fie în mod continuu. [95]

Să observăm că procesul $\{w(t), t \geq 0\}$ poate fi descris cu ajutorul unui alt proces $\{w^*(t), t \geq 0\}$, cu creșteri independente, omogen, ceea ce ne va permite să determinăm – printr-un procedeu uzual – funcția de repartiție a variabilei aleatoare $w(t)$. Procesul $\{w^*(t), t \geq 0\}$ este definit astfel încât $w^*(0) = 0$, iar pentru $t = t_n (n \in N)$ $w^*(t)$ are un salt de mărime s_n . Pentru toate celelalte valori ale lui t din intervalul $[0, \infty]$, w^* descrește liniar cu câte o unitate. Avem

$$w(t) = w^*(t) - \inf_{0 \leq \theta \leq t} w^*(\theta)$$

dacă $w(0) = 0$; dacă $w(0) > 0$ atunci

$$w(t) = \begin{cases} w^*(t) + w(0) & , \text{dacă } w(0) + \inf_{0 \leq \theta \leq t} w^*(\theta) \geq 0 \\ w^*(t) - \inf_{0 \leq \theta \leq t} w^*(\theta) & , \text{dacă } w(0) + \inf_{0 \leq \theta \leq t} w^*(\theta) \leq 0 \end{cases}$$

Așadar, timpul virtual de așteptare $w(t)$ are aceeași repartiție ca $\sup_{0 \leq \theta \leq t} w^*(\theta)$ și limita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{w(t) \leq x | w(0) = x_0\} = P\left\{ \sup_{0 \leq \theta \leq \infty} w^*(\theta) \leq x | w(0) = x_0 \right\}, t > 0, x, x_0 \geq 0$$

există și este independentă de repartiția lui $w(0)$. [106]

Fie

$$W(x_0, x, t) = W(x, t) = P\{w(t) \leq x | w(0) = x_0\}, t > 0, x, x_0 \geq 0 \quad (1.32)$$

$$W(x_0, x, 0) = W(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < x_0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq x_0, x_0 \geq 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

și

$$\bar{W}(s, t) = \int_0^{\infty} e^{-sx} W(x, t) dx, t \geq 0, Re(s) > 0 \quad (1.34)$$

$$\bar{H}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x), Re(s) > 0. \quad (1.35)$$

În cele ce urmează vom presupune că funcția de repartiție W a timpului virtual de așteptare este continuă pentru orice $x \geq 0, t \geq 0$, are derivată parțială în raport cu x , pentru $x \geq 0$ și

$$\int_0^x W(x - y, t) dH(y)$$

este de asemenea o funcție continuă pentru $x \geq 0$.

Considerând timpul virtual de așteptare în intervalul de timp $(t, t + \Delta t]$, rezultă că evenimentul $w(t + \Delta t) \leq x$ se realizează dacă are loc unul din următoarele evenimente incompatibile două câte două:

1. În intervalul de timp $(t, t + \Delta t]$ nu sosește nici o unitate în sistem și $w(t) \leq x + \Delta t$;
2. În intervalul de timp $(t, t + \Delta t]$ sosește o unitate în sistem și, dacă $w(t) > \Delta t$, timpul de servire al acesteia este mai mic decât $x - w(t) + \Delta t$; dacă $w(t) \leq \Delta t$, timpul de servire al unității sosite în sistem este mai mic decât $x - w(t) + \alpha \Delta t$, ($0 \leq \alpha \leq 1$);
3. În intervalul de timp $(t, t + \Delta t]$, sosesc mai multe unități în sistem.

Deoarece evenimentele de mai sus se produc cu probabilitățile

$$(1 - \lambda \Delta t)W(x + \Delta t, t) + 0(\Delta t),$$

$$\lambda \Delta t \int_0^{x+\Delta t} W(x + \Delta t - y, t) dH(y) + 0(\Delta t)$$

și $0(\Delta t)$ respectiv, deducem că

$$W(x, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)W(x + \Delta t, t) + \lambda \Delta t \int_0^{x+\Delta t} W(x + \Delta t - y, t) dH(y) + 0(\Delta t) \quad (1.36)$$

Pe de altă parte

$$W(x + \Delta t, t) - W(x, t) = \Delta t \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + 0(\Delta t).$$

Substituind această expresie pentru $W(x + \Delta t, t)$ în (1.36), împărțind cu $\Delta t > 0$ și trecând la limită pentru $\Delta t \rightarrow 0$ obținem ecuația integro-diferențială a procesului

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = -\lambda \left[W(x, t) - \int_0^x W(x - y, t) dH(y) \right] \quad (x \geq 0, t \geq 0) \quad (1.37)$$

Utilizând transformata Laplace \bar{W} a funcției de repartiție \bar{W} , definită prin (1.34), avem

$$\frac{\partial \bar{W}(s, t)}{\partial t} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} dx \quad (1.38)$$

și

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} dx = e^{-sx} W(x, t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-sx} W(x, t) dx$$

sau

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} dx = -W(0, t) + s\bar{W}(s, t) \quad (1.39)$$

Din (1.37), după înmulțirea cu e^{-sx} și integrarea în raport cu x pe intervalul $[0, \infty)$ obținem de asemenea [97]

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} dx - \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} dx = -\lambda \int_0^{\infty} e^{-sx} [W(x, t) - \int_0^x W(x - y, t) dH(y)] dx$$

sau ținând seama de (1.38), (1.39) și (1.35),

$$\frac{\partial \bar{W}(s, t)}{\partial t} - [s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)] \bar{W}(s, t) = -W(0, t) \quad (1.40)$$

Această ecuație ne permite să determinăm transformata Laplace \bar{W} dacă este cunoscută probabilitatea $W(0, t) = P_0(t) = P\{w(t) = 0\}$. Pentru a rezolva ecuația (1.40) o înmulțim cu $\exp\{-[s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)]t\}$ și observăm că avem

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\bar{W}(s, t) \exp\{-[s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)]t\}\} = -W(0, t) \exp\{-[s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)]t\}$$

de unde obținem

$$\bar{W}(s, t) \exp\{-[s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)]t\} = - \int_0^t W(0, u) \exp\{-[s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)]u\} du + C \quad (1.41)$$

unde C este o constantă pe care o determinăm luând aici $t = 0$. [90] Găsim

$$C = \bar{W}(s, 0) = \int_0^{\infty} e^{-sx} W(x, 0) dx$$

adică, folosind (1.33),

$$C = \int_{x_0}^x e^{-sx} dx = \frac{1}{s} e^{-sx_0}$$

Așadar, soluția ecuației (1.40) este

$$\bar{W}(s, t) = \left[\frac{1}{s} e^{-sx_0} - \int_0^t W(0, u) \exp\{-[s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)]u\} du \right] \exp\{[s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)]t\}$$

sau

$$\begin{aligned} \bar{W}(s, t) &= \frac{1}{s} \exp\{-sx_0 + [s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)]t\} \\ &- \int_0^t W(0, t - u) \exp\{[s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)]u\} du \end{aligned} \quad (1.42)$$

Probabilitatea $P_0(t) = W(0, t)$ se determină fie prin procedeul utilizat în cazul sistemului M/M/1, fie printr-o metodă probabilistică indicată în cazul când este cunoscută funcția de repartiție a duratelor perioadelor de ocupare a stației. Prezentăm, în cele ce urmează, această metodă. [98]

Vom spune că sistemul de așteptare considerat se află în starea E_k la momentul t , dacă $\xi(t) = k$. Fie $m_0(t)$ numărul mediu de tranziții $E_0 \rightarrow E_1$ în intervalul $(0, t]$. Reamintim că procesul de servire se inițiază fie în ipoteza $w(0) = 0$, fie în ipoteza $w(0) > 0$. În acest al doilea caz, unitatea care intră în sistem în momentul $t = 0$ găsește stația ocupată, ceea ce înseamnă că procesul de servire începe cu o perioadă de încărcare a stației. Notăm prin Γ^* funcția de repartiție a duratei inițiale de ocupare a stației și prin Γ funcția de repartiție a lungimilor perioadelor de ocupare, dacă $w(0) = 0$. [91]

Stația de servire este ocupată la momentul t dacă are loc unul din următoarele două evenimente incompatibile :

- lungimea perioadei inițiale de ocupare este mai mare decât t ;
- la momentul u , $0 < u < t$ intră în sistem a n -a, $n \in N$, unitate, ea fiind ultima care sosește în intervalul $(0, t]$ și care găsește stația liberă; lungimea perioadei de ocupare care începe la momentul t este mai mare decât $t - u$.

Probabilitatea ca stația să fie ocupată la momentul t este deci

$$1 - P_0(t) = 1 - \Gamma^*(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 [1 - \Gamma(t - u)] dP\{t_n \leq u, w_n = 0\} \quad (1.43)$$

Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{t_n \leq t, w_n = 0\} = m_0(t)$$

din (1.43) rezultă

$$P_0(t) = W(0, t) = \Gamma^*(t) - \int_0^1 [1 - \Gamma(t - u)] dm_0(t) \quad (1.44)$$

Asupra acestei relații vom reveni atunci când vom studia perioada de ocupare a sistemului.

Observație. Funcția de repartiție W poate fi, de asemenea, determinată utilizând transformata Laplace-Stieltjes. [86]

$$\bar{W}(s, t) = E\{e^{-sw(t)}\} = \int_0^\infty e^{-sx} d_x W(x, t),$$

care verifică ecuația

$$\frac{\partial \bar{W}(s, t)}{\partial t} = [s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)] \bar{W}^*(s, t) - sP_0(t) \quad (1.45)$$

În scopul obținerii acestei ecuații, să notăm prin $n(\Delta t)$ numărul de unități care intră în sistem în intervalul $(t, t + \Delta t)$. Fluxul de intrare fiind poissonian avem

$$P\{n(\Delta t) = j\} = e^{-\lambda \Delta t} \frac{(\lambda \Delta t)^j}{j!}, \quad j \in N^*$$

$$P\{n(\Delta t) = 0\} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{n(\Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{n(\Delta t) > 1\} = o(\Delta t).$$

Mai mult, funcția de repartiție W fiind continuă la stânga pentru orice $x \in [0, \infty)$, este satisfăcută egalitatea

$$W(\Delta t, t) = W(0, t) + o(\Delta t)$$

de unde rezultă că

$$0 \leq \int_0^{\Delta t} x dx W(x, t) \leq [W(\Delta t, t) - W(0, t)] \Delta t$$

sau

$$0 \leq \int_0^{\Delta t} x dx W(x, t) \leq o(\Delta t).$$

Perioada de ocupare

Să notăm prin $X(t)$ numărul de unități care sosesc în intervalul de timp $(0, t]$. [70] Evident, în sistemul de așteptare M/G/1, avem

$$P\{X(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in N^*.$$

Fie $T(t) = s_1 + s_2 + \dots + s_{x(t)}$, unde s_1, s_2, \dots sunt variabile aleatoare independente având funcția de repartiție H . Rezultă că variabila aleatoare $T(t)$ are repartiția

$$\Phi(x, t) = P\{T(t) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} H(x), \quad n \in N$$

unde, ca de obicei, am notat prin H_n cea de a n -a convoluție a funcției H prin ea însăși. Evident

$$H_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Perioada de ocupare inițiată prin timpul virtual de așteptare $w(0) = x_0$ (const) este o variabilă aleatoare

$$\theta(x_0) = \inf\{t | w(t) = 0, w(0) = x_0\}$$

care mai poate fi exprimată și sub forma

$$\theta(x_0) = \inf\{t | x_0 + T(t) - t \leq 0\}.$$

Ne propunem să determinăm funcția de repartiție Γ^* a variabilei aleatoare $\theta(x_0)$. În acest scop vom determina mai întâi funcția de repartiție a vectorului aleator $(\theta(x_0), Y^*(x_0))$, unde $Y^*(x_0)$ reprezintă numărul unităților servite în perioada de timp $\theta(x_0)$, care au intrat în sistem după începerea serviciului. [68] Fie

$$\Gamma_n^*(x_0, t) = P\{\theta(x_0) \leq t; Y^*(x_0) = n\}.$$

Dacă în intervalul de timp $(0, t]$ nu sosește nici o unitate în sistem atunci $w(t) = 0$ și din cele de mai sus rezultă că

$$\Gamma_0^*(x_0, t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} H_0(t - x_0), & \text{dacă } t \geq x_0 \\ 0, & \text{dacă } t < x_0 \end{cases} \quad (1.46)$$

Să presupunem acum că $n \geq 1$. Pentru ca la momentul $x_0 < t$, timpul de așteptare $w(x_0)$ să fie diferit de zero este necesar ca cel puțin o unitate să intre în sistem în intervalul de timp $(0, x_0]$. Fie x' ($0 < x' < x_0$) momentul sosirii în sistem a primei unități (care intră imediat după începerea serviciului) și s' timpul necesar pentru servirea ei. Timpul virtual de așteptare a acestei unități este $w(x' + 0) = x_0 - x' + s'$. [67] Apoi, în intervalul de timp (x', t) , urmează a fi servite $n-1$ unități. Așadar

$$d\Gamma_n^*(x_0, t) = \begin{cases} \int_{x'=0}^{x_0} \int_{s'}^{t-x_0} \lambda e^{-\lambda x'} d\Gamma_{n-1}^*(x_0 - x' + s', t - x') dx' dH(s'), & t \geq x_0 \\ 0, & t < x_0 \end{cases} \quad (1.47)$$

deoarece variabilele aleatoare x' și s' au respectiv repartițiile $\lambda e^{-\lambda x'} dx'$ și $dH(s')$. Relația de recurență (1.47) ne permite să determinăm funcția Γ_n^* . Într-adevăr, pentru $n = 1$ avem

$$d\Gamma_1^*(x_0, t) = \int_{x'=0}^{x_0} \int_{s'=0}^{t-x_0} x e^{-\lambda x'} d\Gamma_0^*(x_0-x'+s', t-x') dx' dH(s'), \quad t \geq x_0.$$

Dar, din (1.46) rezultă că

$$d\Gamma_0^*(x_0 - x' + s', t - x') = e^{-\lambda(t-x')} dH_0(t - x_0 - s')$$

și deci

$$d\Gamma_0^*(x_0, t) = \int_{x'=0}^{x_0} \int_{s'=0}^{t-x_0} e^{-\lambda t} dH_0(t - x_0 - s') dx' dH(s') = \lambda x_0 e^{-\lambda t} dH_1(t - x_0), \quad (1.48)$$

$$t \geq x_0$$

de unde

$$\Gamma_i^*(x, t) = \int_{x'=x}^t \lambda x e^{-\lambda x'} dH_1(x' - x), \quad t \geq x. \quad (1.49)$$

Apoi, pentru $n = 2$, din (1.47) și (1.48) obținem

$$d\Gamma_2^*(x_0, t) = \int_{x'=0}^{x_0} \int_{s'=0}^{t-x_0} \lambda^2 (x_0 - x' + s') e^{-\lambda t} dH_1(t - x_0 - s') dx' dH(s') \quad (1.50)$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_{s'=0}^{t-x_0} \left(\frac{x_0^2}{2} + s' x_0 \right) dH_1(t - x_0 - s') dH(s'), \quad (t \geq x_0).$$

Această egalitate se poate pune sub o formă mai simplă, folosind transformata Laplace \bar{H} a funcției H . [55] Se știe că

$$\frac{d}{d\alpha} [\bar{H}(\alpha)]^{m+n} = \frac{m+n}{m} [\bar{H}(\alpha)]^n \frac{d}{d\alpha} [\bar{H}(\alpha)]^m, \quad \alpha > 0$$

adică

$$\int_0^\infty w e^{-\alpha w} dH_{m+n}(w) = \frac{m+n}{m} \int_0^\infty \int_0^u e^{-\alpha u} v H_m(v) dH_n(u-v)$$

sau

$$\int_0^u v dH_m(v) dH_n(u-v) = \frac{um}{m+n} dH_{m+n}(u). \quad (1.51)$$

Utilizând acest rezultat în (1.50) obținem

$$d\Gamma_2^*(x_0, t) = \frac{\lambda^2 t x_0 e^{-\lambda t}}{2!} dH_2(t - x_0),$$

de unde

$$\Gamma_2^*(x_0, t) = \int_{x'=x_0}^t \frac{\lambda^2 x' x_0}{2!} e^{-\lambda x'} dH_2(x' - x_0), \quad t \geq x_0. \quad (1.52)$$

Rezultatele (1.46), (1.48) și (1.52) ne conduc la ipoteza că, pentru $n \in N^*$, are loc egalitatea

$$\Gamma_n^*(x_0, t) = \begin{cases} \int_{x'=x_0}^t \frac{(\lambda x')^{n-1}}{n!} \lambda x_0 e^{-\lambda x'} dH_n(x' - x_0), & t \geq x_0 \\ 0 & , t < x_0 \end{cases} \quad (1.53)$$

Fie $Y(\theta_i)$ numărul de unități servite în perioada de ocupare θ_i . (Precizăm că în cursul perioadei θ_i sunt servite cele i unități existente la momentul inițial în sistem și toate unitățile care sosesc până în momentul când sistemul devine pentru prima dată liber). Avem

$$P\{\theta_i \leq t, Y(\theta_i) = n\} = \int_{x=0}^t \Gamma_{n-i}^*(x, t) dH_i(x), \quad t > 0.$$

Substituind aici Γ_{n-i}^* prin expresia sa dată de (1.53) găsim

$$P\{\theta_i \leq t, Y(\theta_i) = n\} = \int_{x=0}^t dH_i(x) \int_{x'=x_0}^t \frac{(\lambda x')^{n-i-1}}{(n-i)!} \lambda x_0 e^{-\lambda x'} dH_{n-i}(x' - x_0)$$

sau, utilizând (1.51),

$$P\{\theta_i \leq t, Y(\theta_i) = n\} = \int_{x'=0}^t \frac{(\lambda x')^{n-i}}{n(n-i)!} i e^{-\lambda x'} dH_n(x').$$

De aici rezultă

$$\Gamma(t) = P\{\theta_1 \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'=0}^t \frac{(\lambda x')^{n-1}}{n!} e^{-\lambda x'} dH_n(x'). \quad (1.54)$$

Găsim, de asemenea, că pentru $n \in N$,

$$P\{Y(\theta_1) = n\} = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{n!} e^{-\lambda u} dH_n(u). \quad (1.55)$$

Observație. Funcțiile de repartiție Γ și Γ^* pot fi determinate și direct, folosind transformatele Laplace-Stieltjes [49]

$$\bar{\Gamma}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\Gamma(x), \quad Re(s) \geq 0$$

$$\bar{\Gamma}^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\Gamma^*(x), \quad Re(x) \geq 0.$$

Funcțiile de repartiție Γ și Γ^* fiind unic determinate, probabilitatea $P_0(t) = P\{w(t) = 0\} = W(0, t)$ dată prin (1.44) este cunoscută.

Să calculăm acum probabilitatea condiționată ca la momentul t să fie liber sistemul, în ipoteza că în intervalul de timp $(0, t]$ sunt servite n unități și $w(0) = x_0$. Fie

$$Q_n(x_0, t) = P\{w(t) = 0 | Y(t) = n; w(0) = x_0\}.$$

Deoarece, prima unitate (care sosește imediat după începerea serviciului) poate intra în sistem fie în intervalul de timp $(0, x_0]$, fie în intervalul $(x_0, t]$, $0 \leq x_0 \leq 1$, avem

$$Q_n(x_0, t) = \int_{x'=0}^{x_0} \int_{s'=0}^{t-x_0} \lambda e^{-\lambda x'} Q_{n-1}(x_0 - x' + s', t - x') dx' dH(s') + \int_{x'=0}^t \int_{s'=0}^{t-x'} \lambda e^{-\lambda x'} Q_{n-1}(s', t - x') dx' dH(s'), \quad n \in N \quad (1.56)$$

și

$$Q_0(x_0, t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}, & \text{dacă } t \geq x_0 \\ 0, & \text{dacă } t < x_0 \end{cases} \quad (1.57)$$

Luând $n = 1$ în relația de recurență (1.56) și substituind apoi $Q_0(x_0, t)$. [28] Prin (1.57) obținem

$$Q_1(x_0, t) = \int_{s'=0}^{t-x_0} \int_{x'=0}^{t-s'} \lambda e^{-\lambda t} dx' dH(s') = \lambda e^{-\lambda t} \int_{u=0}^{t-x_0} (t - u) dH(u)$$

Procedând în același mod pentru $n = 2$ și utilizând identitatea (1.51), găsim

$$Q_2(x_0, t) = \frac{\lambda^2 t}{2} e^{-\lambda t} \int_{u=0}^{t-x_0} (t - u) dH_2(u).$$

Prin inducție rezultă în definitiv, pentru $n \in N^*$

$$Q_n(x_0, t) = \frac{\lambda^n}{n!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \int_{u=0}^{t-x_0} (t - u) dH_n(u). \quad (1.58)$$

Observăm că

$$P_0(t) \equiv W(0, t) \equiv W(x_0, 0, t) = P\{w(t) = 0 | w(0) = x_0\} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x_0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \int_{u=0}^{t-x_0} (t - u) dH_n(u). \quad (1.59)$$

în concordanță cu (1.44) (în care Γ și Γ^* au expresiile (1.54) respectiv). [22]

Procesul $\{\xi(t), t \geq 0\}$. Fie $P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i; i, j \in N^*\}$ și să presupunem că serviciul începe în momentul $t = 0$. În acest caz, pentru $i \in N$, avem

$$P_{i0}(t) = \int_0^1 P\{w(t) = 0 | w(0) = y\} dH_i(y) \text{ sau, cu notația (1.32),}$$

$$P_{i0}(t) = \int_{y=0}^t W(y; 0, t) dH_i(y) = \int_{y=0}^t P_0(t) dH_i(y). \quad (1.60)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} P_{i0}(t) dt = \int_{y=0}^\infty \bar{W}(y; 0, s) dH_i(y), \quad (1.61)$$

unde $\bar{W}(y; 0, s)$ se calculează imediat utilizând (1.54).

Pe de altă parte, din (1.54) deducem că [12]

$$\begin{aligned} \int_{u=x}^t d\Gamma(u, t) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda^n}{n!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \int_{u=y}^t u \left[-\frac{\partial}{\partial u} H_n(t-u) \right] dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda^n}{n!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \int_{u=y}^t u \left[\frac{\partial}{\partial u} H_n(t-u) \right] du \end{aligned}$$

și în consecință

$$W(y; 0, t) dt = e^{-\lambda t} dt + \int_{u=y}^t d\Gamma(u, t).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \bar{W}(y; 0, s) &= \int_{t=y}^\infty e^{-st} W(y; 0, t) dt = \int_{t=y}^\infty e^{-(s+\lambda)t} dt + \int_{u=y}^\infty \int_{t=y}^\infty e^{-st} d\Gamma(u, t) = \\ &= \int_{u=y}^\infty e^{-up(s)} du = \frac{1}{p(s)} e^{-yp(s)}, \quad \text{Re}(s) > 0 \end{aligned} \quad (1.62)$$

unde $p(s) = s + \lambda[1 - \bar{\Gamma}(s)] = s + \lambda[1 - g(s)]$ este soluția unică a ecuației $p - s - \lambda = -\lambda \bar{H}(p)$. Substituind (1.62) în (1.61) obținem

$$\int_0^\infty e^{-st} P_{i0}(t) dt = \frac{1}{p(s)} \int_0^\infty e^{-yp(s)} dH_i(y) = \frac{[H(p(s))]^i}{p(s)}, \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (1.63)$$

Să considerăm acum cazul general când are loc evenimentul $\{\xi(t) = j | \xi(0) = i; i \in N^*, j \in N\}$. Unitatea care se află în stație la momentul $t (t > 0)$ sau este una dintre cele i unități existente în sistem imediat înainte de începerea serviciului, sau a sosit după momentul $t = 0$. Vom lua în considerare fiecare din aceste două posibilități.

În prima alternativă să presupunem că această unitate este a m -a $0 \leq m \leq i$ din cele i unități inițiale, care sunt servite în ordinea sosirilor. Pentru ca a m -a unitate să fie în stație în momentul $t > 0$, este necesar ca în intervalul de timp $(0, t]$ să fie servite $m - 1$ unități; întrucât $\xi(t) = j$, în intervalul $(0, t]$ sosesc în sistem $j - i + m - 1$ unități. Acest eveniment se realizează cu probabilitatea

$$P_{ij}(t) = \sum_{m=\max(0, i-j+1)}^i [H_{m-1}(t) - H_m(t)] \frac{(\lambda t)^{j-i+m-1}}{(j-i+m-1)!} e^{-\lambda t} \quad (1.64)$$

În cealaltă alternativă, să presupunem că unitatea care se află în stație la momentul $t > 0$ sosește în sistem în intervalul de timp $(0, u]$, $0 < u < t$; fie $w(u-0) = v$ timpul său de așteptare pentru a intra în stație; servirea acestei unități începe în momentul $u + v$ și se continuă cel puțin până în momentul $t > u + v$. În intervalul de timp $(u, t]$ sosesc în sistem $j - 1$ unități. Acest eveniment se realizează cu probabilitatea

$$P_{ij}(t) = \int_{u=0}^t \int_{v=0}^{t-u} \int_{y=0}^{u+v} [1 - H(t-u-v)] \frac{(t-u)^{j-1}}{(j-1)!} \lambda^j e^{-\lambda(t-u)} du \cdot d_v W(y; v, u) dH_i(y). \quad (1.65)$$

Așadar, pentru $i, j \in N$ avem

$$P_{ij}(t) = (1)P_{ij}(t) + (2)P_{ij}(t),$$

probabilitățile din membrul drept fiind date prin (1.64) și (1.65) respectiv. Dacă $i = 0$, atunci $P_{ij}(t) = 0$ și din (1.65) rezultă

$$P_{0j}(t) = (2)P_{0j}(t) = \int_{u=0}^t \int_{v=0}^{t-u} [1 - H(t-u-v)] \frac{(t-u)^{j-1}}{(j-1)!} \lambda^j e^{-\lambda(t-u)} dud_v W(0; v, u)$$

pentru orice $j \in N$.

De asemenea se poate determina probabilitatea condiționată

$$\pi_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \theta_i > t; | \xi(0) = 0\}, \quad i, j \in N \quad (1.66)$$

ca la momentul t ($t > 0$) să fie $j \in N$ unități în sistem în ipoteza că la momentul inițial $t = 0$ au fost $i \in N$ unități și stația a fost ocupată în intervalul $(0, t]$. [13]

Procesul staționar. Fie $t_n^* > 0, n \in N, t_0^* = 0$, momentul în care părăsește sistemul a n -a unitate servită. Dacă $\xi(t_n^* + 0) = \xi_n^*$ reprezintă numărul unităților existente în sistem imediat după plecarea celei de a n -a unități, atunci $\{\xi_n^*\}_{n \in N}$ este un lanț Markov omogen cu o infinitate de stări. Să notăm prin

$$P_{ij}^{*(n)} = P\{\xi_n^* = j | \xi_0^* = i\}, \quad i, j \in N^*, n \in N$$

probabilitățile de trecere după n pași ale lanțului $\{\xi_n^*\}_{n \in N}$.

Deoarece $P_{0j}^* = P_{0j}^{*(1)} > 0, j \in N^*$, lanțul Markov $\{\xi_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ este ireductibil și aperiodic.

Dacă $\rho = \lambda b < 1$ lanțul este ergodic și în acest caz există limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{*(n)} = p_j, p_j > 0, \sum_{j \in N^*} p_j = 1,$$

unde p_j reprezintă soluția unică a sistemului de ecuații

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_j P_{ij}^* = p_j, j \in N^*. \quad (1.67)$$

Acest sistem se rezolvă imediat utilizând funcția generatoare

$$G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j \quad (|z| < 1). \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} G(z) &= p_0 \sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j + \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{i=1}^{j+1} p_j P_{ij}^* = p_0 \sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j + \sum_{j=1}^{\infty} p_j z^{j-1} \sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j = \\ &= p_0 \sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j + \frac{G(z) - p_0}{z} \sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j. \end{aligned} \quad (1.69)$$

De aici rezultă

$$G(z) = \frac{p_0(1-z) \sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j}{\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j - z}. \quad (1.70)$$

Dar, $\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j$ este chiar funcția generatoare a repartiției $\{P_{0j}^*\}$. Deoarece P_{0j}^* este probabilitatea de a intra în sistem j unități în timpul unei perioade oarecare de servire, adică

$$P_{0j}^* = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} dH(x), \quad j \in N^*$$

avem

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x} dH(x)$$

sau

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^* z^j = \bar{H}[\lambda(1-z)] \quad (|z| < 1) \quad (1.71)$$

Pe de altă parte, din condiția $G(1) = 1$ obținem $p_0 = 1 - \rho$ ($\rho < 1$). Ținând seama de valoarea lui p_0 și de (1.71), egalitatea (1.70) devine

$$G(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\bar{H}[\lambda(1-z)]}{\bar{H}[\lambda(1-z)] - z} \quad (1.72)$$

ceea ce arată că $\{p_j\}$ este într-adevăr repartiția staționară unică a lanțului $\{\xi_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$. [5]

Reamintim că dacă stația este ocupată în intervalul de timp $(0, t]$ atunci

$$w(t) = T(t) - t,$$

unde $T(t) = s_1 + s_2 + \dots + s_{X(t)}$.

În cazul general, definim funcția U astfel ca

$$U(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 0, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Astfel, în ipoteza că stația nu este ocupată continuu în intervalul de timp $(0, t]$ integrala

$$I(t) = \int_0^t U[w(r)] dr$$

reprezintă acel subinterval din $(0, t]$ în care stația este liberă. Timpul virtual de așteptare $w(t)$ este definit acum prin egalitatea

$$w(t) = w(0) + T(t) - t + \int_0^t U[w(r)] dr$$

În particular, dacă $w(0) = 0$ regăsim relația

$$w(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} [T(u) - u] \quad (1.73)$$

Fie

$$\eta(x) = \inf\{t | T(t) - t > x\}$$

și, în baza lui (1.32) urmează ca

$$W(0; x, t) = P\{T(u) - u \leq x; 0 \leq u \leq t\} = 1 - P\{\eta(x) \leq t\}.$$

Deducem de aici că $\lim_{t \rightarrow \infty} W(0; x, t)$ există și este finită. Să notăm prin V_x această limită. [39]

Pe de altă parte, din (1.62) găsim

$$\bar{W}(x_0; 0, s) = \int_{x_0}^{\infty} e^{-st} W(x_0; 0, t) dt = \frac{1}{p(s)} \exp\{-x_0 p(s)\}, \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (1.74)$$

unde $p(s)$ este soluția unică a ecuației $p - s - \lambda = -\lambda \bar{H}(p)$. Avem

$$V_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} W(0; 0, t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{W}(0; 0, s)$$

Utilizând (1.74) și ținând seama că

$$p(0+) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \rho \leq 1 \\ q > 0, & \text{dacă } \rho > 1 \end{cases}$$

unde q este cea mai mare (în valoare absolută) rădăcină a ecuației $z = \lambda(1 - \bar{H}(z))$, obținem

$$V_0 = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{s}{p(s)} = \begin{cases} \left[\left(\frac{dp}{ds} \right)_{s=0+} \right]^{-1}, & \text{dacă } \rho \leq 1 \\ 0, & \text{dacă } \rho > 1 \end{cases} \quad (1.75)$$

Din ecuația $p(s) = s + \lambda[(1 - \bar{H}(p))]$ rezultă

$$\frac{dp}{ds} = 1 - \lambda \frac{d\bar{H}}{dp} \frac{dp}{ds}$$

Luând aici $s = 0_+$ și folosind relația cunoscută $\lambda \left(\frac{d\bar{H}}{dp}\right)_{s=0_+} + 1 = 1 - \rho$, $\rho < 1$, găsim,

$$\left(\frac{dp}{ds}\right)_{s=0_+} = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho}, & \text{dacă } \rho < 1 \\ \infty, & \text{dacă } \rho = 1 \end{cases}$$

astfel încât (1.75) devine

$$V_0 = \begin{cases} 1 - \rho, & \text{dacă } \rho < 1 \\ 0, & \text{dacă } \rho \geq 1 \end{cases}$$

Mai mult, din (1.42), trecând la limită pentru $t \rightarrow \infty$, obținem [51]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{W}(s, t) = \begin{cases} \frac{1 - \rho}{s - \lambda + \lambda \bar{H}(s)}, & \text{dacă } \rho < 1 \\ 0, & \text{dacă } \rho \geq 1 \end{cases} \quad (1.76)$$

Observație. Rezultatele generale obținute în acest paragraf, în ipoteza că funcția de repartiție H a timpului de servire este oarecare (cu valoare medie finită) ne permit să studiem sistemele M/M/1, M/E_k/1, M/D/1, considerându-le drept cazuri particulare ale sistemului M/G/1.

De asemenea, considerațiile asupra sistemului M/G/1 ne sunt utile în aflarea, sub formă explicită, a funcției generatoare $G_i(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)z^j$, $|z| < 1$, pentru procesul de servire în sistemul M/E_k/1. [57]

Pentru a caracteriza procesul $\{\xi^*(t), t \geq 0\}$ notăm cu $X(t)$ numărul fazelor care intră în sistem în intervalul de timp $(0, t]$ și cu $Y(t)$ numărul fazelor care sunt servite în același interval de timp (prin analogie cu notațiile adoptate pentru sistemul M/G/1). Avem

$$P\{X(t) = nk\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in N^*, k \in N,$$

deoarece sosirea fiecărei unități echivalează cu introducerea în sistem a k faze.

Scopul este să găsim soluția $G_i(z, t)$ a ecuației cu derivate parțiale [70]

$$z \frac{\partial G_i(z, t)}{\partial t} = [\lambda z^{k+1} + k\mu - (\lambda + k\mu)z]G_i(z, t) - k\mu(1 - z)P_{i0}(t) \quad (1.77)$$

Pentru aceasta avem mai întâi în vedere că numărul fazelor $\xi^*(t)$ existente în sistem la momentul $t(t > 0)$ este dat de

$$\xi^*(t) = \max \left\{ \sup_{0 \leq u \leq t} [(X(t) - Y(t)) - (X(u) - Y(u))], i + X(t) - Y(t) \right\}$$

pentru $\xi^*(0) = i$, ceea ce ne permite, printr-un raționament similar celui folosit în cazul sistemului M/G/1, să determinăm probabilitatea

$$P_{i0}(t) = P\{\xi^*(t) = 0 | \xi^*(0) = i\}.$$

Într-adevăr

$$P_{i0}(t) = \frac{1}{k\mu} \sum_{h=i+1}^{\infty} \frac{h}{t} P\{X(t) - Y(t) = -h\} = \frac{1}{k\mu} \sum_{h=i+1}^{\infty} \left\{ \frac{h}{t} \sum_{n=0}^{\infty} P\{X(t) = nk\} P\{Y(t) = nk + h\} \right\}$$

care rezultă din faptul că $P\{t < \theta_i < t + dt; Y(\theta_i) = n\}$ este cunoscută, conform celor stabilite la studiul perioadei de ocupare a sistemului M/G/1. Dar

$$P\{X(t) = nk\} P\{Y(t) = nk + h\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(\lambda+k\mu)t} \frac{(k\mu t)^{nk+h}}{(nk+h)!}$$

și, în consecință, $P_{i0}(t)$ este determinată.

Înmulțind acum ambii membri ai ecuației (1.77) cu

$$\exp\left\{-\left[\lambda z^k + \frac{1}{z}k\mu - (\lambda + k\mu)\right]t\right\}$$

și integrând pe intervalul $[0, t]$ ecuația obținută, găsim

$$\begin{aligned} G_i(z, t) \exp\left\{-\left[\lambda z^k + \frac{1}{z}k\mu - (\lambda + k\mu)\right]t\right\} \\ = z^i - \frac{1-z}{z}k\mu \int_0^t P_{i0}(u) \exp\left\{-\left[\lambda z^k + \frac{1}{z}k\mu - (\lambda + k\mu)\right]u\right\} du \end{aligned}$$

unde $z^i = G_i(z, 0)$ și $P_{i0}(t)$ este cunoscută. Așadar, soluția ecuației (1.77) este

$$\begin{aligned} G_i(z, t) = z^i \exp\left\{\left[\lambda z^k + \frac{1}{z}k\mu - (\lambda + k\mu)\right]t\right\} \\ - \frac{1-z}{z}k\mu \int_0^t P_{i0}(t-u) \exp\left\{\left[\lambda z^k + \frac{1}{z}k\mu - (\lambda + k\mu)\right]u\right\} du \end{aligned}$$

În ce privește sistemul de servire M/D/1 reținem că este suficient să luăm timpul de servire constant ($= b$) în considerațiile asupra sistemului M/G/1. [73]

În acest caz rezultă că $H(x) = 0$ dacă $x < b$ și $H(x) = 1$ dacă $x \geq b$. Pentru $n \in N$,

$$H_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < nb \\ 1, & \text{dacă } x \geq nb \end{cases}$$

iar

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{x}{b}\right]} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Fără a insista asupra tuturor rezultatelor ce decurg de aici, menționăm numai că probabilitatea ca sistemul să fie liber la momentul $t > 0$ este dată de

$$W(x_0; 0, t) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{t-x_0}{b}\right]} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{n!} (t - nb) e^{-\lambda t}$$

Acest model de așteptare este folosit și în cadrul terminalului maritim DP World CSCT și pentru a înțelege mai bine activitatea terminalului în subcapitolul 1.1. am descris pe scurt procedura de operare nave. [125]

1.6. Concluzii la capitolul 1

Pentru aprecierea obiectivă a calității sistemelor de așteptare este important să se aleagă în mod corect indicatorii de eficiență ai sistemelor. Desigur, eficiența unui astfel de sistem depinde de caracterul fluxului de intrare al unităților, de numărul stațiilor (dane) de servire și de capacitatea de funcționare a fiecăreia dintre ele. Este necesară deci o analiză riguroasă a elementelor și caracteristicilor sistemelor de așteptare. [131]

În baza celor expuse, putem constata că cercetările științifice legate de teoria așteptării și aplicarea lor în cadrul terminalelor maritime, rămân în continuare de actualitate. Se descriu succint câteva sisteme de așteptare pentru diferite modele de așteptare care apar în modelările matematice folosite pentru eficientizarea timpului de așteptare în cadrul unui terminal din portul maritim Constanța.

Astfel:

- S-a realizat o analiză în domeniul de cercetare al tezei în momentul actual;
- S-au prezentat câteva modele de așteptare care pot fi aplicate în portul maritim;
- S-au studiat caracteristicile probabilistice ale sistemelor de așteptare;
- S-au prezentat unele rezultate de bază cu privire la câteva caracteristici probabilistice pentru modelele de așteptare studiate în teză.

Așadar, în continuare, **lucrarea noastră va avea drept scop** generalizarea unor rezultate cunoscute în acest domeniu, scoțând în evidență noi posibilități de aplicare în cadrul portului maritim Constanța.

2. CERCETĂRI PRIVIND SISTEMELE CU RESTRICȚII FOLOSITE PENTRU OPERAREA NAVELOR ÎN CADRUL TERMINALELOR MARITIME

2.1. Metoda lui Gnedenko pentru studiul timpului de așteptare în sistemul M/G/1

Să considerăm sistemul M/G/1 în care servirea se face după principiul „primul venit, primul servit”. O unitate care intră în sistem se poate afla într-una din următoarele situații: [59]

- sau este refuzată;
- sau iese din șirul de așteptare după o perioadă de timp oarecare;
- sau așteaptă începerea serviciului și apoi părăsește sistemul înainte de terminarea servirii;
- sau rămâne în sistem până când este servită complet și apoi iese imediat din sistem.

Fie $U(\tau) = P\{w \leq \tau\}$ și $V_x(\tau)$ probabilitatea ca, în ipoteza că așteaptă în șir o perioadă de timp x , unitatea să stea, pentru servirea până în momentul când timpul total de rămânere în sistem devine egal cu τ . Notăm de asemenea

$$W(\tau, t) = P\{w(t) \leq \tau\}$$

Să vedem în ce condiții are loc inegalitatea $w(t + \Delta t) \leq \tau$. În intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ pot avea loc următoarele modificări, în urma cărora $W(t + \Delta t) \leq \tau$:

1. în momentul t , $w(t) < \tau + \Delta t$ și în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ nu sosește nici o unitate.

2. $w(t) = x < \tau + \Delta t$; în intervalul de timp $(t, t + \theta)$ ($0 < \theta < \Delta t$) sosește o unitate care părăsește sistemul înainte de a fi servită (ea așteaptă o perioadă de timp egală cel mult cu $x - \theta$).

3. $w(t) = x < \tau + \Delta t$; în intervalul de timp $(t, t + \theta)$ ($0 < \theta < \Delta t$), sosește o unitate care este parțial servită și părăsește sistemul înainte de momentul $\tau - x + \Delta t$. Observăm că până când începe serviciul, unitatea așteaptă o perioadă de timp cel puțin egală cu $x - \theta$.

4. Ca în cazul 3, cu deosebirea că unitatea rămâne în stație pentru completarea serviciului și deci, se află în curs de servire o perioadă de timp cel puțin egală cu $\tau - x + \Delta t$. [59], [62]

Din 1 – 4 rezultă că

$$\begin{aligned} W(\tau, t + \Delta t) = & (1 - \lambda \Delta t)W(\tau + \Delta t, t) + \lambda \int_0^{\Delta t} d\theta \int_0^{\tau + \Delta t} \{U(x - \theta) \\ & + [1 - U(x - \theta)]V_{x-\theta}(\tau - x + \Delta t) + [1 - U(x - \theta)][1 - V_{x-\theta}(\tau - x + \Delta t)] \\ & \cdot H(\tau - x + \Delta t)\} d_x W(x, t) + 0(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

unde H este funcția de repartiție a timpului de servire, iar λ este parametrul repartiției poissoniene a fluxului de intrare. Împărțind ambele părți ale ecuației (2.1) prin $\Delta t > 0$ și trecând la limită pentru $\Delta t \rightarrow 0$, găsim

$$\frac{\partial W(\tau, t)}{\partial t} = \frac{\partial W(\tau, t)}{\partial \tau} - \lambda W(\tau, t) + \lambda \int_0^\tau \{U(x) + [1 - U(x)]V_x(\tau - x) \quad (2.2)$$

$$+ [1 - U(x)][1 - V_x(\tau - x)]H(\tau - x)\} d_x W(x, t)$$

$$W(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(\tau, t) \quad (2.3)$$

există și reprezintă repartiția staționară a variabilei aleatoare w .

În cazul procesului staționar ecuația (2.2) se reduce la

$$\frac{dW(\tau)}{d\tau} = \lambda \int_0^\tau [1 - U(x)][1 - V_x(\tau - x)][1 - H(\tau - x)]dW(x)$$

care are soluția unică $W(\tau)$, uniform continuă pentru $\tau \neq 0$. Repartiția limită $W(\tau)$ fiind determinată, se pot calcula diverse caracteristici ale modelului considerat. [63] Astfel

$$W_1(\tau) = W(\tau) + U(\tau)[1 - W(\tau)] - \frac{W'(\tau)}{\lambda}$$

reprezintă funcția de repartiție a timpului de așteptare în sistem (timpul de așteptare în șir plus timpul de servire). Funcția de repartiție a timpului de așteptare în șir, în ipoteza că unitățile părăsesc sistemul înainte de a fi servite este

$$W_2(\tau) = W(\tau) + U(\tau)[1 - W(\tau)]$$

Probabilitatea ca servirea să nu poată fi terminată are expresia

$$\int_0^\infty [1 - U(x)] \int_0^\infty V_x(u)dH(u)dW(x)$$

iar probabilitatea ca unitățile să se piardă este dată de

$$\int_0^\infty U(x)dW(x)$$

pentru terminarea serviciului, avem $V_x(y) = 0$, pentru orice $x, y > 0$.

Fie *Cazuri particulare*. Punând diverse condiții pentru funcțiile U și V_x obținem scheme particulare pentru studiul timpului de așteptare. [44]

I. Fie $U(\tau) \equiv 0, V_x(\tau) \equiv 0$. În acest caz, o unitate care intră în sistem și găsește stația ocupată ia loc în șirul de așteptare; servirea odată începută se efectuează în întregime. Evident, această schemă coincide cu un sistem de așteptare fără restricții și nu vom insista asupra ei.

II. Să presupunem că funcția U coincide cu funcția de repartiție C a variabilei aleatoare τ , adică $U(y) = C(y) = P\{\tau \leq y\}, y > 0$. Atunci, timpul de așteptare în șir este mărginit (de variabila aleatoare τ) și servirea odată începută se efectuează în întregime. Deoarece, în cazul unui timp oarecare x de așteptare în șir – nu se face nici o restricție privind timpul de așteptare pentru terminarea serviciului, avem $V_x(y) = 0$, pentru orice $x, y > 0$.

Fie

$$W(y, t) = P\{v(t) < y\}, y > 0$$

În stare staționară avem $\lim_{t \rightarrow \infty} W(y, t) = W(y)$. Ținând seama de evenimentele ce se pot produce în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$, $\Delta t > 0$ obținem ecuația

$$\begin{aligned} W(y) &= (1 - \lambda \Delta t)W(y + \Delta t) \\ &+ \lambda \int_0^{\Delta t} dz \int_0^{y+\Delta t} \{U(x-z) + [1 - U(x-z)]V_{x+\Delta t}(y-x+\Delta t) \\ &+ [1 - U(x-z)][1 - V_{x-z}(y-x+\Delta t)]H(y-x+\Delta t)\}dW(x) \\ &+ 0(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

care este, evident, în concordanță cu (2.1). Expresia de sub semnul integralei din membrul drept al acestei egalități rămâne mai mică sau cel mult egală cu 1, adică

$$|W(y) - (1 - \lambda \Delta t)W(y + \Delta t)| \leq \lambda \Delta t + 0(\Delta t)$$

sau:

$$\frac{W(y + \Delta t) - W(y)}{\Delta y} \leq 2\lambda + 0(\Delta t)$$

de unde rezultă continuitatea uniformă a funcției W pentru $y > 0$. Există, așadar o constantă K și o funcție p cu $p(y) \leq 2\lambda, y > 0$, astfel că

$$W(y) = K + \int_0^y p(t)dt$$

Trecând acum la limită, pentru $\Delta t \rightarrow 0$, în ecuația (2.4), găsim

$$\begin{aligned} p(y) - \lambda \int_0^y [1 - U(x)][1 - V_x(y-x)][1 - H(y-x)]p(x)dx &= \lambda K[1 - V_0(y)][1 - \\ &H(y)], y > 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Deoarece $U(x) = C(x)$ și $V_x(y) = 0$, relația (2.5) se reduce la

$$p(y) = \lambda \int_0^y [1 - C(x)][1 - H(y-x)]p(x)dx + \lambda K[1 - H(y)] \quad (2.6)$$

Să presupunem că funcția de repartiție C este o funcție în scară, adică pentru orice $y_1, y_2, \dots, y_n (0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n)$, avem

$$C(y_1 + 0) - C(y_1) = \Delta_1, \dots, C(y_n + 0) - C(y_n) = \Delta_n,$$

cu $\sum_{i=1}^n \Delta_i = 1$. În intervalul $(0, y_1)$ ecuația (2.6) se scrie

$$p(y) = \lambda \int_0^y [1 - H(y-x)]p(x)dx = \lambda K[1 - H(y)] \quad (2.7)$$

Pentru a putea folosi transformata Laplace [67] vom considera o funcție f care satisface ecuația (2.7) pe semidreapta $y > 0$, iar în intervalul $(0, y_1)$ coincide cu funcția p . Notând

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy$$

$$\bar{H}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} dH(y)$$

obținem

$$\bar{f}(s) = \frac{\lambda K \bar{H}(s)}{1 - \lambda \bar{H}(s)}$$

de unde, cu ajutorul transformării Laplace inverse, se determină $p(y)$ în intervalul $(0, y_1)$.

Considerăm, apoi ecuația (2.6) în intervalul (y_1, y_2)

$$\begin{aligned} & p(y) - \lambda(1 - \Delta_1) \int_{y_1}^y [1 - H(y-x)] p(x) dx \\ &= \lambda K \left\{ 1 - H(y) + \frac{1}{K} \int_0^{y_1} [1 - H(y-x)] p(x) dx \right\} \end{aligned}$$

Putem extinde această ecuație pe intervalul (y_1, ∞) și cunoscând funcția p în intervalul $(0, y_1)$ rezolvăm ecuația în intervalul (y_1, y_2) . Procedând mai departe în același mod vom afla funcția p în intervalul $(0, y_n)$, după care, pentru y_1, y_n aplicăm formula

$$p(y) = \lambda \int_0^{y_n} [1 - C(x)] [1 - H(y-x)] p(x) dx + \lambda K [1 - H(y)]$$

Constanta K se află din condiția de regularitate. Așadar

$$W(y) = K + \int_0^y p(t) dt$$

este complet determinată.

III. Timpul cât se află o unitate în sistem (timpul de așteptare plus timpul de servire) este mărginit de o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție $C(x)$.

Dacă unitatea poate rămâne în sistem numai un timp $w^* \leq x$ atunci timpul de așteptare trebuie să fie și el mărginit de x , ceea ce înseamnă că

$$U(x) = C(x).$$

Mai departe, dacă y^* este valoarea maximă a timpului de rămânere în sistem, iar y este timpul de așteptare a începerii serviciului, atunci valoarea maximă a timpului de așteptare pentru terminarea serviciului are aceeași repartiție ca y^* cu condiția $\{y^* > y\}$. Obținem astfel:

$$V_y(x) = \frac{U(x+y) - U(y)}{1 - U(y)} = \frac{C(x+y) - C(y)}{1 - C(y)}$$

În acest caz ecuația (2.5) devine

$$p(y) - \lambda [1 - C(y)] \int_0^y [1 - H(y-x)] p(x) dx = \lambda K [1 - C(y)] [1 - H(y)]$$

$C(y)$ fiind o funcție în trepte, $p(y)$ se poate determina ca în cazul precedent.

Dacă timpul cât stau unitățile în sistem este mărginit de constanta $\tau > 0$, iar $f(y)$ este soluția ecuației (2.6) atunci

$$p(y) = \begin{cases} 0 & , \text{dacă } y > \tau \\ cf(y) & , \text{dacă } y < \tau \end{cases}$$

unde $c = \text{const.}$ se determină din condiția

$$K + \int_0^{\tau} p(y)dy = 1$$

IV. În cazul în care stația de servire are o zonă oarecare de acțiune, adică ea poate servi numai unitățile care se află în această zonă. Admitem că prin zonă unitățile se mișcă cu o viteză constantă, de exemplu egală cu 1. În momentul când o unitate intră în stație și începe a fi servită viteza ei devine egală cu v .

Observăm că pentru $v = 0$ ne aflăm în cazul timpului de așteptare mărginit (cerința „se oprește” până la finele servirii) iar pentru $v = 1$ avem sistemul cu timpul cumulat (de așteptare și de servire) mărginit. Aparte este și cazul când $v < 1$. [39]

Dacă notăm cu $C(y)$ funcția de repartiție a timpului în care unitățile se află în zona de acțiune a stației, atunci

$$U(y) = C(y), V_y(x) = \frac{C(vy + x) - C(x)}{1 - C(x)}$$

Acum ecuația (2.5) devine

$$\begin{aligned} p(y) - \lambda \int_0^y \{1 - U[vy + (1 - v)x]\}[1 - H(y - x)]p(x)dx \\ = \lambda K[1 - U(vy)][1 - H(y)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pentru $v < 1$ și

$$U(y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } y > \tau \\ 0, & \text{dacă } y \leq \tau \end{cases}$$

ecuația (2.8) se scrie

$$p(y) - \lambda \int_0^y [1 - H(y - x)] p(x)dx = \lambda K[1 - H(y)] \quad \left(0 < y < \frac{\tau}{v}\right) \quad (2.9)$$

$$p(y) - \lambda \int_{\frac{vy-\tau}{v-1}}^y [1 - H(y - x)]p(x)dx = 0 \quad \left(\frac{\tau}{v} < y < \tau\right) \quad (2.10)$$

Extinzând ecuația (2.9) la orice $y > 0$, putem determina $p(y)$ pentru $0 < y < \frac{\tau}{v}$. Apoi scriem ecuația (2.10) în intervalul $\left(\frac{\tau}{v}, \frac{(2v-1)\tau}{v^2}\right)$ pentru a găsi soluția când $y > \frac{\tau}{v}$. Avem

$$p(y) - \lambda \int_{\frac{\tau}{v}}^y [1 - H(y - x)] p(x)dx = \lambda \int_{\frac{vy-\tau}{v-1}}^{\frac{\tau}{v}} [1 - H(y - x)] p(x)dx$$

Continuăm acest procedeu la infinit și determinăm succesiv funcția p în intervalele (y_{i-1}, y_i) ($i = 3, \dots, n$), unde

$$y_i = \tau \left[1 - \left(\frac{v-1}{v} \right)^i \right] \quad (i = 3, \dots, n)$$

Numărul iterației necesare pentru aproximarea lui $p(x)$ cu o anumită exactitate se evaluează ținând seama că $p(x) \leq 2\lambda$. [8]

2.2. Modele cu șir de așteptare limitat

A. Să considerăm mai întâi modelul M/M/1, cu unități provenind dintr-o populație infinită, dar pentru care presupunem că șirul de așteptare are o lungime maximă dată, $N - 1$. [42] Am arătat că ecuațiile de stare ale sistemului M/M/1, pentru $n \in N^*$ (n reprezintă numărul unităților din sistem) în regim staționar, sunt

$$\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$$

$$\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu) p_n = 0.$$

În cazul de față n ia valori numai între 0 și N . Pentru $n = N$ avem

$$\lambda p_{N-1} - \mu p_N = 0.$$

Pentru a determina caracteristicile modelului, folosim condiția

$$\sum_{n=0}^N p_n = 1$$

Adică

$$p_0(1 + \rho + \dots + \rho^N) = 1, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

de unde rezultă

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}$$

iar

$$p_n = \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}, \quad n = \overline{1, n}$$

De aici găsim că numărul mediu de unități în sistem este

$$U_M = \sum_{n=0}^N n p_n = \sum_{n=0}^N n \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} = \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{N+1}} \sum_{n=1}^N n \rho^{n-1}. \quad (2.11)$$

Ținând seama de identitatea

$$(1 - \rho)^2 \sum_{n=1}^N n \rho^{n-1} = 1 - (N + 1)\rho^N + N\rho^{N+1}$$

relația (2.11) se mai scrie [49]

$$U_M = \rho \frac{1 - (N + 1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N+1})}.$$

Se observă că

$$U_M \cong \begin{cases} \rho(1 + \rho) & , \text{dacă } \rho < 1 \\ \frac{N}{2} + \frac{N}{2}(N + 2)(\rho - 1) & , \text{dacă } \rho \rightarrow 1 \\ N - \frac{1}{\rho} & , \text{dacă } \rho > 1 \end{cases}$$

Numărul mediu de unități în șirul de așteptare este

$$U_M^* = \rho^2 \frac{(1 - N)\rho^{N-1} + (N - 1)\rho^N}{(1 - \rho)(1 - \rho^N)}$$

sau, ținând seama de eventualele valori ale factorului de serviciu,

$$U_m^* = \begin{cases} \rho^2(1 + \rho) & , \text{dacă } \rho < 1 \\ \frac{1}{2}(N - 1) + \frac{1}{12}(N - 1)(N + 7)(\rho - 1) & , \text{dacă } \rho \rightarrow 1 \\ N - 1 - \frac{1}{\rho} & , \text{dacă } \rho > 1. \end{cases}$$

Dispersia unităților din șir are valoarea

$$\sigma_{v^*}^2 = \sum_{n=0}^N n^2 p_n - (U^*)^2$$

adică

$$\sigma_{v^*}^* = \frac{\rho - (N + 1)^2 \rho^{N+1} (1 - \rho)^2 - 2\rho^{N+2} + \rho^{2N+3}}{(1 - \rho)^2 (1 - \rho^{N+1})^2}$$

În cazul procesului tranzitoriu ecuațiile de stare ale modelului examinat sunt [51]

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) \quad (2.12)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t), \quad n = \overline{1, N-1}$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = \lambda P_{N-1}(t) - \mu P_N(t).$$

Pentru a rezolva acest sistem de ecuații diferențiale căutăm o soluție de forma

$$P_n(t) = \rho^{\frac{n}{2}} B_{nr} e^{-\gamma_r t}, \quad \gamma_r = \mu x_r$$

Punând condiția ca această soluție să verifice sistemul (2.12) obținem ecuațiile algebrice

$$\sqrt{\rho} B_{1r} + (x_r - \rho) B_{0r} = 0$$

$$\sqrt{\rho}(B_{n+1,r} + B_{n-1,r}) + (x_r - 1 - \rho) B_{nr} = 0$$

$$\sqrt{\rho}B_{N-1,r} + (x_r - 1)B_{Nr} = 0. \quad (2.13)$$

Luând acum, în a doua ecuație (2.13), $B_{nr} = \sin ny$ și folosind identitatea

$$\sin(n+1)y + \sin(n-1)y = 2 \sin ny \cos y$$

rezultă

$$2\sqrt{\rho} \cos y \sin ny = (\rho + 1 - x_r) \sin ny$$

care, după împărțirea cu $\sin ny \neq 0$, se scrie

$$2\sqrt{\rho} \cos y = (\rho + 1 - x_r). \quad (2.14)$$

Am obținut astfel o ecuație în x_r , și y independentă de n . Însă B_{nr} nu poate fi proporțională cu

$\sin ny$. Să mai observăm că dacă punem

$$B_{nr} = \sin(n+1)y$$

obținem o aceeași ecuație pentru x_r . Mai mult,

$$B_{nr} = \sin ny - \sqrt{\rho} \sin(n+1)y$$

verifică primele două ecuații ale sistemului (2.13). [58]

În plus, dacă luăm $\sin(N+1)y = 0$ toate ecuațiile (2.13) se reduc la ecuația (2.14).

Pentru $(N-1)y = r\pi$, $r = \overline{1, N}$ vom avea $\sin(N+1)y = 0$.

Așadar, soluțiile sistemului (2.12) sunt

$$P_n(t) = p_n + \rho^{\frac{n}{2}} \sum_{r=1}^N C_r \left[\sin \frac{rn\pi}{N+1} - \sqrt{\rho} \sin \frac{r(n+1)\pi}{N+1} \right] e^{-\gamma_r t}$$

cu

$$\gamma_r = \mu x_r = \lambda + \mu - 2\sqrt{\lambda\mu} \cos \frac{r\pi}{N+1}, r = \overline{1, N}, n = \overline{1, n}.$$

Coeficienții C_r se pot determina cu ajutorul condițiilor inițiale

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m, \end{cases}$$

unde $m(m = \overline{0, N})$ reprezintă numărul unităților din sistem la momentul inițial $t = 0$, ($\xi(0) = m$). Dacă $P_{mn} = P\{\xi(t) = n | \xi(0) = m\}$, găsim

$$P_{mn} = p_n + \frac{2}{N+1} \rho^{\frac{n-m}{2}} \sum_{r=1}^N x_r^{-1} \left[\sin \frac{rm\pi}{N+1} - \sqrt{\rho} \sin \frac{r(m+1)\pi}{N+1} \right] \left[\sin \frac{rn\pi}{N+1} - \sqrt{\rho} \sin \frac{r(n+1)\pi}{N+1} \right] e^{-\gamma_s t}.$$

B. Să presupunem acum că sistemul de așteptare cu S stații în paralel are un număr fix de locuri de așteptare. Fie N numărul acestor locuri. Dacă o unitate care sosește în sistem găsește o

stație liberă sau un loc liber pentru a aștepta, atunci ea rămâne în sistem; în caz contrar această unitate părăsește sistemul.

Admițând că intrările în sistem urmează o lege Poisson de parametru λ_k , iar serviciile o lege exponențială negativă de parametru μ_k (k reprezintă numărul de unități din sistem la un moment oarecare t) observăm că ne aflăm în cazul unui proces de naștere și moarte pentru care

$$\lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } S + N \leq k \\ \lambda, & \text{dacă } 0 \leq k < S + N \end{cases}$$

iar

$$u_k \begin{cases} 0, & \text{dacă } S + N < k \\ S\mu, & \text{dacă } S \leq k \leq S + N \\ k\mu, & \text{dacă } 1 \leq k \leq S \end{cases}$$

$$\mu_0 = 0.$$

Obținem

$$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} p_0, & (1 \leq k \leq S) \\ \frac{\rho^k}{S! S^{k-S}} p_0, & (S \leq k \leq S + N), \end{cases} \quad (2.15)$$

unde $P_k(t)$ este probabilitatea ca la momentul $t, t \geq 0$, în sistem să se afle $k (k = \overline{1, N})$ unități,

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ iar

$$p_0^{-1} = \sum_{k=0}^S \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^S}{S!} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho}{S}\right)^i.$$

Se observă imediat că pentru $N = 0$ relațiile (2.15) ne conduc la formula lui Erlang, iar pentru $N \rightarrow \infty$ obținem probabilitatea corespunzătoare din cazul sistemului cu un număr nelimitat de unități. [54], [97]

Probabilitatea ca unitățile să părăsească sistemul este dată de

$$p_{S+N} = \frac{\rho^{S+N}}{S! S^N} \left[\sum_{k=0}^S \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^S}{S!} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho}{S}\right)^i \right]^{-1}$$

iar numărul mediu S_M de stații ocupate este egal cu $\sum_{k=1}^S k p_k + S \sum_{k=S+1}^{S+N} p_k$. După efectuarea calculelor obținem

$$S_M = \left[\sum_{k=0}^{S-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^S}{(S-1)!} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho}{S}\right)^i \right] \left[\sum_{k=0}^S \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^S}{S!} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho}{S}\right)^i \right]^{-1}$$

Calculare nu prea complicate ne permit să aflăm și timpul mediu de așteptare în șir W^* .

Obținem astfel

$$W^* = \int_0^{\infty} P\{w > t\} dt = \frac{S\mu p_s}{(S\mu - \lambda)^2} \left[\left(\frac{\rho}{S}\right)^{N+1} - 2 \left(\frac{\rho}{S}\right)^N + 1 \right]$$

unde $P\{w > t\}$ (probabilitatea că timpul de așteptare să fie mai mare ca t) are expresia

$$P\{w > t\} = \frac{Sp_s}{S - \rho} e^{-s\mu t} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(S\mu t)^i}{i!} \left[\left(\frac{\rho}{S}\right)^i - \left(\frac{\rho}{S}\right)^N \right].$$

Dacă în momentul sosirii unei unități toate stațiile sunt ocupate și, mai mult, există deja $k - S$ unități care așteaptă, atunci această unitate nou sosită rămâne în șir, cu probabilitatea f_k dependentă de numărul de unități care se află deja în sistem. Aceasta se petrece în multe fenomene reale, al căror studiu ne conduce la necesitatea construirii unor modele de așteptare în care atât μ_k cât și λ_k să depindă de starea sistemului (de numărul de unități în sistem). Sunt multe sisteme de servire reale care posedă „mecanisme de apărare” împotriva unor șiruri lungi de așteptare: stațiile își pot mări intensitatea de servire atunci când se constată că ea nu este la nivelul solicitărilor (și deci ar putea rămâne unități neservite), sau se poate mări numărul de stații. [70]

Pentru sistemele cu stație unică, studiile făcute [23], [43] [77] etc. au propus modele în care parametrul repartiției timpului de servire este dependent de starea sistemului. Extinzând modelul propus de Conway și Maxwell [44], să considerăm un sistem cu S stații în paralel, cu intensitatea medie de servire μ_n , în momentul când în sistem există n unități. În acest caz μ_n este definită astfel

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , (n \leq S) \\ \left(\frac{n}{S}\right)^c S\mu & , (n \geq S). \end{cases}$$

Aici μ^{-1} este timpul mediu „normal” de servire, adică timpul mediu de servire a unei unități în ipoteza că ea este singură în sistem. Constanta c este așa-numitul „indice de presiune” (indică măsura în care intensitatea de servire este influențată de numărul de unități din sistem).

Observăm că în cazul $c = 0$, parametrul serviciilor este independent de n .

Admitând că $\lambda_n = \lambda$ obținem

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0 & , (n \leq S) \\ \frac{\rho^n S^{(c-1)(n-S)}}{(S!)^{1-c} (n!)^c} p_0, & (n \geq S), \end{cases} \quad \left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (2.16)$$

unde p_0 se obține din relația $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Folosind (2.16) se calculează cu ușurință diversele caracteristici ale sistemului.

Dacă parametrul sosirilor depinde de numărul de unități în sistem avem:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{dacă } n \leq S - 1 \\ \left(\frac{S}{n+1}\right)^b \lambda, & \text{dacă } n \geq S \text{ (} b = \text{const)}. \end{cases}$$

și se obțin rezultate analoge cu cele de mai sus.

Evident cele două cazuri pot fi reunite, obținându-se un sistem în care atât parametrul sosirilor cât și parametrul serviciilor depind de starea sistemului.

2.3. Modele cu prioritate

Modelele în care disciplina șirului de așteptare (disciplina de servire), se stabilește după criteriile care nu iau în considerare ordinea intrării unităților în sistem, le numim modele cu prioritate. Unitățile unui astfel de model sunt unități cu sau fără prioritate. [74]

Distingem:

1. modele cu prioritate;
2. modele cu prioritate absolută.

Pentru a caracteriza aceste două clase de modele să considerăm următorul exemplu. Într-un model de servire cu o stație intră unități (identice sau diferite) care ocupă loc în r șiruri de așteptare. Se acordă prioritate în ordinea $1, 2, \dots, r$, adică o unitate din șirul j este servită după ce unitățile din șirurile $1, 2, \dots, j - 1$ au fost servite. Să considerăm două șiruri i și $j, i < j$ și să admitem că în momentul sosirii în sistem a unei unități din șirul i stația este ocupată de o unitate din șirul j .

Modelul de așteptare este cu *prioritate* (dar fără prioritate absolută) dacă unitatea din șirul i , care are prioritate față de cea din șirul j , așteaptă până ce aceasta din urmă este servită complet și apoi îi ia locul în stație. [77]

Modelul de așteptare este cu *prioritate absolută*, dacă unitatea din șirul i , care are prioritate absolută față de cea din șirul $j (i < j)$, întrerupe serviciul acesteia din urmă și-i ia locul în stație [86].

În continuare studiem unele modele cu prioritate.

Să considerăm mai întâi cazul modelelor cu o singură stație.

Fie modelul M/M/1, în care intră K unități cu prioritate. Presupunem că parametrul fluxului de intrare poissonian al unităților cu prioritate este $K\lambda$ și al unităților fără prioritate (obișnuite) este $(1 - K)\lambda$. Timpul de servire are o repartiție exponențială negativă de parametru μ , același pentru toate unitățile.

În acest caz o stare a sistemului este $E_{\alpha mn}$ unde : primul indice $\alpha = 1, 2$ arată dacă unitatea în curs de servire este cu prioritate (1) sau fără prioritate (2); al doilea indice $m (m \in$

N^*) corespunde numărului de unități cu prioritate în sistem, indicele $n(n \in N^*)$ corespunde numărului de unități fără prioritate din sistem. Starea E_0 indică faptul că nu există nici o unitate în sistem.

Mai presupunem că în interiorul fiecăreia din cele două clase de unități (cu și fără prioritate) se respectă disciplina „primul venit, primul servit”. [80]

Fie P_{amn} probabilitatea ca, în regim staționar, sistemul să se afle în starea E_{amn} . Sistemul se află în starea E_0 cu probabilitatea P_0 . Ecuțiile modelului (în cazul procesului staționar) sunt

$$\begin{aligned}
P_{110} + P_{201} &= \rho P_0, & \left(\rho = \frac{\lambda}{\mu} \right) \\
K\rho P_0 + P_{120} + P_{211} &= (\rho + 1)P_{110} \\
(1 - K)\rho P_0 + P_{111} + P_{202} &= (\rho + 1)P_{201} \\
K\rho P_{1,m-1,0} + P_{1,m+1,0} + P_{2m1} &= (\rho + 1)P_{1m0} \\
(1 - K)\rho P_{2,0,n-1} + P_{11n} + P_{20n+1} &= (\rho + 1)P_{20n} \\
(1 - K)\rho P_{11n-1} + P_{12n} + P_{2,1,n+1} &= (\rho + 1)P_{11n} \\
K\rho P_{2,m-1,1} &= (\rho + 1)P_{2m1} \\
K\rho P_{1,m-1,n} + (1 - K)\rho P_{1,m,n-1} + P_{1,m+1,n} + P_{2,m,n+1} &= (\rho + 1)P_{1mn} \\
(m > 1, n > 0) \\
K\rho P_{2,m-1,n} + (1 - K)\rho P_{2,m,n-1} &= (\rho + 1)P_{2mn} \quad (m > 0, n > 1).
\end{aligned}$$

Știm că pentru modelul M/M/1 are loc relația $P_0 = 1 - \rho$. Avem de asemenea

$$\sum_{m=1}^{n-1} (P_{1,n-m,m} + P_{2,m,n-m}) = (1 - \rho)\rho^n, \quad n \in N^*.$$

Din modul în care am definit intrările în sistem ale celor două clase de unități, deducem

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{1mn} = K\rho; \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{2mn} = (1 - K)\rho.$$

Calculăm caracteristicile modelului utilizând metoda funcției generatoare. Fie

$$G_{1m}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1mn}, \quad |z| \leq 1 \tag{2.17}$$

$$G_{2m}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{2mn}, \quad |z| \leq 1 \tag{2.18}$$

$$g_1(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} x^m G_{1m}(z), \quad g_1(1, 1) = K\rho, \quad |x| \leq 1 \tag{2.19}$$

$$g_2(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m G_{2m}(z), \quad g_2(1,1) = (1-K)\rho, \quad |x| \leq 1. \quad (2.20)$$

Observăm că dacă luăm

$$g(x, z) = g_1(x, z) + g_2(x, z) + P_0 \quad (2.21)$$

atunci din (2.17) – (2.20) rezultă

$$g(x, x) = \frac{P_0}{1 - \rho x}, \quad g(1,1) = 1.$$

Notând acum cu $U_M^{(1)}$ și $U_M^{(1)}$ numărul mediu de unități din sistem cu prioritate și fără prioritate respectiv, cu $U_M^{(1)}$ și $U_M^{(1)}$ numărul mediu de unități în șirul de așteptare (cu și fără prioritate) avem

$$U_M^{(1)} = U_M^{*(1)} + K\rho = \frac{\partial}{\partial x} g(x, z) \Big|_{x=z=1} \quad (2.22)$$

$$U_M^{(2)} = U_M^{*(2)} + (1-K)\rho = \frac{\partial}{\partial z} g(x, z) \Big|_{x=z=1} \quad (2.23)$$

Încă, dacă $\tilde{W}_{(i)}$ ($i = 1, 2$) este timpul mediu, de așteptare în sistem al unităților cu prioritate (2.17) și fără prioritate (2.18), avem

$$\tilde{W}_{(1)} = \frac{U_M^{(1)}}{K\lambda} \quad (2.24)$$

$$\tilde{W}_{(2)} = \frac{U_M^{(2)}}{(1-K)\lambda} \quad (2.25)$$

Din (2.22) și (2.23) rezultă că aceste caracteristici sunt cunoscute dacă $g(x, z)$ este determinată. În acest scop determinăm mai întâi funcțiile g_1 și g_2 definite prin (2.19) și (2.20) respectiv. Pentru aceasta înmulțim ecuațiile de stare ale modelului cu puteri convenabile ale variabilelor x și z și sumăm după m . [89] Obținem

$$\begin{aligned} & \left[1 + \rho - K\rho x - (1-K)\rho x - \frac{1}{x} \right] g_1(x, z) \\ &= \frac{1}{z} g_2(x, z) + K\rho x P_0 - \left[G_{11} + \frac{1}{z} G_{20}(z) \right] \\ & \cdot [1 + \rho - K\rho x - (1-K)\rho x] g_2(x, z) \\ &= -[\rho - (1-K)\rho z] P_0 + \left[G_{11}(z) + \frac{1}{z} G_{20}(z) \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dacă mai înmulțim acum ecuația de stare care conține termenul $(1 + \rho)P_{20n}$ cu z^n și sumăm după n găsim

$$G_{11}(z) = \left[1 + \rho - (1-K)\rho z - \frac{1}{z} \right] G_{20} + [\rho - (1-K)\rho z] P_0.$$

Introducând această expresie pentru $G_{11}(z)$ în ecuațiile (2.26) rezultă

$$\begin{aligned}
g_1(x, z) &= [1 + \rho - K\rho x - (1 - K\rho z)]^{-1} \\
&\cdot \left\{ -[1 + \rho - K\rho x - (1 - K)\rho z][\rho - K\rho x - (1 - K)\rho z]P_0 \right. \\
&\quad \left. - [1 + \rho - (1 - K)\rho z] \left[1 + \rho - K\rho x - (1 - K)\rho z - \frac{1}{z} \right] G_{20} \right\} \\
g_2(x, z) &= [1 + \rho - K\rho x - (1 - K)\rho z]^{-1} [1 + \rho - (1 - K)\rho z] G_{20}(z). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Folosind aceste rezultate în (2.21) mai deducem că

$$\begin{aligned}
g(x, z) &= \frac{(1 - x)P_0}{1 - x - \rho x(1 - z - Kx - Kz)} \\
&+ \frac{(1 + \rho - \rho z + K\rho z)(z - x)G_{20}(z)}{z[1 + \rho - K\rho x - (1 - K)\rho z][1 - x - \rho x(1 - z + Kz - Kx)]} \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Trecând la limită, pentru $x \rightarrow 1, z \rightarrow 1$ în (2.27), obținem

$$G_{20}(1) = \frac{(1 - K)\rho P_0}{(1 + K\rho)(1 - \rho)} = \frac{\rho(1 - K)}{1 + K\rho}$$

Deoarece $P_0 = 1 - \rho$. Mai observăm că prin trecere la limită în (2.28) pentru $x \rightarrow 1, z \rightarrow 1$, după folosirea expresiei lui $G_{20}(1)$ de mai sus, găsim într-adevăr $g(1,1) = 1$.

Calculând derivatele parțiale ale funcției g dată prin (2.28) și punând $x = z = 1$, din (2.22) – (2.25) se determină caracteristicile modelului. [99] Astfel

$$\begin{aligned}
U_M^{(1)} &= K\rho \frac{1 + \rho(1 - K)}{1 - K\rho} \\
U_M^{*(1)} &= \frac{K\rho^2}{1 - K\rho} \\
\tilde{W}_{(1)} &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - K\lambda)} \\
U_M^{(2)} &= (1 - k\rho) \frac{1 - K\rho(1 - \rho)}{(1 - \rho)(1 - K\rho)} \\
U_M^{*(2)} &= \frac{(1 - K)\rho^2}{(1 - \rho)(1 - K\rho)} \\
\tilde{W}_{(1)} &= \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)(\mu - K\lambda)}
\end{aligned}$$

2.4. Modele cu prioritate absolută

Să considerăm un sistem de așteptare cu o singură stație de servire, în care timpul de servire are o repartiție oarecare H și să presupunem că servirea cu prioritate absolută se face în conformitate cu una din schemele care urmează. [108]

1. În sistem sosesc unități de două tipuri, cele de primul tip având prioritate asupra celorlalte. La sosirea unei unități de primul tip se întrerupe servirea celei de al doilea tip; după ce sunt servite toate unitățile de primul tip existente în sistem, stația reîncepe servirea unității de al doilea tip din punctul în care a fost întreruptă (adică timpul rămas pentru servirea ei se micșorează cu cel în cursul căruia a avut loc servirea până în momentul sosirii unei unități de primul tip).

2. Se păstrează ipotezele de mai sus cu singura deosebire că serviciul unității de al doilea tip se reia, fără a se ține seama că ea fusese servită parțial; serviciul începe din nou și se efectuează în întregime.

3. La sosirea unei unități de primul tip, serviciul unității de al doilea tip încetează complet și această ultimă unitate se pierde.

Mai presupunem, că în toate cele trei scheme ale sistemului cu prioritate, intrările în sistem ale celor două tipuri de unități sunt independente și urmează o lege exponențială de parametrii λ_1 și λ_2 . [64] Timpul de serviciu pentru o unitate de tipul $i (i = 1, 2)$ este reprezentat printr-o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție $H_i(x)$, a cărei transformată Laplace-Stieltjes este

$$\bar{H}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH_i(x)$$

Introducem notațiile [47]:

b_i – valoarea medie a timpului de servire a unităților de tipul $i (i = 1, 2)$; admitem că b_i sunt finite;

$w_i(t)$ – timpul de așteptare în șir a unei unități de tipul $i (i = 1, 2)$, în ipoteza că această unitate a intrat în sistem în momentul t ;

$w_i^*(t)$ – timpul de rămânere în sistem (de așteptare în sistem), a unei unități de tipul $i (i = 1, 2)$, adică timpul care s-a scurs din momentul t până în momentul când unitatea părăsește sistemul.

Scopul nostru este să determinăm următoarele caracteristici ale sistemului:

$$W_i(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{w_i(t) \leq x\}, x > 0, i = 1, 2 \quad (2.29)$$

$$W_i^*(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{w_i^*(t) \leq x\}, x > 0, i = 1, 2 \quad (2.30)$$

Procesul servirii unităților de primul tip (cu prioritate absolută). Deoarece unitățile de primul tip (cu prioritate absolută) sunt servite independent de cele de al doilea tip, rezultă că procesul aleator $\{w_1(t)\}$ coincide cu cel din cazul sistemului M/G/1 în care unitățile sunt servite în ordinea sosirii în sistem.

Fără a mai relua considerațiile asupra repartiției limită a timpului virtual de așteptare, reamintim că dacă $\lambda_1 b_1 < 1$ atunci transformata Laplace-Stieltjes a funcției W_1 ,

$$\bar{W}_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dW_1(x), \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

are expresia

$$\bar{W}_1(s) = \frac{1 - \lambda_1 b_1}{1 - \lambda_1 \frac{1 - \bar{H}_1(s)}{s}} \quad (2.31)$$

Mai mult, pentru o unitate cu prioritate absolută, timpul de așteptare în sistem este egal cu timpul de așteptare în șir plus timpul necesar pentru servire. [37] Așadar, admițând din nou că $\lambda_1 b_1 < 1$, deducem

$$W_1^*(s) = \frac{(1 - \lambda_1 b_1) \bar{H}_1(s)}{1 - \lambda_1 \frac{1 - \bar{H}_1(s)}{s}} \quad (2.32)$$

unde

$$\bar{W}_1^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dW_1^*(x), \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

Din (2.31) și (2.32), prin transformarea inversă, rezultă $W_i(x)$ și $W_i^*(x)$ definite prin (2.29) și (2.30).

Stația de servire este liberă. Dacă în momentul t s-a terminat servirea unei unități de al doilea tip și până în momentul $t + x$ n-a sosit nici o unitate de acest tip, atunci presupunem că stația poate servi o unitate de tipul întâi cu probabilitatea $G_1(x) = \int_0^x g_1(t) dt$. [26]

Cu alte cuvinte, $G_1(x)$ este funcția de repartiție a duratei de serviciu a stației în stare liberă. Considerăm procesul

$$\zeta(t) = \{\delta(t), \gamma(t)\},$$

unde componenta $\delta(t)$ poate lua numai valorile 0 și 1, iar $\gamma(t)$ este definită în funcție de valorile lui $\delta(t)$. Dacă $\delta(t) = 0$, aceasta înseamnă că în momentul t stația este liberă, adică în sistem nu sunt unități de nici un tip. Dacă însă în momentul t stația este ocupată cu servirea unei unități oarecare, atunci $\delta(t) = 1$. În cazul $\delta(t) = 0$, $\gamma(t)$ reprezintă intervalul de timp din momentul t până în momentul intrării în stație a unei unități de primul tip, dacă din momentul t n-au mai sosit unități de al doilea tip. În cazul $\delta(t) = 1$, $\gamma(t)$ reprezintă intervalul de timp din momentul t până în momentul când stația începe servirea unei unități de al doilea tip, dacă această unitate a sosit în momentul t . [58]

Fie

$$\Phi_i(x, t) = P\{\delta(t) = i, \gamma(t) < x\} \quad (i = 0, 1)$$

și

$$\Phi_i(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_i(x, t) \quad (i = 0, 1) \quad (2.33)$$

Limitându-ne la cazul staționar, se poate demonstra că limita (2.33) există întotdeauna.

[68] Pentru $\lambda_2 b_2 \geq 0$ această limită este egală cu 0 oricare ar fi x finit; dacă $\lambda_2 b_2 < 1$, atunci $\Phi_i(x)$ satisface sistemul de ecuații integro-diferențiale

$$\Phi'_0(x) - \lambda_2 \Phi_0(x) + \Phi'_1(0)G_1(x) = \Phi'_0(0) \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \Phi'_1(x) - \lambda_2 \Phi_1(x) + \lambda_2 \int_0^x H_2(x-y) d\Phi_1(y) + \Phi'_0(0)H_1(x) + \lambda_2 \Phi_0(\infty)H_2(x) \\ = \Phi'_1(0) \end{aligned} \quad (2.35)$$

în condițiile

$$\Phi_0(\infty) + \Phi_1(\infty) = 1, \Phi_0(0) = \Phi_1(0) = 0 \quad (2.36)$$

Într-adevăr, în ipoteza că $\lambda_2 b_2 < 1$ iar $\Phi_0(x)$ și $\Phi_1(x)$ sunt funcții continue, să aplicăm în ambele părți ale ecuațiilor (2.34) și (2.35) transformatele Laplace ale funcțiilor respective. Avem

$$\bar{\Phi}'_0(s) \left(1 - \frac{\lambda_2}{s}\right) + \Phi'_1(0) \frac{\bar{g}_1(s)}{s} = \frac{\Phi'_0(0)}{s} \quad (2.37)$$

$$\bar{\Phi}'_1(s) \left[1 - \frac{\lambda_2}{s} + \frac{\lambda \bar{H}_2(s)}{s}\right] + \Phi'_0(0) \frac{\bar{H}_1(s)}{s} + \lambda_2 \Phi_0(\infty) \frac{\bar{H}_2(s)}{s} = \frac{\Phi'_1(0)}{s} \quad (2.38)$$

unde

$$\bar{\Phi}'_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \Phi'_i(x) dx \quad (i = 0, 1)$$

$$\bar{g}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g_1(x) dx$$

Relațiile (2.37) și (2.38) se mai scriu

$$\bar{\Phi}'_0(s) = \frac{\Phi'_0(0) - \Phi'_1(0)\bar{g}_1(s)}{s - \lambda_2} \quad (2.39)$$

$$\bar{\Phi}'_1(s) = \frac{\Phi'_1(0) - \Phi'_0(0)\bar{H}_1(s) - \lambda_2 \Phi_0(\infty)\bar{H}_2(s)}{s - \lambda_2[1 - \bar{H}_2(s)]} \quad (2.40)$$

de unde putem afla $\bar{\Phi}'_0(s)$ și $\bar{\Phi}'_1(s)$ în ipoteza că sunt cunoscute constantele $\Phi'_0(0)$, $\Phi'_1(0)$, $\Phi_0(\infty)$.

Funcția $\bar{\Phi}'_0(s)$ este analitică în semiplanul $Re\{s\} > 0$. Urmează ca în punctul în care numitorul fracției din partea dreaptă a egalității (2.39), devine zero, trebuie să devină zero și numărătorul. De aici

$$\Phi'_0(0) = \bar{g}_1(\lambda_2)\Phi'_1(0) \quad (2.41)$$

Analog, numitorul fracției din (2.40) devine zero pentru $s = 0$ și scriind condiția ca și numărătorul să se anuleze, obținem

$$\Phi_1'(0) - \Phi_0'(0) = \lambda_2 \Phi_0(\infty) \quad (2.42)$$

Din (2.41) și (2.42) determină $\Phi_0'(0)$ și $\Phi_1'(0)$ în funcție de $\Phi_0(\infty)$:

$$\Phi_0'(0) = \frac{\lambda_2 \bar{g}_1(\lambda_2) \Phi_0(\infty)}{1 - \bar{g}_1(\lambda_2)}$$

$$\Phi_1'(0) = \frac{\lambda_2 \Phi_0(\infty)}{1 - \bar{g}_1(\lambda_2)}$$

Înlocuind aceste relații în (2.39) și (2.40), obținem

$$\bar{\Phi}_0'(s) = \frac{\lambda_2 [\bar{g}_1(\lambda_2) - \bar{g}_1(s) \Phi_0(\infty)]}{(s - \lambda_2) [1 - \bar{g}_1(\lambda_2)]} \quad (2.43)$$

$$\bar{\Phi}_0'(s) = \frac{\{1 - \bar{H}_2(s) + \bar{g}_1(\lambda_2) [\bar{H}_2(s) - \bar{H}_1(s)]\} \lambda_2 \Phi_0(\infty)}{\{s - \lambda_2 [1 - \bar{H}_2(s)]\} [1 - \bar{g}_1(\lambda_2)]} \quad (2.44)$$

Pe de altă parte, din condițiile (2.36) avem

$$\bar{\Phi}_0'(0) + \bar{\Phi}_1'(0) = 1$$

și deoarece $\bar{H}_1(s)$ și $\bar{H}_2(s)$ pot fi dezvoltate în serie în jurul originii avem

$$\bar{H}_1(s) = 1 - b_1 s + 0(s)$$

$$\bar{H}_2(s) = 1 - b_2 s + 0(s)$$

Înlocuind aceste relații în (2.44) și trecând la limită pentru $s \rightarrow 0$, rezultă

$$\bar{\Phi}_0'(0) = \Phi_0(\infty)$$

$$\bar{\Phi}_1'(0) = \frac{[b_2 + \bar{g}_1(\lambda_2)(b_1 - b_2)] \lambda_2 \Phi_0(\infty)}{(1 - \lambda_2 b_2) [1 - \bar{g}_1(\lambda_2)]}$$

Din condițiile (2.36) rezultă

$$\Phi_0(\infty) = \frac{(1 - \lambda_2 b_2) [1 - \bar{g}_1(\lambda_2)]}{1 - \bar{g}_1(\lambda_2) (1 - \lambda_2 b_1)}$$

Așadar, relațiile (2.43) și (2.44) se scriu în definitiv

$$\bar{\Phi}_0'(s) = \frac{\lambda_2 (1 - \lambda_2 b_2) [\bar{g}_1(\lambda_2) - \bar{g}_1(s)]}{(s - \lambda_2) [1 - \bar{g}_1(\lambda_2) (1 - \lambda_2 b_1)]}, \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (2.45)$$

$$\bar{\Phi}_1'(s) = \frac{\lambda_2 (1 - \lambda_2 b_2) \{1 - \bar{H}_2(s) + \bar{g}_1(\lambda_2) [\bar{H}_2(s) - \bar{H}_1(s)]\}}{[1 - \bar{g}_1(\lambda_2) (1 - \lambda_2 b_1)] \{s - \lambda_2 [1 - \bar{H}_2(s)]\}} \quad (2.46)$$

Folosind aceste rezultate putem determina unele caracteristici ale procesului de servire.

Astfel, probabilitatea ca stația să fie liberă este

$$\bar{\Phi}_0'(0) = \Phi_0(\infty) = - \frac{(1 - \lambda_2 b_2) [1 - \bar{g}_1(\lambda_2)]}{(1 - \lambda_2 b_1) \bar{g}_1(\lambda_2) - 1}$$

iar probabilitatea ca stația, în regim staționar, să servească numai unități cu prioritate absolută este [76]

$$\frac{\lambda_2 b_1 \bar{g}_1(\lambda_2)(1 - \lambda_2 b_2)}{1 - (1 - \lambda_2 b_1) \bar{g}_1(\lambda_2)}$$

2.5. Modelul M/G/1 cu intrări în grup

Am menționat proprietatea de dualitate a modelelor G1/M/1 și M/G/1, în baza căreia studiul unuia din aceste modele se reduce la studiul celuilalt, dacă se permută funcțiile de repartiție ale intrărilor și serviciilor. În consecință, deoarece vom prezenta pe larg modelul G1/M/1, ne vom limita aici la a prezenta pe scurt unele rezultate mai importante. Menționăm că Gaver în [52] face un studiu detaliat al sistemului pe care îl avem aici în vedere.

Așadar, să presupunem că în sistemul M/G/1 intrările au loc în grup și să notăm cu τ_n intervalul de timp dintre momentele sosirii a două grupe consecutive (a n -a și a $(n + 1)$ -a). Avem

$$F(x) = P(\tau_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, 0 < \lambda < \infty, x > 0$$

Dacă în a n -a, grupă (grupele fiind numerotate în ordinea intrărilor în sistem) sunt r_n unități, fie

$$P\{r_n = j\} = \pi_j, n \in N \quad (2.47)$$

Atunci, numărul de unități care sosesc în intervalul de timp $(0, t)$, $t > 0$ este egal cu $\sum r_i$, unde $i \in N$ ia acele valori pentru care $0 < \sum_{\alpha=1}^i \tau_\alpha < t$. (Amintim că $\sum_{\alpha=1}^n \tau_\alpha$ reprezintă momentul în care intră în sistem a n -a grupă). Stările sistemului sunt determinate prin numărul de unități în sistem în momentul t_n^* al plecării celei de a n -a, unități și prin momentul t_n^* în care părăsește sistemul (după servire) a n -a, unitate. Așa cum am văzut, șirul acestor stări formează un lanț Markov. Fie $\xi(t_0)$ numărul de unități în sistem la momentul t_0 ($t_0 \geq 0$) și $\xi(t_n^* + 0) = \xi_n^*$, numărul unităților din sistem imediat după plecarea celei de a n -a, unități. Să notăm prin

$$P_{ij}^{(n)}(t) = P\{\xi_n^* = j, t_n^* > t_0 + t | \xi(t_0) = i\} i, j \in N$$

în ipoteza că sistemul nu s-a eliberat niciodată în intervalul $(t_0, t_n^*]$. Probabilitatea $P_{ij}^{(n)}(t)$ satisface ecuația Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij}^{(n+1)}(t) = \sum_{k=-1}^{j-1} \int_0^t P_{ij-k}^{(n)}(t-u) P_{k+1}(u) dH(u) \quad (2.48)$$

unde H este funcția de repartiție a serviciilor, iar

$$P_n(t) = P\left\{\sum_{i=1}^t r_i = n\right\}, \left(0 < \sum_{\alpha=1}^i \tau_\alpha < t\right)$$

Soluția ecuației (2.48) se determină folosind transformata Laplace-Stieltjes și funcția generatoare. Se calculează apoi caracteristicile modelului. [84] Găsim că lungimea medie a perioadei de ocupare $E[\theta]$ este egală cu

$$E[\theta] = \frac{b}{1 - \lambda b E[r_n]}$$

unde $0 \leq b = E[s_n] < \infty$ este valoarea medie a timpului de servire s_n a celei de a n -a unități. Obținem de asemenea

$$D^2[\theta] = \frac{D^2[s_n] + \lambda b E[r_n^2] E[s_n^2]}{1 - \lambda b E[r_n]}$$

Numărul mediu de unități U_Γ servite în perioada de ocupare și dispersia $\sigma_{U_\Gamma}^2$ a acestuia sunt date, respectiv, prin relațiile

$$U_\Gamma = \frac{1}{1 - \lambda b E[r_n]}$$

$$\sigma_{U_\Gamma}^2 = \frac{\lambda b \{E[r_n^2] + \lambda b D^2[s_n]\}}{\{1 - \lambda b E[r_n]\}^3}$$

Găsim că funcția generatoare a probabilității $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}$ pentru $\lambda b E[r_n] < 1$, are expresia

$$G(u) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j u^j = \frac{(1-u)\{1 - \lambda b E[r_n]\} \bar{H}\{\lambda[1 - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j u^j]\}}{\bar{H}\{\lambda[1 - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j u^j]\} - u} \quad (2.49)$$

unde probabilitatea π_j este definită prin (2.47), iar $|u| < 1$. Ca de obicei, am notat prin $\bar{H}(s)$ ($Re(s) \geq 0$) transformata Laplace-Stieltjes a funcției de repartiție H .

Folosind (2.49) se pot determina caracteristicile modelului, în cazul echilibrului statistic.

2.6. Modele în care prioritatea se atribuie prin clasificarea unităților

Să presupunem acum că unitățile care sosesc într-un sistem M/G/1 se împart (după intrarea în sistem) în două clase, în scopul reducerii timpului mediu de așteptare în șir. Se acordă prioritate clasei căreia îi corespunde un timp mediu de servire mai mic. Dacă această clasificare este corectă se reduce timpul mediu de așteptare pentru unitățile din ambele clase. [73]

Într-adevăr, dacă H este funcția de repartiție a duratelor de servire cu media $\frac{1}{\mu}$, iar λ este parametrul repartiției sosirilor, se știe că timpul mediu de așteptare, W^* , în regim staționar, este

$$W^* = \frac{\lambda E_2(x)}{2(1 - \rho)} \quad (2.50)$$

unde $E_2(x) < \infty$ este momentul de ordinul doi al repartiției $H(x)$, iar $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Să presupunem acum că unitățile sunt împărțite în două clase C_1 și C_2 , cu funcțiile de repartiție ale timpului de servire H_1 și H_2 respectiv, și cu mediile $\frac{1}{\mu_1} < \frac{1}{\mu_2}$. Unitățile din clasele C_1

și C_2 , sosind independent cu ratele λ_1 și λ_2 , rezultă că repartiția timpului de servire al unei unități selectate aleator este

$$B(x) = H_1(x) \frac{\lambda_1}{\lambda} + H_2(x) \frac{\lambda_2}{\lambda}$$

unde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, iar

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda} \left(\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, i = 1, 2 \right)$$

Admițând că stația de servire este liberă, prima unitate care va fi servită, este cea care ocupă primul loc din șirul format de unitățile din clasa C_1 (clasa unităților cu prioritate, deoarece $\frac{1}{\mu_1} < \frac{1}{\mu_2}$), cu excepția cazului când nu există astfel de unități care să aștepte și deci este servită o unitate din clasa C_2 . Dacă notăm prin W_1^* și W_2^* timpul mediu de așteptare a unităților din clasele C_1 și C_2 respectiv, în ipoteza acordării priorității, obținem

$$W_u^* = \frac{\lambda_1 W_1^* + \lambda_2 W_2^*}{\lambda}$$

sau

$$W_u^* = \frac{\lambda \left[1 - \frac{\lambda_1}{\mu} \right] E_2(x)}{1(1 - \rho)(1 - \rho_1)} \quad (2.51)$$

Din (2.50) și (2.51) obținem

$$\frac{W_u^*}{W^*} = \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\mu}}{1 - \rho_1} \quad (2.52)$$

de unde rezultă că într-adevăr timpul mediu de așteptare s-a redus.

Avem $W_u^* < W^*$, deoarece $\frac{1}{\mu_1} < \frac{1}{\mu} < \frac{1}{\mu_2}$.

Mai observăm că eficiența clasificării propuse este mare dacă timpul mediu de servire a unităților cu prioritate este mic și dacă factorul de serviciu este mare. [75]

Să presupunem acum că se fac erori în clasificare și unele unități care ar trebui să aparțină unei clase sunt trecute în altă clasă. Admițând că aceste erori se fac aleator cu parametrii α_{12} și α_{21} respectiv ($\alpha_{ij}; i, j = 1, 2, i \neq j$ este parametrul repartiției erorilor de trecere a unităților care ar trebui să aparțină clasei C_i în clasa C_j), avem

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 - \alpha_{12} + \alpha_{21}$$

$$\bar{\lambda}_2 = \lambda_2 + \alpha_{12} - \alpha_{21}$$

unde $\bar{\lambda}_1$ și $\bar{\lambda}_2$ sunt parametrii repartițiilor poissoniene ale fluxurilor de intrare ale unităților din clasele C_1 și C_2 , în condițiile erorii de clasificare. În acest caz timpul mediu de servire $\frac{1}{\mu_1}$ și $\frac{1}{\mu_2}$ al unităților din cele două clase este [97], [98], [99]

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{\lambda_1 - \alpha_{12}}{\left(\mu_1 + \frac{\alpha_{21}}{\mu_2}\right) \bar{\lambda}_1}$$

$$\frac{1}{\mu_2} = \frac{\mu_2 \alpha_{12} - \mu_1 \alpha_{21} + \mu_1 \lambda_2}{\lambda_2 \mu_1 \mu_2}$$

de unde deducem că

$$\frac{1}{\mu_1} \leq \frac{1}{\bar{\mu}_1}, \frac{1}{\mu_2} \leq \frac{1}{\bar{\mu}_2}$$

Se vede imediat că timpul mediu total de servire este neschimbat deoarece $\bar{\mu}_1 = \mu$. Din (2.51) și (2.52) obținem

$$\frac{\bar{W}_u^*}{W^*} = \frac{1 - \frac{\bar{\lambda}_1}{\mu}}{1 - \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\mu}_1}} = \left[1 - \frac{\lambda_1 - \alpha_{12} + \alpha_{21}}{\mu}\right] \left[1 - \frac{\lambda_1 - \alpha_{12}}{\mu_1} - \frac{\alpha_{21}}{\mu_2}\right]^{-1} \quad (2.53)$$

de unde rezultă că $\frac{\bar{W}_u^*}{W^*} < 1$ dacă și numai dacă

$$\frac{\alpha_{12}}{\lambda_1} + \frac{\alpha_{21}}{\lambda_2} < 1$$

Aici \bar{W}_u^* reprezintă timpul mediu de așteptare al unei unități oarecare, în condițiile existenței erorilor în clasificare.

Din (2.52) și (2.53) se poate calcula mărimea Δ a „defectului” procedurii de clasificare, în ipoteza existenței erorilor α_{12} și α_{21} . Avem

$$\Delta = \left[\frac{\alpha_{12}}{\lambda_1} + \frac{(1 - \rho)\alpha_{21}}{\lambda_2}\right] \left[1 - \frac{\lambda_1 - \alpha_{12}}{\mu_1} - \frac{\alpha_{21}}{\mu_2}\right]^{-1}$$

Rezultă că „defectul” $\Delta = 0$, dacă și numai dacă nu există erori ($\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$), și $\Delta = 1$, dacă $\frac{\alpha_{12}}{\lambda_1} + \frac{\alpha_{21}}{\lambda_2} = 1$ adică dacă procedul de clasificare este atât de nesatisfăcător încât conduce la același timp mediu de așteptare ca și în cazul când toate unitățile ar fi servite în ordinea sosirii.

Pentru a afla ce decizie trebuie luată la clasificare, astfel ca timpul mediu de așteptare al unităților să fie minim procedăm în modul următor. Fie p probabilitatea ca o unitate să fie trecută în clasa C_1 și deci $1 - p$ probabilitatea ca ea să fie clasificată în C_2 . Apar două alternative. [101]

a) Această unitate este repartizată în clasa C_1 ceea ce este corect, cu probabilitatea p și incorect, cu probabilitatea $1 - p$ în cazul când este repartizată corect există o „pierdere” egală cu zero. În caz contrar „pierderea medie” este proporțională cu

$$(1-p) \frac{1-\rho}{\lambda_2(1-\rho_1)}$$

b) Unitatea este repartizată în clasa C_2 , ceea ce este incorect cu probabilitatea p și, urmând un raționament ca mai sus, rezultă că pierderea medie este proporțională cu

$$p \frac{1}{\lambda_1(1-\rho_1)}$$

Deci, decizia ce trebuie dată pentru ca timpul mediu de așteptare să fie minim ține seama de următoarea regulă. Unitatea este repartizată în clasa C_1 dacă

$$p > \frac{\lambda_1(1-\rho_1)}{\lambda_2 + \lambda_1(1-\rho)}$$

și în clasa C_2 dacă

$$p < \frac{\lambda_1(1-\rho)}{\lambda_2 + \lambda_1(1-\rho)}$$

Mai observăm că $p \rightarrow 0$ dacă $p \rightarrow 1$ și $\lambda_1 \ll \lambda_2$.

Să presupunem acum că toate unitățile care nu pot fi clasificate cu certitudine în niciuna din clasele C_1 și C_2 formează o clasă mixtă de unități C_m , iar prioritatea se acordă în ordinea 1, m , 2. [104] Parametrii repartițiilor sosirilor unităților din clasele C_1, C_m, C_2 sunt respectiv $\lambda_1 - \alpha_{1m}, \alpha_{1m} + \alpha_{2m}, \lambda_2 - \alpha_{2m}$, unde α_{1m} și α_{2m} sunt parametrii repartițiilor erorilor ce se fac la trecerea unităților în clasa C_m în mod eronat, ele trebuind să aparțină de fapt claselor C_1 și C_2 . Parametrii repartițiilor serviciilor pentru cele trei clase de unități sunt, respectiv,

$$\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_m} = \frac{\frac{\alpha_{1m}}{\mu_1} + \frac{\alpha_{2m}}{\mu_2}}{\alpha_{1m} + \alpha_{2m}}, \frac{1}{\mu_2}$$

Fie $P_{abc}(t)$, probabilitatea ca în momentul t în sistem să se afle a unități din clasa C_1 , b unități din clasa C_m și c unități din clasa C_2 . Să presupunem că se acordă prioritate absolută clasei C_1 față de C_m și C_2 și, clasei C_m față de C_2 .

În regim staționar, se găsesc expresii simple pentru timpul mediu de așteptare a unităților din cele trei clase de prioritate. [117] Avem

$$W_1^* = \frac{\lambda E_2(x)}{2 \left[1 - \frac{\lambda_1 - \alpha_{1m}}{\mu_1} \right]}$$

$$W_m^* = \frac{\lambda E_2(x)}{2 \left[1 - \frac{\lambda_1 - \alpha_{1m}}{\mu_1} \right] \left[1 - \rho_1 - \frac{\alpha_{2m}}{\mu_2} \right]}$$

$$W_2^* = \frac{\lambda E_2(x)}{2 \left[1 - \rho_1 - \frac{\alpha_{2m}}{\mu_2} \right] \left[1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right]}, \left(\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right)$$

unde W_1^* , W_m^* , W_2^* reprezintă, respectiv, timpul mediu de așteptare al unităților din clasele C_1, C_m, C_2 .

Dacă W_u^* este timpul mediu de așteptare al unei unități oarecare (în ipoteza existenței celor 3 clase de unități) atunci, „defectul” corespunzător situației de față este

$$\Delta_m = \frac{\bar{W}_u^* - W_u^*}{W^* - W_u^*} = \frac{(1 - \rho) \frac{\alpha_{1m} \alpha_{2m}}{\lambda_1 \lambda_2}}{\left[1 - \frac{\lambda_1 - \alpha_{1m}}{\mu_1}\right] \left[1 - \rho_1 - \frac{\alpha_{2m}}{\mu_2}\right]}$$

care arată că $\Delta_m = 0$, dacă $\alpha_{1m} = \alpha_{2m} = 0$.

Reamintim că și în cazul introducerii clasei mixte C_m pot apărea erori de clasificare a unităților în oricare din clasele C_1, C_m, C_2 .

Urmând un raționament analog cu cel din cazul clasificării unităților în două clase C_1 și C_2 , suntem conduși la următoarea regulă de adoptare a unei decizii optime.

O unitate se repartizează în clasa C_1 dacă $p > p_1$ în clasa C_m dacă $p_1 > p > p_2$ și în clasa C_2 dacă $p_2 > p$, unde p are semnificația de mai sus, iar

$$p_1 = -\frac{\alpha_{21} + \alpha_{2m}}{\lambda_1(1 - \rho_1) - \alpha_{12} + \alpha_{21} - \alpha_{1m} + \alpha_{2m}} + 1$$

$$p_2 = \frac{(\alpha_{12} + \alpha_{1m})(1 - \rho)}{\lambda_2(1 - \rho_1) - (1 - \rho)(\alpha_{21} - \alpha_{12} + \alpha_{2m} - \alpha_{1m})}$$

Modelul de atribuire a priorității prin clasificarea unităților prezentat aici, poate fi extins în cazul unui număr oarecare i de priorități. Deoarece există însă o mare varietate de căi prin care se pot introduce clase mixte, calculele devin anevoioase și nu este posibilă o analiză riguroasă a eficienței sistemului.

2.6.1. Sistemul M/M/S ($S < \infty$)

Să considerăm sistemul de așteptare M/M/S cu flux de intrare poissonian (M) de parametru λ și în care duratele de servire în fiecare stație au o aceeași repartiție exponențială negativă de parametru μ . Sistemul are ($S < \infty$) stații dispuse în paralel. Presupunem că în momentul $t = 0$ în sistem așteaptă i ($i \in N^*$) unități. Se formează un singur șir de așteptare, unitățile fiind servite după principiul „primul venit, primul servit”. Aceasta înseamnă că dacă o stație este liberă, prima unitate din șir intră în stația respectivă. Dacă două sau mai multe stații se eliberează în același moment, atunci prima unitate din șir intră în stația cu numărul de ordine cel mai mic (Admitem, evident că stațiile sunt numerotate în ordine naturală). [110]

Fie $\xi(t)$ numărul de unități din sistem la momentul $t \geq 0$. Spunem că sistemul este în starea E_j la momentul t dacă avem $\xi(t) = j$.

Am văzut că în cazul sistemului cu o singură stație, probabilitatea $P\{X(h) = 1\}$, ca în intervalul de timp $(0, h]$ să intre o unitate în sistem este dată de

$$P\{X(h) = 1\} = \lambda h + h\theta_1(h) \quad (2.54)$$

unde $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_1(h) = 0$, iar probabilitatea $P\{X(h) = 1\}$ ca, în același interval $(0, h]$ să părăsească sistemul o unitate servită este

$$P\{X(h) = 1\} = \mu h + h\theta_2(h) \quad (2.55)$$

cu $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_2(h) = 0$.

În cazul modelului M/M/S, dacă $0 \leq j < S$ fiecare din cele j unități poate pleca în intervalul de timp $(0, h]$. Acest eveniment se realizează cu probabilitatea

$$1 - [1 - P\{X(h) = 1\}]^j,$$

unde $1 - P\{X(h) = 1\}$ este probabilitatea ca nici o unitate să nu fie servită (și deci să nu părăsească sistemul) în intervalul de timp $(0, h]$. Deoarece evenimentele în cauză sunt independente, egalitatea precedentă este imediată. [95]

Pe de altă parte, să observăm că, pentru $j < S$, avem

$$[1 - P\{X(h) = 1\}]^j = 1 - jP\{X(h) = 1\} + \dots + [P\{Y(h) = 1\}]^j$$

de unde rezultă

$$1 - [1 - P\{X(h) = 1\}]^j = jP\{Y(h) = 1\} + h\theta(h) \quad (2.56)$$

Cu $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0$

Dacă toate stațiile sunt ocupate ($j \geq S$) probabilitatea de a avea loc o plecare din sistem este

$$SP\{Y(h) = 1\} + h\theta(h), \quad j = S, S + 1, \dots$$

Să determinăm acum probabilitatea $P_j(t + h) = P\{\xi(t + h) = j\}$ ca la momentul $t + h$, $h > 0$ sistemul să se afle în starea E_j .

Considerăm mai întâi cazul $0 < j < S$. Avem următoarele posibilități: [72]

- la momentul $t(t > 0)$ sistemul se află în starea E_j , iar în intervalul de timp $(t, t + h]$ nu are loc nici o intrare și nici o ieșire din sistem;
- la momentul $t(t > 0)$ sistemul se află în starea E_{j-1} , iar în intervalul de timp $(t, t + h]$, intră o unitate în sistem și nu are loc nicio plecare;
- la momentul $t(t > 0)$, sistemul se află în starea E_{j-1} , iar în intervalul de timp $(t, t + h]$ este servită o unitate (care părăsește imediat sistemul) și nu intră în sistem nici o unitate.

Așadar, putem scrie

$$P_j(t + h) = [1 - P\{X(h) = 1\}][1 - P\{Y(h) = 1\}]^j P_j(t) +$$

$$P\{X(h) = 1\}[1 - P\{Y(h) = 1\}]^{j-1}P_{j-1}(t) + [1 - P\{X(h) = 1\}] \{1 - [1 - P\{Y(h) = 1\}]^{j+1}\}P_{j+1}(t) \quad (2.57)$$

Dacă $j = 0$ există două posibilități:

- la momentul $t > 0$ sistemul să află în starea E_0 și în intervalul de timp $(t, t + h]$, $h > 0$ nu se semnalează nici o intrare;

- la momentul $t > 0$ sistemul se află în starea E_1 , iar în intervalul de timp $(t, t + h]$, $h > 0$ nu sosește nici o unitate și unitatea existentă este servită.

Deci

$$P_0(t + h) = [1 - P\{X(h) = 1\}]P_0(t) + [1 - P\{X(h) = 1\}]P\{Y(h) = 1\}P_1(t) \quad (2.58)$$

În sfârșit, în cazul $j \geq S$ avem

$$\begin{aligned} P_j(t + h) &= [1 - P\{X(h) = 1\}][1 - P\{Y(h) = 1\}]^S P_j(t) \\ &+ P\{X(h) = 1\}[1 - P\{Y(h) = 1\}]^S P_{j-1}(t) \\ &+ [1 - P\{X(h) = 1\}]\{1 - [1 - P\{Y(h) = 1\}]^S\}P_{j+1}(t) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Procedând ca în cazul modelului M/M/1, trecem în membrul stâng pe $P_j(t)$ din (2.57) și (2.59) (respectiv $P_0(t)$ din (2.58)), împărțim cu $h > 0$ și facem pe h să tindă către zero. Ținând apoi seama de (2.54) – (2.56) obținem sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{dP_j(t)}{dt} &= -(\lambda + j\mu)P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t) + (j + 1)\mu P_{j+1}(t); j = 1, \dots, S - 1 \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -(\lambda + S\mu)P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t) + S\mu P_{j+1}(t); j = S, S + 1, \dots$$

cu condițiile inițiale $P_j(0) = \delta_{in}$, unde δ_{in} este simbolul lui Kronecker. Observăm că intensitatea servirii este proporțională cu j pentru $j < S$ și cu S pentru $j \geq S$. [64]

Pentru a găsi soluția sistemului (2.60) îl scriem sub forma

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -(\lambda + S\mu)P_0(t) + S\mu P_0(t) + S\mu P_1(t) - (S - 1)\mu P_1(t) \\ \frac{dP_j(t)}{dt} &= -(\lambda + S\mu)P_j(t) + (S - j)\mu P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t) + S\mu P_{j+1}(t) - (S - j - \\ &1)\mu P_{j+1}(t), j = 1, \dots, S - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -(\lambda + S\mu)P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t) + S\mu P_{j+1}(t), j = S, S + 1, \dots$$

Să înmulțim aceste ecuații (exceptând pe prima) cu z^j și să sumăm după $j \in N^*$. Introducând funcția generatoare

$$G(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) z^j, (|z| \leq 1) \quad (2.61)$$

cu $G(z, 0) = z^i$, găsim

$$\frac{\partial}{\partial t} G(z, t) = -(\lambda + S\mu - \lambda z)G(z, t) + \frac{S\mu}{z}[G(z, t) - P_0(t)] - \mu(1 - z) \sum_{j=1}^{S-1} (S - j) z^{j-1} P_j(t).$$

Folosind acum transformata Laplace a funcției G

$$\bar{G}(z, s) = \int_0^\infty e^{-st} G(z, t) dt, \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

din ecuația de mai sus rezultă

$$\bar{G}(z, s) = \frac{z^{i+1} - \mu(1 - z) \sum_{j=0}^{S-1} (S - j) z^j \bar{P}_j(s)}{sz - (S\mu - \lambda z)(1 - z)} \quad (2.62)$$

unde $\bar{P}_j(s)$ este transformata Laplace a lui $P_j(t)$.

Pentru $|z| \leq 1$, ecuația $sz - (S\mu - \lambda z)(1 - z)$ are soluțiile

$$z_{1,2} = \frac{S\mu + s + \lambda \pm \sqrt{(S\mu + s + \lambda)^2 - 4S\mu\lambda}}{2\lambda}, \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

Vom presupune că z_1 are semnul pozitiv în fața radicalului. Deoarece funcția \bar{G} este regulată pentru $|z| \leq 1$ și deoarece $|z_2| < 1$, este necesar ca și numărătorul expresiei din membrul drept al relației (2.62) să se anuleze pentru $z = z_2$. [60] Adică

$$\sum_{j=0}^{S-1} (S - j) z_2^j \bar{P}_j(s) = \frac{z_2^{i+1}}{\mu(1 - z_2)} \quad (2.63)$$

Această ecuație împreună cu cele S ecuații care rezultă din (2.60) pentru $j = 0, 1, \dots, S - 2$ formează un sistem în necunscutele $\bar{P}_j(s)$, $j = 0, 1, \dots, S - 1$, care are o soluție unică. Transformatele $\bar{P}_j(s)$, $j = 0, 1, \dots, S - 1$ fiind astfel determinate, probabilitățile $P_j(t)$ se calculează cu ajutorul formulei pentru aflarea funcției original

$$P_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} \bar{P}_j(s) ds.$$

Din a doua ecuație a sistemului (2.60) utilizăm primele $S - 2$ ecuații, adică

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -(\lambda + j\mu)P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t) + (j + 1)\mu P_{j+1}(t), j = 1, \dots, S - 2$$

care este adevărată pentru $S > 2$. Înmulțind această ecuație cu z^j , sumând după j ($j = 1, \dots, S - 2$) și luând în considerare prima ecuație din (2.60) obținem ecuația cu derivate parțiale

$$\mu(1 - z) \frac{\partial}{\partial z} G_S(z, t) - \frac{\partial}{\partial t} G_S(z, t) = \lambda(1 - z)G_S(z, t) + \lambda z^{S-1} P_{S-2}(t) - \mu(S - 1)z^{S-2} P_{S-1}(t),$$

unde

$$G_S(z, t) = \sum_{j=0}^{S-2} P_j(t) z^j, |z| \leq 1.$$

După efectuarea calculelor găsim

$$\bar{G}_s(z, s) = e^{-\rho(1-z)} \left\{ (S-1) \frac{\Gamma\left(\frac{s}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{\mu}+1\right)} Y\left[\frac{s}{\mu}, -(S-2), 1, (1-z), \rho(1-z)\right] \bar{P}_{S-1}(s) - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{\mu}+1\right)} Y\left[\frac{s}{\mu}, -(S-1), 1, (1-z), \rho(1-z)\right] \bar{P}_{S-2}(s) \right\}. \quad (2.64)$$

Derivând această relație de $S-2$ ori în raport cu z și luând $z=0$, găsim o relație între $\bar{P}_{S-2}(s)$ și $\bar{P}_{S-1}(s)$. [35] Într-adevăr, avem

$$\bar{P}_{S-2}(s) = \frac{1}{(S-2)!} \frac{\partial^{S-2}}{\partial z^{S-2}} \bar{G}_s(z, s) \Big|_{z=0}$$

Adică

$$\bar{P}_{S-2}(s) = \frac{\frac{(S-1)\Gamma\left(\frac{s}{\mu}\right)}{(S-2)! \Gamma\left(\frac{s}{\mu}+1\right)} e^{-\rho} \bar{P}_{S-1}(s) \sum_{k=0}^{S-2} C_{S-2}^k \rho^{S-k-2} \frac{\partial^k}{\partial z^k} Y_2(z, s) \Big|_{z=0}}{1 + \frac{\rho e^{-\rho} \Gamma\left(\frac{s}{\mu}\right)}{(S-2)! \Gamma\left(\frac{s}{\mu}+1\right)} \sum_{k=0}^{S-2} C_{S-2}^k \rho^{S-k-2} \frac{\partial^k}{\partial z^k} Y_1(z, s) \Big|_{z=0}} \quad (2.65)$$

unde am notat, pentru prescurtare,

$$Y_2(z, s) = Y\left[\frac{s}{\mu}, -(S-2), 1, (1-z), \rho(1-z)\right]$$

$$Y_1(z, s) = Y\left[\frac{s}{\mu}, -(S-1), 1, (1-z), \rho(1-z)\right].$$

Introducem $\bar{P}_{S-2}(s)$ dat prin (2.65) în (2.64).

Acum putem să exprimăm funcția $\bar{P}_j(s)$ prin $\bar{P}_{S-1}(s)$. Înlocuind $\bar{P}_j(s)$ apoi găsit astfel în (2.63) determinăm $\bar{P}_{S-1}(s)$.

Avem

$$P_j(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{\mu}\right)}{j! \Gamma\left(\frac{s}{\mu}+1\right)} \left\{ (S-1) e^{-\rho} P_{S-1}(s) \sum_{k=0}^j C_j^k \rho^{j-k} \frac{\partial^k}{\partial z^k} Y_2(z, s) \Big|_{z=0} - \rho e^{-\rho} \bar{P}_{S-2}(s) \sum_{k=0}^j C_j^k \rho^{j-k} \frac{\partial^k}{\partial z^k} Y_1(z, s) \Big|_{z=0} \right\}, j = 0, \dots, S-2.$$

Folosind acest rezultat în (2.63) găsim

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{S-1}(s) &= \frac{z_2^{i+1}}{1-z_2} \left\{ z_2^{S-1} \right. \\
&+ \sum_{j=0}^{S-3} (S-j) z_2^j \frac{\Gamma\left(\frac{S}{\mu}\right)}{j! \Gamma\left(\frac{S}{\mu} + 1\right)} \left[(S \right. \\
&- 1) e^{-\rho} \sum_{k=0}^j C_j^k \rho^{j-k} \frac{\partial^k}{\partial z^k} Y_2(z, s) \Big|_{z=0} \\
&- \rho e^{-\rho} \frac{\bar{P}_{S-2}(s)}{\bar{P}_{S-1}(s)} \sum_{k=0}^j C_j^k \times \rho^{j-k} \frac{\partial^k}{\partial z^k} Y_1(s, z) \Big|_{z=0} \\
&\left. + 2z_2^{S-2} \frac{\bar{P}_{S-2}(s)}{\bar{P}_{S-1}(s)} \right\}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

unde $\bar{P}_{(S-2)}(s)$ este dată prin (2.65). Introducând $\bar{P}_{S-1}(s)$ găsit aici în (2.66) avem expresia, sub formă explicită, a funcției \bar{P}_j pentru $j = 0, 1, \dots, S-1$.

Dacă $j = S, S+1, \dots$ folosim (2.62) care arată că $\bar{P}_j(s)$ este coeficientul lui z^j din dezvoltarea $\sum_{j=0}^{S-1} (S-j) z^j \bar{P}_j(s)$. Dacă scriem numitorul expresiei din membrul drept al relației (2.62), sub forma $-\lambda(z-z_1)(z-z_2)$ și derivăm succesiv în raport cu z această relație obținem

$$P_j(s) = \frac{1}{S \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)} \left\{ \sum_{k=0}^{S-1} (S-k) \bar{P}_k(s) \left[\frac{1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{j-k+1}}{\alpha_2^{j-k-2}} - \frac{1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{j-k}}{\alpha_2^{j-i-3}} \right] - \frac{1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{j-i}}{\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) S \mu z_2^{j-i-3}} \right\}$$

$j = S, S+1, \dots$

deoarece

$$\frac{d^n}{dz^n} (z-z_1)^{-1} (z-z_2)^{-1} = \frac{n! \rho \left[1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{n+1}\right]}{S z_2^{n-2} \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)}.$$

Am determinat astfel $\bar{P}_j(s)$ pentru orice $j \in N^*$, în ipoteza că $i > S-2$.

Dacă $i \leq S-2$ avem $G_S(z, 0) = z^i$ și deci $C_2 = g(C_1) = g[(1-z)e^{-\mu i}]^S$, unde g este o funcție ce urmează a fi determinată. Din condiția $G_S(z, 0) = z^i$ găsim $g(1-z) = z^i e^{\rho(1-z)}$ și

$$g[(1-z)e^{-\mu i}] = [1 - (1-z)e^{-\mu i}]^i \exp[-\rho(1-z)e^{-\mu i}].$$

Procesul staționar. Probabilitatea $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t)$ pentru cazul staționar se poate obține nemijlocit din sistemul (2.60) prin trecere la limită pentru $t \rightarrow \infty$, sau din relația

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sP_j(s), \operatorname{Re}(s) > 0,$$

$\bar{P}_j(s)$ fiind cunoscute

În cele ce urmează vom utiliza (2.60), pentru a evita unele calcule anevoioase. [102] Din sistemul (2.60) rezultă:

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 \\ (\mu + j\mu)p_j &= \lambda p_{j-1} + (j+1)\mu p_{j+1}; j = 1, 2, \dots, S-1, \dots \\ (\lambda + S\mu)p_j &= \lambda p_{j-1} + S\mu p_{j+1}; j = S, S+1, \dots \end{aligned} \quad (2.67)$$

Din a doua ecuație a sistemului obținem

$$\lambda p_{j-1} - j\mu p_j = \lambda p_j - (j+1)\mu p_{j+1}.$$

Notând

$$u_j = \lambda p_{j-1} - j\mu p_j \quad (2.68)$$

relația precedentă devine

$$u_j - u_{j+1} = 0, j = 1, 2, \dots, S-1.$$

Deoarece din prima ecuație a sistemului (2.67) găsim $u_1 = 0$, rezultă că pentru $j = 0, 1, \dots, S-1$, avem $u_j = 0$. Din (2.68) obținem deci

$$p_j = \frac{\rho}{j} p_{j-1}; j = 0, 1, \dots, S-1,$$

de unde

$$p_j = \frac{\rho^j}{j!} p_0, j = 0, 1, \dots, S-1 \quad (2.69)$$

Dacă $j = S, S+1, \dots$, folosim ultima ecuație a sistemului (2.67), în care luăm $j = S$.

Așadar

$$(\lambda + S\mu)p_S = \lambda p_{S-1} + S\mu p_{S+1}$$

sau

$$S\mu(p_{S+1} - p_S) = \lambda(p_S - p_{S-1}) \quad (2.70)$$

Scriind această relație pentru $S+1, \dots, S+r (r \in N^*)$ găsim

$$\begin{aligned} S\mu(p_{S+2} - p_{S+1}) &= \lambda(p_{S+1} - p_S) \\ S\mu(p_{S+r+1} - p_{S+r}) &= \lambda(p_{S+r} - p_{S+r-1}). \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste relații și (2.70) obținem

$$S\mu(p_{S+r+1} - p_S) = \lambda(p_{S+r} - p_{S-1}), r \in N^*$$

sau

$$S\mu p_{S+r+1} + u_S = \lambda p_{S+r},$$

unde u_S este definit prin (2.68). Însă $u_S = 0$ și deci

$$p_{S+r+1} = \frac{\rho}{S} p_{S+r}, r \in N^*$$

adică

$$p_{S+r+1} = \left(\frac{\rho}{S}\right)^{r+1} \frac{\rho^S}{S!} p_0$$

Așadar, pentru $j = S, S + 1, \dots$ avem

$$p_j = \left(\frac{\rho}{S}\right)^{j-S} p_S$$

unde

$$p_S = \frac{\rho^S}{S!} p_0$$

De aici și din (2.69) rezultă deci că soluția sistemului (2.67) este

$$p_j = \begin{cases} \frac{\rho^j}{j!} p_0, & \text{dacă } j = 0, 1, \dots, S - 1 \\ \frac{\rho^j}{S! S^{j-S}} p_0, & \text{dacă } j = S, S + 1, \dots \end{cases} \quad (2.71)$$

Mai trebuie să determinăm probabilitatea p_0 . Din condiția

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$

Avem

$$1 = p_0 \left[\sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{1}{S!} \sum_{j=S}^{\infty} \frac{\rho^j}{S^{j-S}} \right] = p_0 \left[\sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^S}{S!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{S}\right)^j \right]$$

sau

$$p_0 = \left[\frac{\rho^S}{S! \left(1 - \frac{\rho}{S}\right)} + \sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} \right]^{-1}$$

Dacă $\frac{\rho}{S} = \frac{\lambda}{\mu S} = \rho^*$ reprezintă factorul de serviciu al sistemului (a nu se confunda cu factorul de serviciu al unei stații), formula precedentă se mai scrie

$$p_0 = \left[\frac{\rho^S}{S! (1 - \rho^*)} + \sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} \right]^{-1} \quad (2.72)$$

Evident, în a doua relație (2.71) se poate pune de asemenea în evidență ρ^* . Obținem

$$p_j = \begin{cases} \frac{\rho^j}{j!} p_0, & \text{dacă } j = 0, 1, \dots, S - 1 \\ \frac{\rho^S}{S!} (\rho^*)^{j-S} p_0, & \text{dacă } j = S, S + 1, \dots \end{cases} \quad (2.73)$$

sau încă

$$\rho^j = \begin{cases} \frac{\rho}{j} p_{j-1}, & \text{dacă } j = 0, 1, \dots, S-1 \\ \rho^* p_{j-1}, & \text{dacă } j = S, S+1, \dots \end{cases}$$

Să determinăm acum caracteristicile modelului în cazul regimului staționar. [45]

Valoarea medie a numărului de unități din șirul de așteptare este dată de

$$U_M^* = \sum_{j=S+1}^{\infty} (j-S)p_j$$

Substituind aici probabilitatea p_j prin expresia sa dată de (2.73) putem scrie

$$U_M^* = \sum_{j=S+1}^{\infty} (j-S) \frac{\rho^S}{S!} (\rho^*)^{j-S} p_0 = \frac{\rho^S}{S!} p_0 (\rho^* + 2(\rho^*)^2 + \dots) = \frac{\rho^* \rho^S}{S!} p_0 (1 + 2\rho^* + \dots)$$

Însă

$$1 + 2\rho^* + 3(\rho^*)^2 + \dots = \frac{d}{d\rho^*} [\rho^* + (\rho^*)^2 + \dots] = \frac{d}{d\rho^*} \left(\frac{\rho^*}{1-\rho^*} \right) = \frac{1}{(1-\rho^*)^2}$$

Prin urmare

$$U_M^* = p_0 \frac{\rho^S}{S!} \frac{\rho^*}{(1-\rho^*)^2} = p_0 \frac{\rho^{S+1}}{S! S} \cdot \frac{1}{(1-\rho^*)^2} \quad (2.74)$$

Unde p_0 are expresia (2.72).

Numărul mediu al stațiilor neocupate L_M este

$$L_M = \sum_{j=0}^{S-1} (S-j)p_j$$

sau, folosind (2.73),

$$\begin{aligned} L_M &= p_0 \sum_{j=0}^{S-1} (S-j) \frac{\rho^j}{j!} = p_0 \left[S \sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} - \sum_{j=1}^{S-1} \frac{\rho}{(j-1)!} \right] = p_0 \left[S \sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} - \rho \sum_{j=1}^{S-1} \frac{\rho^{j-1}}{(j-1)!} \right] \\ &= p_0 \left[S \sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} - \rho \sum_{j=1}^S \frac{\rho^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{\rho^S}{(S-1)!} \right] = p_0 \left[(S-\rho) \sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^S}{(S-1)!} \right] \\ &= p_0 (S-\rho) \left[\sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{1}{S-\rho} \frac{\rho^S}{(S-1)!} \right] = p_0 (S-\rho) \left[\sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^S}{S!(1-\rho^*)} \right] \end{aligned}$$

În paranteza dreaptă recunoaștem însă valoarea lui p_0 , dată de (2.72). Așadar

$$L_M = S - \rho \quad (2.75)$$

Valoarea medie a numărului de unități din sistem este, prin definiție,

$$U_M = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j$$

Pe de altă parte observăm că $U_M = U_M^* + S - L_M = U_M^* + \rho$, având în vedere (2.23). [47]

Substituind acum și valoarea lui U_M^* , dată de (2.74) rezultă

$$U_M = \frac{p_0 \rho^{S+1}}{S! S(1 - \rho^*)^2} + \rho$$

Pentru a obține timpul mediu de așteptare în șir W^* , reamintim că $U_M^* = \lambda W^*$, de unde

$$W^* = \frac{U_M^*}{\lambda}$$

Ținând seama de (2.74) găsim

$$W^* = \frac{p_0 \rho^S}{\mu S! S(1 - \rho^*)} \quad (2.76)$$

Putem calcula acum probabilitatea ca o unitate oarecare să aștepte. Aceasta este dată de suma probabilităților p_j pentru j luând valori de la S la ∞ . Notând prin $p(w > 0)$ probabilitatea ca o unitate să aștepte, avem

$$p(w > 0) = p(j \geq S) = \sum_{j=S}^{\infty} p_j$$

sau

$$p(w > 0) = p_0 \frac{\rho^S}{S!} \sum_{j=S}^{\infty} (\rho^*)^{j-S}$$

și deci

$$p(w > 0) = \frac{p_0 \rho^S}{S! (1 - \rho^*)}$$

În mod analog ca pentru modelul M/M/1 (cazul staționar) găsim că

$$p(w > x) = e^{-S\mu x(1-\rho^*)} p(w > 0)$$

În încheiere observăm că putem calcula U_M^* , L_M , U_M etc. și cu ajutorul funcției generatoare. Să notăm cu h_0 probabilitatea ca să nu fie nici o unitate în șirul de așteptare și cu h_m probabilitatea ca o unitate care părăsește sistemul (după servire) să lase în șirul de așteptare $m \in N$ unități. [26] Evident

$$h_0 = \sum_{j=0}^S p_j = p_0 \sum_{j=0}^S \frac{\rho^j}{j!}; \quad h_m = p_{S-m}.$$

Introducând factorul de serviciu al sistemului ρ^* rezultă că

$$h_0 = p_0 \sum_{j=0}^S \frac{(S\rho^*)^j}{j!}$$

$$h_m = p_0 \frac{(S\rho^*)^S}{S!} \rho^*, m \in N.$$

De asemenea, (2.72) se mai scrie

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{S-1} \frac{(S\rho^*)^j}{j!} + \frac{(S\rho^*)^S}{S!(1-\rho^*)} \right]^{-1}$$

Atunci funcția generatoare este dată de

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m z^m = p_0 \left[\sum_{j=0}^{S-1} \frac{(S\rho^*)^j}{j!} + \frac{(S\rho^*)^S}{S!} \cdot \frac{1}{1-z\rho^*} \right], |z| \leq 1.$$

Derivând în raport cu z și luând $z = 1$ obținem

$$\left. \frac{d}{dz} G(z) \right|_{z=1} = U_M^* = p_0 \frac{(S\rho^*)^S}{S!} \cdot \frac{\rho^*}{(1-\rho^*)^2}$$

care coincide cu (2.74). Nu mai insistăm asupra calculului celorlalte caracteristici ale sistemului.

Fluxul de ieșire. În cazul procesului staționar, fluxul de ieșire din sistemul M/M/S considerat este poissonian. [32]

Într-adevăr, să observăm că numărul de unități care se află în sistem în momentul când o unitate servită părăsește sistemul și intervalele de timp dintre momentele succesive ale ieșirilor din sistem sunt variabile aleatoare independente. Fie deci, ca mai sus, p_j probabilitatea ca în sistem – în regim staționar – să se afle $j, j \in N^*$ unități. Când a $(j+1)$ -a unitate părăsește sistemul, acesta trece din starea E_{j+1} în starea E_j . Tranziția $E_j \rightarrow E_{j+1}$ are loc atunci când sosește o unitate în timp ce sistemul se află în starea E_j . Deoarece numărul tranzițiilor $E_j \rightarrow E_{j+1}$ nu diferă decât cel mult cu o unitate de numărul tranzițiilor $E_{j+1} \rightarrow E_j$ rezultă că numărul unităților care părăsesc (după servire) sistemul și numărul unităților care intră în sistem, când acesta se află în starea E_j , tind către aceeași limită.

Să notăm cu τ^* lungimea perioadei de timp dintre două momente succesive în care au loc plecări din sistem. [22] Fie de asemenea $d(t)$ starea sistemului în momentul $t(t > 0)$ imediat după ieșirea unei unități și

$$\pi_j(t) = P\{d(t) = j, t < \tau^*\}$$

$$\pi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(t), t < \tau^*.$$

Atunci $1 - \pi(t)$ reprezintă funcția de repartiție a variabilei aleatoare τ^* .

Considerând acum toate modificările ce pot avea loc în intervalul de timp $(t, t+h)$, $t > 0$ rezultă

$$\begin{aligned}\pi_0(t+h) &= (1-\lambda h)\pi_0(t) \\ \pi_j(t+h) &= (1-\lambda h)(1-j\mu)\pi_j(t) + \lambda h\pi_{j-1}(t), j < S \\ \pi_j(t+h) &= (1-\lambda h)(1-S\mu)\pi_j(t) + \lambda h\pi_{j-1}(t), j \geq S.\end{aligned}$$

După efectuarea calculelor găsim

$$\pi_j(t) = p_j e^{-\lambda t}, t < \tau^*, \quad (2.77)$$

deoarece $\pi_j(0) = p_j$. Sumând în (2.77) după j de la 0 la ∞ găsim că intervalele de timp τ^* dintre momentele succesive în care pleacă unitățile servite din sistem au aceeași repartiție ca intervalele de timp dintre momentele succesive de intrare a unităților în sistem adică fluxul de ieșire este poissonian. De aici, rezultă chiar independența variabilelor τ^* și $d(\tau^*)$, întrucât

$$P\{d(\tau^* + 0) = j, t < \tau^* < t + h\} = \begin{cases} (j+1)\mu h \pi_{j+1}(t), & \text{dacă } j+1 \leq S \\ S\mu h \pi_{j+1}(t) & , \text{dacă } j+1 > S. \end{cases}$$

Înlocuind aici $\pi_j(t)$ prin (2.77) această expresie se reduce la funcțiile de repartiție ale variabilelor $d(\tau^*)$ și τ^* respectiv, ceea ce demonstrează independența acestor mărimi. Din (2.77) mai rezultă că repartiția fluxului de ieșire în orice moment t depinde numai de starea sistemului în acel moment (și nu depinde de starea precedentă a sistemului).

2.6.2. Sistemul M/M/S ($S = \infty$)

Să considerăm sistemul de așteptare M/M/S de mai sus, dar să presupunem acum că numărul stațiilor dispuse în paralel este infinit, în acest caz nu se formează șir de așteptare, deoarece fiecare unitate este servită imediat ce intră în sistem. [39] Ecuațiile (2.73 din 2.67) se transformă în

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \quad (2.78)$$

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -(\lambda + j\mu)P_j(t) + \lambda P_{j-1}(t) + \mu(j+1)P_{j+1}(t), j \in N.$$

Introducem funcția generatoare

$$G(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) z^j, |z| < 1$$

care verifică ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial}{\partial t} G(z, t) - \mu(1-z) \frac{\partial}{\partial z} G(z, t) = -\lambda(1-z)G(z, t).$$

Formăm sistemul caracteristic

$$dt = \frac{dz}{-\mu(1-z)} = \frac{dG(z,t)}{-\lambda(1-z)G(z,t)}.$$

Avem

$$dt = \frac{dz}{-\mu(1-z)}; \frac{dz}{\mu} = \frac{dG(z,t)}{\lambda G(z,t)},$$

de unde

$$(1 - z)e^{-\mu t} = C_1; G(z, t)e^{-\rho z} = C_2 \left(\rho = \frac{\lambda}{\mu} \right).$$

Așadar,

$$G(z, t) = e^{\rho z} g[(1 - z)e^{-\mu t}] \quad (2.79)$$

unde g se determină din condițiile inițiale. Pentru $t = 0$ avem $G(z, 0) = z^i$ deoarece

$$P_j(0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } j \neq i \\ 1, & \text{dacă } j = i. \end{cases}$$

Reamintim că $i = \xi(0)$ reprezintă numărul de unități din sistem în momentul inițial $t = 0$.

Prin urmare din (2.79) rezultă

$$z^i = e^{\rho z} g(1 - z),$$

de unde, punând $y = 1 - z$, obținem

$$g(y) = (1 - y)^i e^{-\rho(1-y)} \quad (2.80)$$

Înlocuind deci în (2.79) $g[(1 - z)e^{-\mu t}]$ prin expresia sa dată de (2.80) găsim

$$G(z, t) = \exp\{\rho z - \rho[1 - (1 - z)e^{-\mu t}]\} [1 - (1 - z)e^{-\mu t}]^i = [1 - (1 - z)e^{-\mu t}]^i \exp[-\rho(1 - z)(1 - e^{-\mu t})].$$

Dar

$$P_j(t) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j G(z, t)}{\partial z^j} \Big|_{z=0}, \quad j \in N$$

adică

$$P_j(t) = \sum_{k=0}^j C_j^k \frac{\partial^k}{\partial z^k} \{ [1 - (1 - z)e^{-\mu t}]^i \} \frac{\partial^{j-k}}{\partial z^{j-k}} \{ \exp[-\rho(1 - z)(1 - e^{-\mu t})] \}.$$

Pentru $j < i$ avem

$$P_j(t) = \frac{i!}{j!} \exp[-\rho(1 - e^{-\mu t})] \sum_{k=0}^j C_j^k \frac{\rho^{j-k}}{(i - k)!} e^{-\mu k t} (1 - e^{-\mu t})^{j+i-2k}$$

Se poate obține, de asemenea, expresia probabilității $P_j(t)$ pentru $j > i$. Numărul mediu de unități din sistem, U_M , este

$$U_M = \frac{\partial G(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=1} = \rho(1 - e^{-\mu t}) + i e^{-\mu t}.$$

De aici se vede că în cazul procesului staționar $U_M = \rho$.

Să observăm, în încheiere, că aparent, studiul unor astfel de sisteme cu o infinitate de stații nu prezintă un interes practic. Dimpotrivă, apreciem că analiza unui astfel de model ne dă posibilitatea să studiem comportarea tranzitorie a sistemelor în care $\xi(0) = i < S$. Pentru valori ale lui t suficient de mici nu sunt ocupate, în general, toate stațiile și deci un astfel de sistem se comportă ca unul cu o infinitate de stații, atât timp cât $P\{\xi(t) > S\}$ nu este prea mare. [71]

Mai menționăm că din acest punct de vedere prezintă interes și sistemul M/M/S ($S = \infty$) în care parametrul fluxului de intrare depinde de timp. Ne limităm la a prezenta câteva rezultate în ipoteza că $\lambda = \lambda(t)$ și $\mu = 1$. În acest caz, $P_j(t)$ reprezintă probabilitatea ca în momentul $t(t \geq 0)$ să fie ocupate j stații. [76] Ecuațiile de stare ale sistemului sunt

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -[\lambda(t) + j]P_j(t) + (j + 1)P_{j+1}(t) + \lambda(t)P_{j-1}(t).$$

Găsim că funcția generatoare $G(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(t)z^j$, $|z| < 1$, verifică ecuația

$$\frac{\partial}{\partial t} G(z, t) + (z - 1) \frac{\partial}{\partial z} G(z, t) = \lambda(t)(z - 1)G(z, t)$$

cu condiția $G(z, 0) = e^{\lambda(z-1)}$. Obținem apoi

$$P_j(t) = \frac{1}{n!} [L(t)]^j e^{-L(t)},$$

unde

$$L(t) = e^{-1} \left[\lambda + \int_0^t \lambda(t) e^i dt \right]$$

Remarcăm că pentru $\lambda(t) = \lambda$ avem $\lim_{t \rightarrow \infty} G(z, t) = \exp. [\lambda(z - 1)]$ și deci

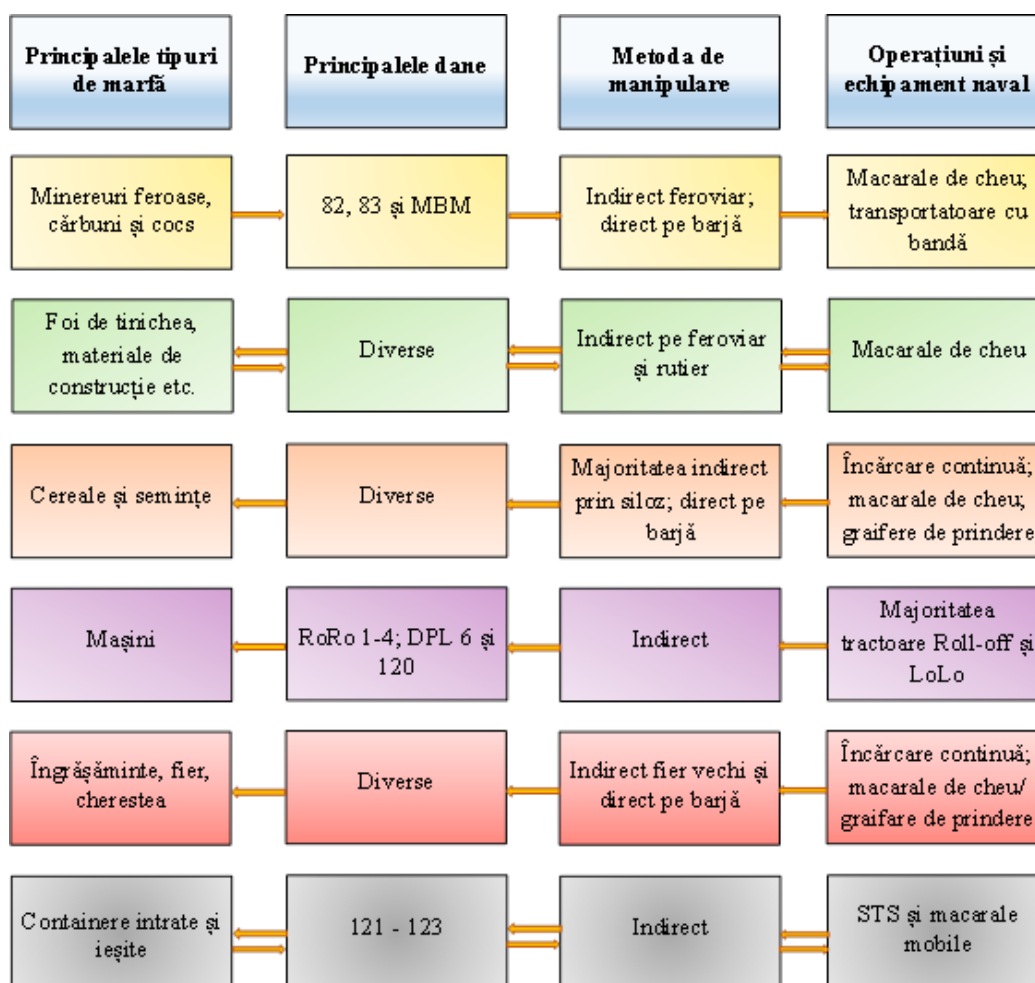
$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda},$$

ceea ce dovedește că independent de starea inițială a sistemului – repartiția limită a numărului de stații ocupate este o repartiție Poisson. [77] Dacă avem și $S = N$ (finit) atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t) = \frac{\lambda^j}{j!} \left[\sum_{n=1}^N \frac{\lambda^n}{n!} \right]^{-1}$$

adică o repartiție Erlang [40].

2.7. Evaluarea situației curente a terminalelor și operatorilor din portul maritim Constanța



Sursa: Master plan al portului Constanța – CNAPMC 03.02.2014

Fig. 2.1 Sistemul de manipulare a mărfurilor (* Fără lichidele în vrac) [135]

Cantități de mărfuri operate la dane

Din analiza datelor transmise de operatori, există variații foarte mari ale cantităților de mărfuri trecute prin dane.

În anul 2013 doar 186 de tone au fost manipulate la dana nr. 6. Recordul este deținut de dana nr. 123 de la terminalul de containere DP WORLD, cu aproximativ 3.250.000 t. Cantitatea medie de mărfuri operate la o dană a fost de aproximativ 543.000 t (cantitatea totală a fost de aproximativ 48.848 milioane de tone).

Danele de la RoRo1 la RoRo5 nu au fost luate în considerare la calcularea capacității, acestea neputând fi considerate ca terminale RoRo moderne din cauza absenței spațiilor de rezervă, a amplasamentului lor îndepărtat și a interferenței cu alte încărcături și cu traficul de la poarta nr. 1.

Utilizarea danelor

Din baza de date referitoare la toate navele se obține o imagine generală a gradului de ocupare a diverselor dane. Un număr de dane pentru care s-a indicat un grad de ocupare de peste 100% au fost scoase din listă pentru a evita orice neînțelegeri. Cifrele de peste 100% apar atunci când la dană se află o navă maritimă dar și barje, acestea numărându-se de două ori.

Randamentul în manipularea încărcăturilor

În comerțul internațional ritmurile obișnuite de operare a navelor sunt următoarele:

- Navele de containere (nave mari de transport): 2 zile;
- Nave de colectare a containerelor: 1 zi;
- Nave RoRo: 1-2 zile;
- Nave de transport în vrac (încărcare specială): 2-4 zile;
- Nave de transport în vrac (încărcare convențională): 4 zile;
- Nave de transport în vrac (descărcare specială): 4 zile;
- Petroliere cu țitei (încărcare și descărcare): 1-2 zile;
- Nave tanc de transportat substanțe lichide: 2-3 zile;
- Nave convenționale pentru mărfuri generale: 2-4 zile.

După cercetarea statisticilor și analiza datelor referitoare la terminale se poate vedea că randamentul portului Constanța este corespunzător practicilor internaționale. [135]

În continuare vom face o scurtă descriere a două terminale din cadrul portului maritim Constanța pentru care, în capitolul următor, am analizat timpul de așteptare al navelor sosite.

DP WORLD – Danele 121-130

Terminalul exploatat de DP WORLD Constanța este amplasat la Mol II s din portul Constanța Sud. Terminalul de containere este concesionat de CN APM către CSCT și operat de DP WORLD. Terminalul a fost construit în 2003, fiind unul din cele 65 de terminale maritime ale grupului. Activitățile principale se concentrează exclusiv pe: mărfuri containerizate, în special pe serviciile de colectare a containerelor în porturile de la Marea Neagră și Marea Mediterană. [125], [131]

Tabelul 2.1. Descriere terminal DP WORLD

Suprafața ocupată	Lungimea danei	Capacități depozitare	Echipeamente dană	Adancime proiectată
76 ha	636 m (dane transport) 381 m (dane de colectare)	26.472 TEU (mărfuri containerizate) 12.428 TEU + 5.750 TEU (depozit MTY)	Macarale de descărcare nave	14,50 m (danele 121, 122, 123) 16,50 (danele 124, 125, 128) 16,50 m (129, 130)



Sursa: Google Maps

Fig. 2.2. Vedere aeriană a terminalului DP WORLD

SOCEP – Danele 35-37, 41-43, 51, 52

Terminalul SOCEP este situat în partea de nord a portului Constanța, societatea fiind înființată în 1991 ca operator axat pe mărfuri vrac solid, pe mărfuri generale și pe containere, având, de fapt, până în 2004, singurul terminal de containere din România. Mărfurile manipulate sunt în principal următoarele: [130]

- Marfuri vrac solid; mai ales cereale și îngrășăminte chimice dar și cărbune și bauxită;
- Mărfurile generale, respectiv produse metalice (bare și țevi din oțel), cherestea și produse din lemn;
- Mărfurile transportate în containere.

Tabelul 2.2. Descriere terminal SOCEP

Suprafața ocupată	Lungimea danei	Capacități depozitare	Echipamente dană	Adancime proiectată
32.85 ha	1.250 m 466.7 m	120.000 t + 40.000 t (a) 8000 TEU (b)	Macarale de cheu Utilaje de manipulare moto-stivuitoare	11.50 m (danele 35, 36) 11,4 (danele 37) 13.5 m (danele 41,42,43,51,52)

Suprafața terminalului este împărțită în trei zone:

- terminal de mărfuri uscate și necontainerizate;
- terminal de containere.



Sursa: Google Maps

Fig. 2.3. Vedere aeriană a terminalului SOCEP

2.8. Concluzii la capitolul 2

Concluziile care se desprind din acest capitol sunt legate de studiul modelului de așteptare M/G/1.

Rezultatele de bază din acest capitol vizează:

- abordarea metodei lui Gnedenko pentru studiul timpului de așteptare în sistemul M/G/1 și argumentarea fundamentală a ipotezei că navele maritime sosesc în port conform unui flux Poisson;
- într-un cadru general, au fost formulate modele cu priorități, modele cu prioritate absolută, modele în care prioritatea se distribuie prin clasificarea unităților;
- de asemenea, tot într-un cadru general, au fost formulate și demonstrate mai multe particularități și modalități de calcul pentru timpul de așteptare în cadrul modelului M/G/1;
- drept cosincință, se arată că, în anumite condiții se poate eficientiza timpul de așteptare în cadrul terminalelor maritime.

3. MODELE MATEMATICE ȘI ALGORITMI PENTRU EFICIENTIZAREA ACTIVITĂȚII TERMINALELOR DIN PORTUL CONSTANȚA

3.1. Algoritmi de evaluare a caracteristicilor sistemului de așteptare generalizat

3.1.1. Sistemul G1/M/S

Să considerăm sistemul de așteptare G1/M/S cu S stații în paralel, în care unitățile sosesc în momentele aleatoare $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$. Presupunem că variabilele aleatoare pozitive $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, $n \in N^*$, $t_0 = 0$, sunt independente și identic repartizate, având funcția de repartiție $P\{\tau_n \leq x\} = F(x)$, $x \geq 0$, și valoarea medie $E[\tau_n] = a$, ($0 < a < \infty$). Mai presupunem că duratele de servire sunt variabile aleatoare independente, identic repartizate, cu funcția de repartiție

$$H(x) = P\{s_n \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Admitem, evident că $\{s_n\}_{n \in N}$ sunt independente de $\{t_n\}_{n \in N}$. [95]

Dacă, la un moment oarecare t ($t \geq 0$) există cel puțin o unitate care așteaptă serviciul, înseamnă că toate stațiile sunt ocupate. Serviciile se efectuează în ordinea intrării unităților în sistem.

Fie $w_n = w(t_n - 0)$, $n \in N$, timpul de așteptare în șir a celei de a n -a unități și $\xi_n = \xi(t_n - 0)$, $n \in N$, numărul unităților din sistem imediat înainte de intrarea celei de a n -a unități. Avem

$$w_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \xi_n < S \\ s_1 + \dots + s_{\xi_n - S + 1}, & \text{dacă } \xi_n \geq S. \end{cases}$$

Reamintim că

$$\bar{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x)$$

și dacă $z = z_1$ este rădăcina cea mai mică, în valoare absolută, a ecuației

$$z = \bar{F}[\mu S(1 - z)],$$

atunci z_1 este un număr real pozitiv și $z_1 = 1$, dacă $Sa\mu \leq 1$; dacă $Sa\mu > 1$ atunci $|z_1| < 1$.

Să studiem mai întâi comportarea asimptotică a lanțului Markov $\{\xi_n\}_{n \in N}$. [90] Fie

$$p_{ij} = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\}$$

$$p_{ij}(x) = P\{\xi_{n+1} = 1 | \xi_n = i; \tau_n = x\}, \quad x \geq 0.$$

Folosind ecuațiile de stare ale sistemului (în regim staționar) găsim că

$$p_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{(S\mu x)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-S\mu x} & , \text{dacă } i, j \geq S \\ C_S^j e^{-i\mu x} \left[\int_0^x S\mu \frac{(S\mu u)^{i-S}}{(i-S)!} (e^{-\mu u} - e^{-\mu x})^{S-j} du \right] & , \text{dacă } i \geq S, j < S \\ C_{i+1}^j e^{-j\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{i+1-j} & , \text{dacă } i < S. \end{cases} \quad (3.1)$$

Atunci

$$p_{ij} = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\} = \int_0^\infty p_{ij}(x) dF(x) \quad (3.2)$$

Să mai observăm că lanțul Markov $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este ireductibil și aperiodic și, în consecință, limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi_n = j\} = P_j, \quad j \in N^* \quad (3.3)$$

există și este independentă de repartiția inițială. Mai trebuie să arătăm că $\{P_j\}$ este o funcție de repartiție. [63] Într-adevăr, constantele $P_j, j \in N^*$ definite prin (3.3), reprezintă soluția unică a sistemului de ecuații liniar

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$$

$$P_j = \sum_{i=j-1}^{\infty} p_{ij} P_i, \quad j \in N^*. \quad (3.4)$$

Folosind (3.1) și (3.2) în ecuațiile (3.4), pentru $j \geq S$ obținem sistemul

$$P_j = \sum_{h=0}^{\infty} P_{h+j-1} \int_0^\infty \frac{(S\mu x)^h}{h!} e^{-S\mu x} dF(x) \quad (j \geq S) \quad (3.5)$$

a cărui soluție este de forma

$$P_j = C z^{j-S}, \quad j \geq S,$$

unde C este o constantă ce urmează a fi determinată, iar z este o soluție a ecuației $z = \bar{F}[S\mu(1-z)]$. Dar, pentru ca această ecuație să aibă o rădăcină $z = z_1$ cu $|z_1| < 1$ este necesar și suficient ca $Sa\mu > 1$. Așadar, lanțul Markov $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este ergodic atunci și numai atunci când este îndeplinită condiția $Sa\mu > 1$. În acest caz avem [58]

$$P_j = C z_1^{j-S}, \quad j \geq S, \quad |z_1| < 1.$$

Dacă în (3.5) luăm $j = S$ și ținem seama că $P_j = C z_1^{j-S}$ găsim $C = z_1 P_{S-1}$. Pentru a afla necunoscutele P_0, P_1, \dots, P_{S-1} introducem funcția generatoare

$$G(z) = \sum_{j=0}^{S-1} P_j z^j, \quad |z| < 1.$$

Astfel, înmulțind în ambele părți ale relației (3.4) cu z^j , sumând după j de la 0 la $S - 1$, și ținând seama de (3.2), (3.1) și de egalitatea $z_1 P_{S-1} = C$ ($|z_1| < 1$), obținem

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_0^{\infty} [1 - (1-z)e^{-\mu x}] G [1 - (1-z)e^{-\mu x}] dF(x) \\ &+ CS\mu \int_0^{\infty} \int_0^x [e^{-\mu u} - (1-z)e^{-\mu x}]^S e^{S\mu z_1 u} dF(x) du - Cz^S \end{aligned} \quad (3.6)$$

Însă

$$G(1) = \sum_{j=0}^{S-1} P_j = 1 - \sum_{j=S}^{\infty} P_j = 1 - \frac{C}{1-z_1}$$

Deoarece am văzut că $P_j = Cz_1^{j-S}$, $j \geq S$, $|z_1| < 1$. Putem încă să derivăm de k ori succesiv, în raport cu z , ecuația (3.6), și să luăm $z = 1$, $k = 1, 2, \dots, S - 1$. Avem

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} G(z) \Big|_{z=1} [1 - \bar{F}(k\mu)] \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} G(z) \Big|_{z=1} [1 - \bar{F}(k\mu)] - C C_S^k \frac{S[1 - \bar{F}(k\mu)] - k}{S\{1 - \bar{F}[S\mu(1-z_1)]\} - k}. \end{aligned}$$

Notând, pentru simplificarea scrierii,

$$G_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} G(z) \Big|_{z=1} \left(k = 1, \dots, S-1; G_0 = G(1) = 1 - \frac{C}{1-z_1} \right)$$

și observând că $\bar{F}[S\mu(1-z_1)] = z_1$ mai putem scrie

$$G_k = \frac{\bar{F}(k\mu)}{1 - \bar{F}(k\mu)} G_{k-1} - \frac{C}{1 - \bar{F}(k\mu)} C_S^k \frac{S[1 - \bar{F}(k\mu)] - k}{S(1-z_1) - k} \quad (3.7)$$

Această ecuație se reduce la o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi, care poate fi integrată imediat.

Însă

$$G(z) = \sum_{k=0}^{S-1} (z-1)^k G_k$$

Timpul de așteptare. Fie $w_n = w(t_n - 0)$ timpul de așteptare în șir a celei de a n -a unități și $W_n(x) = P\{w_n \leq x\}$, $x \geq 0$. Dacă a n -a unitate sosește în momentul când în sistem se află ξ_n unități, atunci există două posibilități: [57]

a) $\xi_n = j$ și $j < S$. În acest caz $w_n = 0$ (unitatea este servită imediat).

b) $\xi_n = j$ și $j \geq S$. Unitatea nou sosită așteaptă până se efectuează $j + 1 - S$ servicii. Duratele acestor servicii urmează o lege Poisson de parametru μS . Așadar, avem

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{S-1} P\{\xi_n = j\} + S\mu \sum_{j=S}^{\infty} P\{\xi_n = j\} \int_0^{\infty} \frac{(S\mu u)^{j-S}}{(j-S)!} e^{-S\mu u} du.$$

3.1.2. Modele cu S stații în serie

Deoarece tratarea unor astfel de modele cu stațiile în serie (modele polifazice, modele în cascadă) este foarte complicată, ne vom limita la studiul unor cazuri particulare. Cel mai simplu este cazul sistemului M/M/S cu S stații în serie, pe care îl vom analiza în cele ce urmează.

Să presupunem că la un moment oarecare intră o unitate în sistem. Dacă nu există alte unități care așteaptă serviciul și prima stație este liberă, atunci unitatea nou sosită este servită imediat. În caz contrar ea se așează în șirul de așteptare, format în ordinea intrărilor în sistem. După ce o unitate este servită în prima stație are din nou două posibilități: sau trece în a doua stație dacă aceasta este liberă, sau rămâne în șirul de așteptare dacă a doua stație este ocupată. O unitate este servită complet numai după ce a parcurs, în ordine, cele S stații. [8]

Fie λ_i și $\mu_i (i = 1, \dots, S)$ parametri intrărilor și serviciilor în cele S faze de serviciu (înțelegem, în cele ce urmează, prin fază de serviciu subsistemul format dintr-o stație și șirul de așteptare din fața ei). Reamintim că fluxul de ieșire în sistemul M/M/1 este de asemenea poissonian. În consecință, intervalele de timp dintre două intrări consecutive în faza ($i = 1, \dots, S$) au o repartiție Poisson de parametru λ_i . Evident, duratele de servire în faza i sunt variabile aleatoare independente cu repartiția exponențială negativă de parametru $\mu_i (i = 1, \dots, S)$.

În toate fazele servirea se face după principiul „primul venit, primul servit”. [23]

Să notăm cu l_i lungimea maximă a șirului de așteptare din faza $i (i = 1, \dots, S)$ și să observăm că l_i poate fi nul, finit sau infinit. Să presupunem că la un moment oarecare o unitate a terminat serviciul în stația $i (i < S)$. Dacă în acel moment stația $i + 1$ este liberă, primește unitatea respectivă și o servește. În caz contrar, există mai multe posibilități: [30]

a) $l_{i+1} = \infty$ unitatea părăsește stația i și ia loc în șirul de așteptare din fața stației $i + 1$.

b) l_{i+1} – finit. Dacă această lungime maximă nu este atinsă atunci acest caz se reduce la cazul (a). Dacă însă, șirul din fața stației $i + 1$ are lungimea maximă l_{i+1} atunci unitatea în cauză nu poate părăsi stația i . Această stație este blocată, nu poate primi o altă unitate și rămâne inactivă.

c) $l_{i+1} = 0$ și stația i este blocată atâta timp cât stația $i + 1$ este ocupată.

Așadar, numai în cazul (a) (în ipoteza că parametrii intrărilor și serviciilor sunt diferiți), nu se produce blocaj în sistemul polifazic considerat.

Studiem acum câteva cazuri particulare.

Model M/M/2 în cascadă cu $l_1 = l_2 = 0$. Fie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ și $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Să notăm prin E_{ij} , $i, j = 0, 1$, starea sistemului corespunzătoare stituației când cele două stații sunt libere ($i, j = 0$) sau ocupate ($i, j = 1$). Indicele i ($i = 0, 1$) arată situația din prima stație, iar indicele j ($j = 0, 1$) pe cea din a doua stație. Dacă prima stație este blocată sistemul se află în starea E_{B1} . Probabilitățile acestor stări sunt $P_{ij}(t)$, $i(j = 0, 1)$ și respectiv $P_{B1}(t)$. [37] Deoarece la momentul t ($t > 0$) sistemul se poate afla numai în una din stările $E_{00}, E_{10}, E_{01}, E_{11}, E_{B1}$ avem

$$P_{00}(t) + P_{10}(t) + P_{01}(t) + P_{11}(t) + P_{B1}(t) = 1 \quad (3.8)$$

Luând în considerare toate modificările ce au loc în intervalul de timp $(t, t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$, avem

$$\begin{aligned} P_{00}(t + \Delta t) &= (1 - \lambda\Delta t)P_{00}(t) + \mu\Delta t(1 - \lambda\Delta t)P_{01} \\ P_{10}(t + \Delta t) &= \lambda\Delta tP_{00}(t) + \mu\Delta t(1 - \lambda\Delta t)P_{11}(t) + (1 - \mu\Delta t)P_{10}(t) \\ P_{B1}(t + \Delta t) &= \mu\Delta t(1 - \mu\Delta t)P_{11}(t) + (1 - \mu\Delta t)P_{B1}(t) \\ P_{11}(t + \Delta t) &= \lambda\Delta t(1 - \mu\Delta t)P_{01}(t) + (1 - \mu\Delta t)^2P_{11}(t) \\ P_{01}(t + \Delta t) &= (1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t)P_{01}(t) + \mu\Delta tP_{10}(t) + \mu\Delta t(1 - \lambda\Delta t)P_{B1}(t). \end{aligned}$$

De aici rezultă următorul sistem de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} \frac{dP_{00}(t)}{dt} &= -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t) \\ \frac{dP_{10}(t)}{dt} &= \lambda P_{00}(t) + \mu P_{11}(t) - \mu P_{10}(t) \\ \frac{dP_{B1}(t)}{dt} &= \mu P_{11}(t) - \mu P_{B1}(t) \\ \frac{dP_{11}(t)}{dt} &= \lambda P_{01}(t) - 2\mu P_{11}(t) \\ \frac{dP_{01}(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu)P_{01}(t) + \mu P_{10}(t) + \mu P_{B1}(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Să presupunem că sistemul se află în stare de echilibru statistic și fie

$$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t); p_{B1} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{B1}(t)$$

Sistemul (3.9) devine

$$\begin{aligned} \lambda p_{00} - \mu p_{01} &= 0 \\ \lambda p_{00} + \mu p_{11} - \mu p_{10} &= 0 \\ \mu p_{11} - \mu p_{B1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda p_{01} - 2\mu p_{11} &= 0 \\ -(\lambda + \mu)p_{01} + \mu p_{10} + \mu p_{B1} &= 0.\end{aligned}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem se observă că

$$p_{11} = p_{B1} = \frac{\lambda}{2\mu} p_{01} = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_{00}; p_{10} = p_{11} + \frac{2\mu}{\lambda} p_{11}. \quad (3.10)$$

Pe de altă parte, relația (3.8) se scrie

$$p_{00} + p_{10} + p_{01} + p_{11} + p_{B1} = 1$$

Utilizând această relație și egalitățile (3.10) găsim

$$p_{11} = p_{B1} = \rho^2 A(\rho); p_{00} = 2A(\rho); p_{01} = 2\rho A(\rho); p_{10} = \rho(\rho + 2)A(\rho), \quad (3.11)$$

unde am notat

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}; A(\rho) = \frac{1}{3\rho^2 + 4\rho + 2}.$$

Se pot acum calcula caracteristicile modelului. Numărul mediu de unități în sistem, U_M , este dat de

$$U_M = (p_{01} + p_{10}) + 2(p_{11} + p_{B1}).$$

Ținând seama de (3.11) rezultă

$$U_M = \rho(5\rho + 4)A(\rho)$$

sau

$$U_M = \begin{cases} \rho \left(2 - \frac{3}{2}\rho\right), & \text{dacă } \rho \ll 1 \\ 1 & , \text{dacă } \rho = 1 \\ \frac{5}{3} - \frac{8}{9}\rho & , \text{dacă } \rho \gg 1 \end{cases}$$

Numărul mediu de stații ocupate, S_M , se obține din

$$S_M = (p_{01} + p_{10} + p_{B1}) + 2p_{11}$$

adică, (în baza lui (3.11))

$$S_M = 4\rho(\rho + 1)A(\rho)$$

sau

$$S_M = \begin{cases} 2\rho(1 - \rho), & \text{dacă } \rho \ll 1; \\ \frac{8}{9} & , \text{dacă } \rho = 1; \\ \frac{2}{3} - \frac{4}{9\rho} & , \text{dacă } \rho \gg 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Se observă imediat că „efectul de blocaj” face ca acest sistem să fie mai puțin eficient decât cel cu o singură stație. Din ultima relație (3.12) rezultă că sistemul nu poate fi utilizat mai mult de $\frac{2}{3}$ din capacitatea sa (avem $\lim_{\rho \rightarrow \infty} S_M = \frac{2}{3}$).

Dacă o unitate intră în sistem în timp ce prima stație este ocupată ea părăsește sistemul fără a fi servită $l_1 = 0$. Probabilitatea acestui eveniment, $P\{w > 0\}$, este

$$P\{w > 0\} = p_{10} + p_{11} + p_{B1} = \rho(3\rho + 2)A(\rho)$$

Adică

$$P\{w > 0\} = \begin{cases} \rho \left(1 - \frac{\rho}{2}\right), & \text{dacă } \rho \ll 1 \\ \frac{5}{9}, & \text{dacă } \rho = 1 \\ 1 - \frac{2}{3\rho}, & \text{dacă } \rho \gg 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Aici w reprezintă timpul de așteptare în șir a unei unități oarecare. Întrucât $l_1 = 0$, $P\{w > 0\}$ coincide cu probabilitatea ca unitatea să fie refuzată.

Model M/M/2 în cascadă cu $l_1 = 0$, $l_2 = 1$. Stările posibile în acest caz sunt: $E_{00}, E_{01}, E_{10}, E_{11}, E_{02}, E_{12}, E_{B2}$, unde indicele 2 arată că stația a doua este ocupată și $l_2 = 1$. Evident, blocajul nu se poate produce decât dacă $l_2 = 1$. Pierderea de timp provocată de blocaj este mai redusă decât în cazul modelului M/M/2 cu $l_1 = l_2 = 0$. [57]

Ecuțiile de stare în regim permanent ne conduc la

$$p_{00} = (\rho + 4)B(\rho); p_{01} = \rho(\rho + 4)B(\rho); p_{02} = 2\rho^2 B(\rho); p_{10} = \rho(\rho^2 + 3\rho + 4)B(\rho); p_{11} = \rho^2(\rho + 2)B(\rho); p_{12} = p_{B2} = \rho^3 B(\rho),$$

unde

$$B(\rho) = \frac{1}{4\rho^3 + 8\rho^2 + 9\rho + 4}$$

Utilizând (3.13) găsim valorile caracteristicilor modelului. Obținem.

$$U_M = \rho(9\rho^2 + 12\rho + 8)B(\rho) = \begin{cases} 2\rho, & \text{dacă } \rho \ll 1; \\ \frac{29}{25}, & \text{dacă } \rho = 1; \\ \frac{9}{4}, & \text{dacă } \rho \gg 1. \end{cases}$$

$$S_M = 2\rho(3\rho^2 + 5\rho + 4)B(\rho) = \begin{cases} 2\rho, & \text{dacă } \rho \ll 1; \\ \frac{24}{25}, & \text{dacă } \rho = 1; \\ \frac{2}{3}, & \text{dacă } \rho \gg 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

$$P\{w > 0\} = \begin{cases} \rho(1 - \rho), & \text{dacă } \rho \ll 1; \\ \frac{13}{25}, & \text{dacă } \rho = 1; \\ 1 - \frac{3}{4\rho}, & \text{dacă } \rho \gg 1. \end{cases}$$

Să observăm că stația a doua este activă o fracțiune de timp egală cu $\frac{1}{2}S_M$ și, deci din (3.14) deducem că acest sistem poate fi utilizat cel mult $\frac{3}{4}$ din capacitatea sa.

Model M/M/2 în serie cu $l_1 = \infty$, $l_2 = 0$. Să vedem care sunt stările posibile ale modelului. Observăm că trebuie să luăm în considerare numărul unităților din șirul de așteptare al primei faze. [58] Fie:

E_{n0} – starea corespunzătoare situației când în prima fază sunt $n, n \in N^*$ unități ($n - 1$ în șirul de așteptare și o unitate în curs de servire), iar a doua stație este liberă;

E_{n1} – starea corespunzătoare situației când în prima fază sunt n unități ($n - 1$ în șir, una în curs de servire) și a doua stație este ocupată;

E_{n2} – n unități în șirul de așteptare, câte o unitate în fiecare stație, dar prima stație blocată.

Procedând ca în cazurile precedente și păstrând notațiile găsim următoarele ecuații de stare ale sistemului:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{00}(t)}{dt} &= -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t) \\
\frac{dP_{02}(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu)P_{02}(t) + \mu P_{11}(t) \\
\frac{dP_{01}(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu)P_{01}(t) + \mu P_{10}(t) + \mu P_{02}(t) \\
\frac{dP_{n0}(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu)P_{n0}(t) + \lambda P_{n-1,0}(t) + \mu P_{n1}(t), n \in N \\
\frac{dP_{n2}(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu)P_{n2}(t) + \lambda P_{n-1,0}(t) + \mu P_{n+1,1}(t) n \in N \\
\frac{dP_{n1}(t)}{dt} &= -(\lambda + 2\mu)P_{n1}(t) + \lambda P_{n-1,1}(t) + \mu P_{n+1,0}(t) + \mu P_{n2}(t)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Egalând cu zero derivatele din partea stângă a acestor ecuații se obține sistemul de ecuații care descrie modelul în cazul regimului staționar. [72] Avem

$$\begin{aligned}
p_{01} &= \rho p_{00} \\
p_{11} &= (1 - \rho)p_{02} \\
p_{10} + p_{02} &= (1 + \rho)p_{01} \\
\rho p_{n-1,0} + p_{n1} &= (1 + \rho)p_{n0} \quad n \in N \\
\rho p_{n-1,0} + p_{n+1,1} &= (1 + \rho)p_{n2} \quad n \in N \\
\rho p_{n-1,1} + p_{n+0,1} + p_{n2} &= (2 + \rho)p_{n1} \quad n \in N
\end{aligned} \tag{3.16}$$

unde $\rho = \lambda\mu^{-1}$ și $p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n + 1; j = 0, 1, 2$).

Pentru a calcula caracteristicile acestui model utilizăm funcțiile generatoare

$$G_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ni} z^{n+i}, |z| \leq 1, i = 0,1,2 \quad (3.17)$$

cu condiția

$$G_0(1) + G_1(1) + G_2(1) = 1 \quad (3.18)$$

Înmulțim, deci, ultimele trei ecuații ale sistemului (3.16) cu z^n , z^{n+2} și z^{n+1} , respectiv și sumăm după n . Obținem

$$\begin{aligned} \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_{n-1.0} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_{n1} z^n &= (1 + \rho) \sum_{n=0}^{\infty} p_{n0} z^n \\ \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_{n-1.1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1.0} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} p_{n2} z^{n+1} &= (2 + \rho) \sum_{n=0}^{\infty} p_{n1} z^{n+1} \\ \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_{n-1.0} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1.1} z^{n+2} &= (1 + \rho) \sum_{n=0}^{\infty} p_{n2} z^{n+2} \end{aligned}$$

Ținând seama de (3.17), de prima ecuație (3.16) și de faptul că, pentru $n = 0$, $p_{n-1.1}$ și $p_{n-1.0}$ se reduc la p_{01} , respectiv la p_{00} , ecuațiile de mai sus se scriu

$$\begin{aligned} (1 + \rho - \rho z)G_0(z) - \frac{G_1(z)}{z} &= \rho p_{00} - G_0(z) + (2 + \rho - \rho z)G_1(z) - \frac{G_2(z)}{z} \\ &= (\rho z - 1)p_{00} - G_1(z) + (1 + \rho - \rho z)G_2(z) = -\rho z p_{00} \end{aligned}$$

De aici se determină G_0 , G_1 și G_2 în funcție de p_{00} . [81] Utilizând apoi condiția (3.18), rezultă

$$p_{00} = \frac{2 - 3\rho}{2 + \rho}$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} G_0(z) &= [2(1 + \rho) - \rho z(3 + 2\rho) + \rho^2 z^2]C(\rho) \\ G_1(z) &= [2\rho z(1 + \rho) - \rho^2 z^2(3 + \rho) + \rho^3 z^3]C(\rho) \\ G_2(z) &= [\rho^2 z^2(2 + \rho) - \rho^3 z^3]C(\rho) \end{aligned} \quad (3.19)$$

unde

$$C(\rho) = \frac{2 - 3\rho}{(2 + \rho)(1 + \rho - \rho z)[2 + 3\rho z - \rho^2 z(1 - z)]}$$

Atunci funcția generatoare pentru ansamblul sistemului este dată de

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z) + G_3(z)$$

și din (3.19) găsim

$$G(z) = (2 + 2\rho - \rho z)C(\rho)$$

De aici

$$U_M = \left. \frac{dG(z)}{dz} \right|_{z=1} = \frac{4\rho(2 - \rho^2)}{(2 + \rho)(2 - 3\rho)}$$

Observăm că pentru $\rho = \frac{2}{3}$ șirul de așteptare crește nelimitat. Această valoare critică a factorului de serviciu ρ reprezintă „încărcarea” maximă posibilă a sistemului.

Se poate da și o altă metodă pentru determinarea acestei valori critice. [73] Să definim mărimile

$$K_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n0}(t); K_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n2}(t); K_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n1}(t)$$

Presupunând că parametrul serviciilor în prima fază este μ_1 , iar în a doua fază este μ_2 din ultimele trei ecuații (3.15) obținem

$$\begin{aligned} \frac{dK_0(t)}{dt} &= -\mu_1 K_0(t) + \mu_2 K_1(t) + \mu_1 P_{00}(t) \\ \frac{dK_1(t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2) K_1(t) + \mu_1 K_0(t) + \mu_2 K_2(t) - \mu_1 P_{00}(t) + \mu_2 P_{01}(t) \\ \frac{dK_2(t)}{dt} &= -\mu_2 K_2(t) + \mu_1 K_1(t) - \mu_1 P_{01}(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Remarcăm că pentru $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, prin trecerea la starea staționară, putem considera că probabilitățile

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_i(t) = q_i, \quad i = 0, 1, 2$$

sunt toate egale între ele. De aici, găsim că fracțiunea de timp în cursul căreia prima stație este liberă are valoarea

$$\frac{q_0 + q_1}{q_0 + q_1 + q_2} = \frac{2}{3}$$

care coincide cu cea găsită de noi mai sus.

Dacă sistemul are mai multe faze, atunci desigur – cea mai mare întârziere se produce tot în prima fază și deci *încărcarea* maximă posibilă pentru prima fază reprezintă în același timp *încărcarea* maximă a întregului sistem.

În cazul nostru, pentru $\mu_1 \neq \mu_2$ „încărcarea” maximă în prima fază este

$$\frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}$$

așa cum rezultă din considerarea ecuațiilor (3.20).

Sistem polifazic cu stații în serie și în paralel. Considerăm acum un sistem cu n faze și admitem că se pot forma șiruri de așteptare cu un număr oarecare (finit sau infinit) de unități, în fața fiecărei stații. Fluxul de intrare în fiecare din cele n faze este poissonian de intensitate λ . Oricare din cele n faze, poate conține mai multe stații în paralel. [87] Fie S_i numărul stațiilor în paralel din faza i ($i = 1, 2, \dots, n$). Duratele serviciilor în faza i ($i = 1, 2, \dots, n$) urmează o lege

exponențială negativă de parametru μ_i . În acest fel probabilitatea ca în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$, $\Delta t > 0$ să se încheie servirea uneia din cele m unități care se află în faza i este egală cu $m_i \mu_i \Delta t + 0(\Delta t)$, dacă $m_i < S_i$ și cu $S_i \mu_i \Delta t + 0(\Delta t)$, dacă $m_i \geq S_i$.

Notând $\rho_i = \frac{\lambda}{S_i \mu_i} < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ și $p(m_1, \dots, m_n)$ probabilitatea ca – în stare staționară – în prima fază să fie m_1 unități, în a doua fază m_2 unități etc. în a n -a fază m_n unități – folosind procedeul obișnuit – obținem ecuațiile

$$\begin{aligned} [\lambda + \sum_{i=1}^n \delta_{mi} m_i \mu_i] p(m_1, \dots, m_n) &= \sum_{i=1}^n \delta_{mi+1} (m_i + 1) \mu_i p(m_1, \dots, m_i + 1, m_{i+1} - \\ & 1, m_{i+2}, \dots, m_n) + \lambda p(m_1 - 1, m_2, \dots, m_n) \quad (m_i < S_i) \\ [\lambda + \sum_{i=1}^n \delta_{mi} S_i \mu_i] p(m_1, \dots, m_n) &= \sum_{i=1}^n \delta_{mi+1} (S_i + 1) \mu_i p(m_1, \dots, m_i + 1, m_{i+1} - \\ & 1, m_{i+2}, \dots, m_n) + \lambda p(m_1 - 1, m_2, \dots, m_n) \quad (m_i \geq S_i) \end{aligned} \quad (3.21)$$

unde

$$\delta_{mi} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } m_i \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } m_i = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Menționăm că dacă în (3.21) un argument oarecare este negativ, atunci probabilitatea corespunzătoare este egală cu zero. Soluția sistemului de ecuații (3.21) este dată de

$$p(m_1, \dots, m_n) = \begin{cases} p(0, \dots, 0) \prod_{i=1}^n \frac{1}{m_i!} (S_i \rho_i)^{m_i} & , \text{dacă } m_i < S_i \\ p(0, \dots, 0) \prod_{i=1}^n \frac{1}{S_i!} (S_i \rho_i)^{S_i} \rho_i^{m_i - S_i} & , \text{dacă } m_i \geq S_i \end{cases}$$

Probabilitatea $p(0, \dots, 0)$ se determină acum folosind condiția de regularitate [90]

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} p(m_1, \dots, m_n) = 1$$

Astfel, notăm

$$R(m_i) = \begin{cases} \frac{1}{m_i!} (S_i \rho_i)^{m_i} & , \text{dacă } m_i < S_i \\ \frac{1}{S_i!} (S_i \rho_i)^{S_i} \rho_i^{m_i - S_i} & , \text{dacă } m_i \geq S_i \end{cases}$$

și observăm că

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^n R(m_i) \right] = p^{-1}(0, \dots, 0)$$

Probabilitatea $p(m_i)$ ca în faza i ($i = 1, 2, \dots, n$) să se afle m_i unități, este

$$p(m_i) = \frac{R(m_i)}{\sum_{m_i=0}^{\infty} R(m_i)}$$

Acest rezultat se obține direct considerând sistemul M/M/S cu $S \equiv S_i$. Dacă $S_i = 1 (i = 1, \dots, n)$ atunci, evident

$$p(m_1, \dots, m_n) = p(0, \dots, 0) \prod_{i=1}^n \rho_i^{m_i}$$

cu

$$p(0, \dots, 0) = \prod_{i=1}^n (1 - \rho_i)$$

ceea ce concordă cu rezultatele găsite de noi mai sus pentru sistemele cu două stații în serie.

Deoarece toate fazele sistemului sunt independente, probabilitatea ca în faza $i (i = 1, 2, \dots, n)$ să se afle j unități este

$$\rho_i^j (1 - \rho_i)$$

Mai găsim că numărul mediu de unități din faza i este dat de

$$\sum_{j=0}^{\infty} j \rho_i^j (1 - \rho_i) = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \quad (3.22)$$

iar numărul mediu de unități în curs de servire în faza i este

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_i^j (1 - \rho_i) = \rho_i \quad (3.23)$$

Din (3.22) și (3.23) deducem valoarea medie a numărului de unități în șirul de așteptare din faza $i (i = 1, \dots, n)$. Avem

$$\frac{\rho_i}{1 - \rho_i} - \rho_i = \frac{\rho_i^2}{1 - \rho_i}$$

Probabilitatea ca o unitate să aștepte când sistemul este ocupat este

$$(\mu_i - \lambda) \exp[-(\mu_i - \lambda)x] dx$$

iar probabilitatea ca să nu aștepte în faza i este $1 - \rho_i$. În particular, dacă $\mu_i = \mu$, probabilitatea ca în sistem să aștepte m unități este egală cu

$$C_{m+n-1}^{n-1} \rho^m (1 - \rho)^n, \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

3.2. Concepte referitoare la testele de concordanță

Testele de concordanță (în engleză "goodness of fit test") ne arată modul în care un anumit model statistic (o anumită distribuție statistică) *se potrivește* cu o anumită mulțime de date. Aceste teste pun în evidență *concordanța* dintre modelul empiric și modelul teoretic pe care îl considerăm adecvat pentru domeniul din care provin datele statistice observate. [98], [132]

Un test de concordanță constă din verificarea ipotezei nule:

$$H_0 : X \in F(x)$$

cu ipoteza alternativă:

$$H_1 : X \notin F(x)$$

unde $F(x)$ este o anumită funcție de distribuție cumulativă.

În continuare se calculează statistica testului. La pasul următor se determină, în funcție de efectivul eșantionului n și de nivelul sau pragul de încredere α , valoarea critică a testului. Decizia de acceptare/respingere a ipotezei H_0 se ia prin compararea dintre statistica testului și valoarea critică a testului.

Vom analiza în continuare cele mai uzuale teste de concordanță, dintre care unele sunt generale (aplicabile pentru mai multe distribuții statistice).

Testul χ^2

Testul de concordanță χ^2 („hi-pătrat”) este un test general, care poate fi aplicat oricărei distribuții statistice căreia putem să îi calculăm funcția de distribuție cumulativă. Testul χ^2 se aplică datelor grupate (sau datelor de frecvență). Dacă datele sunt negrupate, atunci le putem grupa cu ajutorul unei histogramme. [132]

Pentru testul χ^2 se aplică următorul algoritm.

Algoritm pentru testul χ^2

1. Se construiește o histogramă cu nc clase, în care fa_j , $j = 1, 2, \dots, nc$ sunt frecvențele absolute observate.

2. Se calculează frecvențele medii estimate fe_j : unde:

- n este efectivul eșantionului;
- F este funcția de distribuție cumulativă testată;
- lc_j și lc_{j+1} sunt limitele clasei j .

3. Se calculează statistica testului

$$\chi^2_{\text{calculat}} = \sum_{j=1}^{nc} \frac{(fa_j - fe_j)^2}{fe_j}$$

4. Se determină valoarea critică a testului

$$\chi^2_{\text{critic}} = (\alpha; nc - c + 1)$$

unde:

- α este nivelul (pragul) de semnificație al testului;
- c este numărul de parametri ai distribuției F ;

- $nc - c + 1$ numărul de grade de libertate ale distribuției χ^2 .

5. Decizia asupra acceptării sau respingerii ipotezei H_0 se ia astfel:

Dacă

$$\chi^2_{\text{calculat}} \leq \chi^2_{\text{critic}}(\alpha; nc - c + 1)$$

atunci se acceptă ipoteza nulă, respectiv datele provin din distribuția testată.

Dacă

$$\chi^2_{\text{calculat}} > \chi^2_{\text{critic}}(\alpha; nc - c + 1)$$

atunci se respinge ipoteza nulă, respectiv datele nu provin din distribuția testată.

Valorile critice ale testului χ^2 pentru nivelul (pragul) de semnificație $\alpha = 0,05$ și un număr de $1 \div 10$ grade de libertate sunt date în tabelul următor:

Tabelul 3.1. Valori critice ale testului χ^2

$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,05$	
Grade de libertate	χ^2	Grade de libertate	χ^2
1	3,841	6	12,592
2	5,991	7	14,067
3	7,815	8	15,507
4	9,488	9	16,919
5	11,070	10	18,307

Exemplul 1. Să se aplice testul χ^2 pentru verificarea ipotezei normalității pentru eșantionul de date, pentru care avem media 10,632 și abaterea standard 4,28843.

Rezolvare: Aplicăm pașii algoritmului descris anterior.

1. Pentru frecvențele medii estimate, standardizăm mai întâi valorile $lc_1 = 0$; $lc_2 = 4,0$; $lc_3 = 8,0$; $lc_4 = 12,0$; $lc_5 = 16,0$; $lc_6 = 20,0$ și obținem:

$$z_1 = \frac{0-10,632}{4,28843} = -2,48; z_2 = \frac{4-10,632}{4,28843} = -1,55;$$

$$z_3 = \frac{8,0-10,632}{4,28843} = -0,61; z_4 = \frac{12,0-10,632}{4,28843} = 0,32;$$

$$z_5 = \frac{16,0-10,632}{4,28843} = 1,25; z_6 = \frac{20,0-10,632}{4,28843} = 2,18.$$

Atunci din tabelul distribuției normale standardizate obținem:

$$fe_1 = 25 \cdot [F(z_2) - F(z_1)] = 25 \cdot [F(-1,55) - F(-2,48)]$$

$$= 25 \cdot [0,0606 - 0,0066] = 25 \cdot 0,0540 = 1,4$$

$$fe_2 = 25 \cdot [F(z_3) - F(z_2)] = 25 \cdot [F(-0,61) - F(-1,55)]$$

$$= 25 \cdot [0,2709 - 0,0606] = 25 \cdot 0,2103 = 5,3$$

$$\begin{aligned}
fe_3 &= 25 \cdot [F(z_4) - F(z_3)] = 25 \cdot [F(-0,32) - F(-0,61)] \\
&= 25 \cdot [0,6255 - 0,2709] = 25 \cdot 0,3546 = 8,9 \\
fe_4 &= 25 \cdot [F(z_5) - F(z_4)] = 25 \cdot [F(1,25) - F(0,32)] \\
&= 25 \cdot [0,8944 - 0,6255] = 25 \cdot 0,2689 = 6,7 \\
fe_5 &= 25 \cdot [F(z_6) - F(z_5)] = 25 \cdot [F(2,18) - F(1,25)] \\
&= 25 \cdot [0,9854 - 0,8944] = 25 \cdot 0,0910 = 2,3
\end{aligned}$$

2. Statistica testului este calculată în tabelul de frecvență următor:

Tabelul 3.2. Statistica testului χ^2

Clase	Intervale de clasă		fa_j	fe_j	$(fa_j - fe_j)^2$	$(fa_j - fe_j)^2 / fe_j$
1	0	4,0	2	1,36	0,4093	0,3009
2	4,0	8,0	5	5,22	0,0473	0,0091
3	8,0	12,0	8	8,89	0,7852	0,0884
4	12,0	16,0	7	6,74	0,0685	0,0102
5	16,0	20,0	3	2,27	0,5304	0,2335
Σ			25	-	-	0,6419

Rezultă statistica calculată a testului:

$$\chi_{\text{calculat}}^2 = 0,6419$$

3. Pentru $\alpha = 0,05$, $nc = 5$, $c = 2$ rezultă valoarea critică a testului:

$$\chi_{\text{critic}}^2(\alpha; nc - c + 1) = \chi_{\text{critic}}^2(0,05; 5 - 2 + 1) = \chi_{\text{critic}}^2(0,05; 4) = 9,488.$$

4. Decizia, ținând cont de relația:

$$\chi_{\text{calculat}}^2 = 0,6419 < \chi_{\text{critic}}^2(0,05; 4) = 9,488,$$

este normalitate confirmată.

Algoritmul testului χ^2 pentru tabele de contingență $p \times q$ [132]

1. Se construiește tabelul de contingență cu p coloane și q linii, în care pe coloane înregistrăm valorile variabilei A , A_1, A_2, \dots, A_p , iar pe linii înregistrăm valorile variabilei B , B_1, B_2, \dots, B_q . În celulele tabelului avem frecvențele absolute fa_{ij} , $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$. În ultima coloană avem sumele pe linie n_i , iar în ultima linie sumele pe coloană m_j .

2. Se calculează frecvențele medii estimate fe_{ij} :

$$fe_{ij} = \frac{n_i \cdot m_j}{n}, i = \overline{1, q}, j = \overline{1, p}$$

unde n este totalul general al tabelului de contingență.

3. Se calculează statistica testului

$$\chi^2_{\text{calculat}} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \frac{(f_{a_{ij}} - f_{e_{ij}})^2}{f_{e_{ij}}}$$

4. Se determină valoarea critică a testului:

$$\chi^2_{\text{critic}}(\alpha; v),$$

unde:

- α este nivelul (pragul) de semnificație al testului;
- n este numărul de grade de libertate ale distribuției χ^2 , calculat cu relația:

$$v = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

5. Decizia asupra acceptării sau respingerii ipotezei H_0 se ia astfel:

Dacă

$$\chi^2_{\text{calculat}} \leq \chi^2_{\text{critic}}(\alpha; v)$$

atunci se acceptă ipoteza nulă, respectiv cele două variabile sunt independente.

Dacă

$$\chi^2_{\text{calculat}} > \chi^2_{\text{critic}}(\alpha; v)$$

atunci se respinge ipoteza nulă, respectiv cele două variabile sunt dependente, una fiind influențată de cealaltă.

Exemplul 2. Un distribuitor, care primește un anumit produs de la doi furnizori, F_1 și F_2 , a înregistrat reclamațiile primite în termen de garanție (TG) pentru produsele livrate. Datele obținute sunt prezentate în tabelul următor:

Tabelul 3.3. Tabel de contingență

	Furnizor F_1	Furnizor F_2
Reclamații în TC	500	1.500
Fără reclamații în TG	46.250	123.750

Să se aplice testul χ^2 pentru a verifica dacă reclamațiile depind de furnizorii de produse.

Rezolvare: Aplicăm pașii algoritmului descris anterior.

1. Avem tabelul în care $p = 2$ și $q = 2$, iar în celulele tabelului avem frecvențele absolute:

Tabelul 3.4. Tabel de contingență 2 × 2

	Furnizor F_1	Furnizor F_2	n_i
Reclamații în TC	500	1.500	200
Fără reclamații în TG	46.250	123.750	170.00
m_j	46.750	125.250	172.000

2. Calculăm frecvențele medii estimate și obținem valorile din tabelul următor:

$$fe_{11} = \frac{n_1 \cdot m_1}{n} = \frac{2.000 \cdot 46.750}{172.000} = 544$$

$$fe_{12} = \frac{n_1 \cdot m_2}{n} = \frac{2.000 \cdot 125.250}{172.000} = 1.456$$

$$fe_{21} = \frac{n_2 \cdot m_1}{n} = \frac{170.000 \cdot 46.750}{172.000} = 46.206$$

$$fe_{22} = \frac{n_2 \cdot m_2}{n} = \frac{170.000 \cdot 125.250}{172.000} = 123.794$$

Tabelul 3.5. Frecvențe medii

	Furnizor F_1	Furnizor F_2	n_i
Reclamații în TC	544	1.456	2.000
Fără reclamații în TG	46.206	123.794	170.000
m_j	46.750	125.250	172.000

3. Calculăm statistica testului organizând datele în tabelul următor:

Tabelul 3.6. Statistica testului

i, j	fa_{ij}	fe_{ij}	$(fa_{ij} - fe_{ij})^2 / fe_{ij}$
1, 1	500	544	3.559
1, 2	1.500	1.456	1.330
2, 1	46.250	46.206	0,042
2, 2	123.750	123.794	0,016
Σ	172.00	172.00	4,946

Am obținut $\chi^2_{calculat} = 4,946$.

4. Determinăm valoarea critică a testului pentru $\alpha = 0,05$ și $n = (2 - 1) - (2 - 1) = 1$.

Rezultă:

$$\chi_{critic}^2(\alpha; v) = \chi_{critic}^2(0,05; 1) = 3,841$$

5. Am obținut:

$$\chi_{calculat}^2 = 4,946 > \chi_{critic}^2 = 3,841$$

și în consecință decidem asupra respingerii ipotezei nule și acceptării ipotezei alternative, adică reclamatale depind de furnizorii de produse.

Testul Kolmogorov-Smirnov

Testul Kolmogorov-Smirnov este un test de normalitate foarte răspândit, bazat pe proprietățile matematice demonstrate de cei doi mari matematicieni ruși. Acesta este un test util, datorită faptului că oferă posibilitatea de decizie asupra ipotezei normalității atât analitic, cât și grafic.

Testul utilizează date negrupate, fiind relativ dificil de aplicat fără utilizarea unui calculator electronic. [66]

Algoritm pentru testul Kolmogorov-Smirnov – date negrupate

1. Se calculează media și dispersia eșantionului de date negrupate x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

2. Se ordonează crescător valorile eșantionului de date și se obține eșantionul ordonat:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

3. Se calculează funcția de distribuție cumulativă empirică a eșantionului ordonat crescător:

$$F_n(x) = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n$$

4. Se calculează statistica testului:

$$D_n = \max |F_n(x_j) - F_0(x_j)|$$

5. Decizia asupra ipotezei normalității se ia în funcție de valoarea critică a testului $d_{1-\alpha, n}$ (unde α este eroarea, iar $1 - \alpha$ nivelul de încredere al testului) astfel:

- Dacă $D_n \leq d_{1-\alpha, n}$, atunci se acceptă ipoteza normalității;
- Dacă $D_n > d_{1-\alpha, n}$, atunci se respinge ipoteza normalității.

6. Pentru reprezentarea grafică, se calculează două limite, inferioară și superioară, astfel:

$$LI = F_0(x_i) - d_{1-\alpha, n}$$

$$LS = F_0(x_i) + d_{1-\alpha, n}$$

Decizia grafică de respingere a normalității se adoptă atunci când funcția de distribuție cumulativă empirică iese în afara limitelor inferioară și superioară.

Valorile critice aproximative ale testului Kolmogorov-Smirnov sunt date în tabelul următor, în funcție de efectivul eșantionului n și nivelul de încredere $1 - \alpha$:

Tabelul 3.7. Valori critice aproximative

$1 - \alpha$	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
$d_{1-\alpha,n}$	$\frac{1,07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$

Exemplul 3. Să se aplice testul Kolmogorov-Smirnov pentru verificarea ipotezei normalității, având în vedere forma aproximativă de „clopot” a histogramei frecvenței relative.

Rezolvare: Pentru eșantionul dat, avem media 10,632 și abaterea standard 4,28843.

În tabelul următor sunt calculate, pe fiecare linie, pentru valorile ordonate ale eșantionului, funcția de distribuție cumulativă empirică și teoretică, statistica testului și limitele inferioară și superioară.

Tabelul 3.8. Statistica testului Kolmogorov-Smirnov

i	x_i	$x_{(i)}$	$F_n(x_i)$	$F_0(x_i)$	$ F_0(x_i) - F_n(x_i) $	LI	LS
1	10,1	2,0	0,040	0,0221	0,0179	0,000	0,2941
2	12,2	3,5	0,080	0,0481	0,0319	0,000	0,3201
3	14,3	4,2	0,120	0,0668	0,0532	0,000	0,3388
4	6,4	5,7	0,160	0,1251	0,0349	0,000	0,3971
5	9,2	6,4	0,200	0,1619	0,0381	0,000	0,4339
6	16,6	7,5	0,240	0,2326	0,0074	0,000	0,5046
7	15,5	7,6	0,280	0,2398	0,0402	0,000	0,5118
8	11,8	8,3	0,320	0,2933	0,0267	0,021	0,5653
9	12,3	9,2	0,360	0,3692	0,0092	0,097	0,6412
10	13,2	10,1	0,400	0,4506	0,0506	0,179	0,7226
11	11,2	10,3	0,440	0,4691	0,0291	0,197	0,7411
12	10,4	10,4	0,480	0,4784	0,0016	0,206	0,7504
13	7,5	10,5	0,520	0,4877	0,0323	0,216	0,7597
14	5,7	11,2	0,560	0,5527	0,0073	0,281	0,8247
15	13,1	11,8	0,600	0,6073	0,0073	0,335	0,8793
16	18,0	12,2	0,640	0,6427	0,0027	0,371	0,9147
17	2,0	12,3	0,680	0,6513	0,0287	0,379	0,9233
18	14,9	13,1	0,720	0,7175	0,0025	0,446	0,9895
19	17,0	13,2	0,760	0,7254	0,0346	0,453	0,9974
20	3,5	14,3	0,800	0,8038	0,0038	0,532	1,0000
21	8,3	14,9	0,840	0,8402	0,0002	0,568	1,0000
22	10,3	15,5	0,880	0,8718	0,0082	0,600	1,0000
23	10,5	16,6	0,920	0,9180	0,0020	0,646	1,0000
24	7,6	17,0	0,960	0,9312	0,0288	0,659	1,0000
25	4,2	18,0	1,000	0,9571	0,0429	0,685	1,0000

Rezultă statistica testului (valoarea maximă a diferenței dintre funcțiile de distribuție empirică și teoretică) $D_n = 0,0532$. Pentru $n = 25$ și nivelul de încredere $1 - \alpha = 0,95$, avem

valoarea critică $d_{1-\alpha,n} = d_{0,95;25} = 0,272$. Atunci, conform criteriului de decizie al testului, se adoptă decizia normalitate confirmată. [132]

Reprezentarea grafică a testului este redată în Figura 3.2. Se observă că funcția de distribuție empirică se apropie de funcția teoretică și nu depășește limitele critice.

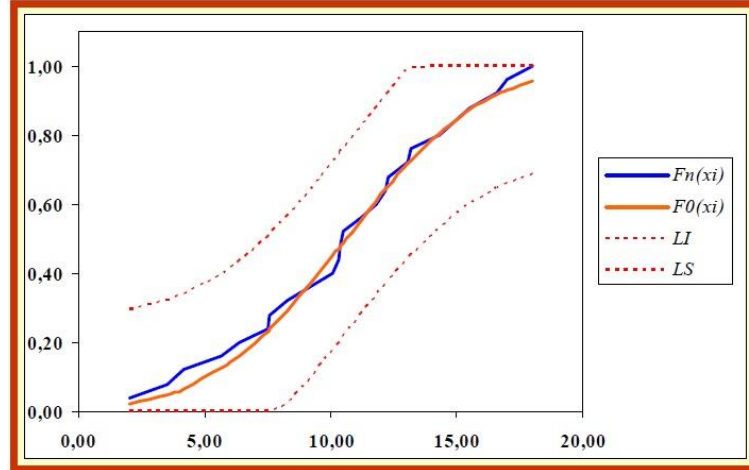


Fig. 3.1. Testul Kolmogorov-Smirnov

3.3. Algoritmi de modelare a funcțiilor de repartiție și a timpului de așteptare în cazul sistemului M/G/1 în cadrul terminalelor din portul Constanța

În cadrul acestui sistem de așteptare vom studia timpul de așteptare dat de: [83]

3.3.1. Servire în ordine inversă (LIFO) [83], [84]

$$w(s) = \left(1 - a\beta_1 + \frac{a(1 - \pi(s))}{s + a - a\pi(s)} \right)$$

unde transformata Laplace-Stieltjes a funcției de repartiție a perioadei de ocupare $\pi(s)$ se determină numeric din ecuația funcțională Kendall $\pi(s) = \beta(s + a - a\pi(s))$.

Funcții comune utilizate în algoritmul din C++:

```
function fnPi(s, a)
    precizie ← 0.000001
    pi_curent ← 0
    repeat
        pi_precedent ← pi_curent
        pi_curent ← fnBeta(s + a - a·pi_precedent)
    until |pi_curent - pi_precedent| < precizie
    return pi_curent
end function
```

```

function p(valoare)
    return 1 / squareroot(valoare) · e^(-1/valoare)
end function

```

```

function fnInv(valoare)
    rezultat ← 0
    n ← 8
    n2 ← n/2
    g[0] ← 1
    for i = 1 to n
        g[i] ← g[i-1] · i
    repeat
        h[1] ← 2/g[n2-1]
        for i=2 to n2
            h[i] ← e^(n2·ln(i))·g[2·i]/(g[n2-i]·g[i]·g[i-1])
        repeat
            semn ← -1
            for i = 1 to n
                v[i] ← 0
                jmin ← (i+1)/2
                if i<n2 then
                    jmax ← i
                else
                    jmax ← n2
                end if
                for j = jmin to jmax
                    v[i] ← v[i] + h[j]/(g[i-j]·g[2·j-i])
                repeat
                    v[i] ← semn · v[i]
                    semn ← -semn
                repeat
            for i = 1 to n
                rezultat ← rezultat + v[i] · p(i·ln(2)/valoare)
            repeat
    return rezultat · ln(2)/valoare

```

end function

Funcția de repartiție a timpului de așteptare $W(x)$ se calculează prin inversarea numerică a lui $w(x)$ prin transformata Laplace-Stieltjes. Astfel stabilim valori concrete ale funcției $W(x)$ folosind câțiva algoritmi de inversare numerică. În cazul repartițiilor uniforme, exponențiale, Erlang și Gamma pentru a afla parametrii utilizați în modelări am aplicat metoda Pearson numită și metoda momentelor. [86], [87] Utilizând această metodă am aflat estimațiile pentru funcțiile de repartiție. Acestea sunt:

Momentul inițial (empiric) de ordin k , aflat din formula:

$$v_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

unde X_1, X_2, \dots, X_n este o selecție de ordinul n , din repartiția teoretică Poisson cu parametrul a .

$$v_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.24)$$

În acest caz estimația este estimație statică și putem spune că estimația (3.24) este nedeplasată deoarece parametrul fluxului de intrare este dat de:

$$M(v_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) = a \quad (3.25)$$

Observație. Estimația (3.24) este suficientă deoarece converge în probabilitate către parametrul a din legea numerelor mari (I. Cebîșev) rezultă [102], [103], [104]

$$P\{|v_1 - a| < \varepsilon\} \rightarrow 1 \text{ pentru } n \rightarrow \infty$$

Pentru a estima parametrul fluxului de intrare a , am folosit pentru repartiția uniformă următoarea formulă: $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

unde $X_i (X_1, X_2, \dots, X_n)$ sunt momentele sosirii în port a n nave într-un interval de timp.

În cazul repartiției exponențiale am utilizat formula:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.26)$$

unde X_i este timpul de servire a navei i . Astfel se determină parametrul b .

3.3.1.1. Dacă timpul de așteptare al mesajelor este repartizat uniform pe intervalul de timp $[a^*, b]$, funcția de repartiție [96]

$$B(x) = \frac{x - a^*}{b - a^*}$$

are momentul de ordinul 1

$$\beta_1 = M(x) = \frac{a^* + b}{2}$$

și are transformata Laplace-Stieltjes

$$\beta(s) = \frac{1}{s(b - a^*)} (e^{-sa} - e^{-sb}), s > 0$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:

Program principal

```

read a*, b, x, a, s
PI ← fnPi(s, a)
omega ← (1-a·fnBeta1() + a(1-PI))/(s+a·PI)
OMEGA ← fnInv(omega)
write s, a*, b, a, x, omega, OMEGA

```

Funcții specifice utilizate

```

function fnBeta(valoare)
    return 1/(b - a*) · (e^(-valoare·a*) - e^(-valoare·b))/valoare
end function

```

```

function fnBeta1()
    return (a* + b) / 2
end function

```

Tabelul 3.9. Dependența de parametrul fluxului de intrare

Nr.crt.	s	a*	b	a	x	w(s)	W(x)
1.	1	1	5	0,20	2	0,5577276	0,0582281
2.	1	1	5	0,25	2	0,4405438	0,2048543
3.	1	1	5	0,28	2	0,3691526	0,3234092
4.	1	1	5	0,30	2	0,3211335	0,4218430
5.	1	1	5	0,35	2	0,1996819	0,7911617

Tabelul 3.10. Dependența de paramentru repartiției uniforme

Nr.crt.	s	a^*	b	a	x	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	5	0,20	2	0,4632012	0,1725427
2.	1	3	7	0,20	2	0,1658784	0,9506897
3.	1	4	6	0,20	2	0,1662321	0,9488037
4.	1	1	6	0,20	2	0,4595204	0,1776430
5.	1	2	8	0,20	2	0,1649017	0,9559255

Tabelul 3.11. Dependența de paramentru s din determinarea timpului de așteptare.

Nr.crt.	s	a^*	b	a	x	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	1	3	0,3	2	0,6122375	0,0041842
2.	2	1	3	0,3	2	0,5279578	0,0910943
3.	3	1	3	0,3	2	0,4904466	0,1364511
4.	4	1	3	0,3	2	0,4696650	0,1637194
5.	5	1	3	0,3	2	0,4565786	0,1817598

3.3.1.2. Dacă timpul de așteptare al mesajelor este repartizat exponențial, atunci funcția de repartiție

$$B(x) = 1 - e^{-bx}$$

are momentul de ordinul

$$1 \cdot \beta_1 = M(x) = \frac{1}{b}$$

și transformata Laplace-Stieltjes [84]

$$\beta(s) = \frac{b}{s + b}$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:

Program principal

```

read a*, b, x, a, s
PI ← fnPi(s, a)
omega ← (1-a·fnBeta1() + a(1-PI))/(s+a·PI)
OMEGA ← fnInv(omega)
write s, a*, b, a, x, omega, OMEGA

```

Funcții specifice utilizate

```
function fnBeta(valoare)
    return b/(valoare + b)
end function
```

```
function fnBeta1()
    return 1/b
end function
```

Tabelul 3.12. Dependența de parametrul b din repartiția exponențială

Nr.crt.	b	s	x	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	10	1	2	16	0,2783011	0,5275267
2.	11	1	2	16	0,4116243	0,2495373
3.	12	1	2	16	0,5190001	0,1015047
4.	13	1	2	16	0,6059155	0,0100826
5.	9	1	2	16	0,1111112	1,3303402

Tabelul 3.13. Dependența de parametrul s din determinarea timpului de așteptare

Nr.crt.	b	s	x	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	10	1	2	12	0,6000005	0,0156847
2.	10	2	2	12	0,5101022	0,1120998
3.	10	3	2	12	0,4479205	0,1940898
4.	10	4	2	12	0,4000001	0,2687076
5.	10	5	2	12	0,3610134	0,3388641

Tabelul 3.14. Dependența de parametrul fluxului de intrare

Nr.crt.	b	s	x	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	10	1	2	13	0,5258346	0,0935392
2.	10	1	2	14	0,4468874	0,1955827
3.	10	1	2	15	0,3641102	0,3329298
4.	10	1	2	16	0,2783011	0,5275267
5.	10	1	2	17	0,1900982	0,8325626

3.3.1.3. Repartiția Erlang

Timpul de așteptare este repartizat după repartiția Erlang de ordinul k . [86]

$$B(x) = \int_0^x \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx$$

$$\beta_1 = \frac{k}{\lambda}$$

$$\beta(s) = \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:

Program principal

```

read a*, b, x, a, s, lambda, k
PI ← fnPi(s, a)
omega ← (1-a·fnBeta1()) + a(1-PI)/(s+a·PI)
OMEGA ← fnInv(omega)
write s, lambda, k, a*, b, a, x, omega, OMEGA

```

Funcții specifice utilizate

```

function fnBeta(valoare)
    return (lambda/(lambda+valoare))^k
end function

```

```

function fnBeta1()
    return k/lambda
end function

```

Tabelul 3.15. Dependența de parametrii λ , k , a ai funcției de repartiție

Nr.crt.	s	x	λ	k	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	5	10	0,4	0,4669491	0,1674063
2.	1	2	6	9	0,5	0,5490760	0,0675159
3.	1	2	3	7	0,3	0,5155945	0,1055294
4.	1	2	2	6	0,2	0,5581094	0,0578230
5.	1	2	4	8	0,6	0,1576327	0,9962254

Tabelul 3.16. Dependența de paramentru s din determinarea timpului de așteptare

Nr.crt.	s	x	λ	k	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	5	8	0,5	0,5023799	0,1215079
2.	2	2	5	8	0,5	0,3935715	0,2796331
3.	3	2	5	8	0,5	0,3410862	0,3787289
4.	4	2	5	8	0,5	0,3105277	0,4462189
5.	5	2	5	8	0,5	0,2906903	0,4948783

Tabelul 3.17. Dependența de paramentru a din timpul de așteptare și paramentru k din funcția de repartiție

Nr.crt.	s	x	λ	k	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	2	5	0,20	0,5035026	0,1201276
2.	1	2	2	5	0,30	0,4653784	0,1695520
3.	1	2	2	5	0,32	0,4269586	0,2253468
4.	1	2	2	5	0,35	0,3687593	0,3241456
5.	1	2	2	5	0,40	0,2703802	0,5494113

3.3.1.4. Repartiția Gamma

Timpul de așteptare este repartizat după repartiția Gamma. [40], [83], [84]

$$B(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{x}$$

$$\beta(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^\alpha$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:

Program principal

```

read a*, b, x, a, s, lambda, alfa
PI ← fnPi(s, a)
omega ← (1-a·fnBeta1()) + a(1-PI)/(s+a·PI)
OMEGA ← fnInv(omega)
write s, lambda, alfa, a*, b, a, x, omega, OMEGA
    
```

Funcții specifice utilizate

```
function fnBeta(valoare)
    return (lambda/(lambda+valoare))^alfa
end function
```

```
function fnBeta1()
    return alfa/x
end function
```

Tabelul 3.18. Dependența de paramentrul s din determinarea timpului de așteptare

Nr.crt.	s	x	λ	α	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	3	1	2	0,4226499	0,2320152
2.	2	2	3	1	2	0,3333334	0,3950776
3.	3	2	3	1	2	0,2792408	0,5249843
4.	4	2	3	1	2	0,2416943	0,6362661
5.	5	2	3	1	2	0,2137004	0,7350787

Tabelul 3.19. Dependența de parametrul x din funcția de repartiție

Nr.crt.	s	x	λ	α	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	3	1	2	0,4226499	0,2320152
2.	1	3	6	1	2	0,6046200	0,0113026
3.	1	2	6	1	2	0,2712866	0,5468648
4.	1	4	6	1	5	0,3417520	0,3773476
5.	1	5	6	1	5	0,5917520	0,0236349

Tabelul 3.20. Dependența de parametrul λ al funcției de repartiție

Nr.crt.	s	x	λ	α	a	$w(s)$	$W(x)$
1.	1	2	4	1	1,5	0,5284998	0,0904724
2.	1	2	5	1	1,5	0,4876526	0,1400232
3.	1	2	6	1	1,5	0,4566003	0,1817293
4.	1	2	7	1	1,5	0,4324128	0,2170074
5.	1	2	8	1	1,5	0,4131334	0,2471018

3.3.2. În cazul în care servirea este în ordine directă (FIFO)

$$w(s) = (1 - a\beta_1) \frac{s}{s - a + a\beta(s)}$$

Funcții comune utilizate în algoritmul din C++:

```
function fnPi(s, a)
    precizie ← 0.000001
    pi_curent ← 0
    repeat
        pi_precedent ← pi_curent
        pi_curent ← fnBeta(s + a - a·pi_precedent)
    until |pi_curent-pi_precedent| < precizie
    return pi_curent
end function
```

```
function p(valoare)
    return 1 / squareroot(valoare) · e^(-1/valoare)
end function
```

```
function fnInv(valoare)
    rezultat ← 0
    n ← 8
    n2 ← n/2
    g[0] ← 1
    for i = 1 to n
        g[i] ← g[i-1] · i
    repeat
        h[1] ← 2/g[n2-1]
        for i=2 to n2
            h[i] ← e^(n2·ln(i))·g[2·i]/(g[n2-i]·g[i]·g[i-1])
        repeat
            semn ← -1
            for i = 1 to n
                v[i] ← 0
                jmin ← (i+1)/2
                if i<n2 then
```

```

        jmax ← i
    else
        jmax ← n2
    end if
    for j = jmin to jmax
        v[i] ← v[i] + h[j]/(g[i-j]·g[2·j-i])
    repeat
        v[i] ← semn · v[i]
        semn ← -semn
    repeat
    for i = 1 to n
        rezultat ← rezultat + v[i] · p(i·ln(2)/valoare)
    repeat
    return rezultat · ln(2)/valoare
end function

```

3.3.2.1. Dacă timpul de așteptare al mesajelor este repartizat uniform pe intervalul de timp $[a^*, b]$, aplicând aceleași formule indicate în cazul LIFO, obținem următoarele date: [86], [87]

$$B(x) = \frac{x - a^*}{b - a^*}$$

are momentul de ordinul 1

$$\beta_1 = M(x) = \frac{a^* + b}{2}$$

și are transformata Laplace-Stieltjes

$$\beta(s) = \frac{1}{s(b - a^*)} (e^{-sa} - e^{-sb}), s > 0$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:

Program principal

```

read a*, b, x, a, s
PI ← fnPi(s, a)
omega2 ← (1-a·fnBeta1())·a·s/(s-a+a·fnBeta(s))
OMEGA2 ← fnInv(omega2)
write s, a*, b, a, x, omega2, OMEGA2

```

Funcții specifice utilizate

```
function fnBeta(valoare)
    return 1/(b - a*) · (e^(-valoare·a*) - e^(-valoare·b))/valoare
end function
```

```
function fnBeta1()
    return (a* + b) / 2
end function
```

Tabelul 3.21. Dependența de parametrul fluxului de intrare

Nr.crt.	<i>s</i>	<i>a*</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>x</i>	<i>w2(s)</i>	<i>W2(x)</i>
1.	1	1	5	0,17	2	0,5796426	0,0356066
2.	1	1	5	0,19	2	0,5198547	0,1005006
3.	1	1	5	0,20	2	0,4889634	0,1383438
4.	1	1	5	0,23	2	0,3920251	0,2822969
5.	1	1	5	0,25	2	0,3235947	0,4163370

Tabelul 3.22. Dependența de parametrul repartiției uniforme.

Nr.crt.	<i>s</i>	<i>a*</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>x</i>	<i>w2(s)</i>	<i>W2(x)</i>
1.	1	2	5	0,20	2	0,3710239	0,3199197
2.	1	3	5	0,20	2	0,2486619	0,6139755
3.	1	1	4	0,20	2	0,6073089	0,0087747
4.	1	1	6	0,20	2	0,3682717	0,3250601
5.	1	2	6	0,20	2	0,2479412	0,6162432

Tabelul 3.23. Dependența de parametrul *s* din determinarea timpului de așteptare

Nr.crt.	<i>s</i>	<i>a*</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>x</i>	<i>w2(s)</i>	<i>W2(x)</i>
1.	1	1	3	0,3	2	0,5349640	0,0831249
2.	2	1	3	0,3	2	0,4678460	0,1661854
3.	3	1	3	0,3	2	0,4440361	0,1997278
4.	4	1	3	0,3	2	0,4323522	0,2170991
5.	5	1	3	0,3	2	0,4255136	0,2275648

3.3.2.2. Dacă timpul de așteptare al mesajelor este repartizat exponențial, obținem: [86]

$$B(x) = \frac{x - a^*}{b - a^*}$$

are momentul de ordinul 1

$$\beta_1 = M(x) = \frac{a^* + b}{2}$$

și are transformata Laplace-Stieltjes

$$\beta(s) = \frac{1}{s(b - a^*)} (e^{-sa} - e^{-sb}), s > 0$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:

Program principal

```

read a*, b, x, a, s
PI ← fnPi(s, a)
omega ← (1-a·fnBeta1() + a(1-PI))/(s+a·PI)
omega2 ← (1-a·fnBeta1())·a·s/(s-a+a·fnBeta(s))
OMEGA ← fnInv(omega)
OMEGA2 ← fnInv(omega2)
write s, a*, b, a, x, omega, OMEGA, omega2, OMEGA2

```

Funcții specifice utilizate

```

function fnBeta(valoare)
    return b/(valoare + b)
end function

```

```

function fnBeta1()
    return 1/b
end function

```

Tabelul 3.24. Dependența de paramentru s din determinarea timpului de așteptare

Nr.crt.	b	s	x	a	$w2(s)$	$W2(x)$
1.	5	1	3	4	0,6000000	0,0156852
2.	5	2	3	4	0,4666667	0,1677913
3.	5	3	3	4	0,4000000	0,2687077
4.	5	4	3	4	0,3600000	0,3408206
5.	5	5	3	4	0,3333333	0,3950777

Tabelul 3.25. Dependența de parametrul fluxului de intrare.

Nr.crt.	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>x</i>	<i>a</i>	<i>w2(s)</i>	<i>W2(x)</i>
1.	5	1	3	4,1	0,5684211	0,0470317
2.	5	1	3	4,3	0,4941176	0,1318006
3.	5	1	3	4,5	0,4000000	0,2687077
4.	5	1	3	4,7	0,2769231	0,5312752
5.	5	1	3	4,8	0,2000000	0,7898325

3.3.2.3. Repartiția Erlang

Timpu de așteptare este repartizat după repartiția Erlang de ordinul *k*. [87]

$$B(x) = \int_0^x \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx$$

$$\beta_1 = \frac{k}{\lambda}$$

$$\beta(s) = \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:

Program principal

```

read a*, b, x, a, s, lambda, k
PI ← fnPi(s, a)
omega2 ← (1-a·fnBeta1())·a·s/(s-a+a·fnBeta(s))
OMEGA2 ← fnInv(omega2)
write s, lambda, k, a*, b, a, x, omega2, OMEGA2

```

Funcții specifice utilizate

```

function fnBeta(valoare)
    return (lambda/(lambda+valoare))^k
end function

```

```

function fnBeta1()
    return k/lambda
end function

```

Tabelul 3.26. Dependența de parametrii λ , k , a ai funcției de repartiție

Nr.crt.	s	x	λ	k	a	$w2(s)$	$W2(x)$
1.	1	2	5	10	20	49,4613521	0,0024405
2.	1	2	6	10	20	43,9346405	0,0041283
3.	1	2	3	7	15	42,5079997	0,0045515
4.	1	2	2	7	15	58,8702174	0,0007346
5.	1	2	4	10	22	63,7415382	0,0003622

Tabelul 3.27. Dependența de paramentru s din determinarea timpului de așteptare

Nr.crt.	s	x	λ	k	a	$w2(s)$	$W2(x)$
1.	1	2	4	8	13	33,0992220	0,0017749
2.	2	2	4	8	13	61,9474747	0,0004723
3.	3	2	4	8	13	98,9625470	0,0000011
4.	4	2	4	8	13	145,2640768	0,0000000
5.	5	2	4	8	13	203,6287701	0,0000000

Tabelul 3.28. Dependența de paramentru a din timpul de așteptare și paramentru k din funcția de repartiție

Nr.crt.	s	x	λ	k	a	$w2(s)$	$W2(x)$
1.	1	2	2	5	21	62,7517908	0,0004196
2.	1	2	2	5	23	68,4985900	0,0001752
3.	1	2	2	5	25	74,2473172	0,0000703
4.	1	2	2	5	27	79,9975248	0,0000274
5.	1	2	2	5	29	85,7488938	0,0000104

3.3.2.4 Repartiția Gamma

Timpul de așteptare este repartizat după repartiția Gamma. [88]

$$B(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{x}$$

$$\beta(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^\alpha$$

Algoritmul de calcul utilizat în C++:

Program principal

```
read a*, b, x, a, s, lambda, alfa  
PI ← fnPi(s, a)  
omega ← (1-a·fnBeta1() + a(1-PI))/(s+a·PI)  
omega2 ← (1-a·fnBeta1())·a·s/(s-a+a·fnBeta(s))  
OMEGA ← fnInv(omega)  
OMEGA2 ← fnInv(omega2)  
write s, lambda, alfa, a*, b, a, x, omega, OMEGA, omega2, OMEGA2
```

Funcții specifice utilizate

```
function fnBeta(valoare)  
    return (lambda/(lambda+valoare))^alfa  
end function
```

```
function fnBeta1()  
    return alfa/x  
end function
```

Tabelul 3.29. Dependența de paramentrul s din determinarea timpului de așteptare

Nr.crt.	s	x	λ	α	a	w2(s)	W2(x)
1.	1	2	3	1	22	48,8888889	0,0025985
2.	2	2	3	1	22	64,7058824	0,0003134
3.	3	2	3	1	22	82,5000000	0,0000180
4.	4	2	3	1	22	102,6666667	0,0000006
5.	5	2	3	1	22	125,7142857	0,0000000

Tabelul 3.30. Dependența de parametrul x din funcția de repartiție

Nr.crt.	s	x	λ	α	a	w2(s)	W2(x)
1.	1	1	6	1	22	215,6000000	0,0000000
2.	1	2	6	1	22	102,6666667	0,0000006
3.	1	3	6	1	22	65,0222222	0,0002988
4.	1	4	6	1	22	46,2000000	0,0034087
5.	1	5	6	1	22	34,9066667	0,0037908

Tabelul 3.31. Dependența de parametrul λ al funcției de repartiție

Nr.crt.	s	x	λ	α	a	$w2(s)$	$W2(x)$
1.	1	2	4	1	22	64,7058824	0,0003134
2.	1	2	5	1	22	82,5000000	0,0000180
3.	1	2	6	1	22	102,6666667	0,0000006
4.	1	2	7	1	22	125,7142857	0,0000000
5.	1	2	8	1	22	152,3076923	0,0000000

Timpul mediu de așteptare și durata medie a cozii de așteptare

Am considerat un sistem cu N subsisteme, fiecare subsistem având M_i porturi. Portul j al subsistemului i ($j = 1, 2, \dots, M_i, i = 1, 2, \dots, N$) are $S_{i,j}$ dane. Presupunem că procesul de sosire a navelor în sistem este de tip Poisson cu parametrul λ și timpul de preluare a navelor în dane este o variabilă aleatoare independentă care are o distribuție a probabilității de tip Erlang și este independentă de procesele de sosire. [83], [84]

Fie $u_{i,j,l}$ ($l = 1, 2, \dots, S_{i,j}$) viteza medie de preluare a navelor în dana l a portului j al subsistemului.

Procesele de sosire sunt determinate conform condițiilor de probabilitate, care au timpii de sosire $p_1\lambda, p_2\lambda, \dots, p_N\lambda$. Probabilitatea p_i poate fi determinată astfel:

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^{M_i} S_{i,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} S_{i,j}}$$

Presupunem că sistemul este într-o stare de echilibru. Soluțiile stării de echilibru în sistem există dacă $\rho < 1$, unde ρ se numește factorul de ocupare a sistemului și este dat de:

$$\rho = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \sum_{l=1}^{S_{i,j,k}} u_{i,j,l}}$$

Timpii de sosire în portul j al subsistemului i formează un proces Poisson cu parametrii $r_{i,j}$, unde

$$r_{i,j} = \frac{\lambda S_{i,j}}{\sum_{j=1}^{M_i} S_{i,j}}$$

Fie $\rho_{i,j}$ factorul de ocupare a portului j al subsistemului i , cu formula:

$$\rho_{i,j} = \frac{r_{i,j}}{\sum_{l=1}^{S_{i,j,k}} u_{i,j,l}} < 1$$

În primul rând găsim formulele pentru a calcula lungimea medie a cozii de așteptare și media timpului de așteptare a navelor la subsistemul i ($i = 1, 2, \dots, N$) apoi vom aplica aceste formule întregului sistem. [83]

O navă este admisă în portul j ($j = 1, 2, \dots, M_i$) al subsistemului i și a găsit la sosire cel puțin una din danele $S_{i,j}$ liberă și intră imediat la o dană liberă aleasă aleator, altfel nava așteaptă la coadă k ($k = 1, 2, \dots, R$) a portului j până se eliberează o dană. Navele vor fi primite în dane conform regulii „primul venit, primul servit”. O dană nu poate fi neocupată când navele așteaptă la coadă. O navă părăsește sistemul după ce este preluată complet.

Aplicând formulele sugerate de Lee și Longton [3] și din formula Little, vom obține timpul mediu de așteptare și lungimea medie a cozii pentru navele aflate în sistem. [70]

Fie $E[W]_{i,j}$ timpul mediu de așteptare al navelor în portul j al subsistemului i și fie $E[N]_{i,j}$ numărul mediu al navelor care așteaptă în portul j al subsistemului i . Timpul mediu de așteptare $E[W]_{i,j}$ este obținut din următoarea formulă:

$$E[W]_{i,j} = \frac{1 + c^2}{2} E[W^*]_{i,j}$$

$$\text{unde } E[W^*]_{i,j} = \frac{(S_{i,j}\rho_{i,j})^{S_{i,j}}}{S_{i,j}! \sum_{l=1}^{S_{i,j,k}} u_{i,j,l}(1-\rho_{i,j})^2} \left\{ \sum_{n=0}^{S_{i,j}-1} \frac{(S_{i,j}\rho_{i,j})^n}{n!} + \frac{(S_{i,j}\rho_{i,j})^{S_{i,j}}}{S_{i,j}!(1-\rho_{i,j})} \right\}^{-1}$$

Folosind formula Little vom obține numărul mediu de așteptare $E[n]_{i,j}$ al navelor în portul j al subsistemului i :

$$E[n]_{i,j} = r_{i,j} E[W]_{i,j}$$

Notam cu $Var[G]$ dispersia variației aleatoare G , $Var[G] = E[G^2] - \{E[G]\}^2$ și prin c coeficientul variației variabilei aleatoare G ,

$$c = \frac{\sqrt{Var[G]}}{E[G]} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

unde n este gradul distribuției Erlang.

Numărul mediu al navelor în portul j al subsistemului i este:

$$E[Q]_{i,j} = E[n]_{i,j} + S_{i,j}\rho_{i,j}$$

Timpul mediu total de așteptare a sistemului este:

$$E[W] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} E[W]_{i,j}$$

Numărul mediu total de așteptare a navelor în sistem este:

$$E[n] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} E[n]_{i,j}$$

Numărul mediu al navelor în sistem este:

$$E[Q] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \{E[n]_{i,j} + S_{i,j} \rho_{i,j}\}$$

Tabelul 3.32. Operări containere în terminalul CSCT în luna februarie 2016

Nr. crt.	Ziua	Nava	Descărcare				Încărcare			
			Cont./zi	Tone/zi	Cont./oră	Tone/oră	Cont./zi	Tone/zi	Cont./oră	Tone/oră
1	01.02.2016	Nava 1	21681.00	1535.00	903.38	63.96	25059.00	1127.00	1044.13	46.96
2	02.02.2016	Nava 2	3878.00	186.00	161.58	7.75	15744.00	761.00	656.00	31.71
		Nava 3	21611.00	1528.00	900.46	63.67	24976.00	719.00	1040.67	29.96
3	03.02.2016	Nava 4	3878.00	186.00	161.58	7.75	15744.00	761.00	656.00	31.71
		Nava 5	2199.00	84.00	91.63	3.50	0.00	0.00	0.00	0.00
		Nava 6	1790.00	133.00	74.58	5.54	6556.00	311.00	273.17	12.96
4	04.02.2016	Nava 7	8452.00	359.00	352.17	14.96	15180.00	771.00	632.50	32.13
5	05.02.2016	Nava 8	23304.00	1564.00	971.00	65.17	14021.00	782.00	584.21	32.58
6	07.02.2016	Nava 9	2223.00	204.00	92.63	8.50	856.00	61.00	35.67	2.54
7	08.02.2016	Nava 10	2823.00	487.00	117.63	20.29	5734.00	320.00	238.92	13.33
8	11.02.2016	Nava 11	2826.00	100.00	117.75	4.17	84.00	31.00	3.50	1.29
		Nava 12	8503.00	507.00	354.29	21.13	10424.00	449.00	434.33	18.71
9	12.02.2016	Nava 13	2590.00	168.00	107.92	7.00	7282.00	290.00	303.42	12.08
		Nava 14	7216.00	396.00	300.67	16.50	17980.00	926.00	749.17	38.58
10	13.02.2016	Nava 15	6793.00	319.00	283.04	13.29	172.00	75.00	7.17	3.13
11	15.02.2016	Nava 16	2170.00	125.00	90.42	5.21	2686.00	139.00	111.92	5.79
		Nava 17	4617.00	167.00	192.38	6.96	2270.00	168.00	94.58	7.00
12	16.02.2016	Nava 18	9559.00	524.00	398.29	21.83	7878.00	455.00	328.25	18.96
		Nava 19	21792.00	1297.00	908.00	54.04	31336.00	1526.00	1305.67	63.58
13	17.02.2016	Nava 20	21792.00	1297.00	908.00	54.04	31336.00	1526.00	1305.67	63.58
14	18.02.2016	Nava 21	5466.00	300.00	227.75	12.50	6641.00	341.00	276.71	14.21
		Nava 22	760.00	73.00	31.67	3.04	0.00	0.00	0.00	0.00
		Nava 23	6776.00	533.00	282.33	22.21	19798.00	863.00	824.92	35.96
15	19.02.2016	Nava 24	6776.00	533.00	282.33	22.21	19798.00	863.00	824.92	35.96
16	22.02.2016	Nava 25	6820.00	406.00	284.17	16.92	8622.00	376.00	359.25	15.67
17	23.02.2016	Nava 26	2194.00	209.00	91.42	8.71	3264.00	148.00	136.00	6.17
18	24.02.2016	Nava 27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		Nava 28	22901.00	139.00	954.21	5.79	20638.00	1192.00	859.92	49.67
19	25.02.2016	Nava 29	2962.00	208.00	123.42	8.67	19671.00	922.00	819.63	38.42
		Nava 30	3450.00	165.00	143.75	6.88	7816.00	340.00	325.67	14.17
20		Nava 31	4637.00	162.00	193.21	6.75	2660.00	135.00	110.83	5.63
		Nava 32	157.00	20.00	6.54	0.83	2107.00	164.00	87.79	6.83
Total			242596.00	13914.00	10108.17	579.75	346333.00	16542.00	14430.54	689.25
Medie			12129.80	695.70	505.41	28.99	17316.65	827.10	721.53	34.46

Tabelul 3.33. Operări containere în terminalul SOCEP S.A în luna februarie 2016

Nr. crt.	Ziua	Nava	Descărcare				Încărcare			
			Cont./zi	Tone/zi	Cont./oră	Tone/oră	Cont./zi	Tone/zi	Cont./oră	Tone/oră
1	09.02.2016	Nava 1	3388.00	171.00	141.17	7.13	2237.00	165.00	93.21	6.88
2	11.02.2016	Nava 2	2496.00	355.00	104.00	14.79	1684.00	190.00	70.17	7.92
3	14.02.2016	Nava 3	930.00	50.00	38.75	2.08	4865.00	327.00	202.71	13.63
4	16.02.2016	Nava 4	261.00	29.00	10.88	1.21	0.00	0.00	0.00	0.00
5	20.02.2016	Nava 5	6300.00	406.00	262.50	16.92	5300.00	390.00	220.83	16.25
6	25.02.2016	Nava 6	2123.00	358.00	88.46	14.92	5470.00	436.00	227.92	18.17
Total			15498.00	1369.00	645.75	57.04	19556.00	1508.00	814.83	62.83
Medie			2583.00	228.17	107.63	9.51	3259.33	251.33	135.81	10.47

Tabelul 3.34. Operări containere în mărfuri generale (vrac) în terminalul SOCEP S.A în luna februarie 2016

Nr. crt.	Ziua	Nava	Descărcare		Încărcare	
			Mărfuri generale (vrac)/zi	Mărfuri generale (vrac)/oră	Mărfuri generale (vrac)/zi	Mărfuri generale (vrac)/oră
1	01.02.2016	Nava 1	0.00	0.00	469.00	19.54
		Nava 2	5500.00	229.17	0.00	0.00
		Nava 3	0.00	0.00	2661.00	110.88
2	02.02.2016	Nava 4	0.00	0.00	704.00	29.33
3	03.02.2016	Nava 5	0.00	0.00	1054.00	43.92
4	04.02.2016	Nava 6	2328.00	97.00	1214.00	50.58
5	05.02.2016	Nava 7	4328.00	180.33	0.00	0.00
6	06.02.2016	Nava 8	600.00	25.00	0.00	0.00
		Nava 9	5474.00	228.08	0.00	0.00
7	07.02.2016	Nava 10	3000.00	125.00	0.00	0.00
8	09.02.2016	Nava 11	0.00	0.00	700.00	29.17
9	10.02.2016	Nava 12	799.00	33.29	0.00	0.00
10	11.02.2016	Nava 13	0.00	0.00	540.00	22.50
		Nava 14	0.00	0.00	909.00	37.88
		Nava 15	1701.00	70.88	0.00	0.00
11	12.02.2016	Nava 16	0.00	0.00	840.00	35.00
12	14.02.2016	Nava 17	0.00	0.00	669.00	27.88
13	15.02.2016	Nava 18	0.00	0.00	1029.00	42.88
		Nava 19	0.00	0.00	1000.00	41.67
14	16.02.2016	Nava 20	0.00	0.00	1329.00	55.38
		Nava 21	0.00	0.00	11450.00	477.08
15	17.02.2016	Nava 22	0.00	0.00	1329.00	55.38
		Nava 23	0.00	0.00	23450.00	977.08
16	18.02.2016	Nava 24	0.00	0.00	1200.00	50.00
		Nava 25	0.00	0.00	35450.00	1477.08
17	19.02.2016	Nava 26	0.00	0.00	47450.00	1977.08
18	22.02.2016	Nava 27	0.00	0.00	482.00	20.08
19	23.02.2016	Nava 28	0.00	0.00	850.00	35.42
20	25.02.2016	Nava 29	29505.00	1229.38	0.00	0.00
21	26.02.2016	Nava 30	45005.00	1875.21	0.00	0.00
22	27.02.2016	Nava 31	52732.00	2197.17	0.00	0.00
23	28.02.2016	Nava 32	1418.00	59.08	0.00	0.00
		Nava 33	100.00	4.17	0.00	0.00
Total			152490.00	6353.75	134779.00	5615.79
Medie			6630.00	276.25	5859.96	244.16

În urma corelării amănunțite a datelor din cele două terminale maritime (Anexele 2-5) cu rezultatele obținute cu ajutorul algoritmilor realizați în C++ pentru care am calculat timpul de așteptare FIFO și LIFO (Anexa 1) au rezultat următoarele diagrame:

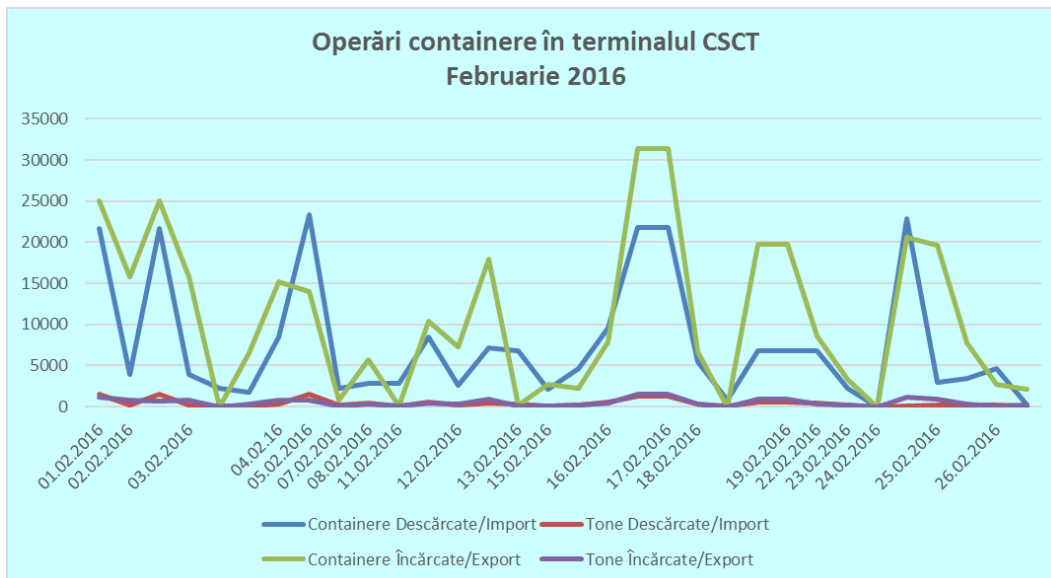


Fig. 3.2. Analiza operărilor de containere în terminanul maritim CSCT

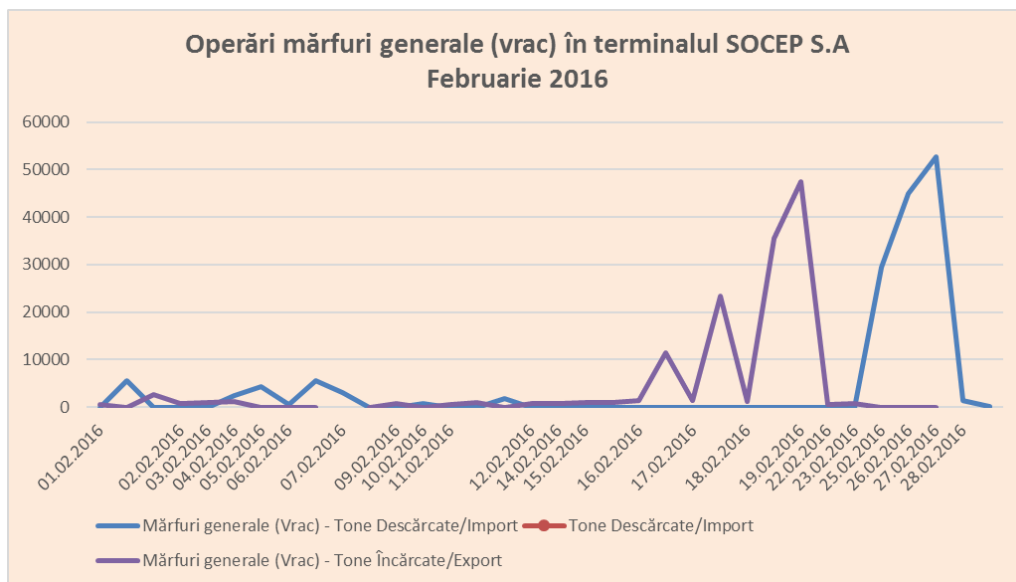


Fig. 3.3. Analiza operărilor de mărfuri generale în terminalul maritim SOCEP S.A

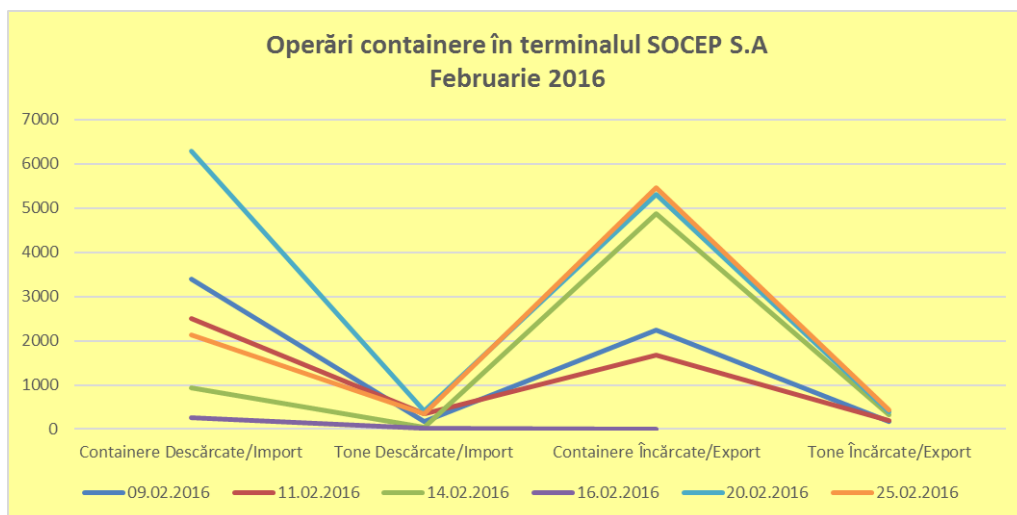


Fig. 3.4. Analiza operărilor de containere în terminalul SOCEP S.A

Pentru elaborarea acestor calcule în cadrul modelului matematic M/G/1 am elaborat un algoritm de programare în C++ cu ajutorul căruia am calculat timpii de așteptare, cât și inversele acestor funcții prin transformata Laplace-Stieltjes.

Programul cu care au fost făcute calculele a fost realizat în limbajul C++. Interfața acestuia este de tip consolă pentru a simplifica codul sursă la esența rezolvării problemei propuse. Din același motiv au fost integrate într-un singur executabil toate cele patru variante de calcul.

La pornirea aplicației este afișat un meniu text pentru selectarea metodei de calcul dorite. Utilizatorul poate selecta astfel funcția de repartiție ce va fi utilizată în continuare pentru calcule:

Funcții de repartiție:

1 = Repartiție uniformă

2 = Repartiție exponențială

3 = Repartiție Erlang

4 = Repartiție Gamma

Funcția de repartiție utilizată (1-4): _

În funcție de funcția de repartiție aleasă, utilizatorul va trebui să introducă la solicitarea aplicației valori pentru parametrii specifici funcției alese.

Astfel, în cazul repartiției uniforme și a celei exponențiale trebuie introduse valori pentru a^* , b , x , s și una până la cinci valori pentru a .

Dacă este aleasă repartiția Erlang vor trebui introduse valori pentru a^* , b , x , $lambda$, k , s și una până la cinci valori pentru a .

În cazul selectării repartiției Gamma utilizatorul va introduce valori pentru a^* , b , x , $lambda$, $alfa$, s și una până la cinci valori pentru a .

Ca urmare a parcurgerii algoritmului de calcul aplicația afișează rezultatele în format tabelar pentru valorile specificate ale parametrului a și ale funcțiilor $omega(a)$, $OMEGA(a)$, respectiv $omega2(a)$ și $OMEGA2(a)$ conform funcției de repartiție selectate.

În final, utilizatorul poate relua procesul sau poate închide aplicația.

În urma cercetărilor făcute atât în cadrul portului maritim Constanța, unde am analizat buletinele informative pentru activitatea navelor în cadrul terminalelor maritime în interval de o lună (februarie 2016), cât și în simulările făcute în lucrare am constatat că timpul de așteptare al unei nave se poate reduce considerabil, cea mai indicată repartiție fiind cea exponențială.

3.4. Concluzii la capitolul 3

Folosind modelul matematic M/G/1 și patru funcții de repartiție din cadrul acestui model, au fost validate unele cazuri concrete care se încadrează în activitatea portuară din cadrul terminalelor maritime.

Pentru aceasta au fost elaborate programe care vizează simularea statistică:

- pentru timpul de așteptare realizat cu servire în ordine inversă (LIFO) pentru repartiția uniformă, repartiția exponențială, repartiția Gamma și repartiția Erlang;
- pentru timpul de așteptare realizat în cazul în care servirea este în ordine directă (FIFO) pentru repartiția uniformă, repartiția exponențială, repartiția Gamma și repartiția Erlang.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Lucrarea de față contribuie cu rezultate inovatoare cu privire la aplicarea teoriei așteptării și implicit a modelelor de așteptare în portul maritim Constanța. Ținând cont de specificul modelelor de așteptare și de realitatea din port, rezultatele cercetării contribuie la eficientizarea calității și cantității operărilor din cadrul unui terminal maritim. [41], [42].

Contribuții originale

1. A fost identificată și argumentată aplicabilitatea modelelor matematice moderne ale teoriei așteptării în procesul tehnologic actual al portului maritim Constanța. [80], [82], [83]

2. A fost formalizat și analizat timpul de așteptare a navelor în cadrul terminalelor maritime. [86]

3. Au fost elaborați algoritmi de calcul pentru timpul de așteptare. [81], [105]

4. Au fost efectuate modelări numerice pentru diverse legi de repartiție aplicate în modelul M/G/1. [88]

5. Algoritmii elaborați au fost realizați în limbajul de programare C++ și utilizați în port, analizând activitatea a două terminale. [103], [104], [105]

Drept urmare, au fost generalizate unele rezultate cunoscute în acest domeniu, scoțând în evidență noi posibilități de aplicare implicate în studiu, introducând noi modele/distibuții probabiliste pentru îmbunătățirea timpului de așteptare din cadrul unui terminal maritim. [83], [84]

O parte din rezultatele obținute în teză pot servi ca suport pentru continuarea cercetării științifice din domeniul Teoriei Așteptării, și, de asemenea, pot fi aplicate în alte domenii: Matematici Actuariale, Teoria Riscului, Teoria Probabilităților, rezultate ce pot fi modelate cu ajutorul timpului de așteptare. [85], [86]

Problema științifică importantă soluționată rezidă în determinarea unor timpi de așteptare mai mici a navelor în cadrul terminalelor maritime, rezultate obținute atât în urma analizei modelelor de așteptare, dar și a funcțiilor de repartiție pentru aceste modele.

Rezultatele teoretice prezentate sunt date de câteva modele de așteptare, funcțiile lor de repartiție, timpul de așteptare și inversa acestei funcții, obținută prin transformata Laplace.

Implementarea rezultatelor teoretice din teză pe anumite modele de așteptare a permis calculul timpului de așteptare și inversa acestei funcții pentru navele aflate într-un terminal maritim.

Acestea pot fi, cu mici modificări, aplicate și asupra unor modele neabordate din punct de vedere matematic.

Perspective de dezvoltare ulterioară a rezultatelor cercetării

Din punctul nostru de vedere, rezultatele obținute sunt remarcabile prin faptul că aplicarea modelului matematic M/G/1 și calcularea timpului de așteptare în cadrul terminalelor maritime este relevantă. [79], [80], [83] Această lucrare de cercetare deschide calea unor viitoare perspective de cercetare și dezvoltare a domeniului conex teoriei așteptării, ce transcend domeniul matematicii aplicate, cu privire la folosirea timpului de așteptare, astfel:

1. implementarea algoritmilor realizați în C++;
2. reducerea considerabilă a timpului de așteptare;
3. abordarea aspectelor legate de prelucrarea statistică a datelor ce vizează funcționarea activității în cadrul unui terminal maritim;
4. echiparea terminalelor cu mai multe dane și mai multe mijloace fixe pentru a se putea realiza manevrele de operare într-un timp cât mai scurt.

Teza conține și o componentă practică: a fost realizat un cod sursă în C++ atât în vederea validării unor teoreme și algoritmi cu aplicație în teoria așteptării, cât și a simulării statistice a timpilor de așteptare calculați pentru patru funcții de repartiție și pentru două tipuri de servire (FIFO și LIFO). De asemenea, au fost analizate din punct de vedere statistic și prelucrate date reale din portul maritim Constanța, respectiv buletine informative și programe de nave, din arhivele Autorității Navale Române, terminalelor DP World Constanța CSCT și Socep S.A. [80], [81], [82]

În cadrul tezei am arătat că îmbunătățirea randamentului unui port este un proces permanent și că în prezent randamentul manipulării încărcăturilor este afectat de factorii următori care ar trebui – în măsura în care este posibil – să fie rezolvați în viitor:

1. Numărul mare de nave mici și vechi care încarcă cherestea și fier vechi, cu o productivitate zilnică relativ scăzută;
2. Nave de cherestea cu destinație Damietta/Egipt care iau la bord tractoare (încărcarea și procedurile de amarare sunt dificile);
3. Viteza de încărcare a navelor de cherestea este determinată de viteza de scoatere din depozitele vechi; posibilități scăzute de depozitare a mărfurilor pe chei (tractoare, remorci și macarale mobile);
4. Restricțiile de pescaj duc la aglomerarea mărfurilor ceea ce duce la mărirea duratelor de așteptare a navelor, la creșterea costurilor de deplasare și mărește numărul operațiilor de manipulare a mărfurilor;

5. În perioadele de recoltare a cerealelor se produce aglomerarea căilor de acces și apar interferențe între operațiile de preluare/predare și cele de transfer pe chei;

6. Cifrele planificate privind randamentul sau cantitatea minimă de mărfuri garantată pot fi susținute în prezent doar de un număr mic de operatori; condițiile existente de închiriere nu permit operatorilor să controleze randamentul;

7. Capacitățile financiare, tehnice și operaționale limitate ale operatorilor de terminale mai mici; nu se aplică întotdeauna o scară economică de gestionare și exploatare a terminalelor;

8. Principiile de zonare a portului și cele de utilizare a terenului nu sunt aplicate pentru o perioadă lungă de timp; un număr mare de parcele mici sunt închiriate sectorului privat.

Fiind o teză de doctorat ce tratează modelarea timpului de așteptare aplicat în portul maritim Constanța, autorul vă mulțumește pentru orice sugestie sau recomandare ce poate duce la îmbunătățirea, perfecționarea sau continuarea cercetării realizate.

BIBLIOGRAFIE

1. Afanasieva L. B.. O suşeslvovanii predelnogo raspredelcnia v sistemah maccovogo obslujioania s ogranicientm vremencrn prebivania. Teor. Veroiatn. Primen., 10, 3, 1965, p. 570-578.
2. Alfa S. A. Queueing Theory for Telecommunications. London: Springer, 2010. 238 p.
3. Ancker C. J., Gafarian A. V. Queueing with multiple Poisson inputs and exponential service. Opns. Res., 9, 1961, p. 1-3.
4. Asmussen S. Ruin Probabilities, volume 2 of Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. London: World Scientific, 2000, 385 p.
5. Asmussen S. Applied Probability and Queues. New York: Springer-Verlag, 2003, 438 p.
6. Asmussen S., Bladt M. Renewal theory and queueing algorithms for matrix-exponential distributions. In: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Matrix-analytic methods in stochastic models. Dekker, New York, 1997, vol. 183, p. 313-341.
7. Bailey N. T. J. On queueing processes with bulk service. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 16, 1954, p. 80-87.
8. Bailey N. T. J. A continous lime treatment of a simple queue using generating functions. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 16, 1954, p. 288-291.
9. Bailey N. T. J. Some further results in the non-equilibrium theory of a simple queue. J. Roy. Statist. Soc. B, 19, 1957, p. 326-333.
10. Baker R. H., Mahler H. R. Studies on Ihc Mechanism of Enzyme-Catalyzed Oxidation Reduction Reactions. Methods for Characterization of the Mechanism for Two-Substrate Systems. Biochemistry, 1, 1, 1962, p. 35-10.
11. Balea P., Muja A., Tăutu P. Un model de aşteptare pentru reacţia enzimă-substrat. Analele Univ. Bucureşti, XX, 1, 1971, p. 19-25.
12. Barrer D. V. Queueing with impatient customers and indifferent clerks. Opns. Res., 5, 5, 1957, p. 614-649.
13. Barrer D. V. Queueing with impatient customers and ordered service. Opns. Res., 5, 5, 1957, p. 650-656.
14. Bartholomay A. E. Stochastic models for chemical reactions. Bull. Math. Biophys., SO, 1958, p. 175-182.
15. Bartholomay A. E. On the linear birth and death processes, of biology as Markoff chains. Bull. Math. Biophys. 20, 1958, p. 97-118.
16. Bartholomay A. E. Bartholomay A. E. A stochastic Approach to Statistic Kinetics with

- Application to Enzyme Kinetics. *Biochemistry*, 1, 2, 1962, p. 223-230.
17. Bartholomay A. E. The general catalytic queue process, in J. Gurland (cd): *Stochastic Models in Medicine and Biology*. Univ. Wisconsin Press, Madison, 1964, p. 101-142.
 18. Basarin R. G. O predelnom raspredelenii vremeni zaniatosti polnodostupnovo pucika linii. *Teor. Veroiat. Primen.*, V, 2, 1950, p. 216-252.
 19. Basarin R. G. O slojnih sistemah masovogo obslujivanja c nescolkimi conecinimi ocerediami i neterpelivimi zaiavcami. *Kibernetica-na slujbu komunizmu*, 2, M -L., Ed. Energhia (1964) p. 274-302.
 20. Bejenari D. Numerical solutions for the multidimensional Kendall equation using PH distribution. In: *Abstracts of the Mathematics & Information Technologies: Research and Education*. Chisinau: USM, 2011, p. 7-8.
 21. Beliaev I. K. Predelnaia teorema dlia redeiuscih potohov. *Teor. Veroiat. Primen*, VII, 2, 1963, p. 175-184.
 22. Benderschi O. *Analiza sistemelor de așteptare cu priorități și trafic critic*. Teză de doctor în științe fizico-matematice. - Chișinău, 2009.
 23. Benes V. E. *General stochastic processes in the theory of queues*. Addison Wesley Publishing, Co., Massachusetts, 1963, 280 p.
 24. Bharucha-Reid A. T. *Elements of Markov processes and their applications*. Mc. Graw-Hill 1960, 468 p.
 25. Bodino G. A., Brambilla F. *Teoria della code*. Milano, 1959, 219 p.
 26. Boon M., Adan I., Boxma O. A two-queue polling model with two priority levels in the first queue. In: *Proceedings of the 3rd International ICST Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools*. 2010, vol. 67(6), p. 468-484.
 27. Borel. É. Sur l'emploi du théorème de Bernoulli, pour faciliter le calcul d'un infinité de coefficients. Application au problème de l'attente à un quichet. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, 214, 1942, p. 452-456.
 28. Borovkov A. Necolorie predelnie teoremie masovogo obslujivaniia. *Teor. Veroiath. Primen*, IX, 4, 1964, p. 608-625 și X, 3, 1965, p. 409-436.
 29. Box G. E. R., Tiao G. C. A change in level of a non-stationary time series. *Biometrika*, 52, 1965, p. 181-192.
 30. Boxma O., Van der Wal J., Yechiali U. Polling with batch service. In: *Stochastic Models*. 2008, vol. 24(4), p. 604-625.
 31. Burke P. J. The Output of a Queueing System. *Opus, Res.*, 4, 1956, p. 699-704.

32. Champernowne D. G. An elementary method of solution of the queueing problem with a single server and constant parameters. *J. Roy. Statist. Soc, Ser. B*, 18, 1956, p. 125-128.
33. Chang W. Preemptive Priority Queues. *Opns, Res*, 18, 1965, p. 820-827.
34. Chung K. L., Fuchs W. H. J. On the distribution of values of sums of random variables. Four papers on probability. *Mem. Amer. Math. Soc*, 6, 1950, p. 1-12.
35. Ciucu G. Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică. Ed. Did. Ped., București, 1963.
36. Clarke A. B. A Waiting line process of Markov type. *Ann. Math. Statist.*, 27, 1956, p. 452-459.
37. Cobham A. Priority Assignment in waiting line problems. *J. Opns, Res. Soc. Am.*, 2, 1954, p. 70-76.
38. Cohen W. On the Fundamental Problem of Telephone Traffic Theory and the Influence of Repeated Calls. *Philips Telecommun. Rev.*, 18, 1957, p. 49-100.
39. Conolly B. W. The Busy Period in relation to the queueing process $G1/M/1$, *Biometrika*, 46, 1959, p. 246-251.
40. Conolly B. W. The busy period in relation to the single server queueing system with general independent arrivals and Erlangian service times. *J. Roy, Statist. Soc*, 22, 1960, p. 89-96.
41. Costea A., Țicu R. I. Descartes' rule of signs. *Analele Universității Maritime Constanța, România*, 2011, Year XIII, vol 16, ISSN 1582-3601, p. 225-228.
42. Costea A., Țicu R. I., Ion L., Mishkoy Gh. The role of the traffic coefficient in the analysis of information processes in a seaport. *Analele Universității Maritime Constanța, România*, 2015, Year XVI, vol 23, ISSN 1582-3601, p. 135-138.
43. Cox D. R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proc Cambr. Phil. Soc*, 51, 3, 1955, p. 433-441.
44. Cox D. R., Smith W. L. *Queues*. Methuen Com. London, 1961, 180 p.
45. Crommelin C. D. Delay probability formulas when the holding times are constant. *Post Office Elect. Eng. J.*, 25, 1932 p. 41-50.
46. De Baun R. M., Katz S. An approximation to distributions, of summed waiting times. *Opns. Res.*, 7, 6, 1959.
47. De Cicco H. Not on an application of four-moment inequalities to a problem in queues. *Tehno-metrics*, 7, 3, 1965.
48. Dînkîn E. B. *Markovskie proțessi*. Fizmatgiz, Moskva, 1963.

49. Deng Y., Tan J. Priority queueing model with changeover times and switching threshold. In: J. Appl. Probab. 2001, vol. 38(A), p. 263-273.
50. Dîncin E. B. Obscie granicine uslovia dlea markovskih proţessov so scetnim mnojestvom sostoianii. DAN SSSR, 172, 1967, p. 258-261.
51. Dobrin V. Elemente de teorie a deservirii în masă. Ed. Militară, Bucureşti, 1969, 240 p.
52. Doig, A. A. Bibliography on the theory of queues. Biometrika, 44, 3-4, 1957, p. 490-514.
53. Downton F. Waiting time in bulk service queues. J. Roy, Statist. Soc. Ser. B., 17, 1955, p. 256-262.
54. Erlang, A. The theory of probabilities and telephone conversations. In: New Journal for Mathematics. 1909, vol. 20, p. 33-39.
55. Fabens A. I. The solution of queueing and inventory models by semi-Markov processes. J. Roy, Statist. Soc. B, 23, 1961, p. 113-127.
56. Feller W. On boundary conditions for the Kolmogoroff differential equations. Ann. Math., 65, 1957, p. 527-570.
57. Finch P. D. Balking in the queueing system G1/M/1. Acta Math. Acad. Sei. Hung., 10, 1959, p. 241-247.
58. Finch P. D. The Output Process of the Queueing System M/G/1. J. Roy, Statist. Soc, Ser. B, 21, 2, 1959, p. 375-380.
59. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. Introduction to Queueing Theory. Second Edition Revised and Supplemented, Birkhiiuser Boston, 1989, 315 p.
60. Hasofer A. M. On the integrability, continuity and differentiability of a family of functions introduced by L. Takacs. Ann. Math. Statist., 34, 1963, p. 1045-1049.
61. Hasofer A. M. On the single-server queue with non-homogeneous Poisson input and general service times. J. Appl. Prob. 1, 1964, p. 369-384.
62. Hawkes G. A. Queueing for gaps in traffic. Biomctrika, 52, 1 și 2, 1965, p. 79-86.
63. Heathcote C. R. On the queueing process M/G/1. Ann. Math. Statist. 32, 1961, p. 770-773.
64. Heathcote C. R. The time-dependent problem for a queue with preemptive priorities. Opns. Res., 7, 1, 1951,. Ivo Adan, Jacques Resing. Queueing theory. 2002, p. 670-680.
65. Kendall D. G. Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by the „im-bedded” Markov-chain. Ann. Math. Statist., 24, 1953, p. 338-354.
66. Kendall D. G. Some recent work and further problems in the theory of queues, Teor. Veroiat. Primen, 9, 1964, p. 1-13.
67. Kendall D. G., Reuter G. E. H. The calculation of the ergodic projection for Markov chains and processes with a countable infinity of states. Acta Math. 97, 1957, p. 104 -143.

68. Kendall D. G., Reuter G. E. H. On the characteristics of the general queueing process with application to random walks. *Ann. Math., Statist.*, 27, 1, 1956, p. 147-161.
69. Krieger Udo R., Bejenari D., Mishkoy Gh. Matrix algorithm for solving Kendall equation in Polling models. In: *Proceedings of the International Conference on Information Technologies, Systems and Networks*. Chişinău: ULIM, 2010, p. 95-102.
70. Lee A. M., Longton P. A. Queueing processes associated with airline passenger check-in, *Operational research Quarterly*, 1959.
71. MacPhee I., Menshikov M., Petritis D., Popov S. A Markov chain model of a polling system with parameter regeneration. In: *Annals of Applied Probability*, vol.17(5/6), 2007, p. 1447-1473.
72. Mihoc Gh., Ciucu G. Unele probleme ale teoriei aşteptării. În *Probleme actuale ale matematicii*. Ed. Did. Ped. Bucureşti, 1964, p. 3-102.
73. Mihoc Gh., Firescu D. Generalizarea unor procese stochastice. *Com. Acad. R.P.R.*, 12, 1962, p. 773-781. Miller R. G. A. Contribution to the theory of bulk queues. *J. Roy, Statist. Soc. Ser. B*, 21, 1959, p. 320-337.
74. Miller R. G. A. Priority queues. *Ann. Math. Statist.*, 31, 1, March, 1960, p. 86-106.
75. Miller A. J. Road traffic flow considered as a stochastic process. *Proc. Comb. Phil. Soc.* 58, 1962, p. 312-324.
76. Mişcoi Gh., Bejenari D. Algoritmi numerici pentru perioada de ocupare în modele exhaustive Polling. În: *Analele Universităţii Libere Internaţionale din Moldova, Seria Economie*. Chişinău: ULIM, 2010, vol. 10, p. 54-63.
77. Mişcoi Gh., Bejenari D., Usatfi L. Modelarea perioadei de ocupare şi a repartiţiei şirului de aşteptare pentru sisteme Polling cu servire exhaustivă. În: *Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţională "Modelare Matematică, Optimizare şi Tehnologii Informaţionale"*. Chişinău: Evrica, 2010, p. 168-176.
78. Mişcoi Gh., Benderschi O. Cu privire la calculul intensităţii de trafic in sistemele de aşteptare generalizate. În: *Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţională "Modelare Matematică, Optimizare şi Tehnologii Informaţionale"*. Chişinău: Evrica, 2008, p.167-174.
79. Mişcoi Gh., Ţicu R. I., Costea A. Distribution rules in seaport activities modeling. *Analele Universitaţii Maritime Constanţa, România*, 2012, Year XIII, vol 17, p. 211-212.
80. Mişcoi Gh., Ţicu R. I., Costea A. Application of some performance characteristics of the queueing Theory for improvement of seaport activities. the 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2012, p. 165-166.

81. Mişcoi Gh., Bejenari D., Mitev L., Țicu R. I., Costea A. Algoritmi numerici cu aproximații successive în soluționarea caracteristicilor modelelor exhaustive Polling. Conferința științifică internațională “Strategii de dezvoltare socio-economică a societății în condițiile globalizării”, Universitatea Liberă Internațională din Moldova, Chișinău, 15-16 octombrie 2012, p. 321-328.
82. Mişcoi Gh., Costea A., Țicu R. I. A modelling system for seaport activities. the 21 th conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2013, 19-22 september 2013, Bucharest , România, p. 66.
83. Mişcoi Gh., Costea A., Țicu R. I. Aplicarea sistemului de așteptare cu o singură linie în portul maritim. Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Conferința internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”, Chișinău, Republica Moldova, p. 142-146.
84. Mişcoi Gh., Țicu R. I. Metode de colorare si aplicarea ei in cercetarea modelelor fenomenelor de așteptare. Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Conferința internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”, Chișinău, p. 99-106.
85. Mişcoi Gh., Costea A., Țicu R. I. Modelarea activității terminalului maritim în baza coeficientului de trafic. Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Conferința internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”, Chișinău, Republica Moldova , p. 242-252.
86. Mişcoi Gh., Țicu R. I., Costea A., Pomazan C. Evaluation algorithms of the waiting time of ships in a seaport. International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education, MITRE 2016, 24-26 iunie 2016, Chișinău, Republica Moldova, p. 45-46.
87. Mishkoy Gh., Bejenari D., Mitev L., Țicu I. Numerical solutions of Kendall and Pollaczek-Khintchin equations for ehhaustive Polling systems with semi- Markov delays. Computer Science Journal of Moldova, V.24, N.2(71) , 2016, p. 255-272.
88. Mişcoi Gh., Țicu R. I., Costea A., Pomazan C. Algorithms of evaluation of the waiting time and the modelling of the terminal activity based on the traffic coefficient of ships in the seaport. Ponte Academic Journal, August 2016, Volume 72, Issue 8, Factor impact: 0.724, p. 237-248.
89. Mishkoy Gh., Bejan A., Benderschi O. Evaluating of the traffic coeficient in priority queueing systems. In: Computer Science Journal of Moldova, 2008, vol. 16(2), p. 269-285.

90. Mishkoy Gh., Bejenari D., Klimenok V. Some generalizations of Kendall and Pollaczek-Khintchin equations for Polling systems. In: Abstracts of the 19th edition of the Annual Conference on Applied and Industrial Mathematics. România, Iași, 2011, p. 72.
91. Mishkoy Gh., Bejenari D., Mitev L. Numerical algorithms regarding Polling systems with exhaustive service. In: Abstracts of the 19th edition of the Annual Conference on Applied and Industrial Mathematics. România, Iași, 2011, p. 72-73.
92. Moniroll E. W., Shuler K. E. Studies in nonequilibrium rate processes. J. Chem. Phys, 261, 3, March, 1957, p. 454-464.
93. Muja A., Balea P. Un model de așteptare cu trei stații in „serie” pentru procesul de transformare a glicogenului în glucoză. An. Univ. București, Ser. Șt. Nat. Mat. Mec. XVI, 2, 1967, p. 121-128.
94. Naor P. Some problems of machine interference. Proc. First Intern Conf. Oper. Res. Oxford, 1957, p. 147-164.
95. Neuts M. Structured stochastic matrices of the M/G/1 type and their applications. Volume 5 of Probability: Pure and Applied. New York: Marcel Dekker Inc., 1989.
96. Shomrony M. Vlasiou M. M/G/1 Infinity Polling Systems with Random Visit Times. In: Probability in the Engineering and Informational Sciences, 2008, vol. 22(1), p. 212-245.
97. Takagi H. Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press, 1986, 197 p.
98. Takagi H. Queueing analysis. Vol. 1, North Holland, 1991, 487 p.
99. Takagi H. Queueing analysis of polling models. In: ACM Comput., 1988, vol.20, p. 5-28.
100. Takagi H. Queueing analysis of polling models: and update. In: Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems, 1990, p. 267-318.
101. Takagi H. Queueing analysis of polling models: progress in 1990-1994. In: Frontiers in Queueing Probab. Stochastics Ser., CRC, 1997, p. 119-146.
102. Andrew S. Tanenbaum. Distributed operating systems. Prentice Hall, 1995 - Computers, 614 p.
103. Țicu R. I. Queueing models in the port activity. Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50th anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science „IMCS-50”, Chișinău, 19-23 august 2014, p. 414-417.
104. Țicu R. I. Mathematical models with S queueing stations in series. International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education, MITRE 2015, 2-5 iulie 2015, Chișinău, Republica Moldova, p. 83-84.

105. Țicu. R. I. Algoritmi de modelare a timpului de așteptare în cazul sistemului de așteptare generalizat, aplicații în portul maritim Constanța. Studia Universitatis Moldaviae, Universitatea de Stat a Moldovei, nr. 2 (92), 2016, p. 60-66.
106. Van der Mei R., Winands E. Heavy traffic analysis of polling models by mean value analysis. In: Performance Evaluation, 2008, vol. 65(6-7), p. 400-416.
107. Van Vuuren M., Winands E. Iterative approximation of k-limited polling systems. In: Queueing Systems, 2007, vol. 55(3), p. 161-178.
108. Vishnevsky V., Mishkoy Gh., Semenova O. New models and methods to study Polling Systems. In: Proceedings of the International Conference Distributed Computer and Communication Networks. Sofia, Bulgaria, 2009, p. 79-85.
109. Vlasiou M., Yechiali U. M/G/∞ polling systems with random visit times. In: Probability in the Engineering and Informational Sciences, 2008, vol. 22(1), p. 212-245.
110. Yue W., Takahashi Y., Takagi H. Advances in Queueing Theory and Networks Applications. Springer, 2009.
111. Вишнеvский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. Москва: Техносфера, 2003, 512 с.
112. Вишнеvский В., Лаконцев Д., Семенова О., Шпилев С. Модель системы поллинга для исследования широкополосных беспроводных сетей. В: Автоматика и телемеханика, 2006, No.12, с. 123-135.
113. Вишнеvский В., Семенова О. Системы поллинга: Теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. Москва: Техносфера, 2007, 310 с.
114. Вишнеvский В.М., Семенова О.В., Шпилев С.А. Дуплексная система циклического обслуживания смешанных очередей. В: Автоматика и телемеханика, 2009, No 12, с. 121-123.
115. Волковинский М., Кабалеvский А. Анализ приоритетных очередей с учетом времени переключения. Москва: Энергоиздат, 1981, 184 с.
116. Гнеденко Б.В. и др. Приоритетные системы обслуживания. Москва: Изд-во Московского Университета, 1973, 447 с.
117. Гриза Ю. , Мамонова А. Флуктуации процесса обслуживания в сети с полумарковским (импульсным) входным потоком. В: Международный научно-теоретический журнал “Кибернетика и Системный Анализ”. Киев, Украина, 2010, No. 6, с. 166-170.
118. Климов Г. Стохастические системы обслуживания. Москва: Наука, 1966, 243 с.

119. Климов Г.П., Мишкой Г.К. Приоритетные системы обслуживания с ориентацией. - Москва: Изд-во Московского Университета, 1979, 128 с.
120. Мишкой Г.К., Рыков В.В., Джордано С., Бежан А.Ю. Многомерные аналоги уравнения Кендалла для приоритетных систем: В: Вычислительные аспекты, Автоматика и телемеханика Москва: 2008, н. 6, с. 82-95.
121. Мишкой Г.К., Обобщенные приоритетные системы, Кишинев, Из-во. А. Н. Молдовы, 2009, 200 с.
122. Назаров Л.В. Система обслуживания с ориентацией. В: Изв. АН. СССР. Техн. кибернет. 1981, н. 4, с. 131-135.
123. Рыков В.В. К анализу поллинг-систем. В: Автоматика и телемеханика, 2008, н. 6. с. 90-114.11.
124. Newton S.E., Kawabata Y., Smith R. The Balance of Container Traffic amongst European Ports (Final Report), Zoetermeer, Netherlands, October 2011, <http://webshop.panteia.nl/en/Panteia-NEA> (Accesat, 25 aprilie, 2013).
125. DP WORLD Constanța, <http://www.dpworld.ro/>, (Accesat, 03 mai, 2014).
126. MC in Strategic Partnership with Grup Maritime, Spain, <http://worldmaritimeneews.com/archives/120314/mc-in-strategic-partnership-with-grup-maritim-spain/> (Accesat, 17 iulie, 2014).
127. Constanța South Container Terminal, <http://www.practicanavala.ro/csct.html>, (Accesat, 15 iulie, 2014).
128. Autoritatea Navală Română, <http://portal.rna.ro/>, (Accesat, 03 mai, 2013).
129. C.N. „Administrația Porturilor Maritime” S.A. Constanța <http://www.portofconstantza.com/apmc/index.jsp>, (Accesat, 07 mai, 2013).
130. Socep Constanța, <http://www.socep.ro/en/>, (Accesat, 25 iulie, 2015).
131. World Maritime News, <http://worldmaritimeneews.com>, (Accesat, 16 iulie, 2014).
132. Cursuri online, <http://www.universitatea-cantemir.ro/CursuriRei/documente/TEMA%2010%20-%20TESTE%20DE%20CONCORDANTA%20-%20NOTE%20DE%20CURS.pdf> (Accesat, 19 martie, 2013).
133. Administrația Canalelor Navigabile, <http://www.acn.ro/index.php/ro/regulament-de-navigatie>, (Accesat, 05 septembrie, 2015).
134. Tanenbaum Andrew S. Modern Operating Systems, 2009, <http://stst.elia.pub.ro/news/SO/Modern%20Operating%20System%20-%20Tanenbaum.pdf>, (Accesat 02 februarie, 2013).

135. Master Plan al Portului Constanța întocmit de Consorțiul de consultanță Ernst & Young SRL - INROS LACKNER SE pentru CNAPMC S.A, Contract nr: 4122, din 03.02.2014 decembrie 16, 2014, 294 p.
136. Ziarul Fianciar, <http://www.zf.ro/auxiliar/p-china-shipping-romania-welcome-to-a-new-dimension-10719933/>, (Accesat 06 martie, 2016).
137. China Shippig (Romania) Agency Co. Ltd., <http://www.csromania.ro/>, (Accesat 22 februarie, 2016).

ANEXA 1. SOFTUL ALGORITMILOR ELABORAȚI

```
#include<iostream>
#include<cstdlib>
#include <stdio.h>
#include<math.h>

#define precizie 0.000001
#define pi 3.14159265

using namespace std;

unsigned int a_st, b, x, s, k, lambda, alfa;
char r;
unsigned int fr; // selector functie de repartitie
unsigned int n; // numar de valori pentru a (valori 1-5)
double a[6]; // indexarea se face de la 1 pentru
claritatea codului
double omega[6]; // indexarea se face de la 1 pentru
claritatea codului
double omega2[6]; // indexarea se face de la 1 pentru
claritatea codului
double OMEGA[6]; // indexarea se face de la 1 pentru
claritatea codului
double OMEGA2[6]; // indexarea se face de la 1 pentru
claritatea codului

// intoarce valoarea absoluta a parametrului valoare
double abs(double valoare)
{
    return (valoare>0 ? valoare : -valoare);
}

double fnBeta(double v);

double fnBeta1();

double fnPi(double s, double a);

// calculeaza inversa functiei
double fnInv(double t); //t este punctul in care se inverseaza
functia

int main()
{
```

```

do
{
    system("cls");
    // selectare functie de repartitie utilizata
do
{
    cout<<"Functii de repartitie:"
    <<"-----"
    <<"1 = Repartitie uniforma"
    <<"2 = Repartitie exponentiala"
    <<"3 = Repartitie Erlang"
    <<"4 = Repartitie Gamma"
    <<"Functia de repartitie utilizata (1-4): ";
    cin>>fr;
}
while((fr<1) || (fr>4));

// citire parametri de intrare
cout<<endl<<"a* = ";
cin>>a_st;
cout<<"b = ";
cin>>b;
cout<<"x = ";
cin>>x;
do
{
    cout<<"Numar valori pentru a (1-5): ";
    cin>>n;
}
while((n<1) || (n>5));
for(unsigned int i=1; i<=n; i++)
{
    cout<<"a"<<i<<" = ";
    cin>>a[i];
}
switch(fr)
{
case 3: // repartitie Erlang
    cout<<"lambda = ";
    cin>>lambda;
    cout<<"k = ";
    cin>>k;
    break;
case 4: // repartitie Gamma
    cout<<"lambda = ";
    cin>>lambda;
}
}
}

```

```

        cout<<"alfa = ";
        cin>>alfa;
        break;
    }
    cout<<"s = ";
    cin>>s;

    // calcul omega, OMEGA
    double PI_calculat;
    for(unsigned int i=1; i<=n; i++)
    {
        PI_calculat = fnPi(s, a[i]);
        omega[i] = (1-a[i]*fnBeta1()) +
            a[i]*(1-PI_calculat)/(s+a[i]-a[i]*PI_calculat);
        omega2[i] = (1-a[i]*fnBeta1())*a[i]*s/(s-
a[i]+a[i]*fnBeta(s));
        OMEGA[i]=fnInv(omega[i]);
        OMEGA2[i]=fnInv(omega2[i]);
    }

    // afisare rezultate
    system("cls");
    switch(fr)
    {
    case 1: // repartitie uniforma
        printf("Repartitie uniforma= %2i", s);
        break;
    case 2: // repartitie exponentiala
        printf("Repartitie exponentiala= %2i", s);
        break;
    case 3: // repartitie Erlang
        printf("Repartitie Erlang= %2i= %2i=
%2i",s,lambda,k);
        break;
    case 4: // repartitie Gamma
        printf("Repartitie Gamma= %2i= %2i=
%2i",s,lambda,alfa);
    }
    printf("-----
-----");
    printf("| a* | b | a | x | omega(s) |
OMEGA(s) |");
    printf("-----
-----");
    printf("| %2i | %2i | %5.2f | %2i | %11.7f | %11.7f

```



```

|",
        a_st, b, a[1], x, omega[1], OMEGA[1]);
for (unsigned int i = 2; i<=n ; i++)
{
    printf("|      |      |-----|      |-----|-----|-----|
-----|");
    printf("|      |      | %5.2f |      | %11.7f | %11.7f
|",
        a[i], omega[i], OMEGA[i]);
}
printf("-----
-----");

printf("-----
-----");
printf("| a* | b | a | x | omega2(s) |
OMEGA2(s) |");
printf("-----
-----");
printf("| %2i | %2i | %5.2f | %2i | %11.7f | %11.7f
|",
        a_st, b, a[1], x, omega2[1], OMEGA2[1]);
for (unsigned int i = 2; i<=n ; i++)
{
    printf("|      |      |-----|      |-----|-----|-----|
-----|");
    printf("|      |      | %5.2f |      | %11.7f | %11.7f
|",
        a[i], omega2[i], OMEGA2[i]);
}
printf("-----
-----");

    cout<<"Reluati (d/n)? ";
    cin>>r;
}
while((r=='d')||(r=='D'));
return 0;
}

double fnPi(double s, double a)
{
    double pi_curent = 0, pi_precedent;
    do
    {

```

```

        pi_precedent = pi_curent;
        pi_curent = fnBeta((double)s + a - a * pi_precedent);
    }
    while(abs(pi_curent-pi_precedent)>precizie);
    return pi_curent;
}

double fnBeta(double v)
{
    double rezultat;
    switch(fr)
    {
        case 1: // repartitie uniforma
            rezultat = 1./(b-a_st) * (exp(-v*a_st) - exp(-v*b))/v;
            break;
        case 2: // repartitie exponentiala
            rezultat = (double)b/(v+b);
            break;
        case 3: // repartitie Erlang
            rezultat = pow((double)lambda/(v+lambda), k);
            break;
        case 4: // repartizare Gamma
            rezultat = pow((double)lambda/(lambda+v), alfa);
            break;
        default:
            rezultat = 0;
    }
    return rezultat;
}

double fnBeta1()
{
    double rezultat;
    switch(fr)
    {
        case 1: // repartitie uniforma
            rezultat = (double)(a_st+b)/2;
            break;
        case 2: // repartitie exponentiala
            rezultat = 1./b;
            break;
        case 3: // repartitie Erlang
            rezultat = (double)k/lambda;
            break;
        case 4: // repartitie Gamma
            rezultat = (double)alfa/x;
    }
}

```

```

        break;
    default:
        rezultat = 0;
    }
    return rezultat;
}


double p(double s)
{
    return (1./sqrt(s))*(exp(-1/s));
}

//t este punctul in care se inverseaza functia
double fnInv(double t)
{
    double rezultat = 0;
    unsigned int n = 8;
    double g[9]; // [n+1] = indexare de la 1 pentru claritatea
codului
    double h[9]; // [n+1] = indexare de la 1 pentru claritatea
codului
    double v[9]; // [n+1] = indexare de la 1 pentru claritatea
codului
    unsigned int i, j, jmin, jmax;
    int semn;
    unsigned int n2 = n/2;
    g[0] = 1;
    for(i=1; i<=n; i++) g[i] = g[i-1]*i;

    h[1] = 2/g[n2-1];
    for(i=2; i<=n2; i++) h[i] = exp(n2*log(i))*g[2*i]/(g[n2-
i]*g[i]*g[i-1]);
    semn=-1;
    for(i=1; i<=n; i++)
    {
        v[i]=0;
        jmin=(i+1)/2;
        jmax = (i<n2 ? i : n2);
        for(j=jmin; j<=jmax; j++) v[i] += h[j]/(g[i-j]*g[2*j-i]);
        v[i]=semn*v[i];
        semn=-semn;
    }
    double expr = log(2)/t;
    for(i=1; i<=n; i++) rezultat += v[i] * p(i * expr);
    return rezultat * expr;
}

```

ANEXA 2. MODEL PROGRAM DE ACOSTARE TERMINAL CSCT

 DP WORLD Constanta		Vessels Schedule		09/February/2016
Vessels @ Terminal	Line-Operator	ETC	Berth no	NOTE
MLs @ anchor	Line-Operator	ETB	Berth no	Anchor time
Feeders @ anchor	Line-Operator	ETB	Berth no	Anchor time
Vessels expected- M/L's	Line-Operator	ETA	ETB	Berth no
Sagitta	CMA	14/am	14/am	123
CMA CGM loire	CSC	15/pm	15/pm	123
Vessels expected- Feeders	Line-Operator	ETA	ETB	Berth no
Warnow Porpoise	XCL	09/pm	09/pm	123
Ima	DLO	10/am	10/am	121
Independent Concept	EVG	10/pm	10/pm	122
MSC Sena	MSC	11/am	11/am	122
Michigan Trader	COS	11/pm	11/pm	123
Med Tekirdag	MSC	12/am	12/am	122
BFP Galaxy	CMA	13/am	13/am	122
BFP Melody	EVG	13/am	13/am	123
Green Fast	CMA	13/am	13/am	121
All above as per today status/info/estimation, subject to change, wp, agw				
Remarks:				

ANEXA 3. MODEL BULETIN INFORMATIV – OPERARE NAVE - ANR

Serviciul Exploatare Portuara	BULETIN INFORMATIV Nave sub operare 16 FEB 2016	APMC
--	--	-------------

Dana	Voiaj	Nava	Agent	Pav.	LOA	Sos. Rada	Int.Op	P/R	Dif Marfa	I/E T/C	Prov./ Dest	Qty -tones-	Qty Oper.	Rest	Qty 24h
------	-------	------	-------	------	-----	--------------	--------	-----	-----------	------------	----------------	----------------	--------------	------	------------

CONSTANTA

MARFURI GENERALE

CASA DE EXPEDITII PHOENIX S.A.

008	259785/2	UNI-K	ASK	TOG	100.6	11/02	11/02	BSP/LRS	I	Cherestea	E	-/-	5000	3192	1808	350
022	259691/4	SNOW WHITE	TRM	SIE	93.45	07/02	10/02	BSP/-	I	Cherestea	E	-/-	4000	350	3650	

CHIMPEX SA

059A	260307/2	SAINT FANOURIS	ARI	CYP	167	16/02	16/02	BKW/LRS	D	Uree (Vrac)	I	-/-	18900	0	18900	0
------	----------	----------------	-----	-----	-----	-------	-------	---------	---	-------------	---	-----	-------	---	-------	---

COMVEX SA

082	259648/2	UNIVERSAL BARCELONA	IDU	MTA	190.0	14/02	14/02	MRP/LRS	D	Bauxita	I	.SIERRA LEONE/-	56256	36700	18556	32200
-----	----------	---------------------	-----	-----	-------	-------	-------	---------	---	---------	---	--------------------	-------	-------	-------	-------

CONSTANTA SOUTH CONTAINER TERMINAL SRL

121/122	260194/2	WARNOW PORPOISE	HUB	ABB	166.2	15/02	15/02	BKW/LRS	D	Containere	I	-/-	9559(524)			
										Containere	E	-/-	7878(455)			
123	259487/2	CMA CGM LOIRE	CSA	MTA	300.0	16/02	16/02	BKW/LRS	D	Containere	I	-/-	21792(129 7)			
										Containere	E	-/-	31336(152 6)			

DECIROM SA CTA

023	259759/2	SWIMMER	ASK	TOG	104.0	03/02	04/02	BKW/LRS	I	Cherestea	E	-.EGIPT	320	320	0	
										Cherestea	E	-.EGIPT	2806	2694	112	198
050	259692/2	PRINCESS SARA	MYK	TAN	94.38	02/02	04/02	BKW/-	I	Cherestea	E	-/-	700	411	289	170
										Cherestea	E	-.LIBAN/ EGIPT	930	930	0	0
										Cherestea	E	-/-	2301	1063	1238	

EUROPEAN METAL SERVICES S.A

092	260059/2	BLACK SEA S	SHM	MLD	105.6	10/02	10/02	BSP/LRS	I	Fier Vechi, Span	E	-/-	3800	3500	300	1300
092/093	260240/2	GENERAL	SHM	PW	80.5	14/02	14/02	MRP/LRS	I	Fier Vechi, Span	E	-/-	3500	1200	2300	1200

FRIAL SA

019	260175/2	SOUND OF SEA	LVX	TRK	108.7	14/02	15/02	MRP/LRS	I	Ulei Floarea Soarelui	E	- /.SPANIA	3500	3500	0	1600
053	260141/2	ALYSSA	LMS	SIE	81.39	12/02	12/02	MRP/-	I	Fier Vechi, Span	E	- /.TURCIA	3000	2400	600	1000

MINMETAL SRL

Media - Sistem Neptun	Pag	© APMC
16-FEB-16 06:08:11		

Serviciul Exploatare Portuara	BULETIN INFORMATIV Nave sub operare 16 FEB 2016	APMC
--	--	-------------

Dana	Voiaj	Nava	Agent	Pav.	LOA	Sos. Rada	Int.Op	P/R	D/I Marfa	I/E T/C	Prov./ Dest	Qty -tones-	Qty Oper.	Rest	Qty 24h
------	-------	------	-------	------	-----	--------------	--------	-----	-----------	------------	----------------	----------------	--------------	------	------------

**CONSTANTA
MARFURI GENERALE**

MINMETAL SRL

046	259811/2	SEBA M	NSS	LEB	129.7	05/02	15/02	BKW/LRS	I Grau	E	-/-	3000	0	3000	
									I Orz	E	-/-	3000	0	3000	
									I Porumb	E	-/-	4000	0	4000	
064	260252/2	GEORGE	PHO	PAN	128.0	14/02	14/02	MRP/LRS	D Uree (Vrac)	T	Tuapse/-	10500	5500	5000	4000
065	260229/2	SIDER JOY	NSS	MTA	157.2	15/02	16/02	BKW/LRS	D Cocs Petrol	I	.EGIPT/-	18195	0	18195	
085	259812/2	INTERLINK DIGNITY	NSS/RBK	MAI	180.0	10/02	10/02	BSP/LRS	D Map	T	-/-	21945	2500	19445	
									D Uree (Vrac)	T	-/-	10850	8640	2210	2140

ROTRAC SA CONSTANTA

RO-4	260179/2	CAPTAIN OMAR	NAW	TOG	89.1	12/02	12/02	MRP/-	I Cherestea	DECIROM SA CTA	E	-/.EGIPT	3000	0	3000
------	----------	--------------	-----	-----	------	-------	-------	-------	-------------	-------------------	---	----------	------	---	------

**SCHENKER LOGISTICS ROMANIA SA.-MOL
1SUD**

117	260143/2	BALD	NVL	CKI	126.8	14/02	14/02	MRP/LRS	I Laminate	E	-/.TURCIA	9412	4515	4897	4515
-----	----------	------	-----	-----	-------	-------	-------	---------	------------	---	-----------	------	------	------	------

SILO - PORT SRL

017	260150/2	GOLDEN WISH	ARI	PAN	185.7	14/02	14/02	MRP/LRS	I Floarea Soarelui (Seminte)	MINPEX SA	E	-/-	10000	3500	6500	3500
-----	----------	-------------	-----	-----	-------	-------	-------	---------	---------------------------------	--------------	---	-----	-------	------	------	------

SILOZ AGIGEA

SZAG	259814/2	KASTOR	SOL	ABB	87.9	11/02	11/02	CSS/-	I Grau	E	-/-	1500	900	600	145
									I Porumb	E	-/-	900	900	0	450

SOCEP S.A

036	260278/2	DECENT	PHO	CMB	107.4	15/02	16/02	BKW/-	I Srot	E	-/-	3150				
037	260180/2	JOY BROTHERS	ASK	BZE	107.9	11/02	12/02	BSP/-	I Cherestea	CASA DE EXPEDITII P	E	-/.EGIPT	5000	1329	3671	300
043	259826/2	BRAHMS	SSS	MTA	225	11/02	13/02	MRP/LRS	I Grau	E	-/-	50000	11450	38550	10450	
052	260036/3	INGA A	RSA	TRK	149	15/02	15/02	BKW/LRS	D Containere	I	-/-	3952(429)	261(29)	3691(40 0)	261(2 9)	
									I Containere	E	-/-	3116(421)	0	3116(42 1)	0	

UMEX SA CTA

038	260117/3	SAKARYA	RBK	TRK	170.7	11/02	11/02	BSP/LRS	D Uree (Vrac)	I	.FINLAN DA/-	27500	4000	23500	
039	260035/3	BOSNA	RBK	MAI	167.2	09/02	10/02	BSP/LRS	D NPK	I	.RUSIA/-	22000	11125	10875	
040A	260227/3	IDAHO	EST	LIB	138.5	14/02	15/02	BKW/LRS	I Echipamente	E	-/.KUWEIT				

Media - Sistem Neptun	Pag	© APMC
16-FEB-16 06:08:11		

Serviciul Exploatare Portuara	BULETIN INFORMATIV Nave sub operare 16 FEB 2016	APMC
----------------------------------	--	-------------

Dana	Voiaj	Nava	Agent	Pav.	LOA	Sos. Rada	Int.Op	P/R	D/I Marfa	I/E T/C	Prov./ Dest	Qty -tones-	Qty Oper.	Rest	Qty 24h
------	-------	------	-------	------	-----	--------------	--------	-----	-----------	------------	----------------	----------------	--------------	------	------------

CONSTANTA
MARFURI GENERALE

UMEX SA CTA

044A	259923/5	TANGO MAR	ROS/EST	CKI	111.8	10/02	14/02	MRP/L	I	Sine Cf, Roti Cf	T	.SLOVA CIA/AZEF	4500	500	4000
------	----------	-----------	---------	-----	-------	-------	-------	-------	---	------------------	---	--------------------	------	-----	------

UNITED SHIPPING AGENCY SA

031/032	259946/2	ASTURCON	BWS	MAI	180	08/02	12/02	BSP/LRS	I	Grau	E	-/-	25000	18700	6300	7200
031A	260159/2	VATAN L	PHO	TRK	130.8	12/02	13/02	MRP/LRS	D	Uree (Vrac)	I	Tuapse/-	7300	2000	5300	
032	260171/2	HALKI	USO	MAI	186.4	12/02	15/02	MRP/LRS	I	Porumb	E	-/-	33000			

MIDIA
PRODUSE PETROLIERE

MIDIA MARINE TERMINAL SRL

MD-9A	260172/2	FETEKOZ	BYR	TRK	105.6	15/02	15/02	BKW/LRS	I	Motorina	E	-/-	5000			
MD-9B	260225/2	EVIAPETROL V	BYR	GRC	119.1	15/02	15/02	MRP/LRS	I	Motorina	E	-/-	6400	1600	4800	1600

OCTOGON GAS&LOGISTICS SRL

MD-OCT	260054/2	SIGAS MARGRETHE	IDU	PAN	99.98	10/02	11/02	BSP/LRS	I	LPG	E	-/-	2450	2450	0	750
--------	----------	-----------------	-----	-----	-------	-------	-------	---------	---	-----	---	-----	------	------	---	-----

MANGALIA

Total nave sub operare: 34

Media - Sistem Neptun	Pag	© APMC
16-FEB-16 06:08:11		

ANEXA 4. PROGRAME DE ACOSTARE TERMINAL CSCT

Tabelul A 4.1.

Nave operate în Terminalul CSCT 01.02.2016

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
UASC Jilfar	UASC	03/am			123
AS Mars	CMA	01/23:00			121
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
AS Cypria	CMA		02/am	03/am	121
CMA CGM Elbe	CMA		02/pm	03/am	123
Tim-S	CMA		07/am	07/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
SVS Vega	CMA		02/am	04/pm	121
YM Increment	YML		02/pm	05/am	121
Warnow Porpoise	XCL		05/am	05/am	123
Canopus	MSC		03/am	05/pm	122
MSC Eleonora	MSC		03/am	06/am	121
Pacoba	CMA		06/pm	06/pm	123
Michigan Trader	COS		07/am	07/am	122
Independent Concept	EVG		07/pm	07/pm	123

**Nave operate în Terminalul CSCT
02.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
UASC Jilfar	UASC	02/23:00			123
HS Discoverer	MSC	03/03:00			121
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Elbe	CMA		03/am	03/am	123
Tim-S	CMA		07/am	07/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
YM Increment	YML		02/pm	03/am	123
MSC Eleonora	MSC		03/am	03/pm	121
Warnow Porpoise	XCL		05/pm	05/pm	121
Canopus	MSC		04/am	06/am	122
SVS Vega	CMA		05/am	06/pm	123
Pacoba	CMA		06/pm	06/pm	121
Michigan Trader	COS		07/am	07/am	121
Independent Concept	EVG		07/pm	07/pm	123

Tabelul A 4.3.

**Nave operate în Terminalul CSCT
03.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
AS Cypria	CMA	03/23:30			121
MSC Eleonora	MSC	04/am			123
Ima	DLO	06/pm			125
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Tim-S	CMA		07/am	07/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Warnow Porpoise	XCL		05/pm	05/pm	121
Canopus	MSC		05/pm	06/am	121
SVS Vega	CMA		05/pm	06/pm	123
Pacoba	CMA		07/am	07/am	121
Michigan Trader	COS		07/am	07/pm	121
Independent Concept	EVG		08/pm	08/pm	123

**Nave operate în Terminalul CSCT
04.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Elbe	CMA	05/pm			123
Ima	DLO	06/pm			125
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Tim-S	CMA		07/am	07/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Canopus	MSC		05/am	05/am	121
SVS Vega	CMA		06/pm	06/pm	122
Warnow Porpoise	XCL		06/pm	06/pm	121
Pacoba	CMA		07/am	07/pm	121
Bernard A	EME		08/am	08/am	123
Independent Concept	EVG		08/pm	08/pm	123

**Nave operate în Terminalul CSCT
05.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Elbe	CMA	05/23:30			123
Canopus	MSC	05/19:00			121
Ima	DLO	06/am			125
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Tim-S	CMA		07/am	07/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Pacoba	CMA		06/pm	06/pm	122
SVS Vega	CMA		07/pm	07/pm	122
Warnow Porpoise	XCL		07/pm	07/pm	121
Bernard A	EME		08/am	08/am	122
Independent Concept	EVG		08/pm	08/pm	123
Michigan Trader	COS		10/pm	10/pm	123
MSC Sena	MSC		10/pm	10/pm	122
Med Tekirdag	MSC		10/pm	10/pm	121

**Nave operate în Terminalul CSCT
08.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Bernard A	EME	08/19:00			121
SVS Vega	CMA	08/19:00			123
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Sagitta	CMA		14/am	14/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Warnow Porpoise	XCL		09/pm	10/pm	121
Independent Concept	EVG		10/pm	10/pm	122
Ima	DLO		10/am	10/pm	123
Med Tekirdag	MSC		10/pm	11/am	122
MSC Sena	MSC		11/am	11/am	123
Michigan Trader	COS		11/pm	11/pm	121
BFP Galaxy	CMA		13/am	13/am	121
Green Fast	CMA		13/am	13/am	122

**Nave operate în Terminalul CSCT
09.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Sagitta	CMA		14/am	14/am	123
CMA CGM loire	CSC		15/pm	15/pm	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Warnow Porpoise	XCL		09/pm	09/pm	123
Ima	DLO		10/am	10/am	121
Independent Concept	EVG		10/pm	10/pm	122
MSC Sena	MSC		11/am	11/am	122
Michigan Trader	COS		11/pm	11/pm	123
Med Tekirdag	MSC		12/am	12/am	122
BFP Galaxy	CMA		13/am	13/am	122
BFP Melody	EVG		13/am	13/am	123
Green Fast	CMA		13/am	13/am	121

**Nave operate în Terminalul CSCT
10.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Warnow Porpoise	XCL	wp			123
Ima	DLO	wp			121
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Sagitta	CMA		14/am	14/am	
CMA CGM Loire	CSC		15/pm	15/pm	
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
MSC Sena	MSC		11/am	11/pm (wp)	121
Michigan Trader	COS		11/pm	11/pm	122
Med Tekirdag	MSC		12/am	12/am	123
BFP Galaxy	CMA		13/am	13/am	122
BFP Melody	EVG		13/am	13/am	123
Green Fast	CMA		13/am	13/am	121
SVS Vega	CMA		15/am	15/am	123

**Nave operate în Terminalul CSCT
11.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Warnow Porpoise	XCL	11/16:00			123
Independent Concept	EVG	11/20:00			122
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Sagitta	CMA		14/am	14/am	123
CMA CGM Loire	CSC		15/pm	15/pm	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
MSC Sena	MSC		11/pm	11/pm	123
Med Tekirdag	MSC		12/am	12/am	121
BFP Galaxy	CMA		12/pm	12/pm	122
Green Fast	CMA		13/am	13/am	121
BFP Melody	EVG		14/am	14/am	121
Ima	DLO		14/pm	14/pm	121
Canopus	MSC		14/pm	14/pm	123

**Nave operate în Terminalul CSCT
15.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Ima	DLO	15/16:30			122
Warnow Porpoise	XCL	16/pm			121
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Loire	CSC		16/am	16/am	123
Cape Mayor	CMA		21/am	21/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
YM Increment	YML		17/pm	17/pm	121
SVS Vega	CMA		17/pm	18/am	123
CS Discovery	MSC		17/pm	18/am	121
Med Tekirdag	MSC		19/am	19/am	121
MSC Nita	MSC		20/am	20/am	121
Green Fast	CMA		20/am	20/am	122
Aurette A	EME		20/am	20/am	123
AS Mars	CMA		20/pm	20/pm	122
Independent Concept	EVG		21/pm	21/pm	122

**Nave operate în Terminalul CSCT
16.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Ima	DLO	18/am			125
CMA CGM Loire	CSC	17/pm			123
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Cape Mayor	CMA		22/am	22/am	123
CMA CGM Ural	CMA		22/pm	22/pm	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
YM Increment	YML		17/pm	17/pm	121
SVS Vega	CMA		18/am	18/am	122
CS Discovery	MSC		18/am	18/am	123
Med Tekirdag	MSC		19/pm	19/pm	121
MSC Nita	MSC		20/am	20/am	122
Green Fast	CMA		20/am	20/am	121
Warnow Porpoise	XCL		20/am	20/am	123
Aurette A	EME		20/am	20/pm	121
AS Mars	CMA		20/pm	21/am	122
Independent Concept	EVG		21/pm	21/pm	121
Pacoba	CMA		22/pm	22/pm	121

**Nave operate în Terminalul CSCT
17.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Ima	DLO	18/am			125
CMA CGM Loire	CSC	17/23:00			123
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Cape Mayor	CMA		22/am	22/am	123
CMA CGM Ural	CMA		22/pm	22/pm	123
CMA CGM Magdalena	CMA		25/am	25/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
YM Increment	YML		17/pm	17/pm	121
SVS Vega	CMA		18/am	18/am	122
CS Discovery	MSC		18/am	18/am	123
Med Tekirdag	MSC		19/pm	19/pm	121
MSC Nita	MSC		19/pm	19/pm	122
Warnow Porpoise	XCL		20/am	20/am	123
Green Fast	CMA		20/am	20/am	121
Aurette A	EME		20/pm	20/pm	121
AS Mars	CMA		20/pm	20/pm	122
Independent Concept	EVG		21/pm	21/pm	121
MSC Don Giovanni	MSC		24/am	24/am	121

**Nave operate în Terminalul CSCT
18.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CS Discovery	MSC	19/am			123
SVS Vega	CMA	18/19:00			122
Anaconda 1	IH1	18/19:00			121
Anaconda 2	IH1	18/19:00			121
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Cape Mayor	CMA		23/pm	23/pm	121
CMA CGM Ural	CMA		23/am	23/am	123
CMA CGM Magdalena	CMA		25/am	25/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
AS Mars	CMA		20/am	20/am	121
MSC Nita	MSC		20/am	20/am	122
Med Tekirdag	MSC		20/am	20/am	123
Green Fast	CMA		20/am	20/pm	121
Aurette A	EME		20/pm	20/pm	122
Warnow Porpoise	XCL		21/am	21/am	123
Ima	DLO		22/am	22/am	121
Independent Concept	EVG		22/pm	22/pm	121
MSC Don Giovanni	MSC		24/pm	24/pm	121
Michigan Trader	COS		25/pm	25/pm	121

**Nave operate în Terminalul CSCT
19.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Ural	CMA		23/am	23/am	123
Cape Mayor	CMA		24/am	24/am	121
CMA CGM Magdalena	CMA		25/am	25/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
MSC Nita	MSC		20/am	20/am	121
Med Tekirdag	MSC		20/am	20/am	122
AS Mars	CMA		20/pm	20/pm	123
Aurette A	EME		20/pm	20/pm	121
Warnow Porpoise	XCL		21/am	21/am	123
Ima	DLO		22/am	22/am	121
Independent Concept	EVG		23/am	23/am	121
MSC Don Giovanni	MSC		24/pm	24/pm	121
SVS Vega	CMA		24/pm	25/am	123
Green Fast	CMA		20/am	25/am	123
Michigan Trader	COS		25/pm	25/pm	121

**Nave operate în Terminalul CSCT
22.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Ural	CMA		23/pm	23/pm	123
Cape Mayor	CMA		24/pm	24/pm	121
Adelheid-S	CMA		28/am	28/am	123
CMA CGM Magdalena	CMA		29/am	29/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Independent Concept	EVG		23/am	23/am	121
MSC Nita	MSC		25/am	25/pm	121
Ima	DLO		25/am	25/am	123
MSC Don Giovanni	MSC		25/am	26/am	121
SVS Vega	CMA		25/pm	26/pm	122
Warnow Porpoise	XCL		26/am	26/am	123
Bernard A	EME		25/pm	27/am	121
Med Tekirdag	MSC		26/pm	27/am	122
Michigan Trader	COS		25/pm	27/am	121
Pacoba	CMA		27/am	27/pm	121
BFP Melody	EVG		27/pm	27/pm	122

**Nave operate în Terminalul CSCT
23.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Independent Concept	EVG	23/19:00			121
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Ural	CMA		24/am	24/am	123
Cape Mayor	CMA		25/am	26/am	121
Adelheid-S	CMA		29/am	29/am	121
CMA CGM Magdalena	CMA		29/am	29/am	121
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
MSC Don Giovanni	MSC		25/am	25/am	121
SVS Vega	CMA		25/am	26/am	122
Bernard A	EME		25/pm	26/pm	121
Michigan Trader	COS		26/am	26/pm	122
Warnow Porpoise	XCL		26/pm	26/pm	123
Med Tekirdag	MSC		26/pm	27/am	121
Pacoba	CMA		27/am	27/pm	122
BFP Melody	EVG		27/pm	27/pm	121
Ima	DLO		28/am	28/am	123

Tabelul A 4.17.

**Nave operate în Terminalul CSCT
24.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Ural	CMA	25/pm			123
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Cape Mayor	CMA		25/am	25/pm	123
Adelheid-S	CMA		29/am	29/am	121
Adelheid-S	CMA		29/am	29/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
MSC Don Giovanni	MSC		25/am	25/am	121
Bernard A	EME		25/pm	26/am	121
SVS Vega	CMA		25/pm	26/pm	122
Michigan Trader	COS		26/pm	26/pm	122
Pacoba	CMA		27/am	27/am	121
Warnow Porpoise	XCL		27/pm	27/pm	123
BFP Melody	EVG		27/pm	27/pm	121
Ima	DLO		28/am	28/am	123

Tabelul A 4.18.

**Nave operate în Terminalul CSCT
25.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Ural	CMA	25/21:00			123
MSC Don Giovanni	MSC	26/am			121
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Cape Mayor	CMA		25/pm	25/pm	123
Adelheid-S	CMA		29/am	29/am	121
CMA CGM Magdalena	CMA		29/am	29/am	123
CMA CGM Tage	CSC		03/pm	03/pm	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Bernard A	EME		27/am	27/am	123
Pacoba	CMA		27/am	27/am	121
BFP Melody	EVG		27/pm	27/pm	122
Warnow Porpoise	XCL		27/pm	27/pm	121
Michigan Trader	COS		28/am	28/am	123
Ima	DLO		28/am	28/am	122
MSC Mediterranean	MSC		01/pm	01/pm	123
MSC Perle	MSC		02/am	02/am	121

**Nave operate în Terminalul CSCT
26.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Cape Mayor	CMA	complete			123
Green Fast	CMA	26/22:00			121
SVS Vega	CMA	26/21:00			122
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Magdalena	CMA		29/am	29/am	123
Adelheid-S	CMA		29/pm	29/pm	123
CMA CGM Tage	CSC		04/am	04/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Bernard A	EME		27/am	27/am	121
Pacoba	CMA		27/am	27/am	122
BFP Melody	EVG		27/pm	27/pm	123
Michigan Trader	COS		28/am	28/am	122
Ima	DLO		28/am	28/am	121
Warnow Porpoise	XCL		29/am	29/am	121
MSC Mediterranean	MSC		02/am	02/am	121
MSC Perle	MSC		02/am	02/am	122
YM Increment	YML		02/pm	02/pm	123
Priwall	MSC		03/am	03/am	123
MSC Nita	MSC		03/pm	03/pm	123

**Nave operate în Terminalul CSCT
29.02.2016**

Nave la terminal	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
CMA CGM Magdalena	CMA	29/19:00			123
Nave așteptate la radă	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Adelheid-S	CMA		01/am	01/am	123
CMA CGM Tage	CSC		04/am	04/am	123
AS Cypria	CMA		06/am	06/am	123
Nave mici	Compania de linie	Timpul estimat de operare (ETC)	Timpul estimat de sosire în radă (ETA)	Timpul estimat pentru sosirea la operare (ETB)	Dană
Warnow Porpoise	XCL		02/am	02/am	121
MSC Mediterranean	MSC		02/am	02/am	123
YM Increment	YML		02/pm	02/pm	121
Green Fast	CMA		02/pm	02/pm	123
Priwall	MSC		03/pm	03/pm	123
MSC Nita	MSC		03/pm	03/pm	121
Ima	DLO		04/am	04/pm	121
SVS Vega	CMA		05/am	05/am	121
BFP Galaxy	CMA		06/pm	06/pm	121

ANEXA 5. BULETINE INFORMATIVE – NAVE SUB OPERARE - ANR

Tabelul A 5.1

**Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
01.02.2016**

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/ Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	123	UASC JILFAR	D	Containere	I	21681 (1535)	21681 (1535)	0	21681 (1535)
				I	Containere	E	25059 (1127)	25059 (1127)	0	25059 (1127)
2	SOCEP S.A	35	NORTH STAR	I	Cherestea	E	1600	469	1131	469
3	SOCEP S.A	41	MERT KALKAVAN	D	Îngrășăminte (naturale și chimice)	I	6500	5500	1000	5500
4	SOCEP S.A	42	PAPA JOY	I	Cherestea	E	7000	2661	4339	2661

Tabelul A 5.2

**Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
02.02.2016**

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Expo rt	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într- o zi)
1	CSCT	121	HS DISCOVERER	D	Containere	I	3878 (186)	0	3878 (186)	0
				I	Containere	E	15744 (761)	0	15744 (761)	0
2	CSCT	123	UASC JILFAR	D	Containere	I	21611 (1528)	21611 (1528)	0	21611 (1528)
				I	Containere	E	24976 (719)	24976 (719)	0	24976 (719)
3	SOCEP S.A	35	NORTH STAR	I	Cherestea	E	1600	704	896	235

Tabelul A 5.3

**Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
03.02.2016**

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Expo rt	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într- o zi)
1	CSCT	121	HS DISCOVERER	D	Containere	I	3878 (186)	3878 (186)	0	3878 (186)
				I	Containere	E	15744 (761)	15744 (761)	0	15744 (761)
2	CSCT	122	IMA	D	Containere	I	2199 (84)	2199 (84)	0	2199 (84)
3	CSCT	123	YM INCREMENT	D	Containere	I	1790 (133)	1790 (133)	0	1790 (133)
				I	Containere	E	6556 (311)	6556 (311)	0	6556 (311)
4	SOCEP S.A	35	NORTH STAR	I	Cherestea	E	1600	1054	546	350
5	SOCEP S.A	51/52	SU	D	Laminate	I	6474	0	6474	0

Tabelul A 5.4

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
04.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	123	MSC ELEONORA	D	Containere	I	8452 (359)	8452 (359)	0	8452 (359)
				I	Containere	E	15180 (771)	15180 (771)	0	15180 (771)
2	SOCEP S.A	35	NORTH STAR	I	Cherestea	E	1600	1214	386	160
3	SOCEP S.A	51/52	SU	D	Laminate	I	6474	2328	4146	2328

Tabelul A 5.5

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
05.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	123	CMA CGM ELBE	D	Containere	I	23304 (1564)	23304 (1564)	0	23304 (1564)
				I	Containere	E	14021 (782)	14021 (782)	0	14021 (782)
2	SOCEP S.A	41	UMIT G	D	Îngrășăminte (naturale și chimice)	I	3000	0	3000	0
3	SOCEP S.A	51/52	SU	D	Laminate	I	6474	4328	2146	2000

Tabelul A 5.6

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
06.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	GREEN FAST	D	Containere	I				
				I	Containere	E				
2	SOCEP S.A	41	UMIT G	D	Uree (Vrac)	I	3000	600	2400	600
3	SOCEP S.A	51/52	SU	D	Laminate	I	6474	5474	1000	1146

Tabelul A 5.7

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
07.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	PACOBA	D	Containere	I	2223 (204)	2223 (204)	0	2223 (204)
				I	Containere	E	856 (61)	856 (61)	0	856 (61)
2	SOCEP S.A	41	UMIT G	D	Uree (Vrac)	I	3000	3000	0	2400
3	SOCEP S.A	51/52	KARLA A	D	Containere	I	4680 (245)	4680 (245)	0	4680 (245)
				I	Containere	E	3530 (231)	3530 (231)	0	3530 (231)

Tabelul A 5.8

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
08.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	123	TIM-S	D	Containere	I	2823 (487)	2823 (487)	0	2823 (487)
				I	Containere	E	5734 (320)	5734 (320)	0	5734 (320)

Tabelul A 5.9

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
09.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	SOCEP S.A	37	HACI RUSTU K	I	Srot	E	1800	700	1100	700
2	SOCEP S.A	52	SENA KALKAVAN	D	Containere	I	3388 (171)	3388 (171)	0	3388 (171)
				I	Containere	E	2237 (165)	2237 (165)	0	2237 (165)

Tabelul A 5.10

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
10.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	IMA	D	Containere	I				
				I	Containere	E				
2	CSCT	123	WARNOV PORPOISE	D	Containere	I				
				I	Containere	E				
3	SOCEP S.A	35	CAPTAIN JOY	I	Cherestea	E	1000	0	1000	0
4	SOCEP S.A	36	FERAHNAZ	D	Role Tablă	I	2799	799	2000	799
5	SOCEP S.A	37	MJORA	I	Porumb	E	1000			
6	SOCEP S.A	51	UGURS	D	Role Tablă	I	1701	0	1701	0
7	SOCEP S.A	52	MARTINE A	D	Containere	I				
				I	Containere	E				

Tabelul A 5.11

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
11.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	IMA	D	Containere	I	2826 (100)	2826 (100)	0	2826 (100)
				I	Containere	E	84 (31)	84 (31)	0	84 (31)
2	CSCT	123	WARNOW PORPOISE	D	Containere	I	8503 (507)	8503 (503)	0 (4)	8503 (503)
				I	Containere	E	10424 (449)	10424 (449)	0	10424 (449)
3	SOCEP S.A	35	CAPTAIN JOY	I	Cherestea	E	1000	540	460	540
4	SOCEP S.A	37	MJORA	I	Porumb	E	909	909	0	909
5	SOCEP S.A	51	UGURS	D	Role Tablă	I	1701	1701	0	1701
6	SOCEP S.A	52	MARTINE A	D	Containere	I	2580 (367)	2496 (355)	84 (12)	2496 (355)
				I	Containere	E	3452 (380)	1684 (190)	1768 (190)	1684 (190)

Tabelul A 5.12

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
12.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	122	MICHIGAN TRADER	D	Containere	I	2590 (168)	2590 (168)	0	2590 (168)
				I	Containere	E	7282 (290)	7282 (290)	0	7282 (290)
2	CSCT	123	MSC SENA	D	Containere	I	7216 (396)	7216 (396)	0	7216 (396)
				I	Containere	E	17980 (926)	17980 (926)	0	17980 (926)
3	SOCEP S.A	35	CAPTAIN JOY	I	Cherestea	E	1000	840	160	300
4	SOCEP S.A	37	JOY BROTHERS	I	Cherestea	E	5000	0	5000	0

Tabelul A 5.13

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
13.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	MED TEKIRDAG	D	Containere	I	6793 (319)	6793 (319)	0	6793 (319)
				I	Containere	E	172 (75)	172 (75)	0	172 (75)
2	SOCEP S.A	37	JOY BROTHERS	I	Cherestea	E	5000	0	5000	0
3	SOCEP S.A	52	VERA SKY	I	Role Tablă	E	1748	0	1748	0

Tabelul A 5.14

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
14.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	SOCEP S.A	37	JOY BROTHERS	I	Cherestea	E	5000	669	4331	669
2	SOCEP S.A	43	BRAHMS	I	Grâu	E	50000	0	50000	0
3	SOCEP S.A	52	YIGITCAN A	D	Containere	I	5415 (291)	930 (50)	4485 (241)	930 (50)
				I	Containere	E	4865 (327)	4865 (327)	0	4865 (327)

Tabelul A 5.15

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
15.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	122	BFP MELODY	D	Containere	I	2170 125	2170 125	0	2170 125
				I	Containere	E	2686 (139)	2686 (139)	0	2686 (139)
2	CSCT	123	GREEN FAST	D	Containere	I	4617 (167)	4617 (167)	0	4617 (167)
				I	Containere	E	2270 (168)	2270 (168)	0	2270 (168)
3	SOCEP S.A	37	JOY BROTHERS	I	Cherestea	E	5000	1029	3971	360
4	SOCEP S.A	43	BRAHMS	I	Grâu	E	50000	1000	49000	1000

Tabelul A 5.16

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
16.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121/122	WARNOV PURPOISE	D	Containere	I	9559 (524)	9559 (524)	0	9559 (524)
				I	Containere	E	7878 (455)	7878 (455)	0	7878 (455)
2	CSCT	123	CMA CGM LOIRE	D	Containere	I	21792 (1297)	21792 (1297)	0	21792 (1297)
				I	Containere	E	31336 (1526)	31336 (1526)	0	31336 (1526)
3	SOCEP S.A	36	DECENT	I	Srot	E	3150	0	3150	0
4	SOCEP S.A	37	JOY BROTHERS	I	Cherestea	E	5000	1329	3671	300
5	SOCEP S.A	43	BRAHMS	I	Grâu	E	50000	11450	38550	10450
6	SOCEP S.A	52	INGA A	D	Containere	I	3952 (429)	261 (29)	3691 (400)	261 (29)
				I	Containere	E	3116 (421)	0	3116 (421)	0

Tabelul A 5.17

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
17.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	123	CMA CGM LOIRE	D	Containere	I	21792 (1297)	21792 (1297)	0	21792 (1297)
				I	Containere	E	31336 (1526)	31336 (1526)	0	31336 (1526)
2	SOCEP S.A	36	DECENT	I	Srot	E	3150	0	3150	0
3	SOCEP S.A	37	JOY BROTHERS	I	Cherestea	E	5000	1329	3671	1329
4	SOCEP S.A	43	BRAHMS	I	Grâu	E	49350	23450	25900	12000

Tabelul A 5.18

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
18.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	YM INCREMENT	D	Containere	I	5466 (300)	5466 (300)	0	5466 (300)
				I	Containere	E	6641 (341)	6641 (341)	0	6641 (341)
2	CSCT	122	IMA	I	Containere	I	760 (73)	0	760	
3	CSCT	123	CS DISCOVERY	D	Containere	I	6776 (533)	6776 (533)	0	6776 (533)
				I	Containere	E	19798 (863)	19798 (863)	0	19798 (863)
4	SOCEP S.A	36	DECENT	I	Srot	E	3150	1200	1950	1200
5	SOCEP S.A	43	BRAHMS	I	Grâu	E	49350	35450	13900	12000

Tabelul A 5.19

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
19.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	123	CS DISCOVERY	D	Containere	I	6776 (533)	6776 (533)	0	6776 (533)
				I	Containere	E	19798 (863)	19798 (863)	0	19798 (863)
2	SOCEP S.A	43	BRAHMS	I	Grâu	E	49350	47450	1900	12000

Tabelul A 5.20

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
20.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	SOCEP S.A	35 A	JOY BROTHERS	I	Cherestea	E	2000	0	2000	0
2	SOCEP S.A	51	AURETTE A	D	Containere	I	6300 (406)	6300 (406)	0	6300 (406)
				I	Containere	E	5300 (390)	5300 (390)	0	5300 (390)

Tabelul A 5.21

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
21.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	SOCEP S.A	35 A	JOY BROTHERS	I	Cherestea	E	2000	0	2000	0

Tabelul A 5.22

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
22.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	123	WARNOV PORPOISE	D	Containere	I	6820 (406)	6820 (406)	0	6820 (406)
				I	Containere	E	8622 (376)	8622 (376)	0	8622 (376)
2	SOCEP S.A	35 A	JOY BROTHERS	I	Cherestea	E	2000	482	1518	482
3	SOCEP S.A	37	H.KEMAL KAPTAN	I	Srot	E	1850	0	1850	0

Tabelul A 5.23

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
23.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	INDEPENDENT CONCEPT BSA	D	Containere	I	2194 (209)	2194 (209)	0	2194 (209)
				I	Containere	E	3264 (148)	3264 (148)	0	3264 (148)
2	SOCEP S.A	37	H.KEMAL KAPTAN	I	Srot	E	1850	850	1000	850

Tabelul A 5.24

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
25.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	MSC DON GIOVANNI	D	Containere	I	2962 (208)	0	2962 (208)	0
				I	Containere	E	19671 (922)	0	19671 (922)	0
2	CSCT	123	CMA CGM URAL	D	Containere	I	22901 (139)	22901 (139)	0	22901 (139)
				I	Containere	E	20638 (1192)	20638 (1192)	0	20638 (1192)
3	SOCEP S.A	51	ASPEN	D	Bauxită	I	52732	29505	23227	29505
4	SOCEP S.A	52	ROSELINE A	D	Containere	I	2123 (358)	2123 (358)	0	2123 (358)
				I	Containere	E	5470 (436)	5470 (436)	0	5470 (436)

Tabelul A 5.25

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
26.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	MSC DON GIOVANNI	D	Containere	I	2962 (208)	2962 (208)	0	2962 (208)
				I	Containere	E	19671 (922)	19671 (922)	0	19671 (922)
2	CSCT	123	CAPE MAYOR	D	Containere	I	3450 (165)	3450 (165)	0	3450 (165)
				I	Containere	E	7816 (340)	7816 (340)	0	7816 (340)
3	SOCEP S.A	51	ASPEN	D	Bauxită	I	52732	45005	7727	15500

Tabelul A 5.26

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
27.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	CSCT	121	GREEN FAST	D	Containere	I	4637 (162)	4637 (162)	0	4637 (162)
				I	Containere	E	2660 (135)	2660 (135)	0	2660 (135)
2	CSCT	122	SVS VEGA	D	Containere	I	157 (20)	157 (20)	0	157 (20)
				I	Containere	E	2107 (164)	2107 (164)	0	2107 (164)
3	SOCEP S.A	36	HACI RUSTU K	D	Laminare	I	2400	0	2400	0
4	SOCEP S.A	51	ASPEN	D	Bauxită	I	52732	52732	0	7727
5	SOCEP S.A	52	ASIATIC JADE	D	Containere	I	3495 (181)	0	3495 (181)	0
				I	Containere	E	1257 (138)	0	1257 (138)	0

Tabelul A 5.27

Nave operate în terminalele CSCT și SOCEP S.A
28.02.2016

Nr. crt.	Terminalul	Dana	Nava	D/I (descărcare/ încărcare)	Marfă	I/E Import/Export	Qty tones (Cantitatea de operare)	Qty operată	Rest	Qty 24h (Cantitatea operată într-o zi)
1	SOCEP S.A	36	HACI RUSTU K	D	Țevi	I	2596	1418	1178	822
2	SOCEP S.A	41	BURAK	D	DAP	I	5200	100	5100	100

中国海运 (罗马尼亚) 代理有限公司
CHINA SHIPPING (Romania) Agency Co. Ltd.

REPRESENTATIVE OF: COSCO CONTAINER LINES CO., LTD. – SHANGHAI, P.R. OF CHINA

Bucharest Head Office:
86 Splaiul Unirii, 1st -2nd Floor, District 4, Postal Code 040038
Area Code: + 40 21
Tel: 210.95.19; 610.30.30
Fax: 210.88.96
Commercial Register No. J40 / 21095 / 2005 Fiscal Code Ro 18217836

Constanta Branch Office:
6 Petru Rares Str., 2nd Floor, Postal Code 900745
Area Code: +40 241
Tel: 737.233
Fax: 737.235
E-mail: office@csromania.ro



ACT DE IMPLEMENTARE

Doamna Țicu Rodica Ionela, student doctorand al Academiei de Științe a Moldovei, a studiat în cadrul societății noastre CHINA SHIPPING (ROMANIA) AGENCY CO. LTD S.R.L. Constanța buletinele informative referitoare la traficul navelor portuare în portul maritim Constanța.

Doamna Țicu Rodica Ionela a propus algoritmul de modelare a timpilor de așteptare în portul maritim Constanța precum și modalități de eficientizare a traficului portuar în condițiile actuale de trafic portuar. CHINA SHIPPING (ROMANIA) AGENCY CO. LTD S.R.L. consideră valoroși și de luat în considerare algoritmi elaborați în cadrul acestei teze de doctorat.

Informația pusă la dispoziția doamnei Țicu Rodica Ionela este confidențială și nu poate fi folosită în lucrarea acesteia cu excepția datelor care fac obiectul informațiilor publice prin lege.

HORNET LAURENTIU
DIRECTOR – SUCURSALA CONSTANTA
CHINA SHIPPING (ROMANIA) AGENCY CO. LTD S.R.L.



DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnata, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez, că în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.

Țicu Rodica Ionela

Semnătura:

12.10.2016

CURRICULUM VITAE

INFORMAȚII PERSONALE

Țicu Rodica Ionela

Str. Dionisie cel Mic, nr. 42, bl. 42, sc. A, ap. 4, Constanța, Romania

0721.265.921

ionela.ticu@yahoo.com

Sexul Feminin | Data nașterii 21.04.1980 | Naționalitatea Română

LOCUL DE MUNCĂ ACTUAL/DOMENIUL OCUPAȚIONAL

Universitatea Maritimă Constanța, Facultatea de Navigație și Transport Naval, Departamentul de Științe Fundamentale și Umaniste

EXPERIENȚA PROFESIONALĂ

01.10.2015 - prezent

Lector universitar

Universitatea Maritimă Constanța, B-dul. Mircea cel Bătrân, nr. 104, Constanța, România (www.cmu-edu.eu)
Cursuri de Analiză Matematică, Algebră și Trigonometrie Sferică și Metode Învățământ superior

23.02.2009-2015

Asistent universitar

Universitatea Maritimă Constanța, B-dul. Mircea cel Bătrân, nr. 104, Constanța, România (www.cmu-edu.eu)
Seminarii de Analiză Matematică, Algebră și Trigonometrie Sferică și Metode numerice. Învățământ superior

20.02.2005 – 23.02.2009

Colaborator extern

Universitatea Maritimă Constanța, B-dul. Mircea cel Bătrân, nr. 104, Constanța, România (www.cmu-edu.eu)
Seminarii de Analiză Matematică, Algebră și Trigonometrie Sferică și Metode numerice. Învățământ superior

01.02.2006 – 31.08.2006

Profesor suplinitor de matematică

Școala Generală „Grigore Moisil”, Constanța, România
Predare matematică, clasele 5-8.
Învățământ preuniversitar

01.02.2005 – 31.08.2005

Profesor suplinitor de matematică

Grup Școlar Economic „Virgil Madgearu”, Constanța, România

Predare matematică, clasele 9-12.

Învățământ preuniversitar

EDUCAȚIE ȘI FORMARE

2011 – prezent

Doctorand

Universitatea Academiei de Științe a Moldovei, Institutul de Matematică și Informatică,
Chișinău, Moldova
Cibernetică matematică și cercetări operaționale;
Informatică, Istoria și metodologia domeniului de cercetare.
Post-universitar

2010 – 2014

Doctor în Inginerie mecanică

Titulu tezei:

„Cercetări privind utilizarea surselor de energie neconvențională la propulsia navelor”

Universitatea Maritimă din Constanța, Constanța, România (www.cmu-edu.eu)

Generarea aplicațiilor software în inginerie mecanică;

Complemente de dinamica mașinilor;

Procese de transfer de masă și căldură;

Ingineria valorii;

Similitudine și modelare în mecanica fluidelor;

Fiabilitatea și disponibilitatea sistemelor termoenergetice;

Metode moderne de calcul al componentelor de mașini;

Managementul proiectelor de cercetare experimentală.

Post-universitar

2005 – 2008

Diplomă de Master

Universitatea „Ovidius” din Constanța

Didactică matematică;

Istoria matematicii;

Psihologia și disciplinele învățării matematicii;

Tehnologii didactice în predarea algebrei;

Tehnologii didactice în predarea geometriei;

Tehnologii didactice în predarea analizei;

Predarea matematicii pentru copii performanți.

Post-universitar

2009 – 2013

Diplomă de inginer

Facultatea de Navigație și Transport Naval, Universitatea Maritimă din Constanța,
Constanța, România (www.cmu-edu.eu)

2000 – 2004

Diplomă de licență

Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea „Ovidius” din Constanța,
Constanța, România
Matematică
Universitar

1995 – 2000

Diplomă de bacalaureat

Colegiul Național Pedagogic „Constantin Brătescu”
Învățător-educator
Pedagogie
Psihologie
Metodică
Istoria Literaturii
Matematică
Literatură universală
Liceal

COMPETENȚE PERSONALE

Limba maternă Română

Alte limbi străine cunoscute	INȚELEGERE		VORBIRE		SCRIERE
	Ascultare	Citire	Participare la conversație	Discurs oral	
Engleză	mediu	mediu	mediu	mediu	mediu
Scrieți denumirea certificatului. Scrieți nivelul, dacă îl cunoașteți.					
Franceză	mediu	mediu	mediu	mediu	mediu

Competențe de comunicare Bună capacitate de a colabora în echipă
Bună capacitate de adaptare la medii multiculturale
Bune abilități de comunicare

Competență digitală

AUTOEVALUARE				
Procesarea informației	Comunicare	Creare de conținut	Securitate	Rezolvarea de probleme
Utilizator experimentat	Utilizator experimentat	Utilizator experimentat	Utilizator experimentat	Utilizator experimentat

Permis de conducere B

INFORMAȚII
SUPLIMENTARE

Certificat de absolvire a cursului de specializare „Instructori formatori IMO”, CERONAV, 2015

Certificat în „Primavera- Project Management”, 2011

Certificat în „Advanced concepts of teaching e-learning virtual classroom”, 2011

Certificat în „Human resource management in higher education of marine”, 2011

Certificat în „Training and teaching material development”, 2010

Certificate în „Marine resources management-Swedish Club”, 2010

Certificate în „Bridge Team Management”, 2009

Certificate în „Maritime Law and Crowd and Crisis Management” - Summer school, Bremen, 2009

Certificat de absolvire a cursului de specializare „Manager Sisteme de Management Mediu”, Universitatea Maritimă din Constanța, 2009.

Membru în Societatea de Științe Matematice din România

Participări la proiecte științifice naționale și internaționale:

1. Membru în grupul țintă în proiectul: „ MARCON – Dezvoltarea și implementarea unui sistem calitativ de formare inițială și continuă a cadrelor didactice din învățământul superior de marină și furnizarea de programe de perfecționare în conformitate cu cerințele industriei maritime”, 2009-2011;
2. Membru în grupul țintă în proiectul POSDRU NR. 57/1.3/s/17884: „Specializarea personalului didactic universitar pentru funcția de supervisor de practică tehnologică și de cercetare”, 2009- 2012;
3. Membru în proiectul Modele de așteptare semi-Markov, Programul Tineri Cercetători, Institutul de Matematică și Informatică, 2013-2014.

ANEXE

Lista de lucrări publicate la tema tezei

LISTA LUCRĂRILOR PUBLICATE LA TEMA TEZEI

1. Costea, A., **Țicu, R. I.** **Descartes' rule of signs.** Analele Universității Maritime din Constanța, România, 2011, Year XIII, vol 16, ISSN 1582-3601, pag. 225-228.
2. Mișcoi, Gh., **Țicu, R. I.**, Costea, A. **Distribution rules in seaport activities modeling.** Analele Universității Maritime Constanța, România, 2012, Year XIII, vol 17, ISSN 1582-3601, pag. 211-212.
3. Mișcoi, Gh., **Țicu, R. I.**, Costea, A. **Application of some performance characteristics of the queueing Theory for improvement of seaport activities.** The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2012, pag. 165-166.
4. Mișcoi, Gh., Bejenari, D., Mitev, L., **Țicu, R. I.**, Costea, A. **Algoritmi numerici cu aproximații successive în soluționarea caracteristicilor modelelor exhaustive Polling.** Conferința științifică internațională "Strategii de dezvoltare socio-economică a societății în condițiile globalizării", Universitatea Liberă Internațională din Moldova, Chișinău, 15-16 octombrie 2012, pag. 321-328.
5. Mișcoi, Gh., Costea, A., **Țicu, R. I.** **A modelling system for seaport activities.** The 21 th conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2013, 19-22 September 2013, Bucharest, Romania, pag. 66.
6. Mișcoi, Gh., Costea, A., **Țicu, R. I.** **Aplicarea sistemului de așteptare cu o singură linie în portul maritim.** Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Conferința internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”, ISBN 978-9975-62-365-0, 2014, Chișinău, Republica Moldova, pag. 142-146.
7. Mișcoi, Gh., **Țicu, R. I.** **Metoda de colorare si aplicarea ei in cercetarea modelelor fenomenelor de aseptare.** Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Conferința internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”, ISBN 978-9975-941-88-4, 2012, Chișinău, pag. 99-106.
8. **Țicu, R. I.** **Queuing models in the port activity.** Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50th anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science "IMCS-50", Chișinău, 19-23 august 2014, pag. 414-417.
9. Costea, A., **Țicu, R. I.**, Ion, L., Mishkoy, Gh. **The role of the traffic coefficient in the analysis of information processes in a seaport.** Analele Universității Maritime Constanța, România, 2015, Year XVI, vol 23, ISSN 1582-360, pag. 135- 138.

10. **Țicu, R. I. Mathematical models with S queueing stations in series.** International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education, MITRE 2015, 2-5 iulie 2015, Chișinău, Republica Moldova, pag. 83-84.
11. Mișcoi, Gh., Costea, A., **Țicu, R. I. Modelarea activității terminalului maritim în baza coeficientului de trafic.** Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Conferința internațională „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale”, ISBN 978-9975-3099-8-1, 2016, Chișinău, Republica Moldova, pag. 242-252.
12. Mișcoi, Gh., **Țicu, R. I.**, Costea, A., Pomazan, C. **Evaluation algorithms of the waiting time of ships in a seaport.** International Scientific Conference Mathematics & IT: Research and Education, MITRE 2016, 24-26 iunie 2016, Chișinău, Republica Moldova, pag. 45-46.
13. Mishkoy, Gh., Bejenari, D., Mitev, L., **Țicu R. I. Numerical solutions of Kendall and Pollaczek-Khintchin equations for exhaustive Polling systems with semi- Markov delays.** Computer Science Journal of Moldova, V.24, N.2(71) , 2016, pag. 255-272.
14. Mișcoi, Gh., Costea, A., **Țicu, R. I.**, Pomazan, C. **Algorithms of evaluation of the waiting time and the modelling of the terminal activity based on the traffic coefficient of ships in the seaport.** Ponte Academic Journal, August 2016, Volume 72, Issue 8, ISSN:0032-423X, Factor impact: 0.724, pag. 237-248.
15. **Țicu R. I. Algoritmi de modelare a timpului de așteptare în cazul sistemului de așteptare generalizat, aplicații în portul maritim Constanța.** Studia Universitatis Moldaviae, Universitatea de Stat a Moldovei, nr. 2 (92),ISSN 1857-2073, Republica Moldova, 2016, pag.60-66.