INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ AL A.Ș.M.

UNIVERSITATEA ACADEMIEI DE ȘTIINȚE A MOLDOVEI

Cu titlu de manuscris

C.Z.U.:519.872

MITEV LILIA

MODELE POLLING CU PRIORITĂȚI, VACANȚE SEMI-MARKOVIENE ȘI SERVIRE EXHAUSTIVĂ

112.03 - CIBERNETICĂ MATEMATICĂ ŞI CERCETĂRI OPERAŢIONALE

Autoreferatul tezei de doctor

în ştiinţe matematice

CHIŞINĂU, 2017

Teza a fost elaborată în cadrul laboratorului „Modelare Matematică”, Institutul de Matematică și Informatică al Academiei de Științe a Moldovei și Universitatea Academiei de Științe a Moldovei.

Conducător ştiinţific:
Mişcoi Gheorghe, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, academician al A.Ş.M.;
Consultant ştiinţific:
Attahiru Sule Alfa, doctor, profesor, Universitatea Manitoba, Canada.

Referenţi oficiali:
1. *Cataranciuc Sergiu*, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, USM;
2. *Corlat Andrei*, doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar, IMI al AȘM.

Componenţa consiliului ştiinţific specializat:
1. *Solomon Dumitru*, doctor habilitat în tehnică, conferenţiar cercetător;
2. *Rîbacova Galina,* doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar;
3. *Lozovanu Dmitrii*, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar;
4. *Guțuleac Emilian,* doctor habilitat în tehnică, profesor universitar;
5. *Benderschi Olga*, doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar.

Susţinerea va avea loc la **23.03.2017, ora 14.00**, în şedinţa Consiliului ştiinţific specializat **D 30.112.03-08** în cadrul Universităţii de Stat din Moldova, str. A. Mateevici 60, Chişinău, MD-2009, Republica Moldova (bl. IV, sala 222).

Teza de doctor şi autoreferatul pot fi consultate la biblioteca Universităţii de Stat din Moldova şi pe pagina web a CNAA (www.cnaa.acad.md).

Autoreferatul a fost expediat la 21.02.2017

Secretar ştiinţific al consiliului ştiinţific specializat:
Rîbacova Galina, doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar.

Conducător ştiinţific:
Mişcoi Gheorghe, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, academician al AŞM.

G.Mişcoi

Consultant ştiinţific:
Attahiru Sule Alfa, doctor, profesor, Universitatea Manitoba, Canada.

Autor
Mitev Lilia

REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea şi importanţa problemei abordate. Teoria matematică a fenomenelor de aşteptare, cunoscută ca Teoria Aşteptării, este un compartiment al matematicii moderne ce ţine de teoria probabilităţilor şi cercetări operaţionale. Acest domeniu a apărut din necesităţile practicii şi pe parcursul dezvoltării lui a jucat un rol important în soluţionarea unui larg spectru de probleme aplicative. Printre aceste probleme se consideră organizarea raţională a centralelor telefonice, a clinicilor, magazinelor, întreprinderilor de prelucrare, de stocare a materialelor, a centrelor de apel public, etc. Odată cu apariţia şi dezvoltarea rapidă a diverselor reţele, modelele matematice din domeniul teoriei aşteptării continuă să joace un rol important în modelarea, proiectarea şi analiza funcţionării reţelelor contemporane. Mai mult decât atât, dezvoltarea vertiginoasă a reţelelor contemporane, apariţia unor noi tehnologii de reţea, cum ar fi, de exemplu, tehnologiile înzestrate cu metodologiile QoS (Quality of Service) şi CoS (Class of Service) înaintează noi cerinţe asupra elaborării şi studierii a noi modele matematice, mai flexibile şi mai adecvate proceselor reale. Modelele Polling cu vacanțe semi-Markoviene și servire exhaustivă reprezintă modele matematice de aşteptare, modele care joacă un rol important în analiza, modelarea, proiectarea şi optimizarea reţelelor contemporane. Aceste modele sunt larg răspândite, în special, în analiza funcţionării reţelelor de bandă largă fără fir Wi-Fi şi Wi-Max cu un control centralizat. Creşterea impunătoare a numărului de reţele şi servicii electronice, evoluţia splendidă a reţelelor cu fir şi fără fir, toate aceste realizări sunt marcate printr-un schimb continuu de tehnologii de reţea orientate spre noi posibilităţi de integrare a datelor, voce şi transport a informaţiei video.

Sistemele de aşteptare cu priorităţi constituie o clasă largă ale sistemelor de aşteptare unde cerinţele (cererile, mesajele, clienţii, etc.) ce intră în sistem sunt distinse după importanţa lor. Astfel de sisteme reprezintă modele adecvate ale multor aspecte ale vieţii de zi cu zi, atunci când o servire preferenţială se acordă pentru anumite tipuri de cerinţe. În sistemele de timp real, pierderile de timp numite vacanțe, pentru comutare (orientare, trecere, schimb) între clasele de prioritate sunt inevitabile. Dacă în trecut, în timpul epocii clasice de dezvoltare a sistemelor de aşteptare, se accepta omiterea proceselor de comutare, atunci în zilele noastre, acest lucru nu mai este posibil. Există două motive care confirmă această afirmaţie. Primul motiv este evocat de cerinţele insistente ale practicii contemporane. Astfel, apariţia și evoluția diverselor reţele de comunicare, inclusiv reţele fără fir, care funcţionează în regim de timp real şi unde factorul stochastic este permanent prezent, gestionarea fluxurilor informaționale, diversificarea surselor de trafic, etc., - toate aceste fenomene conduc la crearea şi studiul unor noi modele matematice şi inginereşti a proceselor din aceste reţele. În al doilea rând, elaborarea şi studierea modelelor cu priorităţi şi timp nenul de comutare, menţionate mai sus ca modele generalizate, prezintă un interes deosebit din punct de vedere teoretic-fundamental. Într-adevăr, datorită faptului că modelele generalizate care utilizează comutarea reprezintă generalizări (şi anume, prin introducerea comutării) a modelelor clasice de prioritate, ne putem aştepta ca rezultatele analitice pentru astfel de sisteme generalizate să conţină, ca cazuri particulare, rezultatele corespunzătoare pentru sistemele clasice. Regula generală de servire în sistemele de aşteptare cu priorităţi este după cum urmează: cerinţele care sunt în sistem şi au o prioritate mai mare trebuie să fie servite înaintea acelor care au o prioritate mai mică. Cu toate acestea, în astfel de sisteme modul de comportare al serverului, în esenţă, le poate diversifica. În plus, există un număr considerabil de sisteme în care serverul are nevoie de ceva timp pentru a trece de la servirea unui tip la alt tip de cerinţe. Toate acestea generează o varietate de sisteme de aşteptare cu priorităţi.

Vom menţiona că pe parcursul evoluţiei teoriei aşteptării, începând cu N. Jaiswal (autorul primei monografii în domeniul sistemelor cu priorităţi, publicate în 1973) şi continuând cu cercetătorii din Republica Moldova Gh. Mişcoi, E. Guţuleac, A. Bejan, O. Benderschi, I. Damian, D. Bejenari, au fost formulate şi soluţionate diverse probleme importante, inclusiv din domeniul modelelor generalizate.

În această ordine de idei, vom menționa un alt argument important al actualităţii şi importanţei problemei abordate, care reprezintă seria voluminoasă de lucări științifice din acest domeniu atât din ţară cât şi peste hotare. Sistematizarea şi generalizarea rezultatelor teoretice obţinute în domeniul studierii sistemelor Polling până în anul 1985, sunt redate în lucrarea lui H. Takagi (2000). Dezvoltarea rezultatelor teoretice în această direcţie, publicate înainte de anul 1995, sunt expuse în monografia S. Borst (1996). Generalizării şi sistematizării modelelor şi metodelor pentru studierea sistemelor stohastice cu sondaj ciclic (sistemul Polling) şi utilizarea lor pentru proiectarea reţelelor fără fir de bandă largă este dedicată monografia V. Vishnevschi și O. Semenova (2007). Analiza modelelor cu priorităţi cu schimb nenul de tip semi-Markov al şirurilor de aşteptare cu priorităţi, denumite modele generalizate cu priorităţi, este expusă în monografia Gh. Mişcoi (2009). În această lucrare sunt prezentate noi discipline de prioritate, sunt dezvoltate noi metode de analiză şi elaboraţi algoritmi numerici de calcul al caracteristicilor sistemelor generalizate. În lucrările G. Klimov şi Gh. Mişcoi (1979), M. Volkovinskii şi A. N. Kabalevskii (1981) este studiat un caz special al sistemelor Polling, sisteme de aşteptare cu priorităţi şi timp de orientare de o formă specială. Aceste monografii extind rezultatele obţinute în acea perioadă prezentate în lucrarea B. V. Gnedenko ş.a. (1973). În lucrarea S. Alfa (2010), sunt prezentate modele de aşteptare, cu privire la utilizarea a instrumentelor matematice în analiza problemelor asociate cu modelele de aşteptare.

Printre lucrările științifice remarcabile și bine-cunoscute din acest domeniu sunt și lucrări ale cercetătorilor din Republica Moldova. Astfel, vom menționa Gh. Mişcoi şi A. Bejan în (2007, 2008) au propus un algoritm îmbunătățit de soluţionare a ecuaţiei clasice Kendall, care poate fi utilizat în algoritmii multidimensionali. Gh. Mişcoi şi O. Benderschi (2008, 2009) au elaborat noi metode, tehnici și algoritmii numerici de evaluare a caracteristicilor numerice pentru modele generalizate cu priorităţi. Gh. Mişcoi şi D. Bejenari (2011, 2012) au elaborat metode matriceale şi algoritmi numerici de determinare a perioadei de ocupare pentru modelele de aşteptare de tip Polling cu întârzieri semi-Markoviene şi pentru modelele generalizate de aşteptare cu priorităţi.

Scopul şi obiectivele tezei. Lucrarea are ca scop extinderea rezultatelor cunoscute din domeniul Teoriei Așteptării, elaborarea a noi tehnici şi algoritmi numerici de determinare a unor caracteristici de performanță mai optime pentru modelele de aşteptare Polling cu vacanțe semi-Markoviene şi pentru cele cu prioritatea DD.

Pentru atingerea scopului menționat s- au realizat următoarele obiective:

- studierea sistemelor de aşteptare Polling cu vacanțe semi-Markoviene și servire exhaustivă;
- analiza metodelor moderne de cercetare eficiente în obţinerea a noi rezultate în Teoria Aşteptării;
- cercetarea sistemelor generalizate de aşteptare cu priorităţi şi studierea aparatului matematic pentru aceste sisteme;
- elaborarea și aplicarea algoritmilor numerici pentru modelarea repartiţiei lungimii virtuale a șirului de așteptare pentru sistemele Polling cu întârzieri semi-Markoviene;
- studierea și formalizarea caracteristicilor probabiliste de performanță pentru sistemele generalizate de aşteptare cu prioritatea DD (Discretionary Discipline);
- elaborarea algoritmilor numerici pentru modelarea repartiţiei perioadei de ocupare și a caracteristicilor auxiliare pentru sistemele de aşteptare cu prioritatea DD;
- implementarea algoritmilor elaboraţi în limbaje de programare în vederea estimării parametrilor funcțiilor de repartiție ce intervin în optimizarea caracteristicilor de performanță ale modelelor de aşteptare Polling.

Suportul metodologic al cercetărilor este bazat pe noţiuni din teoria probabilităţilor și statistică, teoria aşteptării, metode ale teoriei proceselor aleatoare, ș.a. Algoritmii numerici elaboraţi sunt implementați în limbajele de programare C++ și Kotlin.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: constă în elaborarea metodelor și algoritmilor numerici pentru determinarea unor caracteristici numerice de performanță pentru sistemele Polling, cât și pentru cele cu prioritatea DD. Astfel se poate stabili eficiența/performanța sistemului de așteptare în dependență de legile de repartiție, legile de prioritate, strategia sistemului în stare liberă.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată: rezidă în determinarea unor valori mai optime ale caracteristicilor probabiliste pentru modelele Polling, rezultatele obținute atât în urma analizei modelelor de aşteptare, cât şi a funcțiilor de repartiție, legilor de prioritate, schemelor de servire și orientare, fapt care permite stabilirea staționarității și eficienței sistemului de așteptare.

Importanţa teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării. Modelele matematice ale teoriei aşteptării joacă un rol important în analiza, modelarea, proiectarea şi optimizarea diferitor procese reale, în care apar fenomene de aşteptare, cum ar fi reţelele contemporane, centrele de apel public, sistemele de transport, procesele de producție, etc. Modelele Polling joacă un rol-cheie în analiza şi proiectarea reţelelor regionale fără fir de bandă largă. Pe de altă parte, modelele generalizate cu priorităţi pot fi văzute ca o clasă specială a acestor modele. Astfel de sisteme reprezintă modele adecvate ale multor aspecte ale vieţii de zi cu zi, atunci când o servire preferenţială se acordă pentru anumite tipuri de cerinţe.

Rezultatele obținute în teză, atât pentru sistemele de aşteptare Polling cu vacanțe semi-Markoviene cât şi pentru sistemele generalizate de aşteptare cu priorităţi, pot fi utilizate ca suport pentru continuarea studiului și analizei ştiinţifice în această direcţie, astfel se pot determina și alte caracteristici de performanță ale sistemelor de așteptare. După cum am menționat, o particularitate majoră a studierii acestor sisteme constă în caracterul extensibil și aplicabil a rezultatelor în diferite sfere de activitate, unde apar fenomene similare, spre exemplu, procesele de transport, comunicație, producție, etc.

Aprobarea rezultatelor. Rezultatele fundamentale ale tezei au fost prezentate şi aprobate la următoarele conferinţe şi seminare ştiinţifice naţionale şi internaţionale, printre care:

1. *International Conference on Information Technologies, Systems and Networks ITNS - 2010*, Chișinău, 2010;
2. *Conferinţa Ştiinţifică Internaţională "Modelare Matematică, Optimizare şi Tehnologii Informaţionale"*, Chişinău, 2010, 2012;
3. *International Conference "The Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM"*, România - 2010, 2011, 2013; Chişinău - 2012;
4. *Conferinţa Internaţională „Probleme şi perspective de dezvoltare a potenţialului economic şi managerial al Republicii Moldova în condiţiile de criză"*, Chişinău, 2011;
5. *International Conference "The 7-th Congress of Romanian Mathematicians"*, Braşov, România, 2011;
6. *International Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education – MITRE"*, Chișinău – 2011, 2013;
7. *Conferinţă Ştiinţifică Internaţională „Strategii de dezvoltare socio-economică a societăţii în*

condiţiile globalizării", Chişinău, 2012;

8. *Conferinţa Ştiinţifico-Practică Internaţională „Politici economice şi financiare pentru o dezvoltare competitivă"*, Chişinău, 2013;
9. *International Conference "The 37th Annual Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA)"*, Chişinău, 2013;
10. *The 17-th International Conference on "Distributed Computer and Communication Networks": Control, Computation, Communications*, Moscow, Russia, 2013;
11. *Conferință Ştiinţifică "UNIVERSITAS EUROPAEA XXI: Ştiinţa Universitară în contextul Integrării Europene"*, Chişinău, 2013;
12. *Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor „Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători"*, Chişinău, 2014, 2015;
13. *The International Conference "Mathematics Days in Sofia"*, Sofia, Bulgaria, 2014;
14. *The Third Conference dedicated to the 50th anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science "IMCS-50"*, Chişinău, 2014;
15. *Seminarul ştiinţific, lab. Modelare Matematică, IMI al AŞM,* Chişinău, 2016.

Publicaţii la tema tezei. Rezultatele de bază ale tezei au fost publicate în 30 lucrări ştiinţifice, inclusiv 7 lucrări în reviste ştiinţifice recenzate, dintre care 4 articole în reviste de categoria B. Din numărul total de lucrări 4 sunt publicate fără coautori. Rezultatele ştiinţifice obținute au fost publicate în 22 lucrări în culegeri internaţionale și 1 ciclu didactic de lucrări de laborator.

Rezultatele ştiinţifice descrise în teză au fost aprobate în cercetările proiectelor științifice de cercetare naționale și internaționale:

- A.Ș.M.-STCU, 13.820.08.06 STCU.F/5854 (2013-2014)): *Sisteme cu priorităţi cu schimb semi-Markov şi control în reţele complexe*;
- Tineri Cercetatori, 13.819.18.05A (2013-2014): *Modele de aşteptare semi-Markov*;
- A.Ș.M.- Belorusia, 10.820.06BF (2010-2011): *Cercetarea sistemelor de aşteptare cu priorităţi în sisteme contemporane de diversificare a resurselor informaţionale*;
- A.Ș.M.- Germania 09.820.08.01/GF (2009): *Analiza şi modelarea procesării traficului informaţional în viitoarele generaţii de reţele*.

Structura tezei. Teza este scrisă în limba română şi conţine următoarele compartimente: introducere, trei capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie ce constă din 103 titluri şi 2 anexe. Lucrarea conţine 108 pagini de text de bază.

Cuvintele-cheie: model de aşteptare Polling, sisteme generalizate cu priorităţi, transformata Laplace-Stieltjes, lungimea medie virtuală, perioada de ocupare, prioritatea DD.

CONŢINUTUL TEZEI

În **Primul capitol** se efectuează o prezentare generală a evoluției cercetărilor științifice cu privire la domeniul teoriei aşteptării, și anume a studierii modelelor Polling, cât și a sistemelor generalizate cu priorități. Se formulează scopul şi obiectivele tezei, direcţiile de cercetare şi metodologiile utilizate. De asemenea, sunt prezentate diverse modele şi metode în studiul sistemelor Polling şi a dezvoltării lor. Pentru relevarea importanței acestor modele, se prezintă domenii de aplicare ale sistemelor Polling, care îşi găsesc aplicaţii pe scară largă în diverse sfere de activitate, cum ar fi sistemele informatice, de transport, telecomunicaţii, etc. Pentru înțelegerea funcționării unui sistem de așteptare sunt definite unele caracteristici probabiliste de performanţă pentru modelul studiat.

În **Capitolul al doilea** sunt prezentate şi descrise unele metode analitice şi numerice de cercetare cu o bogată istorie, care servesc pentru obţinerea a noi rezultate în Teoria Aşteptării, astfel sunt analizate metodele şi procedee bazate pe aparatul funcţiilor generatoare, transformatelor Laplace şi Laplace-Stieltjes. De asemenea, se definește aparatul matematic al modelului de aşteptare Polling cu vacanțe semi-Markoviene și sunt studiate rezultate de bază cu privire la unele caracteristici probabilistice de performanță pentru acest model. Sunt prezentați algoritmii numerici ce servesc pentru determinarea repartiţiei lungimii șirului de așteptare cu servire exhuastivă pentru diferite legi de repartiție, însoțiți de exemple.

Astfel, în *paragraful* 2.1 sunt descrise două metode analitice: metoda de colorare (metoda funcţiilor generatoare) şi metoda „catastrofelor”.

Metoda de colorare (marcare) constă în atribuirea funcţiei generatoare un anumit sens probabilistic şi aceasta se obţine prin procedura de colorare (marcare) a mesajelor de intrare în sistemul de servire. Astfel, structura matematică abstractă definită ca funcţie generatoare, datorită sensului ei probabilistic devine mai comodă şi mai pe înţeles în problemele aplicative. Mai mult de cât atât, datorită acestei metode, deseori este posibil de obţinut expresii analitice pentru funcţia generatoare reieșind din sensul ei probabilist. Şi aceasta este posibil fără a se şti funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare. Tot aşa cum se întâmplă şi cu valorile numerice ale variabilei aleatoare, valoarea medie, dispersia etc.

O altă metodă de cercetare cu o bogată istorie de succes în obţinerea a noi rezultate în Teoria Aşteptării este metoda „catastrofelor”, sau, cu alte cuvinte, metoda introducerii unui eveniment aleatoriu suplimentar. Esenţa metodei „catastrofelor” constă în faptul că introducând un eveniment suplimentar („catastrofă”) se reuşeşte de atribuit un sens probabilist clar transformatelor Laplace şi Laplace-Stieltjes, după ce se precaută evoluţia sistemului de aşteptare şi se determină aceste probabilităţi, aceasta ne permite să evităm anumite structuri complicate.

În continuare, în *paragraful* 2.2 sunt descrise două metode numerice: metoda aproximațiilor succesive şi metoda modelărilor numerice [4].

Metoda numerică (algoritmul numeric) este o metodă de rezolvare a unei probleme practice utilizând un număr finit de operaţii aritmetice şi logice (operaţiile uzuale pe care le poate executa un procesor sau coprocesor matematic). În practică apar probleme concrete cu date de intrare cunoscute. De obicei, acestei probleme se asociază un model matematic, mai fin sau mai puţin fin. Soluționarea problemei matematice, în general, nu se poate rezolva manual printr-un număr finit de paşi (operaţii), deci se caută să se rezolve problema printr-o metodă numerică. Algoritmul obţinut se poate programa într-un limbaj de programare, iar rezultatele obţinute la compilare se verifică practic. Aceste date de ieşire ar trebui să fie o aproximare reală pentru problema practică iniţială. Schematic aceasta are următoarea formă: Date de intrare → Algoritmul de calcul → Date de ieșire.

Metoda aproximaţiilor succesive [6], după cum reiese şi din denumirea ei, determină o soluţie aproximativă a unei ecuaţii neliniare prin construirea unui şir de aproximaţii succesive.

În cele ce urmează este analizată metoda modelărilor numerice. Această metodă prevede următoarele etape:

a) *elaborarea modelului matematic*, astfel modelul matematic constă din anumite formalizări matematice a unor situaţii reale, soluţionarea căreia este solicitată. Modelul matematic preia într-un limbaj generalizat cele mai evidenţiate particularităţi ale evoluţiei situaţiei reale.
b) *modelarea matematică* poate fi analitică şi numerică. Modelarea analitică a problemei precăutate prevede cercetarea analitică (deductivă) conform anumitor axiome, legături, exprimate prin ecuaţii de anumit tip şi ordin (liniare, funcţionale, integrale, sisteme de astfel de ecuaţii, etc.). Modelarea numerică apare, ca regulă, acolo unde aparatul analitic devine nesatisfăcător sau imposibil pentru soluţionarea definitivă a problemei precăutate.
c) *optimizarea modelului* iniţial prevede o reconsiderare a modelului matematic anterior elaborat. Această reconsiderare este, de fapt, o precizare argumentată obţinută în baza modelării. Ea permite „îmbunătăţirea" modelului iniţial, uneori în scopul descrierii mai adecvate a problemei reale, alteori în scopul detalizării sau evidenţierii anumitor laturi ale modelului.

În *paragraful* 2.3 se prezintă unele caracteristici de performanță ale modelului Polling cu vacanțe semi-Markoviene și servire exhaustivă. Însă o atenție mai deosebită este acordată repartiţiei virtuale a şirului de aşteptare menționat.

Vom menționa unele notaţii şi rezultate referitor la modelul Polling cu servire exhaustivă şi schimb nenul al stărilor de trecere de la o clasă de utilizatori la alta.

Mecanismul de servire este dat de tabelul Polling: $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,r\}$, unde aplicaţia $f(j)=k$ denotă că la etapa j este servit utilizatorul cu numărul k. Considerăm că cerinţele de la utilizatorul k sosesc conform fluxului Poisson cu intensitatea λ_k.

Funcţia de repartiţie a servirilor cerinţelor a utilizatorului cu numărul k o vom nota prin $B_k(x)=P\{B_k<x\}$. Vom considera că timpul de schimb C_j depinde doar de indicele etapei către care se produce schimbul, adică $C_{f(j-1),j}=C_j$. Funcţia de repartiţie a perioadelor de schimb o vom nota prin $C_j(x)=P\{C_k<x\}$.

Prin k-perioadă de ocupare vom considera intervalul de timp ce începe cu schimbul sistemului către utilizatorul k şi sfârşeşte când sistemul devine liber de cerinţe de clasă k.

Fie că prin Π_k^{δ} este notată lungimea acestei k - perioadei de ocupare, iar prin $\Pi_k^{\delta}(x)=P\{\Pi_k^{\delta}<x\}$ – funcţia ei de repartiţie.

Fie, în continuare, că $\pi_k^{\delta}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}d\Pi_k^{\delta}(x)$ este TLS a funcţiei de repartiţie a k - perioadei.

Are loc următorul rezultat, expus în monografia Gh. Mişcoi (2009):

Teorema 1. Funcţia $\pi_k^{\delta}(s)$ se determină din ecuaţia

$$\pi_k^{\delta}(s)=c_k(s+\lambda_k-\lambda_k\pi_k(s))\pi_k(s), \tag{1}$$

unde

$$\pi_k(s)=\beta_k(s+\lambda_k-\lambda_k\pi_k(s)),$$

iar prin $c_k(s)$ şi $\beta_k(s)$ sunt notate transformatele Laplace-Stieltjes (TLS) ale funcţiilor de repartiţie $C_k(x)$ şi $B_k(x)$, astfel $c_k(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dC_k(x)$ şi $\beta_k(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dB_k(x)$.

Definiţia 1. *Lungimea şirului de aşteptate se numeşte numărul de cerințe care aşteaptă în şir pentru a fi servite.*

Determinarea lungimii nestaţionare (virtuale) a şirului de aşteptare a cerințelor se bazează pe analogul virtual al ecuației Pollaczek-Khintchin [13]. Vom nota prin $L_k(t)$ valoarea medie virtuală a lungimii şirului de aşteptare pentru utilizatorul k, iar $l_k(s)$ - transformata Laplace a funcţiei $L_k(t)$, atunci:

$$l_k(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}L_k(t)dt.$$

Este uşor de demonstrat că are loc relaţia:

$-l_k(s)\big|_{s=0} = L_k(t).$

Astfel, după efectuarea efectuarea operațiilor necesare, obţinem următoarea expresie analitică pentru $l_k(s)$:

Teorema 2. Transformata Laplace a funcţiei $L_k(t)$ este [13]:

$$l_k(s) = \frac{\lambda_k}{s + \lambda_k - \lambda_k \pi_k^{\delta}(s)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{c_{k1}\lambda_k s + \lambda_k (1 - c_k(s))}{s^2} + \frac{[1 - \beta_k(s)(s - \lambda_k) + \lambda_k s \beta_{k1}](c_k(s) - \pi_k^{\delta}(s))}{s^2 (1 - \beta_k(s))} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1 + \lambda_k \beta_{k1})(c_k(s) - \pi_k^{\delta}(s))}{s(1 - \beta_k(s))^2} \right\}. \tag{2}$$

Remarca 1. Soluţie analitică exactă pentru $l_k(s)$ nu există, astfel pentru obţinerea lui $l_k(s)$ este necesar de a avea soluția pentru ecuaţia funcţională $\pi_k^{\delta}(s)$ din relația (1), care nu dispune de soluţie analitică exactă. Însă (2) poate fi determinată numeric. În acest scop au fost elaboraţi algoritmi numerici care permit obţinerea valorii numerice a lui $l_k(s)$ cu exactitatea cerută. Algoritmii elaboraţi se bazează pe soluţionarea numerică a ecuaţiei generalizate Pollaczek-Khintchin.

În *paragraful* 2.4 sunt prezentați algoritmi numerici și exemple pentru determinarea repartiţiei lungimii virtuale a șirului de așteptare pentru diferite funcţii de repartiţie a timpului de servire al cerințelor de clasă *k* şi a timpului de orientare către şirul de aşteptare *k*, pentru sistemele de aşteptare Polling cu vacanțe semi-Markoviene și servire exhaustivă.

Algoritmul 1

Date de intrare: $\{\lambda_k\}_{k=1}^{r}$; $\{b_k\}_{k=1}^{r}$; $\{\bar{c}_k\}_{k=1}^{r}$; s; r; $\varepsilon > 0$.

Date de ieşire: k; $\{\pi_k(s)\}_{k=1}^{r}$; $\{\pi_k^{\delta}(s)\}_{k=1}^{r}$; $\{l_k(s)\}_{k=1}^{r}$.

Descriere:

a) Se determină transformatele Laplace-Stieltjes ale funcţiilor de repartiţie $B_k(x)$ *şi* $C_k(x)$, *respectiv, unde* $B_k(x)$ *şi* $C_k(x)$ *sunt ambele funcţii de repartiţie exponențiale:*

$$\beta_k(s) = \frac{b_k}{s + b_k}; \quad c_k(s) = \frac{\bar{c}_k}{s + \bar{c}_k}.$$

b) Se calculează repartiţia perioadei de ocupare $\pi_k^{\delta(n)}(s)$ *conform relațiior:*

Pentru $n = 0$, *avem* $\pi_k^{(0)}(s) = 0.$

$$\pi_k^{\delta(n)}(s) = c_k(s + \lambda_k - \lambda_k \pi_k^{(n)}(s))\pi_k^{(n)}(s),$$

$$\pi_k^{(n)}(s) = \beta_k(s + \lambda_k - \lambda_k \pi_k^{(n-1)}(s)).$$

c) Se calculează repartiția lungimii șirului de așteptare $l_k(s)$, conform formulei:

$$l_k(s) = \frac{\lambda_k}{s + \lambda_k - \lambda_k \pi_k^{\delta(n)}(s)} \left\{ \frac{c_{k1}\lambda_k s + \lambda_k(1 - c_k(s))}{s^2} + \frac{[1 - \beta_k(s)(s - \lambda_k) + \lambda_k s \beta_{k1}](c_k(s) - \pi_k^{\delta(n)}(s))}{s^2(1 - \beta_k(s))} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1 + \lambda_k \beta_{k1})(c_k(s) - \pi_k^{\delta(n)}(s))}{s(1 - \beta_k(s))^2} \right\}.$$

Condiția de oprire: $\left| \pi_k^{(n)}(s) - \pi_k^{(n-1)}(s) \right| < \varepsilon.$

Exemplul 1. Se consideră un sistem de aşteptare Polling cu vacanțe semi-Markoviene și servire exhaustivă şi k şiruri de aşteptare, $k = \overline{1,10}$. Cerințele sosesc în șirurile de aşteptare, conform fluxului de tip Poisson, cu parametrii λ_k ={0.4, 0.3, 0.6, 0.7, 0.2, 0.1, 0.1, 0.6, 0.7, 0.9}. Timpul de servire al cerințelor de clasă k este o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie exponenţială $B_k(x) = 1 - e^{-b_k x}$, $x > 0$, cu parametrii b_k ={0.1, 0.1, 0.1, 0.4, 0.1, 0.3, 0.2, 0.1, 0.2, 0.3} şi timpul de orientare de la un şir de aşteptare la şirul de aşteptare k este considerat o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie Exponenţială $C_k(x) = 1 - e^{-c_k x}$, $x > 0$, cu parametrii c_k ={0.2, 0.3, 0.5, 0.1, 0.4, 0.1, 0.3, 0.5, 0.2, 0.1}.

Tabelul 1. Valorile numerice ale repartiţiei lungimii medii a şirului de aşteptare (s = 0.4)

k	$\pi_k(s)$	$\pi_k^{\delta}(s)$	$l_k(s)$
1	0.117218	0.024597	0.321892
2	0.131483	0.041065	0.349156
3	0.095928	0.033252	0.086835
4	0.312131	0.031801	0.049447
5	0.149219	0.061524	0.353467
6	0.39449	0.070367	0.044075
7	0.298438	0.116251	0.137342
8	0.095928	0.033252	0.086835
9	0.169275	0.028654	0.077389
10	0.213025	0.01763	0.192477

În *paragraful* 2.5 sunt expuse concluziile referitoare la capitolul 2.

În **Capitolul al treilea** sunt prezentate unele noțiuni generale, clasificări, rezultate analitice cunoscute, bazate pe aparatul funcţiilor generatoare și transformatelor Laplace şi Laplace-Stieltjes pentru sistemele generalizate de aşteptare cu priorităţi. De asemenea, sunt prezentate rezultate cu privire la unele caracteristici probabilistice pentru modelele generalizate de aşteptare pentru disciplina de prioritate DD (Discretionary Discipline). Sunt descriși unii algoritmi numerici și exemple pentru determinarea perioadei de ocupare și a perioadelor auxiliare pentru diferite funcții de repartiție și scheme de servire pentru prioritatea DD.

În *paragraful* 3.1 sunt expuse conceptele generale ale modelelor generalizate cu priorități, și anume sunt specificate: disciplinele de servire absolută și relativă, disciplinele de orientare și strategia serverului în stare liberă [11].

Sistemele de aşteptare cu priorităţi constituie o clasă largă ale sistemelor de aşteptare unde cerinţele ce intră în sistem sunt distinse după importanţa lor. Regula generală de servire în sistemele de aşteptare cu priorităţi este după cum urmează: cerinţele care sunt în sistem şi au o prioritate mai mare trebuie să fie servite înaintea acelora care au o prioritate mai mică. Cu toate acestea, în astfel de sisteme modul de comportare al serverului, în esenţă, le poate diversifica. În plus, există un număr considerabil de sisteme în care serverul are nevoie de careva timp pentru a trece de la servirea unui tip de cerinţe la alt tip de cerinţe. Toate aceste specificații oferă o mare varietate de sisteme de aşteptare cu priorităţi.

În continuare, în *paragraful* 3.2 sunt definite conceptele de strategii în stare liberă ale sistemului. În sistemele de aşteptare clasice, sistemul se consideră în stare liberă, după ce acesta este liber de cerinţe (mesaje, cereri). Modul de a fi într-o stare liberă este produs după realizarea perioadei de ocupare. În cazul în care o cerere vine în sistemul de aşteptare, care este în stare liberă, această cerere va fi servită imediat. Cu începerea servirii, perioada de inactivitate a sistemului se încheie. Astfel, perioadele de ocupare (în cazul în care sunt servite cererile din şirurile de aşteptare) pentru sistemele clasice vor începe neapărat cu servirea cererii care "a deschis" perioada de ocupare. În general, situaţia este diferită pentru modelele generalizate.

Sistemul de aşteptare generalizate este un sistem de aşteptare cu cereri neomogene, care sunt reorganizate în funcţie de categoriile de omogenitate. Un anumit grad de prioritate este atribuit acestor cereri neomogene. De asemenea, comutarea procesului de servire de la o clasă de prioritate la alta nu este momentană. Cu alte cuvinte, comutarea între procesele de servire va necesita pierderi de timp. Acest timp, care este consumat la comutarea între clasele de priorităţi, este considerat o variabilă fixă şi care depinde de unii factori imprevizibili. Astfel, în lucrare, sunt prezentate strategii ale sistemului, sunt extinse legile de prioritate clasice asupra sistemelor generalizate și sunt examinate diferite scheme de servire pentru disciplinele de servire și orientare pentru diverse tipuri de priorități.

Paragraful 3.3 este dedicat repartiției perioadelor de ocupare și caracteristicilor auxiliare pentru sistemul generalizat de aşteptare cu priorităţi.

În *paragraful* 3.4 este descrisă disciplina de prioritate DD (Discretionary Discipline) și sunt descrise repartițiile perioadei de ocupare și ale caracteristicilor auxiliare. Pentru două fluxuri de cerinţe, disciplina DD, conform lucrării lui Jaiswal (1973), este descrisă după cum urmează: dacă timpul de servire a unei cerinţe este mai mică decât valoarea stabilită θ, atunci se va realiza prioritatea absolută, în caz contrar - relativă.

Să considerăm un sistem de aşteptare $M_r|G_r|1|\infty$ cu prioritatea DD: dacă timpul de servire al cerinţei a_k este mai mică decât valoarea stabilită θ_k $(k=\overline{2,r})$, atunci cerinţa sosită cu prioritatea mai mare decât k $(\sigma_{k-1}$- cerinţă$)$ va realiza prioritatea relativă, în caz contrar – absolută [17]. Duratele serviri cerinţelor a_k sunt variabile aleatoare independente B_k cu funcţiile de repartiţii $B_k(x)$, $(k=\overline{1,r})$, respectiv. Trecerea are loc numai la întreruperea servirii şi la revenirea de la servirea întreruptă. Dacă servirea cerinţei a_j este întreruptă de sosirea cerinţei a_i, $i<j$, atunci dintr-o dată începe trecerea către fluxul L_i $(\to i)$. În cazul în care sistemul va fi liber de cerinţe de prioritate mai mare ca j, trecerea către $(\to j)$ va începe, şi numai atunci serverul este pregătit să servească cerinţa întreruptă. Duratele trecerii $(\to i)$ sunt variabile aleatoare C_i cu funcţiile de repartiţii $C_i(x)$ $(i=\overline{1,r})$, respective. Variabilele aleatoare B_k şi C_i sunt independente [18].

Vom nota prin $\Pi(x)$, $\overline{\Pi}_k(x)$, $\overline{\Pi}_{kk}(x)$, $H_k(x)$, $\overline{\Pi}_{kk}^{(n)}(x)$, $N_k(x)$, $\Pi_k(x)$, $\Pi_{kk}(x)$ funcţia de repartiţie a perioadei de ocupare, k - perioadă, kk - perioadă, k - ciclu de servire, kkn - periodă, k - ciclu de trecere, Π_k - perioadă şi Π_{kk} - perioadă (definiţia acestora este similară sistemelor generalizate cu prioriăți, a se vedea monografia Gh. Mişcoi (2009)). Să considerăm, de asemenea, $\sigma_k = a_1+\cdots+a_k$, unde a_k - parametrul fluxului Poisson de prioritatea k.

Transformata Laplace-Stieltjes a funcţiei de repartiţie a k - ciclului de servire este determinată din următoarele relaţii [17].

Lema 1. Pentru schemele $I.1$, $I=\overline{1,3}$

$$h_k(s)=\int_0^{\theta_k} e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)])x}dB_k(x)+$$

$$+e^{-(\sigma_{k-1}[\overline{\pi}_{k-1}(s)-\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)])\theta_k}\int_{\theta_k}^{\infty} e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\overline{\pi}_{k-1}(s)])x}dB_k(x), \qquad (3)$$

Lema 2. Pentru schemele $I.2$, $I=\overline{1,3}$

$$h_k(s)=\{\int_0^{\theta_k} e^{-(s+\sigma_{k-1})x}dB_k(x)+e^{-\sigma_{k-1}\overline{\pi}_{k-1}(s)\theta_k}\times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)])x} dB_k(x)\} \times$$

$$\times \{1 - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)\nu_k(s) \int_0^{\theta_k} e^{-(s+\sigma_{k-1})x} [1 - B_k(x)]dx\}^{-1}, \tag{4}$$

unde $\nu_k(s)$ este exprimat:

pentru schemele $1.J$

$$\nu_k(s) = c_k(s+\sigma_{k-1})\{1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}[1 - c_k(s+\sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s)\}^{-1}, \tag{5}$$

pentru schemele $2.J$

$$\nu_k(s) = c_k(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)]), \tag{6}$$

pentru schemele $3.J$

$$\nu_k(s) = (s+\sigma_{k-1}) \int_0^\infty e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau} \{s + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s) \times$$

$$\times 1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau}]\}^{-1} dC_k(\tau), \tag{7}$$

expresiile $\overline{\pi}_k(s)$ şi $\pi_{k-1}(s)$, menţionate mai sus, sunt determinate în mod unic din relaţiile recurente ale Teoremei 3.

Teorema 3. Pentru toate schemele [17]

$$\sigma_k \overline{\pi}_k(s) = \sigma_{k-1}\overline{\pi}_{k-1}(s + a_k - a_k\overline{\pi}_{kk}(s)) + a_k\pi_{kk}(s), \tag{8}$$

$$\overline{\pi}_{kk}(s) = h_k(s + a_k - a_k\overline{\pi}_{kk}(s)), \tag{9}$$

$$\sigma_k\pi_k(s) = \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s+a_k) + \sigma_{k-1}\{\pi_{k-1}(s + a_k[1-\overline{\pi}_{kk}(s)]) -$$

$$-\pi_{k-1}(s+a_k)\}\nu_k(s + a_k[1-\overline{\pi}_{kk}(s)]) + a_k\pi_{kk}(s), \tag{10}$$

$$\pi_{kk}(s) = \nu_k(s + a_k[1-\overline{\pi}_{kk}(s)])\overline{\pi}_{kk}(s), \tag{11}$$

unde $h_k(s + a_k - a_k\overline{\pi}_{kk}(s))$ şi $\nu_k(s + a_k - a_k\overline{\pi}_{kk}(s))$ pentru fiecare dintre schemele *I.J* sunt determinate din anumite relaţii respectiv, pentru $s = s + a_k - a_k\overline{\pi}_{kk}(s)$.

Într-adevăr, dacă în sistemul de servire cu prioritatea DD vom considera $C_j = 0$, $j = 1,\dots,r$, $\theta_k = 0$ atunci vom obține un sistem de așteptare $M_r | G_r | 1$ cu prioritatea relativă. Este cunoscut, că repartiția perioadei de ocupare este definită (pentru $k = r$) din relațiile:

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\overline{\pi}_{k-1}(s)),$$

$$\overline{\pi}_{kk}(s) = h_k(s + a_k - a_k\overline{\pi}_{kk}(s)),$$

$$\sigma_k \overline{\pi}_k(s) = \sigma_{k-1}\overline{\pi}_{k-1}(s + a_k - a_k \overline{\pi}_{kk}(s)) + a_k \overline{\pi}_{kk}(s)), \qquad (12)$$

Aici notațiile noastre pentru $\overline{\pi}_{k-1}(s)$ corespund cu $\pi_{k-1}(s)$, conform Gnedenko și alții (1973). Vom lua ca exemplu schema *I*.2. Din lema 2, pentru $\theta_k = 0$, $C_j = 0$ rezultă $h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\overline{\pi}_{k-1}(s))$. Să considerăm $C_j \neq 0$, $\theta_k = \infty$, suntem în condițiile unui sistem $M_r \,|\, G_r \,|1$ cu orientare și prioritate absolută (monografia Gh. Mişcoi (2009)), astfel, din lema 2 rezultă că

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}) + \frac{\sigma_{k-1}[1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})]}{s + \sigma_{k-1}} \pi_{k-1}(s)\nu_k(s)h_k(s),$$

sau

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1})\left\{1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}}[1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)\right\}^{-1}.$$

Astfel, pentru $\theta_k = \infty$ și $C_j \neq 0$ se obțin rezultatele pentru sistemele cu prioritate absolută și orientare, a se vedea în monografia Gh. Mişcoi (2009).

În *paragraful* 3.5 este expusă repartiția lungimii șirului de așteptare pentru disciplina DD.

Vom nota prin $P_m(t)$ probabilitatea că la momentul t în șirul de așteptare sunt $m = (m_1, \ldots, m_r)$ cerințe, unde m_i este numărul de cerințe de clasa de prioritate i. Vom considera

$P(z,t) = \sum P_m(t) z^m, \quad z^m = z_1^{m_1}, \ldots, z_r^{m_r}, 0 \le z_i \le 1$, iar transformata Laplace este $p(z,s) = \int_0^\infty e^{-st} P(z,t)dt.$

Dacă vom considera sistemul generalizat de așteptare cu priorități cu disciplina absolută DD, atunci repartiția lungimea șirului de așteptare a unui k – ciclu de servire separat, în termeni de transformată Laplace, este dată de următoarea teoremă.

Teorema 4.

$$p(z,s) = \frac{1 + \sigma\pi(z,s)}{s + \sigma - \sigma\pi(s)}, \qquad (13)$$

$$\sigma_k \pi_k(z,s) = \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z,s) + \gamma_{k-1}(s,z)\nu_k(z,s) + \frac{h_k(z,s)}{z_k - h_k(s + \omega_k)} \times$$

$$\times [\gamma_{k-1}(s,z)\nu_k(s + \omega_k)\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s + a_k) - \sigma_k \pi_k(s)], \qquad (14)$$

$$\sigma_k \overline{\pi}_k(z,s) = \sigma_{k-1}\overline{\pi}_{k-1}(z,s) + h_k(z,s)\frac{\xi_k(s,z) - \xi_{k-1}(s,z)}{z_k - h_k(s + \omega_k)}, \qquad (15)$$

unde $\gamma_{k-1}(s,z) = \sigma_{k-1}[\overline{\pi}_{k-1}(s + \omega_k) - \pi_{k-1}(s + a_k)] + a_k z_k$, și $\sigma\pi(s) = \sigma_r \pi_r(s)$ sunt definite, respectiv, din teorema 3.

Vom nota prin $P(z)$ funcția generatoare a repartiției comune a lungimii șirului de așteptare pentru regimul staționar. Dacă $\rho_r < 1$

$$P(z) = \frac{1+\hat{\pi}(z)}{1+\sigma\pi_1},$$

unde $\sigma\hat{\pi}(z) = \sigma_r \pi_r(z,0), \quad \sigma\pi_1 = \sigma_r \pi_{r1}.$

În *paragraful* 3.6 sunt prezentați algoritmi numerici și exemple pentru determinarea repartiţiei perioadei de ocupare și a caracteristicilor auxiliare pentru disciplina de prioritate DD pentru diferite funcţii de repartiţie al timpul de servire al cerințelor de clasă *k* şi al timpul de orientare către şirul de aşteptare *k*.

Algoritmul 2

Date de intrare: $\{a_k\}_{k=1}^r;\ \{b_k\}_{k=1}^r;\ \{c_k\}_{k=1}^r;\ s;\ r;\ \varepsilon > 0.$

Date de ieşire: $k;\ \{h_k(s)\}_{k=1}^r;\ \{\upsilon_k(s)\}_{k=1}^r;\ \{\pi_k(s)\}_{k=1}^r.$

Descriere:

a) *Se determină transformatele Laplace-Stieltjes ale funcţiilor de repartiţie* $B_k(x)$ *şi* $C_k(x)$, *respectiv, unde* $B_k(x)$ *şi* $C_k(x)$ *sunt funcții de repartiție exponențiale.*

$$\beta_k(s) = \frac{b_k}{s+b_k};\quad c_k(s) = \frac{\bar{c}_k}{s+\bar{c}_k}.$$

b) *Se calculează repartiţia perioadei de ocupare și caracteristicilor auxiliare, conform relațiilor:*

- *dacă* $B_k < \theta_k \ (k = \overline{2,r})$ *atunci*

$$\pi_k(s) = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\pi_{k-1}(s+a_k) + \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\{\pi_{k-1}(s+a_k[1-\bar{\pi}_{kk}(s)]) -$$

$$-\pi_{k-1}(s+a_k)\}\nu_k(s+a_k[1-\bar{\pi}_{kk}(s)]) + \frac{a_k}{\sigma_k}\pi_{kk}(s);$$

$$\pi_{kk}(s) = \nu_k(s+a_k[1-\bar{\pi}_{kk}(s)])\bar{\pi}_{kk}(s);$$

$$\bar{\pi}_{kk}^{(n)}(s) = h_k(s+a_k - a_k\bar{\pi}_{kk}^{(n-1)}(s));$$

$$h_k(s) = \beta_k\left(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)]\right);$$

$$\nu_k(s) = c_k(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)]).$$

- *dacă* $B_k \geq \theta_k \ (k = \overline{2,r})$ *atunci*

$$\pi_k(s) = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\pi_{k-1}(s+a_k(1-\pi_{kk}(s))) + \frac{a_k}{\sigma_k}\pi_{kk}(s);$$

$$\pi_{kk}(s) = h_k(s + a_k - a_k\pi_{kk}(s));$$

$$h_k(s) = \beta_k(s+\sigma_{k-1})\left\{1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}\left[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})\right]\pi_{k-1}(s)\right\}^{-1};$$

$$\left|\overline{\pi}_{kk}{}^{(n)}(s) - \overline{\pi}_{kk}{}^{(n-1)}(s)\right| < \varepsilon;$$

Condiţia de oprire: $k = r.$

Exemplul 2. Se consideră un sistem de aşteptare generalizat cu prioritatea DD pentru schema 2.3: orientarea-timpul rămas, servirea-continuă timpul rămas de servire, format din *k* şiruri de aşteptare $k = \overline{1,9}$. Cerințele sosesc în șirurile de așteptare conform fluxului Poisson, cu parametrii a_k = {0.6, 0.1, 0.9, 0.2, 0.3, 0.7, 0.5, 0.1, 0.3}. Timpul de servire al cerințelor de clasă *k* este o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie exponenţială, $B_k(x) = 1 - e^{-b_k x}$, $x > 0$, cu parametri b_k = {0.2, 0.4, 0.8, 0.9, 0.2, 0.3, 0.1, 0.2, 0.6} şi timpul de orientare de la un şir de aşteptare la şirul *k* este considerat o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie exponenţială, $C_k(x) = 1 - e^{-c_k x}$, $x > 0$ cu parametri c_k = {0.3, 0.1, 0.2, 0.7, 0.3, 0.4, 0.5, 0.1, 0.8}. Valoarea stabilită $\theta_k = 0.4$, $s = 0.2$, $\varepsilon = 10^{-5}$. Rezultatele numerice ale caracteristicilor de performanță pentru sistemul menționat sunt prezentate în Tabelul 2.

Tabelul 2. Valorile numerice ale repartiţiei *k*-perioadei de ocupare și caracteristici auxiliare pentru prioritatea DD

k	$h_k(s)$	$\nu_k(s)$	$\pi_k(s)$
1	0.666666	0.333333	0.186139
2	0.723293	0.000000	0.506333
3	0.372252	0.000000	0.437902
4	0.091455	0.000000	0.312222
5	0.323268	0.355876	0.043644
6	0.333333	0.714285	0.060384
7	0.223194	0.129902	0.043979
8	0.432717	0.508384	0.074951
9	0.196031	0.000000	0.129207

Exemplul 3. Se consideră un sistem de aşteptare generalizat cu prioritatea DD pentru schema 1.3: orientarea-din nou, cu timp nou de realizare; servirea-continuă timpul rămas de servire, format din *k* şiruri de aşteptare $k = \overline{1,9}$. Cerințele sosesc în șirurile de așteptare conform fluxului de tip Poisson, cu parametrii a_k = {0.2, 0.5, 0.3, 0.1, 0.8, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7}. Timpul de servire al cerințelor de clasă *k*

este o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie exponenţială, $B_k(x) = 1 - e^{-b_k x}$, $x > 0$, cu parametrii b_k = {0.2, 0.1, 0.8, 0.2, 0.1, 0.1, 0.6, 0.3, 0.2} şi timpul de orientare de la un şir de aşteptare la şirul k este considerat o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie exponenţială, $C_k(x) = 1 - e^{-c_k x}$, $x > 0$ cu parametrii c_k = {0.2, 0.4, 0.9, 0.3, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.2}. Valoarea stabilită $\theta_k = 0.3$, $s = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Tabelul 3. Valorile numerice ale repartiţiei *k*-perioadei de ocupare şi caracteristici auxiliare pentru prioritatea DD

k	$h_k(s)$	$\nu_k(s)$	$\pi_k(s)$
1	0.500000	0.800000	0.070265
2	0.580376	0.614390	0.290623
3	0.154268	0.000000	0.148270
4	0.091700	0.099534	0.002969
5	0.271605	0.053822	0.006230
6	0.857142	0.666666	0.319176
7	0.244746	0.000000	0.204944
8	0.115296	0.000000	0.092162
9	0.050040	0.050810	0.001310

În *paragraful 3.7* sunt prezentate concluziile cu privire la la capitolul 3.

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

Concluzii generale asupra rezultatelor obţinute. Problema analizată în teza de doctor "*Modele Polling cu priorități, vacanțe semi-Markoviene și servire exhaustivă*" ține de direcția de cercetare din teoria așteptării și constă în studiul modelelor matematice, modele care au un rol important în analiza, modelarea şi eficientizarea diferitor procese reale, în care apar fenomene de aşteptare, cum ar fi centrele de apel public, reţelele contemporane, procesele de producție, etc. Rezultatele teoretice obținute cu privire la algoritmii de modelare a lungimii virtuale a șirului de așteptare pentru sistemele Polling cu întârzieri semi-Markoviene și algoritmii de calcul a perioadei de ocupare și a caracteristicilor auxiliare pentru modelele generalizate de așteptare cu priorităţi, care pot fi privite ca o clasă specială a modelelor Polling, conduc la următoarele concluzii:

1. s-au studiat unele modele de așteptare clasice pentru care s-au descris domeniile de aplicare şi s-au prezentat rezultate analitice [1], [6], [7].
2. s-au elaborat algoritmi și modelări numerice pentru determinarea repartiţiei lungimii virtuale a șirului de așteptare pentru sistemele Polling cu întârzieri semi-Markoviene pentru diverse funcții de repartiție [13], [15], [21], [24].
3. au fost formalizate și studiate rezultatele analitice pentru perioada de ocupare şi caracteristici auxiliare ale sistemelor generalizate de aşteptare cu disciplina de prioritate DD (Discretionary Discipline) [11], [17], [23].
4. au fost elaborați algoritmi de calcul pentru determinarea repartiţiei perioadei de ocupare și a caracteristicilor auxiliare pentru sistemele generalizate de aşteptare cu priorități [17].
5. au fost efectuate modelări numerice pentru diverse scheme și funcții de servire pentru determinarea caracteristicilor de performanță ale sistemelor de aşteptare cu prioritatea DD și s-a stabilit viabilitatea sistemului în dependență de parametrii de intrare [17], [18].
6. s-au realizat produse program pentru algoritmii elaborați în limbajele de programare C++ și Kotlin [21], [24].

Rezultatele prezentate în teză pot servi ca suport pentru continuarea cercetărilor în această direcție și au ca scop de a prezenta algoritmi numerici pentru calculul unor caracteristici de performanță probabiliste pentru diverse legi de repartiție a timpului de servire și orientare pentru modelele studiate.

Problema științifică importantă soluționată rezidă în determinarea unor valori mai optime ale caracteristicilor probabiliste pentru modelele Polling, rezultatele obținute atât în urma analizei modelelor de așteptare, cât şi a funcțiilor de repartiție, legilor de prioritate, schemelor de servire și orientare, fapt care permite stabilirea staționarității și eficienței sistemului de așteptare.

Rezultatele obținute, din punct de vedere aplicativ, ne dau posibilitatea de a determina parametrii şi indicatorii pentru estimarea calităţii servirii, spre exemplu, reţelele contemporane sunt deja înzestrate cu tehnologiile de reţea de tip QoS (quality of service). Aspectul aplicativ al rezultatelor prezentate este deosebit de important dat fiind că QoS şi CoS (class of service) prezintă un aspect cheie în viitoarele tehnologii de reţea.

Recomandări. În calitate de sugestii ale autorului privind cercetările de perspectivă vom considera cele ce urmează:

- rezultatele obținute în teză pot fi considerate ca suport pentru continuarea cercetărilor ştiinţifice la analiza diverselor tipuri de modele de aşteptare;
- aplicarea metodologiilor prezentate pentru determinarea altor caracteristici probabiliste de performanță ale sistemelor de așteptare Polling cu vacanțe semi-Markoviene și servire exhaustivă, cât și pentru sistemele generalizate de aşteptare cu disciplina de prioritate DD;
- depistarea unor domenii potențiale de aplicare, cum ar fi: în ingineria și tehnologia rețelelor, în medicină, în sistemele de producție, etc. care ar permite modelarea și soluționarea problemelor, în care apar fenomene de așteptare similare modelelor matematice descrise pentru sistemele de așteptare Polling cu vacanțe semi-Markoviene și servire exhaustivă, cât și pentru sistemele generalizate de aşteptare cu legea de prioritatea DD.

PUBLICAŢIILE AUTORULUI LA TEMA TEZEI

1. Mitev L. Aplicații ale modelelor Polling în sistemele informatice de comunicații. În: Studii Economice, 2015, an. 9, nr. 1, p. 200-208.
2. Mitev L. Repartiţia perioadei de ocupare şi caracteristici auxiliare pentru modelul cu prioritatea DD. În: Teze ale Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale a doctoranzilor „Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători”. Chişinău: UnAŞM, 2015, p. 22.
3. Mişcoi Gh., Bejenari D., Mitev L. Lucrări de laborator la Teoria Aşteptării (lb. rom., rusă, engl.). Ciclul de lucrări de laborator. Chişinău: ULIM, 2014, 103 p.
4. Mitev L. Modele şi metode în studierea sistemelor Polling. În: Studia Universitatis, Seria ştiinţe exacte şi economice, 2014, nr. 2 (72), p. 34-38.
5. Mitev L.Valoarea medie a perioadei de ocupare pentru modelul polling cu vacanţe semi-Markoviene. În: Teze ale Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale a doctoranzilor „Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători”. Chişinău: UnAŞM, 2014, p. 13.

6. Mişcoi Gh., Mitev L. Metode analitice şi numerice în analiza modelelor Polling. În: Materialele Conferinţei Ştiinţifico-Practice Internaţionale „Politici economice şi financiare pentru o dezvoltare competitivă”. Chişinău: ULIM, 2013, p. 353-357.
7. Bejenari D., Mitev L. Formule aproximative pentru sisteme Polling cu timp discret. În: Studii Economice, 2012, an. VI, nr. 3-4, p. 326-331.
8. Mişcoi Gh., Bejenari D., Mitev L., Ticu R., Costea A. Algoritmi numerici cu aproximaţii succesive în soluţionarea caracteristicilor modelelor exhaustive Polling. În: Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale „Strategii de dezvoltare socio-economică a societăţii în condiţiile globalizării”. Chişinău: ULIM, 2012, p. 321-328.
9. Mişcoi Gh., Mitev L. Caracteristice de performanţă în evoluţia modelelor de aşteptare. În: Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale “Modelarea matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale”. Chişinău: ATIC, 2012, p. 115-127.
10. Mişcoi Gh., Mitev L. Exemple software pentru unele modele matematice în fenomenele de aşteptare. În: Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale „Probleme şi perspective de dezvoltare a potenţialului economic şi managerial al Republicii Moldova în condiţiile de criză”. Chişinău: ULIM, 2011, p. 364-369.
11. Mişcoi Gh., Bejenari D., Mitev L. Modele semi-Markoviene de servire cu priorităţi. În: Analele ULIM, Seria Economie, 2011, vol. 11, p. 95-105.
12. Mişcoi Gh., Bejenari D., Usatîi L. Modelarea perioadei de ocupare şi a repartiţiei şirului de aşteptare pentru sisteme Polling cu servire exhaustivă. În: Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale “Modelarea matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale”. Chişinău: ATIC, 2010, p. 168-176.
13. Mişcoi Gh., Bejenari D., Mitev L., Ţicu I.R. Numerical solutions of Kendall and Pollaczek-Khintchin equations for exhaustive polling systems with semi-Markov delays. In: Computer Science Journal of Moldova, 2016, vol. 24, nr. 2(71), p. 255-272.
14. Bejenari D., Attahiru S. Alfa, Mishkoy Gh., Mitev L. Auxiliary busy periods for $M_2|G_2|1$ system with PH distribution and strategy ”reset-to-zero”. In: Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50th anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science "IMCS-50". Chişinău: IMI, 2014, p. 314-317.
15. Mishkoy Gh., Bejenari D., Mitev L. Performance characteristics for semi-Markov polling models with exhaustive service. In: Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50th anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science "IMCS-50". Chişinău: IMI, 2014, p. 394-397.

16. Bejenari D., Mitev L. Some probabilistic characteristics for queueing systems with two priority classes, semi-Markov orientation and strategy in the free state. In: Abstracts of the International Conference “Mathematics Days in Sofia” – MDS 2014. Sofia, Bulgaria, 2014, p. 85.
17. Mishkoy Gh., Mitev L. Performance characteristics for DD priority discipline with semi-Markov switching. In: Communications in Computer and Information Science (CCIS) Series. Springer International Publishing, 2014, p. 204-218.
18. Mishkoy Gh., Mitev L. Some questions of numerical modeling of priority discipline DD with semi-Markov switching. In: Proceedings of the 17-th International Conference on "Distributed Computer and Communication Networks (DCCN-2013): "Control, Computation, Communications. Moscow, Russia, 2013, p. 373-378.
19. Mishkoy Gh., Bejenari D., Mitev L. Kendall and Pollaczek-Khintchin equations for queueing models with semi-Markov switching. In: Abstracts of the 21st Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2013. Bucureşti, Romania, 2013, p. 65.
20. Mishkoy Gh., Mitev L., Luchian E. On priority discipline DD with semi-Markov switching. In: Abstracts of the International Conference “Mathematics & Information Technologies: Research and Education” - MITRE-2013. Chişinău: USM, 2013, p. 63.
21. Mişcoi Gh., Bejenari D., Mitev L. Numerical algorithm regarding symmetric discrete polling system. In: Proceedings of the 37th Annual Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA). Chişinău, 2013, p. 490-492.
22. Mishkoy Gh., Mitev L., Bejenari D. Numerical results for probability of states with PH distribution for Polling models. In: Abstracts of the 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2012. Chişinău, 2012, p. 166.
23. Groza O., Mishkoy Gh., Mitev L., Costea A. Method of ”catastrophes” and its application to analyze generalized queueing models. In: Studia Universitatis. Chişinău: USM, 2012, nr.2(52), p. 5-12.
24. Mishkoy Gh., Bejenari D., Mitev L. Numerical algorithms regarding Polling systems with exhaustive service. In: Abstracts of the 19th Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2011. Iaşi, Romania, 2011, p. 72.
25. Mishkoy Gh., Costaş Sv., Mitev L., Ocolitîi A. Econometrical models and structures in the queueing phenomena. In: Abstracts of the International Conference “Mathematics & Information Technologies: Research and Education - MITRE-2011”. Chişinău: USM, 2011, p. 75.

26. Mishkoy Gh., Bejenari D., Mitev L. Method of catastrophes and numerical problems in queueing theory. In: Abstracts of the International Conference “Mathematics & Information Technologies: Research and Education - MITRE-2011”. Chişinău: USM, 2011, p. 73.
27. Mişcoi Gh., Bejenari D., Mitev L. An analog of the Pollaczek-Khintchin transform equation for Polling systems. In: Abstracts of the 7th Congress of the Romanian Mathematicians. Brasov, Romania, 2011, p. 79.
28. Mişcoi Gh., Usatîi L. Queue length modeling for exhaustive Polling systems. MDA-Workshop on Modeling and Analysis of Traffic Processing in Future Generation of Internet. Bamberg, Germany, 2010, www.ktr.uni-bamberg.de.
29. Mişcoi Gh., Groza O., Usatîi L. Method of “catastrophes” and its application to analyze generalized queueing models. In: Abstracts of the 18th Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2010. Iaşi, Romania, 2010, p. 61.
30. Mişcoi Gh., Usatîi L. Queue length modeling for exhaustive Polling systems. In: Proceedings of the International Conference on Information Technologies, Systems and Networks ITNS – 2010. Chişinău: ULIM, 2010, p. 103-109.

ADNOTARE

la teza de doctor a dnei Mitev Lilia

"Modele Polling cu priorități, vacanțe semi-Markoviene și servire exhaustivă"

Teza este înaintată pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 112.03 - Cibernetică matematică şi cercetări operaţionale. Ea a fost elaborată la Universitatea Academiei de Științe a Moldovei şi Institutul de Matematică şi Informatică al Academiei de Științe a Moldovei, Chişinău, în anul 2016.

Structura tezei. Teza este scrisă în limba română şi conţine următoarele compartimente: introducere, trei capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie ce constă din 103 titluri și 2 anexe. Lucrarea conţine 108 pagini de text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 30 lucrări ştiinţifice.

Cuvintele-cheie: model de aşteptare Polling, sisteme generalizate cu priorităţi, transformata Laplace-Stieltjes, lungimea medie virtuală, perioada de ocupare, prioritatea DD.

Domeniul de studiu al tezei: Teoria Aşteptării.

Scopul şi obiectivele lucrării. Lucrarea are ca scop extinderea rezultatelor cunoscute din domeniul Teoriei Aşteptării, elaborarea a noi tehnici şi algoritmi numerici de determinare a unor caracteristici de performanță mai optime pentru modelele de aşteptare Polling cu vacanțe semi-Markoviene şi pentru cele cu prioritatea DD.

Pentru atingerea scopului propus s-au realizat următoarele obiective:

- elaborarea și aplicarea algoritmilor numerici pentru modelarea repartiţiei lungimii virtuale a șirului de așteptare pentru sistemele Polling cu întârzieri semi-Markoviene;
- formalizarea caracteristicilor probabiliste de performanță pentru sistemele generalizate de aşteptare cu prioritatea DD;
- elaborarea și aplicarea algoritmilor numerici pentru modelarea repartiţiei perioadei de ocupare și a caracteristicilor auxiliare pentru sistemele Polling cu prioritatea DD;
- implementarea algoritmilor elaboraţi în limbaje de programare în vederea estimării parametrilor funcțiilor de repartiție ce intervin în optimizarea caracteristicilor de performanță ale modelelor de aşteptare Polling.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: constă în elaborarea metodelor și algoritmilor numerici pentru determinarea unor caracteristici numerice de performanță pentru sistemele Polling, cât și pentru cele cu prioritatea DD. Astfel se poate stabili eficiența/performanța sistemului de așteptare în dependență de legile de repartiție și de prioritate, strategia sistemului în stare liberă.

Problema ştiinţifică importantă soluționată: rezidă în determinarea unor valori mai optime ale caracteristicilor probabiliste pentru modelele Polling, rezultatele obținute atât în urma analizei modelelor de aşteptare, cât şi a funcțiilor de repartiție, legilor de prioritate, schemelor de servire și orientare, fapt care permite stabilirea staționarității și eficienței sistemului de așteptare.

Semnificaţia teoretică. Rezultatele obţinute în teză pot fi utilizate pentru studiul altor sisteme reale, unde au loc fenomene de aşteptare şi determinarea altor caracteristici numerice.

Valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele prezentate permit aplicarea în diverse sfere, unde apar fenomene similare celor studiate, cum ar fi sistemele informatice, de telecomunicaţii, economice etc., care pot fi modelate matematic cu ajutorul modelelor studiate în teză.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Algoritmii elaboraţi au fost implementaţi în limbajele de programare C++ și Kotlin.

АННОТАЦИЯ
на диссертацию Митев Лилии
“Модели Поллинг с приоритетами, полу-Марковскими задержками и неограниченым обслуживанием”

Диссертация представлена на соискание учёной степени доктора математических наук по специальности 112.03 - Математическая Кибернетика и Операционные Исследования и выполнена в Университете Академии Наук Молдовы и Институте Математики и Информатики Академии Наук Молдовы, Кишинёв, 2016.

Структура работы. Диссертация написана на румынском языке и содержит: введение, три главы, выводы, библиографию, состоящую из 103 наименований, и два приложения. Основной текст диссертации написан на 108 страницах. Полученные результаты опубликованые в 30 научных работах.

Ключевые слова: модель Поллинг, обобщенные приоритетные системы, преобразование Лапласа-Стилтьеса, средняя виртуальная длина, период занятости, приоритет DD.

Область исследования: Теория массового обслуживания.

Цель исследования. Диссертация призвана расширить известные результаты из Теории массового обслуживания, а также разработка новых методов и численных алгоритмов для определения оптимальных характеристик для моделей ожидания Поллинг с полу-Марковскими задержками и для тех с приоритетом DD.

Для достижения поставленной цели, были выполнены следующие задачи:

- разработка и применение численных алгоритмов для моделирования распределения виртуальной длины очереди для моделей Поллинг с полу-Марковскими задержками;
- формализация вероятностных характеристик обобщенных систем для дисциплины с приоритетом DD;
- разработка и применение численных алгоритмов для моделирования распределения периода занятости и вспомогательных характеристик для системы Поллинг с приоритетом DD;
- внедрение разработанных алгоритмов в языках программирования для оценки параметров функций распределения, которые присутствуют в оптимизации вероятностных характеристик в моделей ожидания Поллинг.

Научная новизна и оригинальность: заключается в разработке методов и численных алгоритмов для определения численных характеристик для системы Поллинг, и для тех, с приоритетом DD. Это может определить эффективность/ производительность системы ожидания в зависимости от законов распределения, законами приоритета и стратегии системы в свободном состаянии.

Решение важной научной проблемы: заключается в определении оптимальных значений вероятностных характеристик для моделей Поллинг, получение новых результатов исходящие из анализа моделей ожидания, а также функций распределения, приоритетные законы, схем обслуживания и ориентации, что позволяет установить стационарнасть и эффективность систем.

Теоретическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы для изучения систем с ожиданием и для определения других численных характеристик.

Практическая ценность. Результаты могут быть применены в сферах, где происходят аналогичные явления, как компьютерные системы, телекоммуникации и т.п., которые могут быть математически смоделированы с использованием изученых моделей.

Внедрение результатов. Разработанные алгоритмы были реализованы на языках программирования C++ и Kotlin.

ANNOTATION

for PhD thesis by Mitev Lilia

“Polling models with priorities, semi-Markov vacations and exhaustive service”

This thesis is submitted to obtain a doctoral degree in mathematics, specialty 112.03 - Mathematical cybernetics and operational research. It was elaborated at University of the Academy of Sciences of Moldova and Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, in Chisinau, 2016.

Thesis structure. The thesis is written in Romanian and contains the following sections: introduction, three chapters, conclusions, bibliography consisting of 103 titles and two annexes. The text of thesis comprises 108 pages. The results of thesis are published in 30 scientific papers.

Keywords: Polling model, generalized queueing models with priorities, Laplace-Stieltjes transform, virtual queue length, busy period, DD priority.

The field of study of the thesis: Queueing theory.

The aim of research. The paper aims to extend the known results from Queueing theory, the development of new techniques and numerical algorithms for determining optimal performance characteristics for Polling models with semi-Markov vacations and for those with DD priority.

To achieve the intended goal has been achieved the following objectives:

- elaboration and application of numerical algorithms for modeling the distribution of virtual queue length of the Polling systems with semi-Markov vacations;
- formalization of probabilistic performance characteristics for generalized queueing systems with DD priority;
- development and application of numerical algorithms for modeling the distribution of busy period and of auxiliary characteristics for the Polling systems with DD priority;
- implementation of developed algorithms in programming languages in order to estimate parameters of distribution functions that occur in optimization of performance characteristics of the Polling queueing models.

Scientific novelty and originality: consists in the elaboration of methods and numerical algorithms for determination of numerical performance characteristics for Polling systems, and for those with DD priority. Thus it can determine the efficiency / performance of the queueing system depending on distribution laws, priority laws, strategy of the system in the free state.

The important scientific solved problem: resides in the determination of more optimal values of probabilistic characteristics for Polling models, the obtained new results both from analysis queueing models and distribution functions, priority laws, schemes of service and orientation, which allows the establishment stationarity and efficiency of the queueing system.

The theoretical significance. The obtained results from the thesis can be used to study some real systems where queueing phenomena occur and assessment of other numeric characteristics.

A**pplicative value of the thesis.** The presented results permit application in various spheres, where queueing phenomena occur, similar to studied, such as computer systems, telecommunications, economic, etc., which can be modeled using studied mathematical models.

The implementation of the scientific results. The developed algorithms were implemented in programming languages C++ and Kotlin.

MITEV LILIA

MODELE POLLING CU PRIORITĂȚI, VACANȚE SEMI-MARKOVIENE ȘI SERVIRE EXHAUSTIVĂ

112.03 - CIBERNETICĂ MATEMATICĂ

ŞI CERCETĂRI OPERAŢIONALE

Autoreferatul tezei de doctor

în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar:	Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset.	Tirajul 50 ex.
Coli de tipar:	Comanda nr.