UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

Facultatea de Matematică și Informatică

Cu titlu de manuscris

C.Z.U: 519.83

BUZATU RADU

ACOPERIREA CU MULȚIMI *d*-CONVEXE A GRAFURILOR NEORIENTATE

112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ ȘI CERCETĂRI OPERAȚIONALE

Autoreferatul tezei de doctor în științe matematice

CHIȘINĂU, 2017

Teza a fost elaborată în cadrul Departamentului Matematică al Universității de Stat din Moldova, Chișinău

Conducător ştiinţific:

CATARANCIUC Sergiu, doctor habilitat în științe matematice, profesor universitar.

Referenţi oficiali:

LOZOVANU Dumitru, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar;

PRISĂCARU Anatol, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar.

Componenţa consiliului ştiinţific specializat:

MIȘCOI Gheorghe, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, membru titular al Academiei de Științe a Moldovei – **preşedinte CȘS;**

HÂNCU Boris, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar – **secretar CȘS;**

SOLOMON Dumitru, doctor habilitat în tehnică, conferențiar cercetător;

GUȚULEAC Emilian, doctor habilitat în tehnică, profesor universitar;

POȘTARU Andrei, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar.

Susţinerea va avea loc la **23.03.2017, ora 16:00**, în ședința Consiliului științific specializat D 30.112.03–07 din cadrul Universității de Stat din Moldova, str. A. Mateevici 60, Chișinău, MD-2009, Republica Moldova, bloc IV, sala 222/4.

Teza de doctor şi autoreferatul pot fi consultate la biblioteca Universității de Stat din Moldova și la pagina web a CNAA (www.cnaa.acad.md).

Autoreferatul a fost expediat la 21.02.2017

Secretar ştiinţific al Consiliului ştiinţific specializat, Hâncu Boris
doctor, conferențiar universitar

Conducător ştiinţific, Cataranciuc Sergiu
doctor habilitat, profesor universitar

Autor Buzatu Radu

REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea și importanța temei de cercetare este determinată de necesitatea examinării complexității problemei de acoperire a unui graf neorientat cu un număr $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe, studiată parțial de către D. Artigas, S. Dantas, M. C. Dourado și J. L. Szwarcfiter în lucrările [7], [8], [9], precum și de rolul acesteia la soluționarea problemelor cu caracter practic.

Problema acoperirii grafului cu mulțimi *d*-convexe reprezintă o variație a problemei clasice de acoperire a unei mulțimi de elemente, cunoscute, în special, datorită rolului acesteia în dezvoltarea teoriei complexității algoritmilor, soluționării problemelor de optimizare discretă și multiplelor aplicații practice, menționate de către mai mulți matematicieni (a se vedea, de exemplu, lucrarea [3]). În literatura de specialitate, se acordă o atenție sporită problemelor de acoperire a unui graf. Printre acestea se regăsesc: problema acoperirii de pondere minimă cu vârfuri a grafului, acoperirea cu muchii, determinarea mulțimii de vârfuri extern stabile etc. De regulă, aceste probleme sunt *NP*-dificile. Astfel de probleme rămân a fi dificile, chiar și în cazul unor clase particulare de grafuri. De exemplu, este *NP*-dificilă și problema neponderată de acoperire cu vârfuri a grafului în cazul unui graf planar 3-regulat [15], chiar dacă la prima vedere s-ar părea că aceasta ar fi o problemă mai simplă. Din aceste considerente, prezintă interes studierea unor variații speciale ale problemei de acoperire.

Pornind de la unele probleme teoretico-aplicative D. Artigas a formulat și parțial a studiat problema acoperirii grafului cu *p* mulțimi *d*-convexe. În lucrarea [7] el a demonstrat că problema acoperiri grafului cu $p \geq 3$ mulțimi *d*-convexe arbitrare este *NP*-completă. Pentru cazul $p = 2$ problema nu a fost examinată de către autor, fiind declarată "deschisă". Ca un caz special al problemei de acoperire, D. Artigas a studiat și problema divizării grafului în mulțimi *d*-convexe. A fost demonstrat că și în acest caz problema este *NP*-completă pentru orice număr $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe [8]. Din cauza complexității problemei, s-a încercat examinarea acesteia pe unele clase de grafuri, care sunt folosite la soluționarea problemelor practice. În particular, a fost examinat cazul grafurilor triangulate, co-grafurilor, grafurilor ce reprezintă puterea ciclului etc.

Mai recent au continuat cercetările cu scopul elaborării unor algoritmi polinomiali pentru soluționarea problemei de acoperire/divizare cu mulțimi *d*-convexe a unor clase de grafuri neorientate, chestiune importantă în cazul prelucrării volumelor mari de informație la calculator. În această ordine de idei, R. Glantz și H. Meyerhenke au arătat că pentru grafurile planare există algoritm de complexitate cubică, care determină existența divizării în două mulțimi *d*-convexe [16]. În lucrarea [17] matematicienii L. N. Grippo, M. Matamala, M. D. Safe și M. J. Stein au demonstrat că toate divizările în $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe ale grafului bipartit pot fi determinate în timp polinomial.

Rezultatele obținute în ultimii 10-20 de ani se referă la un aspect important al problemei clasice de acoperire a unei mulțimi de elemente cu o familie specială de submulțimi, și anume acoperirea unei structuri discrete cu mulțimi *d*-convexe. Aceste rezultate sunt importante din punct de vedere teoretic, constituind o completare valoroasă a rezultatelor clasice cunoscute și sunt actuale prin faptul că conduc la elaborarea unor metode și algoritmi pentru rezolvarea problemelor practice: [8], [16], [17]. Totodată, este necesar de menționat că prin cercetările sale D. Artigas, R. Glantz, L. N. Grippo, S. Dantas, H. Meyerhenke, M. Matamala ș. a. au generat, la rândul său, o serie de probleme noi care merită a fi studiate datorită posibilităților teoretico-aplicative ale acestora. Printre astfel de probleme pot fi menționate: cercetarea complexității problemei de acoperire cu două mulțimi *d*-convexe; determinarea complexității problemei de acoperire cu $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe cu restricții speciale (cazul mulțimilor *d*-convexe netriviale); descrierea grafurilor neorientate cu un număr prestabilit de mulțimi *d*-convexe, ce formează o acoperire a acestora; determinarea condițiilor de existență a acoperirii și divizării în mulțimi *d*-convexe netriviale pentru unele clase de grafuri etc. Aceste probleme, împreună cu unele variații, constituie obiectul de studiu al lucrării în cauză.

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul urmărit prin realizarea tezei constă în studierea și soluționarea problemei de acoperire a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe.

În conformitate cu scopul enunțat au fost stabilite următoarele obiective ale cercetării:

- examinarea complexității problemei de acoperire a grafului cu un număr $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe;
- stabilirea condițiilor de existență a unei familii de mulțimi *d*-convexe, ce formează o acoperire a grafului neorientat;
- soluționarea problemei de acoperire a grafului cu mulțimi *d*-convexe netriviale;
- elaborarea algoritmilor pentru problema de acoperire/divizare a grafului cu mulțimi *d*-convexe;
- estimarea numărului de acoperire *d*-convexă minimă/maximă.

Suportul metodologic al cercetărilor include unele noțiuni și metode caracteristice teoriei grafurilor, teoriei convexității, metodelor de optimizare, teoriei algoritmilor, teoriei complexității etc, care sunt bine cunoscute în literatura de specialitate (a se vedea [1], [2], [10], [13], [15]), și la care autorul apelează periodic.

Noutatea științifică a rezultatelor obținute. Toate rezultatele de ordin teoretic prezente în teza de doctor sunt noi și au fost publicate în reviste recenzate. În baza acestora au fot elaborați algoritmi eficienți, ce pot fi aplicați la soluționarea problemelor practice. Gradul de noutate se exprimă prin:

- determinarea condiţiilor de existenţă a grafurilor conexe neorientate cu numărul prestabilit de acoperire/divizare *d*-convexă minimă;
- demonstrarea faptului că problema acoperirii cu două mulțimi *d*-convexe este *NP*-completă, ceea ce, împreună cu rezultatele deja cunoscute de D. Artigas, permite să considerăm problema de acoperire cu mulțimi *d*-convexe drept o problemă *NP*-completă în caz general;
- determinarea relațiilor dintre $(2,t)$-acoperirile și $(2,nt)$-acoperirile *d*-convexe și determinarea unor clase de grafuri, pentru care există astfel de acoperiri;
- demonstrarea *NP*-completitudinii problemei de existență a divizării grafului în mulțimi *d*-convexe netriviale;
- elaborarea unui algoritm polinomial pentru verificarea existenței acoperirii cu mulțimi *d*-convexe netriviale a unui graf neorientat;
- demonstrarea *NP*-completitudinii problemei de acoperire/divizare a unui graf neorientat cu număr dat $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe netriviale;
- soluționarea problemei de acoperire cu două mulțimi *d*-convexe netriviale în cazul grafurilor triangulate, grafurilor ce reprezintă puterea ciclului și grafurilor cactus;
- deducerea formulelor recurente de calcul ale numărului maxim de mulțimi *d*-convexe netriviale, care acoperă sau divizează un arbore;
- stabilirea condițiilor de existență ale numărului $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe netriviale, care acoperă/divizează un arbore;
- estimarea caracteristicelor numerice ale unor clase speciale de grafuri, obţinute prin realizarea operațiilor definite pe grafuri neorientate (numărul de acoperire *d*-convexă minimă, numărul de acoperire *d*-convexă netrivială minimă);
- elaborarea algoritmilor polinomiali pentru recunoaşterea grafurilor cu structură specială.

Problema științifică importantă soluționată *constă în demonstrarea* *NP*-completitudinii problemei de acoperire/divizare a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe, *ceea ce a condus la necesitatea studierii* condițiilor de existență a $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, ce formează acoperire/divizare unor clase de grafuri *pentru implementarea ulterioară* în construirea metodelor și algoritmilor eficienți de soluționare a problemelor aplicative.

Importanța teoretică este determinată de obținerea rezultatelor ce țin de stabilirea *NP*-completitudinii problemei de acoperire a unui graf cu două mulțimi *d*-convexe, prin care se completează rezultatele obținute de către alți matematicieni. S-a demonstrat că problema acoperirii grafului cu $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, atât în caz general cât și în cazul mulțimilor *d*-convexe netriviale, este o problemă *NP*-completă.

Valoarea aplicativă a lucrării constă în posibilitatea utilizării rezultatelor obținute la studierea mulțimilor *d*-convexe pe structuri discrete, elaborarea algoritmilor pentru problemele de acoperire/divizare a unui graf cu mulțimi *d*-convexe, ce pot fi folosite la soluționarea problemelor practice, de exemplu probleme de clusterizare a elementelor unei mulțimi pe care sunt definite relații binare.

Aprobarea rezultatelor științifice. Rezultatele științifice de bază, obținute de către autor și reflectate în prezenta lucrare, au fost prezentate la conferințe științifice de rang național și internațional, au fost publicate articole în reviste recenzate: **a) Teze la conferințe științifice de rang internațional:** *Convex covers of undirected graphs.* The 22nd conference on applied and industrial mathematics (CAIM-2014), September 18-21, 2014, Bacau, Romania [19]; *NP-completeness of graph convex cover problems.* The Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE – 2015), July 2-5, 2015, Chișinău, Republic of Moldova [25]; *Nontrivial convex 2-covers of simple connected graphs*. The 23rd conference on applied and industrial mathematics (CAIM-2015), September 17-20, 2015, Suceava, Romania [24]; *Minimum convex covers of some graph operations.* A XX-a Conferința Anuală a Societății de Științe Matematice din Romania Dedicată celei de-a 80-a aniversări a Prof. Univ. Emerit Dr. Ioan A. RUS, Mai 19-22, 2016, Baia Mare, România [29]; *Nontirivial convex partition of a tree*. The Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE – 2016), June 23-26, 2016, Chișinău, Republic of Moldova [22]; *Nontrivial convex cover of a tree.* The 24th conference on applied and industrial mathematics (CAIM-2016), September 15-18, 2016, Craiova, Romania [23]; **b) Teze la conferințe științifice de rang național:** *2-acoperirile convexe în grafuri neorientate.* Conferința Științifică „Integrare prin Cercetare și Inovare", Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, 10-11 noiembrie 2015 [26]; **c) Articole științifice publicate în reviste de specialitate din țară și de peste hotare, precum și în analele (proceedings) conferințelor:** *Convex graph covers.* Computer Science Journal of Moldova, Vol. 23, Nr. 3(69), 2015 [28]; *Covers of graphs by two convex sets.* Studia Universitatis Babeș-Bolyai, Informatica, Vol. LXI, Nr. 1, 2016 [20]; *Minimum convex cover of special nonoriented graphs*. Studia Universitatis Moldaviae, Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, Seria „Științe exacte și economice", Nr. 2(92), 2016 [21]; *Nontrivial convex covers of trees.* Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, Matematica, Nr. 3(82), 2016 [30]; *Acoperirea unui graf neorientat cu mulțimi convexe netriviale*. Analele conferinței științifice internaționale "Modelare Matematică, Optimizare și Tehnologii Informaționale": (Proceedings), Ediția a V-a, Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Chișinău, 22-25 martie 2016 [27].

Publicații la tema tezei. În total la tema tezei au fost publicate 12 lucrări științifice (a se vedea [19] – [30]), printre care: 4 articole în reviste științifice recenzate (a se vedea [20], [21], [28], [30]); 8 publicații de un singur autor (a se vedea [19] – [26]), printre care 2 articole în reviste științifice recenzate (a se vedea [20], [21]).

Volumul și structura tezei. Teza este scrisă în limba română și conține introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, adnotări în limbile română, rusă și engleză, bibliografie ce cuprinde 115 de titluri și trei anexe. Volumul total al tezei este de 149 de pagini, dintre care 122 pagini text de bază.

Cuvinte cheie: Graf neorientat, *d*-convexitate, mulțime *d*-convexă, segment metric, învelitoare *d*-convexă, problemă de optimizare, acoperire *d*-convexă, divizare *d*-convexă, *NP*-completitudine, arbore, algoritm.

CONȚINUTUL TEZEI

În **Introducere**, sunt formulate scopul și obiectivele tezei, se argumentează actualitatea și importanța temei de cercetare. Se formulează problema științifică cu menționarea importanței teoretice și a valorii aplicative a lucrării. Este dată o analiză succintă a publicațiilor la tema tezei. Se încheie acest compartiment cu o sinteză a conținutului lucrării.

Primul capitol al tezei poartă un caracter introductiv și are drept scop examinarea situației actuale în domeniul temei de cercetare. În acest capitol se descriu etapele - cheie de dezvoltare a structurilor matematice discrete și se analizează pe scurt unele dintre ele, în special grafurile, hipergrafurile și matroizii, care servesc drept modele matematic pentru rezolvarea problemelor practice. Se examinează complexitatea unor algoritmi pentru soluționarea problemelor clasice pe aceste structuri matematice și se menționează rolul acestora în optimizarea discretă, determinat în mod special de faptul că structurile discrete oferă posibilitatea soluționării eficiente a diverselor probleme de ordin teoretico-aplicativ.

Un rol important în soluționarea problemelor de optimizare pe structuri discrete îl joacă mulțimile convexe. Un model al convexității, util la soluționarea problemelor practice, îl reprezintă *d*-convexitatea, introdusă inițial prin anii ’20 ai secolului trecut de către K. Menger [18] și redescoperită apoi de către P. Soltan prin anii ’60, în legătură cu realizarea unor proiecte aplicative importante pentru economia Republicii Moldova [4], [5]. Acest tip de convexitate se aplică în cazul problemelor de amplasare a centrelor de prestare a unor servicii, frecvent întâlnite în organizarea structurilor social-economice, a problemelor de divizare a unor domenii în subdomenii ce apar la trasarea schemelor integrale și deasemenea. Din punct de vedere teoretic *d*-convexitatea a contribuit la dezvoltarea și a altor ramuri ale matematicii moderne [1].

În mod special, se analizează starea curentă ce ține de soluționarea problemei de acoperire a grafurilor neorientate cu mulțimi *d*-convexe în prisma rezultatelor obținute de către matematicienii: D. Artigas [7], R. Glantz [16], L. N. Grippo [17]. Se examinează cazul special al problemei de acoperire, când mulțimile folosite sunt disjuncte. În acest caz obținem așa numita problemă de divizare a grafului în mulțimi *d*-convexe. Se argumentează valoarea aplicativă a problemei de acoperire a grafurilor neorientate cu mulțimi *d*-convexe.

În încheierea capitolului sunt formulate câteva probleme nerezolvate la moment și care constituie obiectul de studiu în capitolele ulterioare. Deasemenea, se formulează problema de cercetare, se menționează căile de soluționare ale acesteia, se stabilește scopul și obiectivele cercetării.

În **Capitolul doi** sunt expuse rezultatele de bază, obținute de către autor cu referite la soluționarea problemei de acoperire a grafului neorientat cu mulțimi *d*-convexe împreună cu unele variații ale acesteia. Problema în cauză a fost formulată, și parțial rezolvată, de către D. Artigas [7] și reprezintă, de fapt, un caz special al problemei generale de acoperire a unei mulțimi de elemente cu o familie de submulțimi de pondere minimă [3].

Vom nota prin $G=(X;U)$ un graf neorientat cu mulțimea de vârfuri *X*, $|X|=n$, și mulțimea de muchii *U*, $|U|=m$. Pentru a indica mulțimea de vârfuri și mulțimea de muchii a grafului *G* vom mai folosi și notațiile $X(G)$, $U(G)$.

Dacă asupra mulțimilor *d*-convexe nu se impun careva restricții speciale, atunci pentru orice graf neorientat există acoperire *d*-convexă. Cazul trivial ar fi atunci când graful se acoperă cu *n* mulțimi și fiecare dintre aceste mulțimi este formată dintr-un singur vârf. Desigur, prezintă interes studierea cazului când graful se acoperă cu un număr minim de mulțimi *d*-convexe.

În paragraful 2.1 sunt examinate grafurile neorientate pentru care există acoperire cu un număr minim prestabilit $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe. Problema devine mai interesantă când mulțimile *d*-convexe sunt netriviale. În acest caz putem vorbi despre acoperirea cu un număr minim și număr maxim de mulțimi *d*-convexe netriviale. Sunt studiate grafurile pentru care există acoperire cu un număr minim prestabilit și cu un număr maxim prestabilit de mulțimi *d*-convexe netriviale.

În legătură cu examinarea mulțimilor *d*-convexe pentru soluționarea problemei enunțate, vom folosi un șir de noțiuni clasice, printre care și noțiunile de ***segment metric***, ***învelitoare d-convexă***, definite în lucrarea [1].

Definiția 2.4. [7] *Familia de mulțimi, notată prin* $\mathcal{P}(G)$, *formează o* ***acoperire d-convexă*** *a grafului G dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:*

a) fiecare mulțime din $\mathcal{P}(G)$ *este d-convexă în G;*

b) $X = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}(G)} Y$ *;*

c) $Y \not\subset \bigcup_{Z \in \mathcal{P}(G), Z \neq Y} Z$, *pentru orice* $Y \in \mathcal{P}(G)$.

Dacă $|\mathcal{P}(G)| = p$, atunci vom spune că $\mathcal{P}(G)$ este o ***p-acoperire d-convexă*** a grafului *G* și o vom nota prin $\mathcal{P}_p(G)$ [7]. În mai multe probleme cu caracter teoretico-aplicativ se folosește un caz special al acoperirii *d*-convexe și anume, divizarea *d*-convexă a grafului. Dacă pe lângă proprietățile a) – c) mulțimile familiei $\mathcal{P}_p(G)$ sunt și disjuncte două câte două, atunci vom spune că $\mathcal{P}_p(G)$ formează o ***p-divizare d-convexă*** a grafului *G* [9].

Conform definiției mulțimii *d*-convexe într-un graf neorientat, aceasta poate fi formată și dintr-un singur vârf, din două vârfuri sau poate coincide cu mulțimea tuturor vârfurilor din graf. Astfel de mulțimi sunt în orice graf neorientat și se mai numesc mulțimi *d*-convexe ***triviale***. Mulțimea *d*-convexă *A* a grafului $G = (X;U)$ se numește ***netrivială*** dacă $3 \leq |A| \leq |X| - 1$. În cazul când elementele familiei $\mathcal{P}(G)$ sunt mulțimi *d*-convexe netriviale, spunem că $\mathcal{P}(G)$ formează ***acoperire/divizare d-convexă netrivială*** a grafului *G*.

Definiția 2.7. [7] *Cel mai mic număr întreg* $p \geq 2$, *pentru care există p-acoperire d-convexă a grafului G se numește* **număr de acoperire d-convexă minimă** *a acestui graf și se notează prin* $\varphi_c^{\min}(G)$. *Respectiv, cel mai mic număr întreg* $p \geq 2$, *pentru care există p-divizare d-convexă a grafului G se numește* **număr de divizare d-convexă minimă** *a acestui graf și se notează prin* $\theta_c^{\min}(G)$.

În mod similar în teză se definește:

$\varphi_{cn}^{\min}(G)$ – ***numărul de acoperire d-convexă netrivială minimă*** a grafului *G*;

$\theta_{cn}^{\min}(G)$ – ***numărul de divizare d-convexă netrivială minimă*** a grafului *G*;

$\varphi_{cn}^{\max}(G)$ – ***numărul de acoperire d-convexă netrivială maximă*** a grafului *G*;

$\theta_{cn}^{\max}(G)$ – ***numărul de divizare d-convexă netrivială maximă*** a grafului *G*;

Deoarece orice divizare *d*-convexă a unui graf netrivial *G* reprezintă totodată și o acoperire a acestui graf cu mulțimi *d*-convexe, este adevărată relația:

$$\varphi_c^{\min}(G) \leq \theta_c^{\min}(G)$$

Desigur, orice divizare d-convexă netrivială a grafului G reprezintă o acoperire a acestui graf cu mulțimi d-convexe netriviale. Prin urmare, dacă G poate fi divizat în mulțimi d-convexe netriviale, atunci au loc inegalitățile:

a) $\varphi_c^{\min}(G) \le \varphi_{cn}^{\min}(G) \le \varphi_{cn}^{\max}(G)$,

b) $\theta_c^{\min}(G) \le \theta_{cn}^{\min}(G) \le \theta_{cn}^{\max}(G)$,

c) $\varphi_c^{\min}(G) \le \theta_c^{\min}(G)$, $\varphi_{cn}^{\min}(G) \le \theta_{cn}^{\min}(G)$, $\varphi_{cn}^{\max}(G) \ge \theta_{cn}^{\max}(G)$.

În cazul când G nu poate fi divizat în mulțimi d-convexe netriviale, dar poate fi acoperit cu mulțimi d-convexe netriviale, are loc doar inegalitatea a).

În lucrarea se demonstrează existența grafului G cu numărul de acoperire minimă prestabilit:

Teorema 2.1. *Pentru orice două numere* $p,n \in N$*, care satisfac condiția* $2 \le p \le n-2$*, există un graf conex neorientat* $G=(X;U)$ *cu parametrii* $|X|=n$ și $\varphi_c^{\min}(G)=p$.

Un interes special în lucrarea revine studierii problemei de acoperire a grafului cu mulțimi d-convexe netriviale. Evident, trebuie studiat cazul grafurilor cu numărul de vârfuri $n \ge 4$. Printr-o verificare simplă ne convingem că dacă $n=4$, atunci graful G poate fi acoperit doar cu două mulțimi d-convexe netriviale dacă și numai dacă G nu este un ciclu de lungimea 4. Dacă $n \ge 5$, atunci prin Teoremele 2.3 ş 2.4 se demonstrează:

a) $\varphi_{cn}^{\min}(G) < n-2$;

b) pentru orice două numere $p,n \in N$, $2 \le p \le n-3$*, există graf conex neorientat G cu n vârfuri, încât* $\varphi_{cn}^{\min}(G)=p$.

În cazul mulțimilor d-convexe netriviale, de rând cu acoperirea d-convexă minimă se examinează cealaltă variantă extremă – acoperirea grafului cu un număr maxim de mulțimi d-convexe netriviale. Prin Lema 2.7 se demonstrează că pentru oricare două numere $p,n \in N$, $2 \le p \le n-2$, totdeauna putem construi un graf $G=(X;U)$, pentru care $|X|=n$ și $\varphi_{cn}^{\max}(G)=p$.

În paragraful 2.1 al tezei sunt expuse și rezultate pentru problema divizării grafului în mulțimi d-convexe arbitrare și netriviale.

Rezultatele enunțate mai sus au permis să fie examinată problema acoperirii unui graf neorientat cu $p=2$ mulțimi d-convexe. Astfel în paragraful 2.2 a fost demonstrată

Teorema 2.5. *Problema acoperirii unui graf cu 2 mulțimi d-convexe este NP-completă.*

Acest rezultat completează rezultatul obținut de către D. Artigas cu referire la problema studiată și permite să declarăm încheiată studierea problemei de acoperire a grafului cu mulțimi d-convexe: *Problema acoperirii grafului cu* $p \ge 2$ *mulțimi d-convexe este NP-completă.*

Pornind de la rezultatul obținut, în teza de doctor se mai demonstrează *NP*-completitudinea problemelor:

a) *2-divizare d-convexă (cazul general);*

b) *2-divizare d-convexă netrivială;*

c) *2-acoperire d-convexă netrivială.*

Pornind de la rezultatele obținute în legătura cu studierea problemei *p*-acoperirii *d*-convexe a unui graf pentru cazul $p = 2$, în paragraful 2.3 se studiază cazul acoperirii grafului cu două mulțimi *d*-convexe, dintre care cel puțin una este netrivială.

Notăm prin $\mathcal{P}_{2,t}(G) = \{S_t, S_{nt}\}$ acoperirea lui $G = (X;U)$ cu două mulțimi *d*-convexe, dintre care S_t este trivială și S_{nt} netrivială. O astfel de acoperire se va numi ***(2,t)-acoperire d-convexă*** a grafului. În cazul când acoperirea este formată din două mulțimi *d*-convexe netriviale vom spune că avem o ***(2,nt)-acoperirea d-convexă*** $\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1, S_2\}$. Ușor ne convingem că în cazul $n = 4$ pentru graful conex *G* există (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă dacă și numai dacă $G \neq C_4$.

Fie $G = (X;U)$ un graf conex neorientat cu $n \geq 5$ vârfuri. Reamintim că un vârf *x* din *G* se numește simplicial dacă vecinătatea lui formează o clică în *G* [10].

Lema 2.9. *Pentru orice graf conex neorientat* $G = (X;U)$, $|X| \geq 5$, *sunt echivalente afirmațiile:*

1) G conține un vârf simplicial $x \in X$ *;*

2) în G există familia $\mathcal{P}_{2,t}(G) = \{S_t = \{x\}, S_{nt} = X \setminus \{x\}\}$*;*

3) în G există familia $\mathcal{P}_{2,t}(G) = \{S_t = \{x, y : x \sim y\}, S_{nt} = X \setminus \{x\}\}$.

Definim o clasă specială de grafuri conexe neorientate $\mathcal{F}$ căreia îi corespund toate grafurile $G = (X;U)$, ce satisfac următoarele condiții:

1) $X = \{a, b_1, b_2, x_1, x_2, ..., x_m\}, m \geq 1$*;*

2) $U = \{\{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, x_i\}, \{b_2, x_i\}, \{x_i, x_j\} : 1 \leq i, j \leq m\}$.

Observăm că pentu orice graf $G = (X;U) \in \mathcal{F}$, $|X| \geq 5$, există exact două (2,*t*)-acoperiri *d*-convexe: $\mathcal{P}^1_{2,t}(G) = \{\{a, b_1\}, \{b_2, x_1, x_2, ..., x_m\}\}, \mathcal{P}^2_{2,t}(G) = \{\{a, b_2\}, \{b_1, x_1, x_2, ..., x_m\}\}$.

Teorema 2.6. *Pentru orice graf* $G = (X;U) \in \mathcal{F}$ *nu există* (2,*nt*)-*acoperire d-convexă.*

Notam prin $\mathcal{J}$ familia de grafuri conexe neorientate cu $n \geq 5$ vârfuri, care nu aparțin familiei $\mathcal{F}$ și pentru care există cel puțin două (2,*t*)-acoperiri *d*-convexe, iar prin $\mathcal{H}$ familia de grafuri conexe neorientate cu $n \geq 5$ vârfuri pentru care există exact o singură (2,*t*)-acoperire *d*-convexă.

Teorema 2.7. *Pentru orice graf* $G=(X;U)\in\mathcal{J}$ *există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă.*

Evidențiem o subclasă de grafuri $\mathcal{H}'$ a clasei $\mathcal{H}$, grafurile căreia posedă proprietățile:

1) $A\bigcap B=\varnothing$, unde $A=\Gamma(x)\setminus\{y\}$, $B=\Gamma(y)\setminus\{x\}$ și $\{x,y\}$ este mulțimea trivială a (2,*t*)-acoperirii *d*-convexe;

2) pentru orice vârf $a\in A$, există un vârf $b\in B$, $a\sim b$, și invers;

3) $d-conv(A\bigcup B)=S_{nt}$, unde S_{nt} este mulțimea netrivială a (2,*t*)-acoperirii *d*-convexe;

4) $S_{nt}\neq A\bigcup B$, ceea ce implică existența vârfurilor $a\in A$, $b\in B$ și $c\in C$, pentru care $d(a,b)=2$ și $c\in\langle a,b\rangle$, unde $C=S_{nt}\setminus(A\bigcup B)$.

Notăm $\mathcal{H}''=\mathcal{H}\setminus\mathcal{H}'$.

Teorema 2.8. *Pentru orice graf* $G=(X;U)\in\mathcal{H}''$ *există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă.*

În baza rezultatelor teoretice menționate în lucrare, au fost formulați algoritmi pentru verificarea apartenenței unui graf la o clasă de grafuri: $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$. S-a demonstrat că complexitatea acestor algoritmi este polinomială. În legătura cu problema examinată este necesar de răspuns la întrebarea: Pentru un graf *G*, care aparține clasei $\mathcal{H}'$, există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă? Răspuns la această întrebare ne dă Teorema 2.11.

Teorema 2.11. *Problema* (2,*nt*)*-acoperirii a grafului din clasa* $\mathcal{H}'$ *este NP-completă.*

Pornind de la rezultatele obținute de către D. Artigas [7], [8], cele obținute de căre autor și expuse mai sus, precum și rolul mulțimilor *d*-convexe netriviale în studierea problemei de acoperire, în paragraful 2.4 se studiază cazul acoperirii/divizării grafului în mulțimi d-convexe netriviale.

Din cele demonstrate în teoremele 2.12 și 2.13, precum și consecințele 2.9 și 2.12, deducem două rezultate importatne ce vin să le completeze pe cele cunoscute în literatura de specialitate:

a) Problema p-divizării d-convexe netriviale este NP-completă pentru orice $p\geq 2$*;*

b) Problema p-acoperirii d-convexe netriviale este NP-completă pentru orice $p\geq 2$.

Nu orice graf poate fi divizat sau acoperit cu mulțimi *d*-convexe netriviale. Din aceste considerente, prezintă interes problema verificării dacă un graf *G* poate fi acoperit sau divizat în mulțimi *d*-convexe netriviale, adică există un $p\geq 2$ pentru care există o *p*-acoperire/*p*-divizare a grafului *G* în mulțimi *d*-convexe netriviale.

Observăm mai întâi că dacă un graf poate fi acoperit cu mulțimi *d*-convexe netriviale, atunci orice vârf al acestuia aparține cel puțin unei mulțimi *d*-convexe netriviale. Evident, este adevărată și afirmația reciprocă, ceea ce nu putem afirma despre cazul divizării grafului în mulțimi *d*-convexe netriviale. Pentru construirea unei acoperiri cu mulțimi *d*-convexe netriviale se propune

Algoritmul 2.3.

Input: Graf $G = (X;U)$.

Output: Acoperire cu mulțimi *d*-convexe netriviale $\mathcal{P}(G)$ sau nimic.

$\mathcal{P}(G) \leftarrow \varnothing$, $M \leftarrow \varnothing$
for every $x \in X$ **do**
  if $x \notin M$ **then**
    $flag \leftarrow 0$
    for every $y, z \in X \setminus \{x\}, y \neq z$ **do**
      $S \leftarrow d - conv(\{x, y, z\})$
      if $S \neq X$ **then**
        $\mathcal{P}(G) \leftarrow \mathcal{P}(G) \bigcup \{S\}$
        $M \leftarrow M \bigcup S$
        $flag \leftarrow 1$
        break
    if $flag = 0$ **then**
      stop: nu există nici o mulțimea *d*-convexă netrivială, care conține vârful *x*.
for every $S \in \mathcal{P}(G)$ **do**
  if $S \subseteq \bigcup_{Y \in \mathcal{P}(G), Y \neq S} Y$ **then**
    $\mathcal{P}(G) \leftarrow \mathcal{P}(G) \setminus \{S\}$
return $\mathcal{P}(G)$

Teorema 2.14. *Algoritmul 2.3 determină în timp* $O(n^4 m)$ *dacă un graf* $G = (X;U)$ *poate fi acoperit cu mulțimi d-convexe netriviale.*

Pentru problema generală de existență a unei divizări în mulțimi *d*-convexe netriviale într-un graf neorientat (***problema DMCN***) este adevărată

Teorema 2.15. *Problema DMCN este NP-completă.*

Rezultatele obținute în capitolul doi completează în mod reușit cele obținute de către alți matematicieni în domeniul soluționării problemei de acoperire a grafului cu mulțimi *d*-convexe și servesc drept suport pentru unele cercetări adiționale, descrise în capitolul trei al tezei.

În **Capitolul trei** este examinată problema de acoperire/divizare cu mulțimi *d*-convexe arbitrare/netriviale pentru diferite clase de grafuri. În capitolul precedent s-a demonstrat că atât problema centrală de acoperire a unui graf cu mulțimi *d*-convexe, precum și unele variații ale acesteia sunt *NP*-complete. Din aceste considerente merită atenție necesitatea studierii acestor probleme pe unele clase de grafuri, care se regăsesc la soluționarea problemelor practice, cu scopul obținerii rezultatelor teoretice ce ar conduce la elaborarea unor algoritmi polinomiali de soluționare a problemei de acoperire/divizare.

În paragraful 3.1 sunt stabilite condițiile de existență a acoperirii cu două mulțimi *d*-convexe netriviale pentru grafurile triangulate, grafurile ce reprezintă puterea ciclului și grafurile cactus. Aceste grafuri prezintă interes din considerente că apar deseori în calitate de model matematic la soluționarea problemelor practice. De exemplu, este bine cunoscut că pe grafurile triangulate multe probleme combinatoriale dificile se rezolvă simplu, cum ar fi problema colorării sau problema clicii maximale, iar grafurile cactus joacă un rol important la soluționarea problemelor genomicii comparative.

Teorema 3.1. *Pentru orice graf triangulat conex cu* $n \geq 4$ *vârfuri există o* 2*-acoperire d-convexă netrivială.*

Graful ce formează puterea ciclului, notat prin C_n^k, $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, este un graf pentru care $X(C_n^k) = X(C_n)$ și $U(C_n^k) = \{\{u_i, u_j\} : u_i, u_j \in X(C_n^k), d_{C_n}(u_i, u_j) \leq k\}$.

Teorema 3.2. *Pentru orice graf* C_n^k *există o* 2*-acoperire d-convexă netrivială dacă și numai dacă* $n \geq 4$, $C_n^k \neq C_4$, *și* $n \leq 2k+2$ *sau* $n \equiv 0,1,2 (\mathrm{mod}\, 2k)$.

Reamintim că graful cactus este un graf în care oricare două cicluri au cel mult un vârf comun.

Teorema 3.3. *Pentru orice graf cactus conex G cu* $n \geq 4$ *vârfuri există o* 2*-acoperire d-convexă netrivială dacă și numai dacă* $n \geq 4$ *și* $G \neq C_4$.

În paragraful 3.2 sunt expuse rezultatele obținute în cazul studierii problemei de acoperire a arborilor cu mulțimi *d*-convexe netriviale. Studierea arborilor este justificată prin faptul că deseori sistemele optime informaționale, fizice, biologice etc., se descriu printr-un arbore, iar algoritmii elaborați în acest caz sunt de o complexitate mică (deseori chiar de o complexitate liniară).

Vârful *x* al grafului *G* se numește ***rezident*** în $\mathcal{P}(G)$ dacă *x* aparține doar unei singure mulțimi din $\mathcal{P}(G)$.

Lema 3.6. *Dacă G este un arbore cu* $n \geq 4$ *vârfuri atunci există o acoperire d-convexă netrivială maximă* $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}}^{\max}(G)$, *astfel încât orice mulțime* $S \in \mathcal{P}_{\varphi_{cn}}^{max}(G)$ *conține cel puțin un vârf rezident* $x \in S$, *pentru care există un lanț* $L = [x, y, z]$, $y, z \in S$.

Fie $diam(G) \geq 4$, atunci definim mulțimea $N(G) = X(G) \setminus \left(C(G) \cup \bigcup_{y \in C(G)} \Gamma(y) \right)$.

Mulțimea $N(G)$ este vidă dacă și numai dacă orice vârf neterminal al arborelui *G* este adiacent cu cel puțin un vârf terminal din *G*, dar în acest caz are loc egalitatea $\varphi_{cn}^{\max}(G) = p$, unde $p = |C(G)|$. Considerăm în continuare $N(G) \neq \varnothing$. Fie *x* un vârf din $N(G)$, care este și un vârf de articulație al arborelui *G*. După eliminarea vârfului *x* din *G* se obțin $|\Gamma(x)|$ componente conexe G_x^y, $y \in \Gamma(x)$. Pentru fiecare vârf $y \in \Gamma(x)$, se formează o familie de subarbori:

$$\mathcal{V}_x^y(G) = {}^*G_x^y \cup \bigcup_{z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}} G_x^z ,$$

unde ${}^*G_x^y$ se obține în urma adăugării lui *x* la G_x^y, astfel încât *x* să fie adiacent cu *y*. În final, obținem familia de familii de subarbori:

$$\mathcal{V}_x(G) = \bigcup_{y \in \Gamma(x)} \mathcal{V}_x^y(G) .$$

Este obținută formula de calcul a numărului de acoperire *d*-convexă netrivială maximă a unui arbore.

Teorema 3.4. *Dacă G este un arbore, atunci:*

$$\varphi_{cn}^{\max}(G) = \begin{cases} \max\left\{ |C(G)|, \max_{x \in N(G)} \left\{ \max_{\mathcal{V}_x^y(G) \in \mathcal{V}_x(G)} \left\{ \sum_{H \in \mathcal{V}_x^y(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H) \right\} \right\} \right\}, & \text{dacă } diam(G) \geq 6 \text{ si } N(G) \neq \varnothing; \\ p, & \text{dacă } 3 \leq diam(G) \leq 5 \text{ sau } diam(G) \geq 6 \text{ si } N(G) = \varnothing; \\ p-1, & \text{dacă } diam(G) = 2; \\ 0, & \text{dacă } 0 \leq diam(G) \leq 1. \end{cases}$$

Este important să menționăm că pentru orice arbore cu $n \geq 4$ vârfuri totdeauna există *p*-acoperire *d*-convexă netrivială, $2 \leq p \leq \varphi_{cn}^{\max}(G)$.

În paragraful 3.3 se examinează problema divizării unui arbore în mulțimi *d*-convexe netriviale. În termenii mulțimilor terminale netriviale sunt obținute mai multe rezultate, în baza cărora se determină formula recurentă de calcul a numărului maxim de mulțimi terminale netriviale ce divizează un arbore și se descrie un algoritm de complexitatea $O(n^3)$ pentru soluționarea problemei de divizare în mulțimi *d*-convexe netriviale.

Vom defini două clase speciale de arbori $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$.

Clasei $\mathcal{A}$ îi corespund arborii *G*, care satisfac condițiile:

1) $X(G) = \{x, y, x_1, x_2, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_{k'}\}$, pentru care $k, k' \geq 2$;

2) $U(G) = \{\{x, y\}\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} \{\{x, x_i\}\} \cup \bigcup_{i=1}^{k'} \{\{y, y_i\}\}$.

Clasei $\mathcal{B}$ îi corespund arborii construiți după cum urmează:

1) Selectăm numerele $k \geq 0$, $k' \geq 2$, $k_1 \geq 2$ și pentru orice *i*, $2 \leq i \leq k'$, selectăm $k_i \geq 1$.

2) Dacă $k \geq 1$, atunci se definesc mulțimile $X = \{x_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} \{x_i\}$ și $U = \bigcup_{i=1}^{k} \{\{x_0, x_i\}\}$, altfel $X = \{x_0\}$ și $U = \varnothing$.

3) Obținem $X(G) = X \cup \bigcup_{i=1}^{k'} \bigcup_{j=o}^{k_i} \{x_i^j\}$, $U(G) = U \cup \bigcup_{i=1}^{k'} \{\{x_0, x_i^0\}\} \cup \bigcup_{i=1}^{k'} \bigcup_{j=o}^{k_i} \{\{x_i^0, x_i^j\}\}$.

Ușor ne convingem că diametrul arborilor ce fac parte din familia $\mathcal{A}$ este 3, iar a celor din $\mathcal{B}$ este 4. Mai mult, orice arbore din familiile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ conține cel puțin câte 6 vârfuri.

Teorema 3.7. *Pentru un arbore G există o* 2*-divizare d-convexă netrivială dacă și numai dacă este satisfăcută una din condițiile:*

a) $diam(G) \geq 5$*;*

b) $G \in \mathcal{A}$*;*

c) $G \in \mathcal{B}$.

În mod similar cu Teorema 3.5, pentru cazul divizării în mulțimi *d*-convexe netriviale este adevărată

Teorema 3.8. *Pentru orice arbore G cu* $n \geq 6$ *vârfuri totdeauna există o p-divizare d-convexă netrivială,* $2 \leq p \leq \theta_{cn}^{\max}(G)$.

Consecința 3.5. *Pentru un arbore G cu* $n \geq 6$ *vârfuri există o p-divizare d-convexă netrivială pentru orice p,* $2 \leq p \leq \theta_{cn}^{\max}(G)$*, dacă și numai dacă este satisfăcută una din condițiile:*

a) $diam(G) \geq 5$*;*

b) $G \in \mathcal{A}$*;*

c) $G \in \mathcal{B}$.

Fie $C(G)$ mulțimea vârfurilor terminale ale arborelui *G*, iar *x* un vârf, pentru care are loc una din relațiile:

a) $|\Gamma(x) \cap C(G)| \geq 2$*;*

b) există un vârf $y \in \Gamma(x)$, astfel încât $\Gamma(y) = \{x, z\}$ și $z \in C(G)$.

Definim mulțimea

$$S_x = \{x\} \cup \{v \in X(G) : v \in \Gamma(x) \cap C(G)\} \cup \{v_1, v_2 \in X(G) : \Gamma(v_1) = \{x, v_2\}, v_2 \in C(G)\},$$

pe care o vom numi ***mulțime terminală netrivială*** a arborelui *G*. Remarcăm că S_x formează o mulțime *d*-convexă netrivială a lui *G*. Prin $\mathcal{S}(G)$ vom nota familia mulțimilor terminale netriviale ale arborelui *G*. Pentru determinarea tuturor mulțimilor terminale netriviale se propune

Algoritmul 3.2.

Input: Un arbore conex neorientat $G = (X;U)$.

Output: Familia de mulțimi terminale netriviale $\mathcal{S}(G)$.

1: $\mathcal{S}(G) \leftarrow \varnothing$, $C(G) \leftarrow \varnothing$

2: **for every** $x \in X$ **do**

3: **if** $|\Gamma(x)| = 1$ **then** $C(G) \leftarrow C(G) \cup \{x\}$

4: **for every** $x \in X \setminus C(G)$ **do**

5: $flag = 0$

6: **for every** $y \in \Gamma(x)$ **do**

7: **if** $\Gamma(y) = \{x, z\}$ **and** $z \in C(G)$ **then** $flag = 1$

8: **if** $|\Gamma(x) \cap C(G)| \geq 2$ **then** $flag = 1$

9: **if** $flag = 1$ **then**

10: $S_x = \{x\} \cup \{v \in X(G) : v \in \Gamma(x) \cap C(G)\} \cup$
$\cup \{v_1, v_2 \in X(G) : \Gamma(v_1) = \{x, v_2\}, v_2 \in C(G)\}$

11: $\mathcal{S}(G) \leftarrow \mathcal{S}(G) \cup \{S_x\}$

12: **return** $\mathcal{S}(G)$

Teorema 3.9. *Algoritmul 3.2 determină în timp $O(n^2)$ familia de mulțimi terminale netriviale $\mathcal{S}(G)$ a unui arbore conex neorientat G.*

Fie $\mathcal{E}(G)$ familia de subarbori, care se obține după eliminarea din G a mulțimilor terminale netriviale din familia $\mathcal{S}(G)$. Este adevărată

Teorema 3.10. *Dacă G este un arbore, atunci:*

$$\theta_{cn}^{\max}(G) = \begin{cases} |\mathcal{S}(G)| + \sum_{G' \in \mathcal{E}(G)} \theta_{cn}^{\max}(G'), & \textit{dacă} \quad |X(G)| \geq 3; \\ 0, & \textit{dacă} \quad 0 \leq |X(G)| \leq 2. \end{cases}$$

În baza acestei teoreme se propune o procedură recursivă de complexitate polinomială $Max\theta(G)$, care determină numărul $\theta_{cn}^{\max}(G)$.

***Max*$\boldsymbol{\theta}$(*G*)**

Input: Un arbore conex neorientat $G = (X;U)$.

Output: Numărul de divizare *d*-convexă netrivială maximă $\theta_{cn}^{\max}(G)$.

1: **if** $0 \leq |X(G)| \leq 2$ **then return** 0

apply Algoritm 3.2: cu ajutorul Algoritmului 3.2 se determină familia $\mathcal{S}(G)$

for every $S \in \mathcal{S}(G)$ **do**

$\quad X \leftarrow X \setminus S$

for every $\{x, y\} \in U$ **do**

$\quad$ **if** $x \notin X$ **or** $y \notin X$ **then** $U \leftarrow U \setminus \{\{x, y\}\}$.

$\mathcal{E}(G) \leftarrow \varnothing$

for every componentă conexă $G' \in G$ **do**

$\quad \mathcal{E}(G) \leftarrow \mathcal{E}(G) \bigcup \{G'\}$

for every $G' \in \mathcal{E}(G)$ **do**

$\quad$ **apply** $Max\theta(G')$

return $\theta_{cn}^{\max}(G) = |\mathcal{S}(G)| + \sum_{G' \in \mathcal{E}(G)} \theta_{cn}^{\max}(G')$

Teorema 3.11. *Procedura* $Max\theta(G)$ *determină în timp* $O(n^3)$ *numărul de divizare d-convexă netrivială maximă* $\theta_{cn}^{\max}(G)$ *a arborelui G.*

Se finalizează acest capitol cu unele estimări ale numerelor $\varphi_c^{\min}(G)$ și $\varphi_{cn}^{\min}(G)$ pentru clase speciale de grafuri. Mulțimile *d*-convexe pentru clasele speciale de grafuri obținute din operațiile fundamentale au fost studiate de mai mulți matematicieni (a se vedea lucrările [6], [11], [12]). Pentru a indica o muchie cu extremitățile *x* și *y* vom folosi notația *xy*.

Suma grafurilor *G* și *H*, notată prin $G + H$, este un graf cu mulțimea de vârfuri $X(G+H) = X(G) \bigcup X(H)$ și $U(G+H) = U(G) \bigcup U(H) \bigcup \{xy : x \in X(G), y \in X(H)\}$.

Teorema 3.13. *Pentru graful conex G cu n vârfuri și graful complet* K_m *cu m vârfuri sunt adevărate afirmațiile:*

1) $\varphi_c^{\min}(G + K_m) = 2$, *dacă G este graf complet;*

2) $\varphi_{cn}^{\min}(G + K_m) = 2$, *dacă G este graf complet și* $n + m \geq 4$*;*

3) $\varphi_c^{\min}(G + K_m) = \varphi_{cn}^{\min}(G + K_m) = \varphi_c^{\min}(G)$, *dacă* $diam(G) = 2$*;*

4) $\varphi_c^{\min}(G + K_m) = \varphi_{cn}^{\min}(G + K_m) \leq \varphi_c^{\min}(G)$, *dacă* $diam(G) \geq 3$.

Teorema 3.15. *Pentru două grafuri conexe necomplete G și H este adevărată relația:*

$$\theta(G+H) = \varphi_c^{\min}(G+H) = \varphi_{cn}^{\min}(G+H) = \max\{\theta(G), \theta(H)\}.$$

Produsul cartezian al grafurilor *G* și *H*, notat prin $G \times H$, este un graf cu mulțimea de vârfuri $X(G) \times X(H)$, în care vârfurile (g_1, h_1) și (g_2, h_2) sunt adiacente dacă și numai dacă $g_1 = g_2$ și $h_1 h_2 \in U(H)$, sau $h_1 = h_2$ și $g_1 g_2 \in U(G)$.

Teorema 3.20. *Pentru două grafuri conexe necomplete G și H este adevărată relația:*

$$\varphi_c^{\min}(G\times H)=\varphi_{cn}^{\min}(G\times H)=\min\{\varphi_c^{\min}(G),\varphi_c^{\min}(H)\}.$$

Produsul lexicografic al grafurilor G și H, notat prin $G\circ H$, este un graf cu mulțimea de vârfuri $X(G\circ H)=X(G)\times X(H)$, în care vârfurile (g_1,h_1) și (g_2,h_2) sunt adiacente dacă și numai dacă $g_1g_2\in U(G)$ sau $g_1=g_2$ și $h_1h_2\in U(H)$.

Teorema 3.23. *Pentru două grafuri conexe necomplete G și H este adevărată relația:*

$$\varphi_c^{\min}(G\circ H)=\varphi_{cn}^{\min}(G\circ H)=\theta(G\circ H)=\theta(G)\theta(H).$$

La sfârșitul lucrării sunt trei anexe ce conțin codurile sursă în limbajul C# a algoritmilor pentru:

- construirea structurilor speciale ce reprezintă acoperirile și divizările *d*-convexe ale unui graf neorientat, necesare pentru implementarea algoritmilor din anexele 2 și 3;
- construire unei acoperiri *d*-convexe netriviale și recunoaşterea grafurilor cu structură specială $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$, studiate în paragraful 2.3 și 2.4;
- determinarea numărului de acoperire/divizare *d*-convexă maximă a unui arbore, examinate în paragraful 3.2 și 3.3.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Cercetările efectuate în cadrul tezei „*Acoperirea cu mulțimi d-convexe a grafurilor neorientate*” corespund în întregime scopului și obiectivelor expuse în întroducerea lucrării. Ținând cont de importanța problemei studiate, menționată și de către alți matematicieni (D. Artigas [7], [8], R. Glantz [16], A. V. Eremeev [3] etc.), în baza rezultatelor personale obținute de către autor în capitolul 2 și 3, putem deduce următoarele concluzii generale și recomandări.

Concluzii generale asupra rezultatelor obținute:

1. În baza rezultatelor obținute în teza de doctor a fost soluționată o problemă științifică importantă care *constă în demonstrarea NP*-completitudinii problemei de acoperire/divizare a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe, *ceea ce a condus la necesitatea studierii* condițiilor de existență a $p\geq 2$ mulțimi *d*-convexe, ce formează acoperire/divizare unor clase de grafuri *pentru implementarea ulterioară* în construirea metodelor și algoritmilor eficienți de soluționare a problemelor aplicative.

2. Problema examinată în teza de doctor „*Acoperirea cu mulțimi d-convexe a grafurilor neorientate*” reprezintă o problemă combinatorială de optimizare pe structuri discrete pentru care au fost obținute rezultate teoretice importante cu privire la complexitatea acesteia, precum și algoritmi eficienți de soluționare de complexitate polinomială în cazul unor variații a problemei studiate [20], [27], [28], [30].

3. Examinarea problemei de acoperire a grafului cu mulțimi *d*-convexe, formulată de către D. Artigas și parțial rezolvată de către acesta, și obținerea rezultatelor fundamentale, prezentate în capitolul 2, permit să considerăm că problema în cauză este soluționată integral cu referire la complexitatea acesteia [25], [28].
4. Rezultatele obținute în legătura cu studierea mulțimilor *d*-convexe netriviale au condus la obținerea unor rezultate importante cu privire la acoperirea grafului cu astfel de mulțimi, ceea ce reprezintă o problemă mai firească din punct de vedere aplicativ [27], [28], [30].
5. Rezultatele cu privire la acoperirea și divizarea cu mulțimi *d*-convexe netriviale a grafurilor din anumite clase, au permis elaborarea unor metode eficiente de complexitate polinomială de soluționare, chestiune importantă, deoarece ambele variații ale problemei generale de acoperire s-au dovedit a fi și ele *NP*-complete [27], [30].
6. Examinarea (2,*t*)-acoperirii și (2,*nt*)-acoperirii a grafurilor neorientate, precum și corelației dintre aceste două tipuri de probleme, a condus la depistarea unor clase de grafuri pentru care există algoritmi polinomiali de soluționare a problemei de acoperire [20], [24].
7. Ideile folosite la demonstrarea formulei recurente pentru calcularea numărului maxim de mulțimi *d*-convexe netriviale, ce formează o acoperire/divizare a unui arbore au permis elaborarea metodelor și algoritmilor eficienți de soluționare a problemelor menționate pe arbori [22], [23], [30].
8. Estimările obținute pentru numărul de acoperire/divizare *d*-convexă poartă un caracter teoretic și completează într-un mod reușit rezultatele obținute în legătura cu studierea problemei de acoperire grafurilor cu mulțimi *d*-convexe de către alți matematicieni (D. Artigas, S. Dantas, R. Glantz, L. N. Grippo etc.) [21], [28], [29].
9. Algoritmi elaborați în baza rezultatelor teoretice obținute pot conduce la o soluționare mai eficientă în timp a problemelor aplicative (clusterizarea elementelor unei mulțimi, proiectarea circuitelor integrate, amplasarea punctelor de deservire etc.) [27], [30].

Algoritmii elaborați și examinați în prezenta lucrare au fost realizați sub formă de bibliotecă de algoritmi implementată în limbajul C#.

Avantajele și valoarea elaborărilor propuse: Cercetările efectuate reprezintă o extindere a cunoștințelor teoretice, ce țin de acoperirea grafurilor neorientate cu mulțimi *d*-convexe. Elaborările propuse au o valoare științifică importantă datorită gradului înalt de noutate și originalitate. Rezultatele obținute pot fi utilizate în diverse domenii și pot avea aplicații practice în diferite probleme de clusterizare pe grafuri.

Recomandări: Luând în considerație importanța teoretico-aplicativă a problemei abordate, precum și complexitatea soluționării acesteia, ar fi interesantă continuarea cercetărilor sub următoarele aspecte:

- Deoarece problemele de acoperire și divizare ale grafului în mulțimi *d*-convexe sunt *NP*-complete, ar prezenta interes elaborarea unor metode și algoritmi aproximativi sau euristici, care ar permite obținerea unor soluții satisfăcătoare ale problemelor studiate.
- Rezultatele obținute în legătura cu problema studiată ar putea fi extinse pentru unele structuri matematice mai generale, cum ar fi hipergrafurile și complexele de relații multi-are.
- Rezultatele prezentate în teza de doctor se referă la cazul grafurilor neorientate finite. Pentru a reda o completitudine integră problemei de acoperire ar fi potrivit de studiat și cazul grafurilor infinite. De exemplu, ar prezenta interes întrebarea: care ar putea fi structura grafurilor neorientate infinite ce pot fi acoperite cu $p = 1, 2, \ldots$ mulțimi *d*-convexe.
- Rezultatele obținute se încadrează în tematica unor discipline opționale predate studenților din cadrul universităților, ceea ce permite să considerăm că aceste rezultate pot servi drept suport pentru o disciplină opțională în cadrul studiilor de licență sau master.

BIBLIOGRAFIE

1. Болтянский В. Г., Солтан П. С. *Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств*. Кишинев, Штиинца, 1978.
2. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов*. Москва: Наука, 1990, 384 с.
3. Еремеев А. В., Заозерская Л. А., Колоколов А. А. *Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования*. Дискретн. анализ и исслед. опер., 2000, том 7, номер 2, с. 22–46.
4. Солтан П. С., Замбицкий Д. К., Присакару К.Ф. *Экстремальные задачи на графах и алгоритмы их решения*. Штиинца, 1973.
5. Солтан П. С., Присакару К. Ф. *Задачи Штейнера на графах*. Доклады Акад. Наук СССР, 198, 1971, с. 46–49.
6. Anand B. S., Changat M., Klavzar S., Peterin I. *Convex sets in lexicographic products of graphs*. Graphs Combin. 28, 2012, p 77–84.
7. Artigas D., Dantas S., Dourado M. C., Sxwarcfiter J. L. *Convex covers of graphs*. Matematica Contemporanea, Sociedade Brasileira de Matematica, vol.39, 2010, p 31–38.

8. Artigas D., Dantas S., Dourado M. C., Sxwarcfiter J. L. *Partitioning a graph into convex sets*. Discrete Mathematics, vol. 311, 2011, p 1968–1977.

9. Artigas D., Dourado M. C., Sxwarcfiter J. L. *Convex Partition of Graphs*. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 29, 2007, p 147–151.

10. Berge C. *Theory of graphs and its applications*. Methuen, London, 1962.

11. Canoy S. R., Garces I. J. L. *Convex sets under some graph operations*. Graphs Combin. 18(4), 2002, p. 787–793.

12. Canoy S. R., Laja L. *Convex Sets in the Corona and Conjunction of Graphs*. Congressus numeratium, vol. 180, 2006, p. 207–216.

13. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, 3rd ed., 2009.

14. Dourado M. C., Gimbel J., Kratochvíl .J, G., Protti F., Szwarcfiter J. L., *On the computation of the hull number of a graph*, Discrete Mathematics, vol. 309 (2009), p. 5668–5674.

15. Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, Freeman W. H., New York, 1979.

16. Glantz R., Meyerhenke H., *Finding All Convex Cuts of a Plane Graph in Cubic Time*, Algorithms and Complexity, Lecture Notes in Computer Science, 7878, 2013, p. 246–263.

17. Grippo L. N., Matamala M., Safe M. D., Stein M. J.. *Convex p-partitions of bipartite graphs*. Theoretical Computer Science, 609, 2016, p. 511–514.

18. Menger K.. *Untersuchungen über allgemeine Metrik.* I, II, III, Math. Ann., 1928, 100, s. 75–163.

PUBLICAȚIILE AUTORULUI LA TEMA TEZEI

19. Buzatu R. *Convex covers of undirected graphs*. Proceedings of the 22nd Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM-2014, Romania, Bacău, September 18–21, 2014, p. 47–48.

20. Buzatu R. *Covers of graphs by two convex sets*. Studia univ. Babeș-Bolyai, Series Informatica, vol. LXI, no. 1, 2016, p 5–22.

21. Buzatu R. *Minimum convex cover of special nonoriented graphs*. Studia Universitatis Moldaviae, Seria "Științe exacte și economice", 2(92), 2016, p. 46–54.

22. Buzatu R. *Nontirivial convex partition of a tree*. Proceedings of International Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education", (MITRE-2016), June 23–26, Chișinău, Moldova, p. 12–13.

23. Buzatu R. *Nontrivial convex cover of a tree*. Proceedings of the 24th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM-2016, Craiova, Romania, September 15–18, p. 82.

24. Buzatu R. *Nontrivial convex 2-covers of simple connected graphs*. Proceedings of the 23rd Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM-2015, Suceava, Romania, September 17–20, 2015, p. 36–37.

25. Buzatu R. *NP-completeness of graph convex cover problems*. Proceedings of International Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education", (MITRE-2016), Chișinău, Moldova, p. 13.

26. Buzatu R. *2-acoperirile convexe în grafuri neorientate*. Rezumate ale Comunicărilor Conferinței Științifice Naționale cu Participare Internaționlă, Integrare prin Cercetare și Inovare, 10–11 noiembrie 2015, USM, Chișinău, Moldova, p. 177–180.

27. Buzatu R., Cataranciuc S. *Acoperirea unui graf neorientat cu mulțimi convexe netriviale*. Materialele Conferinței Internaționale: Modelare Matematică, Optimizare și Tehnologii Informaționale, Volumul I, 22–25 martie 2016, Chișinău, Moldova, 2016, p. 64–71.

28. Buzatu R., Cataranciuc S. *Convex graph covers*. Computer Science Journal of Moldova, vol. 23, no. 3(69), 2015, p 251–269.

29. Buzatu R. Cataranciuc S. *Minimum convex covers of some graph operations*. A XX-a Conferința Anuală a Societății de Științe Matematice din Romania Dedicată celei de-a 80-a aniversări a Prof. Univ. Emerit Dr. Ioan A. RUS, Baia Mare, 19–22 mai 2016, p. 18–19.

30. Buzatu R., Cataranciuc S. *Nontrivial convex covers of trees*. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldva, Matematica, No. 3(82), 2016, p. 72–81.

ADNOTARE

la teza de doctor „***Acoperirea cu mulțimi d-convexe a grafurilor neorientate***”, înaintată de către Buzatu Radu pentru obținerea titlului de doctor în științe matematice la specialitatea 112.03 – *Cibernetică Matematică și Cercetări Operaționale*

Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, anul 2017.

Structura tezei. Teza este scrisă în limba română și conține introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie ce cuprinde 115 de titluri. Lucrarea conține 122 pagini text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 12 lucrări științifice.

Cuvinte cheie: Graf neorientat, *d*-convexitate, mulțime *d*-convexă, segment metric, învelitoare *d*-convexă, problemă de optimizare, acoperire *d*-convexă, divizare *d*-convexă, *NP*-completitudine, arbore, algoritm.

Domeniul de studiu al tezei: Teoria grafurilor

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul urmărit prin realizarea tezei constă în studierea și soluționarea problemei de acoperire a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe. Pentru atingerea scopului sunt fixate următoarele obiective: examinarea complexității problemei de acoperire a grafului cu un număr $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe; stabilirea condițiilor de existență a unei familii de mulțimi *d*-convexe, ce formează o acoperire a grafului neorientat; soluționarea problemei de acoperire a grafului cu mulțimi *d*-convexe netriviale; elaborarea algoritmilor pentru problema de acoperire/divizare a grafului cu mulțimi *d*-convexe; estimarea numărului de acoperire *d*-convexă minimă/maximă.

Noutatea și originalitatea științifică constă în obținerea rezultatelor noi de ordin teoretico-aplicativ, grație cărora au fost completate și generalizate cele cunoscute în literatura de specialitate cu referire la problema acoperiri grafului cu mulțimi *d*-convexe, și demonstrarea că problema în cauză, împreună cu unele variații, este o problemă *NP*-completă.

Problema științifică importantă soluționată *constă în demonstrarea* *NP*-completitudinii problemei de acoperire/divizare a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe, *ceea ce a condus la necesitatea studierii* condițiilor de existență a $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, ce formează acoperire/divizare unor clase de grafuri *pentru implementarea ulterioară* în construirea metodelor și algoritmilor eficienți de soluționare a problemelor aplicative.

Semnificația teoretică este determinată de obținerea rezultatelor ce țin de stabilirea *NP*-completitudinii problemei de acoperire a unui graf cu două mulțimi *d*-convexe, prin care se completează rezultatele obținute de către alți matematicieni. S-a demonstrat că problema acoperirii grafului cu $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, atât în caz general cât și în cazul mulțimilor *d*-convexe netriviale, este o problemă *NP*-completă.

Valoare aplicativă constă în posibilitatea utilizării rezultatelor obținute la studierea mulțimilor *d*-convexe pe structuri discrete, elaborarea algoritmilor pentru problemele de acoperire/divizare a unui graf cu mulțimi *d*-convexe, ce pot fi folosite la soluționarea problemelor practice, de exemplu probleme de clusterizare a elementelor unei mulțimi pe care sunt definite relații binare.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele obținute pot servi drept suport pentru unele cursuri opționale, ce țin de soluționarea problemelor de optimizare pe structuri discrete, pentru studenții și masteranzii universităților. Algoritmii elaborați sunt realizați sub formă de bibliotecă de algoritmi implementată în limbajul C#.

АННОТАЦИЯ

диссертационной работы "***Покрытие неориентированных графов d-выпуклыми множествами***", представленной автором Бузату Раду на соискание учёной степени кандидата математических наук по специальности 112.03 – Математическая Кибернетика и Исследование Операций

Диссертация выполнена в Молдавском Госуниверситете, Кишинёв, 2017 год.

Структура работы: Диссертация написана на румынском языке и содержит введение, три главы, заключение с рекомендациями, список цитируемой литературы, состоящий из 115 наименований. Работа содержит 122 страницы основного текста. Полученные результаты были опубликованы в 12 научных работах.

Ключевые слова: Неориентированный граф, d-выпуклость, d-выпуклое множество, метрический отрезок, d-выпуклая оболочка, оптимизационная задача, d-выпуклое покрытие, d-выпуклое разбиение, NP-сложность, дерево, алгоритм.

Область исследования: Теория графов.

Цель исследования. Цель кандидатской диссертации состоит в изучении задачи покрытия неориентированного графа d-выпуклыми множествами. Достижения поставленной цели включает в себя следующие аспекты: исследование сложности задачи покрытия неориентированного графа $p \geq 2$ d-выпуклыми множествами; определение условий существования семейства d-выпуклых множеств, которые покрывают неориентированный гаф; разрешение задачи покрытия графов нетривиальными d-выпуклыми множествами; разработка алгоритмов для задачи покрытия/разбиение графа d-выпуклыми множествами; вычисление максимального/минимального числа d-выпуклого покрытия.

Научная новизна и оригинальность выражается в получении теоретико-прикладных результатов, благодаря которым были дополнены и обобщены известные результаты, относящиеся к задаче покрытия графов d-выпуклыми множествами, и в доказательстве NP-полноты исследуемой задачи и различных её вариаций.

Решённая важная научная задача *состоит в доказательстве* NP-полноты задачи покрытия/разбиения неориентированного графа d-выпуклыми множествами, *которое привело к необходимости изучения* условий существования $p \geq 2$ d-выпуклых множеств, образующих покрытие/разбиение некоторых классов графов *для последующего использования в* разработке методов и эффективных алгоритмов решения прикладных задач.

Теоретическая ценность работы заключается в получении результатов связанных с NP-полнотой задачи покрытия графа двумя d-выпуклыми множествами, которые дополняют результаты, полученные другими математиками. Доказано, что задача покрытия графов d-выпуклыми множествами в общем случае и в случае нетривиальных d-выпуклых множеств является NP-полной.

Практичекая ценность работы заключается в возможности использования полученных результатов для изучения d-выпуклых множеств на дискретных структурах и в получении алгоритмов для задачи покрытия/разбиения графа на d-выпуклыме множества, которые могут быть использованы для решения исследуемой задачи на практике, например для задачи кластеризации элементов множества на котором определены бинарные отношения.

Внедрение научных результатов. Полученные результаты могут быть использованы при разработке спецкурсов, связанных с решением оптимизационных задач на дискретных структурах, для студентов университетов. Представленные в работе алгоритмы реализованы в виде библиотеки алгоритмов, написанной на языке C#.

ANNOTATION

of the thesis "**Covers of undirected graphs by convex sets**"
submitted by Buzatu Radu in partial fulfillment of the requirements for degree of PhD in Mathematics, specialty 112.03 – Mathematical Cybernetics and Operational Research

The thesis has been elaborated in Moldova State University, Chisinau, 2017.

Thesis structure: The thesis is written in romanian language and contains an introduction, three chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography of 115 titles, 122 pages of main text. The obtained results were published in 12 scientific papers.

Keywords: undirected graph, *d*-convexity, *d*-convex set, metric segment, *d*-convex hull, optimization problem, *d*-convex cover, *d*-convex partition, *NP*-completeness, tree, algorithm.

The field of study: Graph theory

The aim of the research. The purpose of this PhD thesis is to study the problem of covering undirected graphs by *d*-convex sets. To achieve the purpose the following objectives are fixed: studying complexity of the problem of covering graphs by $p \geq 2$ *d*-convex sets; establishing conditions of existence of a *d*-convex set family covering an undirected graph; solving the problem of graph covering by nontrivial *d*-convex sets; developing algorithms for the problem of graph cover/partition by *d*-convex sets; determining the minimum/maximum *d*-convex cover number.

The scientific novelty and originality is reflected in obtaining theoretical and applied results which have supplemented and generalized known results related to graph cover by *d*-convex sets and in proving of *NP*-completness of the graph *d*-convex cover problem and some of its variations.

Important scientific problem solved in the research *consists in proving* of *NP*-completeness of nonoriented graph cover/partition by *d*-convex sets, *which leads to the need to study* conditions for existence of $p \geq 2$ *d*-convex sets family, that cover/partition some graph classes *for further implementation* of methods and efficient algorithms for solving applied problems.

The theoretical significance of the research is determined by results associated with *NP*-completeness of graphs cover by two *d*-convex sets problem, which complements results in the field of study, obtained by other mathematicians. Also, it has been proven that the problems of general graphs cover by *d*-convex sets problem and graphs cover by nontrivial *d*-convex sets problem are *NP*-complete.

The applicative value of the paper consists in possibility of using obtained results for studying *d*-convex sets on discrete structures and in obtaining of algorithms for graphs cover/partition by *d*-convex sets problem, which can solve the investigated problem for practical applications, for example, for the task of clustering elements of a set with a binary relation defined over its elements.

The implementation of the scientific results. The results can be used in development of specialized courses for university students related to optimization problems on discrete structures. The developed algorithms are implemented as a library, written in C# programming language.

BUZATU RADU

ACOPERIREA CU MULȚIMI *d*-CONVEXE A GRAFURILOR NEORIENTATE

112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ ȘI CERCETĂRI OPERAȚIONALE

Autoreferatul tezei de doctor în științe matematice

Aprobat spre tipar:	Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset.	Tiraj 50 ex.
Coli de tipar:	Comanda nr.

Centrul Editorial-Poligrafic al USM str. A. Mateevici, nr 60,
Chișinău, MD-2009