UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

Facultatea de Matematică și Informatică

Cu titlu de manuscris

C.Z.U: 519.83

BUZATU RADU

ACOPERIREA CU MULȚIMI *d*-CONVEXE A GRAFURILOR NEORIENTATE

112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ ȘI CERCETĂRI OPERAȚIONALE

Teză de doctor în științe matematice

Conducător științific: **Cataranciuc Sergiu,**
doctor habilitat în științe matematice,
profesor universitar

Autorul:

CHIȘINĂU, 2017

CUPRINS

ADNOTARE

la teza de doctor „***Acoperirea cu mulțimi d-convexe a grafurilor neorientate***”, înaintată de către Buzatu Radu pentru obținerea titlului de doctor în științe matematice la specialitatea 112.03 – *Cibernetică Matematică și Cercetări Operaționale*

Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, anul 2017.

Structura tezei. Teza este scrisă în limba română și conține introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie ce cuprinde 115 de titluri. Lucrarea conține 122 pagini text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 12 lucrări științifice.

Cuvinte cheie: Graf neorientat, *d*-convexitate, mulțime *d*-convexă, segment metric, învelitoare *d*-convexă, problemă de optimizare, acoperire *d*-convexă, divizare *d*-convexă, *NP*-completitudine, arbore, algoritm.

Domeniul de studiu al tezei: Teoria grafurilor

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul urmărit prin realizarea tezei constă în studierea și soluționarea problemei de acoperire a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe. Pentru atingerea scopului sunt fixate următoarele obiective: examinarea complexității problemei de acoperire a grafului cu un număr $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe; stabilirea condițiilor de existență a unei familii de mulțimi *d*-convexe, ce formează o acoperire a grafului neorientat; soluționarea problemei de acoperire a grafului cu mulțimi *d*-convexe netriviale; elaborarea algoritmilor pentru problema de acoperire/divizare a grafului cu mulțimi *d*-convexe; estimarea numărului de acoperire *d*-convexă minimă/maximă.

Noutatea și originalitatea științifică constă în obținerea rezultatelor noi de ordin teoretico-aplicativ, grație cărora au fost completate și generalizate cele cunoscute în literatura de specialitate cu referire la problema acoperiri grafului cu mulțimi *d*-convexe, și demonstrarea că problema în cauză, împreună cu unele variații, este o problemă *NP*-completă.

Problema științifică importantă soluționată *constă în demonstrarea NP*-completitudinii problemei de acoperire/divizare a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe, *ceea ce a condus la necesitatea studierii* condițiilor de existență a $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, ce formează acoperire/divizare unor clase de grafuri *pentru implementarea ulterioară* în construirea metodelor și algoritmilor eficienți de soluționare a problemelor aplicative.

Semnificația teoretică este determinată de obținerea rezultatelor ce țin de stabilirea *NP*-completitudinii problemei de acoperire a unui graf cu două mulțimi *d*-convexe, prin care se completează rezultatele obținute de către alți matematicieni. S-a demonstrat că problema acoperirii grafului cu $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, atât în caz general cât și în cazul mulțimilor *d*-convexe netriviale, este o problemă *NP*-completă.

Valoare aplicativă constă în posibilitatea utilizării rezultatelor obținute la studierea mulțimilor *d*-convexe pe structuri discrete, elaborarea algoritmilor pentru problemele de acoperire/divizare a unui graf cu mulțimi *d*-convexe, ce pot fi folosite la soluționarea problemelor practice, de exemplu probleme de clusterizare a elementelor unei mulțimi pe care sunt definite relații binare.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele obținute pot servi drept suport pentru unele cursuri opționale, ce țin de soluționarea problemelor de optimizare pe structuri discrete, pentru studenții și masteranzii universităților. Algoritmii elaborați sunt realizați sub formă de bibliotecă de algoritmi implementată în limbajul C#.

АННОТАЦИЯ

диссертационной работы “***Покрытие неориентированных графов d-выпуклыми множествами***”, представленной автором Бузату Раду на соискание учёной степени кандидата математических наук по специальности 112.03 – Математическая Кибернетика и Исследование Операций

Диссертация выполнена в Молдавском Госуниверситете, Кишинёв, 2017 год.

Структура работы: Диссертация написана на румынском языке и содержит введение, три главы, заключение с рекомендациями, список цитируемой литературы, состоящий из 115 наименований. Работа содержит 122 страницы основного текста. Полученные результаты были опубликованы в 12 научных работах.

Ключевые слова: Неориентированный граф, d-выпуклость, d-выпуклое множество, метрический отрезок, d-выпуклая оболочка, оптимизационная задача, d-выпуклое покрытие, d-выпуклое разбиение, NP-сложность, дерево, алгоритм.

Область исследования: Теория графов.

Цель исследования. Цель кандидатской диссертации состоит в изучении задачи покрытия неориентированного графа d-выпуклыми множествами. Достижения поставленной цели включает в себя следующие аспекты: исследование сложности задачи покрытия неориентированного графа $p \geq 2$ d-выпуклыми множествами; определение условий существования семейства d-выпуклых множеств, которые покрывают неориентированный гаф; разрешение задачи покрытия графов нетривиальными d-выпуклыми множествами; разработка алгоритмов для задачи покрытия/разбиение графа d-выпуклыми множествами; вычисление максимального/минимального числа d-выпуклого покрытия.

Научная новизна и оригинальность выражается в получении теоретико-прикладных результатов, благодаря которым были дополнены и обобщены известные результаты, относящиеся к задаче покрытия графов d-выпуклыми множествами, и в доказательстве NP-полноты исследуемой задачи и различных её вариаций.

Решённая важная научная задача *состоит в доказательстве* NP-полноты задачи покрытия/разбиения неориентированного графа d-выпуклыми множествами, *которое привело к необходимости изучения* условий существования $p \geq 2$ d-выпуклых множеств, образующих покрытие/разбиение некоторых классов графов *для последующего использования в* разработке методов и эффективных алгоритмов решения прикладных задач.

Теоретическая ценность работы заключается в получении результатов связанных с NP-полнотой задачи покрытия графа двумя d-выпуклыми множествами, которые дополняют результаты, полученные другими математиками. Доказано, что задача покрытия графов d-выпуклыми множествами в общем случае и в случае нетривиальных d-выпуклых множеств является NP-полной.

Практическая ценность работы заключается в возможности использования полученных результатов для изучения d-выпуклых множеств на дискретных структурах и в получении алгоритмов для задачи покрытия/разбиения графа на d-выпуклые множества, которые могут быть использованы для решения исследуемой задачи на практике, например для задачи кластеризации элементов множества на котором определены бинарные отношения.

Внедрение научных результатов. Полученные результаты могут быть использованы при разработке спецкурсов, связанных с решением оптимизационных задач на дискретных структурах, для студентов университетов. Представленные в работе алгоритмы реализованы в виде библиотеки алгоритмов, написанной на языке C#.

ANNOTATION

of the thesis "**Covers of undirected graphs by convex sets**"
submitted by Buzatu Radu in partial fulfillment of the requirements for degree of PhD in Mathematics, specialty 112.03 – Mathematical Cybernetics and Operational Research

The thesis has been elaborated in Moldova State University, Chisinau, 2017.

Thesis structure: The thesis is written in romanian language and contains an introduction, three chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography of 115 titles, 122 pages of main text. The obtained results were published in 12 scientific papers.

Keywords: undirected graph, *d*-convexity, *d*-convex set, metric segment, *d*-convex hull, optimization problem, *d*-convex cover, *d*-convex partition, *NP*-completeness, tree, algorithm.

The field of study: Graph theory

The aim of the research. The purpose of this PhD thesis is to study the problem of covering undirected graphs by *d*-convex sets. To achieve the purpose the following objectives are fixed: studying complexity of the problem of covering graphs by $p \geq 2$ *d*-convex sets; establishing conditions of existence of a *d*-convex set family covering an undirected graph; solving the problem of graph covering by nontrivial *d*-convex sets; developing algorithms for the problem of graph cover/partition by *d*-convex sets; determining the minimum/maximum *d*-convex cover number.

The scientific novelty and originality is reflected in obtaining theoretical and applied results which have supplemented and generalized known results related to graph cover by *d*-convex sets and in proving of *NP*-completness of the graph *d*-convex cover problem and some of its variations.

Important scientific problem solved in the research *consists in proving* of *NP*-completeness of nonoriented graph cover/partition by *d*-convex sets, *which leads to the need to study* conditions for existence of $p \geq 2$ *d*-convex sets family, that cover/partition some graph classes *for further implementation* of methods and efficient algorithms for solving applied problems.

The theoretical significance of the research is determined by results associated with *NP*-completeness of graphs cover by two *d*-convex sets problem, which complements results in the field of study, obtained by other mathematicians. Also, it has been proven that the problems of general graphs cover by *d*-convex sets problem and graphs cover by nontrivial *d*-convex sets problem are *NP*-complete.

The applicative value of the paper consists in possibility of using obtained results for studying *d*-convex sets on discrete structures and in obtaining of algorithms for graphs cover/partition by *d*-convex sets problem, which can solve the investigated problem for practical applications, for example, for the task of clustering elements of a set with a binary relation defined over its elements.

The implementation of the scientific results. The results can be used in development of specialized courses for university students related to optimization problems on discrete structures. The developed algorithms are implemented as a library, written in C# programming language.

INTRODUCERE

Actualitatea și importanța temei de cercetare este determinată de necesitatea examinării complexității problemei de acoperire a unui graf neorientat cu un număr $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe, studiată parțial de către D. Artigas, S. Dantas, M. C. Dourado și J. L. Szwarcfiter în lucrările [30], [31], [32], precum și de rolul acesteia la soluționarea problemelor cu caracter practic.

Problema acoperirii grafului cu mulțimi *d*-convexe reprezintă o variație a problemei clasice de acoperire a unei mulțimi de elemente, cunoscute, în special, datorită rolului acesteia în dezvoltarea teoriei complexității algoritmilor, soluționarea problemelor de optimizare discretă și multiplelor aplicații practice, menționate de către mai mulți matematicieni (a se vedea, de exemplu, lucrarea [15]). În literatura de specialitate, se acordă o atenție sporită problemelor de acoperire a unui graf. Printre acestea se regăsesc: problema acoperirii de pondere minimă cu vârfuri a grafului, acoperirea cu muchii, determinarea mulțimii de vârfuri intern stabile etc. De regulă, aceste probleme sunt *NP*-dificile. Astfel de probleme rămân a fi dificile, chiar și în cazul unor clase particulare de grafuri. De exemplu, este *NP*-dificilă și problema neponderată de acoperire cu vârfuri a grafului în cazul unui graf planar 3-regulat, chiar dacă la prima vedere s-ar părea că aceasta ar fi o problemă mai simplă [74]. Din aceste considerente, prezintă interes studierea unor variații speciale ale problemei de acoperire.

Pornind de la unele probleme teoretico-aplicative D. Artigas a formulat și parțial a studiat problema acoperirii grafului cu p mulțimi *d*-convexe. În lucrarea [30] el a demonstrat că problema acoperiri grafului cu $p \geq 3$ mulțimi *d*-convexe arbitrare este *NP*-completă. Pentru cazul $p = 2$ problema nu a fost examinată de către autor, fiind declarată “deschisă”. Ca un caz special al problemei de acoperire, D. Artigas a studiat și problema divizării grafului în mulțimi *d*-convexe. A fost demonstrat că și în acest caz problema este *NP*-completă pentru orice număr $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe [31]. Din cauza complexității problemei, s-a încercat examinarea acesteia pe unele clase de grafuri, care sunt folosite la soluționarea problemelor practice. În particular, a fost examinat cazul grafurilor triangulate, co-grafurilor, grafurilor ce reprezintă puterea ciclului etc.

Mai recent au continuat cercetările cu scopul elaborării unor algoritmi polinomiali pentru soluționarea problemei de acoperire/divizare cu mulțimi *d*-convexe a unor clase de grafuri neorientate, chestiune importantă în cazul prelucrării volumelor mari de informație la calculator. În această ordine de idei, R. Glantz și H. Meyerhenke au arătat că pentru grafurile planare există algoritm de complexitate cubică, care determină existența divizării în două mulțimi d-convexe [76]. În lucrarea [77] matematicienii L. N. Grippo, M. Matamala, M. D. Safe și M. J. Stein au demonstrat că toate divizările în $p \geq 2$ mulțimi d-convexe ale grafului bipartit pot fi determinate în timp polinomial.

Rezultatele obținute în ultimii 10-20 de ani se referă la un aspect important al problemei clasice de acoperire a unei mulțimi de elemente cu o familie specială de submulțimi, și anume acoperirea unei structuri discrete cu mulțimi d-convexe. Aceste rezultate sunt importante din punct de vedere teoretic, constituind o completare valoroasă a rezultatelor clasice cunoscute și sunt actuale prin faptul că conduc la elaborarea unor metode și algoritmi pentru rezolvarea problemelor practice [31], [76], [77]. Totodată, este necesar de menționat că prin cercetările sale D. Artigas, R. Glantz, L. N. Grippo, S. Dantas, H. Meyerhenke, M. Matamala ș. a. au generat, la rândul său, o serie de probleme noi care merită a fi studiate datorită posibilităților teoretico-aplicative ale acestora. Printre astfel de probleme pot fi menționate: cercetarea complexității problemei de acoperire cu două mulțimi d-convexe; determinarea complexității problemei de acoperire cu $p \geq 2$ mulțimi d-convexe cu restricții speciale (cazul mulțimilor d-convexe netriviale); descrierea grafurilor neorientate cu un număr prestabilit de mulțimi d-convexe, ce formează o acoperire a acestora; determinarea condițiilor de existență a acoperirii și divizării în mulțimi d-convexe netriviale pentru unele clase de grafuri etc. Aceste probleme, împreună cu unele variații, constituie obiectul de studiu al lucrării în cauză.

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul urmărit prin realizarea tezei constă în studierea și soluționarea problemei de acoperire a unui graf neorientat cu mulțimi d-convexe.

În conformitate cu scopul enunțat au fost stabilite următoarele obiective ale cercetării:

- examinarea complexității problemei de acoperire a grafului cu un număr $p \geq 2$ de mulțimi d-convexe;
- stabilirea condițiilor de existență a unei familii de mulțimi d-convexe, ce formează o acoperire a grafului neorientat;
- soluționarea problemei de acoperire a grafului cu mulțimi d-convexe netriviale;
- elaborarea algoritmilor pentru problema de acoperire/divizare a grafului cu mulțimi d-convexe;
- estimarea numărului de acoperire d-convexă minimă/maximă.

Suportul metodologic al cercetărilor include unele noțiuni și metode caracteristice teoriei grafurilor, teoriei convexității, metodelor de optimizare, teoriei algoritmilor, teoriei complexității etc, care sunt bine cunoscute în literatura de specialitate (a se vedea [13], [14], [35], [60], [74]), și la care autorul apelează periodic.

Noutatea științifică a rezultatelor obținute. Toate rezultatele de ordin teoretic prezentate în teza de doctor sunt noi și au fost publicate în reviste recenzate. În baza acestora au fot elaborați algoritmi eficienți, ce pot fi aplicați la soluționarea problemelor practice. Gradul de noutate se exprimă prin:

- determinarea condiţiilor de existenţă a grafurilor conexe neorientate cu numărul prestabilit de acoperire/divizare *d*-convexă minimă;
- demonstrarea faptului că problema acoperirii cu două mulțimi *d*-convexe este *NP*-completă, ceea ce, împreună cu rezultatele deja cunoscute de D. Artigas, permite să considerăm problema de acoperire cu mulțimi *d*-convexe drept o problemă *NP*-completă în caz general;
- determinarea relațiilor dintre (2,*t*)-acoperirile și (2,*nt*)-acoperirile *d*-convexe și determinarea unor clase de grafuri, pentru care există astfel de acoperiri;
- demonstrarea *NP*-completitudinii problemei de existență a divizării grafului în mulțimi *d*-convexe netriviale;
- elaborarea unui algoritm polinomial pentru verificarea existenței acoperirii cu mulțimi *d*-convexe netriviale a unui graf neorientat;
- demonstrarea *NP*-completitudinii problemei de acoperire/divizare a unui graf neorientat cu număr dat $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe netriviale;
- soluționarea problemei de acoperire cu două mulțimi *d*-convexe netriviale în cazul grafurilor triangulate, grafurilor ce reprezintă puterea ciclului și grafurilor cactus;
- deducerea formulelor recurente de calcul ale numărului maxim de mulțimi *d*-convexe netriviale, care acoperă sau divizează un arbore;
- stabilirea condițiilor de existență ale numărului $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe netriviale, care acoperă/divizează un arbore;
- estimarea caracteristicelor numerice ale unor clase speciale de grafuri, obţinute prin realizarea operațiilor definite pe grafuri neorientate (numărul de acoperire *d*-convexă minimă, numărul de acoperire *d*-convexă netrivială minimă);
- elaborarea algoritmilor polinomiali pentru recunoaşterea grafurilor cu structură specială.

Problema științifică importantă soluționată *constă în demonstrarea NP*-completitudinii problemei de acoperire/divizare a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe, *ceea ce a condus la necesitatea studierii* condițiilor de existență a $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, ce formează acoperire/divizare unor clase de grafuri *pentru implementarea ulterioară* în construirea metodelor și algoritmilor eficienți de soluționare a problemelor aplicative.

Importanța teoretică este determinată de obținerea rezultatelor ce țin de stabilirea *NP*-completitudinii problemei de acoperire a unui graf cu două mulțimi *d*-convexe, prin care se completează rezultatele obținute de către alți matematicieni. S-a demonstrat că problema acoperirii grafului cu $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, atât în caz general cât și în cazul mulțimilor *d*-convexe netriviale, este o problemă *NP*-completă.

Valoarea aplicativă a lucrării constă în posibilitatea utilizării rezultatelor obținute la studierea mulțimilor *d*-convexe pe structuri discrete, elaborarea algoritmilor pentru problemele de acoperire/divizare a unui graf cu mulțimi *d*-convexe, ce pot fi folosite la soluționarea problemelor practice, de exemplu probleme de clusterizare a elementelor unei mulțimi pe care sunt definite relații binare.

Aprobarea rezultatelor științifice. Rezultatele științifice de bază, obținute de către autor și reflectate în prezenta lucrare, au fost prezentate la conferințe științifice de rang național și internațional, au fost publicate articole în reviste recenzate:

a) Teze la conferințe științifice de rang internațional:

- *Convex covers of undirected graphs.* The 22nd conference on applied and industrial mathematics (CAIM-2014), September 18-21, 2014, Bacau, Romania [40];
- *NP-completeness of graph convex cover problems.* The Conference “Mathematics & Information Technologies: Research and Education” (MITRE – 2015), July 2-5, 2015, Chișinău, Republic of Moldova [45];
- *Nontrivial convex 2-covers of simple connected graphs*. The 23rd conference on applied and industrial mathematics (CAIM-2015), September 17-20, 2015, Suceava, Romania [44];
- *Minimum convex covers of some graph operations.* A XX-a Conferința Anuală a Societății de Științe Matematice din Romania Dedicată celei de-a 80-a aniversări a Prof. Univ. Emerit Dr. Ioan A. RUS, Mai 19-22, 2016, Baia Mare, România [48];
- *Nontirivial convex partition of a tree*. The Conference “Mathematics & Information Technologies: Research and Education” (MITRE – 2016), June 23-26, 2016, Chișinău, Republic of Moldova [42];
- *Nontrivial convex cover of a tree.* The 24th conference on applied and industrial mathematics (CAIM-2016), September 15-18, 2016, Craiova, Romania [43];

b) Teze la conferințe științifice de rang național:

- *2-acoperirile convexe în grafuri neorientate.* Conferința Științifică „Integrare prin Cercetare și Inovare”, Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, 10-11 noiembrie 2015 [1];

c) Articole științifice publicate în reviste de specialitate din țară și de peste hotare, precum și în analele (proceedings) conferințelor:

- *Convex graph covers.* Computer Science Journal of Moldova, Vol. 23, Nr. 3 (69), 2015 [47];
- *Covers of graphs by two convex sets.* Studia Universitatis Babeș-Bolyai, Informatica, Vol. LXI, Nr. 1, 2016 [41];
- *Minimum convex cover of special nonoriented graphs*. Studia Universitatis Moldaviae, Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, Seria „Științe exacte și economice”, Nr. 2 (92), 2016 [46];
- *Nontrivial convex covers of trees.* Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, Matematica, Nr. 3 (82), 2016 [49];
- *Acoperirea unui graf neorientat cu mulțimi convexe netriviale*. Analele conferinței științifice internaționale “Modelare Matematică, Optimizare și Tehnologii Informaționale”: (Proceedings), Ediția a V-a, Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Chișinău, 22-25 martie 2016 [2].

În total la tema tezei au fost publicate 12 lucrări științifice, dintre care 5 articole (4 în reviste științifice recenzate și 2 fără coautori), 7 teze ale comunicărilor la conferințe.

Sumarul compartimentelor tezei. Teza este structurată în trei capitole, în care se demonstrează *NP*-completitudinea problemelor de acoperire/divizare a grafului neorientate cu mulțimi *d*-convexe arbitrare/netriviale și se determină soluția acestor probleme pentru o serie de clase de grafuri: arbori, grafuri triangulate, grafuri ce reprezintă puterea ciclului, grafuri cactus etc., ceea ce conduce la soluționarea mai multor probleme cu caracter teoretico-aplicativ. Pe lângă cele trei capitole menționate, lucrarea conține concluzii generale și recomandări, introducere, adnotările în limbile română, rusă și engleză, precum și o listă bibliografică ce cuprinde 115 titluri, trei anexe și CV-ul autorului.

În introducere, sunt formulate scopul și obiectivele tezei, se argumentează actualitatea și importanța temei de cercetare. Se formulează problema științifică cu menționarea importanței teoretice și a valorii aplicative a lucrării. Este dată o analiză succintă a publicațiilor la tema tezei. Se încheie acest compartiment cu o sinteză a conținutului lucrării.

Primul capitol al tezei poartă un caracter introductiv și are drept scop examinarea situației actuale în domeniul temei de cercetare. În acest capitol se descriu etapele - cheie de dezvoltare a structurilor matematice discrete și se analizează pe scurt unele dintre ele, în special grafurile, hipergrafurile și matroizii, care servesc drept modele matematic pentru rezolvarea problemelor practice. Se examinează complexitatea unor algoritmi pentru soluționarea problemelor clasice pe aceste structuri matematice și se menționează rolul acestora în optimizarea discretă, determinat în mod special de faptul că structurile discrete oferă posibilitatea soluționării eficiente a diverselor probleme de ordin teoretico-aplicativ.

Un rol important în soluționarea problemelor de optimizare pe structuri discrete îl joacă mulțimile convexe. Un model al convexității, util la soluționarea problemelor practice, îl reprezintă *d*-convexitatea, introdusă inițial prin anii ’20 ai secolului trecut de către K. Menger [111] și redescoperită apoi de către P. Soltan prin anii ’60, în legătură cu realizarea unor proiecte aplicative importante pentru economia Republicii Moldova [23], [26]. Acest tip de convexitate se aplică în cazul problemelor de amplasare a centrelor de prestare a unor servicii, frecvent întâlnite în organizarea structurilor social-economice, a problemelor de divizare a unor domenii în subdomenii speciale ce apar la trasarea schemelor integrale. Din punct de vedere teoretic, *d*-convexitatea a contribuit la dezvoltarea și a altor ramuri ale matematicii moderne [13].

În mod special, se analizează starea curentă ce ține de soluționarea problemei de acoperire a grafurilor neorientate cu mulțimi *d*-convexe în prisma rezultatelor obținute de către matematicienii: D. Artigas [30], R. Glantz [76], L. N. Grippo [77]. Se examinează cazul special al problemei de acoperire, când mulțimile folosite sunt disjuncte. În acest caz obținem așa numita problemă de divizare a grafului în mulțimi *d*-convexe. Se argumentează valoarea aplicativă a problemei de acoperire a grafurilor neorientate cu mulțimi *d*-convexe.

În încheierea capitolului sunt formulate câteva probleme nerezolvate la moment și care constituie obiectul de studiu în capitolele ulterioare. De asemenea, se formulează problema de cercetare, se menționează căile de soluționare ale acesteia, se stabilește scopul și obiectivele cercetării.

Partea centrală a tezei o constituie **Capitolul al doilea**, în care sunt prezentate un șir de rezultate ce țin de studierea existenței grafurilor neorientate conexe cu anumite caracteristici numerice prestabilite, cum ar fi numărul de acoperire/divizare *d*-convexă minimă și numărul de acoperire/divizare *d*-convexă netrivială minimă/maximă.

Totodată, sunt descrise rezultate importante, referitoare la *NP*-completitudinea problemei de acoperire cu două mulțimi *d*-convexe și a problemelor de acoperire/divizare cu mulțimi *d*-convexe netriviale. Aceste rezultate au condus la extinderea și completarea rezultatelor obținute de către alți matematicieni. Mai mult, se demonstrează că și problema verificării divizării unui graf în mulțimi *d*-convexe netriviale este *NP*-completă, și se elaborează algoritm care în timp polinomial verifică dacă un graf poate fi acoperit cu mulțimi *d*-convexe netriviale.

Din cauza *NP*-completitudinii problemei de acoperire a grafurilor neorientate cu două mulțimi *d*-convexe, au fost examinate două tipuri de 2-acoperiri *d*-convexe cu caracteristici speciale. Este vorba de (2,*t*)-acoperirile și (2,*nt*)-acoperirile *d*-convexe. S-a determinat relația dintre (2,*t*)-acoperirile și (2,*nt*)-acoperirile *d*-convexe și s-au evidențiat mai multe clase de grafuri, pentru care se elaborează algoritmi polinomiali de recunoștere, care pot fi acoperite cu (2,*t*)-acoperire și cu (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă, și o clasă pentru care exisă o singură (2,*t*)-acoperire iar determinarea existenței (2,*nt*)-acoperirii rămâne o problemă *NP*-completă.

În cel de-al **treilea Capitol** este examinată problema de acoperire/divizare cu mulțimi *d*-convexe arbitrare/netriviale pentru diferite clase de grafuri. În particular, se stabilesc condițiile de existență a acoperirii cu două mulțimi *d*-convexe netriviale pentru grafurile triangulate, grafurile ce reprezintă puterea ciclului și grafurile cactus.

De asemenea, sunt stabilite condițiile de existență a *p*-acoperirii și *p*-divizării *d*-convexe netriviale a arborelui neorientat, pentru orice număr $p \geq 2$. Se demonstrează unele proprietăți ale mulțimilor terminale netriviale și se menționează rolul acestora în elaborarea algoritmului polinomial de determinare a numărului de divizare *d*-convexă netrivială maximă a unui arbore.

Totodată, în acest capitol sunt demonstrate unele rezultate, ce țin de estimarea numărului de acoperire *d*-convexă minimă și a numărului de acoperire *d*-convexă netrivială minimă pe diferite grafuri speciale, ce se obțin în rezultatul aplicării unor operații binare: suma, produsul cartezian, produsul lexicographic, coroana grafului.

În compartimentul **Concluzii generale și recomandări** sunt expuse concluziile generale ale autorului asupra rezultatelor obținute în cadrul tezei. Sunt, de asemenea, expuse impactul și valoarea acestor rezultate în dezvoltarea domeniului dat. Sunt prezentate recomandările autorului în formă de sugestii privind cercetările de perspectivă.

În **Anexa 1** este prezentat codul sursă pentru construirea structurilor în limbajul C#, care reprezintă acoperirea grafului neorientat cu mulțimi *d*-convexe.

În **Anexa 2** este prezentat codul sursă al algoritmilor 2.1, 2.2 și 2.3 pentru construirea unei acoperiri *d*-convexe netriviale și pentru recunoaşterea grafurilor cu structură specială $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$. Acești algoritmi sunt descriși în paragraful 2.3 și 2.4.

În **Anexa 3** este prezentat codul sursă al procedurilor *Max*$\varphi(G)$ și *Max*$\theta(G)$ pentru determinarea numărului de acoperire *d*-convexă maximă și numărului de divizare *d*-convexă maximă a unui arbore. Aceste proceduri sunt descrise detaliat în paragraful 3.2 și 3.3.

1. EVOLUȚIA CERCETĂRILOR ÎN SOLUȚIONAREA PROBLEMEI DE ACOPERIRE PE STRUCTURI DISCRETE

Necesitatea soluționării unor probleme importante de ordin teoretico-aplicativ a condus la apariția unor structuri matematice discrete care s-au dovedit a fi suficient de comode pentru descrierea unor procese fizice destul de complicate. Dezvoltând baza teoretică a unei direcții noi de cercetare, determinate de studierea proprietăților acestor structuri, de către mai mulți matematicieni (P. Soltan [23], C. Berge [35], D. Artigas [30] etc.) au fost obținute rezultate ce au stat la baza elaborării metodelor și algoritmilor corespunzători pentru rezolvarea problemelor aplicative.

Caracterul discret al realității înconjurătoare (teoria atomo-moleculară, fizică cuantică și statistică etc.) a influențat semnificativ dezvoltarea matematicii discrete. Rolul decisiv în dezvoltarea rapidă a matematicii discrete în a doua jumătate a secolului XX se asociază cu revoluția digitală în domeniul telecomunicațiilor și a informaticii. Matematica discretă a devenit baza pentru proiectarea și punerea în aplicare a mai multor sisteme informatice și dispozitive electronice digitale. Aceasta a inițiat dezvoltarea în cadrul ciberneticii a mai multor compartimente a matematicii discrete: teoria complexității, teoria automatelor etc. O contribuție semnificativă în domeniul matematicii discrete a fost adusă de: L. Euler, G. Boole, A. Poincare, D. Hilbert, E. L. Post, A. Turing, J. V Neumann, A. A. Lyapunov etc.

Un rol aparte în dezvoltarea structurilor discrete revine convexității sau, mai bine zis, unui caz special al convexității – noțiunii de *d*-convexitate. Anume în termenii noțiunii de *d*-convexitate își găsesc soluția mai multe probleme practice. De exemplu, soluția problemei de amplasare a unor centre de servicii într-o rețea cubică este totdeauna o mulțime *d*-convexă (cazul medianei) [6].

Luând în considerație cele menționate mai sus cu privire la rolul structurilor discrete și a teoriei convexității în cercetările teoretico-aplicative, în primul capitol se dă o analiză evolutivă a structurilor reprezentate prin grafuri, hipergrafuri, matroizi. Se face recurs la o serie de probleme practice, care au influențat apariția rezultatelor teoretice importante. Totodată, sunt clasificate rezultatele ce țin de dezvoltarea *d*-convexității pe grafuri și aportul a mai multor matematicieni în aplicarea *d*-convexității pentru examinarea și soluționarea problemelor practice în termenii mulțimilor *d*-convexe: K. Menger [111], J. de Grood [78], A. Alexandrov și V. Zalgaller [9], F. Toranzos [115], E. Soetens [100], P. Soltan, Ch. Prisăcaru [26] etc.

Orice metodă de soluționare a problemelor aplicative, de regulă, duce la elaborarea algoritmului respectiv și realizarea acestuia la calculator. Desigur, la această etapă, apare problema eficienței algoritmului (este oare algoritmul de complexitate liniară, polinomială, exponențială etc.) – chestiune importantă în procesul de examinare și obținere a soluției finale a unei probleme concrete. Aspecte legate de noțiune de complexitate a problemei de optimizare sunt descrise în paragraful trei al primului capitol.

Problema de acoperire a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe, care constituie esența cercetărilor efectuate și expuse în această lucrare, ține de dezvoltarea noțiunii de convexitate pe structuri discrete și aplicarea acesteia la soluționarea problemelor aplicative. Problema în cauză reprezintă un caz special al problemei clasice de acoperire a unei mulțimi de elemente cu o familie specială de submulțimi și, în varianta expusă în teza, a fost formulată de D. Artigas în lucrarea [30]. În ultimul paragraf al acestui capitol se examinează situația la moment în legătura cu problema în cauză, se menționează o serie de probleme nerezolvate de către predecesori și sunt numite problemele rezolvate în capitolele ce urmează.

1.1. Rolul structurilor discrete la soluționarea problemelor teoretico-aplicative

De regulă, orice proces fizic cu caracter discret de acțiune, orice problemă ce se formulează pe o mulțime numerabilă de elemente, orice problemă de tip combinatorial etc., poate fi modelată cu ajutorul unei structuri discrete, care permite în cele din urmă elaborarea metodelor eficiente de soluționare. Studierea proprietăților acestor structuri ține de dezvoltarea unei direcții speciale ale matematicii moderne – matematica discretă. La rândul său, dezvoltarea matematicii discrete are loc sub influența necesității soluționării problemelor aplicative. Astfel, există o legătură directă între dezvoltarea propriu-zisă a matematicii discrete și necesitatea explicării/soluționării unor fenomene din lumea înconjurătoare, a unor probleme de ordin combinatorial definite pe o mulțime discretă de elemente, a unor probleme de optimizare.

Problema clasică de acoperire a unei mulțimi de elemente ponderate cu o familie de submulțimi de pondere minimă, pe parcursul anilor s-a regăsit în multiple variații și generalizări, reieșind din necesitatea soluționării problemelor practice. Un caz special al acestei probleme îl reprezintă cazul acoperirii unei structuri cu mulțimi *d*-convexe, determinat de faptul că mulțimile *d*-convexe joacă un rol important la soluționarea problemelor concrete. Aici putem menționa problema divizării unui domeniu rectangular în subdomenii *d*-convexe – (problema care a apărut prin anii ’60 la uzina de computere din or. Minsk în legătura cu optimizarea procesului de trasare a plăcilor integrale), problema clusterizării convexe a elementelor unei mulțimi etc.

Desigur, soluționarea problemei de acoperire cu mulțimi *d*-convexe, la fel ca și multiple alte probleme de optimizare, își poate găsi soluție și implementare reușită sub forma de algoritmi, doar dacă este dezvoltată teoria modelelor matematice pe care se examinează problema.

Soluționarea problemei în varianta propusă de D. Artigas [30], precum și a diverselor variații ale acesteia, descrise în prezentă lucrare, este posibilă doar dacă cunoaștem rezultatele, ce țin de studierea proprietăților structurilor discrete, reprezentate prin grafuri, hipergrafuri, matroizi, complexe de relații multi-are etc. Pornind de la soluționarea problemei pe grafuri neorientate problema poate fi generalizată și soluționată pentru cazul structurilor matematice complexe (hipergrafuri, complexe de relații multi-are etc.). Din aceste considerente, obținerea, la timp respectiv, a unor rezultate teoretice, ce țin de proprietățile structurilor discrete, în caz general, precum și a unor clase speciale ale acestor structuri sunt primordiale pentru dezvoltarea teoretică a direcției de cercetare și elaborarea metodelor eficiente de soluționare a problemei de acoperire.

Grafuri

Grafurile s-au dovedit a fi un model eficient pentru soluționarea problemei de acoperire a unei structuri matematice cu mulțimi *d*-convexe în varianta formulată de D. Artigas, chiar dacă dânsul nu a reușit să găsească răspuns la unele întrebări speciale legate de problema studiată (de exemplu, a rămas deschisă întrebarea cu privire la complexitatea problemei de acoperire a grafului cu *p*-mulțimi *d*-convexe în cazul $p = 2$). În capitol următor (capitolul 2) se arată că, folosind unele rezultate cunoscute cu privire la studierea proprietăților speciale ale grafurilor, se obțin rezultate teoretice noi care permit soluționarea problemelor generate de către D. Artigas, precum și a problemelor adiacente acesteia.

Studierea grafurilor, ca structura matematică eficientă pentru modelarea diverselor procese cu caracter discret, a fost generată de încercarea matematicienilor de a rezolva anumite probleme practice. În secolul XX au început să apară numeroase probleme legate de grafuri în fizică, chimie, biologie, inginerie electrică, economie, sociologie etc., dar, de asemenea și în domeniile matematice, cum ar fi topologia, algebra, teoria probabilităților, teoria numerelor. În 1936, la Leipzig a apărut prima carte de teoria grafurilor, al cărui autor este matematicianul maghiar D. Kőnig. În această lucrare Kőnig a sistematizat toate rezultatele, cunoscute la acel moment, prin care a determinat, în mare măsură, caracterul aplicativ al noii teorii.

Teoria grafurilor a trecut printr-o fază de dezvoltare semnificativă în secolul XX, în special la sfârșitul anilor ’40 - începutul anilor ’60, datorită dezvoltării ciberneticii și informaticii. Odată cu dezvoltarea tehnologiei informatice și studierea sistemelor cibernetice complexe, interesul fața de această direcție de cercetare a crescut, iar problemele teoriei grafurilor au devenit mult mai variate, cu un caracter aplicativ pronunțat. În plus, utilizarea calculatoarelor a permis soluționarea problemelor practice asociate cu un volum mare de date.

Părinte al teoriei moderne a grafurilor este considerat C. Berge, datorită expunerii sistematizate a acestei direcţii de cercetare în monografia [35] şi dezvoltării ulterioare a teoriei în lucrările [34], [36]. Până în zilele de astăzi sunt frecvent folosite rezultatele obținute de către C. Berge cu privire la sistemul de cicluri fundamentale într-un graf neorientat, studierea caracteristicii Euler și a diverselor generalizări ale acesteia, dezvoltarea noțiunii de metrică pe grafuri, care se folosesc la probleme ce țin de dirijarea informației incomplete, determinarea locurilor optimale de amplasare a centrelor de deservire etc. Rezultate semnificative ce ţin de fundamentarea teoriei grafurilor, iar mai apoi şi a hipergrafurilor, se regăsesc în multitudinea de publicaţii apărute pe parcursul ultimilor 40-50 ani ai secolului XX. Promotori fideli ai acestei direcții sunt considerați: F. Harary [83], O. Ore [90], N. Christofides [59], A. A. Zâkov [17], V. Emelicev [14], T. Toadere [8], P. Soltan [7], [23] etc.

Necesitatea soluționării unor probleme de parcurgere au condus la introducerea noțiunilor de lanț, ciclu și a diverselor generalizări ale acestora (a se vedea F. Harary [83]). Rezultatele obținute în legătura cu studierea proprietăților acestor noțiuni, în special celor ce țin de studierea sistemului de cicluri fundamentale, se regăsesc la soluționarea multiplelor probleme teoretico-aplicative, în particular și la studierea problemei de acoperire-divizare a grafului în mulțimi *d*-convexe cu unele variații speciale ale acesteia.

Într-un graf neorientat $G=(X;U)$ o succesiune de vârfuri $\mu=[x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1}]$ se numeşte *lanţ*, dacă $\{x_i,x_{i+1}\}\in U$ pentru $\forall i=\overline{1,k}$. În acest caz se spune că lanţul μ uneşte vârfurile x_1 și x_{k+1}. Se consideră că o muchie $u_j=\{x_p,x_l\}$ din G aparţine lanţului μ, dacă şi numai dacă x_p şi x_l sunt vârfuri vecine în μ, adică $p\in\{1,2,...,k\}$ şi $l=p+1$ (sau invers). Vârfurile x_1 și x_{k+1} se numesc *extremități* ale lanţului μ, iar numărul k - *lungimea* lui. Dacă $x_1=x_{k+1}$ atunci μ se numeşte *ciclu*.

Noțiunea de lanț este fundamentală la introducerea *d*-convexității într-un graf neorientat, iar rezultatele respective au stat la baza studierii proprietăților mulțimilor *d*-convexe [3], [6], [93], folosite în capitolele ce urmează la examinarea problemei de acoperire.

Definirea noțiunii de mulțime *d*-convexă are la baza noțiune de lanț minim (o submulțime de vârfuri *A* din $G=(X;U)$ se numește *d*-convexă dacă împreună cu oricare vârfuri $x,y\in A$ această mulțime conține și toate vârfurile ce aparțin tuturor lanțurilor de lungime minimă cu extremitățile în x și y [13]). Determinarea lanțurilor minime este o parte componentă a soluționării oricărei probleme metrice pe grafuri. În prezent sunt cunoscute mai multe metode de construire a acestor lanțuri, și într-o variantă modificată se regăsește în algoritmii prezentați în lucrare pentru studierea unor aspecte speciale ale problemei de acoperire/divizare a grafului cu mulțimi *d*-convexe (a se vedea programele din anexe).

Matematicianul D. W. Deijkstra [63] a elaborat algoritmul, care, pentru grafurile neorientate ponderate nenegative, determină drumurile minime de la un vârf la toate celelalte cu complexitatea $O(n \log n)$. Plus la aceastã, algoritmul Belman-Ford, elaborat de R. Belman [33] și R. Ford [71], determină drumurile minime de la un vârf la toate celelalte, în cazul când ponderea muchiilor poate fi negativă, iar complexitatea acestui algoritm este $O(mn)$.

Un caz aparte, studiat în capitolul trei al prezentei lucrări, îl constituie problema acoperirii pentru cazul grafului neorientat conex, ce nu conține cicluri – arbore. Este de menționat că în cazul arborilor se rezolvă în mod eficient numeroase probleme de optimizare discretă. Ba mai mult, chiar în cazul unor probleme *NP*-complete în caz general, soluționarea acestora pe arbori se face în timp liniar în raport cu volumul de date inițiale. Construirea unor arbori speciali pe grafuri a fost examinată de mai mulți matematicieni în legătura cu necesitatea soluționării unor probleme metrice. Sunt remarcabile rezultate ce țin de determinarea arborelui Steiner [62], determinarea circuitelor Kirchkoff într-o schemă electrică [99] etc.

Legată de construirea unui arbore special este și următoarea problemă de optimizare. Din orice graf conex *G* putem obține un arbore, eleminând iterativ câte o muchie care aparține unui ciclu simplu. Arborele obținut se numește arbore parțial al grafului *G*. În cazul grafului ponderat $G = (X; U)$, fiecărei muchii $u \in U$ i se poate asocia un cost $\omega(u)$ și atunci apare problema determinări mulțimii de muchii $T \subseteq U$ care unește toate vârfurile *X* și minimizează funcția:

$$\omega(T) = \sum_{u \in T} \omega(u).$$

Cu alte cuvinte, se cere de determinat arborele parțial de cost minim. Există doi algoritmi bine cunoscuți care rezolvă eficient problema dată: algoritmul lui Kruskal [88], de complexitate $O(m \log m)$ și algoritmul lui Prim [94], de complexitate $O(m + n \log n)$. Aceiași algoritmi sunt utili și în cazul unei variații speciale a problemei de acoperire a grafului neorientat cu mulțimi *d*-convexe: acoperirea mulțimii de vârfuri cu o familie de mulțimi *d*-convexe de pondere minimă. De asemenea poate fi analizată și problema divizării mulțimii de vârfuri a grafului cu ajutorul unei familii de submulțimi de vârfuri de pondere minimă. Împreună cu cele menționate mai sus, soluția acestei variante a problemei de acoperire se deduce din rezultate obținute în capitolul 3.

Hipergrafuri

Soluționarea oricărei probleme de optimizare pentru cazul unui graf neorientat lasă o amprentă de nesatisfacție, dacă aceasta nu este examinată în careva variantă generalizată pentru structuri discrete mai sofisticate cum ar fi, de exemplu hipergrafurile [36] sau complexe de relații multi-are [5].

Hipergrafurile reprezintă o structură matematică discretă complexă care este mai potrivită pentru modelarea și soluționarea problemelor legate de studierea unor procese de o structură abstractă dificilă. De exemplu, ar fi cazul unor probleme de optimizare definite pe o mulțime de obiecte, în cazul când aceste obiecte se grupează în careva submulțimi (clustere) și ne interesează diverse situații legate de interacțiunea dintre ele. Totodată, problema acoperirii se generalizează ușor pentru cazul hipergrafului, însă metodele de soluționare devin mai complexe. Se consideră că primele rezultate care au constituit fundamentele teoriei hipergrafurilor aparțin matematicianului D. K. Ray-Chaudhuri [97]. De asemenea, la dezvoltarea acestei teorii au contribuit C. Berge [34], [36], V. I. Voloshin [106] și alții.

Fie $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ o mulțime finită de elemente și familia $\mathcal{U} = (U_1, U_2, ..., U_m)$ de submulțimi din *X*, ce posedă proprietățile:

1) $U_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, ..., m$;

2) $\bigcup_{i=1}^{m} U_i = X$.

În literatura de specialitate, *hipergaf* se consideră perechea $(X;\mathcal{U})$, care se notează $\mathcal{H} = (X;\mathcal{U})$ [36]. Precum se poate de observat, hipergraful reprezintă o structură matematică cu un grad de abstractizare ridicat, iar graful poate fi privit doar ca un caz particular al unui hipergraf. Ca și în cazul grafului elementele mulțimii *X* se numesc vârfuri, iar submulțimile $U_1, U_2, ..., U_m \subset X$ muchii (*hipermuchii*) ale hipergafului.

Cu toate că hipergraful reprezintă o generalizare a noțiunii de graf, generalizarea unor proprietăți ale grafurilor nu este totdeauna o chestiune trivială, chiar dacă proprietățile respective, la prima vedere, sunt destul de simple. De exemplu, dacă notăm prin $\mathcal{U}(x)$ mulțimea hipermuchiilor din $\mathcal{H}$, ce conțin vârful *x* (cardinalul acestei mulțimi $|\mathcal{U}(x)|$ se numește *grad* al vârfului *x*), atunci precum se arată în lucrarea [106], are loc egalitatea:

$$\sum_{x \in X} |\mathcal{U}(x)| = \sum_{U \in \mathcal{U}} |U|,$$

care diferă de relația cu referire la suma gradelor vârfurilor grafului, cunoscută din teoria grafurilor.

Hipergrafurile se folosesc la studierea unor probleme de optimizare, în particular a problemelor de programare liniară. În cazul programării liniare este dezvoltată bine teoria dualității. Perechea de probleme duale se reprezintă prin hipergrafuri perechi (unul dintre ei este dualul celuilalt) pentru studierea unor proprietăți speciale ale soluțiilor problemei liniare directe și celei duale. Fie $A(\mathcal{H})$ matricea de incidență a unui hipergraf $\mathcal{H}$. În conformitate cu [34], $\mathcal{H}^*$ este hipergraful dual al hipergrafului $\mathcal{H}$, dacă

$$A(\mathcal{H}^*) = A^T(\mathcal{H}),$$

unde $A^T(\mathcal{H})$ este matricea transpusă a matricei $A(\mathcal{H})$.

O succesiune de elemente $\mu = [x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_k, U_k, x_{k+1}]$, în care x_i sunt vârfuri, $1 \le i \le k+1$, iar U_j - hipermuchii, $1 \le j \le k$, ale hipergrafului $\mathcal{H}$, ce respectă proprietatea $\{x_t, x_{t+1}\} \in U_t$, pentru orice *t*, $1 \le t \le k$, este un *hiperlanț* în $\mathcal{H}$, cu extremitățile în x_1 și x_{k+1} [34], [36]. Acest hiperlanț este o generalizare a noțiunii de lanț, cunoscută din teoria grafurilor, însă oferă un grad mai mare de libertate în sensul parcurgerii elementelor hipergafului $\mathcal{H}$. În mod firesc se definesc noțiunile de *hiperlanț simplu*, *hiperciclu*, *hiperciclu simplu*, care constituie "cărămizile", cu ajutorul cărora pot fi construite iterativ mulțimile *d*-convexe.

În lucrarea [95] se propune un algoritm, care determină drumuri minime pentru hipergrafurile ponderate și cele neponderate în timp $O(n^3)$. Algoritmul respectiv poate fi folosit la elaborarea metodelor de construire a mulțimilor *d*-convexe în hipergrafuri, iar aceasta, la rândul său poate conduce la necesitatea examinării problemei acoperirii și problemei divizării în mulțimi *d*-convexe a hipergrafurilor.

Ca și în cazul grafurilor, în hipergrafuri un rol important revine hiperarborilor, care se definesc în mod similar cu arbori în grafuri. Matematicienii I. Tomescu și M. Zimand [101] au demonstrat că problema determinării existenței a hiperarborelui parțial al unui hipergraf *k*-uniform, $k \ge 3$, este *NP*-completă.

Matroizi

Teoria matroizilor este impresionantă prin faptul că ea reprezintă o abstracție a noțiunilor principale din domeniul algebrei liniare și a teoriei grafurilor. Noțiunea de matroid a fost introdusă în 1935 de către H. Whitney în lucrarea [109]. O figura proeminentă în domeniul teoriei matroizilor este W. T. Tutte, care a publicat în anii '50 ai secolului trecut câteva lucrări fundamentale: [103], [104].

Prima lucrare fundamentală care a sistematizat rezultatele de bază din teoria matroizilor este cea a lui D. Welsh [108].

Perechea $M=(X;\mathcal{U})$, unde X este mulțimea finită de elemente iar $\mathcal{U}$ familia de submulțimi a mulțimii X, formează un *matroid* dacă și numai dacă:

1) $\mathcal{U}\neq\varnothing$;

2) dacă $A\in\mathcal{U}$ și $B\subset A$, atunci $B\in\mathcal{U}$;

3) dacă $A,B\in\mathcal{U}$ și $|A|>|B|$, atunci există un element $x\in A\setminus B$, încât $B\bigcup\{x\}\in\mathcal{U}$.

În conformitate cu terminologia stabilită în teoria matroizilor (a se vedea lucrările [104], [108]), elementele familiei $\mathcal{U}$ se numesc mulțimi *independente*, iar submulțimile din X ce nu aparțin lui $\mathcal{U}$ – mulțimi *dependente* ale matroidului. Ușor se observă că orice bază din *M* este mulțime independentă maximală. Mulțimea dependentă minimală se numește *ciclu* al matroidului *M* [104]. Luând în considerație cele spuse mai sus ușor ne dăm seama că un graf neorientat poate fi reprezentat printr-un matroid. Dacă graful *G* este arbore, atunci matroidul poate fi definit astfel încât acesta să nu conțină mulțimi dependente.

Fie $A\subset X$ o mulțime de elemente ale matroidului $M=(X;\mathcal{U})$. Cardinalul submulțimii independente maximale al acestei mulțimi se numește *rang* și se notează $r(A)$. Cu alte cuvinte are loc egalitatea:

$$r(A)=\max\left\{|Y|:Y\subset A, Y\in\mathcal{U}\right\}.$$

Respectiv, numărul $r=r(M)=r(X)$ se numește *rang al matroidului*. Să enumerăm câteva relații bine cunoscute, ce țin de estimarea rangului unui matroid:

1) $0\leq r(A)\leq|A|$, pentru orice $A\subseteq X$;

2) $r(A)\leq r(B)$, pentru oricare două mulțimi $A,B\subseteq X$, $A\subseteq B$;

3) $r(A\bigcup B)+r(A\bigcap B)\leq r(A)+r(B)$, pentru oricare două mulțimi $A,B\subseteq X$.

Chiar dacă matroizii reprezintă o structură matematică foarte abstractă care este percepută mai greu decât grafurile, aceștia deseori oferă o posibilitate de rezolvare elegantă a unor probleme practice. În unele cazuri, algoritmi cunoscuți lucrează mai "frumos" pe matroizi. Astfel, dacă modelul matematic al unei probleme de cercetare este reprezentat print-un matroid, atunci soluția optimă a problemei poate fi determinată aplicând algoritmul Greedy. Esența aplicării acestui algoritm o putem urmări prin următorul exemplu.

Fie $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ o mulțime finită de elemente pe care este definită funcția $\varphi:X\to R^+$, și familia de submulțimi din X, notată prin $\mathcal{U}$. Examinăm problema: să se determine mulțimea $A\in\mathcal{U}$, pentru care:

$$\varphi(A)=\max\left\{\varphi(Y):Y\in\mathcal{U}\right\},$$

unde $\varphi(Y)=\sum_{y\in Y}\varphi(y)$. Numărul $\varphi(x)$ se numește *ponderea elementului* $x\in X$, iar $\varphi(Y)$ se numește *ponderea mulțimii* $Y\in\mathcal{U}$.

Fără a pierde din generalitate considerăm că $\varphi(x_1)\geq\varphi(x_2)\geq...\geq\varphi(x_n)$. Fie inițial $A=\varnothing$. La *A* se adaugă câte un element $x\in X$, pentru care are loc relația:

$$A\bigcup\{x\}\in\mathcal{U}.$$

Din [91] se știe că dacă $M=(X;\mathcal{U})$ este un matroid, atunci pentru orice funcție a ponderilor $\varphi: X\to R^+$ algoritmul Greedy determină mulțimea $A\in\mathcal{U}$ de pondere maximă. Soluția obținută cu ajutorul algoritmului Greedy este optimală, iar complexitatea algoritmului este liniară, dacă nu se ia în calcul procedura de sortate a elementelor din *X*.

Exemple de matroizi ce apar sub forma de model matematic la soluționarea unor probleme la diferiți autori sunt:

1) Fie *X* o mulțime finită, *k* un număr natural și $\mathcal{U}$ familia de submulțimi din *X* cu cardinalul mai mic sau egal cu *k*, atunci $M=(X;\mathcal{U})$ este un matroid.
2) Fie *X* o mulțime finită de puncte într-un spațiu afin, iar $\mathcal{U}$ familia submulțimilor afin independente ale lui *X*, atunci $M=(X;\mathcal{U})$ este un matroid.
3) Fie $G=(X;U)$ este un graf neorientat și fie familia de submulțimi de muchii:

   $$\mathcal{W}=\{W\subset U: W\ nu\ contine\ cicluri\},$$

   atunci $M=(U;\mathcal{W})$ este un matroid.

Mețiونăm și o structura matematică mai recentă, propusă de S. Cataranciuc [5], care se numește *complex generalizat de relații multi-are*. Ea acoperă un șir de noțiuni clasice, cum ar fi grafurile, hipergrafurile, matroizii, *complexe de simplexe* (informația amplă despre care poate fi găsită în lucrările [10], [11]) și servește drept model eficient pentru soluționarea unor probleme teoretice și practice [4], [56].

1.2. Convexitatea generalizată și *d*-convexitatea în grafurile neorientate

Problema soluționată în teza de doctor ține nemijlocit de studierea mulțimilor *d*-convexe și folosirea proprietăților acestora la soluționarea problemei de acoperire. Noţiunea de convexitate a cunoscut o dezvoltare semnificativă începând cu anii ’50 ai secolului trecut, în special, datorită rolului avansat al acesteia la soluţionarea problemelor de programare liniară, programare neliniară, teoria dirijării optimale a proceselor etc. Astăzi este incontestabil rolul mulţimilor convexe la soluţionarea problemelor de optimizare pe structuri discrete, în special pe grafuri şi hipergrafuri. Această situaţie îndeamnă cercetătorii la investigaţii teoretice fundamentale în domeniul convexităţii.

Fie X o mulțime nevidă de elemente, iar $P(X)$ - familia tuturor submulțimilor mulțimii X. În conformitate cu cele menționate în lucrarea [24], familia de submulțimi $G \subset P(X)$, ce posedă proprietățile:

1) $X \in G$;

2) dacă $A_1, A_2 \in G$, atunci $A_1 \cap A_2 \in G$,

se numește *convexitate* în X. Perechea $(X; G)$ se numește *spațiu convex*, iar elementele din G se numesc *mulțimi convexe*.

În lucrarea [61] sunt examinate mai multe tipuri de convexități, cu indicarea posibilelor aplicații la soluționarea problemelor de optimizare. Desigur din punct de vedere al problemei generale de acoperire, fiecare tip de convexitate merită atenție, dat fiind faptul că diverse probleme aplicative se pot reduce la acoperirea unei structuri matematice (nu numaidecât discrete) cu mulțimi convexe de diferite tipuri. Din punct de vedere teoretico-aplicativ se evidențiază trei tipuri de convexitate, avantajele cărora la soluționarea problemelor teoretico-aplicative au fost menționate în mod special în lucrările matematicienilor L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee [61], J. W. Ellis [70], P. M. Gruber, J. M. Wills [79], J. Schmidt [112], [113], M. Van de Vel [105], V. P. Soltan [24], [25] etc. Aceste tipuri de convexitate au fost dezvoltate pornind de la necesitatea studierii proprietăților soluțiilor problemelor de programare liniară, a problemei calculării medianilor în diverse structuri, inclusiv pe grafuri, a problemei de divizare a unui domeniu geometric în subdomenii speciale etc. Aceste convexități se caracterizează prin proprietățile sale specifice:

1) Convexitatea liniară, afină și conică

Fie X un spațiu și A - o submulțime din X. Mulțimea A se numește *liniar-convexă*, *afină* și respectiv *con-convexă*, dacă pentru oricare puncte $x_1, x_2, ..., x_n$ din A elementul

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i ,$$

aparține mulțimii A, unde:

a) λ_i este orice număr real, $1 \le i \le n$ (cazul convexității liniare);

b) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, pentru orice i, $1 \le i \le n$ (cazul convexității afine);

c) $\lambda_i \ge 0$, pentru orice i, $1 \le i \le n$ (cazul convexității conice).

Familia tuturor mulțimilor liniar-convexe, afine și con-convexe din X formează o convexitate liniară, afină și respectiv conică în X.

2) H-convexitatea

Fie E^n spațiul euclidian *n*-dimensional, iar *H* este o submulțime a sferei unitate cu dimensiunea $n-1$, $S^{n-1}=\{x\in E^n:\|x\|=1\}$. Dacă o submulțime de elemente $A\subset E^n$, $A\neq E^n$, poate fi reprezentată ca intersecție a unor semispații închise de tipul

$$\{x\in E^n: fx\le\lambda, f\in H, \lambda\in R\},$$

atunci *A* se numește *H*-convexă. Familia tuturor mulțimilor *H*-convexe din E^n reprezintă o *H*-convexitate. Aceasta convexitate a fost studiată în lucrările [12], [13], și a contribuit esențial la dezvoltarea teoriei axiomatice a convexității spațiului liniar *n*-dimensional și la studierea unor aspecte ale geometriei combinatorice a mulțimilor convexe.

3) Convexitatea metrică

Fie $(X;d)$ un spațiu metric și A o submulțime a acestui spațiu. Dacă pentru oricare două elemente $x,y\in A$ are loc relația

$$\{z\in X: d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)\}\subseteq A,$$

atunci mulțimea *A* este convexă. Să enumerăm câteva tipuri de convexități metrice:

a) convexitatea Euclidiană în $(R^n;d_2)$, unde $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$;

b) convexitatea Manhatten în $(R^n;d_1)$, unde $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$;

c) convexitatea Cebâșev în $(R^n;d_\infty)$, unde $d_\infty(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$.

Aplicația $g:P(X)\to P(X)$, care satisface relațiile:

1) $A\subset gA$, pentru orice $A\subset X$;

2) $ggA=gA$, pentru orice $A\subset X$;

3) $gA\subset gB$, pentru oricare două submulțimi *A* și *B* din *X*, încât $A\subset B$,

se numește *învelitoare convexă*.

Între noțiunile de convexitate și învelitoare convexă există o relație strânsă. În primul rând, orice convexitate *G* în *X* definește o învelitoare convexă *g* conform relației:

$$gA=\bigcap\{B\in G: A\subset B\},\ A\subset X,$$

și invers, orice învelitoare convexă *g* din *X* definește o convexitate *G* în această mulțime în modul următor:

$$G=\{A\subset X: gA=A\}.$$

Mai mult, orice convexitate *G* în *X* determină în mod univoc o învelitoare convexă $g:P(X)\to P(X)$ și invers [3].

Pentru orice submulțime $A \subset X$ se poate indica un șir de submulțimi $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$, încât $A = B_1$, care conduce la construirea învelitoarei convexe gA. Prin urmare, construirea învelitoarei convexe gA poate fi privită ca un proces iterativ, în cazul în care sunt cunoscute regulile de trecere de la submulțimea B_i la B_{i+1}, $i \geq 1$.

Aplicația $p : P(X) \to P(X)$ care satisface relațiile:

1) $A \subset pA$, pentru orice $A \subset X$;

2) $pA \subset pB$, pentru oricare două submulțimi *A* și *B* din *X*, încât $A \subset B$,

se numește *învelitoare convexă segvențială*.

Din [24] cunoaștem că orice învelitoare convexă segvențială determină o convexitate:

$$G_p = \{A \subset X : pA = A\}$$

Pentru orice număr $\alpha \geq 0$, $\alpha \in N$ se definește compoziția p^α a învelitoarei convexe segvențiale în modul următor:

$$p^0 A = A$$

$$p^\alpha A = p(p^{\alpha-1} A)$$

Se demonstrează cu ușurință că dacă $p : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ este o învelitoare convexă segvențială, atunci compoziția p^α este de asemenea o învelitoare convexă segvențială (a se vedea [24]).

Tot în lucrarea [24] se arată că pentru orice învelitoare convexă segvențială *p* în *X* există un număr ordinar minim $\lambda \geq 0$, încât compoziția p^λ este o învelitoare convexă în *X*, care corespunde convexității

$$G_p = \{A \subset X : pA = A\}.$$

Rezultatele expuse în capitolele ce urmează se referă la convexitatea metrică, unde metrica $d(x, y)$ reprezintă lungimea lanțului minim ce unește vârfurile *x* și *y* ale grafului (Dacă *x* și *y* corespund diferitor componente convexe din graf, atunci se consideră $d(x, y) = \infty$). Aceasta convexitate este o convexitate segvențială finit determinată și inductivă. Cu alte cuvinte, este o convexitate determinată de aplicația $p : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ ce posedă proprietățile:

1) $A \subset pA$, pentru orice $A \subset X$ și $pA \subset pB$, pentru oricare două submulțimi *A* și *B* din *X*, $A \subset B$;

2) $pA = \bigcup \{ pB : B \subset A, |B| < \infty \}$, pentru orice $A \subset X$;

3) reuniunea oricărei familii de submulțimi convexe liniar ordonate este de asemenea o mulțime convexă.

Condițiile 1) și 2) înseamnă că convexitatea este *finit determinată* (acest tip de convexitate a fost examenat în lucrările [70], [113], [114]), iar condiția 3) că convexitatea este *inductivă*. Legătura dintre convexitățile finit determinate și cele inductive a fost examinată de către J. Schmidt în [112], care a arătat că convexitatea *G* în *X* este finit determinată dacă și numai dacă ea este inductivă.

Se cunoaște din [81] că o învelitoare convexă segvențială $p:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ finit determinată în *X* satisface condițiile:

1) compoziția p^n este de asemenea o învelitoare convexă segvențială finit determinată pentru orice $n=1,2,...$;

2) compoziția $p^{\omega}=\bigcup\{p^n : n=1,2,...\}$ este o învelitoare convexă segvențială finit determină, care corespunde convexității

$$G_p=\{A\subset X : pA=A\}.$$

Este important că *d*-convexitatea definită pe un graf neorientat posedă proprietățile menționate mai sus, ceea ce înseamnă că ea corespunde teoriei axiomatice a convexității și, prin urmare, la examinarea problemelor extremale cu implicarea mulțimilor *d*-convexe pot fi folosite rezultatele clasice cunoscute pentru convexitatea generalizată.

***d*-Convexitatea**

Începând cu anii ’70 în Republica Moldova s-a format un grup de specialiști sub conducerea academicianului Petru Soltan în colaborare cu discipolii şi colegii săi, care au obţinut rezultate științifice importante ce au contribuit în mod esențial la dezvoltarea *d*-convexității și în general a teoriei grafurilor.

Pentru prima dată mulțimile *d*-convexe au fost examinate de către Menger [111]. Ulterior, acestea au fost studiate de către a J. de Grood [78], A. Alexandrov și V. Zalgaller [9], F. Toranzos [115], E. Soetens [100], P. Soltan și C. Prisăcaru [26]. *d*-Convexitatea s-a dovedit a fi un model reușit al convexității, cu ajutorul căreia au fost soluționate unele probleme importante cu caracter practic (a se vedea lucrările [6], [22], [23]).

Fie $(X;d)$ un spațiu metric. Pentru orice două puncte $x,y\in X$ se definește *segmentul metric* ca mulțimea de puncte:

$$\langle x,y\rangle=\{z\in X : d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)\}.$$

Mulțimea $A\subseteq X$ se numește *d-convexă*, dacă pentru orice două puncte $x,y\in A$ are loc relația $\langle x,y\rangle\subset A$. Intersecția oricărei familii de mulțimi *d*-convexe este o mulțime *d*-convexă, de unde rezultă că pentru orice mulțime *A* există o mulțime *d*-convexă minimală din *X*, care conține

A. Mulțimea dată se numește învelitoare *d*-convexă a lui *A* și se notează prin $d-convA$. Ținând cont de cele spuse mai sus și de definiția mulțimii *d*-convexe se constată relația:

$$d-convA=\bigcup\{d-convB: B\subset A, |B|<\infty\},$$

pentru orice submulțime $A\subset X$.

Noțiunea de *d*-convexitatea în grafurile neorientate pentru prima dată a fost studiată în lucrarea [26] de către P. Soltan și C. Prisăcaru.

Fie $G=(X;U)$ un graf neorientat. Lungimea celui mai scurt lanţ ce uneşte două vârfuri $x, y\in X$, se numeşte distanţă dintre aceste două vârfuri şi se notează prin $d(x, y)$. Sunt adevărate proprietățile:

1) $d(x, y)\geq 0$, pentru $\forall x, y\in X$ și $d(x, y)=0$ dacă și numai dacă $x=y$;

2) $d(x, y)=d(y, x)$, pentru $\forall x, y\in X$;

3) $d(x, y)\leq d(x, z)+d(z, y)\in X$, pentru oricare trei vârfuri $x, y, z\in X$.

Prin urmare, pentru orice graf conex neorientat distanța $d(x, y)$ definește o metrică pe mulțimea de vârfui *X* și astfel perechea (X, d) formează spațiul metric discret.

Un vârf *x* se numește *d-extremal* în mulțimea $A\subseteq X$ dacă pentru orice două vârfuri $y, z\in A\setminus\{z\}$ are loc relația $x\notin\langle y, z\rangle$. Mulțimea tuturor vârfurilor *d*-extremale ale mulțimii *A* se notează prin $d-extA$. În același timp, un vârf $x\in X$ se numește *simplicial* dacă vecinătatea lui formează un subgraf complet. Se știe din [24] că un vârf *x* al grafului *G* este *d*-extremal dacă și numai dacă el este simplicial.

Menționăm o clasă de grafuri pentru care există multe aplicații teoretico-aplicative. Un graf se numește *triangulat* dacă orice ciclu de lungime mai mare și egal cu 4 conține o coardă. Orice graf triangulat conține cel puțin un vârf simplicial, mai mult orice graf triangulat diferit de graf complet conține cel puțin două vârfuri simpliciale neadiacente [64].

Să enumerăm câteva rezultate importante din [25], legate de mulțimea vârfurilor *d*-extremale, care împreună cu grafurile triangulate se regăsesc în capitolul 3 al tezei, în legătura cu studierea problemei de acoperire a grafurilor cu mulțimi *d*-convexe.

Pentru un graf $G=(X;U)$ următoarele condiții sunt echivalente:

1) $d-extA\neq\emptyset$, pentru orice mulțime nevidă $A\subset X$;

2) $d-extA\neq\emptyset$, pentru orice mulțime *d*-convexă nevidă $A\subset X$;

3) *G* este un graf triangulat.

Pentru un graf arbitrar $G=(X;U)$ analogul metric al teoremei lui Krein-Milman despre puncte extremale ale unui compact se interpretează prin echivalența afirmațiilor:

1) $A = d - conv(d - extA)$, pentru orice mulțime *d*-convexă $A \subset X$;

2) $A = \bigcup \{\langle x, y \rangle : x, y \in d - extA\}$, pentru orice mulțime *d*-convexă $A \subset X$;

3) *G* este un graf triangulat și nu conține subgrafuri *W* din figura 1.1.

În ultimul capitol al lucrării, un caz aparte reprezintă studierea problemei de acoperire a arborilor cu mulțimi *d*-convexe. Aici sunt importante proprietățile metrice ale acestei clase de grafuri. Conform [24], dacă $G = (X;U)$ este un arbore atunci pentru orice mulțime $A \subset X$ au loc relațiile:

$$diam(d - convA) = diamA,$$

$$A = \bigcup \{\langle x, y \rangle : x, y \in d - extA\}.$$

și $d - extG$ coincide cu toate vârfurile terminale, reamintim că un vârf *x* se numește terminal dacă $|\Gamma(x)| = 1$ (a se vedea [34]).

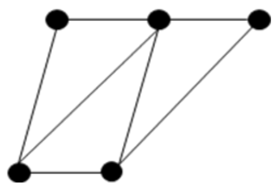


Fig. 1.1. *Graful W*

O altă clasă de grafuri, care prezintă interes din punct de vedere al *d*-convexității, este clasa de grafuri *d*-convex simple. Un graf neorientat $G = (X;U)$ se numește *d-convex simplu* dacă el nu conține mulțimi *d*-convexe $A \subset X$, astfel încât $2 < |A| < |X|$ [24].

Pentru orice graf neorientat $G = (X;U)$ sunt echivalente afirmațiile [3]:

1) Orice submulțime $A \subset X$, care nu generează în *G* un subgraf complet, nu este *d*-convexă;

2) $d - conv(\{x, y\}) = X$, pentru orice două vârfuri neadiacente $x, y \in X$;

3) $d - conv(\{x, y\}) = X$, pentru orice două vârfuri $x, y \in X$ aflate la distanța doi în *G*.

Primele încercări de a studia grafurile *d*-convex simple au fost făcute de S. Rao și S. Hebbare [96], care au caracterizat grafurile *d*-convex simple planare și finite. Mai târziu, o caracterizare analogică a fost obținută pentru clasa de grafuri planare infinite. V. Chepoi [27] a obținut următorul rezultat: graful planar, diferit de graful cubului 3-dimensional Q_3 (figura 1.2 a), este *d*-convex simplu dacă și numai dacă el nu conține mulțimi *d*-convexe formate din trei vârfuri.

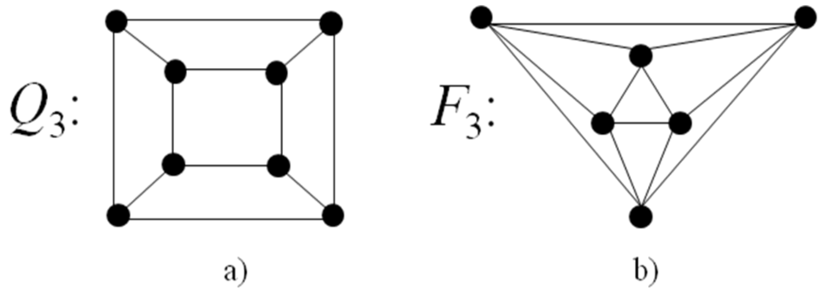


Fig. 1.2. *Grafurile* Q_3 *și* F_3.

Vârful *y* se numește *copia* vârfului *x* în graful *G*, dacă $\Gamma(x)=\Gamma(y)$. În lucrarea [3] s-a demonstrat că graful planar $G=(X;U)$, $|X|\geq 5$, diferit de graful octaedru F_3 (figura 1.2 b), este *d*-convex simplu dacă și numai dacă conține vârfuri de grad mai mare decât doi, fiecare având o singură copie.

Grafurile *d*-convex simple posedă un șir de proprietăți importante [3], [18], [19], în baza cărora au fost obținute rezultate cu privire la structura acestora [20], [21]. Anume datorită acestor structuri mai multe probleme practice (probleme de amplasare a centrelor de deservire, probleme de clusterizare etc.) se rezolvă în timp polinomial, în unele cazuri chiar în timp liniar. Rezultatele ce țin de proprietățile grafurilor *d*-convex simple s-au dovedit a fi utile și în cazul problemei de acoperire *d*-convexe, regăsindu-se în capitolul 2 (paragraful 2.1).

Caracteristici numerice ale grafurilor legate de mulțimi *d*-convexe

În legătura cu studierea mulțimilor convexe mai mulți matematicieni folosesc diferite caracteristici numerice, în special pentru elaborarea unor algoritmi. Una dintre aceste caracteristici este numărul *geodezic* $g(G)$, care reprezintă cardinalul mulțimii geodezice minime a grafului *G* [84]. Pentru un număr întreg pozitiv *k*, M. C. Dourado, F. Protti și J. L. Szwarcfiter au demonstrat că problema verificării corectitudinii inegalității $g(G)\leq k$ pe grafurile bipartite și grafurile triangulate este *NP*-completă [66], [67]. De asemenea, M. C. Dourado și F. Protti în lucrarea [67] au arătat că pentru co-grafuri problema dată se rezolvă în timp liniar.

O altă caracteristică numerică întâlnită în cercetările mai multor matematicieni este *numărul de învelire.* Numărul de învelire, notat prin $h(G)$, este egal cu cardinalul mulțimii de învelire minime a grafului *G,* unde *mulțimea de învelire* este submulțimea de vârfuri *S* a grafului *G* care satisface egalitatea $d-convS=X$. M. C. Dourado și J. G. Gimbel au demonstrat că problema determinării dacă pentru un număr întreg pozitiv *k* se îndeplinește relația $h(G)\leq k$, în caz general, este *NP*-completă, iar pentru co-grafuri ea poate fi soluționată în timp polinomial

[65]. A continuat cercetarea J. Araujo [29], care a stabilit că problema dată rămâne *NP*-completă pentru grafurile bipartite, dar se rezolvă în timp polinomial pentru grafurile cactus.

Numărul de convexitate al grafului *G*, notat prin $con(G)$, este egal cu cardinalul mulțimii *d*-convexe proprii maxime a lui *G*. Fie numărul clicii maxime se notează prin $\omega(G)$. Se verifică cu ușurință că pentru orice graf neorientat sunt satisfăcute relațiile:

$$2 \le \omega(G) \le con(G) \le n-1.$$

Constatăm că $con(G) = n-1$, dacă și numai dacă graful *G* conține cel puțin un vârf simplicial. J. G. Gimbel [75] a demonstrat că problema determinării dacă pentru un număr întreg pozitiv *k* se îndeplinește relația $con(G) \ge k$ este *NP*-completă. În continuare, M. C. Dourado și F. Protti [68] au arătat că aceasta problemă pentru grafurile bipartite rămâne a fi *NP*-completă, iar pentru co-grafuri există algoritm liniar de soluționare. Numărul de convexitate precum și existența grafurilor cu numărul de convexitate prestabilit se examinează și în lucrările [53], [58], [75].

Un interes special reprezintă caracterizarea mulțimilor *d*-convexe pe clase speciale de grafuri, obținute din operațiile binare pe grafuri, cum ar fi suma, produsul cartezian, produsul lexicografic, coroana. Prin intermediul acestor operații, în capitolul 3 sunt obținute mai multe rezultate cu privire la soluționarea problemei de acoperire.

Definiția sumei, produsului cartezian și a produsului lexicografic sunt percepute în conformitate cu monografia [80]. Coroana grafurilor pentru prima dată a fost definită de R. Frucht și F. Harary [73]. Mulțimile *d*-convexe și numărul geodezic a coroanei grafurilor au fost studiate parțial de I. G. Yero [110] și F. P. Jamil [85].

Unul dintre primele rezultate referitoare la stabilirea numărului de convexitate pentru suma grafurilor a fost obținut de J. R. Calder în [51]. Numărul de învelire și numărul geodezic pentru suma grafurilor au fost examinate de S. R. Canoy și G. B. Cagaanan în [53].

În lucrările lui B. Brešar [38] și S. R. Canoy [54] sunt prezentate rezultate referitoare la caracterizarea mulțimilor *d*-convexe pentru produsul cartezian al grafurilor. Tot în aceste lucrări se estimează numărul de convexitate și numărul geodezic pentru produsul cartezian al grafurilor, iar G. B. Cagaanan și S. R. Canoy determină numărul de învelire al produsului dat [50]. Totodată, F. H. Wang [107] și T. Jiang [86] s-au ocupat de determinarea numărului geodezic pentru produsul cartezian al unor clase simple de grafuri, cum ar fi: graful complet, graful ciclu, graful lanț.

Produsul lexicografic este examinat de S. R. Canoy [52], [54]. În special, S. R. Canoy studiază numărul de convexitate și numărul de învelire al produsului lexicografic, iar în cercetările lui B. Brešar se estimează numărul geodezic al produsului lexicografic [39].

În capitolul 2 se definesc câteva caracteristici numerice, ce țin de acoperire/divizare a grafului cu mulțimi *d*-convexe, și se examinează în caz general și pentru diferite clase de grafuri speciale în capitolul 3.

1.3. Estimarea complexității problemelor combinatoriale

Vorbind despre probleme de optimizare pe structuri discrete, la care se referă și problema studiată în prezenta teză de doctor, nu putem ocoli cu vederea un aspect important al acesteia, ce constă în determinarea efortului depus pentru obținerea soluției finale. Aceasta, folosind terminologia de specialitate, înseamnă a determina complexitatea problemei studiate, chestiune importantă pentru problemele combinatoriale de dimensiuni mari, chiar dacă pentru soluționarea lor se folosesc cele mai performante calculatoare. Uneori, folosind cele mai reușite idei ale teoriei algoritmilor, obținem algoritmul de soluționare a problemei cercetate, care necesită un interval de timp mult prea mare de realizare la calculator. De studierea diferitor aspecte legate de complexitatea problemelor au fost preocupați mai mulți matematicieni, iar bazele acestei direcții de studiu, precum se consideră, au fost puse de către A. Turing [102], creatorul unui dispozitiv abstract, cunoscut astăzi ca mașina Turing, considerată drept model de calculator generic.

Dacă teoria algoritmilor oferă instrumente pentru elaborarea unui algoritm de determinare a soluției problemei, atunci teoria complexității depistează limitele de soluționare a problemei cercetate, adică oferă demonstrații că anumite lucruri nu pot fi făcute. De exemplu, din teoria complexității algoritmilor se cunoaște că timpul necesar pentru sortarea a n numere reale este de cel puțin $n \log n$ și este imposibil de elaborat un algoritm de sortare mai rapid, dacă nu se cunoște informaţia suplimentară despre valorile supuse sortării.

Complexitatea unui algoritm se măsoară asimptotic. Cu alte cuvinte, se determină limita superioară a timpului de execuţie al acestuia, ceea ce înseamnă că se măsoară numărul de operaţii executate în funcţie de volumul de date de intrare, când volumul datelor de intrare creşte nelimitat. Pentru această se folosește notația $O(g(n))$, care desemnează marginea asimptotică superioară a unei funcții $g(n)$, ce descrie comportarea algoritmului în cazul cel mai defavorabil, unde n este cantitatea datelor de intrare.

Există probleme care se soluționează în timp liniar, logaritmic sau chiar constant, însă timpul de soluționare a majorității problemelor combinatoriale este considerabil mai mare.

Printre problemele de optimizare de tip discret cele mai "bune" sunt considerate problemele de complexitate polinomială, care formează clasa de probleme P. Pentru acestea, timpul de soluționare se exprimă prin $O(n^k)$, unde k este o constantă.

În general teoria complexității operează cu probleme de decizie. Aceste sunt probleme care, pentru un set de date de intrare, dau răspuns “da” sau “nu”. Dar majoritatea problemelor reale sunt probleme de optimizare în care se cere determinarea soluției optime pentru problema respectivă. Între o problemă de optimizare și o problemă de decizie există o relație strânsă. Prin impunerea restricțiilor parametrului de optimizare, problema de optimizare se transformă în problema de decizie. De exemplu, problemei determinării drumului minim pe un graf între două vârfuri x și y îi corespunde problema decizională, pentru care se dă și un număr întreg k și se cere de determinat dacă exisă un lanț de lungime mai mică sau egală cu k, care unește x și y. Este clar că o problemă de decizie este “mai simplă” sau nu “mai puțin de dificilă” decât problema de optimizare corespunzătoate. Prin urmare dacă problema de decizie este dificilă, rezultă că și problema de optimizare este la fel dificilă.

Atât problema de acoperire a grafului neorientat cu mulțimi d-convexe, cât și problema divizării acestuia în mulțimi d-convexe, examinate în prezenta lucrare, se formulează drept probleme de decizie, complexitatea cărora este studiată în capitolul 2.

Există o clasă largă de probleme de decizie cu multiple aplicaţii practice numită clasa problemelor *NP* (nondeterminist-polinomiale). În termeni algoritmici, non-determinarea este exprimată astfel: o problemă aparține clasei *NP*, dacă, fiind dată o soluție presupusă, verificarea dacă această soluție este sau nu validă se poate face în timp polinomial în raport cu dimensiunea datelor de intrare. De exemplu, dacă în cazul problemei satisfiabilității (fiind dată o formulă booleană, există oare o atribuire de valori a variabilelor care o compun, care face formula adevărată?), se dă o formulă booleană şi o serie de valori a variabilelor care o compun, atunci putem scrie un algoritm simplu şi eficient care evaluează formula booleană.

Este clar că toate problemele de decizie din clasa *P* aparțin și clasei *NP*, adică verificarea corectitudinii unei ipotetice soluţii cere timp polinomial. Pe de alta parte nu se ştie dacă toate probleme din *NP* aparțin clasei *P*.

Pornind de la cercetările efectuate de către D. Artigas, S. Dantas, M. C. Dourado, este important de determinat dacă problema acoperirii/divizării grafului cu mulțimi d-convexe este din clasa *P* sau nu, chestiune importantă, legată de necesitatea elaborării unor algoritmi de soluționare la calculator. Diferite aspecte legate de studierea complexității problemei de acoperire/divizare a grafului și a unor variații ale acesteia sunt studiate în capitolele 2 și 3. Precum se demonstrează în aceste capitole, majoritatea problemelor examinate în teză sunt *NP*-complete.

O problemă se numește *NP-completă*, dacă ea aparține clasei *NP* și este tot așa de complicată ca oricare altă problemă din *NP*. Pentru a demonstra apartenența unei probleme la clasa *NP*-completă se folosește reducerea polinomială între probleme. Se spune că problema L_1, despre care se cunoște că este *NP*-completă, se reduce polinomial la problema L_2 (se notează $L_1 \leq_p L_2$), dacă fiecare instanţă a problemei L_1 se transformă în timp polinomial într-o instanță a problemei L_2 [74]. De menționat că nu orice instanţă a L_2 este neapărat rezultatul transformării unei instanţe din L_1, prin urmare reducerea polinomială este o funcţie nu neapărat surjectivă. Reducerea păstrează proprietatea că fiecare instanţă din L_1 pentru care soluţia este “da” este transformată într-o instanţă din problema L_2 pentru care soluţia este tot “da”. Atunci când două probleme L_1 şi L_2 se reduc polinomial reciproc una la cealaltă, adică $L_1 \leq_p L_2$ şi $L_2 \leq_p L_1$, se spune că cele două probleme sânt echivalente.

Demonstrarea apartenenței problemei acoperirii grafului cu mulțimi *d*-convexe clasei *NP*-complete se face prin reducere la aceasta a problemei de satisfiabilitate, problemei divizării în clici și a problemei divizării în triunghiuri (a se vedea demonstrarea Teoremelor 2.5, 2.12, 2.13, 2.15).

Problema *L* aparține clasei de probleme *NP*-complete dacă sunt satisfăcute relațiile [60]:

1) $L \in NP$;

2) $L' \leq_p L$ pentru orice $L' \in NP$.

Dacă are loc doar relația 2), atunci se spune că problema *L* este *NP-dificilă*.

Dacă ar exista o problemă *NP*-completă care se soluționează în timp polinomial, atunci am avea $P = NP$. Echivalent, dacă cel puțin o problemă din clasa *NP* nu se soluționează în timp polinomial, atunci nici o problemă *NP*-completă nu se soluționează în timp polinomial [60]. Actualmente nu se cunoaște dacă are loc egalitatea $P = NP$.

Pe lângă clasa *NP* există o clasă de probleme complementare $co-NP$. Cu alte cuvinte, problema *L* aparține clasei $co-NP$ dacă are loc relația $\overline{L} \in NP$. Totodată nu se cunoaște dacă $NP = co-NP$.

Rezultate remarcabile cu referire la teoria complexității algoritmilor, folosite în mod indirect în capitolele 2 și 3, au fost descrise de către T. H. Cormen , M. R . Garey și C. H. Papadimitriou în lucrările [60], [74], [92].

În legătura cu studierea complexității problemelor de decizie în anul 1971 S. Cook a demonstrat o teoremă fundamentală prin care se afirmă că toate problemele din clasa *NP* sunt polinomial reductibile la problema de satisfiabilitate, adică problema de satisfiabilitate este *NP*-competă. În anul 1972 R. Karp în lucrarea [87] a publicat 21 de probleme *NP*-complete prin reducere polinomială a problemei de satisfiabilitate. Aceste probleme sunt considerate astăzi probleme clasice și sunt cu succes folosite la examinarea complexității problemelor combinatoriale noi. Printre aceste se numără problema colorării grafului, problema ciclului hamiltonian, problema divizării în clici, problema rucsacului etc. Unele dintre ele sunt folosite de către autor la demonstrarea complexității problemelor examinate.

1.4. Originea problemei de acoperire *d*-convexă a grafurilor neorientate

Pentru un graf neorientat $G=(X;U)$ familia de mulțimi, notată prin $\mathcal{P}_p(G)$, formează o *p-acoperire d-convexă* dacă fiecare mulțime din $\mathcal{P}_p(G)$ este *d*-convexă în *G*, $X=\bigcup_{Y\in\mathcal{P}_p(G)}Y$, $\left|\mathcal{P}_p(G)\right|=p$ și $Y\not\subset\bigcup_{Z\in\mathcal{P}_p(G),Z\neq Y}Z$, pentru orice $Y\in\mathcal{P}_p(G)$. Dacă mulțimile familiei $\mathcal{P}_p(G)$ sunt disjuncte două câte două, atunci se spune că $\mathcal{P}_p(G)$ formează o *p-divizare d-convexă* a grafului neorientat *G*.

Problema determinării unei *p*-acoperiri *d*-convexe a grafului neorientat *G*, $1\leq p\leq|X|$, a fost pentru prima dată formulată și parțial rezolvată de D. Artigas, S. Dantas, M. C. Dourado și J. Sxwarcfiter în lucrarea [30], iar problema de divizare în mulțimi *d*-convexe a grafului *G* a fost formulată ca problema determinării dacă pentru un număr întreg *p*, $1\leq p\leq|X|$, graful *G* poate fi divizat în *p* mulțimi *d*-convexe disjuncte.

Pentru studierea problemei de acoperire, D. Artigas a introdus două caracteristici numerice legate de acoperirea grafului *G* cu mulțimi *d*-convexe: *numărul de acoperire d-convexă minimă* $\varphi_c^{\min}(G)$ este egal cu un număr întreg minim $p\geq 2$, pentru care există o *p*-acoperire *d*-convexă în *G* și *numărul de divizare d-convexă minimă* $\theta_c^{\min}(G)$ este un număr întreg minim $p\geq 2$, pentru care există o *p*-divizare *d*-convexă în *G*.

Se verifică cu ușurință că pentru orice graf *G* este satisfăcută relația:

$$\varphi_c^{\min}(G)\leq\theta_c^{\min}(G).$$

De exemplu, pentru un graf bipartit complet $K_{q,q}$ are loc egalitatea $\varphi_c^{\min}(K_{q,q})=\theta_c^{\min}(K_{q,q})=q$. Pe de altă parte, există grafuri pentru care are loc inegalitatea strictă $\varphi_c^{\min}(G)<\theta_c^{\min}(G)$. Acestea au fost studiate în lucrarea [30].

D. Artigas, S. Dantas, M. C. Dourado și J. Sxwarcfiter au redus problema divizării în clici, despre care se cunoaște că este *NP*-completă, pentru orice $p\geq 3$ [30], la problema de acoperire cu mulțimi *d*-convexe și la problema de divizare în mulțimi *d*-convexe. Astfel, s-a demonstrat că ambele probleme sunt *NP*-complete pentru cazul $p\geq 3$. În lucrarea [31] aceiași autori au demonstrat că problema de divizare a grafului în două mulțimi *d*-convexe este *NP*-completă. În același timp, problema 2-acoperirii a fost declarată deschisă.

Din cauză că ambele probleme în caz general sunt *NP*-complete, prezintă interes studierea acestor probleme pentru diferite clase de grafuri. În lucrările [30] și [31] s-a demonstrat că pentru grafurile triangulate există *p*-acoperire și *p*-divizare *d*-convexă pentru orice *p*, $1 \leq p \leq |X|$. În aceleași lucrări se arată că pentru grafurile ce formează puterea ciclului C_n^k există *p*-acoperire și *p*-divizare *d*-convexă dacă și numai dacă $p > 2$ sau $n \leq 2k + 2$ sau $n \equiv 0, 1, 2 (mod\ 2k)$. Totodată, s-a stabilit că pentru grafurile neconexe formate din componentele conexe $G_1, G_2, ..., G_k$ exisă o *p*-acoperire și *p*-divizare *d*-convexă dacă și numai dacă există p_i-acoperire și respectiv p_i-divizare *d*-convexă a grafului G_i, astfel încât $\sum_{i=1}^{k} p_i \geq p$, unde $p_i \leq p$, pentru orice p_i, $1 \leq i \leq k$. Din [31] se mai știe că în timp liniar se verifică dacă un co-graf poate fi divizat în *p* mulțimi *d*-convexe.

De problema *p*-divizării în mulțimi *d*-convexe s-au ocupat și alți autori. R. Glantz și H. Meyerhenke au arătat că problema 2-divizării *d*-convexe pentru grafurile planare se rezolvă în timp cubic [76]. L. N. Grippo, M. Matamala, M. D. Safe și M. J. Stein au demonstrat că toate *p*-divizările *d*-convexe ale grafului bipartit pot fi determinate în timp polinomial [77].

Desigur, problema acoperirii s-a studiat și pentru alte tipuri de convexități. De exemplu, C. C. Centeno, S. Dantas, M. C. Dourado, D. Rautenbach, J. L. Szwarcfiter [57] s-au ocupat de problema divizării grafului în mulțimi P_3-convexe. Ei au demonstrat că problema generală de divizare a grafului în mulțimi P_3-convexe este *NP*-completă și au analizat problema dată pentru diferite clase de grafuri. Probabil prima lucrare care ține de domeniul divizării vârfurilor grafului în mulțimi convexe este [16], unde în calitate de convexitate este considerată așa numită convexitatea tuturor drumurilor.

În general, problema divizării mulțimii de vârfuri a unui graf în submulțimi cu proprietăți speciale este o problemă bine cunoscută, pentru care există numeroase aplicații practice: calculul paralel, proiectarea circuitelor integrate, analiza cluster, analiza imaginilor etc. Pentru informații detaliate despre diferite aplicații poate fi consultată monografia [37].

Problema acoperirii grafurilor neorientate cu mulțimi *d*-convexe poartă un caracter teoretico-aplicativ prin faptul că:

a) rezultatele obținute completează în mod reușit cele cunoscute din teoria convexității pe structuri discrete și pot fi folosite la examinarea unor probleme adiacente de ordin teoretic;

b) mai multe probleme de ordin practic pot fi reduse la problema studiată în teza de doctor sau la unele variații ale acesteia. Într-o formă simplificată, vom aduce ca exemple două astfel de probleme.

Analiza rețelei sociale

Fie dată o rețea socială alcătuită dintr-o mulțime de persoane $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (o comunitate de oameni dintr-o localitate, o rețea web socială: facebook, linkedin etc.), astfel încât membrii rețelei sociale sunt conectați între ei prin intermediul relației de prietenie. În aceste condiții este necesar să se determine o divizare a membrilor rețelei sociale în *p*, $2 \leq p \leq n-1$, comunități de persoane strâns legate între ele, unde *p* este un număr întreg, iar o comunitate *S* se consideră strâns legată dacă pentru oricare două persoane *x*, *y* din *S* toate persoanele de pe lanțurile de cunoștință de lungime minimă, prin intermediul cărora sunt cunoscute *x* și *y*, fac parte din *S*.

Pentru rezolvarea acestei probleme se construiește un graf $G = (X;U)$ cu mulțimea de vârfuri $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. În acest graf două vârfuri x_i și x_j, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, se consideră adiacente dacă persoanele x_i și x_j se cunosc direct. Observăm că definiția comunității de persoane strâns legate corespunde cu definiția mulțimii *d*-convexe în graf. Prin urmare, dacă graful *G* poate fi divizat în *p* mulțimi *d*-convexe atunci rețea socială poate fi divizată în *p* comunități.

Împărțirea rețelei de centre comerciale între agenți economici

Fie mulțimea *X* reprezintă centre comerciale, iar mulțimea *U* reprezintă drumuri directe dintre aceste centre comerciale și fiecărui drum $\{x_i, y_j\} \in U$ îi corespunde lungimea $w(x_i, y_j) \geq 0$. Fie $p \geq 2$ numărul de agenți economici. Se cere de determinat dacă există o divizare a rețelei de centre comerciale între *p* agenți economici, astfel încât la fiecare agent economic să fie în deservire cel puțin un punct comercial și orice punct comercial *x*, ce se află pe drumurile de lungime minimă dintre oricare două puncte comerciale $y, z \in X_i$, $1 \leq i \leq p$, aparține mulțimii X_i, unde X_i este mulțimea punctelor comerciale aflate în deservirea agentului economic *i*.

Pentru rezolvarea acestei probleme se construiește un graf ponderat $G = (X;U)$, cu mulțimile *X* și *U* și cu ponderile $w(x_i, y_j) \geq 0$ pentru $\{x_i, y_j\} \in U$. Observăm că mulțimea de puncte comerciale X_i, deservite de agentul economici *i*, $1 \leq i \leq p$, corespunde definiției mulțimii *d*-convexe în graf. Prin urmare dacă graful *G* poate fi divizat în *p* mulțimi *d*-convexe atunci rețea de drumuri poate fel împărțită între *p* agenți economici.

În legătură cu problema acoperiri grafurilor cu mulțimi *d*-convexe prezintă interes studierea acoperirilor cu mulțimi *d*-convexe cu proprietăți speciale. În particular, ne interesează cazul când mulțimile *d*-convexe sunt netriviale, adică conțin cel puțin trei elemente și nu mai mult de $n-1$ elemente, unde *n* este numărul vârfurilor grafului analizat.

1.5. Concluzii la capitolul 1

Capitolul 1 conține o analiză succintă în domeniul dezvoltării structurilor matematice discrete și folosirii acestora la soluționarea problemelor teoretico-aplicative, în special pentru problema acoperirii grafurilor neorientate cu mulțimi *d*-convexe. Se examinează situația la moment în legătura cu problema studiată, se menționează o serie de probleme nerezolvate de către predecesori și sunt numite problemele rezolvate în capitolele ce urmează.

În baza analizei situației actuale în domeniul acoperirii grafurilor neorientate cu mulțimi d-convexe facem următoarele concluzii:

1. Problema acoperirii grafului cu mulțimi *d*-convexe se poziționează drept una dintre problemele combinatoriale importante din punct de vedere teoretic datorită rezultatelor deja obținute de către alți matematicieni (D. Artigas [30], [31], R. Glantz [76], L. N. Grippo [77] etc.), cu posibilitatea extinderii acestora și examinării unor variații importante, utile pentru soluționarea problemelor practice;
2. Deoarece problema *p*-acoperirii *d*-convexe s-a dovedit a fi *NP*-completă în cazul $p \geq 3$ (D. Artigas [30]), pentru completitudinea rezultatelor în acest domeniul este important de studiat și cazul $p = 2$;
3. Deoarece acoperirea grafului cu mulțimi *d*-convexe își găsește aplicații la soluționarea unor probleme practice importante, cum ar fi problema clusterizării elementelor unei mulțimi, problema proiectării circuitelor integrate, problema amplasării punctelor de deservire, prezintă interes studierea unor varietăți și cazuri speciale a problemei în cauză, pentru care există algoritmi polinomiali de soluționare;
4. Merită atenție examinarea problemei de acoperire a grafului neorientat cu mulțimi *d*-convexe netriviale, chestiune mai firească din punct de vedere practic în comparație cu cazul general, când mulțimile *d*-convexe sunt arbitrare;
5. Este necesar de examinat problema divizării unui graf neorientat în mulțimi *d*-convexe ca un caz special al problemei de acoperire cu studierea ulterioară a complexității acesteia;

6. Vorbind despre problema de acoperire ca problemă de optimizare apare necesitatea estimării unor caracteristici numerice privind numărul de acoperire/divizare minimă cu mulțimi *d*-convexe pentru diferite clase de grafuri;
7. Dat fiind faptul că în caz general problema acoperirii grafului cu mulțimi *d*-convexe este *NP*-completă devine importantă studierea unor cazuri speciale ale problemei cu elaborarea ulterioară a algoritmilor polinomiali (atât în cazul acoperirii cât și în cazul divizării grafului în mulțimi *d*-convexe).

2. ACOPERIREA GRAFURILOR CU MULȚIMI *d*-CONVEXE

Capitolul 2 conține rezultatele de bază, obținute de către autor cu referite la soluționarea problemei de acoperire a grafului neorientat cu mulțimi *d*-convexe împreuna cu unele variații ale acesteia. Problema în cauză a fost formulată, și parțial rezolvată, de către D. Artigas [30] și reprezintă, de fapt, un caz special al problemei generale de acoperire a unei mulțimi de elemente cu o familie de submulțimi de pondere minimă [15].

Dacă asupra mulțimilor *d*-convexe nu se impun careva restricții speciale, atunci pentru orice graf neorientat există acoperire *d*-convexă. Cazul trivial ar fi atunci când graful se acoperă cu *n* mulțimi și fiecare dintre aceste mulțimi este formată dintr-un singur vârf. Desigur, prezintă interes studierea cazului când graful se acoperă cu un număr minim de mulțimi *d*-convexe.

Studiul începe cu examinarea grafurilor neorientate pentru care există acoperire cu un număr minim prestabilit $p \geq 2$ de mulțimi *d*-convexe. Problema devine mai interesantă când mulțimile *d*-convexe sunt netriviale. În acest caz putem vorbi despre acoperirea cu un număr minim și număr maxim de mulțimi *d*-convexe. Sunt studiate grafurile pentru care există acoperire cu un număr minim prestabilit și cu un număr maxim prestabilit de mulțimi *d*-convexe netriviale.

În contextul celor spuse, capitolul 2 conține rezultate și pentru probleme similare în cazul divizării grafului în mulțimi *d*-convexe.

Ideile folosite la demonstrarea rezultatelor cu privire la acoperire/divizare *d*-convexă minimă și maximă au condus în cele din urmă, la obținerea unui rezultat important, care completează cele obținute de către alți matematicieni și anume, s-a demonstrat că problema acoperirii unui graf neorientat cu două mulțimi *d*-convexe este *NP*-completă, ceea ce ne permite să declarăm rezolvată integral problema acoperirii grafului cu $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, formulată de D. Artigas [30] .

Pornind de la cele menționate, în continuare în capitolul 2 sunt expuse un șir de rezultate noi cu privire la soluționarea problemelor adiacente problemei de acoperire: a fost examinată problema (2,*t*)-acoperirii și (2,*nt*)-acoperirii *d*-convexe.

Ca un caz special este examinată și problema divizării grafului în mulțimi *d*-convexe netriviale care, precum se demonstrează în lucrare, este de asemenea *NP*-completă.

Rezultatele obținute în acest capitol completează în mod reușit cele obținute de către alți matematicieni în domeniul soluționării problemei de acoperire a grafului cu mulțimi *d*-convexe, sunt publicate în lucrările [1], [2], [40], [41], [44], [45], [47] și servesc drept suport pentru unele cercetări adiționale, descrise în capitolul următor al tezei.

2.1. Acoperiri *d*-convexe și caracteristici numerice

Vom nota prin $G=(X;U)$ un graf neorientat cu mulțimea de vârfuri *X*, $|X|=n$, și mulțimea de muchii *U*, $|U|=m$. Pentru a indica mulțimea de vârfuri și mulțimea de muchii a grafului *G* vom mai folosi și notațiile $X(G)$, $U(G)$.

Reamintim câteva noțiuni, cunoscute în literatura de specialitate și necesare în examinările ce urmează. Fie *x* și *y* două vârfuri ale grafului $G=(X;U)$.

Definiția 2.1. [13] *Mulțimea* $\langle x,y\rangle=\{z\in X : d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)\}$ *se numește* ***segment metric.***

Definiția 2.2. [13] *Mulțimea* $A\subseteq X$ *se numește* **d-convexă**, *dacă pentru oricare două vârfuri* $x,y\in A$ *are loc relația* $\langle x,y\rangle\subseteq A$.

Definiția 2.3. [13] *Mulțimea d-convexă minimală a grafului G care conține submulțimea de vârfuri* $A\subseteq X$ *se numește* ***învelitoarea d-convexă*** *a lui A și se notează prin* $d-\mathrm{conv}(A)$.

Definiția 2.4. [30] *Familia de mulțimi, notată prin* $\mathcal{P}(G)$, *formează o* ***acoperire d-convexă*** *a grafului G dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:*

a) fiecare mulțime din $\mathcal{P}(G)$ *este d-convexă în G;*

b) $X=\bigcup_{Y\in\mathcal{P}(G)}Y$;

c) $Y\not\subset\bigcup_{Z\in\mathcal{P}(G),Z\neq Y}Z$, *pentru orice* $Y\in\mathcal{P}(G)$.

Dacă $|\mathcal{P}(G)|=p$, atunci vom spune că $\mathcal{P}(G)$ este o *p-acoperire d-convexă* a grafului *G* și o vom nota prin $\mathcal{P}_p(G)$ [30]. Unele rezultate ce țin de studierea *p*-acoperirilor *d*-convexe au fost obținute de către D. Artigas [30], care a demonstrate *NP*-completitudinea acestei probleme pentru cazul $p\geq 3$ și a dedus condițiile de existență a *p*-acoperirii *d*-convexe pentru unele clase de grafuri. În mai multe probleme cu caracter teoretico-aplicativ se folosește un caz special al acoperirii *d*-convexe și anume, divizarea *d*-convexă a grafului. Dacă pe lângă proprietățile a) – c) mulțimile familiei $\mathcal{P}_p(G)$ sunt și disjuncte două câte două, atunci vom spune că $\mathcal{P}_p(G)$ formează o *p-divizare d-convexă* a grafului *G* [32].

D. Artigas în lucrarea [31] a demonstrat că problema *p*-divizării în mulțimi *d*-convexe este *NP*-completă pentru orice $p\geq 2$. În același timp, problema 2-acoperirii unui graf cu mulțimi *d*-convexe a fost declarată deschisă.

În cele ce urmează sunt expuse un șir de rezultate noi cu privire la soluționarea problemei de acoperire a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe (caz general). De asemenea, se studiază, în mod firesc, cazul acoperirii grafului cu mulțimi *d*-convexe netriviale.

Definiția 2.5. *O mulțime d-convexă* $A \neq \emptyset$ *a unui graf neorientat G se numește* ***trivială*** *dacă* $A = X$ *sau* $|A| \in \{1,2\}$. *Dacă* $3 \leq |A| \leq |X|-1$, *atunci A se numește mulțime d-convexă* ***netrivială.***

Definiția 2.6. *Dacă elementele familiei* $\mathcal{P}(G)$ *sunt mulțimi d-convexe netriviale, atunci* $\mathcal{P}(G)$ *o vom numi* ***acoperire/divizare d-convexă netrivială*** *a grafului G.*

Ne putem convinge cu ușurință că nu orice graf poate fi acoperit sau divizat în mulțimi *d*-convexe netriviale. Drept exemplu poate servi graful din figura 2.1 a), care nu poate fi divizat și acoperit cu mulțimi *d*-convexe netriviale. În cazul grafului din figura 2.1 b), în calitate de acoperire *d*-convexă netrivială, care este și divizare *d*-convexă netrivială, poate servi familia $\mathcal{P}_2(G) = \{\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_3, x_5, x_6\}\}$.

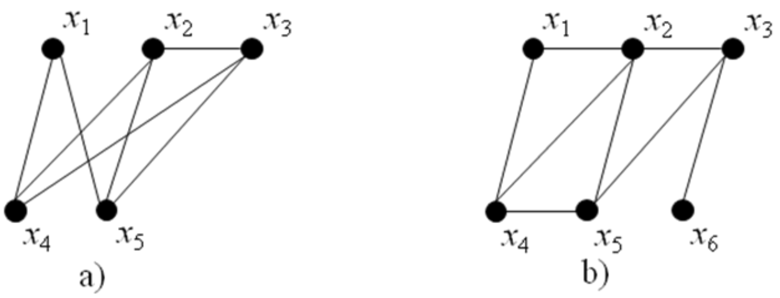


Fig. 2.1. *Graf neorientat pentru care nu există acoperire d-convexă netrivială (cazul a)) și graf, care poate fi acoperit și divizat în mulțimi d-convexe netriviale (cazul b)).*

Pentru studierea problemei de acoperire a grafului neorientat cu mulțimi *d*-convexe vom introduce niște caracteristici numerice, utile la obținerea rezultatelor ce țin de soluționarea problemei studiate.

Definiția 2.7. [30] *Cel mai mic număr întreg* $p \geq 2$, *pentru care există p-acoperire d-convexă a grafului G se numește* ***număr de acoperire d-convexă minimă*** *a acestui graf și se notează prin* $\varphi_c^{\min}(G)$. *Respectiv, cel mai mic număr întreg* $p \geq 2$, *pentru care există p-divizare d-convexă a grafului G se numește* ***număr de divizare d-convexă minimă*** *a acestui graf și se notează prin* $\theta_c^{\min}(G)$.

În mod similar se definesc:

$\varphi_{cn}^{\min}(G)$ - *numărul de acoperire d-convexă netrivială minimă* a grafului *G*;

$\theta_{cn}^{\min}(G)$ - *numărul de divizare d-convexă netrivială minimă* a grafului *G*;

$\varphi_{cn}^{\max}(G)$ - *numărul de acoperire d-convexă netrivială maximă* a grafului *G*;

$\theta_{cn}^{\max}(G)$ - *numărul de divizare d-convexă netrivială maximă* a grafului *G*;

Familiile respective de mulțimi *d*-convexe le vom nota prin: $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$, $\mathcal{P}_{\theta_c^{\min}}(G)$, $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$, $\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\min}}(G)$, $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, $\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\max}}(G)$.

Deoarece orice divizare *d*-convexă a unui graf netrivial *G* reprezintă totodată și o acoperire a acestui graf cu mulțimi *d*-convexe, este adevărată relația:

$$\varphi_c^{\min}(G) \le \theta_c^{\min}(G)$$

Similar, orice divizare *d*-convexă netrivială a grafului *G* reprezintă o acoperire a acestui graf cu mulțimi *d*-convexe netriviale. Prin urmare, dacă *G* poate fi divizat în mulțimi *d*-convexe netriviale, atunci au loc inegalitățile:

a) $\varphi_c^{\min}(G) \le \varphi_{cn}^{\min}(G) \le \varphi_{cn}^{\max}(G)$,

b) $\theta_c^{\min}(G) \le \theta_{cn}^{\min}(G) \le \theta_{cn}^{\max}(G)$,

c) $\varphi_c^{\min}(G) \le \theta_c^{\min}(G)$, $\varphi_{cn}^{\min}(G) \le \theta_{cn}^{\min}(G)$, $\varphi_{cn}^{\max}(G) \ge \theta_{cn}^{\max}(G)$.

Dacă *G* nu poate fi divizat în mulțimi *d*-convexe netriviale, dar poate fi acoperit cu mulțimi *d*-convexe netriviale, atunci are loc doar inegalitatea a).

Definiția 2.8. *Vârful x al grafului G se va numi* ***rezident*** *în* $\mathcal{P}(G)$ *dacă x aparține doar unei singure mulțimi din* $\mathcal{P}(G)$.

Conform definiției acoperirii *d*-convexe a grafului neorientat, fiecare mulțime din $\mathcal{P}(G)$ conține cel puțin un vârf rezident în $\mathcal{P}(G)$. Dacă familia de mulțimi $\mathcal{P}(G)$ reprezintă o divizare *d*-convexă a grafului *G*, atunci toate vârfurile din fiecare mulțime a familiei $\mathcal{P}(G)$ sunt rezidente în $\mathcal{P}(G)$.

Pentru orice număr $n \in N$, $n \ge 2$, putem defini grafuri conexe cu *n* vârfuri pentru care există 2-acoperire *d*-convexă sau 2-divizare *d*-convexă (sau ambele). De exemplu, pentru graful lanț cu $n \ge 2$ vârfuri există 2-acoperire *d*-convexă și 2-divizare *d*-convexă. Orice graf, care poate fi acoperit cu cel puțin două mulțimi *d*-convexe netriviale, conține cel puțin $n \ge 4$ vârfuri, deoarece fiecare mulțime a acoperirii *d*-convexe netriviale conține cel puțin trei elemente, unul dintre care este rezident în acoperirea respectivă. Similar, orice graf, care poate fi divizat în cel puțin două mulțimi *d*-convexe netriviale, conține cel puțin $n \geq 6$ vârfuri, deoarece toate mulțimile netriviale *d*-convexe sunt disjuncte două câte două în divizările respective.

Menționăm că pentru orice graf conex neorientat G cu $n \geq 1$ vârfuri există o *p*-acoperire *d*-convexă pentru $p = 1$ și $p = n$. Aceste acoperiri sunt acoperiri triviale.

Lema 2.1. *Pentru orice graf conex neorientat G cu n vârfuri,* $2 \leq n \leq 4$*, și orice număr întreg p,* $1 \leq p \leq n$*, există o p-acoperire și o p-divizare d-convexă.*

Demonstrație: Analizăm corectitudinea afirmației lemei în dependență de numărul *n*. Pentru $n = 2$ există un singur graf conex, format din două vârfuri adiacente. Evident, pentru acest graf există acoperire/divizare formată dintr-o mulțime sau din două mulțimi *d*-convexe. Pentru $n = 3$ există două grafuri conexe (graful lanț, graful ce reprezintă un triunghi), și în ambele cazuri se verifică corectitudinea lemei. Toate grafurile conexe formate din $n = 4$ vârfuri sunt prezentate în figura 2.2. Printr-o simplă verificare ne convingem că și în acest caz afirmația lemei rămâne adevărată.

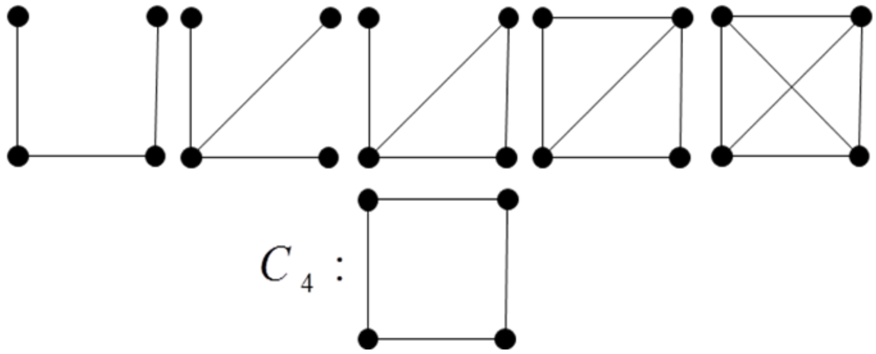


Fig. 2.2. *Toate grafurile conexe cu 4 vârfuri.*

Consecința 2.1. *Dacă G este un graf conex neorientat cu n vârfuri,* $2 \leq n \leq 4$*, atunci au loc egalitățile:* $\varphi_c^{\min}(G) = \theta_c^{\min}(G) = 2$.

Fie $\alpha(G)$ numărul minim de muchii ce acoperă graful *G*. Aici se are în vedere acoperirea clasică a unui graf cu muchii.

Lema 2.2. *Pentru orice graf conex neorientat G cu* $n \geq 4$ *vârfuri și orice număr întreg p,* $\alpha(G) \leq p \leq n$*, există o p-acoperire d-convexă.*

Demonstrație: Se cunoaște că pentru orice graf conex neorientat *G* există acoperire minimă de muchii *P*. Această acoperire constă din $\alpha(G)$ muchii, iar extremitățile fiecărei muchii reprezintă, de fapt, o mulțime *d*-convexă formată din două vârfuri adiacente. Așadar, mulțimea de muchii *P* generează o acoperire *d*-convexă $\mathcal{P}_{\alpha(G)}(G)$, fiecare mulțime a căreia este determinată de o muchie din *P*.

Dacă $\mathcal{P}_{\alpha(G)}(G)$ conține o mulțime $S=\{x,y\}$, care nu se intersectează cu nici una dintre celelalte mulțimi, atunci prin înlocuirea ei cu două mulțimi disjuncte $\{x\}$ și $\{y\}$ se obține acoperirea *d*-convexă $\mathcal{P}_{\alpha(G)+1}(G)$.

Fie că $\mathcal{P}_{\alpha(G)}(G)$ nu conține o astfel de mulțime *S*, dar conține mulțimi *d*-convexe formate din două vârfuri. Alegem în mod arbitrar o mulțime S' din $\mathcal{P}_{\alpha(G)}(G)$, exact un vârf al căreia nu este rezident în *G*. Fie că $x\in S'$ este un vârf, ce nu este rezident în $\mathcal{P}_{\alpha(G)}(G)$. Prin eliminarea lui *x* din toate mulțimile care îl conțin și adăugarea ulterioară a mulțimii $\{x\}$ la $\mathcal{P}_{\alpha(G)}(G)$ se obține acoperirea *d*-convexă $\mathcal{P}_{\alpha(G)+1}(G)$.

Dacă $\mathcal{P}_{\alpha(G)+1}(G)$ mai are mulțimi de cardinalul doi, atunci repetăm una din operațiile descrise mai sus până când se obține acoperirea *d*-convexă $\mathcal{P}_{n}(G)$, fiecare mulțime a căreia constă dintr-un vârf. Ținând cont de toate cele spuse, rezultă că afirmația lemei este adevărată.

Consecința 2.2. *Pentru un graf conex neorientat G cu* $n\geq 4$ *vârfuri și orice număr întreg p,* $\alpha(G)\leq p\leq n$, *există o p-divizare d-convexă.*

Demonstrație: Precum s-a menționat în Lema 2.2, acoperirea minimă de muchii *P* generează o acoperire *d*-convexă $\mathcal{P}_{\alpha(G)}(G)$, fiecare mulțime a căreia corespunde unei muchii din familia *P*.

Atât timp cât $\mathcal{P}_{\alpha(G)}(G)$ conține o mulțime $S=\{x,y\}$, pentru care vârful *x* nu este rezident în $\mathcal{P}_{\alpha(G)}(G)$, eliminăm *x* din mulțimea *S*. Astfel, se obține acoperirea *d*-convexă în care orice două mulțimi sunt disjuncte. În acest mod, se obține o $\alpha(G)$-divizare *d*-convexă a grafului *G*. Folosind prima operație, descrisă în Lema 2.2, ne convingem că pentru orice graf conex neorientat *G* cu $n\geq 4$ și orice număr întreg p, $\alpha(G)\leq p\leq n$, există o *p*-divizare *d*-convexă. Prin urmare, afirmația consecinței este adevărată.

Consecința 2.3. *Dacă G este un graf conex neorientat cu* $n\geq 4$ *vârfuri, atunci au loc inegalitățile:*

$$\varphi_c^{\min}(G)\leq\theta_c^{\min}(G)\leq\alpha(G).$$

Consecința 2.3 rezultă nemijlocit din Lema 2.2, Consecința 2.2 și din definiția numerelor $\varphi_c^{\min}(G)$ și $\theta_c^{\min}(G)$.

În continuare, sunt studiate unele proprietăți ale acoperirilor/divizărilor *d*-convexe arbitrare/netriviale minime ale grafurilor conexe neorientate.

Lema 2.3. *Dacă* $\varphi_c^{\min}(G) \geq 3$, *atunci pentru oricare două mulțimi* $A, B \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$, $A \neq B$, *există a treia mulțime* $C \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G) \setminus \{A, B\}$, *ce posedă proprietatea: există trei vârfuri* $a \in A$, $b \in B$, $c \in C \setminus \{A \bigcup B\}$, *astfel încât* $c \in \langle a, b \rangle$.

Demonstrație: Presupunem contrariul. Fie că există mulțimile $A, B \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$, $A \neq B$, încât pentru oricare două vârfuri $a \in A$ și $b \in B$ are loc relația $\langle a, b \rangle \subseteq A \bigcup B$. Aceasta înseamnă că pentru mulțimile *A* și *B* are loc egalitatea:

$$d - conv(A \bigcup B) = A \bigcup B.$$

Prin urmare, putem uni mulțimile *A* și *B* într-o singură mulțime *d*-convexă. Ceea ce vine în contradicție cu numărul $\varphi_c^{\min}(G)$.

Lema 2.4. *Dacă* $\varphi_c^{\min}(G) \geq 3$, *atunci pentru orice mulțime* $A \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$ *există mulțimile* $B, C \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G) \setminus \{A\}$, $B \neq C$, *și există vârfurile* $a \in A \setminus \{B \bigcup C\}$, $b \in B$, $c \in C$, *astfel încât* $a \in \langle b, c \rangle$.

Demonstrație: Fie $A \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$. Presupunem că afirmația lemei nu este adevărată, adică pentru oricare două mulțimi $B, C \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G) \setminus \{A\}$, $B \neq C$, și oricare două vârfuri $b \in B$, $c \in C$, are loc egalitatea $A \bigcap \left(\langle b, c \rangle \setminus \left(B \bigcup C \right) \right) = \varnothing$. Aceasta, la rândul său, implică relația:

$$d - conv\left(\bigcup_{S \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G) \setminus \{A\}} S \right) = \bigcup_{S \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G) \setminus \{A\}} S,$$

de unde obținem 2-acoperirea *d*-convexă a grafului *G*:

$$\mathcal{P}_2(G) = \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G) = \left\{ \bigcup_{S \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G) \setminus \{A\}} S, A \right\}.$$

Prin urmare, $\varphi_c^{\min}(G) = 2$. Aceasta vine în contradicție cu condiția $\varphi_c^{\min}(G) \geq 3$, ceea ce demonstrează afirmația lemei.

Consecința 2.4. *Dacă* $\varphi_{cn}^{\min}(G) \geq 3$, *atunci pentru oricare două mulțimi* $A, B \in \mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$, $A \neq B$, *există a treia mulțime* $C \in \mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G) \setminus \{A, B\}$, *ce posedă proprietatea: există trei vârfuri* $a \in A, b \in B$, $c \in C \setminus \{A \bigcup B\}$, *astfel încât* $c \in \langle a, b \rangle$.

Consecința 2.5. *Dacă* $\varphi_{cn}^{\min}(G) \geq 3$, *atunci pentru oricare mulțime* $A \in \mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$ *există mulțimile* $B, C \in \mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G) \setminus \{A\}$, $B \neq C$, *și există vârfurile* $a \in A \setminus \{B \bigcup C\}$, $b \in B$, $c \in C$, *astfel încât* $a \in \langle b, c \rangle$.

Corectitudinea Conseciţelor 2.4 şi 2.5 rezultă din faptul că acoperirea *d*-convexă netrivială reprezintă un caz particular al acoperirii *d*-convexe cu mulțimi arbitrare.

Fie $\beta(G)$ numărul de stabilitate internă a grafului *G*.

Lema 2.5. *Dacă* $G = (X; U)$ *este un graf conex neorientat și S o familie de submulțimi din X, ce respectă condițiile:*

a) $|S| \geq 2$;

b) fiecare mulțime $Y \in S$ *formează o clică în G;*

c) $X \setminus \bigcup_{Y \in S} Y$ *nu formează clică în G;*

d) $Y \bigcap Z = \varnothing$ *pentru oricare două mulțimi* $Y, Z \in S$;

e) pentru orice mulțime $Y \in S$ *și orice vârf* $y \in Y$ *are loc egalitatea*

$$\Gamma(y) = (Y \setminus \{y\}) \bigcup \left(X \setminus \bigcup_{Z \in S} Z\right),$$

atunci sunt adevărate afirmațiile:

a) $\varphi_c^{\min} \geq \beta(G)$, $\theta_c^{\min} \geq \beta(G)$;

b) $\varphi_{cn}^{\min} \geq \beta(G)$, *dacă există familia* $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$;

c) $\theta_{cn}^{\min} \geq \beta(G)$, *dacă există familia* $\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\min}}(G)$;

d) fiecare mulțime d-convexă din G formează o clică.

Demonstrație: Alegem două mulțimi $Y, Z \in S$, $Y \neq Z$, și patru vârfuri distincte *a, b, y* și z, încât $a, b \in X \setminus \bigcup_{C \in S} C$, $y \in Y$, $z \in Z$ și $a \not\sim b$. Evident, vârfurile *y* și *z* nu sunt adiacente. Conform condiției e) rezultă că $\bigcup_{C \in S} C \subseteq \langle a, b \rangle$ și $X \setminus \bigcup_{C \in S} C \subseteq \langle y, z \rangle$. Aceasta, la rândul său, implică relațiile:

$$\bigcup_{C \in S} C \subseteq d - conv\left(X \setminus \bigcup_{C \in S} C\right);$$

$$X \setminus \bigcup_{C \in S} C \subseteq d - conv\left(\bigcup_{C \in S} C\right).$$

Atunci, ținând cont de definiția noțiunii de mulțime *d*-convexă și învelitoare *d*-convexă, deducem:

$$d-conv\left(\bigcup_{C\in S} C\right) \subseteq d-conv\left(X \setminus \bigcup_{C\in S} C\right) = X .$$

Prin urmare, nu există nici o mulțime *d*-convexă proprie care ar conține vârfurile *a*, *b* sau *y*, *z*, ceea ce înseamnă că orice mulțime *d*-convexă formează o clică în *G*.

Fie că *M* este o mulțime interior stabilă maximă a grafului *G*. Conform condiției e), *M* se conține complet în $\bigcup_{C\in S} C$ sau în $X \setminus \bigcup_{C\in S} C$. Dacă $M \subseteq \bigcup_{C\in S} C$, atunci fiecare element al mulțimii *M* aparține exact unei mulțimi din *S*.

Din cele spuse rezultă că orice acoperire *d*-convexă a grafului *G* conține cel puțin $|M| = \beta(G)$ mulțimi. În final obținem inegalitățile:

$$\varphi_c^{\min}(G) \geq \beta(G),$$

$$\theta_c^{\min}(G) \geq \beta(G).$$

Mai mult, dacă există familia $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$, atunci $\varphi_{cn}^{\min}(G) \geq \beta(G)$. De asemenea, dacă există familia $\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\min}}(G)$, atunci $\theta_{cn}^{\min}(G) \geq \beta(G)$.

Teorema 2.1. *Pentru orice două numere* $p, n \in N$, $2 \leq p \leq n-2$, *există un graf conex neorientat* $G = (X;U)$ *cu parametrii* $|X| = n$ și $\varphi_c^{\min}(G) = p$.

Demonstrație: Dacă $p = 2$, atunci poate fi luat graful lanț *G* cu *n* vârfuri pentru care are loc egalitatea $\varphi_c^{\min}(G) = 2$.

Dacă $p \geq 3$, atunci construim un graf $G = (X;U)$ după cum urmează:

1. Definim mulțimea $X_1 = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ formată din *p* vârfuri neadiacente, ceea ce înseamnă că X_1 este o mulțime interior stabilă a grafului *G*, care urmează a fi construit.

2. Dacă $p < n-2$, atunci definim mulțimea $X_2 = X_1 \bigcup Z$, unde $Z = \{z_1, z_2, ..., z_{n-p-2}\}$, astfel încât $Z \bigcup \{x_1\}$ formează o clică în *G*. În caz contrar, $X_2 = X_1$ și $Z = \varnothing$.

3. În final, obținem $X = X_2 \bigcup \{y_1, y_2\}$, unde $\Gamma(y_1) = \Gamma(y_2) = X_2$.

Graful obținut *G* este prezentat în figura 2.3. Se verifică cu ușurință că $|X| = n$.

Deoarece X_1 este o mulțime interior stabilă în *G*, din structura grafului *G* rezultă că numărul de stabilitate internă este $\beta(G) = |X_1| = p$. Familia de mulțimi $S = \{\{y_1\}, \{y_2\}\}$ satisface condițiile Lemei 2.5. Prin urmare, $\varphi_c^{\min}(G) \geq p$ și mulțimile *d*-convexe formează clici în *G*.

Rămâne de arătat că pentru *G* există o *p*-acoperire *d*-convexă. Se verifică că pentru *G* există *p*-acoperire *d*-convexă $\mathcal{P}_p(G)$, care constă din clicile $\{x_1, y_1\} \bigcup Z$, $\{x_2, y_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$, ...,

$\{x_p\}$. Deoarece $\varphi_c^{\min}(G) \geq p$, rezultă că $\mathcal{P}_p(G)$ reprezintă o acoperire *d*-convexă minimă a grafului *G*. Așadar, $\varphi_c^{\min}(G) = p$.

Cum toate mulțimile din familia $\mathcal{P}_p(G)$ sunt disjuncte, se deduce Consecința 2.6.

Consecința 2.6. *Pentru orice două numere* $p, n \in N$, $2 \leq p \leq n-2$, *există un graf conex neorientat* $G = (X;U)$ *cu parametrii* $|X| = n$ și $\theta_c^{\min}(G) = p$.

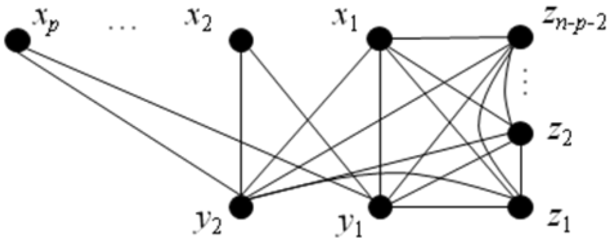


Fig. 2.3. *Graf conex neorientat* $G = (X;U)$, *cu parametrii* $|X| = n$
și $\varphi_c^{\min}(G) = p$, $2 \leq p \leq n-2$, $p \geq 3$.

Teorema 2.2. *Pentru orice două numere* $p, n \in N$, $2 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, *există un graf conex neorientat* $G = (X;U)$ *cu parametrii* $|X| = n$ și $\theta_{cn}^{\min}(G) = p$.

Demonstrație: Construim un graf $G = (X;U)$ după cum urmează:

1. Definim mulțimea de vârfuri $X_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, ..., x_{p,1}, x_{p,2},\}$, astfel încât $x_{i,1} \sim x_{i,2}$, pentru orice *i*, $1 \leq i \leq p$.

2. Dacă $3p < n$, atunci definim mulțimea $X_2 = X_1 \bigcup Z$, unde $Z = \{z_1, z_2, ..., z_{n-3p}\}$, astfel încât $Z \bigcup \{x_{1,1}, x_{1,2}\}$ formează o clică în *G*. În caz contrar, $X_2 = X_1$ și $Z = \varnothing$.

3. În final, obținem $X = X_2 \bigcup Y$, unde $Y = \{y_1, y_2, ..., y_p\}$, astfel încât $\Gamma(y_i) = X_2$, pentru orice *i*, $1 \leq i \leq p$.

Graful construit *G* este prezentat în figura 2.4. Se verifică cu ușurință că $|X| = n$.

Deoarece *Y* este o mulțime interior stabilă în *G*, din structura grafului *G* rezultă că numărul de stabilitate internă este $\beta(G) = |Y| = p$. Familia de mulțimi $S = \{\{y_1\}, \{y_2\}, ..., \{y_p\}\}$ satisface condițiile Lemei 2.5, de unde rezultă că dacă există o divizare *d*-convexă netrivială a grafului *G*, atunci $\theta_{cn}^{\min}(G) \geq p$. Mai mult, orice mulțime *d*-convexă formează o clică în *G*. Se verifică că există o *p*-divizare *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}_p(G)$, care constă din clicile $\{x_{1,1}, x_{1,2}, y_1\} \bigcup Z$,

$\{x_{2,1}, x_{2,2}, y_2\}$, ..., $\{x_{p,1}, x_{p,2}, y_p\}$. Ținând cont de relația $\theta_{cn}^{\min}(G) \geq p$, se deduce că familia $\mathcal{P}_p(G)$ reprezintă o divizare *d*-convexă netrivială minimă a grafului *G*, ceea ce înseamnă că $\theta_{cn}^{\min}(G) = p$.

Fie C_4 graful ciclu cu patru vârfuri.

Lema 2.6. *Dacă G este un graf conex neorientat cu* 4 *vârfuri, atunci pentru G există* 2-*acoperire d-convexă netrivială dacă și numai dacă* $G \neq C_4$.

Demonstrație: În figura 2.2 sunt prezentate toate grafurile conexe netriviale cu 4 vârfuri. Printr-o simplă verificare ne convingem că graful C_4 nu poate fi acoperit cu mulțimi *d*-convexe netriviale și pentru celelalte grafuri conexe cu 4 vârfuri există o 2-acoperire *d*-convexă netrivială. Prin urmare, afirmația lemei este demonstrată.

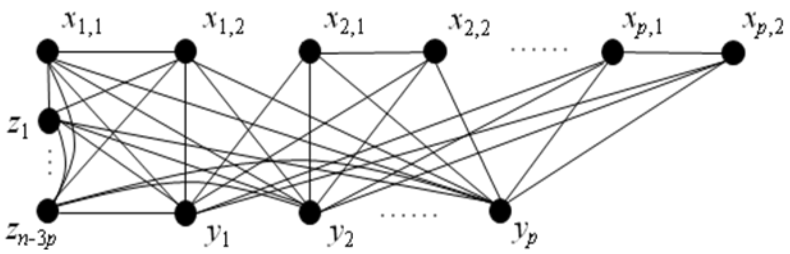


Fig. 2.4. *Graf conex neorientat* $G = (X;U)$, *cu parametrii* $|X| = n$ *și* $\theta_{cn}^{\min}(G) = p$, $2 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

Consecința 2.7. *Dacă G este un graf conex neorientat cu* 4 *vârfuri, atunci* $\varphi_{cn}^{\min}(G) = 2$ *dacă și numai dacă* $G \neq C_4$.

Teorema 2.3. *Dacă G este un graf conex neorientat cu* $n \geq 5$ *vârfuri, atunci are loc relația:* $\varphi_{cn}^{\min}(G) < n-2$.

Demonstrație: Nu există nici o *p*-acoperire *d*-convexă netrivială a grafului *G*, pentru care $p = n$ sau $p = n-1$, deoarece fiecare mulțime *d*-convexă conține cel puțin trei elemente, unul dintre care trebuie sa fie rezident.

Vom demonstra corectitudinea relației $\varphi_{cn}^{\min}(G) < n-2$. Admitem că pentru *G* are loc egalitatea $\varphi_{cn}^{\min}(G) = n-2$. Deoarece $n \geq 5$, se obține $\varphi_{cn}^{\min}(G) \geq 3$. Fie $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$ o acoperire *d*-convexă netrivială minimă a grafului *G*. Din cele menționate mai sus rezultă că fiecare mulțime din $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$ conține câte trei vârfuri, unul dintre care este rezident în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$. Totodată, există două vârfuri $x, y \in X$, care se conțin în toate mulțimile familiei $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$. Menționam că *x* este adiacent cu *y*, deoarece în caz contrar *d*-convexitatea mulțimilor din familia $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(G)$ implică relația:

$$\Gamma(x) = \Gamma(y) = X \setminus \{x, y\},$$

care, la rândul său, implică $d - conv(\{x, y\}) = X$. Dacă există două vârfuri adiacente $a, b \in X \setminus \{x, y\}$, atunci ținând cont de faptul că mulțimile $\{a, x, y\}$ și $\{b, x, y\}$ sunt *d*-convexe rezultă că mulțimea $\{a, b, x, y\}$ tot este *d*-convexă. Prin urmare, se obține contradicție cu afirmația Consecinței 2.4, ceea ce înseamnă că teorema este demonstrată.

Teorema 2.4. *Pentru orice două numere* $p, n \in N$, $2 \le p \le n-3$, *există un graf conex neorientat* $G = (X; U)$ *cu parametrii* $|X| = n$ și $\varphi_{cn}^{\min}(G) = p$.

Demonstrație: Construim un graf $G = (X; U)$ după cum urmează:

1. Definim mulțimea $X_1 = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ formată din *p* vârfuri neadiacente, ceea ce înseamnă că X_1 este o mulțime interior stabilă a grafului *G*, care urmează a fi construit.

2. Dacă $p < n-3$, atunci definim mulțimea $X_2 = X_1 \bigcup Z$, unde $Z = \{z_1, z_2, ..., z_{n-p-3}\}$, astfel încât $Z \bigcup \{x\}$ formează o clică în *G* pentru orice $x \in X_1$. În caz contrar, $X_2 = X_1$ și $Z = \varnothing$.

3. În final, obținem $X = X_2 \bigcup Y$, unde $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, astfel încât $\Gamma(y_1) = X_1 \bigcup \{y_2\}$, $\Gamma(y_2) = X_2 \bigcup \{y_1, y_3\}$, $\Gamma(y_3) = X_2 \bigcup \{y_2\}$.

Graful construit *G* este prezentat în figura 2.5. Se poate verifica cu ușurință că $|X| = n$.

Deoarece X_1 este o mulțime interior stabilă în *G*, din structura grafului *G* rezultă că numărul de stabilitate internă este $\beta(G) = |X_1| = p$. Familia de mulțimi $S = \{\{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_p\}\}$ satisface condițiile Lemei 2.5 și dacă există o acoperire *d*-convexă netrivială a lui *G*, atunci $\varphi_{cn}^{\min}(G) \ge p$. Mai mult, orice mulțime *d*-convexă formează o clică în *G*.

Se verifică că pentru *G* există o *p*-divizare *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}_p(G)$, care este alcătuită din clicile $\{x_1, y_2, y_3\} \bigcup Z$, $\{x_2, y_1, y_2\}$, $\{x_3, y_1, y_2\}$, ..., $\{x_p, y_1, y_2\}$. Deoarece $\varphi_{cn}^{\min}(G) \ge p$, se deduce că $\mathcal{P}_p(G)$ formează o acoperire *d*-convexă netrivială minimă a grafului *G*. Prin urmare, obținem $\varphi_{cn}^{\min}(G) = p$.

Definiția 2.9. [3] *Un graf conex neorientat* $G=(X;U)$ *se numește* ***d-convex simplu*** *dacă G nu conține mulțimi d-convexe netriviale.*

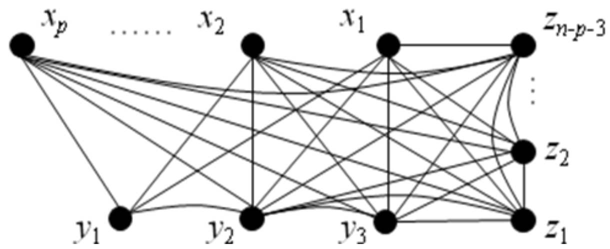


Fig. 2.5. *Graf conex neorientat* $G=(X;U)$, *cu parametrii* $|X|=n$ și $\varphi_{cn}^{\min}(G)=p$, $2\le p\le n-3$.

Având în vedere Lema 2.2 și Definiția 2.9, obținem următoarea consecință:

Consecința 2.8. *Pentru graful d-convex simplu cu* $n\ge 4$ *vârfuri există o p-acoperire d-convexă dacă și numai dacă* $\alpha(G)\le p\le n$.

Lema 2.7. *Pentru orice două numere* $p,n\in N$, $2\le p\le n-2$, *există un graf conex neorientat* $G=(X;U)$ *cu parametrii* $|X|=n$ și $\varphi_{cn}^{\max}(G)=p$.

Demonstrație: Un astfel de graf $G=(X;U)$ poate fi construit după cum urmează:

1. Dacă $n-p=2$, atunci luăm graful lanț $G'=[x,y,z]$. În caz contrar, luăm un graf *d*-convex simplu $G'=(X';U')$ cu $|X'|=n-p+1$ vârfuri și alegem două vârfuri adiacente *x* și *y* din X'.

2. Definim mulțimea de vârfuri $X_1=\{x_1,x_2,...,x_{p-1}\}$ și obținem $X=X'\bigcup X_1$, astfel încât $x\sim x_i$ pentru orice *i*, $1\le i\le p-1$.

Graful construit *G* este prezentat în figura 2.6 a). Se verifică cu ușurință că $|X|=n$. Dacă G' este graful lanț, atunci lema este corectă. Să analizăm cazul când G' este un graf *d*-convex simplu. Evident, $|X'|\ge 4$. Presupunem că vârful *x* este adiacent cu toate vârfurile mulțimii $X'\backslash\{x\}$. Deoarece graful stea cu cel puțin 4 vârfuri nu este *d*-convex simplu, există două vârfuri adiacente $v,u\in X'\backslash\{x\}$. Cu alte cuvinte, mulțimea $\{x,u,v\}$ formează un triunghi, adică o mulțime *d*-convexă netrivială în G', ceea ce vine în contradicție cu definiția grafului *d*-convex simplu. Prin urmare, există cel puțin un vârf $v\in X'$, astfel încât $d(x,v)\ge 2$, iar în *G* mulțimea *d*-convexă netrivială minimală care conține *v* este X'. Mai rămân neacoperite vârfurile mulțimii X_1. Mulțimile X', $\{x_1,x,y\}$, $\{x_2,x,y\}$, ..., $\{x_{p-1},x,y\}$ formează o *p*-acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}_p(G)$, astfel încât orice vârf al mulțimii X_1 este rezident în $\mathcal{P}_p(G)$. Rezultă că familia $\mathcal{P}_p(G)$ formează o acoperire *d*-convexă netrivială maximă.

Lema 2.8. *Pentru orice două numere* $p, n \in N$, $2 \le p \le \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, *există un graf conex neorientat* $G = (X;U)$ *cu parametrii* $|X| = n$ și $\theta_{cn}^{\min}(G) = p$.

Demonstrație: Un astfel de graf $G = (X;U)$ poate fi construit după cum urmează:

1. Dacă $n = 3p$, atunci luăm graful lanț $G' = [x, y, z]$. În caz contrar, luăm un graf *d*-convex simplu $G' = (X';U')$ cu $|X'| = n - 3p + 3$ vârfuri și alegem două vârfuri adiacente *x* și *y* din mulțimea X'.

2. Definim $p-1$ lanțuri $L_i = [x_i, y_i, z_i]$, astfel încât $x \sim z_i$ pentru orice *i*, $1 \le i \le p-1$.

Graful obținut *G* este prezentat în figura 2.6 b). Se verifică cu ușurință că $|X| = n$. Dacă G' este graful lanț, atunci lema este demonstrată. În cazul când G' este un graf *d*-convex simplu, având în vedere construcția lui *G*, după cum s-a menționat în Lema 2.7, există cel puțin un vârf $v \in X'$, astfel încât $d(x, v) \ge 2$, iar în *G* mulțimea *d*-convexă netrivială minimală care conține vârful *v* este X'. Mai rămân neacoperite vârfurile mulțimii $M = \bigcup_{1 \le i \le p-1} X(L_i)$. Rezultă că *p*-divizare *d*-convexă netrivială, formată din mulțimile X', $\{x_1, y_1, z_1\}$, $\{x_2, y_2, z_2\}$, ..., $\{x_{p-1}, y_{p-1}, z_{p-1}\}$ este maximă în graful *G*.

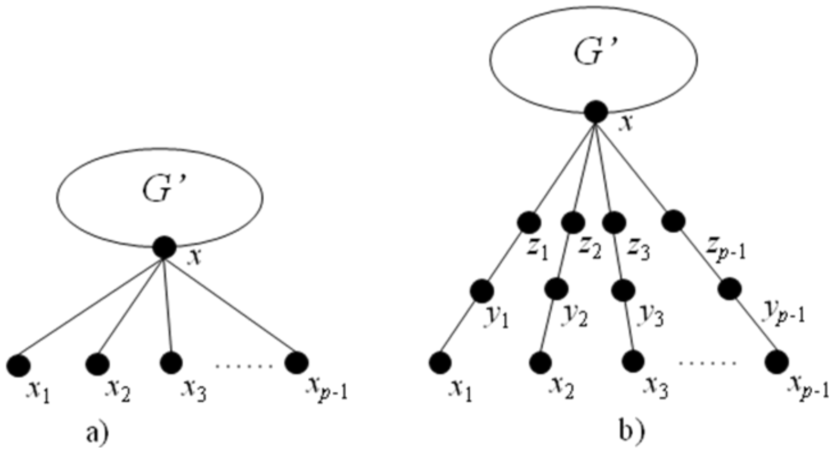


Fig. 2.6. *Graf conex neorientat* $G = (X;U)$ *cu parametrii* $|X| = n$ *și* $\varphi_{cn}^{\max}(G) = p$, $2 \le p \le n-2$ *(cazul a)), și graf conex neorientat* $G = (X;U)$ *cu parametrii* $|X| = n$, $\theta_{cn}^{\min}(G) = p$, $2 \le p \le \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ *(cazul b)).*

2.2. Cazul acoperirii grafului neorientat cu $p = 2$ mulțimi *d*-convexe

În cele ce urmează vom examina complexitatea problemei de 2-acoperire *d*-convexă. Se știe că problema *p*-divizării *d*-convexe este *NP*-completă pentru orice $p \geq 2$ [31]. Pe de altă parte, problema *p*-acoperii *d*-convexe este *NP*-completă pentru orice $p \geq 3$ [30], și nu se știe dacă problema 2-acoperirii *d*-convexe este *NP*-completă sau se soluționează în timp rezonabil. În cele ce urmează vom demonstra că problema 2-acoperirii *d*-convexe este *NP*-completă. Vom reduce problema 1-IN-3 SAT [98], despre care se cunoaște că este *NP*-completă, la problema 2-acoperirii *d*-convexe. Vom formula ambele probleme.

Problema 2.1. (Problema 2-acoperirii *d*-convexe) *Fie* $G = (X;U)$ *un graf neorientat. Să se determine dacă există două mulțimi d-convexe în G, astfel încât aceste mulțimi acoperă mulțimea X.*

Problema 2.2. (Problema 1-IN-3 SAT) *Fie* $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *o mulțime de variabile și* $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ *o colecție de clauze asupra variabilelor V, unde fiecare clauză* $c \in \mathcal{C}$ *satisface egalitatea* $|c| = 3$ *și nu conține literali cu negație. Să se determine dacă există o atribuire de valori a variabilelor din V, astfel încât orice clauză din* $\mathcal{C}$ *să conțină exact un literal cu valoarea "adevărat".*

Vom spune că $\mathcal{C}$ este satisfiabilă dacă există o atribuire de valori a variabilelor din *V*, astfel încât $\mathcal{C}$ este satisfiabilă și orice clauză din $\mathcal{C}$ conține exact o variabilă cu valoarea "adevărat".

Teorema 2.5. *Problema* 2*-acoperirii d-convexe este NP-completă.*

Demonstrație: Menționăm că problema 2-acoperirii *d*-convexe aparține clasei *NP*, deoarece în timp polinomial se verifică *d*-convexitatea unei mulțimi [65]. Urmează să reducem problema 1-IN-3 SAT la problema 2-acoperirii *d*-convexe. Întâi de toate, vom determina structura grafului particular $G = (X;U)$, care corespunde unei instanțe arbitrare a problemei 1-IN-3 SAT. După această, vom arăta că $\mathcal{C}$ este satisfiabilă dacă și numai dacă pentru *G* există o 2-acoperire *d*-convexă. Vom demonstra că orice 2-acoperire *d*-convexă a grafului *G* definește o atribuire de valori a variabilelor din *V*, astfel încât $\mathcal{C}$ este satisfiabilă. Pe de altă parte, vom demonstra că orice atribuire de valori a variabilelor din mulțimea *V*, pentru care $\mathcal{C}$ este satisfiabilă, definește o 2-acoperire *d*-convexă a grafului *G*.

Construim un graf $G = (X;U)$ după cum urmează:

Mulțimea de vârfuri X este alcătuită din următoarele mulțimi:

a) $\mathcal{V}=\{\nu_1,\nu_2,...,\nu_n\}$, $Y=\{f,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$, $Z=\{t,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5\}$;

b) $F=\{f_j \mid 1\le j\le m\}$, $T=\{t_j \mid 1\le j\le m\}$;

c) $L=\{l_j^i \mid 1\le j\le m,\ 1\le i\le 3\}$, $\mathcal{L}=\{\ell_j^i \mid 1\le j\le m,\ 1\le i\le 3\}$, $Q=\{q_j^i \mid 1\le j\le m,\ 1\le i\le 3\}$.

Obținem $X=\mathcal{V}\cup Y\cup Z\cup F\cup T\cup L\cup Q\cup \mathcal{L}$.

Fiecare variabilă $v_i\in V$ corespunde vârfului $\nu_i\in\mathcal{V}$, $1\le i\le n$. Fiecărei clauze $c_j\in\mathcal{C}$, $1\le j\le m$, îi corespund unsprezece vârfuri: $f_j,l_j^1,l_j^2,l_j^3,\ell_j^1,\ell_j^2,\ell_j^3,q_j^1,q_j^2,q_j^3,t_j$.

Mulțimea de muchii U satisface condițiile:

a) $\mathcal{V}\cup Q$ formează o clică în G;

b) $\Gamma(f)=\mathcal{V}\cup Q\cup F\cup\{y_3,y_4\}$ și $\Gamma(t)=\mathcal{V}\cup Q\cup T\cup\{z_3,z_4\}$;

c) $\Gamma(y_5)=F\cup\{y_3,y_4\}$ și $\Gamma(z_5)=T\cup\{z_3,z_4\}$;

d) $\Gamma(y_1)=\Gamma(y_2)=\{y_3,y_4\}$ și $\Gamma(z_1)=\Gamma(z_2)=\{z_3,z_4\}$;

e) fiecărei clauze $c_j=\{v_a,v_b,v_c\}$, $1\le j\le m$, îi corespund optsprezece muchii:

$\{l_j^1,\nu_a\},\{l_j^2,\nu_b\},\{l_j^3,\nu_c\},\{l_j^1,f_j\},\{l_j^2,f_j\},\{l_j^3,f_j\},\{\ell_j^1,t_j\},\{\ell_j^2,t_j\},\{\ell_j^3,t_j\},\{\ell_j^1,q_j^1\},\{\ell_j^2,q_j^2\},\{\ell_j^3,q_j^3\}$

$,\{\ell_j^1,l_j^2\},\{\ell_j^1,l_j^3\},\{\ell_j^2,l_j^1\},\{\ell_j^2,l_j^3\},\{\ell_j^3,l_j^1\},\{\ell_j^3,l_j^2\}$.

Fără a pierde din generalitate, excludem cazul trivial $|\mathcal{C}|=1$. Vom considera $|\mathcal{C}|\ge 2$.

Dacă pentru $G=(X;U)$ există o 2-acoperire d-convexă, atunci $\mathcal{C}$ este satisfiabilă.

Fie $\mathcal{P}_2(G)=\{S_f,S_t\}$ o 2-acoperire *d*-convexă a grafului *G*. Se observă cu ușurință că pentru orice $i,j\in\{1,2\}$ se obține $d-conv(\{y_i,z_j\})=X$.

Fie că $y_1,y_2\in S_f$, $z_1,z_2\in S_t$, $S_1=\{y_3,y_4,y_5,f\}\cup F$ și $S_2=\{z_3,z_4,z_5,t\}\cup T$.

Menționăm în continuare câteva proprietăți importante.

Proprietatea 1: $S_1\cap S_t=\varnothing$ și $S_2\cap S_f=\varnothing$.

Se verifică că $S_1\subseteq d-conv(\{y_1,y_2\})$ și $S_2\subseteq d-conv(\{z_1,z_2\})$, ceea ce implică relațiile $S_1\subseteq S_f$ și $S_2\subseteq S_t$.

Mai mult, pentru orice $u\in\{f\}\cup F$ obținem:

$$d-conv(\{u,t\}\cup T)\subseteq d-conv(\{f\}\cup F\cup S_2)\subseteq d-conv(S_1\cup S_2)\subseteq d-conv(S_t\cup S_f)=X.$$

Ca rezultat, $u\notin S_t$ pentru orice $u\in\{f\}\cup F$.

De asemena, pentru orice $u\in\{t\}\cup T$ obținem:

$$d-conv(\{u,f\}\cup F)\subseteq d-conv(\{t\}\cup T\cup S_1)\subseteq d-conv(S_1\cup S_2)\subseteq d-conv(S_t\cup S_f)=X\,.$$

Ca rezultat, $u\notin S_f$ pentru orice $u\in\{t\}\cup T$. În final, avem $S_1\cap S_t=\varnothing$ și $S_2\cap S_f=\varnothing$.

Proprietatea 2: Mulțimile $\mathcal{V}, L, Q$ și $\mathcal{L}$ sunt univoc interdependente.

Dacă vârful l_j^i aparține mulțimii S_t, atunci $\Gamma(l_j^i)\cap\mathcal{V}\subseteq S_t$ și vârfurile ℓ_j^k aparțin mulțimii S_t, pentru orice *k*, $1\le k\le 3$, $k\ne i$. Dacă vârful u_i aparține mulțimii S_t, atunci $\Gamma(u_i)\cap L\subseteq S_t$ și pentru orice l_j^a, care aparține mulțimii $\Gamma(u_i)\cap L$, vârfurile ℓ_j^k aparțin mulțimii S_t, pentru orice *k*, $1\le k\le 3$, $k\ne a$. Vârful ℓ_j^i aparține mulțimii S_f dacă și numai dacă q_j^i aparține mulțimii S_f. Dacă vârful ℓ_j^i face parte din mulțimea S_f, atunci $L'=\{l_j^k:1\le k\le 3, k\ne i\}\subseteq S_f$ și $\Gamma(l_j^k)\cap\mathcal{V}$ se conține în S_f, pentru orice $l_j^k\in L'$.

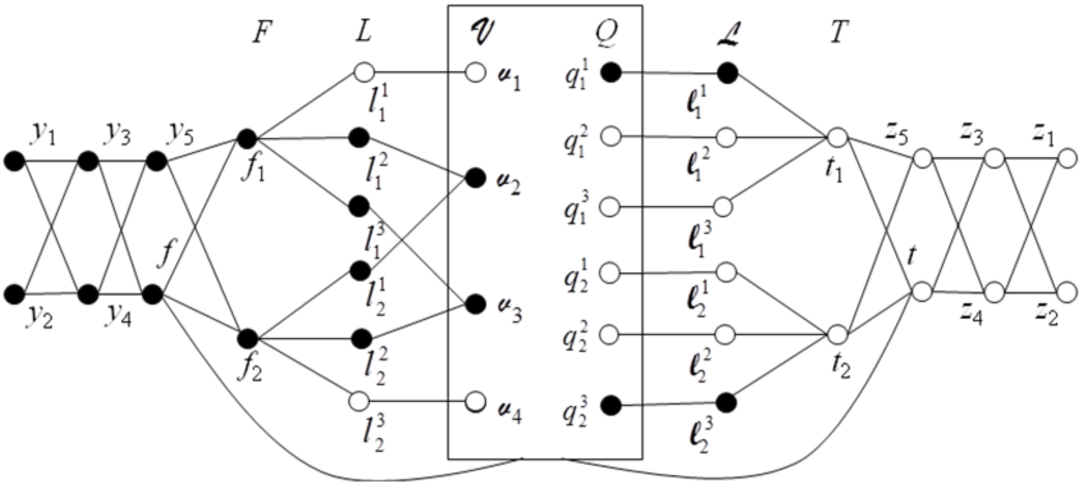


Fig. 2.7. 2-*acoperire d*-*convexă a grafului G, care corespunde problemei particulare*

1-IN-3 SAT $(V,\mathcal{C})=(\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\{\{v_1,v_2,v_3\},\{v_2,v_3,v_4\}\})$.

Proprietatea 3: Exact un vârf din $L_j=\{l_j^1,l_j^2,l_j^3\}$ aparține mulțimii S_t și exact un vârf din $\mathcal{L}_j=\{\ell_j^1,\ell_j^2,\ell_j^3\}$ aparține mulțimii S_f, pentru orice *j*, $1\le j\le m$.

Exact un vârf din $L_j=\{l_j^1,l_j^2,l_j^3\}$ aparține mulțimii S_t, pentru orice *j*, $1\le j\le m$. În caz contrar, dacă cel puțin două vârfuri diferite l_j^a și l_j^b din L_j aparțin mulțimii S_t, atunci și f_j aparține mulțimii S_t. Ținând cont de proprietatea 1, se obține contradicție. Dacă nici un vârf din L_j nu aparține mulțimii S_t, atunci $L_j\subseteq S_f$, $\mathcal{L}_j=\{\ell_j^1,\ell_j^2,\ell_j^3\}\subseteq S_f$ și t_j aparține mulțimii S_f. Având în vedere proprietatea 1, se obține contradicție. Prin analogie, se demonstrează că exact un vârf din $\mathcal{L}_j=\{\ell_j^1,\ell_j^2,\ell_j^3\}$ aparține mulțimii S_f, pentru orice *j*, $1\le j\le m$.

Vom asocia mulțimea $\mathcal{V}$ cu V și L cu $\mathcal{C}$, astfel încât orice 2-acoperire *d*-convexă a grafului *G* să reprezinte o astfel de atribuire de valori a variabilelor *V,* încât variabila v_i conține valoarea "adevărat" dacă și numai dacă $\nu_i \in S_t$.

Din proprietățile 1, 2 și 3 rezultă că dacă în *G* există o 2-acoperire *d*-convexă $\mathcal{P}_2(G) = \{S_f, S_t\}$, atunci $\mathcal{C}$ este satisfiabilă. Totodată, din cele menționate mai sus, putem afirma că mulțimile S_t și S_f sunt netriviale și disjuncte.

Dacă $\mathcal{C}$ este satisfiabilă, atunci pentru $G = (X;U)$ există o 2-acoperire d-convexă.

Fie că există o astfel de atribuirea a variabilelor *V* cu valorile "adevărat" și "fals", încât $\mathcal{C}$ este satisfiabilă. Vom construi pentru graful *G* o familie de acoperire $\mathcal{P}_2(G) = \{S_f, S_t\}$ după cum urmează:

1. Definim mulțimea $S_t = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, t\} \bigcup T$;

2. Pentru orice variabilă v_i din *V* cu valoarea "adevărat" adăugăm vârful ν_i și mulțimea $L' = \Gamma(\nu_i) \bigcap L$ la S_t și pentru orice $l_j^a \in L'$ adăugăm vârfurile q_j^b și ℓ_j^b la S_t, astfel încât $\ell_j^b \sim l_j^a$ *și* $q_j^b \sim \ell_j^b$;

3. Definim mulțimea $S_f = X \setminus S_t$.

Se verifică că 2-acoperirea *d*-convexă obținută $\mathcal{P}_2(G)$ satisface proprietățile 1, 2 și 3. Prin urmare, dacă $\mathcal{C}$ este satisfiabilă, atunci pentru $G = (X;U)$ există o 2-acoperire *d*-convexă. De asemenea, observăm că mulțimile S_t și S_f sunt netriviale și disjuncte.

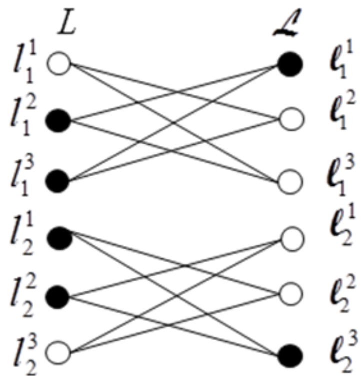


Fig. 2.8. *Muchiile dintre mulțimile de vârfuri L* și $\mathcal{L}$.

În figura 2.7 este prezentat un graf *G*, care corespunde instanței particulare $(V, \mathcal{C}) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_4\}\})$ a problemei 1-IN-3 SAT. Mulțimile $Q \bigcup \mathcal{V} \bigcup \{f\}$ și $Q \bigcup \mathcal{V} \bigcup \{t\}$ generează clici în *G*. Vârfurile "albe" aparțin mulțimii S_t, iar vârfurile "negre" aparțin mulțimii S_f. Vârfurile "albe" din mulțimea $\mathcal{V}$ reprezintă variabilele mulțimii V cu valoarea "adevărat". Toate muchiile dintre mulțimile L și $\mathcal{L}$ sunt reprezentate în figura 2.8.

Consecința 2.9. *Problemele* 2-*divizării d-convexe,* 2-*divizării d-convexe netriviale și* 2-*acoperirii d-convexe netriviale sunt NP-complete.*

Demonstrație: Din construcția grafului particular G din Teorema 2.5, care corespunde instanței arbitrare a problemei 1-IN-3 SAT, rezultă că G poate fi acoperit cu două mulțimi *d*-convexe care, implicit, sunt netriviale și disjuncte. Prin urmare, orice 2-acoperire *d*-convexă a grafului G este și o 2-divizare *d*-convexă. De asemenea, orice 2-acoperire *d*-convexă a grafului G este și o 2-acoperire *d*-convexă netrivială.

Din faptul că problema *p*-acoperirii *d*-convexe este *NP*-completă, pentru orice $p \geq 3$, se deduce următoarea consecință.

Consecința 2.10. *Problema p-acoperirii d-convexe este NP-completă, pentru orice* $p \geq 2$.

2.3. Problema de (2,*t*)-acoperire și (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă

Din cele examinate mai sus cunoaștem că problema generală de 2-acoperire *d*-convexă este *NP*-completă. Se știe că *d*-convexitatea unei mulțimi se verifică în timp polinomial [65]. Prin urmare, poate fi ușor verificat dacă pentru un graf există 2-acoperire *d*-convexă, în care o mulțime este trivială. Vom examina dacă orice 2-acoperire *d*-convexă a grafului *G,* în care o mulțime este trivială și cealaltă netrivială, implică existența 2-acoperirii *d*-convexe netriviale în graful *G*.

Întâi de toate, vom formula câteva definiții importante de care vom avea nevoie în cele ce urmează.

Definiția 2.10. [24] *Vârful x al grafului neorientat G îl vom numi* ***simplicial*** *dacă vecinătatea lui formează o clică în G.*

Definiția 2.11. 2-*acoperirea d-convexă, notată prin* $\mathcal{P}_{2,t}(G) = \{S_t, S_{nt}\}$, *o vom numi* (2,*t*)-*acoperirea d-convexă a grafului G dacă mulțimea* S_t *este trivială.*

Definiția 2.12. 2-*acoperirea d-convexă, notată prin* $\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1, S_2\}$, *o vom numi* (2,*nt*)-*acoperirea d-convexă a grafului G dacă mulțimile* S_1 *și* S_2 *sunt netriviale.*

Familia tuturor (2,*t*)-acoperirilor *d*-convexe ale grafului *G* o vom nota prin $\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G) = \{\mathcal{P}^1_{2,t}(G), \mathcal{P}^2_{2,t}(G), ..., \mathcal{P}^k_{2,t}(G)\}$.

Se verifică că pentru orice graf conex neorientat cu $n=2$ sau $n=3$ vârfuri există o (2,*t*)-acoperire *d*-convexă și nu există nici o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă. Pentru cazul $n=4$ este adevărată următoarea consecință, corectitudinea căreia rezultă din Lema 2.6:

Consecința 2.11. *Dacă G este un graf conex neorientat cu* 4 *vârfuri, atunci pentru G există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă dacă și numai dacă* $G \neq C_4$.

În cele ce urmează, vom analiza cazul $n \geq 5$.

Lema 2.9. *Pentru orice graf conex neorientat* $G=(X;U)$, $|X| \geq 5$, *sunt echivalente afirmațiile:*

1) G conține un vârf simplicial $x \in X$ *;*

2) în G există familia $\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{x\}, S_{nt}=X \setminus \{x\}\}$*;*

3) în G există familia $\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{x,y : x \sim y\}, S_{nt}=X \setminus \{x\}\}$.

Demonstrație: Deoarece $x \in X$ este un vârf simplicial în *G*, rezultă că orice două vârfuri $y,z \in \Gamma(x)$ sunt adiacente, în rezultat au loc relațiile $d-conv(\Gamma(x))=\Gamma(x)$ și $d-conv(X \setminus \{x\})=X \setminus \{x\}$. Prin urmare, pentru *G* există o (2,*t*)-acoperire *d*-convexă:

$$\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{x\}, S_{nt}=X \setminus \{x\}\}.$$

Deci, are loc implicația $1) \Rightarrow 2)$.

Fie că există familia de acoperire $\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{x\}, S_{nt}=X \setminus \{x\}\}$. Graful *G* este conex, ceea ce implică existența cel puțin unui vârf *y* adiacent cu *x*, pentru care are loc egalitatea $d-conv(\{x,y\})=\{x,y\}$. Rezultă că pentru *G* există o (2,*t*)-acoperire *d*-convexă:

$$\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{x,y : x \sim y\}, S_{nt}=X \setminus \{x\}\}.$$

Astfel, se obține implicația $2) \Rightarrow 3)$.

Admitem că există familia de acoperire $\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{x,y : x \sim y\}, S_{nt}=X \setminus \{x\}\}$. Deoarece S_{nt} este o mulțime *d*-convexă, $\Gamma(x)$ formează o clică în *G*, ceea ce înseamnă că *x* este un vârf simplicial. Așadar, are loc implicația $3) \Rightarrow 1)$.

Lema 2.10. *Pentru orice graf conex neorientat* $G=(X;U)$, $|X| \geq 5$, *care conține un vârf simplicial, există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă.*

Demonstrație: Fie *x* un vârf simplicial. Sunt posibile următoarele două cazuri: $|\Gamma(x)|=1$ și $|\Gamma(x)| \geq 2$. Vom analiza fiecare caz în parte.

Fie că $\Gamma(x)=\{y\}$, ceea ce înseamnă că $|\Gamma(x)|=1$. Deoarece graful G este conex și $n-1\geq 3$, există un vârf z diferit de x și adiacent cu y, pentru care are loc relația $\langle x,z\rangle=\{x,y,z\}$ și rezultă egalitatea $d-conv(\{x,y,z\})=\{x,y,z\}$. Aceasta implică existența (2,*nt*)-acoperirii *d*-convexe netriviale:

$$\mathcal{P}_{2,nt}(G)=\{S_1=\{x,y,z\},S_2=X\setminus\{x\}\}.$$

Fie acum $\Gamma(x)\geq 2$. Selectăm două vârfuri $y,z\in\Gamma(x)$. Cum x este un vârf simplicial, mulțimea $\{x,y,z\}$ formează un triunghi în G. Prin urmare, au loc relațiile $d-conv(\{x,y,z\})=\{x,y,z\}$ și $d-conv(\Gamma(x))=\Gamma(x)$, care implică existența (2,*nt*)-acoperirii *d*-convexe netriviale $\mathcal{P}_{2,nt}(G)=\{S_1=\{x,y,z\},S_2=X\setminus\{x\}\}$.

Lema 2.11. *Pentru orice graf conex neorientat* $G=(X;U)$, $|X|\geq 5$, *care nu conține vârfuri simpliciale, sunt echivalente afirmațiile:*

1) în G există două vârfuri adiacente $x,y\in X$, *astfel încât mulțimile* $A=\Gamma(x)\setminus\{y\}$ *și* $B=\Gamma(y)\setminus\{x\}$ *formează clici în G și are loc inegalitatea* $d(a,b)\leq 2$, *pentru oricare două vârfuri* $a\in A$ *și* $b\in B$;

2) în G există familia $\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{x,y:x\sim y\},S_{nt}=X\setminus\{x,y\}\}$.

Demonstrație: Combinând absența vârfurilor simpliciale în graful *G* cu afirmația Lemei 2.9, se deduce că pentru *G* nu există nici o (2,*t*)-acoperire *d*-convexă, în care mulțimea *d*-convexă trivială este formată dintr-un element sau din doua elemente, astfel încât mulțimea trivială se intersectează cu cea netrivială.

Fie $x,y\in X$ sunt două vârfuri care satisfac afirmația 1). Atunci sunt adevărate relațiile:

$$d-conv(\{x,y\})=\{x,y\} \text{ și } \{x,y\}\bigcap d-conv(A\bigcup B)=\varnothing,$$

care implică existența (2,*t*)-acoperirii *d*-convexe:

$$\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{x,y:x\sim y\},S_{nt}=X\setminus\{x,y\}\}.$$

Prin urmare, avem $1)\Rightarrow 2)$.

Presupunem că $\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{x,y:x\sim y\},S_{nt}=X\setminus\{x,y\}\}$ este o (2,*t*)-acoperire *d*-convexă a grafului G. Conform condițiilor lemei, graful *G* nu conține nici un vârf simplicial. Dat fiind faptul că vârfurile *x* și *y* sunt adiacente și $S_{nt}=X\setminus\{x,y\}$ este o mulțimi *d*-convexă, mulțimile $A=\Gamma(x)\setminus\{y\}$, $B=\Gamma(y)\setminus\{x\}$ generează două clici în *G*. Totodată, dacă există două vârfuri $a\in A$ și $b\in B$, pentru care are loc relația $d(a,b)>2$, atunci $\{x,y\}\subseteq\langle a,b\rangle\subseteq S_{nt}$, ceea ce contrazice *d*-convexitatea mulțimii S_{nt}. Astfel, pentru orice două vârfuri $a \in A$ și $b \in B$ avem inegalitatea $d(a,b) \leq 2$. Așadar, se obține implicația $2 \Rightarrow 1$.

Lema 2.12. *Dacă pentru un graf conex neorientat* $G = (X;U)$, $|X| \geq 5$, *care nu conține vârfuri simpliciale, familia* $\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)$ *conține doua* (2,*t*)*-acoperiri d-convexe pentru care intersecția mulțimilor triviale este vida, atunci există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă a grafului G.*

Demonstrație: Afirmația lemei devine evidentă îndată ce se observă că mulțimile *d*-convexe netriviale ale (2,*t*)-acoperirilor menționate formează, la rândul sau, o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*.

Lema 2.13. *Dacă pentru un graf conex neorientat* $G = (X;U)$, $|X| \geq 5$, *care nu conține vârfuri simpliciale, are loc relația* $|\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)| = k \geq 2$ *și intersecția mulțimilor triviale* S_t^i, $1 \leq i \leq k$, *a oricăror două* (2,*t*)*-acoperiri d-convexe nu este vidă, atunci doar una din următoarele afirmații este adevărată:*

1) $|\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)| = 3$ *și mulțimea* $S_t^1 \cup S_t^2 \cup S_t^3$ *generează un triunghi în G;*

2) $\left|\bigcap_{i=1}^{k} S_t^i\right| = 1$.

Demonstrație: Ținând cont de lipsa vârfurilor simpliciale și de Lema 2.9, deducem că nu există (2,*t*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*, pentru care mulțimea *d*-convexă trivială constă dintr-un vârf sau două vârfuri, astfel încât mulțimea trivială se intersectează cu cea netrivială.

Fie că $|\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)| = 2$. În baza definiției familiei $\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)$ și din faptul că *G* nu conține vârfuri simplicile, rezultă corectitudinea afirmației 2).

Fie că $|\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)| = 3$. Daca $|S_t^1 \cap S_t^2 \cap S_t^3| = 1$, atunci afirmația 2) este satisfăcută. Altfel, mulțimea $S_t^1 \cup S_t^2 \cup S_t^3$ generează un triunghi în *G*.

Fie că $|\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)| \geq 4$. Evident, în cazul de față se obține $\left|\bigcap_{i=1}^{k} S_t^i\right| = 1$ și prin urmare se îndeplinește afirmația 2).

Lema 2.14. *Dacă un graf conex neorientat* $G = (X;U)$, $|X| \geq 5$, *care nu conține vârfuri simpliciale, satisface relația* $\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G) = \{\mathcal{P}_{2,t}^i(G) = \{S_t^i, S_{nt}^i\} : 1 \leq i \leq 3\}$, *astfel încât reuniunea* $S_t^1 \cup S_t^2 \cup S_t^3$ *generează în G un triunghi, atunci există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă a grafului G.*

Demonstrație: Notăm $S = S_t^1 \cup S_t^2 \cup S_t^3$. Ușor ne putem convinge că există următoarele (2,*nt*)-acoperiri *d*-convexe:

$$\mathcal{P}_{2,nt}^1(G) = \{S, S_{nt}^1\}, \mathcal{P}_{2,nt}^2(G) = \{S, S_{nt}^2\}, \mathcal{P}_{2,nt}^3(G) = \{S, S_{nt}^3\},$$

ceea ce demonstrează lema.

Lema 2.15. *Pentru orice graf conex neorientat* $G = (X;U), |X| \geq 5$, *care nu conține vârfuri simpliciale și pentru care are loc relația:*

$$\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G) = \{\mathcal{P}_{2,t}^i(G) = \{S_t^i = \{a, b_i\}, S_{nt}^i\} : 1 \leq i \leq k, k \geq 3\},$$

există o (2,*nt*)*-acoperire d-convexă.*

Demonstrație: Conform condiției lemei avem $|\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)| \geq 3$, $\bigcap_{i=1}^k S_t^i = \{a\}$ și $|\Gamma(a) \setminus \{b_i\}| \geq 2$, pentru orice *i*, $1 \leq i \leq k$. Mulțimile S_{nt}^i, $1 \leq i \leq k$, sunt netriviale, deoarece $|X| \geq 5$. Combinând absența vârfurilor simpliciale în *G* cu afirmația Lemei 2.9, obținem că graful *G* nu conține (2,*t*)-acoperire *d*-convexă, pentru care mulțimea *d*-convexă trivială este formată dintr-un element sau două elemente, astfel încât mulțimea trivială se intersectează cu mulțimea netrivială. Vârfurile b_i și b_j sunt adiacente, $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$, deoarece $a \notin S_{nt}^i$, $1 \leq i \leq k$. Prin urmare, $\bigcup_{i=1}^k S_t^i$ generează o clică netrivială în *G*. Totodată, aceasta înseamnă că $\bigcup_{i=1}^k S_t^i$ formează o mulțime *d*-convexă netrivială. În final, prezentăm o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă posibilă a grafului *G*:

$$\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{\{a, b_1, b_2\}, S_{nt}^1\}.$$

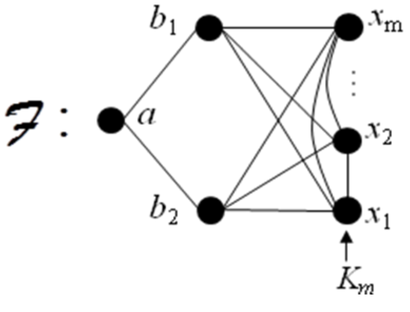


Fig. 2.9. *Familia de grafuri* $\mathcal{F}$.

În cele ce urmează, vom avea nevoie de o clasă de grafuri conexe neorientate $\mathcal{F}$. Clasei $\mathcal{F}$ îi corespund toate grafurile $G = (X;U)$, care satisfac următoarele condiții:

1) $X = \{a, b_1, b_2, x_1, x_2, ..., x_m\}, m \geq 1;$

2) $U = \{\{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, x_i\}, \{b_2, x_i\}, \{x_i, x_j\} : 1 \leq i, j \leq m\}.$

Familia $\mathcal{F}$ este prezentată în figura 2.9. Se observă că pentru orice graf $G=(X;U)\in\mathcal{F}$, $|X|\geq 5$, există exact două (2,*t*)-acoperiri *d*-convexe:

$$\mathcal{P}^1_{2,t}(G)=\{\{a,b_1\},\{b_2,x_1,x_2,...,x_m\}\},\mathcal{P}^2_{2,t}(G)=\{\{a,b_2\},\{b_1,x_1,x_2,...,x_m\}\}.$$

Teorema 2.6. *Pentru orice graf* $G=(X;U)\in\mathcal{F}$ *nu există* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă.*

Demonstrație: Conform definiției familiei de grafuri $\mathcal{F}$, pentru orice graf $G=(X;U)$ din $\mathcal{F}$ are loc inegalitatea $|X|\geq 4$. Se observă că dacă $|X|=4$, atunci $G=C_4$. Din Consecința 2.11 se cunoaște că pentru C_4 nu există nici o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă.

Rămâne de analizat cazul $|X|\geq 5$. Presupunem că există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*, atunci în (2,*nt*)-acoperirea dată cel puțin o mulțime *d*-convexă netrivială conține vârfurile b_1 și b_2 sau *a* și *x*, unde $x\in X\setminus\{a,b_1,b_2\}$. Se verifică cu ușurință că pentru orice graf *G* din familia $\mathcal{F}$ au loc următoarele relații:

$$\{b_1,b_2\}\subseteq\langle a,x\rangle,\ \text{pentru orice}\ x\in X\setminus\{a,b_1,b_2\},$$

$$\text{și}\ d-conv(\{b_1,b_2\})=X\ ,$$

ceea ce contrazice existența (2,*nt*)-acoperirii *d*-convexe a grafului *G*. Prin urmare, teorema este demonstrată.

Lema 2.16. *Pentru orice graf conex neorientat* $G=(X;U), |X|\geq 5, G\notin\mathcal{F}$, *care nu conține vârfuri simpliciale și pentru care are loc relația:*

$$\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)=\{\mathcal{P}^1_{2,t}(G)=\{S^1_t=\{a,b_1\},S^1_{nt}\},\mathcal{P}^2_{2,t}(G)=\{S^2_t=\{a,b_2\},S^2_{nt}\}\},$$

există o (2,*nt*)*-acoperire d-convexă.*

Demonstrație: Presupunem $b_1\sim b_2$, atunci mulțimea $\{a,b_1,b_2\}$ este *d*-convexă netrivială, și există (2,*nt*)-acoperirile *d*-convexe ale grafului *G*:

$$\mathcal{P}^1_{2,nt}(G)=\{\{a,b_1,b_2\},S^1_{nt}\}\ \text{și}\ \mathcal{P}^2_{2,nt}(G)=\{\{a,b_1,b_2\},S^2_{nt}\}.$$

Acum, presupunem că $b_1\nsim b_2$. Definim mulțimile $A=\Gamma(a)\setminus\{b_1\}$ și $B=\Gamma(b_1)\setminus\{a\}$. Se verifica nemijlocit că $A,B\subseteq S^1_{nt}$. Dacă $S^1_{nt}\neq d-conv(A\cup B)$, atunci există (2,*nt*)-acoperirea *d*-convexă $\mathcal{P}_{2,nt}(G)=\{\{a,b_1\}\cup d-conv(A\cup B),S^1_{nt}\}$.

Fie că $S^1_{nt}=d-conv(A\cup B)$. Totodată, presupunem că $|A|\geq 2$. În baza Lemei 2.11 putem afirma că $A\cup\{a\}$ formează o clică în *G* și prin urmare $A\cup\{a\}$ este o mulțime *d*-convexă netrivială. Din condițiile lemei, rezultă că $b_2 \in A$ și $b_1 \in S_{nt}^2$, cee ce implică existența (2,*nt*)-acoperirii *d*-convexe:

$$\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{A \bigcup \{a\}, S_{nt}^2\}.$$

În cele ce urmează presupunem că $A = \{b_2\}$. Din Lema 2.11, se obține $B \geq 1$. Urmează să analizăm două cazuri.

Fie că $S_{nt}^1 \neq A \bigcup B$. Atunci, combinând *d*-convexitatea mulțimii S_{nt}^1 cu afirmația Lemei 2.11, obținem existența vârfului $x \in B$, care satisface egalitatea $d(b_2, x) = 2$, astfel încât există un vârf $y \in \langle x, b_2 \rangle$, $y \notin A \bigcup B$ și $y \in d - conv(A \bigcup B)$, ceea ce implică existența (2,*nt*)-acoperirii *d*-convexe $\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1 = \{a, b_1, x\}, S_2 = S_{nt}^1\}$.

Fie că $S_{nt}^1 = A \bigcup B$. Atunci, deoarece $n \geq 5$ și $|A| = 1$, rezulta că $|B| \geq 2$. Daca $b_2 \sim x$ pentru orice vârf $x \in B$, atunci $G \in \mathcal{F}$, iar conform Teoremei 2.6, pentru acest graf nu există (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă. În caz contrar, pentru *G* există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă:

$$\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1 = d - conv(\{b_1, b_2\}), S_2 = B \bigcup \{b_1\}\}.$$

Așadar, lema este demonstrată.

Remarcăm ca pentru oricare graf conex neorientat, care conține vârfuri simpliciale, există cel puțin două (2,*t*)-acoperiri *d*-convexe diferite. Aceasta rezulta nemijlocit din afirmația Lemei 2.9.

Să definim câteva familii de grafuri, de care vom avea nevoie în cercetările ulterioare. Notam prin $\mathcal{G}$ familia grafurilor conexe neorientate cu $n \geq 5$ vârfuri, care nu aparțin familiei $\mathcal{F}$ și pentru care există cel puțin două (2,*t*)-acoperiri *d*-convexe.

Notăm prin $\mathcal{H}$ familia grafurilor conexe neorientate cu $n \geq 5$ vârfuri pentru care există exact o singură (2,*t*)-acoperire *d*-convexă.

Teorema 2.7. *Pentru orice graf* $G = (X; U) \in \mathcal{G}$ *există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă.*

Demonstrație: Corectitudinea teoremei rezulta din Lemele 2.9 - 2.16 și din Teorema 2.6.

Fie $\mathcal{H}'$ o subclasă a clasei $\mathcal{H}$, grafurile căreia posedă proprietățile:

1) $A \bigcap B = \varnothing$, unde $A = \Gamma(x) \setminus \{y\}$, $B = \Gamma(y) \setminus \{x\}$ și $\{x, y\}$ este mulțimea trivială a (2,*t*)-acoperirii *d*-convexe;

2) pentru orice vârf $a \in A$, există un vârf $b \in B$, $a \sim b$, și invers;

3) $d - conv(A \bigcup B) = S_{nt}$, unde S_{nt} este mulțimea netrivială a (2,*t*)-acoperirii *d*-convexe;

4) $S_{nt} \neq A \bigcup B$, ceea ce implică existența vârfurilor $a \in A$, $b \in B$ și $c \in C$, pentru care $d(a,b) = 2$ și $c \in \langle a,b \rangle$, unde $C = S_{nt} \setminus (A \bigcup B)$.

Notăm $\mathcal{H}'' = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}'$.

Teorema 2.8. *Pentru orice graf* $G = (X;U) \in \mathcal{H}''$ *există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă.*

Demonstrație: Fie $\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_t = \{y, x\}, S_{nt}\}$ o (2,*t*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*. Fixăm două mulțimi $A = \Gamma(x) \setminus \{y\}$ și $B = \Gamma(y) \setminus \{x\}$. Deoarece graful *G* nu aparține clasei $\mathcal{H}'$, rezultă că cel puțin una din proprietățile familiei $\mathcal{H}'$ nu este îndeplinită.

Dacă $A \bigcap B \neq \varnothing$, atunci există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă:

$$\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1 = \{y, x, z\}, S_2 = S_{nt}\},$$

unde $z \in A \bigcap B$.

Fie că proprietatea 1) este satisfăcută. În caz contrar, din cele spuse mai sus, rezultă că pentru *G* există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă. Dacă există un vârf $a \in A$, pentru care nu există nici un vârf $b \in B$, astfel încât $a \sim b$, atunci se obține o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă:

$$\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1 = \{y, x, a\}, S_2 = S_{nt}\}.$$

De asemenea, dacă există un vârf $b \in B$, pentru care nu există nici un vârf $a \in A$, astfel încât $a \sim b$, atunci există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă:

$$\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1 = \{y, x, b\}, S_2 = S_{nt}\}.$$

Dacă $d - conv(A \bigcup B) \neq S_{nt}$, atunci există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă:

$$\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1 = \{x, y\} \bigcup d - conv(A \bigcup B), S_2 = S_{nt}\}.$$

Admitem că $S_{nt} = A \bigcup B$. Dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*:

$$\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1 = \{x\} \bigcup A, S_2 = \{y\} \bigcup B\}.$$

Dacă $|A| = 1$, atunci $|B| \geq 2$. Considerăm că proprietățile 1) și 2) sunt satisfăcute. În caz contrar, în baza celor spuse mai sus, pentru *G* există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă. Fie că $A = \{v\}$. Ținând cont de proprietatea 2), vârful *v* este adiacent cu toate vârfurile din *B*, ceea ce implică apartenența $G \in \mathcal{F}$. Conform definiției, $\mathcal{H}''$ este familia de grafuri pentru care există exact o singură (2,*t*)-acoperire *d*-convexă, dar orice graf care aparține familiei $\mathcal{F}$, conține exact doua (2,*t*)-acoperiri *d*-convexe. Astfel, se obține o contradicție. Similar, daca presupunem |*B*| = 1 și $A \geq 2$, atunci obținem o contradicție din nou. Prin urmare rezultă că afirmația teoremei este adevărată.

În continuare, prezentăm câțiva algoritmi care determină apartenența grafului *G* la una din clasele de grafuri: $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$.

Algoritmul ce urmează determină daca *G* aparține familiei $\mathcal{F}$.

Algoritm 2.1.

Input: Graf conex neorientat $G = (X;U)$.

Output: *DA*: *G* aparține familiei $\mathcal{F}$, sau *NU*: *G* nu aparține familiei $\mathcal{F}$.

1: **if** $0 \leq |X| \leq 3$ **then return** *NU*

2: **if** $|X| = 4$ **then**

3:     **if** $G = C_4$ **then return** *DA*

4: $flag \leftarrow 0$, $x \leftarrow 0$

5: **for every** $v \in X$ **do**

6:     **if** $|\Gamma(x)| = 2$ **then**

7:         $flag \leftarrow flag + 1$

8:         $x \leftarrow v$

9: **if** $flag \neq 1$ **then return** *NU*

10: **if** $y \sim z$ **then return** *NU*: unde $\Gamma(x) = \{y, z\}$

11: **for every** $S \in \{X \setminus \{x,z\}, X \setminus \{x,y\}\}$ **do**

12:     **for every** $v, u \in S$ **do**

13:         **if** $v \not\sim u$ **then return** *NU*

14: **return** *DA*

Teorema 2.9. *Algoritmul 2.1 determină în timp* $O(n^2)$ *dacă G aparține familiei* $\mathcal{F}$.

Demonstrație: Corectitudinea algoritmului rezultă din construcția grafurilor, care fac parte din familia $\mathcal{F}$. Evident, pașii 1) - 4), 9), 10) și 14) se executa în timp constant. Pașii 5) – 8) determină dacă în *G* există doar un singur vârf, vecinătatea căruia constă din două elemente, pentru aceasta este nevoi de timp $O(n)$. Pașii 11) – 13) verifică în timp $O(n^2)$ daca mulțimile analizate formează clici în *G*. În baza celor menționate, rezultă că complexitatea întregului algoritm este $O(n^2)$.

Următorul algoritm, determină daca G aparține la una din familiile: $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$.

Algoritm 2.2.

Input: Graf conex neorientat $G = (X;U)$.

Output: $DA\mathcal{J}$: G aparține familiei $\mathcal{J}$, sau $DA\mathcal{H}'$: G aparține familiei $\mathcal{H}'$, sau $DA\mathcal{H}''$: G aparține familiei $\mathcal{H}''$, sau *NU*: G nu aparține la nici o familie.

if Algoritm 2.1 returnează *DA* **then return** *NU*

if $0 \le |X| \le 4$ **then return** *NU*

for every $x \in X$ **do**

  $flag \leftarrow 1$

  for every $y, z \in \Gamma(x)$, $y \ne z$ **do**

    if $y \not\sim z$ **then** $flag \leftarrow 0$

  if $flag = 1$ **then return** $DA\mathcal{J}$

$\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G) \leftarrow \varnothing$

for every $\{x, y\} \in U$ **do**

  $S_{nt} \leftarrow d-conv(X \setminus \{x, y\})$

    if $S_{nt} = X \setminus \{x, y\}$ **then**

      $\mathcal{P}_{2,t}(G) \leftarrow \{\{x, y\}, S_{nt}\}$

      $\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G) \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G) \bigcup \{\mathcal{P}_{2,t}(G)\}$

if $|\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)| = 0$ **then return** *NU*

if $|\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G)| \ge 2$ **then return** $DA\mathcal{J}$

$A \leftarrow \Gamma(x) \setminus \{y\}$, $B \leftarrow \Gamma(y) \setminus \{x\}$: unde $\tilde{\mathcal{P}}_{2,t}(G) = \{\mathcal{P}_{2,t}(G) = \{S_t = \{x, y\}, S_{nt} = X \setminus \{x, y\}\}\}$

if $A \bigcap B \ne \varnothing$ **then return** $DA\mathcal{H}''$

for every $a \in A$ **do**

  if $\Gamma(a) \bigcap B = \varnothing$ **then return** $DA\mathcal{H}''$

for every $b \in B$ **do**

  if $\Gamma(b) \bigcap A = \varnothing$ **then return** $DA\mathcal{H}''$

$S \leftarrow d-conv(A \bigcup B)$

if $S \ne S_{nt}$ **then return** $DA\mathcal{H}''$

24: **if** $A \bigcup B = S_{nt}$ **then return** $DA\mathcal{H}''$

25: **return** $DA\mathcal{H}'$

Teorema 2.10. *Algoritmul 2.2 determină în timp* $O(nm^2)$ *dacă un graf G aparține unei familii:* $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$.

Demonstrație: Corectitudinea algoritmului rezultă din definiția claselor de grafuri: $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}'$ și $\mathcal{H}''$. Întrucât complexitatea Algoritmului 2.1 este $O(n^2)$, rezultă că complexitatea pasului 1) este $O(n^2)$.

Vârful $x \in X$ se numește simplicial dacă și numai dacă Γ(*x*) generează o clică în graf, dar pentru a determina dacă o submulțime formează o clică necesită timp $O(n^2)$. În consecință, pentru a verifica dacă există cel puțin un vârf simplicial este nevoie de timp $O(n^3)$. Astfel, complexitatea pașilor 3) - 7) este $O(n^3)$. Învelitoarea *d*-convexă a submulțimii $S \subset X$ se construiește în timp $O(|d-conv(S)|m)$ [65]. Deoarece $|d-conv(S)|$ poate atinge valoarea lui *n*, rezultă ca complexitatea pasului 22) este $O(nm)$. Existența familiei $\mathcal{P}_{2,t}(G)$ se verifică prin aplicarea algoritmului de construire invelitoarei *d*-convexe a mulțimilor $X \setminus \{x, y\}$, pentru oricare două vârfuri adiacente $x, y \in X$. Cum $|d-conv(X \setminus \{x, y\})|$ poate atinge valoarea lui *n*, rezultă ca complexitatea pașilor 9) - 13) este $O(nm^2)$.

Se verifică că pașii 2), 8), 14), 15), și 25) se execută în timp constant, pașii 16), 17), 23) și 24) se executa în timp $O(n)$, dar pașii 18) - 21) necesită pentru execuție timp $O(n^2)$. Astfel, complexitatea întregului algoritm este $O(nm^2)$.

Lema 2.17. *Dacă pentru un graf* $G = (X;U) \in \mathcal{H}'$, *pentru care există o* (2,*t*)*-acoperire d-convexă* $\mathcal{P}_{2,t}(G) = \{S_t = \{x, y\}, S_{nt} = X \setminus \{x, y\}\}$, *există și o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă, atunci există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă* $\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1, S_2\}$, *astfel încât se îndeplinește doar una din următoarele afirmații:*

a) $x, y \in S_1$ *și* $S_2 = X \setminus \{x, y\}$;

b) $x \in S_1, x \notin S_2$ *și* $y \in S_2, y \notin S_1$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{P}^1_{2,nt}(G) = \{S^1_1, S^1_2\}$ o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*. Presupunem că $x, y \in S^1_1$. Atunci, din faptul că S_{nt} este o mulțime *d*-convexă netrivială, se deduce

$S_1 = S_1^1$ și $S_2 = S_{nt}$. Prin urmare, se îndeplinește afirmația a). În caz contrar, se îndeplinește afirmația b).

Lema 2.18. *Se determină în timp* $O(n^2 m)$ *dacă pentru un graf* $G = (X;U) \in \mathcal{H}'$ *există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă, care satisface afirmația a) din Lema 2.17. Pentru aceasta este suficient de verificat dacă există un vârf* $z \in A \cup B$*, astfel încât* $S_{nt} \not\subset d - conv(\{x, y, z\})$*, unde* $\mathcal{P}_{2,t}(G) = \{S_t = \{x, y\}, S_{nt} = X \setminus \{x, y\}\}$ *este o* (2,*t*)*-acoperire d-convexă și* $A = \Gamma(x) \setminus \{y\}$, $B = \Gamma(y) \setminus \{x\}$.

Demonstrație: Conform definiției familiei $\mathcal{H}'$, graful *G* nu conține vârfuri simpliciale și $|X| \geq 5$. Fie $\mathcal{P}_{2,nt}^1(G) = \{S_1^1, S_2^1 = S_{nt}\}$ o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*, pentru care $x, y \in S_1^1$. În aceste condiții, există un vârf $z \in A \cup B$, care satisface $d - conv(\{x, y, z\}) \subseteq S_1^1$. Prin urmare, pentru *G* există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă:

$$\mathcal{P}_{2,nt}^2(G) = \{S_1^2 = d - conv(\{x, y, z\}), S_2^2 = S_{nt}\}.$$

Este suficient de determinat dacă există un astfel de vârf $z \in A \cup B$, pentru care are loc relația $S_{nt} \not\subset d - conv(\{x, y, z\})$. Pentru aceasta se construiește învelitoare *d*-convexă a mulțimii de vârfuri $\{x, y, z\}$, pentru orice vârf $z \in A \cup B$. Dacă cel puțin pentru un astfel de vârf se îndeplinește relația menționată, atunci există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*, care satisface afirmația a) din Lema 2.17.

Reamintim că construirea invelitoarei *d*-convexe a unei submulțimi $S \subset X$ de vârfuri se realizează în timp $O(|d - conv(S)| m)$ [65]. Pentru a determina dacă există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*, care satisface afirmația a) din Lema 2.17, este necesar de construit învelitoarea *d*-convexă de cel mult $|A \cup B|$ ori. Așadar, complexitatea finală este $O(n^2 m)$.

Lema 2.19. *Dacă pentru un graf* $G = (X;U) \in \mathcal{H}'$*, pentru care există o* (2,*t*)*-acoperire* $\mathcal{P}_{2,t}(G) = \{S_t = \{x, y\}, S_{nt} = X \setminus \{x, y\}\}$*, nu există nici o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă, care satisface condiția a) din Lema 2.17, dar există o* (2,*nt*)*-acoperire d-convexă* $\mathcal{P}_{2,nt}(G) = \{S_1, S_2\}$*, care satisface condiția b) din Lema 2.17, ceea ce însemna că* $x \in S_1, x \notin S_2$ *și* $y \in S_2, y \notin S_1$*, atunci sunt adevărate afirmațiile:*

a) $(\Gamma(x) \setminus \{y\}) \subseteq S_1, (\Gamma(x) \setminus \{y\}) \cap S_2 = \varnothing$;

b) $(\Gamma(y) \setminus \{x\}) \subseteq S_2, (\Gamma(y) \setminus \{x\}) \cap S_1 = \varnothing$.

Demonstrație: Admitem că $(\Gamma(x)\setminus\{y\})\bigcap S_2 \neq \varnothing$ sau $(\Gamma(x)\setminus\{y\}) \not\subset S_1$, ceea ce înseamnă că $(\Gamma(x)\setminus\{y\})\bigcap S_2 \neq \varnothing$. Atunci $x \in S_2$ și din cauză că $x \in S_1$ și $y \in S_2$, familia $\mathcal{P}_{2,nt}(G)$ nu satisface condiția b) din Lema 2.17 și se obține o contradicție. Prin analogie, dacă admitem că $(\Gamma(y)\setminus\{x\})\bigcap S_1 \neq \varnothing$ sau $(\Gamma(y)\setminus\{x\}) \not\subset S_2$, obținem contradicție.

Am demonstrat ca pentru orice graf din familiile $\mathcal{J}$ și $\mathcal{H}''$ există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă și pentru nici un graf din familia $\mathcal{F}$ nu există (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă. De asemenea, am arătat că se verifică în timp polinomial apartenența unui graf la una din familiei de grafuri: $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$.

Apare intrebarea, dacă pentru un graf *G*, care aparține clasei $\mathcal{H}'$, există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă.

Problema 2.3. ((2,*nt*)-acoperire a grafului din clasa $\mathcal{H}'$) *Fie dat un graf neorientat* $G = (X;U)$*, care aparține clasei* $\mathcal{H}'$*. Să se determine dacă există o* (2,*nt*)*-acoperire a lui G.*

În cele ce urmează vom demonstra că problema (2,*nt*)-acoperirii grafului din clasa $\mathcal{H}'$ este *NP*-completă. Vom reduce problema *NP*-completă 1-IN-3 3 SAT la problema (2,*nt*)-acoperirii grafului din clasa $\mathcal{H}'$.

Teorema 2.11. *Problema* (2,*nt*)*-acoperirii a grafului din clasa* $\mathcal{H}'$ *este NP-completă.*

Demonstrație: Teorema se demonstrează în mod analog cu Teorema 2.5. Menționăm că problema de (2,*nt*)-acoperire a grafului din clasa $\mathcal{H}'$ aparține clasei *NP*, deoarece în timp polinomial se verifică *d*-convexitatea mulțimii [65]. Urmează să reducem problema 1-IN-3 SAT la problema (2,*nt*)-acoperirii *d*-convexe a grafului din clasa $\mathcal{H}'$. Mai întâi, vom determina construcția grafului particular $G = (X;U) \in \mathcal{H}'$, care corespunde instanței arbitrare a problemei 1-IN-3 SAT. Vom arăta că $\mathcal{C}$ este satisfiabilă dacă și numai dacă pentru *G* există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă.

Construim un graf $G = (X;U)$ după cum urmează:

Mulțimea de vârfuri *X* constă din:

a) vârfurile *y* și *z*;

b) $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Y' = \{f, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\}$ și

$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $Z' = \{t, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9\}$;

c) mulțimile *F, T, L, Q* și $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}$ se definesc similar ca în Teorema 2.5.

Se obține mulțimea de vârfuri $X=\{y,z\}\bigcup Y\bigcup Y'\bigcup Z\bigcup Z'\bigcup F\bigcup T\bigcup L\bigcup Q\bigcup \mathcal{V}\bigcup \mathcal{L}$. Fiecare variabilă $v_i \in V$ corespunde vârfului $\mathcal{v}_i \in \mathcal{V}$, $1 \le i \le n$. Fiecărei clauze $\mathcal{c}_j \in \mathcal{C}$, $1 \le j \le m$, îi corespund unsprezece vârfuri, menționate în Teorema 2.5.

Mulțimea de muchii *U* satisface condițiile:

a) $y \sim z$, $y_4 \sim z_k$ și $z_4 \sim y_k$ pentru $1 \le k \le 4$;

b) $\mathcal{V}\bigcup Q$, $Y\bigcup\{y\}$ și $Z\bigcup\{z\}$ formează clici în *G*;

c) $\Gamma(f)=\mathcal{V}\bigcup Q\bigcup F\bigcup Y\bigcup\{y_6,y_7\}$ și

$\Gamma(t)=\mathcal{V}\bigcup Q\bigcup T\bigcup Z\bigcup\{z_6,z_7\}$;

d) $\Gamma(y_5)=F\bigcup Y\bigcup\{y_6,y_7\}$, $\Gamma(y_6)=Y\bigcup\{f,y_5,y_8,y_9,z_1\}$, $\Gamma(y_7)=Y\bigcup\{f,y_5,y_8,y_9,z_2\}$ și $\Gamma(z_5)=T\bigcup Z\bigcup\{z_6,z_7\}$, $\Gamma(z_6)=Z\bigcup\{t,z_5,z_8,z_9,y_1\}$, $\Gamma(z_7)=Z\bigcup\{t,z_5,z_8,z_9,y_2\}$;

e) fiecărei clauze $\mathcal{c}_j=\{v_a,v_b,v_c\}$, $1 \le j \le m$, îi corespund optsprezece muchii, menționate în Teorema 2.5.

Fără a pierde din generalitate, nu vom analiza cazul trivial $|\mathcal{C}|=1$. În cele ce urmează vom considera că $|\mathcal{C}| \ge 2$.

Pentru început, vom arăta că graful obținut $G=(X;U)$ face parte din familia $\mathcal{H}$. Se observă că graful *G* nu conține vârfuri simpliciale. Din construcția lui *G* rezulta că acest graf are exact o pereche de vârfuri adiacente *y* și *z*, care satisfac condițiile Lemei 2.11. Prin urmare, pentru *G* există o singură (2,*t*)-acoperire *d*-convexă:

$$\mathcal{P}_{2,t}(G)=\{S_t=\{y,z\},S_{nt}=X\setminus\{y,z\}\}.$$

Așadar, *G* aparține familiei $\mathcal{H}$.

Să arătăm că *G* aparține familiei $\mathcal{H}'$. Prin urmare, toate proprietățile care caracterizează familia de grafuri $\mathcal{H}'$ trebuie sa fie satisfăcute. Fie că $A=\Gamma(y)\setminus\{z\}$ și $B=\Gamma(z)\setminus\{y\}$. Se observă că proprietățile 1), 2) și 4) sunt satisfăcute. Cum $\{y_6,y_7,z_6,z_7\}\subseteq d-conv(A\bigcup B)$, $d-conv(\{y_6,y_7,z_6,z_7\})=S_{nt}$, proprietatea 3) se îndeplinește, ceea ce implica apartenența grafului *G* la familia $\mathcal{H}'$.

Să arătăm că graful *G* nu conține (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă, care satisface afirmația a) din Lemei 2.17. Din construcția grafului *G*, obținem $S_{nt}\subseteq d-conv(\{y,z,x\})$ pentru orice vârf $x\in A\bigcup B$. Prin urmare, având în vedere Lema 2.18, rezultă că *G* nu conține (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă, care satisface afirmația a) din Lemei 2.17. În consecință, daca pentru *G* există o

(2,*nt*)-acoperire *d*-convexă, atunci este satisfăcută afirmația b) a Lemei 2.17 și este satisfăcută Lema 2.19.

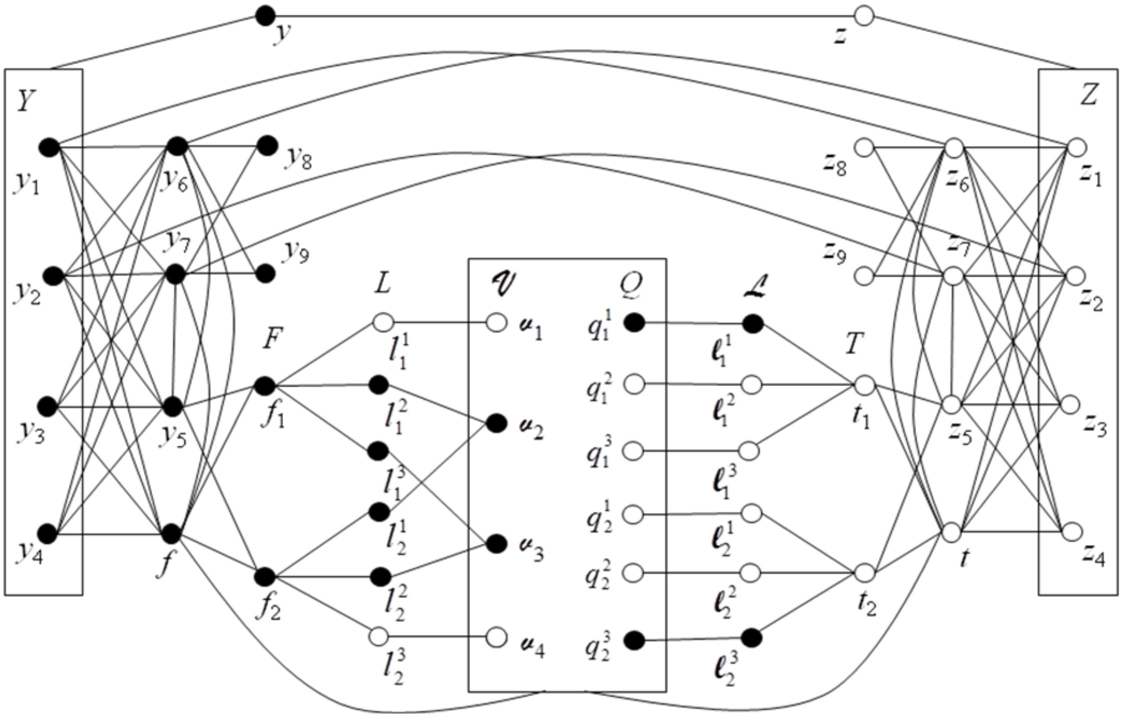


Fig. 2.10. (2,*nt*)-*acoperire a grafului G, ce corespunde problemei particulare 1-IN-3 SAT* $(V,\mathcal{C})=(\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\{\{v_1,v_2,v_3\},\{v_2,v_3,v_4\}\})$.

Dacă pentru $G=(X;U)$ *există o* (2,*nt*)-*acoperire d-convexă, atunci* $\mathcal{C}$ *este satisfiabilă.*

Fie $\mathcal{P}_2(G)=\{S_f,S_t\}$ o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă a grafului *G*, astfel încât $y\in S_f$, $y\notin S_t$ și $z\in S_t$, $z\notin S_f$. Deoarece $d-conv(\{y_i,z_j\})=S_{nt}=X\setminus\{y,z\}$, pentru oricare $i,j\in\{8,9\}$, fie că $y_8,y_9\in S_f$, $z_8,z_9\in S_t$ și $S_1=Y\bigcup Y'\bigcup F$, $S_1=Z\bigcup Z'\bigcup T$.

Menționăm câteva proprietăți importante, care se dimonstrează similar ca în Teorema 2.5.

Proprietatea 1: $S_1\bigcap S_t=\varnothing$ și $S_2\bigcap S_f=\varnothing$.

Proprietatea 2: Mulțimile $\mathcal{V},L,Q$ și $\mathcal{L}$ sunt univoc interdependente.

Proprietatea 3: Exact un vârf din $L_j=\{l_j^1,l_j^2,l_j^3\}$ aparține mulțimii S_t și exact un vârf din $\mathcal{L}_j=\{\ell_j^1,\ell_j^2,\ell_j^3\}$ aparține mulțimii S_f pentru orice *j*, $1\leq j\leq m$.

Asociem mulțimea $\mathcal{V}$ cu *V* și *L* cu $\mathcal{C}$, astfel încât (2,*nt*)-acoperirea *d*-convexă a grafului *G* să reprezinte o atribuire de valori a variabilelor din *V*, în care variabila v_i are valoarea "adevărat" dacă și numai dacă $v_i\in S_t$. Din proprietățile 1, 2 și 3 rezultă că dacă pentru *G* există o

(2,*nt*)-acoperire *d*-convexă $\mathcal{P}_2(G)=\{S_t,S_f\}$, atunci $\mathcal{C}$ este satisfiabilă. Totodată, se observă că mulțimile S_t și S_f sunt netriviale și disjuncte.

Dacă $\mathcal{C}$ este satisfiabilă, atunci pentru $G=(X;U)$ există o (2,*nt*)*-acoperire d-convexă.*

Fie că există o astfel de atribuirea a variabilelor din *V* cu valorile "adevărat" și "fals", încât $\mathcal{C}$ este satisfiabilă. Vom construi pentru graful *G* o (2,*nt*)-acoperirea *d*-convexă $\mathcal{P}_2(G)=\{S_t,S_f\}$ după cum urmează:

1. Definim mulțimea $S_t = Z \bigcup Z' \bigcup T \bigcup \{z\}$.

2. Pentru orice variabilă v_i din *V* cu valoarea "adevărat" adăugăm $\mathscr{v}_i$ și mulțimea $L' = \Gamma(\mathscr{v}_i) \bigcap L$ la S_t și pentru orice $l_j^a \in L'$ adăugăm q_j^b și ℓ_j^b la S_t, încât $\ell_j^b \sim l_j^a$ *și* $q_j^b \sim \ell_j^b$.

3. Definim mulțimea $S_f = X \setminus S_t$.

Se verifică că (2,*nt*)-acoperirea *d*-convexă obținută $\mathcal{P}_2(G)$ satisface proprietățile 1, 2 și 3. Prin urmare, dacă $\mathcal{C}$ este satisfiabilă, atunci pentru *G* există o (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă. Se observă că mulțimile S_t și S_f sunt netriviale și disjuncte.

În figura 2.10 este prezentat graful *G*, care corespunde instanței particulare $(V,\mathcal{C})=(\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\{\{v_1,v_2,v_3\},\{v_2,v_3,v_4\}\})$ a problemei 1-IN-3 SAT. Mulțimile $Q\bigcup\mathcal{V}\bigcup\{f\}$, $Q\bigcup\mathcal{V}\bigcup\{t\}$, $Y\bigcup\{y\}$ și $Z\bigcup\{z\}$ generează clici în *G*. Vârfurile "albe" aparțin mulțimii S_t, iar vârfurile "negre" aparțin mulțimii S_f. Vârfurile "albe" ale mulțimii $\mathcal{V}$ reprezintă variabilele mulțimii *V* cu valoarea "adevărat". Toate muchiile dintre mulțimile de vârfuri *L* și $\mathcal{L}$ sunt reprezentate în figura 2.8, iar muchiile dintre mulțimile *Y* și Z sunt reprezentate în figura 2.11.

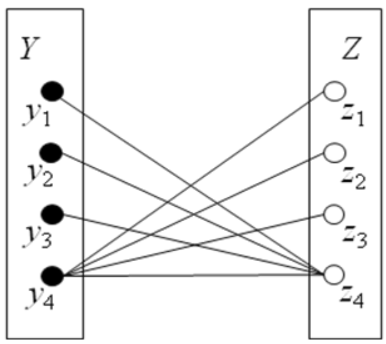


Fig. 2.11. *Muchiile dintre mulțimile de vârfuri Y* și Z.

2.4. Problema de acoperire/divizare *d*-convexă netrivială

Vom examina complexitatea problemelor de acoperire și divizare *d*-convexă netrivială. Definim următoarele trei probleme.

Problema 2.4. (*p*-acoperire *d*-convexă netrivială) *Fie dat un graf neorientat* $G=(X;U)$ *și un număr întreg* $p\geq 2$. *Să se determine dacă există p mulțimi d-convexe netriviale, care acoperă mulțimea X.*

Problema 2.5. (*p*-divizare *d*-convexă netrivială) *Fie dat un graf neorientat* $G=(X;U)$ *și un număr întreg* $p\geq 2$. *Să se determine dacă există p mulțimi d-convexe netriviale, care divizează mulțimea X.*

Problema 2.6. (*p*-divizare în clici) *Fie dat un graf neorientat* $G=(X;U)$ *și un număr întreg* $p\geq 3$. *Să se determine dacă există p clici în G, care divizează mulțimea X.*

Problema *p*-divizării în clici este *NP*-completă [87]. Vom reduce aceasta problemă la problemele *p*-acoperirii și *p*-divizării *d*-convexe netriviale.

Teorema 2.12. *Problema p-divizării d-convexe netriviale este NP-completă pentru orice* $p\geq 3$.

Demonstrație: Problema *p*-divizării *d*-convexe netriviale aparține clasei *NP*, deoarece în timp polinomial se verifică *d*-convexitatea unei mulțimi [65].

Fie $G=(X;U)$ un graf al problemei de *p*-divizare în clici. Fără a pierde din generalitate, considerăm că G nu este complet. Începem cu construirea unui graf particular $G'=(X';U')$ al problemei *p*-divizării *d*-convexe netriviale în baza grafului *G* prin adăugarea a două mulțimi de vârfuri $Y=\{y_1,y_2,...,y_p\}$ și $Z=\{z_1,z_2,...,z_p\}$ la mulțimea *X*, astfel încât să se formeze mulțimea $X'=X\bigcup Y\bigcup Z$ și să fie adevărate egalitățile $\Gamma(y_i)=X\bigcup\{z_i\}$ și $\Gamma(z_i)=X\bigcup\{y_i\}$, pentru orice *i*, $1\leq i\leq p$.

În figura 2.12 b) este ilustrat graful G', obținut din graf particular *G* din figura 2.12 a).

Graful G' satisface condițiile Lemei 2.5, de unde rezultă că orice mulțime *d*-convexă proprie a lui *G* formează o clică.

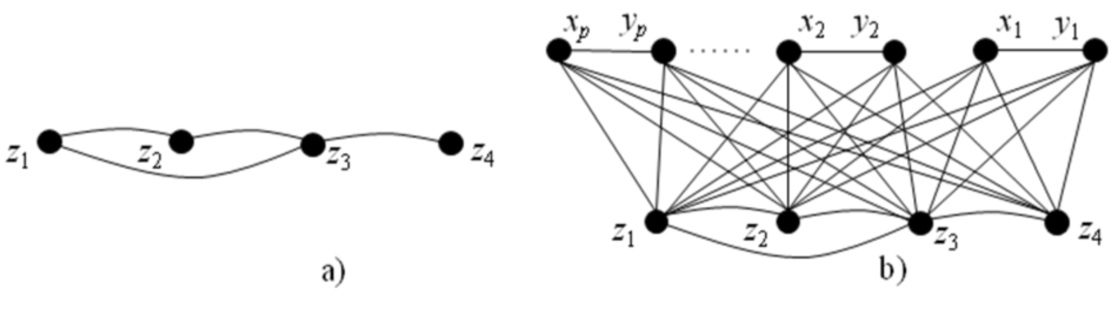


Fig. 2.12. *Graful* G' (*cazul b*)) *obținut din graful G* (*cazul a*)).

Fie $\mathcal{P}_p(G)$ o *p*-divizare în clici a grafului *G*, $p \geq 3$. Prin adăugarea vârfurilor x_i și y_i la mulțimea $X_i \in \mathcal{P}_p(G)$ pentru orice *i*, $1 \leq i \leq p$, obținem o *p*-divizare în clici netriviale a lui G'. Așadar, se obține o *p*-divizare *d*-convexă netrivială a grafului G'.

Pe de alta parte, fie $\mathcal{P}_p(G')$ o *p*-divizare *d*-convexă netrivială a lui G', $p \geq 3$. Fiecare mulțime *d*-convexă din $\mathcal{P}_p(G')$ conține cel puțin un vârf, care aparține mulțimii *X*. Prin urmare, rezultă că prin eliminarea mulțimii $\{x_i, y_i\}$ din $X_i \in \mathcal{P}_p(G')$, pentru orice *i*, $1 \leq i \leq p$, obținem o *p*-divizare în clici a grafului *G*.

Teorema 2.13. *Problema p-acoperirii d-convexe netriviale este NP-completă pentru orice* $p \geq 3$.

Demonstrație: Problema *p*-acoperirii *d*-convexe netriviale aparține clasei *NP*, deoarece în timp polinomial se verifică *d*-convexitatea unei mulțimi [65].

Construim graful particular $G' = (X';U')$ al problemei *p*-acoperirii *d*-convexe netriviale din graful general $G = (X;U)$ al problemei *p*-divizării în clici, folosind procedeul descris în Teorema 2.12. Cum s-a menționat în teorema de mai sus, orice mulțime *d*-convexă proprie a grafului G' formează o clică. Fie $\mathcal{P}_p(G')$ o *p*-acoperire *d*-convexă netrivială a grafului G'. Obținem familia de mulțimi $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, ..., X_p\}$, pentru care $X_i = X_i^* \setminus \{x_i, y_i\}$, unde $X_i^* \in \mathcal{P}_p(G')$, $1 \leq i \leq p$, $p \geq 3$. Familia $\mathcal{P}$ poate să nu formeze o divizare în clici a lui *G*. Prin eliminarea mulțimilor din $\mathcal{P}$, care se conțin în reuniunea celorlalte mulțimi și prin eliminarea ulterioară a vârfurilor repetitive se obține familia de clici $\mathcal{P}_k(G)$, $k \leq p$, care divizează graful *G*. Se observă că dacă un graf poate fi divizat în *q* clici și cel puțin o clică *C* nu este formată dintr-un singur vârf, atunci în urma divizării clicii *C* în două clici disjuncte se obține o divizare în $q+1$ clici a grafului *G*. Prin urmare, pentru *G* există o *p*-divizare în clici.

Totodată, cunoaștem din Teorema 2.12 că orice *p*-divizare în clici a grafului *G*, $p \geq 3$, implică existența *p*-divizării *d*-convexe netriviale a lui G'. Din faptul că orice *p*-divizare *d*-convexă netrivială este și *p*-acoperire *d*-convexă netrivială, rezultă că orice *p*-divizare în clici a lui *G*, $p \geq 3$, implică existența *p*-acoperirii *d*-convexe netriviale a grafului G'.

Combinând Teoremele 2.12 și 2.13 cu Consecința 2.9. obținem următorul rezultat.

Consecința 2.12. *Problemele p-acoperirii și p-divizării d-convexe netriviale sunt NP-complete pentru orice* $p \geq 2$.

După cum am menționat la începutul capitolului, nu orice graf poate fi divizat sau acoperit cu mulțimi *d*-convexe netriviale. Din aceste considerente, prezintă interes problema verificării dacă un graf *G* poate fi acoperit sau divizat în mulțimi *d*-convexe netriviale, adică există un $p \geq 2$ pentru care există o *p*-acoperire/*p*-divizare a grafului *G* în mulțimi *d*-convexe netriviale.

Observăm mai întâi că dacă un graf poate fi acoperit cu mulțimi *d*-convexe netriviale, atunci orice vârf al acestuia aparține cel puțin unei mulțimi *d*-convexe netriviale. Evident, este adevărată și afirmația reciprocă, ceea ce nu putem afirma despre cazul divizării în mulțimi *d*-convexe netriviale. Pentru construirea unei acoperiri cu mulțimi *d*-convexe netriviale putem folosi Algoritmul 2.3.

Algoritm 2.3.

Input: Graf $G = (X;U)$.

Output: Acoperire cu mulțimi *d*-convexe netriviale $\mathcal{P}(G)$ sau nimic.

$\mathcal{P}(G) \leftarrow \emptyset$, $M \leftarrow \emptyset$
for every $x \in X$ **do**
    if $x \notin M$ **then**
        $flag \leftarrow 0$
        for every $y, z \in X \setminus \{x\}, y \neq z$ **do**
            $S \leftarrow d - conv(\{x, y, z\})$
            if $S \neq X$ **then**
                $\mathcal{P}(G) \leftarrow \mathcal{P}(G) \bigcup \{S\}$
                $M \leftarrow M \bigcup S$
                $flag \leftarrow 1$
                break
        if $flag = 0$ **then**
            stop: nu există nici o mulțimea *d*-convexă netrivială, care conține vârful *x*.
for every $S \in \mathcal{P}(G)$ **do**
    if $S \subseteq \bigcup_{Y \in \mathcal{P}(G), Y \neq S} Y$ **then**
        $\mathcal{P}(G) \leftarrow \mathcal{P}(G) \setminus \{S\}$

17: **return** $\mathcal{P}(G)$

Teorema 2.14. *Algoritmul 2.3 determină în timp* $O(n^4m)$ *dacă un graf* $G=(X;U)$ *poate fi acoperit cu mulțimi d-convexe netriviale.*

Demonstrație. Corectitudinea algoritmului rezultă din observația de mai sus. Evident, pașii 1 și 17 se execută în timp constant. Pașii 2 - 13 determină pentru fiecare vârf $x \in X$ dacă există o mulțime *d*-convexă netrivială $S \subset X$, care îl conține. Pentru aceasta este suficient de construit învelitoare *d*-convexă a tuturor mulțimilor formate din trei vârfuri unul dintre care este *x*, deoarece dacă o astfel de mulțime există, atunci există cel puțin două vârfuri diferite $y, z \in X, y \neq x, z \neq x$, pentru care $d-conv(\{x,y,z\}) \subseteq S$ și rezultă $d-conv(\{x,y,z\}) \neq X$. Se cunoaște din [65] că complexitatea construirii învelitoarei *d*-convexe a unei submulțimi $Y \subset X$ este $O(|d-conv(Y)|m)$. Cum $|d-conv(Y)|$ poate atinge valoarea lui *n*, complexitatea construirii învelitoarei *d*-convexe a unei mulțimi este $O(nm)$. Prin urmare, complexitatea pașilor 2) - 13) este $O(n^4m)$.

Pașii 14) - 16) exclud toate mulțimile care se conțin în reuniunea celorlalte mulțimi *d*-convexe netriviale. Astfel, se obține o acoperire a grafului *G* cu mulțimi *d*-convexe netriviale. Familia $\mathcal{P}(G)$ conține cel mult $n-2$ mulțimi, iar fiecare mulțime constă din cel mult $n-1$ vârfuri. Prin urmare, reuniunea mulțimilor din pasul 15) nu necesită mai mult de $O(n^2)$ timp. Astfel, complexitatea pașilor 14) - 16) este $O(n^3)$.

În rezultat, complexitatea finală a algoritmului este $O(n^4m)$.

Problema 2.7. (*Divizare în mulțimi d-convexe netriviale* (*DMCN*)) *Fie dat un graf* $G=(X;U)$. *Să se determine dacă există o divizare a mulțimii X în mulțimi d-convexe netriviale.*

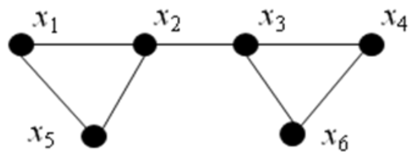
Vom demonstra că problema *DMCN* este *NP*-completă. Vom reduce problema divizării în triunghiuri, despre care se știe că este *NP*-completă [74], la problema *DMCN*. Reamintim problema divizării în triunghiuri.

Problema 2.8. (*Divizare în triunghiuri*) *Fie dat un graf neorientat* $G=(X;U)$, $|X|=3q$, *unde* $q \in N$. *Să se determine dacă G poate fi divizat în q triunghiuri, adică în q mulțimi* $X_1, X_2, ..., X_q$, *astfel încât* $X_i=\{x_i, y_i, z_i\}$ *și muchiile* $\{x_i, y_i\},\{x_i, z_i\},\{y_i, z_i\}$ *aparțin mulțimii U, pentru* $1 \leq i \leq q$.

Teorema 2.15. *Problema DMCN este NP-completă.*

Demonstrație: Problema dată aparține clasei *NP*, deoarece în timp polinomial se verifică dacă o submulțime de vârfuri a unui graf este *d*-convexă [65]. În continuare, reducem problema divizării în triunghiuri la problema *DMCN*. Fie $G = (X;U)$ un graf al problemei divizării în triunghiuri. M. Morandini [89] a demonstrat că problema divizării în triunghiuri rămâne *NP*-completă chiar și pentru cazul grafurilor tripartite. Menționăm că grafurile tripartite nu conțin clici cu $n \geq 4$ vârfuri. Vom considera că G nu conține clici cu $n \geq 4$ vârfuri. Construim un graf nou $G' = (X';U')$:

1) $X' = X \bigcup \{a,b,c,d,e,f\}$;
2) $U' = U \bigcup \{\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,e\},\{d,f\}\} \bigcup$
$\bigcup \{\{a,x\},\{b,x\} \mid x \in X\}$.



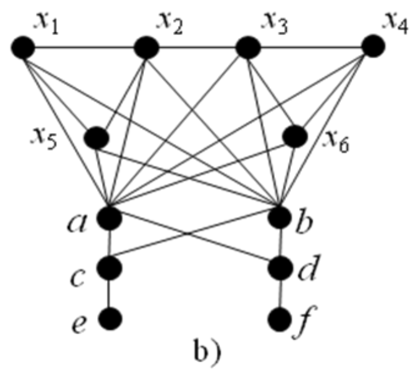


Fig. 2.13. Graful G' (cazul b)), pentru care există o divizare în mulțimi d-convexe netriviale, obținut din graful G (cazul a)), care poate fi divizat în triunghiuri.

În figura 2.13 b) este prezentat graful G', pentru care există o familie de divizare în 4 mulțimi *d*-convexe netriviale:

$$\mathcal{P}_4(G') = \{\{x_1, x_2, x_5\},\{x_3, x_4, x_6\},\{a,c,e,\},\{b,d,f\}\},$$

obținut dintr-un graf particular *G* în figura 2.13 a), care poate fi divizat în două triunghiuri $\{x_1, x_2, x_5\}$ și $\{x_3, x_4, x_6\}$.

Urmează să demonstrăm că pentru *G* există o divizare în triunghiuri dacă și numai dacă pentru G' există o divizare în mulțimi *d*-convexe netriviale.

Fie pentru *G* există o divizare in *q* triunghiuri $X_1, X_2, ..., X_q$. Fiecare triunghi reprezintă o clică din trei vârfuri în *G*. Prin urmare, mulțimile X_i, $1 \leq i \leq q$, sunt *d*-convexe netriviale în G'. Mulțimea de vârfuri $\{a,b,c,d,e,f\}$ rămâne neacoperită cu mulțimi *d*-convexe netriviale, astfel încât să se formeze o divizare *d*-convexă netrivială a grafului G'. Se verifică cu ușurință egalitățile:

$$d-conv_{G'}(\{a,c,e\})=\{a,c,e\},$$

$$d-conv_{G'}(\{b,d,f\})=\{b,d,f\}.$$

Prin urmare, familia de mulțimi $\{a,c,e\},\{b,d,f\},X_1,X_2,...,X_q$ formează o divizare a grafului G' în $q+2$ mulțimi *d*-convexe netriviale.

Fie că $\mathcal{P}(G')$ reprezintă o divizare a grafului G' în mulțimi *d*-convexe netriviale și $S\in\mathcal{P}(G')$ este o mulțime *d*-convexă netrivială. Să demonstrăm mai întâi unele proprietăți ale acestei mulțimi:

1) $\{a,b\}\not\subset S$. Presupunem contrariul, atunci $\{a,b\}\subseteq S$. Conform structurii grafului G', obținem:

$$d-conv_{G'}(\{a,b\})=X\bigcup\{a,b,c,d\},$$

ceea ce implică relația:

$$X'\backslash d-conv_{G'}(\{a,b\})=\{e,f\}.$$

Menționăm că mulțimea $\{e,f\}$ nu este *d*-convexă netrivială. Prin urmare, $\mathcal{P}(G')$ nu formează o divizare *d*-convexă în G'. Am obținut o contradicție.

2) $\{c,d\}\not\subset S$. Presupunem contrariul, atunci $\{c,d\}\subseteq S$. În baza construcției grafului G', avem $\{a,b\}\subseteq d-conv_{G'}(\{c,d\})$. Astfel, nu e satisfăcută proprietatea 1). Se obține contradicție.

3) $\{e,f\}\not\subset S$. În caz contrar, avem $\{e,f\}\subseteq S$. Construcția grafului G' implică relația $\{a,b,c,d\}\subseteq d-conv_{G'}(\{e,f\})$. Se obține o contradicție.

4) $\{x,y\}\not\subset S$, pentru orice $x\in X$ și $y\in\{c,d\}$. Presupunem contrariul, atunci există $x\in X$ și $y\in\{c,d\}$, pentru care $\{x,y\}\subseteq S$. Din structura grafului G', obținem relația $\{a,b\}\subseteq d-conv_{G'}(\{x,y\})$, care implică o contradicție.

5) $\{x,y\}\not\subset S$, pentru orice două vârfuri neadiacente $x,y\in X$. În caz contrar, există o pereche de vârfuri neadiacente $x,y\in X$, pentru care $\{x,y\}\subseteq S$. În acest caz, avem $\{a,b\}\subseteq d-conv_{G'}(\{x,y\})$. Prin urmare, se obține o contradicție.

Vom analiza familia $\mathcal{P}(G')$. Fie $S_1=\{a,c,e\}$, $S_2=\{b,d,f\}$, $S_3=\{b,c,e\}$, $S_4=\{a,d,f\}$. Întâi de toate, atragem atenția la faptul că $\mathcal{P}(G')$ conține strict o pereche de mulțimi din următoarele două: S_1,S_2 sau S_3,S_4. Afirmația devine evidentă deodată ce ne convingem în corectitudinea proprietăților 1), 2), 3), 4), 5) și în condiția că fiecare vârf din X' aparține strict unei singure mulțimi *d*-convexe netriviale. Se observă ca vârfurile *a* și *b* sunt deja acoperite.

Rezultă că vârfurile mulțimii $X = X'\backslash\{a,b,c,d,e,f\}$ trebuie să fie divizate în mulțimi *d*-convexe netriviale, care să formeze clici, încât să fie respectată proprietatea 5).

După cum am menționat mai sus, *G* nu conține clici cu $n \geq 4$ vârfuri. Aceasta înseamnă că orice mulțime *d*-convexă netrivială $S \in \mathcal{P}(G')$, $S \subseteq X$, satisface relația $|S| = 3$, adică formează un triunghi, deoarece în caz contrar nu se respecta proprietatea 5). Concluzionăm că mulțimea X poate fi divizată în mulțimi *d*-convexe netriviale dacă și numai dacă ea poate fi divizată în triunghiuri.

Conform presupunerii, $\mathcal{P}(G')$ este o divizare a lui G' în mulțimi *d*-convexe netriviale. În consecință, eliminând elementele S_1, S_2 sau S_3, S_4 din $\mathcal{P}(G')$, se obține familia $\mathcal{P}_q(G)$, care reprezintă divizarea grafului *G* în *q* triunghiuri.

2.5. Concluzii la capitolul 2

Rezultatele obținute în capitolul 2 completează în mod esențial rezultatele cunoscute la moment în domeniul soluționării problemei acoperirii grafurilor neorientate cu mulțimi *d*-convexe și se referă la: a) studierea grafurilor cu număr prestabilit de acoperire/divizare minimă/maximă cu mulțimi *d*-convexe; b) demonstrarea *NP*-completitudinii problemei *p*-acoperirii cu $p = 2$ mulțimi *d*-convexe, care completează rezultatele obținute anterior de către D. Artigas în lucrarea [30]; c) demonstrarea *NP*-completitudinii problemei acoperirii/divizării cu $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe netriviale; d) elaborarea algoritmului polinomial de verificare a existenței acoperirii unui graf cu mulțimi *d*-convexe netriviale și demonstrarea *NP*-completitudinii problemei verificării existenței divizării unui graf în mulțimi *d*-convexe netriviale; e) determinarea relațiilor dintre problema (2,*t*)-acoperirii și (2,*nt*)-acoperirii *d*-convexe.

Ținând cont de studiul efectuat în capitolul 2 deducem următoarele concluzii:

1. Rezultatele obținute în legătura cu determinarea condițiilor de existență a acoperirii cu un număr minim predeterminat și un număr maxim predeterminat de mulțimi *d*-convexe au permis soluționarea problemei formulate de D. Artigas, și anume s-a demonstrat că problema acoperirii grafului cu $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe este *NP*-completă;
2. Au fost obținute rezultate noi ce țin de acoperirea/divizarea grafului cu mulțimi *d*-convexe netriviale, chestiunea mai firească din punct de vedere aplicării a problemei de acoperire la soluționarea problemelor practice (clusterizarea elementelor unei mulțimi, proiectarea circuitelor integrate, amplasarea punctelor de deservire etc.);

3. A fost studiată corelația dintre (2,*t*)-acoperire și (2,*nt*)-acoperire *d*-convexă, care a condus la depistarea unor clase de grafuri pentru care s-au elaborat algoritmi polinomiali de recunoaștere;
4. Rezultatele teoretice cu privire la problema acoperirii grafului cu mulțimi *d*-convexe netriviale au permis elaborarea algoritmului polinomial care verifică dacă un graf poate fi acoperit cu mulțimi *d*-convex netriviale. La rândul său, a fost demonstrată *NP*-completitudinea problemei de verificare a existenței divizării unui graf în mulțimi *d*-convexe netriviale.

3. PROBLEMA DE ACOPERIRE CONVEXĂ PENTRU CLASE SPECIALE DE GRAFURI

În capitolul precedent s-a demonstrat că atât problema centrală de acoperire a unui graf cu mulțimi *d*-convexe, precum și unele variații ale acesteia sunt *NP*-complete. Din aceste considerent merită atenție necesitatea studierii acestor probleme pe unele clase de grafuri, care se regăsesc la soluționarea problemelor practice. Anume în acest context sunt organizate cercetările în capitolul ce urmează.

Printre clasele de grafuri studiate se enumeră grafurile triangulate, grafurile ce formează puterea ciclului, grafurile cactus, arborii. Pentru aceste clase de grafuri se examinează atât problema acoperirii cât și problema divizării cu mulțimi *d*-convexe. Sunt consistente rezultatele obținute în cazul studierii arborelui. În termenii mulțimilor terminale netriviale sunt obținute pentru arbori mai multe rezultate, în baza cărora se determină formula recurentă de calcul a numărului maxim de mulțimi terminale netriviale ce divizează un arbore și se descrie un algoritm de complexitatea $O(n^3)$ pentru soluționarea problemei de divizare în mulțimi *d*-convexe netriviale.

Rezultatele cercetărilor prezentate în acest capitol, împreună cu cele din capitolul precedent acoperă în întregime problemele enunțate în primul capitol. Rezultatele din acest capitol sunt publicate în lucrările [41], [42], [43], [46], [48], [49] și pot fi aplicate nemijlocit la soluționarea multor probleme practice.

3.1. Acoperirea grafurilor cu două mulțimi *d*-convexe netriviale

Reamintim că graful *triangulat* este un graf în care orice ciclu de lungime cel puțin patru conține o coardă.

Teorema 3.1. *Pentru orice graf triangulat conex cu* $n \geq 4$ *vârfuri există o* 2*-acoperire d-convexă netrivială.*

Demonstrație: Din [64] cunoaștem că orice graf triangulat conține cel puțin un vârf simplicial. Se verifică că graful ciclu C_4 nu este triangulat. Prin urmare, din Lemele 2.6 și 2.10 rezultă că pentru orice graf conex triangulat cu $n \geq 4$ vârfuri există o 2-acoperire *d*-convexă netrivială.

Din Teorema 3.1 rezultă următoarea consecință.

Consecința 3.1. *Pentru orice arbore și graf complet cu* $n \geq 4$ *vârfuri există o* 2*-acoperire d-convexă netrivială.*

Graful ce formează puterea ciclului, notat prin C_n^k, $1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, este un graf pentru care $X(C_n^k) = X(C_n)$ și $U(C_n^k) = \{\{u_i, u_j\} : u_i, u_j \in X(C_n^k), d_{C_n}(u_i, u_j) \le k\}$.

Lema 3.1. [31] *Dacă* $n \equiv 0,1,2 (\bmod 2k)$, *atunci submulțimea* $S \subset X(C_n^k)$ *formată din* $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ *vârfuri consecutive ale grafului* C_n^k *este d-convexă.*

Lema 3.2. [31] *Dacă* $S \subset X(C_n^k)$ *este o mulțime d-convexă, care nu induce un subgraf complet în* C_n^k, $n > 2k+2$ *și* $n \not\equiv 0,1,2 (\bmod 2k)$, *atunci* $|S| < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

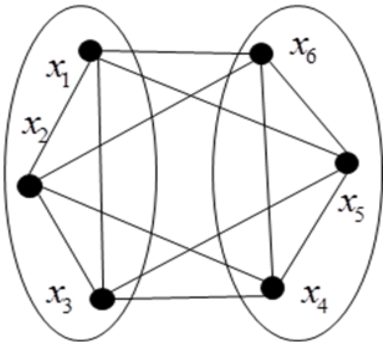


Fig. 3.1. *2-acoperire d-convexă netrivială a grafului* C_6^2.

Teorema 3.2. *Pentru orice graf* C_n^k *există o* 2-*acoperire d-convexă netrivială dacă și numai dacă* $n \ge 4$, $C_n^k \ne C_4$, *și* $n \le 2k+2$ *sau* $n \equiv 0,1,2 (\bmod 2k)$.

Demonstrație: Pentru $n \le 3$ nu există 2-acoperire *d*-convexă netrivială a grafului C_n^k. Prin urmare, rămâne de analizat cazul $n \ge 4$.

Admitem că $n = 4$. Ținând cont de definiția grafului ce formează puterea ciclului, se obține relația $1 \le k \le 2$. Dacă $k = 1$, atunci $C_4^1 = C_4$ și în baza Lemei 2.6 putem afirma că în cazul de față pentru C_n^k nu există 2-acoperire *d*-convexă netrivială. Pe de altă parte, dacă $k = 2$, atunci $C_4^2 = K_4$ și ținând cont de Consecința 3.1, rezultă că există o 2-acoperire *d*-convexă netrivială a grafului C_4^2.

Vom analiza cazul $n \ge 5$. Dacă $n \le 2k+2$, atunci se verifică cu ușurință că oricare $k+1$ vârfuri consecutive ale grafului C_n^k formează o clică, adică o mulțime *d*-convexă netrivială, ceea ce înseamnă că pentru C_n^k există o 2-acoperire *d*-convexă netrivială. Pe de altă parte, Lema 3.1 implică existența 2-acoperirii *d*-convexe netriviale a grafului C_n^k pentru cazul

$n \equiv 0,1,2 \pmod{2k}$. Totodată, din Lema 3.2 rezultă că dacă $n > 2k+2$ și $n \not\equiv 0,1,2 \pmod{2k}$, atunci nu există 2-acoperire *d*-convexă netrivială a grafului C_n^k. Prin urmare, teorema este demonstrată.

În figura 3.1 este ilustrată o 2-acoperire *d*-convexă netrivială a grafului C_6^2, care constă din mulțimile $\{x_1, x_2, x_3\}$ și $\{x_4, x_5, x_6\}$.

În continuare, se examinează problema 2-acoperirii *d*-convexe netriviale în cazul grafului cactus. Reamintim că graful cactus este un graf, pentru care orice două cicluri au cel mult un vârf comun.

Teorema 3.3. *Pentru orice graf cactus conex G cu* $n \geq 4$ *vârfuri există o* 2*-acoperire d-convexă netrivială dacă și numai dacă* $G \neq C_4$.

Demonstrație: Fie că $n = 4$. Având în vedere Lema 2.6, obținem că pentru un graf cactus cu $n = 4$ vârfuri există o 2-acoperire *d*-convexă netrivială dacă și numai dacă acest graf este diferit de C_4.

Analizăm cazul $n \geq 5$. Dacă *G* conține un vârf simplicial, atunci în baza Lemei 2.10 se deduce existeță 2-acoperirii *d*-convexe netriviale a grafului *G*. Admitem că în *G* nu există vârfuri simpliciale. Dacă *G* este un ciclu C_n, atunci din Teorema 3.2 rezultă că pentru *G* există o 2-acoperire *d*-convexă netrivială. În caz contrar, construcția grafului cactus implică existența unui vârf de articulație *v*, eliminarea căruia separă graful *G* în $k \geq 2$ componente conexe G_1, G_2, ..., G_k. Deoarece *G* nu conține vârfuri simpliciale, rezultă că $|X(G_i)| \geq 2$ pentru orice *i*, $1 \leq i \leq k$. În final, obținem o 2-acoperire *d*-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}_2(G) = \left\{ \{v\} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} X(G_i), \{v\} \cup X(G_k) \right\}.$$

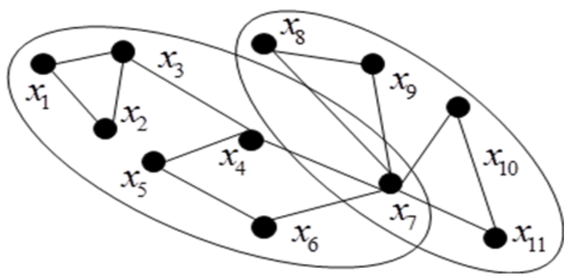


Fig. 3.2. *2-acoperire d-convexă netrivială a grafului cactus.*

De exemplu, pentru graful cactus *G* din figura 3.2 există o acoperire cu două mulțimi *d*-convexe netriviale: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ și $\{x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$.

Teorema 3.4. *Pentru orice graf neconex G cu $n \geq 4$ vârfuri există o 2-acoperire d-convexă netrivială.*

Demonstrație: Fie *G* un graf neconex care constă din $k \geq 2$ componente conexe G_i, $1 \leq i \leq k$.

Dacă $k \geq 4$, atunci ușor ne putem convinge că pentru *G* există o 2-acoperire *d*-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}_2(G) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{3} X(G_i), \bigcup_{i=2}^{4} X(G_i) \right\}.$$

Dacă $k = 3$, atunci din condiția $n \geq 4$ rezultă că cel puțin o componentă conexă, fie G_1, conține nu mai puțin de două vârfuri. Prin urmare, putem construi o 2-acoperire *d*-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}_2(G) = \{ X(G_1) \cup X(G_2), X(G_1) \cup X(G_3) \}.$$

Fie că $k = 2$. Analizăm două cazuri. Dacă $n = 4$ și fiecare componentă conexă constă exact din două vârfuri adiacente, atunci există o 2-acoperire *d*-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}_2(G) = \{ \{x\} \cup X(G_2), \{y\} \cup X(G_2) \},$$

unde $X(G_1) = \{x, y\}$.

Dacă $n \geq 4$ și o singură componentă conexă, fie G_1, constă dintr-un vârf, atunci se aleg două vârfuri adiacente *x* și *y* din G_2 și se obține o 2-acoperire *d*-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}_2(G) = \{ \{x, y\} \cup X(G_1), X(G_2) \}.$$

Dacă $n \geq 5$ și ambele componente conexe conțin cel puțin câte 2 vârfuri și o componentă conexă G_1 conține nu mai puțin de 3 vârfuri, atunci se alege un vârf *x* din G_1 și se obține o 2-acoperire *d*-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}_2(G) = \{ \{x\} \cup X(G_2), X(G_1) \}.$$

3.2. Acoperirea unui arbore cu mulțimi *d*-convexe netriviale

În cele ce urmează vom examina acoperirea unui arbore conex cu mulțimi *d*-convexe netriviale. Reamintim că vârful terminal al unui arbore *G* este un vârf care este adiacent doar cu un singur vârf din *G*.

Observația 3.1. *Dacă G este un graf stea cu $p \geq 2$ vârfuri terminale, atunci* $\varphi_{cn}^{\max}(G) = p - 1$.

Lema 3.3. *Pentru orice arbore G cu $diam(G) \geq 3$ există o acoperire d-convexă netrivială.*

Demonstrație: Orice arbore G cu $diam(G) \geq 3$ conține cel puțin 4 vârfuri. Prin urmare, în baza Consecinței 3.1 putem afirma că pentru un arbore G cu $diam(G) \geq 3$ există o acoperire *d*-convexă netrivială.

Lema 3.4. *Dacă G este un arbore cu* $diam(G) \geq 3$, *atunci există o acoperire d-convexă netrivială maximă* $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, *astfel încât orice vârf terminal al arborelui G este rezident în* $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$ *și oricare două vârfuri terminale nu aparțin aceleiași mulțimi din* $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$.

Demonstrație: Din Lema 3.3 cunoaștem că pentru G există o acoperire *d*-convexă netrivială. Fie $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$ o acoperire *d*-convexă netrivială maximă a grafului *G*, pentru care există cel puțin un vârf terminal *x*, care nu este rezident în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$. Deoarece *x* este un vârf terminal în G și are loc relația $diam(G) \geq 3$, rezultă că există un vârf *y*, $y \sim x$, care este adiacent cu mulțimea de vârfuri neterminale S și cu mulțimea de vârfuri terminale S', astfel încât nici o mulțime nu este vidă.

Considerăm două cazuri.

1) Admitem că *S* conține un vârf *z*, care nu este rezident în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$. Înlocuim vârful *x* cu *z* în orice mulțime din $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, care conține *x*. Adăugăm mulțimea *d*-convexă netrivială $\{x, y, z\}$ la familia modificată $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$. Prin urmare, se obține o nouă acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G)$, în care vârful *x* este rezident și are loc inegalitatea:

$$\left|\mathcal{P}(G)\right| > \left|\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)\right|.$$

Astfel, se obține o contradicție.

2) Admitem că toate vârfurile mulțimii *S* sunt rezidente în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$. Atunci, selectăm un vârf $z \in S$ și mulțimea *Z* care îl conține. Apoi, înlocuim vârful *x* cu *z* în toate mulțimile ale familiei $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G) \setminus \{Z\}$, ce conțin *x*, și adăugăm vârfurile *x* și *y* la *Z*. Astfel, se obține o nouă acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G)$, în care vârful *x* este rezident și pentru care are loc egalitatea $\left|\mathcal{P}(G)\right| = \left|\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)\right|$. Totodată, dacă acum în S' se conține cel puțin încă un vârf nerezident în $\mathcal{P}(G)$, atunci ținând cont de cazul 1), obținem contradicție.

Prin urmare, există o acoperire *d*-convexă netrivială maximă $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, astfel încât orice vârf terminal al arborelui *G* este rezident în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$.

Presupunem că există cel puțin două vârfuri terminale *x* și *y*, care aparțin la aceiași mulțime *S* din $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$.

Urmează să analizăm două cazuri.

1) Admitem că $|S| \geq 4$. În acest caz, prin înlocuirea mulțimii *S* în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$ cu două mulțimi *d*-convexe netriviale $S' = S \setminus \{x\}$ și $S'' = S \setminus \{y\}$, se obține o nouă acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G)$, în care vârfurile *x* și *y* aparțin mulțimilor diferite și se respectă inegalitatea $|\mathcal{P}(G)| > |\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)|$. Deci, am obținut o contradicție.

2) Admitem că $|S| = 3$. Cu alte cuvinte, $S = \{x, y, z\}$ și $\Gamma(x) = \Gamma(y) = \{z\}$. Este clar că $\Gamma(z) \setminus \{x, y\}$ conține cel puțin un vârf neterminal *h*. Dacă *h* nu este rezident în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, atunci înlocuim mulțimea *S* cu două mulțimi *d*-convexe netriviale $\{x, z, h\}$ și $\{y, z, h\}$. Prin urmare, am obținut o nouă acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G)$, în care *x* și *y* aparțin diferitor mulțimi și are loc relația $|\mathcal{P}(G)| > |\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)|$. În rezultat, am obținut o contradicție.

Dacă toate vârfurile neterminale ale mulțimii $\Gamma(z) \setminus \{x, y\}$ sunt rezidente in $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, atunci selectăm o mulțime *H*, care conține un vârf *h*. Apoi, eliminăm vârful *x* din mulțimea *S* și îl adaugăm la *H*. În același timp, adăugăm *h* la *S* și *z* la *H* . În consecință, obținem o nouă acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G)$, în care *x* și *y* aparțin diferitor mulțimi și se respectă egalitatea $|\mathcal{P}(G)| = |\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)|$.

Rezultă că oricare două vârfuri terminale nu aparțin aceleiași mulțimi din $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$.

Consecința 3.2. *Dacă G este un arbore cu* $3 \leq diam(G) \leq 5$ *și cu p vârfuri terminale, atunci* $\varphi_{cn}^{\max}(G) = p$.

Consecința 3.3. *Dacă G este un arbore cu* $diam(G) \geq 3$ *și cu p vârfuri terminale, astfel încât orice vârf neterminal este adiacent cu cel puțin un vârf terminal al arborelui G, atunci* $\varphi_{cn}^{\max}(G) = p$.

Fie $C(G)$ mulțimea de vârfuri terminale a arborelui *G*, iar $M_c(G)$ mulțimea de vârfuri *x* ale lui *G*, pentru care distanța de la *x* la toate vârfurile lui $C(G)$ este mai mare sau egală cu 3 și există cel puțin un vârf $c \in C(G)$, pentru care $d(c, x) = 3$, atunci următoarea lemă este adevărată.

Lema 3.5. *Dacă G este un arbore cu* $diam(G) \geq 6$ *și* $M_c(G) \neq \varnothing$, *atunci:*

$$\varphi_{cn}^{\max}(G) \geq |C(G)| + |M_c(G)|.$$

Demonstrație: Lema 3.4 implică relația $\varphi_{cn}^{\max}(G) \geq |C(G)|$. Vom arăta în continuare corectitudinea inegalității $\varphi_{cn}^{\max}(G) \geq |C(G)| + |M_c(G)|$. Definim o familie de mulțimi $\mathcal{P}(G) = \varnothing$, care va acoperi graful *G*. Pentru fiecare $c \in C(G)$ selectăm cel mai apropiat vârf $x \in M_c(G)$ și un lanț $L = [x, x_1, x_2, ..., x_k, c]$, unde $k \geq 2$. Mulțimea $S_c = \{x_1, x_2, ..., x_k, c\}$ este *d*-convexă netrivială, de unde rezultă că o putem adăuga la familia $\mathcal{P}(G)$, astfel încât vârful *c* să fie rezident în $\mathcal{P}(G)$. Totodată, pentru fiecare $x \in M_c(G)$ alegem așa un vârf terminal $c \in C(G)$, pentru care $d(x,c) = 3$ și din lanțul obținut L, care respectă condiția $k = 2$, formăm o mulțime *d*-convexă netrivială $S_x = \{x, x_1, x_2\}$ și o adăugăm la $\mathcal{P}(G)$, în care vârful *x* va fi rezident. Dacă mai rămân vârfuri neacoperite, atunci selectăm un vârf *y* din cele neacoperite de familia $\mathcal{P}(G)$, astfel încât *y* să fie adiacent cu un vârf al mulțimii $S \in \mathcal{P}(G)$ și îl adăugăm la *S*. Pentru celelalte vârfuri neacoperite repetăm operația. Astfel, se obține o acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G)$, care satisface egalitatea $|\mathcal{P}(G)| = |C(G)| + |M_c(G)|$. Prin urmare, obținem:

$$\varphi_{cn}^{\max}(G) \geq |C(G)| + |M_c(G)| .$$

Lema 3.6. *Dacă G este un arbore cu* $n \geq 4$ *vârfuri atunci există o acoperire d-convexă netrivială maximă* $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, *astfel încât orice mulțime* $S \in \mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G)$ *conține cel puțin un vârf rezident* $x \in S$, *pentru care există un lanț* $L = [x, y, z]$, $y, z \in S$.

Demonstrație: Dacă $2 \leq diam(G) \leq 5$, atunci ținând cont de Observația 3.1 și Consecința 3.2, ne convingem în corectitudinea lemei. Dacă $diam(G) \geq 6$, atunci conform Lemei 3.4 există o acoperire *d*-convexă netrivială maximă $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, pentru care orice vârf terminal al arborelui *G* este rezident în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$ și oricare două vârfuri terminale nu aparțin aceleiași mulțimi din $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$. Evident, pentru orice vârf terminal $x \in C(G)$, care este rezident în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, și mulțimea $S \in \mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G)$, care îl conține, există un lanț $L = [x, y, z]$, astfel încât $y, z \in S$.

Definim o familie de mulțimi $\mathcal{P}(G) = \varnothing$ și o mulțime de vârfuri $D = \varnothing$. Dacă există o mulțime $A \in \mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G)$, care conține un vârf terminal *a*, și pentru care există o altă mulțime $B \in \mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G)$, încât $A \cap B \neq \varnothing$, $|A \setminus B| \geq 2$ sau $|B \setminus A| \geq 2$, atunci notăm prin $B_r \subseteq B$, mulțimea de vârfuri rezidente în acoperirea $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$. Selectăm un vârf $b \in B_r$, pentru care distanța $d(b,a)$ este maximă. Notăm prin B_b toate vârfurile b' ale mulțimii *B*, pentru care lanțul, ce unește vârfurile b' și *a* conține vârful *b*. Evident, mulțimea B_b conține și vârful *b*. Definim două mulțimi:

$$A' = A \cup \left(B \setminus B_b\right) \text{ și } B' = \left(A' \cup \{b\}\right) \setminus \{a\}.$$

Din construcția arborelui rezultă că mulțimile A' și B' sunt *d*-convexe netriviale și pentru vârfurile *a* și *b* există lanțurile $[a,c,d]$ și $[b,c',d']$, astfel încât $c,d \in A'$ și $c',d' \in B'$. Prin urmare, înlocuim mulțimile *A* și *B* din familia $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$ cu mulțimile A' și B'. Dacă mai există mulțimile *A* din familia $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, care satisfac condițiile menționate mai sus, atunci repetăm procedura descrisă. În caz contrar, definim familia de mulțimi $\mathcal{A}$, ce constă din elementele familiei $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G)$, care conțin câte un vârf terminal. Selectăm o mulțime $A \in \mathcal{A}$ și definim familia de mulțimi $\mathcal{B}_A$, care este alcătuită din mulțimile familiei $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, ce se intersectează cu *A*. Fie $D_A = A \cup \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} B$. Adăugăm vârfurile mulțimii D_A la *D*. Mulțimea *A* și toate mulțimile din $\mathcal{B}_A$ eliminăm din $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G)$ și din $\mathcal{A}$, și le adăugăm la familia $\mathcal{P}(G)$. Dacă $\mathcal{A} \neq \varnothing$, atunci alegem o mulțime din $\mathcal{A}$ și repetăm procedura descrisă mai sus. În caz contrar, eliminăm din *G* vârfurile mulțimii *D* și muchiile incidente cu vârfurile acestei mulțimi. Dacă $X(G) = \varnothing$, atunci din cauză că familia $\mathcal{P}(G)$ formează o acoperire *d*-convexă netrivială a grafului *G*, are loc egalitatea:

$$\left|\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G)\right| = \left|\mathcal{P}(G)\right|,$$

din care rezultă corectitudinea lemei.

Dacă $X(G) \neq \varnothing$, se obțin $k \geq 1$ subarbori $G_1, G_2, ..., G_k$. Se observă că $\left|X(G_i)\right| \geq 3$, $1 \leq i \leq k$, și nici o mulțime din $\mathcal{P}(G)$ nu se intersectează cu nici o mulțime din familia $\mathcal{P}'(G)$, obținută din $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G)$ după implementarea acțiunilor descrise anterior. Prin urmare, se obține relația:

$$\left|\mathcal{P}'(G)\right| + \left|\mathcal{P}(G)\right| = \varphi_{cn}^{max}(G).$$

Dacă $2 \leq diam(G_i) \leq 5$ pentru fiecare subarbore G_i, $1 \leq i \leq k$, atunci lema este demonstrată, altfel pentru fiecare G_i, pentru care $diam(G_i) \geq 6$, conform Lemei 3.4, există o acoperire *d*-convexă netrivială maximă $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G_i)$, astfel încât orice vârf terminal al arborelui G_i este rezident în $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G_i)$ și oricare două vârfuri terminale nu aparțin aceleiași mulțimi din $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{max}}(G_i)$. Prin urmare, pentru G_i definim familia $\mathcal{P}(G_i)=\varnothing$ și o completăm recursiv în baza raționamentelor descrise în demonstrație.

Din cele spuse, obținem $\sum_{i=1}^{k}|\mathcal{P}(G_i)|+|\mathcal{P}(G)|=\varphi_{cn}^{max}(G)$.

În final, adăugăm toate mulțimile din fiecare familia $\mathcal{P}(G_i)$ la familia $\mathcal{P}(G)$. Evident, familia $\mathcal{P}(G)$ satisface condițiile lemei, ceea ce înseamnă că lema este demonstrată.

Fie că $diam(G)\geq 4$, atunci definim mulțimea:

$$N(G)=X(G)\setminus\left(C(G)\cup\bigcup_{y\in C(G)}\Gamma(y)\right).$$

Mulțimea $N(G)$ este vidă dacă și numai dacă orice vârf neterminal al arborelui *G* este adiacent cu cel puțin un vârf terminal din *G*, dar în acest caz conform Consecinței 3.3 se obține $\varphi_{cn}^{\max}(G)=p$, unde $p=|C(G)|$. Vom considera $N(G)\neq\varnothing$. Fie *x* un vârf din $N(G)$, care este și un vârf de articulație al arborelui *G*. După eliminarea vârfului *x* din *G* se obțin $|\Gamma(x)|$ componente conexe G_x^y, $y\in\Gamma(x)$. Pentru fiecare $y\in\Gamma(x)$, se formează o familie de subarbori:

$$\mathcal{V}_x^y(G)={}^*G_x^y\cup\bigcup_{z\in\Gamma(x)\setminus\{y\}}G_x^z,$$

unde ${}^*G_x^y$ se obține în urma adăugării lui *x* la G_x^y, astfel încât *x* să fie adiacent cu *y*. În final, obținem familia de familii de subarbori:

$$\mathcal{V}_x(G)=\bigcup_{y\in\Gamma(x)}\mathcal{V}_x^y(G).$$

Teorema 3.4. *Dacă G este un arbore, atunci:*

$$\varphi_{cn}^{\max}(G)=\begin{cases}\max\left\{|C(G)|,\max_{x\in N(G)}\left\{\max_{\mathcal{V}_x^y(G)\in\mathcal{V}_x(G)}\left\{\sum\limits_{H\in\mathcal{V}_x^y(G)}\varphi_{cn}^{\max}(H)\right\}\right\}\right\}, & dac\breve{a}\quad diam(G)\geq 6\quad si\quad N(G)\neq\varnothing;\\ p, & dac\breve{a}\quad 3\leq diam(G)\leq 5\quad sau\\ & diam(G)\geq 6\quad si\quad N(G)=\varnothing;\\ p-1, & dac\breve{a}\quad diam(G)=2;\\ 0, & dac\breve{a}\quad 0\leq diam(G)\leq 1.\end{cases}$$

Demonstrație: Dacă *G* constă dintr-un vârf sau două vârfuri adiacente, atunci $\varphi_{cn}^{\max}(G)=0$. În cazul când $diam(G)=2$, *G* este un graf stea și din Observația 3.1 rezultă egalitatea $\varphi_{cn}^{\max}(G)=p-1$. Dacă $3\leq diam(G)\leq 5$ sau $diam(G)\geq 6$ și $N(G)=\varnothing$, atunci conform Consecinței 3.2 și 3.3, se obține $\varphi_{cn}^{\max}(G)=p$.

În caz contrar, dacă $diam(G) \geq 6$ și $N(G) \neq \varnothing$, atunci având în vedere Lema 3.6, obținem:

$$\max\left\{\left|C(G)\right|, \max_{x \in N(G)}\left\{\max_{\mathcal{V}_x^y(G) \in \mathcal{V}_x(G)}\left\{\sum_{H \in \mathcal{V}_x^y(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H)\right\}\right\}\right\}.$$

Prezentăm o procedură recursivă $Max\varphi(G)$, care determină numărul $\varphi_{cn}^{\max}(G)$, pentru un arbore *G*. Remarcăm că corectitudinea procedurii $Max\varphi(G)$ rezultă nemijlocit din Teorema 3.4.

***Maxφ*(G)**

Input: Un arbore conex neorientat $G = (X;U)$.

Output: Numărul de acoperire *d*-convexă netrivială maximă $\varphi_{cn}^{\max}(G)$.

if $0 \leq \left|X(G)\right| \leq 2$ **then return** 0

$C(G) \leftarrow \varnothing, S \leftarrow \varnothing$

for every $x \in X$ **do**

  if $|\Gamma(x)| = 1$ **then**

    $C(G) \leftarrow C(G) \bigcup \{x\}$

    $S \leftarrow S \bigcup \{x\} \bigcup \Gamma(x)$

$N(G) \leftarrow X(G) \setminus S$

if $0 \leq diam(G) \leq 1$ **then return** 0

if $diam(G) = 2$ **then return** $|C(G)| - 1$

if $3 \leq diam(G) \leq 5$ **or** $diam(G) \geq 6$ **and** $N(G) = \varnothing$ **then return** $\left|C(G)\right|$

for every $x \in N(G)$ **do**

  $\mathcal{V}_x(G) \leftarrow \varnothing$

  for every $y \in \Gamma(x)$ **do**

    $\mathcal{V}_x(G) \leftarrow \mathcal{V}_x(G) \bigcup \mathcal{V}_x^y(G)$

return $\max\left\{\left|C(G)\right|, \max_{x \in N(G)}\left\{\max_{\mathcal{V}_x^y(G) \in \mathcal{V}_x(G)}\left\{\sum_{H \in \mathcal{V}_x^y(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H)\right\}\right\}\right\}$

În cele ce urmează prezentăm schematic un exemplu de determinare a numărului $\varphi_{cn}^{\max}(G)$ pentru arborele *G* din figura 3.3. Diametrul arborelui *G* este $diam(G) = 8 \geq 6$, iar mulțimea vârfurilor terminale este $C(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_{13}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}\}$, $\left|C(G)\right| = 9$.

Pentru G avem $N(G)=X(G)\setminus\left(C(G)\cup\bigcup_{y\in C(G)}\Gamma(y)\right)=\{x_8,x_9,x_{10}\}$.

În total sunt trei familii de familii de subarbori:

$$\mathcal{V}_{x_8}(G)=\left\{\mathcal{V}_{x_8}^{x_7}(G),\mathcal{V}_{x_8}^{x_9}(G)\right\},$$

$$\mathcal{V}_{x_9}(G)=\left\{\mathcal{V}_{x_9}^{x_8}(G),\mathcal{V}_{x_9}^{x_{10}}(G)\right\},$$

$$\mathcal{V}_{x_{10}}(G)=\left\{\mathcal{V}_{x_{10}}^{x_9}(G),\mathcal{V}_{x_{10}}^{x_{11}}(G),\mathcal{V}_{x_{10}}^{x_{12}}(G)\right\}.$$

Vom examina fiecare familia de familii pe rând. Începem cu $\mathcal{V}_{x_8}(G)$, care constă din familii de subarbori:

$$\mathcal{V}_{x_8}^{x_7}(G)=\left\{*G_{x_8}^{x_7},G_{x_8}^{x_9}\right\},\ \mathcal{V}_{x_8}^{x_9}(G)=\left\{G_{x_8}^{x_7},*G_{x_8}^{x_9}\right\}.$$

Diametrul fiecărui subarbore H al acestor familii este $diam(H)\le 5$, în rezultat se obțin următoarele numere: $\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_8}^{x_7}\right)=5$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_8}^{x_7}\right)=4$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_8}^{x_9}\right)=6$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_8}^{x_9}\right)=6$.

Determinăm sumele:

$$\sum\nolimits_{H\in\mathcal{V}_{x_8}^{x_7}(G)}\varphi_{cn}^{\max}(H)=\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_8}^{x_7}\right)+\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_8}^{x_9}\right)=5+6=11,$$

$$\sum\nolimits_{H\in\mathcal{V}_{x_8}^{x_9}(G)}\varphi_{cn}^{\max}(H)=\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_8}^{x_7}\right)+\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_8}^{x_9}\right)=4+6=10.$$

Alegem valoarea maximă: $\max\left\{\sum\nolimits_{H\in\mathcal{V}_{x_8}^{x_7}(G)}\varphi_{cn}^{\max}(H),\sum\nolimits_{H\in\mathcal{V}_{x_8}^{x_9}(G)}\varphi_{cn}^{\max}(H)\right\}=\max\{11,10\}=11.$

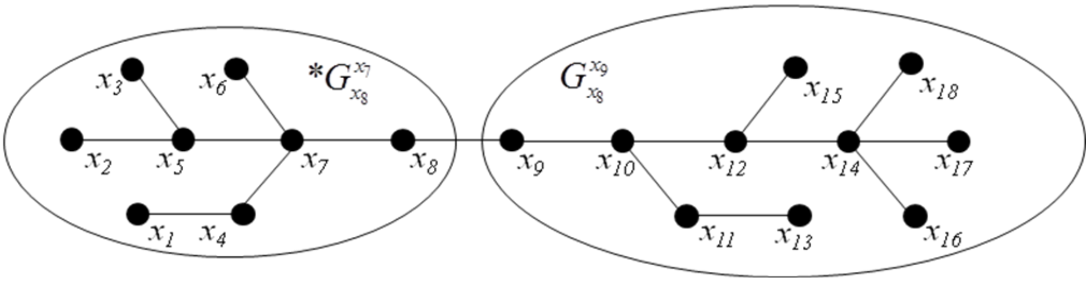


Fig. 3.3. *Arborele G și doi subarbori* $*G_{x_8}^{x_7},G_{x_8}^{x_9}$.

Familia $\mathcal{V}_{x_9}(G)$ constă din două familii de subarbori:

$$\mathcal{V}_{x_9}^{x_8}(G)=\left\{*G_{x_9}^{x_8},G_{x_9}^{x_{10}}\right\},\ \mathcal{V}_{x_9}^{x_{10}}(G)=\left\{G_{x_9}^{x_8},*G_{x_9}^{x_{10}}\right\}.$$

Diametrul fiecărui subarbore H din aceste familii este $diam(H)\le 5$, prin urmare, se obțin numerele: $\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_9}^{x_8}\right)=5$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_9}^{x_8}\right)=5$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_9}^{x_{10}}\right)=6$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_9}^{x_{10}}\right)=5$.

Determinăm sumele:

$$\sum\nolimits_{H\in\mathcal{V}_{x_9}^{x_8}(G)}\varphi_{cn}^{\max}(H)=\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_9}^{x_8}\right)+\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_9}^{x_{10}}\right)=5+5=10,$$

$$\sum_{H\in \mathcal{V}_{x_9}^{x_{10}}(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H) = \varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_9}^{x_8}\right) + \varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_9}^{x_{10}}\right) = 5+6=11.$$

Alegem valoarea maximă: $\max\left\{\sum_{H\in \mathcal{V}_{x_9}^{x_8}(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H), \sum_{H\in \mathcal{V}_{x_9}^{x_{10}}(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H)\right\} = \max\{10,11\} = 11$.

Familia $\mathcal{V}_{x_{10}}(G)$ conține trei familii de subarbori:

$$\mathcal{V}_{x_{10}}^{x_9}(G) = \left\{*G_{x_{10}}^{x_9}, G_{x_{10}}^{x_{11}}, G_{x_{10}}^{x_{12}}\right\},\ \mathcal{V}_{x_{10}}^{x_{11}}(G) = \left\{G_{x_{10}}^{x_9}, *G_{x_{10}}^{x_{11}}, G_{x_{10}}^{x_{12}}\right\},\ \mathcal{V}_{x_{10}}^{x_{12}}(G) = \left\{G_{x_{10}}^{x_9}, G_{x_{10}}^{x_{11}}, *G_{x_{10}}^{x_{12}}\right\}.$$

Diametrul fiecărui subarbore H al acestei familii este $diam(H) \le 5$. În rezultat se obțin numerele: $\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_{10}}^{x_9}\right) = 5$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_{10}}^{x_9}\right) = 5$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_{10}}^{x_{11}}\right) = 1$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_{10}}^{x_{11}}\right) = 0$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_{10}}^{x_{12}}\right) = 5$, $\varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_{10}}^{x_{12}}\right) = 4$.

Determinăm sumele:

$$\sum_{H\in \mathcal{V}_{x_{10}}^{x_9}(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H) = \varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_{10}}^{x_9}\right) + \varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_{10}}^{x_{11}}\right) + \varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_{10}}^{x_{12}}\right) = 5+0+4=9,$$

$$\sum_{H\in \mathcal{V}_{x_{10}}^{x_{11}}(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H) = \varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_{10}}^{x_9}\right) + \varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_{10}}^{x_{11}}\right) + \varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_{10}}^{x_{12}}\right) = 5+1+4=10,$$

$$\sum_{H\in \mathcal{V}_{x_{10}}^{x_{12}}(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H) = \varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_{10}}^{x_9}\right) + \varphi_{cn}^{\max}\left(G_{x_{10}}^{x_{11}}\right) + \varphi_{cn}^{\max}\left(*G_{x_{10}}^{x_{12}}\right) = 5+0+5=10.$$

$$\max\left\{\sum_{H\in \mathcal{V}_{x_{10}}^{x_9}(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H), \sum_{H\in \mathcal{V}_{x_{10}}^{x_{11}}(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H), \sum_{H\in \mathcal{V}_{x_{10}}^{x_{12}}(G)} \varphi_{cn}^{\max}(H)\right\} = \max\{9,10,10\} = 10.$$

În final, obținem $\varphi_{cn}^{\max}(G) = \max\left\{\left|C(G)\right|, \max\left\{11,11,10\right\}\right\} = \max\{9,11\} = 11$.

Teorema 3.5. *Pentru orice arbore G cu* $n \ge 4$ *vârfuri totdeauna există o p-acoperire d-convexă netrivială,* $2 \le p \le \varphi_{cn}^{\max}(G)$.

Demonstrație: Având în vedere Consecința 3.1, fie $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$ o acoperire *d*-convexă maximă a unui arbore *G* cu $n \ge 4$ vârfuri.

Dacă $\varphi_{cn}^{\max}(G) = 2$, atunci teorema este demonstrată. Vom analiza cazul $\varphi_{cn}^{\max}(G) \ge 3$. Descriem o procedură care demonstrează corectitudinea teoremei date. Selectăm două mulțimi X_1 și X_2 din $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$, astfel încât $x_1 \in X_1$ și $x_2 \in X_2$, $x_1 \sim x_2$. Deoarece reuniunea mulțimilor X_1 și X_2 generează o mulțime *d*-convexă netrivială în *G*, rezultă că prin excluderea mulțimilor X_1 și X_2 din familia $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$ și adăugarea ulterioară a mulțimii $X_1 \cup X_2$ la $\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G)$ se obține o nouă familie $\mathcal{P}(G)$, care acoperă graful *G* cu $p = \varphi_{cn}^{\max}(G) - 1$ mulțimi *d*-convexe netriviale. Dacă $p = 2$, atunci teorema este demonstrată. În caz contrar, dacă $p \ge 3$, atunci repetăm de

$p-2$ ori procedura descrisă mai sus și obținem o 2-acoperire d-convexă netrivială a arborelui G. Prin urmare, teorema este demonstrată.

În figura 3.4 este ilustrat procesul generării p-acoperirilor d-convexe netriviale ale arborelui G, $2 \le p \le \varphi_{cn}^{\max}(G)$, începând cu $p = \varphi_{cn}^{\max}(G)$.

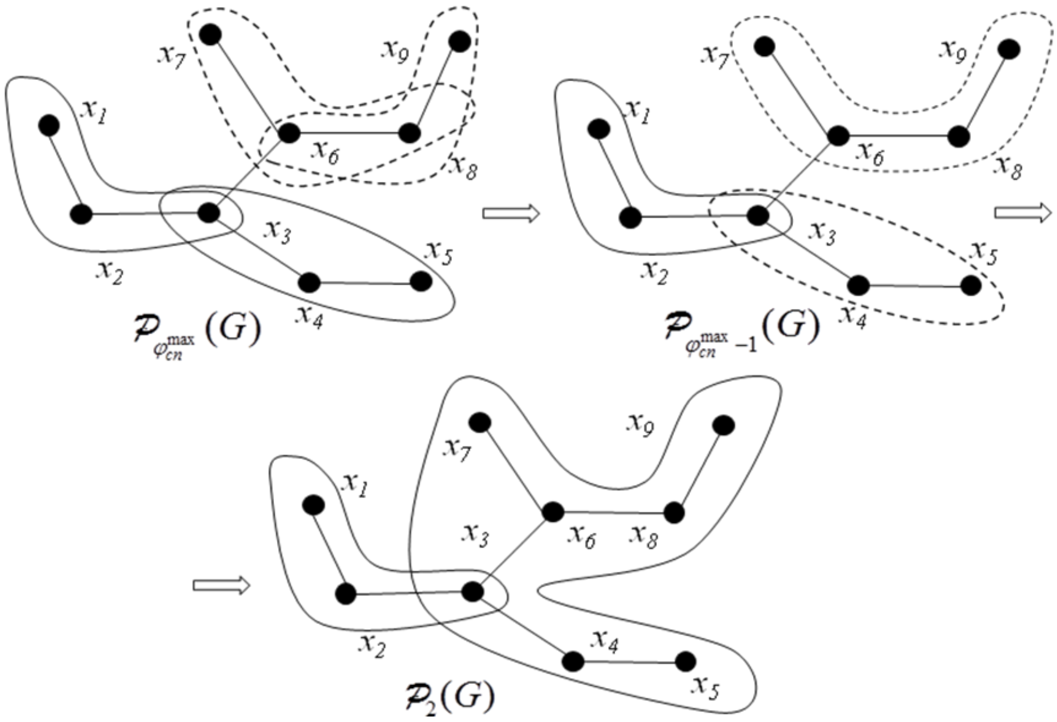


Fig. 3.4. *p-acoperirile d-convexe netriviale ale unui arbore G, pentru orice p,*

$2 \le p \le \varphi_{cn}^{\max}(G) = 4$.

$\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\max}}(G) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_6, x_7, x_8\}, \{x_6, x_8, x_9\}\}$ este o acoperire d-convexă netrivială maximă a arborelui G și $\varphi_{cn}^{max}(G) = 4$. Prin reuniunea mulțimilor $\{x_6, x_7, x_8\}$ și $\{x_6, x_8, x_9\}$, se obține acoperirea $\mathcal{P}_3(G) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_6, x_7, x_8, x_9\}\}$, formată din trei mulțimi d-convexe netriviale care, la rândul său, generează o 2-acoperire d-convexă netrivială $\mathcal{P}_2(G) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}\}$ la reuniunea mulțimilor $\{x_3, x_4, x_5\}$ și $\{x_6, x_7, x_8, x_9\}$.

3.3. Divizarea unui arbore în mulțimi *d*-convexe netriviale

În cele ce urmează vom examina problema divizării unui arbore în mulțimi d-convexe netriviale. Mai întâi de toate, vom defini două clase de arbori $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$.

Clasei $\mathcal{A}$ îi corespund arborii G, care satisfac condițiile:

1) $X(G) = \{x, y, x_1, x_2, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_{k'}\}$, pentru care $k, k' \ge 2$;

2) $U(G) = \{\{x, y\}\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} \{\{x, x_i\}\} \cup \bigcup_{i=1}^{k'} \{\{y, y_i\}\}$.

Clasei $\mathcal{B}$ îi corespund arborii construiți după cum urmează:

1) Selectăm numerele $k \geq 0$, $k' \geq 2$, $k_1 \geq 2$ și pentru orice *i*, $2 \leq i \leq k'$, selectăm $k_i \geq 1$.

2) Dacă $k \geq 1$, atunci se definesc mulțimile $X = \{x_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} \{x_i\}$ și $U = \bigcup_{i=1}^{k} \{\{x_0, x_i\}\}$, altfel $X = \{x_0\}$ și $U = \varnothing$.

3) Obținem $X(G) = X \cup \bigcup_{i=1}^{k'} \bigcup_{j=o}^{k_i} \{x_i^j\}$, $U(G) = U \cup \bigcup_{i=1}^{k'} \{\{x_0, x_i^0\}\} \cup \bigcup_{i=1}^{k'} \bigcup_{j=o}^{k_i} \{\{x_i^0, x_i^j\}\}$.

Ușor ne putem convinge că diametrul arborilor ce fac parte din familia $\mathcal{A}$ este 3, iar a celor din $\mathcal{B}$ este 4. Mai mult, orice arbore din familiile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ conține cel puțin câte 6 vârfuri.

În figura 3.5 a) este reprezentată familia de arbori $\mathcal{A}$, iar în figura 3.5 b) este reprezentată familia $\mathcal{B}$.

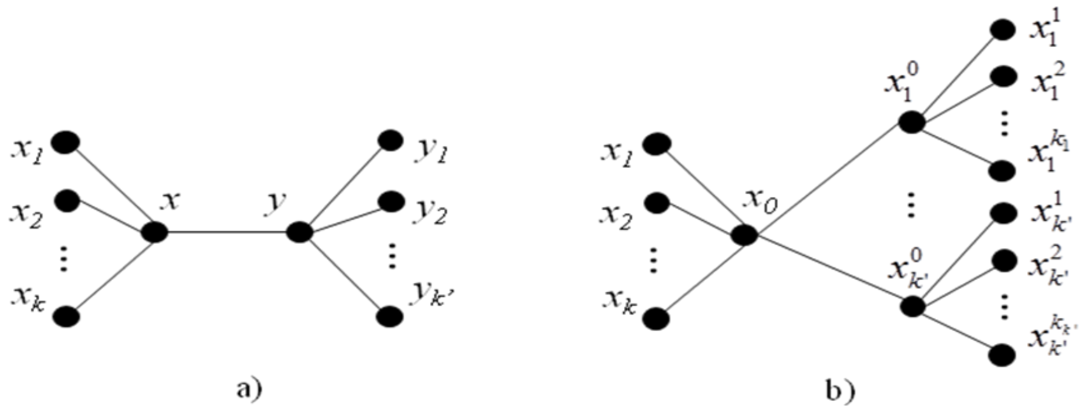


Fig. 3.5. *Familia de arbori* $\mathcal{A}$ (*cazul a*)) *și familia de arbori* $\mathcal{B}$ (*cazul b*)).

Următorul algoritm determină daca un arbore *G* aparține sau nu familiilor $\mathcal{A}$ sau $\mathcal{B}$.

Algoritm 3.1.

Input: Un arbore conex neorientat $G = (X;U)$.

Output: *DA*$\mathcal{A}$ *:* *G* aparține familiei $\mathcal{A}$, sau *DA*$\mathcal{B}$: *G* aparține familiei $\mathcal{B}$, sau *NU*: *G* nu aparține nici unei familii.

1: **if** $0 \leq |X(G)| \leq 5$ **then return** *NU*

2: **if** $0 \leq diam(G) \leq 2$ **or** $diam(G) \geq 5$ **then return** *NU*

3: **if** $diam(G) = 4$ **then goto step** 9

4: $flag = 0$

5: **for every** $x \in X$ **do**

6: **if** $\Gamma(x) \geq 3$ **then** $flag \leftarrow flag + 1$

7: **if** $flag = 2$ **then return** *DA*$\mathcal{A}$

8: **else return** *NU*

9: **for every** $x, y, z \in X$, $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$ **do**

10: **if** $d(x,z) = d(y,z) = diam(G)$ **and** $\Gamma(x) \bigcap \Gamma(y) \neq \varnothing$ **then return** *DA*$\mathcal{B}$

11: **return** *NU*

Teorema 3.6. *Algoritmul 3.1 determină în timp* $O(n^3)$ *dacă un arbore conex neorientat G aparține familiei* $\mathcal{A}$ *sau familiei* $\mathcal{B}$.

Demonstrație: Corectitudinea algoritmului rezultă din construcția grafurilor din familiile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$. Evident, pașii 1, 4, 7, 8 și 11 se execută în timp constant. Pașii 2 și 3 determină diametrul arborelui *G* și dacă pentru aceasta se folosește algoritmul Floyd–Warshall [72], atunci complexitatea de execuție a pașilor 2 și 3 este $O(n^3)$. În pașii 5 și 6 se execută doar o singură parcurgere a vârfurilor arborelui *G*, prin urmare timpul necesar pentru implementarea este $O(n)$. După execuția pașilor 2 și 3 devin cunoscute toate perechile de vârfuri distanța dinte care este egală cu diametrul arborelui *G*, ceea ce implică că pașii 9 și 10 se execută în timp $O(n^3)$. În baza celor menționate putem afirma că complexitatea finală a algoritmului este $O(n^3)$.

Fie $L = [x_1, x_2, ..., x_k]$ un lanț într-un arbore *G*, $k \geq 2$. Prin $R_L(x)$ vom nota mulțimea de vârfuri $v \in X(G)$, pentru care există un lanț $L' = [x, ..., v]$ în *G*, astfel încât L' nu conține vârfuri din *L*, cu excepția vârfului *x*, care aparține lui *L*.

Teorema 3.7. *Pentru un arbore G există o* 2*-divizare d-convexă netrivială dacă și numai dacă este satisfăcută una din condițiile:*

a) $diam(G) \geq 5$*;*

b) $G \in \mathcal{A}$*;*

c) $G \in \mathcal{B}$.

Demonstrație: Orice graf, care poate fi divizat în două mulțimi *d*-convexe netriviale, conține cel puțin $n \geq 6$ vârfuri.

Vom analiza 2-divizare *d*-convexă netrivială a arborelui *G* în dependență de diametrul lui.

Presupunem că $diam(G) = 2$. În acest caz *G* reprezintă un graf stea, dar se verifică nemijlocit că nici un graf stea nu poate fi divizat în 2 mulțimi *d*-convexe netriviale.

Presupunem acum că $diam(G) = 3$. Selectăm două vârfuri $x, x' \in X(G)$, pentru care există un lanț $L = [x, y, z, x']$. Evident, lungimea lanțului *L* este egală cu diametrul lui *G* și nu există un alt lanț care unește vârfurile x și x'. Rezultă că x și x' sunt două vârfuri terminale în

G, adică, $\Gamma(x)=\{y\}$ și $\Gamma(x')=\{z\}$. Condiția $n\geq 6$ implică existența încă cel puțin a două vârfuri diferite de *x, y, z* și x'. Fie $v\in X(G)$ este diferit de *x, y, z,* x' și $v\in R_L(y)$, astfel încât $d(v,y)\geq 2$, sau $v\in R_L(z)$ și $d(v,z)\geq 2$. Atunci, se obține o contradicție, deoarece $d(y,x')=d(x,z)=2$ și lungimea lanțurilor $L^1=[x',z,y,...,v]$ și $L^2=[x,y,z,...,v]$ este mai mare decât 3. În consecință, toate vârfurile arborelui *G*, diferite de *x, y, z,* x' sunt adiacente cu *y* sau cu *z*. În același timp, dacă $\Gamma(y)=\{x,z\}$ sau $\Gamma(z)=\{y,x'\}$, atunci se verifică că pentru *G* nu există nici o 2-divizare *d*-convexă netrivială. În caz contrar, există o 2-divizare *d*-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}(G)=\{\{x,y\}\cup R_L(y),\{z,x'\}\cup R_L(z)\}.$$

Cu alte cuvinte, în cazul $diam(G)=3$ arborele *G* poate fi divizat în două mulțimi *d*-convexe netriviale dacă și numai dacă $G\in\mathcal{A}$.

Presupunem că $diam(G)=4$. Selectăm două vârfuri $x,x'\in X(G)$, pentru care există un lanț $L=[x,y,z,h,x']$. Desigur, lungimea lanțului *L* este egală cu $diam(G)$ și vârfurile *x* și x' sunt terminale. Condiția $n\geq 6$ implică existența cel puțin a unui vârf *v* ,diferit de *x, y, z, h* și x'. Dacă *v* este adiacent cu *y* sau cu *h* atunci pentru *G* există o 2-divizare *d*-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}(G)=\{\{x,y\}\cup R_L(y),\{z,h,x'\}\cup R_L(z)\cup R_L(h)\} \text{ sau}$$

$$\mathcal{P}(G)=\{\{x,y,z\}\cup R_L(y)\cup R_L(z),\{h,x'\}\cup R_L(h)\}, \text{ respectiv.}$$

Admitem că nu există vârfuri diferite de *x, y, z, h* și x', care să fie adiacente cu *y* sau cu *h*. Rezultă că există vârfurile z' diferite de *y, h* și adiacente cu *z*. Dacă $|\Gamma(z')|=1$ sau $|\Gamma(z')|=2$, pentru orice astfel de vârfuri z', atunci se observă că pentru *G* nu există 2-divizare *d*-convexă netrivială. Admitem că sunt cel puțin două vârfuri z'' și z''' diferite de *z* și adiacente cu z', ceea ce înseamnă că $|\Gamma(z')|\geq 3$. Atunci, există un lanț $L=[z'',z',z,y,x]$. Cum anterior a fost demonstrat, în aceste condiții, pentru *G* există o 2-divizare *d*-convexă netrivială. Generalizând toate cele spuse, putem afirma că în cazul $diam(G)=4$ există o 2-divizare *d*-convexă netrivială a arborelui *G* dacă și numa dacă $G\in\mathcal{B}$.

Presupunem că $diam(G)\geq 5$. Există două vârfuri terminale *x* și x' în *G*, astfel încât $d(x,x')=diam(G)$. Fie $L=[x,x^1,x^2,...,x^k,x']$, $k\geq 4$, un lanț în *G*, care unește vârfurile *x* și x'. Evident, *L* conține cel puțin 6 vârfuri. Mai mult, lanțul *L* este unic. Prin urmare, lanțurile $[x,x^1,x^2]$ și $[x^3,...,x^k,x']$ generează o divizare a grafului *G* în două mulțimi *d*-convexe netriviale:

$$\mathcal{P}(G)=\left\{\{x\}\cup\bigcup_{i=1}^{2}R_L(x^i),\{x'\}\cup\bigcup_{i=3}^{k}R_L(x^i)\right\}.$$

Teorema 3.8. *Pentru orice arbore G cu* $n \geq 6$ *vârfuri, care poate fi divizat în mulțimi d-convexe netriviale, există p-divizare d-convexă netrivială,* $2 \leq p \leq \theta_{cn}^{\max}(G)$.

Demonstrație: Pentru arborele, care poate fi divizat în mulțimi *d*-convexe netriviale, există o divizare *d*-convexă netrivială maximă $\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\max}}(G)$. Dacă $\theta_{cn}^{\max}(G) = 2$, atunci teorema este demonstrată. Dacă $\theta_{cn}^{\max}(G) \geq 3$, atunci repetăm de $\theta_{cn}^{\max}(G) - 2$ ori procedura descrisă în demonstrația Teoremei 3.5, astfel se generează *p*-divizările *d*-convexe netriviale, $2 \leq p \leq \theta_{cn}^{\max}(G)$. Prin urmare, afirmația teoremei este satisfăcută.

Consecința 3.4. *Pentru orice arbore G cu* $n \geq 6$ *vârfuri, care poate fi divizat în mulțimi d-convexe netriviale, există o 2-divizare d-convexă netrivială.*

Consecința 3.5. *Pentru un arbore G cu* $n \geq 6$ *vârfuri există o p-divizare d-convexă netrivială pentru orice p,* $2 \leq p \leq \theta_{cn}^{\max}(G)$, *dacă și numai dacă este satisfăcută una din condițiile:*

a) $diam(G) \geq 5$;

b) $G \in \mathcal{A}$;

c) $G \in \mathcal{B}$.

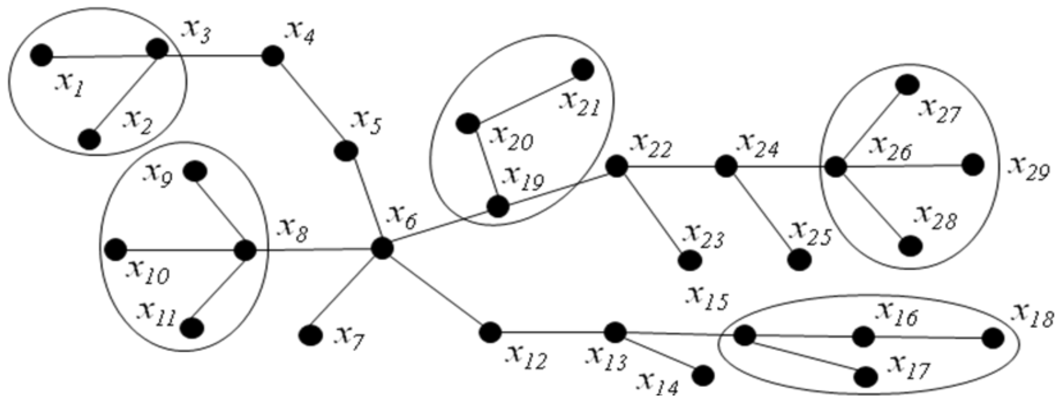


Fig. 3.6. *Familia* $\mathcal{S}(G)$ *a unui arbore G.*

Fie $C(G)$ mulțimea vârfurilor terminale ale arborelui *G*, iar *x* un vârf, care satisface una din condițiile:

a) $|\Gamma(x) \cap C(G)| \geq 2$;

b) există un vârf $y \in \Gamma(x)$, astfel încât $\Gamma(y) = \{x, z\}$ și $z \in C(G)$.

Definim mulțimea

$$S_x = \{x\} \cup \{v \in X(G) : v \in \Gamma(x) \cap C(G)\} \cup \{v_1, v_2 \in X(G) : \Gamma(v_1) = \{x, v_2\}, v_2 \in C(G)\},$$

pe care o vom numi *mulțimea terminală netrivială* a arborelui *G*. Remarcăm că S_x formează o mulțime *d*-convexă netrivială a lui *G*. Vom spune că un vârf *z* al arborelui *G* corespunde mulțimii S_x, dacă *z* se conține în S_x.

Prin $\mathcal{S}(G)$ vom nota familia mulțimilor terminale netriviale ale arborelui *G*. De exemplu pentru arborele *G* din figura 3.6 se obține familia $\mathcal{S}(G)=\{S_{x_3}=\{x_1,x_2,x_3\},S_{x_8}=\{x_8,x_9,x_{10},x_{11}\},$ $S_{x_{15}}=\{x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\},S_{x_{19}}=\{x_{19},x_{20},x_{21}\},S_{x_{26}}=\{x_{26},x_{27},x_{28},x_{29}\}\}$.

Lema 3.7. *Mulțimile terminale netriviale din* $\mathcal{S}(G)$ *sunt disjuncte două câte două.*

Demonstrație: Presupunem contrariul. Atunci există cel puțin două mulțimi terminale netriviale diferite S_x și S_y, care se intersectează. În baza definiției mulțimilor terminale netriviale rezultă că $x=y$ și prin urmare $S_x=S_y$. Contradicție obținută demonstrează afirmația lemei.

Lema 3.8. *Familia* $\mathcal{S}(G)$ *este unică în G.*

Demonstrație: Corectitudinea lemei rezultă din definiția mulțimii terminale netriviale și din Lema 3.7.

Lema 3.9. *Orice mulțime terminală netrivială din* $\mathcal{S}(G)$ *aparține exact unei singure mulțimi din* $\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\max}}(G)$*, astfel încât oricare două mulțimi terminale netriviale nu aparțin aceleiași mulțimi din* $\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\max}}(G)$.

Demonstrație: Ținând cont de definiția mulțimilor terminale netriviale și definiția divizării *d*-convexe, rezultă că orice mulțime din $\mathcal{S}(G)$ aparține exact unei singure mulțimi din $\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\max}}(G)$.

Presupunem că există o mulțime $C\in\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\max}}(G)$, în care se conțin cel puțin două mulțimi terminale netriviale ale arborelui *G*. Fie $\mathcal{S}_C$ este familia mulțimilor terminale netriviale, ce fac parte din *C* și $k=|\mathcal{S}_C|\geq 2$. Din Lemele 3.7 și 3.8, cunoaștem că $\mathcal{S}(G)$ este unică și toate mulțimile terminale netriviale sunt disjuncte două câte două. Putem diviza *C* în mulțimi *d*-convexe netriviale disjuncte S_1, S_2, ..., S_k, astfel încât fiecare mulțime să conțină exact o mulțime terminală netrivială din $\mathcal{S}_C$. Dacă unele vârfuri din *C* rămân neacoperite cu mulțimile S_1, S_2, ..., S_k, atunci din aceste vârfuri selectăm un vârf *x*, astfel încât *x* să fie adiacent cu un vârf $y\in S$, $S\in\{S_1,S_2,...,S_k\}$, și îl adăugăm la *S*. În cazul în care mai rămân vârfuri neacoperite, repetăm operația. Deoarece $k \geq 2$, obținem o nouă divizare *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G)$ care satisface inegalitatea $|\mathcal{P}(G)| \geq |\mathcal{P}_{\theta_{cn}^{\max}}(G)|$. Contradicție obținută demonstrează corectitudinea lemei.

Lema 3.10. *Pentru orice arbore G cu* $2 \leq diam(G) \leq 4$ *există cel puțin o mulțime terminală netrivială.*

Demonstrație: În baza definiției mulțimii terminale netriviale putem afirma că orice arbore *G*, diametrul căruia este $diam(G) = 2$, conține exact o mulțime terminală netrivială $S_x = X(G)$. Se verifică cu ușurință că pentru un arbore $G \in \mathcal{A}$ există exact două mulțimi terminale netriviale și pentru un arbore $G \in \mathcal{B}$ există cel puțin două mulțimi terminale netriviale. În mod similar, se verifică că pentru un arbore *G* cu $diam(G) = 3$, care nu aparține familiei $\mathcal{A}$, sau cu $diam(G) = 4$, care nu face parte din $\mathcal{B}$, există exact o singură mulțime terminală netrivială $S_x = X(G)$. Prin urmare, lema este demonstrată.

Lema 3.11. *Pentru orice arbore G cu* $diam(G) \geq 5$ *există cel puțin două mulțimi terminale netriviale.*

Demonstrație: Fie *G* un arbore cu $diam(G) \geq 5$. Fie atunci *x* și *y* două vârfuri, astfel încât $d(x, y) = diam(G)$. Admitem că *x* nu corespunde nici unei mulțimi terminale netriviale din *G*. Din definiția mulțimii terminale netriviale rezultă că *x* este adiacent cu vârful z care, la rândul său, este adiacent cu cel puțin două vârfuri diferite de *x*, toate neterminale. Fie z_1, z_2, ..., z_k, $k \geq 2$, vârfurile diferite de *x* și adiacente cu *z*. Deoarece *G* este un arbore, lanțul ce leagă vârfurile *x* și *y* conține exact un vârf $z' \in \{z_1, z_2, ..., z_k\}$. Din faptul că z_1, z_2, ..., z_k nu sunt vârfuri terminale, pentru orice $z'' \in \{z_1, z_2, ..., z_k\} \setminus \{z'\}$ există un alt vârf z^* diferit de *z*, astfel încât z^* este adiacent cu z''. Întrucât, pentru orice două vârfuri în *G* există doar un singur lanț ce le unește, pentru z^* se obține $d(z^*, y) > diam(G)$. Astfel, are loc o contradicție. Din aceleași considerente, se obține o contradicție dacă se presupune că *y* nu corespunde nici unei mulțimi terminale netriviale. Dat fiind faptul că $diam(G) \geq 5$, vârfurile *x* și *y* corespund mulțimilor terminale netriviale diferite. Prin urmare, pentru un arbore *G* cu $diam(G) \geq 5$ există cel puțin două mulțimi terminale netriviale.

În cele ce urmează propunem un algoritm, care determină toate mulțimile terminale netriviale ale arborelui *G*.

Algoritm 3.2.

Input: Un arbore conex neorientat $G = (X;U)$.

Output: Familia de mulțimi terminale netriviale $\mathcal{S}(G)$.

1: $\mathcal{S}(G) \leftarrow \varnothing,\ C(G) \leftarrow \varnothing$

2: **for every** $x \in X$ **do**

3:     **if** $|\Gamma(x)| = 1$ **then** $C(G) \leftarrow C(G) \bigcup \{x\}$

4: **for every** $x \in X \setminus C(G)$ **do**

5:     $flag = 0$

6:     **for every** $y \in \Gamma(x)$ **do**

7:         **if** $\Gamma(y) = \{x, z\}$ **and** $z \in C(G)$ **then** $flag = 1$

8:     **if** $|\Gamma(x) \bigcap C(G)| \geq 2$ **then** $flag = 1$

9:     **if** $flag = 1$ **then**

10:         $S_x = \{x\} \bigcup \{v \in X(G) : v \in \Gamma(x) \bigcap C(G)\} \bigcup$

            $\bigcup \{v_1, v_2 \in X(G) : \Gamma(v_1) = \{x, v_2\}, v_2 \in C(G)\}$

11:         $\mathcal{S}(G) \leftarrow \mathcal{S}(G) \bigcup \{S_x\}$

12: **return** $\mathcal{S}(G)$

Teorema 3.9. *Algoritmul 3.2 determină în timp $O(n^2)$ familia de mulțimi terminale netriviale $\mathcal{S}(G)$ a unui arbore conex neorientat G.*

Demonstrație: Corectitudinea algoritmului rezultă din Lemele 3.7, 3.8, 3.10 și 3.11. Este evident că pașii 1 și 12 se execută în timp constant iar pașii 2 și 3 au nevoie de o singură parcurgere a vârfurilor grafului *G*, de unde rezultă că complexitatea execuției acestor pași este $O(n)$. În pașii 4 - 11 se execută două cicluri imbricate, ceea ce înseamnă că complexitatea pașilor 4 - 11 este $O(n^2)$. Așadar, complexitatea finală a algoritmului pentru determinarea familiei de mulțimi terminale netriviale este $O(n^2)$.

Fie $\mathcal{E}(G)$ familia de subarbori, care se obține după eliminarea din *G* mulțimilor terminale netriviale din familia $\mathcal{S}(G)$.

Teorema 3.10. *Dacă G este un arbore, atunci:*

$$\theta_{cn}^{\max}(G) = \begin{cases} |\mathcal{S}(G)| + \sum_{G' \in \mathcal{E}(G)} \theta_{cn}^{\max}(G'), & \text{dacă} \quad |X(G)| \geq 3; \\ 0, & \text{dacă} \quad 0 \leq |X(G)| \leq 2. \end{cases}$$

Demonstrație: Ținând cont de Lema 3.9, se observă că prin eliminare din G a mulțimilor terminale netriviale care aparțin familiei $\mathcal{S}(G)$, de fapt, se șterg mulțimile d-convexe netriviale minimale, care conțin mulțimile terminale netriviale respective. Mai mult, după efectuarea acestor eliminări se obține familia de subarbori $\mathcal{E}(G)$, dintre care unii pot conține, la rândul său, mulțimile terminale netriviale.

Dacă $0 \le |X(G)| \le 2$, atunci evident $\theta_{cn}^{\max}(G) = 0$. În caz contrar, dacă $|X(G)| \ge 3$, atunci ținând cont de Lemele 3.7, 3.8, 3.10 și 3.11, se obține:

$$\theta_{cn}^{\max}(G) = |\mathcal{S}(G)| + \sum\nolimits_{G' \in \mathcal{E}(G)} \theta_{cn}^{\max}(G').$$

Propunem o procedură recursivă $Max\theta(G)$, care determină numărul de divizare d-convexă netrivială maximă $\theta_{cn}^{\max}(G)$ pentru un arbore G și vom demonstra că procedura $Max\theta(G)$ se execută în timp polinomial.

Maxθ(G)

Input: Un arbore conex neorientat $G = (X; U)$.

Output: Numărul de divizare d-convexă netrivială maximă $\theta_{cn}^{\max}(G)$.

1: **if** $0 \le |X(G)| \le 2$ **then return** 0

2: **apply** Algoritm 3.2: cu ajutorul Algoritmului 3.2 se determină familia $\mathcal{S}(G)$

3: **for every** $S \in \mathcal{S}(G)$ **do**

4: $\quad X \leftarrow X \setminus S$

5: **for every** $\{x, y\} \in U$ **do**

6: $\quad$ **if** $x \notin X$ **or** $y \notin X$ **then** $U \leftarrow U \setminus \{\{x, y\}\}$.

7: $\mathcal{E}(G) \leftarrow \varnothing$

8: **for every** componentă conexă $G' \in G$ **do**

9: $\quad \mathcal{E}(G) \leftarrow \mathcal{E}(G) \bigcup \{G'\}$

10: **for every** $G' \in \mathcal{E}(G)$ **do**

11: $\quad$ **apply** $Max\theta(G')$

12: **return** $\theta_{cn}^{\max}(G) = |\mathcal{S}(G)| + \sum\nolimits_{G' \in \mathcal{E}(G)} \theta_{cn}^{\max}(G')$

Teorema 3.11. *Procedura $Max\theta(G)$ determină în timp $O(n^3)$ numărul de divizare d-convexă netrivială maximă $\theta_{cn}^{\max}(G)$ a arborelui G.*

Demonstrație: Ținând cont de Teorema 3.10, putem afirma că procedura $Max\theta(G)$ returnează numărul $\theta_{cn}^{\max}(G)$. Conform Teoremei 3.10, timpul de execuție al procedurii $Max\theta(G)$ în caz general este:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{k} T(n_i) + O(n^2),$$

unde $\sum_{i=1}^{k} n_i \leq n-6$ și $k \geq 1$.

În cel mai rău caz, orice arbore examinat conține exact două mulțimi terminale netriviale, astfel încât fiecare din ele constă din trei elemente, după eliminarea cărora din G rămâne un singur subarbore. În acest caz timpul de execuție este:

$$T(n) = T(n-6) + O(n^2).$$

Folosind progresia aritmetică, obținem $T(n) = O(n^3)$. Așadar, complexitatea finală a procedurii $Max\theta(G)$ este $O(n^3)$.

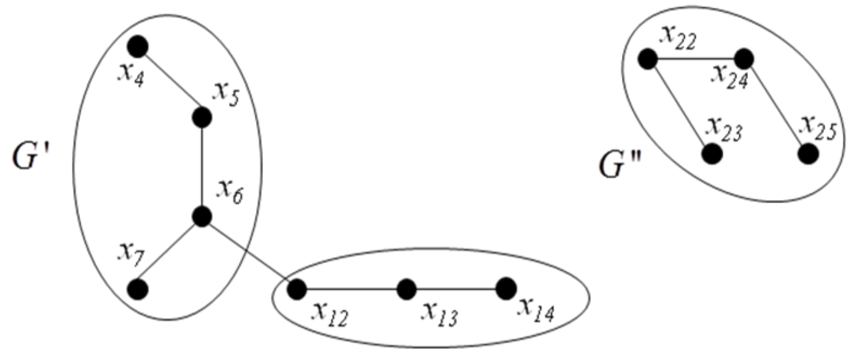


Fig. 3.7. *Familia de subarbori* $\mathcal{E}(G) = \{G', G''\}$, *obținută după eliminarea din graful G, reprezentat în figura 3.5, mulțimilor terminale netriviale din* $\mathcal{S}(G)$.

În exemplul ce urmează vom reprezenta schematic determinarea numărului $\theta_{cn}^{\max}(G)$ pentru un arbore *G*, în baza procedurii $Max\theta(G)$. Fie *G* un arbore din figura 3.6, pentru care familia de mulțimi terminare netriviale este:

$$\mathcal{S}(G) = \{S_{x_3} = \{x_1, x_2, x_3\},\ S_{x_8} = \{x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}, S_{x_{15}} = \{x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}\},$$

$$S_{x_{19}} = \{x_{19}, x_{20}, x_{21}\}, S_{x_{26}} = \{x_{26}, x_{27}, x_{28}, x_{29}\}\}.$$

După eliminarea mulțimilor, ce aparțin familiei $\mathcal{S}(G)$, din graful *G* se obține familia de subarbori $\mathcal{E}(G) = \{G', G''\}$ reprezentată în figura 3.7, căreia îi corespund următoarele familii de mulțimi terminale netriviale:

$$\mathcal{S}(G') = \{S_{x_6} = \{x_4, x_5, x_6, x_7\},\ S_{x_{12}} = \{x_{12}, x_{13}, x_{14}\}\},$$

$$\mathcal{S}(G'') = \{S_{x_{22}} = X(G'')\}.$$

După eliminarea mulțimilor, care aparțin familiei $\mathcal{S}(G')$, din graful G', și a mulțimilor, ce aparțin familiei $\mathcal{S}(G'')$ din graful G'', se obțin grafurile nule. Astfel, se determină numerele $\theta_{cn}^{\max}(G'')=|\mathcal{S}(G'')|=1$, $\theta_{cn}^{\max}(G')=|\mathcal{S}(G')|=2$ și $|\mathcal{S}(G)|=5$. Prin urmare avem:

$$\theta_{cn}^{\max}(G)=|\mathcal{S}(G)|+\theta_{cn}^{\max}(G')+\theta_{cn}^{\max}(G'')=8.$$

Consecința 3.6. *Se determină în timp $O(n^3)$ dacă pentru un arbore G cu $n \geq 6$ vârfuri există o p-divizare d-convexă netrivială pentru orice p,* $1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

3.4. Acoperirea *d*-convexă minimă pentru grafuri speciale

Într-o serie de lucrări s-au examinat mulțimile *d*-convexe și diferite caracteristici numerice, legate de mulțimi *d*-convexe pentru clase speciale de grafuri obținute din operațiile fundamentale pe grafuri: [28], [55], [54], [55]. Prezintă interes studierea acoperirilor *d*-convexe și determinarea numerelor $\varphi_c^{\min}(G)$ și $\varphi_{cn}^{\min}(G)$ pentru clase speciale de grafuri, obținute din operațiile binare pe grafuri neorientate, cum ar fi suma grafurilor, coroana grafurilor, produsul cartezian și produsul lexicografic.

Vom nota prin $G[S]$ subgraful grafului $G=(X;U)$ indus de mulțimea de vârfuri $S \subset X$. Pentru a indica o muchie cu extremitățile *x* și *y* vom mai folosi notația *xy*. Reamintim că un vârf adiacent cu toate celelalte vârfuri ale grafului se numește vârf *universal.*

$p_G : X(G*H) \to X(G)$, $p_G((g,h))=g$, este proiecția pe *G* și $p_H : X(G*H) \to X(H)$, $p_H((g,h))=h$, proiecția pe graful *H,* unde prin simbolul * se notează operația produsul cartezian sau produsul lexicografic.

Definiția 3.1. [35] *Numărul minim de clici care acoperă un graf G se numește* ***numărul de acoperire cu clici*** *și se notează prin* $\theta(G)$.

Familia de clici ce acoperă graful *G* și corespunde numărului $\theta(G)$ se va nota prin $\mathcal{P}_\theta(G)$.

Definiția 3.2. [54] *Mulțimea nevidă* $S \subset X$ *se numește* ***nonconexă*** *în graf* $G=(X;U)$ *dacă pentru oricare pereche de vârfuri* $x, y \in X(G) \setminus S$, *care respectă egalitatea* $d(x,y)=2$, *are loc relația:*

$$\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \cap S = \varnothing.$$

Fie $P(G)$ familia de mulțimi *d*-convexe, reuniunea cărora este egală cu $X(G)$. Notăm prin $\mathcal{P}(P(G))$ acoperire *d*-convexă a grafului *G*, care constă din mulțimile, ce aparțin familiei $P(G)$.

Urmează câteva afirmații de care vom avea nevoie în cele ce urmează, corectitudinea cărora poate fi verificată cu ușurință:

Afirmația 3.1. *Dacă G este un graf conex neorientat cu $n \geq 2$ vârfuri, atunci pentru orice vârf $x \in X(G)$ există o mulțime d-convexă $S \subseteq X(G)$, astfel încât $x \in S$ și $|S| = 2$.*

Afirmația 3.2. *Dacă G este un graf conex neorientat cu $n \geq 3$ vârfuri, atunci există familia $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$, astfel încât pentru orice mulțime $S \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$ are loc inegalitatea $|S| \geq 2$.*

Afirmația 3.3. *Dacă G este un graf conex neorientat cu $n \geq 3$ vârfuri, atunci există familia $\mathcal{P}_\theta(G)$, astfel încât pentru orice mulțime $S \in \mathcal{P}_\theta(G)$ are loc inegalitatea $|S| \geq 2$.*

Lema 3.12. *Dacă G este un graf conex neorientat cu $n \geq 3$ vârfuri, care conține un vârf universal x, atunci pentru orice vârf $g \in X(G)$ există o mulțime d-convexă $S \subset X(G)$, astfel încât $x, g \in S$ și $|S| = 3$.*

Demonstrație: Fie x un vârf universal al grafului $G = (X;U)$, ceea ce înseamnă că $\Gamma(x) = X \setminus \{x\}$. Presupunem că $G[\Gamma(x)]$ este un graf neconex, prin urmare există $k \geq 2$ componente conexe $G_1[\Gamma(x)]$, $G_2[\Gamma(x)]$, ..., $G_k[\Gamma(x)]$ ale grafului $G[\Gamma(x)]$. Pentru oricare două vârfuri $x_1 \in X(G_i[\Gamma(x)])$ și $x_2 \in X(G_j[\Gamma(x)])$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$, se obține o mulțime *d*-convexă netrivială $\{x, x_1, x_2\}$.

Presupunem acum că $G[\Gamma(x)]$ formează un graf conex. În acest caz pentru orice vârf *y* al mulțimii $X(G) \setminus \{x\}$ există cel puțin un vârf adiacent $z \in X(G) \setminus \{x\}$, pentru care mulțimea $\{x, y, z\}$ este *d*-convexă netrivială.

Consecința 3.7. *Dacă G este un graf conex neorientat cu $n \geq 4$ vârfuri, care conține un vârf universal, atunci există o acoperire d-convexă netrivială a lui G.*

Consecința 3.8. *Dacă G este un graf conex neorientat cu $n \geq 4$ vârfuri, care conține un vârf universal, atunci are loc egalitatea $\varphi_c^{\min}(G) = \varphi_{cn}^{\min}(G)$.*

Demonstrație: Presupunem că relația $\varphi_c^{\min}(G) = \varphi_{cn}^{\min}(G)$ nu este satisfăcută, ceea ce însemnă că $\varphi_c^{\min}(G) < \varphi_{cn}^{\min}(G)$. Fie *x* un vârf universal al grafului *G* și $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$ o acoperire *d*-convexă minimă, care satisface Afirmația 3.2. Înlocuim fiecare mulțime $S \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$, $|S| = 2$, cu o mulțime *d*-convexă netrivială S_{nt}, după cum este descris mai jos.

Dacă $x \notin S$, atunci $S_{nt} = S \bigcup \{x\}$. Se observă că S_{nt} formează un triunghi în *G*, adică S_{nt} este o mulțime *d*-convexă netrivială. Fie că $S = \{x, y\}$. Dacă $|\Gamma(y)| = 1$, atunci $S_{nt} = S \bigcup \{z\}$, unde vârful *z* este adiacent cu *x* și diferit de *y*, dar dacă $|\Gamma(y)| \geq 2$, atunci *z* este diferit de *x*, și adiacent cu *y*. În ambele cazuri mulțimea S_{nt} este *d*-convexă netrivială. Efectuând toate înlocuirile, eliminăm mulțimile ce se conțin în reuniunea celorlalte și obținem o acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G)$. Ușor ne putem convinge că pentru familia obținută $\mathcal{P}(G)$ are loc inegalitatea $|\mathcal{P}(G)| \leq |\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)|$, care implică relația $\varphi_{cn}^{\min}(G) \leq \varphi_c^{\min}(G)$. Am obținut contradicție, prin urmare este demonstrată corectitudinea consecinței.

Suma grafurilor

Suma grafurilor *G* și *H*, notată prin $G + H$, este un graf cu mulțimea de vârfuri $X(G+H) = X(G) + X(H)$ și $U(G+H) = U(G) \bigcup U(H) \bigcup \{xy : x \in X(G), y \in X(H)\}$.

Teorema 3.12. [54] *Dacă G este un graf conex neorientat, K_m un graf complet cu m vârfuri și $C = S_1 \bigcup S_2$ o submulțime proprie a mulțimii $X(G+K_m)$, $S_1 \subseteq X(G)$, $S_2 \subseteq X(K_m)$, atunci C este d-convexă în $G + K_m$ dacă și numai dacă cel puțin una din afirmațiile este satisfăcută:*

a) S_1 formează o clică în G;

b) $S_1 \subseteq X(G) \setminus S$ și $S_2 = X(K_m)$, pentru o mulțime nonconexă S din G.

Lema 3.13. *Dacă G este un graf conex neorientat cu n vârfuri, $diam(G) = 2$, K_m este un graf complet cu m vârfuri și $C = S_1 \bigcup S_2$ este o submulțime d-convexă proprie a mulțimii $X(G+K_m)$, $S_1 \subseteq X(G)$, $S_2 \subseteq X(K_m)$, atunci S_1 este d-convexă în G.*

Demonstrație: Ținând cont de Teorema 3.12, vom considera două cazuri. Dacă mulțimea S_1 formează o clică în *G*, atunci evident S_1 este o mulțime *d*-convexă. Dacă S_1 nu formează clică în *G*, atunci $S_1 \subseteq X(G) \setminus S$ și $S_2 = X(K_m)$, pentru o mulțime nonconexă *S* din *G*. Să presupunem că S_1 nu este o mulțime *d*-convexă în *G*. Fie că *x* și *y* două vârfuri ale mulțimii S_1, astfel încât există un vârf $z \in \langle x, y \rangle_G$, care nu aparține mulțimii S_1. Din condiția $diam(G) = 2$, se obține $d(x, y) = 2$, $z \in \Gamma_G(x) \bigcap \Gamma_G(y)$, ceea ce înseamnă că $z \in S_1$. Așadar, contradicție obținută demonstrează lema.

Teorema 3.13. *Pentru graful conex G cu n vârfuri și graful complet* K_m *cu m vârfuri sunt adevărate afirmațiile:*

1) $\varphi_c^{\min}(G+K_m)=2$*, dacă G este graf complet;*

2) $\varphi_{cn}^{\min}(G+K_m)=2$*, dacă G este graf complet și* $n+m\geq 4$*;*

3) $\varphi_c^{\min}(G+K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(G+K_m)=\varphi_c^{\min}(G)$*, dacă* $diam(G)=2$*;*

4) $\varphi_c^{\min}(G+K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(G+K_m)\leq\varphi_c^{\min}(G)$*, dacă* $diam(G)\geq 3$*.*

Demonstrație: 1) Presupunem că $G=K_n$. Atunci, având în vedere definiția sumei grafurilor, rezultă că graful $G+K_m$ este un graf complet. Grafurile *G* și K_m conțin cel puțin câte un vârf, prin urmare se obține egalitatea:

$$\varphi_c^{\min}(G+K_m)=2.$$

2) Presupunem $G=K_n$ și $n+m\geq 4$. Cum anterior a fost menționat, graful $G+K_m$ este complet. Deoarece $n+m\geq 4$ și fiecare mulțime *d*-convexă netrivială constă din cel puțin trei elemente, se obține relația:

$$\varphi_{cn}^{\min}(G+K_m)=2.$$

3) Presupunem că diametrul grafului *G* este $diam(G)=2$. Fie *C* o mulțime *d*-convexă proprie a mulțimii $X(G+K_m)$, care satisface condițiile Teoremei 3.12. Din Lema 3.13 rezultă că $X(G)\bigcap C$ formează o mulțime *d*-convexă în *G*. Fie $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G+K_m)$ o acoperire *d*-convexă minimă a grafului $G+K_m$. Se obține o familie de mulțimi $P(G)=\bigcup_{S\in\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G+K_m)}\{X(G)\bigcap S\}$, care nu conține mulțimea $X(G)$, ceea ce înseamnă că are loc relația $\left|\mathcal{P}(P(G))\right|\leq\varphi_c^{\min}(G+K_m)$ și rezultă inegalitatea:

$$\varphi_c^{\min}(G)\leq\varphi_c^{\min}(G+K_m).$$

Ținând cont de Afirmația 3.2, fie $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$ o acoperire *d*-convexă minimă a grafului *G*, pentru care orice mulțime $S\in\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$ satisface inegalitatea $|S|\geq 2$. Prin urmare, se obține o acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G+K_m)$ a grafului $G+K_m$, prin adăugarea mulțimii $X(K_m)$ la Y_i, $Y_i\in\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$ pentru orice *i*, $1\leq i\leq\varphi_c^{\min}(G)$. Evident, pentru familia $\mathcal{P}(G+K_m)$ se respectă condiția $\left|\mathcal{P}(G+K_m)\right|=\varphi_c^{\min}(G)$ și au loc relațiile:

$$\varphi_c^{\min}(G+K_m)\leq\varphi_{cn}^{\min}(G+K_m)\leq\varphi_c^{\min}(G),$$

de unde se obține $\varphi_c^{\min}(G+K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(G+K_m)=\varphi_c^{\min}(G)$.

4) Presupunem acum că diametrul grafului *G* este $diam(G)\geq 3$. Cum s-a menționat mai sus, orice acoperire *d*-convexă minimă a grafului *G*, care corespunde Afirmației 3.2, generează o acoperire *d*-convexă netrivială a grafului $G+K_m$, ceea ce implică corectitudinea relației $\varphi_{cn}^{\min}(G+K_m)\leq\varphi_c^{\min}(G)$. Se observă că există grafurile conexe *M*, $diam(M)\geq 3$, pentru care are loc inegalitatea strictă $\varphi_{cn}^{\min}(M+K_m)<\varphi_c^{\min}(M)$.

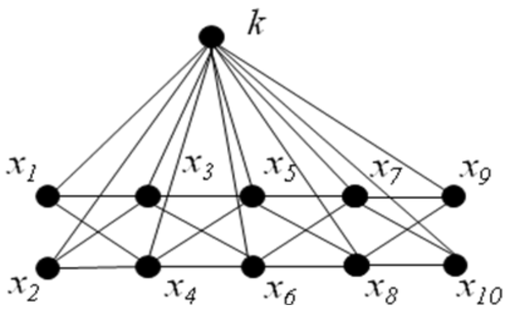


Fig. 3.8. Suma grafurilor M și K_1, $X(K_1)=\{k\}$, $\varphi_{cn}^{\min}(M+K_1)<\varphi_c^{\min}(M)$.

De exemplu, pentru graful reprezentat în figura 3.8, obținut din suma grafurilor *M* și K_1, $X(K_1)=\{k\}$, există acoperirea *d*-convexă netrivială minimă:

$$\mathcal{P}_{\varphi_{cn}^{\min}}(M+K_1)=\{\{x_1,x_7,x_9,k\},\{x_2,x_8,x_{10},k\},\{x_3,x_5,k\},\{x_4,x_6,k\}\},$$

dar acoperirea *d*-convexă minimă a grafului *M* este:

$$\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(M)=\{\{x_1,x_3\},\{x_5,x_7\},\{x_2,x_4\},\{x_6,x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\}\},$$

cu alte cuvinte $\varphi_{cn}^{\min}(M+K_1)=4$, $\varphi_c^{\min}(M)=6$ și $\varphi_{cn}^{\min}(M+K_1)<\varphi_c^{\min}(M)$.

Pe de altă parte, cunoaștem că orice acoperire *d*-convexă netrivială reprezintă un caz particular al acoperirii *d*-convexe arbitrare. Deoarece orice vârf $k\in X(K_m)$ este universal în $G+K_m$, conform Consecinței 3.8 obținem $\varphi_c^{\min}(G+K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(G+K_m)$. Prin urmare, rezultă relațiile:

$$\varphi_c^{\min}(G+K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(G+K_m)\leq\varphi_c^{\min}(G).$$

Teorema 3.14. [54] *Dacă G și H sunt două grafuri conexe necomplete, atunci submulțimea proprie* $C=S_1\bigcup S_2$ *a mulțimii* $X(G+H)$, $S_1\subset X(G)$, $S_2\subset X(H)$, *este d-convexă în* $G+H$ *dacă și numai dacă* S_1 *și* S_2 *formează clici în G și respectiv în H.*

Teorema 3.15. *Pentru două grafuri conexe necomplete G și H este adevărată relația:*

$$\theta(G+H)=\varphi_c^{\min}(G+H)=\varphi_{cn}^{\min}(G+H)=\max\{\theta(G),\theta(H)\}.$$

Demonstrație: Din Teorema 3.14 se știe că orice mulțime *d*-convexă a grafului $G+H$ formează o clică. Aceasta înseamnă că orice acoperire *d*-convexă a sumei $G+H$ este o acoperire cu clici. Astfel, avem $\varphi_c^{\min}(G+H)=\theta(G+H)$. Fie $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G+H)$ o acoperire *d*-convexă minimă a grafului $G+H$. Ținând cont de Teorema 3.14, se obține o familie de mulțimi $P(G)=\bigcup_{S\in\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G+H)}\{X(G)\bigcap S\}$, care nu conține mulțimea $X(G)$ și toate mulțimile căreia formează clici în *G*. Prin urmare, se obține inegalitatea $\left|\mathcal{P}(P(G))\right|\le\varphi_c^{\min}(G+H)$, care la rândul sau, implică relația $\theta(G)\le\varphi_c^{\min}(G+H)$. Prin analogie, se demonstrează că $\left|\mathcal{P}(P(H))\right|\le\varphi_c^{\min}(G+H)$ pentru familia de mulțimi $P(H)=\bigcup_{S\in\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G+H)}\{X(H)\bigcap S\}$, de unde rezultă $\theta(H)\le\varphi_c^{\min}(G+H)$. Astfel, are loc inegalitatea:

$$\max\{\theta(G),\theta(H)\}\le\varphi_c^{\min}(G+H).$$

Ținând cont de Afirmația 3.3, considerăm acoperirile minime cu clici $\mathcal{P}_\theta(G)$ și $\mathcal{P}_\theta(H)$ ale grafurilor *G* și respectiv *H*, astfel încât orice mulțime din $\mathcal{P}_\theta(G)$ și $\mathcal{P}_\theta(H)$ constă din cel puțin două elemente. Dacă $\theta(G)\ge\theta(H)$, atunci construim acoperirea cu clici netriviale $\mathcal{P}(G+H)$, se are în vedere că fiecare clică conține nu mai puțin de 3 vârfuri, astfel încât se satisface egalitatea $\left|\mathcal{P}(G+H)\right|=\theta(G)$. Deoarece orice mulțime *d*-convexă din $G+H$ este o clică, putem uni X_i cu Y_i, unde $X_i\in\mathcal{P}_\theta(G)$ și $Y_i\in\mathcal{P}_\theta(H)$, pentru orice *i*, $1\le i\le\theta(H)$, și apoi unim mulțimea X_i cu Y_1 pentru orice *i*, $\theta(H)+1\le i\le\theta(G)$. Din aceleași considerente, dacă $\theta(G)<\theta(H)$, atunci poate fi construită acoperirea cu clici netriviale $\mathcal{P}(G+H)$, pentru care $\left|\mathcal{P}(G+H)\right|=\theta(H)$. Prin urmare, au loc relațiile:

$$\varphi_c^{\min}(G+H)\le\varphi_{cn}^{\min}(G+H)\le\max\{\theta(G),\theta(H)\}.$$

În final, obținem:

$$\theta(G+H)=\varphi_c^{\min}(G+H)=\varphi_{cn}^{\min}(G+H)=\max\{\theta(G),\theta(H)\}.$$

Coroana grafurilor

Coroana grafurilor *G* și *H*, notată prin $G\oplus H$, este un graf care se obține, luând o copie a grafului *G* și *n* copii ale grafului *H*, $\left|X(G)\right|=n$, și apoi unind prin intermediul muchiilor vârful *i* al grafului *G* cu toate vârfurile copiei *i* a grafului *H*.

Vom considera o versiune generalizată a coroanei grafurilor. Fie *G* un graf conex cu *n* vârfuri și fie $H_{g_1},H_{g_2},...,H_{g_k}$, $\{g_1,g_2,...,g_k\}\subseteq X(G)$, grafuri conexe. Atunci vom nota prin

$(G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus (H_{g_1}, H_{g_2},..., H_{g_k})$ graful care se obține, luând o copie a lui G și unind prin intermediul muchiilor vârful g_i cu toate vârfurile grafului H_{g_i}, pentru orice i, $1 \le i \le k$. Dacă $H_{g_1} = H_{g_2} = \cdots = H_{g_k} = H$, atunci vom folosi notația $(G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H$. Dacă $k = n$, coroana grafurilor $(G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H$ se va nota prin $G \oplus H$.

Teorema 3.16. [55] *Dacă G este un graf conex neorientat și* $H_{g_1}, H_{g_2},..., H_{g_k}, \{g_1, g_2,..., g_k\} \subseteq X(G)$, *sunt k copii ale grafului neorientat H, atunci mulțimea nevidă* $C \subseteq X(G \oplus H)$ *este d-convexă în* $G \oplus H$ *dacă și numai dacă este satisfăcută una din condițiile*:

a) C este d-convexă în G;

b) C induce un subgraf complet în H_g *pentru un vârf* $g \in \{g_1, g_2,..., g_k\}$;

c) $G[C] = (G[S];\{s_1, s_2,..., s_l\}) \oplus (H^*_{s_1}, H^*_{s_2},..., H^*_{s_l})$, *mulțimea S este d-convexă în G,* $\{s_1, s_2,..., s_l\} \subseteq S$, $\{s_1, s_2,..., s_l\} \subseteq \{g_1, g_2,..., g_k\}$ *și mulțimea* $X(s_i + H^*_{s_i})$ *este d-convexă în* $s_i + H_{s_i}$, *pentru orice* $i = 1, 2,..., l$.

Teorema 3.17. *Pentru două grafuri conexe G cu n vârfuri, H cu m vârfuri și orice submulțime de vârfuri* $\{g_1, g_2,..., g_k\} \subseteq X(G)$ *sunt adevărate afirmațiile:*

1) $\varphi_c^{\min}(G \oplus H) = 2$, *dacă* $n = 1$ *și H este graf complet;*

2) $\varphi_{cn}^{\min}(G \oplus H) = 2$, *dacă* $n = 1$, *H este graf complet și* $m \ge 3$;

3) $\varphi_c^{\min}(G \oplus H) = \varphi_{cn}^{\min}(G \oplus H) = \varphi_c^{\min}(H)$, *dacă* $n = 1$ *și* $diam(H) = 2$;

4) $\varphi_c^{\min}(G \oplus H) = \varphi_{cn}^{\min}(G \oplus H) \le \varphi_c^{\min}(H)$, *dacă* $n = 1$ *și* $diam(H) \ge 3$;

5) $\varphi_c^{\min}((G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H) = 2$, *dacă* $n \ge 2$;

6) $\varphi_{cn}^{\min}((G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H) = 2$, *dacă* $n \ge 2$ *și* $k * m + n \ge 4$.

Demonstrație: Presupunem că $n = 1$. În aceste condiții avem $G \oplus H = K_1 + H$ și în rezultat obținem:

$$\varphi_c^{\min}(G \oplus H) = \varphi_c^{\min}(K_1 + H).$$

În consecință, corectitudinea afirmațiilor 1) - 4) rezultă nemijlocit din Teorema 3.13.

5) Presupunem $n \ge 2$. Ușor se verifică că mulțimile $X(H_{g_1})$ și $X(G) \cup \bigcup_{i=2}^{k} X(H_{g_i})$ satisfac condițiile Teoremei 3.16 și prin urmare aceste două mulțimi formează o 2-acoperire

d-convexă a grafului $(G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H$, ceea ce implică egalitatea $\varphi_c^{\min}((G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H) = 2$.

6) Să presupunem că $n \geq 2$ și $k * m + n \geq 4$. În aceste condiții, mulțimea $X((G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H)$ conține cel puțin 4 elemente. Ținând cont de Teorema 3.16, vom arăta existența 2-acoperirii d-convexe netriviale a grafului $(G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H$ pentru două cazuri:

a) Dacă $m = 1$, atunci alegem $g' \in \Gamma(g) \setminus X(H_g)$ pentru un vârf $g \in \{g_1, g_2,..., g_k\}$, care generează o 2-acoperirea d-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}_2((G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H) = \left\{\{g, g'\} \cup X(H_g), X(G) \bigcup_{g'' \in \{g_1, g_2,..., g_k\}, g'' \neq g} X(H_{g''})\right\}.$$

b) Dacă $m \geq 2$, atunci alegem $h \in H_g$ pentru un vârf $g \in \{g_1, g_2,..., g_k\}$ și obținem o 2-acoperire d-convexă netrivială:

$$\mathcal{P}_2((G;\{g_1, g_2,..., g_k\}) \oplus H) = \left\{\{g\} \cup X(H_g), \{h\} \cup X(G) \bigcup_{g' \in \{g_1, g_2,..., g_k\}, g' \neq g} X(H_{g'})\right\}.$$

Produsul cartezian al grafurilor

Produsul cartezian al grafurilor G și H, notat prin $G \times H$, este un graf cu mulțimea de vârfuri $X(G) \times X(H)$, în care vârfurile (g_1, h_1) și (g_2, h_2) sunt adiacente dacă și numai dacă $g_1 = g_2$ și $h_1 h_2 \in U(H)$, sau $h_1 = h_2$ și $g_1 g_2 \in U(G)$.

Teorema 3.18. [54] *Dacă G și H sunt două grafuri conexe neorientate, atunci mulțimea* $C \subseteq X(G \times H)$ *este d-convexă în* $G \times H$ *dacă și numai dacă* $p_G(C)$ *este d-convexă în G,* $p_H(C)$ *este d-convexă în H și* $C = p_G(C) \times p_H(C)$.

Teorema 3.19. *Pentru graful conex G cu n vârfuri și graful complet* K_m *cu m vârfuri, care satisfac relația* $n + m \geq 3$, *sunt adevărate afirmațiile:*

1) $\varphi_c^{\min}(G \times K_m) = \varphi_c^{\min}(G)$, *dacă* $m = 1$;

2) $\varphi_{cn}^{\min}(G \times K_m) = \varphi_{cn}^{\min}(G)$, *dacă* $m = 1$ *și* $n \geq 4$;

3) $\varphi_c^{\min}(G \times K_m) = 2$, *dacă* $m \geq 2$;

4) $\varphi_{cn}^{\min}(G \times K_m) = 2$, *dacă* $m \geq 2$ *și* $n \geq 3$, *sau* $m \geq 3$ *și* $n \geq 2$, *sau* $m \geq 4$.

Demonstrație: 1) Presupunem m = 1. Se observă că în acest caz $G = G \times K_1$. Întrucât $n + m \geq 3$, este clar că are loc egalitatea $\varphi_c^{\min}(G \times K_m) = \varphi_c^{\min}(G)$.

Presupunem în continuare că $n \geq 4$. Se observă cu ușurință că pentru $G \times K_1$ există o acoperire *d*-convexă netrivială dacă și numai dacă pentru G există o acoperire *d*-convexă netrivială. În consecință, obținem:

$$\varphi_{cn}^{\min}(G \times K_m) = \varphi_{cn}^{\min}(G).$$

Astfel, afirmațiile 1) și 2) sunt îndeplinite.

3) Presupunem că $m \geq 2$. Alegem două vârfuri diferite $k_1, k_2 \in X(K_m)$ și obținem două mulțimi:

$$C_1 = \{(g,k) : g \in X(G), k \in X(K_m) \setminus \{k_1\}\} \text{ și}$$

$$C_2 = \{(g,k) : g \in X(G), k \in X(K_m) \setminus \{k_2\}\}$$

Cum K_m este graf complet, ambele mulțimi C_1 și C_2 satisfac condiția Teoremei 3.18, de unde rezultă că mulțimile C_1 și C_2 formează o 2-acoperire *d*-convexă a grafului $G \times K_m$ și prin urmare este adevărată egalitatea:

$$\varphi_{c}^{\min}(G \times K_m) = 2.$$

De asemenea, dacă $n \geq 3$, atunci C_1 și C_2 formează o 2-acoperire *d*-convexă netrivială a grafului $G \times K_m$ și se obține:

$$\varphi_{cn}^{\min}(G \times K_m) = 2.$$

În mod similar, se verifică că dacă $m \geq 3$ și $n \geq 2$ sau dacă $m \geq 4$, atunci $\varphi_{cn}^{\min}(G \times K_m) = 2$. Afirmațiile 3) și 4) sunt satisfăcute.

Lema 3.14. *Dacă G și H sunt două grafuri conexe necomplete, atunci* $|P(G)| = 1$ *sau* $|P(G) \setminus \{X(G)\}| \geq 2$, *pentru* $P(G) = \bigcup_{S \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G \times H)} \{p_G(S)\}$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G \times H)$ o acoperire *d*-convexă minimă a grafului $G \times H$. Evident, este posibil cazul $|P(G)| = 1$. Admitem că $|P(G) \setminus \{X(G)\}| = 1$. Din cele presupuse, rezultă că pentru $S \in P(G) \setminus \{X(G)\}$ există mulțimea $S' \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G \times H)$, astfel încât $p_G(S') = S$. Dacă $\{X(G)\} \notin P(G)$, atunci obținem o contradicție, deoarece $X(G) \setminus S \neq \varnothing$, ceea ce însemnă că graful $G \times H$ nu este acoperit în întregime cu mulțimi *d*-convexe. În cele ce urmează presupunem că $\{X(G)\} \in P(G)$. Din definiția acoperirii *d*-convexe, rezultă că orice mulțime din $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G \times H)$ conține cel puțin un vârf rezident. În consecință, există $h \in X(H)$, pentru care există un vârf (g,h) al grafului $G \times H$, ce aparține mulțimii S' și nu face parte din

$S'' \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G\times H)$, $p_G(S'') = X(G)$. Având în vedere Teorema 3.18, pentru vârful *h*, menționat mai sus, și pentru $g \in X(G)\setminus S$, vârfurile (g,h) rămân neacoperite în graful $G\times H$. Contradicție obținută demonstrează corectitudinea lemei.

Consecința 3.9. *Dacă G și H sunt două grafuri conexe necomplete, atunci* $|P(H)|=1$ *sau* $|P(H)\setminus\{X(H)\}|\ge 2$, *pentru* $P(H)=\bigcup_{S\in\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G\times H)}\{p_H(S)\}$.

Teorema 3.20. *Pentru două grafuri conexe necomplete G și H este adevărată relația:*

$$\varphi_c^{\min}(G\times H) = \varphi_{cn}^{\min}(G\times H) = \min\{\varphi_c^{\min}(G), \varphi_c^{\min}(H)\}.$$

Demonstrație: Menționăm că $|X(G)|\ge 3$ și $|X(H)|\ge 3$. Conform Afirmației 3.2, există o acoperire *d*-convexă minimă $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$, astfel încât fiecare mulțime din $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$ conține cel puțin două elemente. Prin urmare, ținând cont de Teorema 3.18, obținem o acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G\times H)$ a grafului rezultant $G\times H$, care constă din mulțimile $C_i=\{(g,h): g\in S_i, h\in X(H)\}$, $S_i\in\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$, $1\le i\le\varphi_c^{\min}(G)$. Se observă că are loc egalitatea $|\mathcal{P}(G\times H)|=\varphi_c^{\min}(G)$, care implică relația $\varphi_{cn}^{\min}(G\times H)\le\varphi_c^{\min}(G)$. Din aceleași considerente, dacă $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(H)$ este o acoperire *d*-convexă minimă a grafului *H*, atunci se obține o acoperire *d*-convexă netrivială $\mathcal{P}(G\times H)$, astfel încât $|\mathcal{P}(G\times H)|=\varphi_c^{\min}(H)$ și $\varphi_{cn}^{\min}(G\times H)\le\varphi_c^{\min}(H)$. Prin urmare:

$$\varphi_c^{\min}(G\times H)\le\varphi_{cn}^{\min}(G\times H)\le\min\{\varphi_c^{\min}(G),\varphi_c^{\min}(H)\}.$$

Fie $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G\times H)$ o acoperire *d*-convexă minimă a grafului $G\times H$. Având în vedere Teorema 3.18, obținem următoarele familii de mulțimi:

$$P(G)=\bigcup_{S\in\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G\times H)}\{p_G(S)\} \text{ și } P(H)=\bigcup_{S\in\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G\times H)}\{p_H(S)\}.$$

Evident, egalitățile $|P(G)|=1$ și $|P(H)|=1$ nu se realizează concomitent. În baza Lemei 3.14 și a Consecinței 3.9, vom analiza trei cazuri:

În cazul $|P(G)|=1$ se obține $|P(H)\setminus\{X(H)\}|\ge 2$. În consecință, pentru acoperirea *d*-convexă $\mathcal{P}(P(H))$ a grafului *G* are loc relația $|\mathcal{P}(P(H))|\le\varphi_c^{\min}(G\times H)$, de unde rezultă $\varphi_c^{\min}(H)\le\varphi_c^{\min}(G\times H)$. Dacă presupunem că $|P(H)|=1$, atunci, din aceleași considerente, avem $|\mathcal{P}(P(G))|\le\varphi_c^{\min}(G\times H)$ și $\varphi_c^{\min}(G)\le\varphi_c^{\min}(G\times H)$. Analog, se demonstrează că dacă

$|P(G)\setminus\{X(G)\}|\geq 2$ și $|P(H)\setminus\{X(H)\}|\geq 2$, atunci au loc relațiile $\varphi_c^{\min}(G)\leq\varphi_c^{\min}(G\times H)$ și $\varphi_c^{\min}(H)\leq\varphi_c^{\min}(G\times H)$. Combinând aceste trei cazuri, obținem:

$$\min\{\varphi_c^{\min}(G),\varphi_c^{\min}(H)\}\leq\varphi_c^{\min}(G\times H).$$

În final, avem:

$$\varphi_c^{\min}(G\times H)=\varphi_{cn}^{\min}(G\times H)=\min\{\varphi_c^{\min}(G),\varphi_c^{\min}(H)\}.$$

Produsul lexicografic al grafurilor

Produsul lexicografic al grafurilor G și H, notat prin $G\circ H$, este un graf cu mulțimea de vârfuri $X(G\circ H)=X(G)\times X(H)$, în care vârfurile (g_1,h_1) și (g_2,h_2) sunt adiacente dacă și numai dacă $g_1g_2\in U(G)$ sau $g_1=g_2$ și $h_1h_2\in U(H)$.

Teorema 3.21. [28] *Dacă C este o submulțime proprie a produsului lexicografic conex* $G\circ H$*, unde G și H conțin cel puțin câte două vârfuri și dacă C induce un subgraf necomplet al grafului* $G\circ H$*, atunci C formează o mulțime d-convexă dacă și numai dacă următoarele afirmații sunt satisfăcute:*

1) $p_G(C)$ *este o mulțime d-convexă în G;*

2) $\{g\}\times X(H)\subseteq C$ *pentru orice vârf nesimplicial* $g\in p_G(C)$*;*

3) H este un graf complet.

Consecința 3.10. *Dacă C este o submulțime proprie a produsului lexicografic conex* $G\circ H$*, unde G și H conțin cel puțin câte două vârfuri și H este un graf necomplet, atunci C formează o mulțime d-convexă dacă și numai dacă ea induce un subgraf complet în* $G\circ H$ *și următoarele afirmații sunt satisfăcute:*

1) $p_G(C)$ *induce un subgraf complet în G;*

2) $p_H(C^g)$ *induce un subgraf complet în H pentru orice* $g\in p_G(C)$*, unde*

$C^g=\{(g,h)\in C:\text{pentru orice } h\in H\}$.

Demonstrație: Deoarece graful *H* este necomplet, din Teorema 3.21 rezultă că mulțimea *C* induce un subgraf complet în $G\circ H$. Din construcția grafului $G\circ H$ și din Teorema 3.21 se obține că $p_G(C)$ induce un subgraf complet în *G*. Din aceleași considerente, pentru oricare vârf $g\in p_G(C)$ mulțimea respectivă $p_H(C^g)$ induce un subgraf complet în *H,* unde $C^g=\{(g,h)\in C:\text{pentru orice } h\in H\}$.

Teorema 3.22. *Pentru graful conex G cu n vârfuri și graful complet* K_m *cu m vârfuri, care satisfac relația* $n+m\geq 3$*, sunt adevărate afirmațiile:*

1) $\varphi_c^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_c^{\min}(K_m\circ G)=2$*, dacă G este graf complet;*

2) $\varphi_{cn}^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(K_m\circ G)=2$*, dacă G este graf complet și* $n+m\geq 5$*, sau* $n=2$ *și* $m=2$*;*

3) $\varphi_c^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_c^{\min}(K_m\circ G)=\varphi_c^{\min}(G)$*, dacă G nu este graf complet și* $m=1$*;*

4) $\varphi_{cn}^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(K_m\circ G)=\varphi_{cn}^{\min}(G)$*, dacă G nu este graf complet,* $n\geq 4$ *și* $m=1$*;*

5) $\varphi_c^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(G\circ K_m)=2$*, dacă G nu este graf complet, conține un vârf simplicial și* $m\geq 2$*;*

6) $\varphi_c^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_c^{\min}(G)$*, dacă G nu este graf complet, nu conține vârfuri simpliciale și* $m\geq 2$*;*

7) $\varphi_c^{\min}(K_m\circ G)=\varphi_{cn}^{\min}(K_m\circ G)=\theta(G)$*, dacă G nu este graf complet și* $m\geq 2$*.*

Demonstrație: 1) Presupunem că *G* este un graf complet. Atunci, se observă că grafurile $G\circ K_m$ și $K_m\circ G$ sunt complete și prin urmare obținem:

$$\varphi_c^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_c^{\min}(K_m\circ G)=2.$$

Admitem că $n+m\geq 5$, sau $n=2$ și $m=2$. Grafurile obținute $G\circ K_m$ și $K_m\circ G$ sunt complete și conțin cel puțin câte 4 vârfuri, ceea ce înseamnă că ele pot fi acoperite cu 2 mulțimi *d*-convexe netriviale, prin urmare au loc relațiile:

$$\varphi_{cn}^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(K_m\circ G)=2.$$

3) Presupunem că *G* nu este complet. Dacă $m=1$, atunci grafurile $G\circ K_m$ și $K_m\circ G$ sunt identice cu *G*, ceea ce implică:

$$\varphi_c^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_c^{\min}(K_m\circ G)=\varphi_c^{\min}(G).$$

Din aceleași considerente, dacă se îndeplinește condiția $n\geq 4$, atunci este adevărată și afirmația 4), cu alte cuvinte avem:

$$\varphi_{cn}^{\min}(G\circ K_m)=\varphi_{cn}^{\min}(K_m\circ G)=\varphi_{cn}^{\min}(G).$$

Admitem că $m\geq 2$. Dacă *G* conține un vârf simplicial g', atunci alegem două vârfuri diferite $k_1,k_2\in X(K_m)$, care generează două mulțimi *d*-convexe netriviale:

$$C_1=(X(G)\setminus\{g'\}\times X(K_m))\bigcup\{(g',k):k\in X(K_m)\setminus\{k_1\}\} \quad \text{și}$$

$$C_2=(X(G)\setminus\{g'\}\times X(K_m))\bigcup\{(g',k):k\in X(K_m)\setminus\{k_2\}\}.$$

Ușor ne putem convinge că mulțimile C_1 și C_2 satisfac condiția Teoremei 3.21, ceea ce înseamnă că ele formează o 2-acoperire *d*-convexă netrivială a grafului $G \circ K_m$. Astfel, următoarele egalități sunt satisfăcute:

$$\varphi_c^{\min}(G \circ K_m) = \varphi_{cn}^{\min}(G \circ K_m) = 2.$$

Prin urmare, afirmația 5) este îndeplinită.

Analizăm cazul când graful *G* nu conține vârfuri simpliciale. Se știe din Teorema 3.21 că proiecția $p_G(C)$ trebuie să fie *d*-convexă în *G* pentru oricare mulțime *d*-convexă *C* din $G \circ K_m$. Fie $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G \circ K_m)$ o acoperire *d*-convexă minimă a grafului $G \circ K_m$. În baza familiei $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G \circ K_m)$, obținem familia de mulțimi $P(G) = \bigcup_{S \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G \circ K_m)} \{p_G(S)\}$. Deoarece graful *G* nu conține vârfuri simpliciale, rezultă că $X(G)$ nu se include în $P(G)$. Prin urmare, are loc inegalitatea $|\mathcal{P}(P(G))| \le \varphi_c^{\min}(G \circ K_m)$, care implică relația:

$$\varphi_c^{\min}(G) \le \varphi_c^{\min}(G \circ K_m).$$

Fie $\mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$ o acoperire *d*-convexă minimă a grafului *G*. Atunci, mulțimile $S_i = C_i \times X(K_m)$ formează o acoperire *d*-convexă în $G \circ K_m$, unde $C_i \in \mathcal{P}_{\varphi_c^{\min}}(G)$, $1 \le i \le \varphi_c^{\min}(G)$, și prin urmare se obține inegalitatea $\varphi_c^{\min}(G \circ K_m) \le \varphi_c^{\min}(G)$, care implică $\varphi_c^{\min}(G \circ K_m) = \varphi_c^{\min}(G)$. Având în vedere Afirmația 3.2, obținem:

$$\varphi_c^{\min}(G \circ K_m) = \varphi_{cn}^{\min}(G \circ K_m) = \varphi_c^{\min}(G).$$

Deci, afirmația 6) este satisfăcută.

Ținând cont de Consecința 3.10, Afirmațiile 3.2 și 3.3, în mod similar se demonstrează că:

$$\varphi_c^{\min}(K_m \circ G) = \varphi_{cn}^{\min}(K_m \circ G) = \theta(G).$$

Astfel, afirmația 7) este satisfăcută.

Teorema 3.23. *Pentru două grafuri conexe necomplete G și H este adevărată relația:*

$$\varphi_c^{\min}(G \circ H) = \varphi_{cn}^{\min}(G \circ H) = \theta(G \circ H) = \theta(G)\theta(H).$$

Demonstrație: Din Consecința 3.10 rezultă că orice mulțime *d*-convexă din $G \circ H$ formează o clică. Prin urmare, se obține $\varphi_c^{\min}(G \circ H) = \theta(G \circ H)$ și se verifică cu ușurință că $\theta(G \circ H) = \theta(G)\theta(H)$. Ținând cont de Afirmațiile 3.2 și 3.3, avem $\varphi_c^{\min}(G \circ H) = \varphi_{cn}^{\min}(G \circ H)$. Așadar, obținem:

$$\varphi_c^{\min}(G \circ H) = \varphi_{cn}^{\min}(G \circ H) = \theta(G \circ H) = \theta(G)\theta(H).$$

3.5. Concluzii la capitolul 3

Ținând cont de faptul că problema acoperirii grafurilor cu mulțimi *d*-convexe, precum și unele variații ale acesteia, examinate în capitolul 2, sunt *NP*-complete, în capitolul 3 au fost studiate problemele respective pe unele clase de grafuri cu scopul obținerii rezultatelor teoretice care au condus la elaborarea unor algoritmi polinomiali de soluționare a problemei de acoperire/divizare.

În legătura cu studierea problemei de acoperire cu mulțimi *d*-convexe a unor clase de grafuri, în capitolul trei au fost obținute următoarele rezultate de bază: a) au fost stabilite condițiile de existență a acoperirii *d*-convexe netriviale pentru grafurile triangulate, grafurile cactus și grafurile ce formează puterea ciclului; b) au fost determinate condițiile de existență a acoperirii unui arbore cu $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe netriviale. Rezultate similare au fost obținute și pentru problema divizării arborelui în mulțimi *d*-convexe netriviale; c) a fost elaborat algoritm polinomial de determinare a *p*-divizării *d*-convexe netriviale a unui arbore pentru $p \geq 2$; d) a fost examinată estimarea numărului de acoperire *d*-convexă minimă în cazul diferitor operații binare definite pe grafurile neorientate. Aceste rezultate poartă mai mult un caracter teoretic și au menirea de a completa rezultatele precedente cu referite la studierea problemei în cauză.

În baza cercetărilor efectuate în capitolul 3 și a rezultatelor obținute putem face următoarele concluzii:

1. Rezultatele obținute cu privire la studierea problemei de acoperire cu mulțimi *d*-convexe în cazul grafurilor triangulate, grafurilor cactus, grafurilor ce formează puterea ciclului sunt importante din punct de vedere teoretic, reprezintând un suport pentru elaborarea algoritmilor polinomiali de soluționare a problemelor practice;
2. Cercetările legate de estimarea numărului maxim de acoperire *d*-convexă netrivială a unui arbore au permis stabilirea condițiilor de existență a acoperirilor *d*-convexe netriviale pentru arbori;
3. Rezultatele ce țin de studierea mulțimilor terminale netriviale a unui arbore se folosesc pentru estimarea numărului maxim de divizare *d*-convexă netrivială a unui arbore și pot servi la soluționarea problemelor de optimizare pe arbori în cazul divizării *d*-convexe netriviale;
4. Obținerea algoritmului recursiv de complexitatea polinomială în cazul problemei de divizare a arborelui în mulțimi *d*-convexe netriviale stimulează interesul și pentru alte clase de grafuri cu structura arborescentă pentru care ar exista algoritmi similari;

5. Cercetările legate de estimare numărului de acoperire *d*-convexă minimă în cazul unor operații binare pe grafuri poartă un caracter teoretic și au menirea de a completa teoria generală legată de studierea problemei de acoperire a unui graf arbitrar cu mulțimi *d*-convexe.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Cercetările efectuate în cadrul tezei „*Acoperirea cu mulțimi d-convexe a grafurilor neorientate*” corespund în întregime scopului și obiectivelor expuse în întroducerea lucrării. Ținând cont de importanța problemei studiate, menționată și de către alți matematicieni (D. Artigas [30], [31], R. Glantz [76], A. V. Eremeev [15] etc.), în baza rezultatelor personale obținute de către autor în capitolul 2 și 3, putem deduce următoarele concluzii generale și recomandări.

Concluzii generale asupra rezultatelor obținute:

1. În baza rezultatelor obținute în teza de doctor a fost soluționată o problemă științifică importantă care *constă în demonstrarea NP*-completitudinii problemei de acoperire/divizare a unui graf neorientat cu mulțimi *d*-convexe, *ceea ce a condus la necesitatea studierii* condițiilor de existență a $p \geq 2$ mulțimi *d*-convexe, ce formează acoperire/divizare unor clase de grafuri *pentru implementarea ulterioară* în construirea metodelor și algoritmilor eficienți de soluționare a problemelor aplicative.
2. Problema examinată în teza de doctor „*Acoperirea cu mulțimi d-convexe a grafurilor neorientate*” reprezintă o problemă combinatorială de optimizare pe structuri discrete pentru care au fost obținute rezultate teoretice importante cu privire la complexitatea acesteia, precum și algoritmi eficienți de soluționare de complexitate polinomială în cazul unor variații a problemei studiate [2], [41], [47], [49].
3. Examinarea problemei de acoperire a grafului cu mulțimi *d*-convexe, formulată de către D. Artigas și parțial rezolvată de către acesta, și obținerea rezultatelor fundamentale, prezentate în capitolul 2, permit să considerăm că problema în cauză este soluționată integral cu referire la complexitatea acesteia [45], [47].
4. Rezultatele obținute în legătura cu studierea mulțimilor *d*-convexe netriviale au condus la obținerea unor rezultate importante cu privire la acoperirea grafului cu astfel de mulțimi, ceea ce reprezintă o problemă mai firească din punct de vedere aplicativ [2], [47], [49].
5. Rezultatele cu privire la acoperirea și divizarea cu mulțimi *d*-convexe netriviale a grafurilor din anumite clase, au permis elaborarea unor metode eficiente de complexitate polinomială de soluționare, chestiune importantă, deoarece ambele variații ale problemei generale de acoperire s-au dovedit a fi și ele *NP*-complete [2], [49].
6. Examinarea (2,*t*)-acoperirii și (2,*nt*)-acoperirii a grafurilor neorientate, precum și corelației dintre aceste două tipuri de probleme, a condus la depistarea unor clase de

grafuri pentru care există algoritmi polinomiali de soluționare a problemei de acoperire [41], [44].

7. Ideile folosite la demonstrarea formulei recurente pentru calcularea numărului maxim de mulțimi *d*-convexe netriviale, ce formează o acoperire/divizare a unui arbore au permis elaborarea metodelor și algoritmilor eficienți de soluționare a problemelor menționate pe arbori [42], [43], [49].
8. Estimările obținute pentru numărul de acoperire/divizare *d*-convexă poartă un caracter teoretic și completează într-un mod reușit rezultatele obținute în legătura cu studierea problemei de acoperire grafurilor cu mulțimi *d*-convexe de către alți matematicieni (D. Artigas, S. Dantas, R. Glantz, L. N. Grippo etc.) [46], [47], [48].
9. Algoritmi elaborați în baza rezultatelor teoretice obținute pot conduce la o soluționare mai eficientă în timp a problemelor aplicative (clusterizarea elementelor unei mulțimi, proiectarea circuitelor integrate, amplasarea punctelor de deservire etc.) [2], [49].

Algoritmii elaborați și examinați în prezenta lucrare au fost realizați sub formă de bibliotecă de algoritmi implementată în limbajul C#.

Avantajele și valoarea elaborărilor propuse: Cercetările efectuate reprezintă o extindere a cunoștințelor teoretice, ce țin de acoperirea grafurilor neorientate cu mulțimi *d*-convexe. Elaborările propuse au o valoare științifică importantă datorită gradului înalt de noutate și originalitate. Rezultatele obținute pot fi utilizate în diverse domenii și pot avea aplicații practice în diferite probleme de clusterizare pe grafuri.

Recomandări: Luând în considerație importanța teoretico-aplicativă a problemei abordate, precum și complexitatea soluționării acesteia, ar fi interesantă continuarea cercetărilor sub următoarele aspecte:

- Deoarece problemele de acoperire și divizare ale grafului în mulțimi *d*-convexe sunt *NP*-complete, ar prezenta interes elaborarea unor metode și algoritmi aproximativi sau euristici, care ar permite obținerea unor soluții satisfăcătoare ale problemelor studiate.
- Rezultatele obținute în legătura cu problema studiată ar putea fi extinse pentru unele structuri matematice mai generale, cum ar fi hipergrafurile și complexele de relații multi-are.
- Rezultatele prezentate în teza de doctor se referă la cazul grafurilor neorientate finite. Pentru a reda o completitudine integră problemei de acoperire ar fi potrivit de studiat și cazul grafurilor infinite. De exemplu, ar prezenta interes întrebarea: care ar putea fi

structura grafurilor neorientate infinite ce pot fi acoperite cu $p = 1, 2, \ldots$ mulțimi *d*-convexe.

- Rezultatele obținute se încadrează în tematica unor discipline opționale predate studenților din cadrul universităților, ceea ce permite să considerăm că aceste rezultate pot servi drept suport pentru o disciplină opțională în cadrul studiilor de licență sau master.

BIBLIOGRAFIE

1. Buzatu R. *2-acoperirile convexe în grafuri neorientate*. Rezumate ale comunicărilor Conferinței Științifice Naționale cu Participarea Internațională, Integrare prin Cercetare și Inovare, 10-11 noiembrie 2015, USM, Chișinău, Moldova, p. 177-180.
2. Buzatu R., Cataranciuc S. *Acoperirea unui graf neorientat cu mulțimi convexe netriviale*. Materialele Conferinței Internaționale: Modelare Matematică, Optimizare și Tehnologii Informaționale, Volumul I, 22-25 martie 2016, Chișinău, Moldova, 2016, p. 64-71.
3. Cataranciuc S., Sur N. *Grafuri d-convex simple și quasi-simple*. Chișinău, 2009, 199 p.
4. Cataranciuc S., Zgureanu A. *Matricele de relaţii multi-are şi numerele prime în criptarea informaţiei*. Studia Universitatis, Seria "Științe exacte și economice", 2012, nr. 7 (57), p. 12-16.
5. Cataranciuc S. *G-complexul de relații multi-are*. Analele ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe fizico-matematice". Chişinău, 2006, p. 119-122.
6. Cataranciuc S., Cepoi V., Gherman L., Soltan P. *Convexitatea generalizată şi aplicaţiile ei*. Lucr. conf. pregătitoare p-u Congr. mat-lor români, 1990, Bucureşti, p. 145-154.
7. Soltan P. *Prelegeri selectate din teoria grafurilor*. Chișinău, USM, 2001.
8. Toadere T. *Grafe: teorie, algoritmi și aplicații*. Smaranda Derveșeanu, Ed. Cluj-Napoca: Editura Albastră, 2009, 199 p.
9. Александров А. Д., Залгаллер В. А. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны (основы внутренней геометрии поверхностей)*. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 63, 1962, 262 с.
10. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. *Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы*. СПБ., Издательство "Лань", 2010. 368 с.
11. Болтянский В. Г. *Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей*. Тр. МИАН СССР, 47, Москва: Изд-во АН СССР, 1955. 199 с.
12. Болтянский В. Г. *О некоторых классах H-выпуклых множеств*. Докл. АН СССР, 226, № 1, 1976, с. 249-252.
13. Болтянский В. Г., Солтан П. С. *Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств*. Кишинёв, Штиинца, 1978.

14. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов*. Москва: Наука, 1990, 384 с.

15. Еремеев А. В., Заозерская Л. А., Колоколов А. А. *Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования*. Дискретн. анализ и исслед. опер., 2000, том 7, номер 2, с. 22-46.

16. Еремин Г. С. *Разбиение произвольного множества вершин ориентированного бесконтурного графа на выпуклые подмножества*. Автомат. и телемех., 1987, выпуск 8, с. 137-143.

17. Зыков А. А. *Основы теории графов*. Москва: Вузовская книга, 2004, 664 с.

18. Катаранчук С. *d-Выпукло простые планарные графы*. Исследования по численным методам и теорет. Кибернетике, Кишинёв: Штиинца, 1985, с. 68-75.

19. Катаранчук С. *d-Выпукло простые двудольные графы*. Исследования по общей алгебре, геометрии и их приложенияб, Кишинев: Штиинца, 1986, с. 92-96.

20. Катаранчук С. *Классы d-выпукло простых графов*. Исследования по прикл. матем. и информ, 1990, Кишинёв, Штиинца, с. 97-102.

21. Катаранчук С. *Строение и изоморфизм d-выпукло простых графов*. Оптимизация и обработка данных, Кишинёв: Штиинца, 1987, с. 64-68.

22. Присэкару К., Солтан П. *О разбиении плоской области на d-выпуклые части и его применение*. Доклады Акад. Наук, СССР, 1982, Том 262, номер 2, с. 271-273.

23. Солтан П. С., Замбицкий Д. К., Присакару К.Ф. *Экстремальные задачи на графах и алгоритмы их решения*. Штиинца, 1973.

24. Солтан В. П. *Введение в аксиоматическую теорию выпуклости*. Кишинёв, Штиинца, 1984, 223 с.

25. Солтан В. П. *d-Выпуклость в графах*. ДАН ССС, 272, № 3, с. 535-537.

26. Солтан П. С., Присакару К. Ф. *Задачи Штейнера на графах*. Доклады Акад. Наук СССР, 198, 1971, с. 46-49.

27. Чепой В. Д. *Две теоремы о d-выпукло простых планарных графах*. Исследования по численным методам и теоретической кибернетике, Штиинца, Кишинёв, 1985,с.76-82.

28. Anand B. S., Changat M., Klavzar S., Peterin I. *Convex sets in lexicographic products of graphs*. Graphs Combin. 28, 2012, p. 77-84.

29. Araujo J., Campos V., Giroire F., Nisse N., Sampaio L., Soares R. *On the hull number of some graph classes*. Theor. Comput. Sci. 475, 2013, p. 1-12.

30. Artigas D., Dantas S., Dourado M. C., Sxwarcfiter J. L. *Convex covers of graphs*. Matematica Contemporanea, Sociedade Brasileira de Matematica, vol. 39, 2010, p. 31-38.

31. Artigas D., Dantas S., Dourado M. C., Sxwarcfiter J. L. *Partitioning a graph into convex sets.* Discrete Mathematics, vol. 311, 2011, p. 1968-1977.

32. Artigas D., Dourado M. C., Sxwarcfiter J. L. *Convex Partition of Graphs*. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 29, 2007, p. 147-151.

33. Bellman R. *On a routing problem*. Quarterly of Applied Mathematics, 16,1958, p. 87-90.

34. Berge C. *Graphs and Hypergraphs*. New York: Elsevier, 1973.

35. Berge C. *Theory of graphs and its applications*. Methuen, London, 1962.

36. Berge G. *Hypergraphs: combinatorics of finite sets*. North-Holland, Amsterdam, 1989.

37. Bichot C., Siarry P. *Graph Partitioning*. Wiley, 2011.

38. Brešar B., Klavžar S., Tepeh Horvat A. *On the geodetic number and related metric sets in Cartesian product graphs*. Discrete Math. 308 (23), 2008, p. 5555-5561.

39. Brešar B., Šumenjak T. K., Tepeh Horvat A. *The geodetic number of the lexicographic product of graphs*. Discrete Math., 311 (16), 2011, p. 1693-1698.

40. Buzatu R. *Convex covers of undirected graphs*. Proceedings of the 22nd Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM-2014, Romania, Bacău, September 18-21, 2014, p. 47-48.

41. Buzatu R. *Covers of graphs by two convex sets*. Studia univ. Babeș-Bolyai, Series Informatica, vol. LXI, no. 1, 2016, p. 5-22.

42. Buzatu R. *Nontirivial convex partition of a tree*. Proceedings of International Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education", (MITRE-2016), June 23-26, Chișinău, Moldova, p. 12-13.

43. Buzatu R. *Nontrivial convex cover of a tree*. Proceedings of the 24th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM-2016, Craiova, Romania, September 15-18, p. 82.

44. Buzatu R. *Nontrivial convex 2-covers of simple connected graphs*. Proceedings of the 23rd Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM-2015, Suceava, Romania, September 17-20, 2015, p. 36-37.

45. Buzatu R. *NP-completeness of graph convex cover problems*. Proceedings of International Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education", (MITRE-2015), Chișinău, Moldova, p. 13.

46. Buzatu R. *Minimum convex cover of special nonoriented graphs*. Studia Universitatis Moldaviae, Seria "Științe exacte și economice", 2 (92), 2016, p. 46-54.

47. Buzatu R., Cataranciuc S. *Convex graph covers*. Computer Science Journal of Moldova, vol. 23, no. 3 (69), 2015, p. 251-269.

48. Buzatu R., Cataranciuc S. *Minimum convex covers of some graph operations*. A XX-a Conferința Anuală a Societății de Științe Matematice din Romania Dedicată celei de-a 80-a aniversări a Prof. Univ. Emerit Dr. Ioan A. RUS, Baia Mare, 19-22 mai 2016, p. 18-19.

49. Buzatu R., Cataranciuc S. *Nontrivial convex covers of trees*. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica, Nr. 3(82), 2016, p. 72-81.

50. Cagaanan G. B., Canoy S. R. *On the hull sets and hull number of the Cartesian product of graphs*. Discrete Math., 287, 2004, p. 141-144.

51. Calder, J. R. *Some elementary properties of interval convexities*. J. London Math. Soc. 3 (2), 1971, p. 422-428.

52. Canoy S. R., Cagaanan G. B. *On the geodesic and hull numbers of the sum of graphs*. Congr. Numer. 161, 2003, p. 97-104.

53. Canoy S. R., Cagaanan G. B., Gervacio S. V. *Convexity, geodetic and hull numbers of the join of graphs*. Util. Math. 71, 2006, p. 143-159.

54. Canoy S. R., Garces I. J. L. *Convex sets under some graph operations*. Graphs Combin. 18 (4), 2002, p. 787-793.

55. Canoy S. R., Laja L. *Convex Sets in the Corona and Conjunction of Graphs*. Congressus numeratium, vol. 180, 2006, p. 207-216.

56. Cataranciuc S., Bujac M., Soltan P. *The Problem of Existence of the n-Dimensional Directed Euler Tour of Cubic Manifold with Pozitiv Genus*. Annals of the Tiberiu

Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol. 5. ClujNapoca, 2007, p. 55-58.

57. Centeno C. C., Dantas S., Dourado M. C., Rautenbach D., Szwarcfiter J. L. *Convex Partitions of Graphs induced by Paths of Order Three*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 12:5, 2010, p. 175-184.

58. Chartrand G., Zhang P. *Convex sets in graphs*. Congr. Numer. 136, 1999, p. 19-32.

59. Christofides N. *Graph Theory. An Algorithmic Approach.* Orlando: Academic Press Inc, Orlando, 1975, 415 p.

60. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, 3rd ed., 2009.

61. Danzer L., Grünbaum B., Klee V. *Helly's Theorem and Its Applications*. [Russian translation], Mir, Moscow, 1968.

62. Dietmar C. *Steiner Minimal Trees*. Springer, 1998, 322 p.

63. Dijkstra E. W. *A note on two problems in connexion with graphs*. Numerische Mathematik, 1, 1959, p. 269-271.

64. Dirac G. A. *On rigid circuit graphs*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 38, 1961, p.71- 76.

65. Dourado M. C., Gimbel J., Kratochvíl .J, G., Protti F., Szwarcfiter J. L. *On the computation of the hull number of a graph*. Discrete Mathematics, vol. 309 (2009), p. 5668 -5674.

66. Dourado M. C., Protti F., Szwarcfiter J. L. *On the complexity of the geodetic and convexity numbers of a graph*. RMS Lect. Notes Ser. Math. 7, 2008, p. 101-108.

67. Dourado M. C., Protti F., Rautenbach D., Szwarcfiter J. L. *Some remarks on the geodetic number of a graph*. Discrete Math. 310, 2010, p. 832-837.

68. Dourado M. C., Protti F., Rautenbach D., Szwarcfiter J. L. *On the convexity number of graphs*. Graphs Combin. 28 (3), 2012, p. 333-345.

69. Duchet P. *Convex sets in graphs II. Minimal path convexity*. J. Comb. Theory Ser. B 44 (3), 1988, p. 307-316.

70. Ellis J. W. *A general set-separation theorem*. Duke Math. J., 19, 1952, p. 417-421.

71. Ford Jr. L. R. *Network Flow Theory*. Paper P-923, Santa Monica, California: RAND Corporation, August 14, 1956.

72. Floyd, R. W. *Algorithm 97: Shortest Path*. Communications of the ACM, 5 (6), p. 345.

73. Frucht R., Harary F. *On the corona of two graphs*. Aequationes Math. 4, 1970, p. 322-325.

74. Garey M. R., Johnson D. S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. Freeman W. H., New York, 1979.

75. Gimbel J. G. *Some remarks on the convexity number of a graph*. Graphs Combin. 19, 2003, p. 357-361.

76. Glantz R., Meyerhenke H. *Finding All Convex Cuts of a Plane Graph in Cubic Time*. Algorithms and Complexity, Lecture Notes in Computer Science, 7878, 2013, p. 246-263.

77. Grippo L. N., Matamala M., Safe M. D., Stein M. J. *Convex p-partitions of bipartite graphs*. Theoretical Computer Science, 609, 2016, p. 511-514.

78. Grood J. *Some Special Metrics in General Topology*. Collog.Math.,vol 6, 1958, p.283-286.

79. Gruber P. M., Wills J. M. *Handbook of Convex Geometry*. (v. A-B). North-Holland, Amsterdam, 1993.

80. Hammark R., Imrich R., Klavžar S. *Handbook of Product Graphs*. CRC Press, Boca Raton, 2011.

81. Hammer P. *General topology, symmetry and convexity*. Trans. Wisconsin Acad. Sci., Arts and Letters, 44, 1956, p. 221-225.

82. Hammer P. *Semispaces and the topology of convexity*. Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 7, 1963, p. 305-316.

83. Harary F. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London, 1969, 274 p.

84. Harary F., Loukakis E., Tsouros C. *The geodetic number of a graph*. Math. Comput. Modelling 17 (11), 1993, p. 89-95.

85. Jamil F. P., Aniversario I. S., Canoy S. R. *The closed geodetic numbers of the corona and composition of graphs*. Util. Math. 82, 2010, p. 135-153.

86. Jiang T., Pelayo I. M., Pritikin D. *Geodesic Convexity and Cartesian Products in Graphs*. Manuscript, 2004.

87. Karp R. *Reducibility among combinatorial problems*. R. E. Miller and J.W. Thatcher (Eds.), Complexity of Computer Computations, Plenum, New York, 1972, p. 85-103.

88. Kruskal J. B. *On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem*. Proceedings of the American Mathematical Society, 7, 1956, p. 48-50.

89. Morandini M. *NP-complete problem: Partition into triangles*. Corso di Complessita Prof. Romeo Rizzi, Technical Report, 2004.

90. Ore O. *Theory of graphs*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXVIII, American Mathematical Society, 1962, 270 p.

91. Oxley J. G. *Matroid theory*. Oxford graduate texts in mathematics. Oxford University Press, 2006.

92. Papadimitriou C. H. *Computatational Complexity*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1994.

93. Pelayo I. M. *Geodesic Convexity in Graphs*. Springer, Verlag, New York, 2013.

94. Prim R. C. *Shortest connection networks and some generalizations*. Bell System Technical Journal, 36 (6), 1957 , p. 1389-1401.

95. Qu G., Ji C. *Shortest path algorithm for hypergraphs*. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 28 (11), 2005, p. 106-109.

96. Rao S. B., Hebbare S. P. R. *Characterization of planar distance convex simple graphs*. Proc. Symp. in Graph Theory ISI, Calcutta, 1976, p. 138-150.

97. Ray-Chaudhury D. K. *An algorithm for a maximum cover of an abstract complex*. Canad. J. Math., 15:1, 1963, p. 11-24.

98. Schaefer T. J. *The complexiry of satisfiability problems*. Proceeding STOC ’78 Proceedings of the tenth annual ACM symposium on Theory of computing, ACM New York, NY, USA, 1978, p. 216-226.

99. Serway R. A., Jewett J. W. *Physics for scientists and engineers*. ThomsonBrooks/Cole, 2014. 384 p.

100. Soetens E. *Convexity in Busemann Spaces*. Bull. Soc. Math. Belg, 19, 1967, p. 194-213.

101. Tomescu I., Zimand M. *Minimum spanning hypertrees*. Discrete Applied Mathematics, 54, 1994, p. 67-76.

102. Turing A. M. *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungs problem*. Proceedings of the London Mathematical Society, 2, 1937.

103. Tutte W. T. *Lectures on matroids*. Journal of Research of the National Bureau of Standards (U.S.A.), Sect. B 69, 1965, p. 1-47.

104. Tutte W. T. *Matroids and graphs*. Transactions of the American Mathematical Society (Amer. Math. Society), 90 (3), 1959, p. 527-552.

105. Van de Vel M. *Theory of Convex Structures*. North-Holland, Amsterdam, 1993.

106. Voloshin V. I. *Introduction to graph and hypergraph theory*. Nova Science Publishers, Inc., New York, 2009, 287 p.

107. Wang F. H. *The lower and upper forcing geodetic numbers of complete n-partite graphs, n-dimensional meshes and tori*. Int. J. Comput. Math., 87 (12), 2010, p. 2677-2687.

108. Welsh D. J. A. *Matroid Theory*. L.M.S. Monographs 8, Academic Press, 1976.

109. Whitney H. *On the abstract properties of linear dependence*. American Journal of Mathematics (The Johns Hopkins University Press), 57 (3), 1935, p. 509-533.

110. Yero I. G., Rodríguez-Velázquez J. A. *Analogies between the geodetic number and the Steiner number of some classes of graphs*. Published by Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia, 29:8, 2015, p. 1781-1788.

111. Menger K. *Untersuchungen über allgemeine*. Math. Ann., 1928, 100, s. 75-163.

112. Schmidt J. *Eigene grundlegende Begriffe und Sätze aus der Hüllenoperator*. Ber. Math.-Tagung, Berlin, 14, 18, 1953, s. 21-48.

113. Schmidt J. *Über die Rolle der trensfiniten Schlussweisen in einer algemeinen Idealtheorie*. Math. Nachr., 7, 1952, s. 165-182.

114. Bressan J. *Sistema axiomatico para operatores de capsula convexa*. Rev. Union Math. Argent., 26(3), 1972, p. 131-142.

115. Toranzos F. *Inmersion de Espatios Metricos Convexos en* E^n. Math. Notae, 21, 1966-1967, p. 29-53.

ANEXE

Anexa 1. Construirea structurilor în limbajul C# pentru reprezentarea acoperirii grafului neorientat cu mulțimi *d*-convexe

```
// Limbajul C#

using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace Algorithms
{
    // mulțime
    public class Set : HashSet<int>, IEquatable<Set>
    {
        public Set() : base() { }

        public Set(IEnumerable<int> set) : base(set) { }

        public Set(Set set) : this(set.AsEnumerable()) { }

        public Set Intersect(Set set)
        {
            Set localset = new Set(this);
            localset.IntersectWith(set);
            return localset;
        }

        public Set Union(Set set)
        {
            Set localset = new Set(this);
            localset.UnionWith(set);
            return localset;
        }

        public Set Except(Set set)
        {
            Set localset = new Set(this);
            localset.ExceptWith(set);
            return localset;
        }

        public bool Equals(Set set)
        {
            if (set == null)
                return false;
            else return GetHashCode().Equals(set.GetHashCode());
        }

        public override bool Equals(object obj)
        {
            if (obj is Set)
                return Equals((Set)obj);
            else return false;
        }
```

```
    public override int GetHashCode()
    {
        return ToString().GetHashCode();
    }

    public override string ToString()
    {
        List<int> vector = new List<int>(this);
        vector.Sort();
        string str = "Set: ";
        if (vector.Count == 0)
            return str + ".";
        for (int i = 0; i < vector.Count - 1; i++)
            str += vector[i] + ", ";
        str += vector[vector.Count - 1] + ".";
        return str;
    }
}

// acoperire d-convexă
public class ConvexCover : HashSet<Set>, IEquatable<ConvexCover>
{
    public Graph graph;

    public ConvexCover(Graph graph)
        : base()
    {
        this.graph = graph;
    }

    public ConvexCover(ConvexCover convexCover)
        : this(convexCover.graph)
    {
        foreach (var set in convexCover)
            Add(new Set(set));
    }

    public void AddSet(Set set)
    {
        Add(set);
    }

    public void RemoveSet(Set set)
    {
        Remove(set);
    }

    // verifică dacă fiecare mulţime nu se conţine în reuniune celorlalte
    public bool IsEverySetIsNotContainedInUnionOfOtherSets()
    {
        foreach (var set1 in this)
        {
            Set localSet = new Set();
            foreach (var set2 in this)
                if (!set1.Equals(set2))
                    localSet = localSet.Union(set2);
            if (localSet.IsSupersetOf(set1))
                return false;
        }
        return true;
    }
```

```
// verifică dacă reuniunea mulțimilor formează o mulțime de vârfuri a grafului
public bool IsUnionEqualsAllVertices()
{
    Set localSet = new Set();
    foreach (var set in this)
        localSet = localSet.Union(set);
    if (graph.GetAllVertices().Equals(localSet))
        return true;
    else return false;
}

// verifică d-convxitatea fiecărei mulțimi
public bool IsEverySetConvex()
{
    foreach (var set in this)
        if (!graph.IsConvex(set))
            return false;
    return true;
}

// verifică dacă o familie de mulțimi se reduce la o acoperire d-convexă
public bool IsReducibleToConvexCover()
{
    ConvexCover convexCover = new ConvexCover(this);
    Set allVertices = graph.GetAllVertices();
    Set localSet = new Set();
    if (convexCover.Contains(allVertices))
        convexCover.RemoveSet(allVertices);
    if (!convexCover.IsEverySetConvex())
        return false;
    if (!convexCover.IsUnionEqualsAllVertices())
        return false;
    return true;
}

// reduce o familie de mulțimi la o acoperire d-convexă
public void ReduceToConvexCover()
{
    if (IsReducibleToConvexCover())
    {
        Set allVertices = graph.GetAllVertices();
        if (Contains(allVertices))
            RemoveSet(allVertices);

        while (!IsEverySetIsNotContainedInUnionOfOtherSets())
        {
            Set setToRemove = new Set();
            int flag = 0;
            foreach (var set1 in this)
            {
                Set localSet = new Set();
                foreach (var set2 in this)
                    if (!set1.Equals(set2))
                        localSet = localSet.Union(set2);
                if (localSet.IsSupersetOf(set1))
                {
                    setToRemove = set1;
                    flag = 1;
                    break;
                }
            }
            if (flag == 1)
```

```
                    Remove(setToRemove);
                }
            }
        }

        // verifică dacă familie de mulțimi formează o acoperire d-convexă
        public bool IsConvexCover()
        {
            if (!IsEverySetConvex())
                return false;
            if (!IsUnionEqualsAllVertices())
                return false;
            if (!IsEverySetIsNotContainedInUnionOfOtherSets())
                return false;
            else return true;
        }

        // verifică dacă familie de mulțimi formează o divizare d-convexă
        public bool IsConvexPartition()
        {
            if (!IsConvexCover())
                return false;
            foreach (var set1 in this)
                foreach (var set2 in this)
                    if (!set1.Equals(set2))
                        if (set1.Intersect(set2).Count >= 1)
                            return false;
            return true;
        }

        // verifică netrivialitatea fiecărei mulțimi
        public bool IsEverySetNontrivial()
        {
            foreach (var set in this)
                if (set.Count <= 2)
                    return false;
            return true;
        }

        // verifică dacă se obține o acoperire d-convexă netrivială
        public bool IsNontrivialConvexCover()
        {
            return IsConvexCover() && IsEverySetNontrivial();
        }

        // verifică dacă se obține o divizare d-convexă netrivială
        public bool IsnontrivialConvexPartition()
        {
            return IsConvexPartition() && IsEverySetNontrivial();
        }

        public bool Equals(ConvexCover convCov)
        {
            if (convCov == null)
                return false;
            else return GetHashCode().Equals(convCov.GetHashCode());
        }

        public override bool Equals(object obj)
        {
            if (obj is ConvexCover)
                return Equals((ConvexCover)obj);
```

```
        else return false;
    }

    public override int GetHashCode()
    {
        string str = "";
        List<int> vector = new List<int>();
        foreach (var set in this)
            vector.Add(set.GetHashCode());
        vector.Sort();
        foreach (var code in vector)
            str += code + " ";
        str = graph.GetHashCode().ToString() + ":" + str;
        return str.GetHashCode();
    }

    public override string ToString()
    {
        string str = "Convex Cover: ";
        List<Set> listSets = new List<Set>(this);
        if (listSets.Count == 0)
            return str + ".";
        for (int i = 0; i < listSets.Count - 1; i++)
            str += listSets[i] + "; ";
        str += listSets[listSets.Count - 1] + ".";
        return str;
    }
}
```

Anexa 2. Construirea acoperirii *d*-convexe netriviale și recunoașterea unor clase de grafuri cu structura specială

```
// familii de grafuri
public enum GraphType
{
    FGraph, JGraph, HPrimGraph, HPrimPrimGraph, OtherGraph
}

// graf
public class Graph : Dictionary<int, Set>
{
    public Graph() : base() { }

    public Graph(Set vertices)
        : this()
    {
        foreach (var x in vertices)
            Add(x, new Set());
    }

    public Graph(Graph graf)
        : this()
    {
        foreach (var x in graf.Keys)
            Add(x, new Set(graf[x]));
    }

    public void AddVertex(int vertex)
    {
        this.Add(vertex, new Set());
    }

    public void RemoveVertex(int vertex)
    {
        foreach (var x in this[vertex])
            this[x].Remove(vertex);
        this.Remove(vertex);
    }

    public void AddVertices(Set vertices)
    {
        foreach (var x in vertices)
            this.AddVertex(x);
    }
    public void RemoveVertices(Set vertices)
    {
        foreach (var x in vertices)
            this.RemoveVertex(x);
    }

    public bool ContainsVertex(int vertex)
    {
        return Keys.Contains(vertex);
    }

    public void AddEdge(int from, int to)
    {
        this[from].Add(to);
        this[to].Add(from);
    }
```

```
public void RemoveEdge(int from, int to)
{
    this[from].Remove(to);
    this[to].Remove(from);
}

public bool IsEdge(int from, int to)
{
    if (this[from].Contains(to))
        return true;
    return false;
}

public void AddNeighbors(int vertex, Set neighbors)
{
    foreach (var vertexLoc in neighbors)
        AddEdge(vertex, vertexLoc);
}

public Set GetNeighbors(int vertex)
{
    return new Set(this[vertex]);
}

public Set GetAllVertices()
{
    return new Set(Keys);
}

// determină subgraf indus
public Graph GetInducedSubGraph(Set vertices)
{
    Graph localGraf = new Graph(vertices);
    foreach (var x in vertices)
        localGraf[x] = this[x].Intersect(vertices);
    return localGraf;}

// determină diametrul grafului
public int GetDiameter()
{
    int diameter = 0;
    int distance;
    foreach (var x in Keys)
    {
        foreach (var y in Keys)
        {
            if (x != y)
            {
                distance = GetDistance(x, y);
                if (diameter < distance)
                    diameter = distance;
            }
        }
    }
    return diameter;
}

// determină distanța dintre două vârfuri
public int GetDistance(int from, int to)
{
    int distance;
```

```
            MetricSegment(from, to, out distance);
            return distance;
        }

        // determină segment metric și distanța dintre două vârfuri
        public Set MetricSegment(int x, int y, out int distance)
        {
            Set visitedVertices = new Set();
            List<Set> stages = new List<Set> { new Set() { x } };
            Set metricSegment = new Set { x, y };
            int current = 0;
            while (!stages[current].Contains(y))
            {
                visitedVertices = visitedVertices.Union(stages[current]);
                Set tempSet = new Set();
                foreach (var vertex in stages[current])
                    tempSet =
tempSet.Union(GetNeighbors(vertex).Except(visitedVertices));
                stages.Add(tempSet);
                current++;
            }
            distance = current;
            stages[current] = new Set { y };
            while (current >= 2)
            {
                Set tempSet = new Set();
                foreach (var vertex in stages[current])
                    tempSet=tempSet.Union(GetNeighbors(vertex).Intersect(stages[current -
1]));
                stages[current - 1] = tempSet;
                metricSegment = metricSegment.Union(tempSet);
                current--;
            }
            return metricSegment;
        }

        // generează o acoperire d-convexă netrivială
        public ConvexCover GetNontrivialConvexCover()
        {
            Set vertices = GetAllVertices();
            Set localSet = new Set();
            ConvexCover convexCover = new ConvexCover(this);
            foreach (var x in vertices)
            {
                if (!localSet.Contains(x))
                {
                    int flag = 0;
                    foreach (var y in vertices)
                        foreach (var z in vertices)
                            if (y != z && y != x && z != x)
                            {
                                Set convexSet = ConvexHull(new Set() { x, y, z });
                                if (!convexSet.Equals(vertices))
                                {
                                    convexCover.Add(convexSet);
                                    localSet = localSet.Union(convexSet);
                                    flag = 1;
                                }
                            }
                    if (flag == 0)
                        return null;
                }
```

```
        }
        convexCover.ReduceToConvexCover();
        return convexCover;
    }

    // verifică dacă un graf poate fi acoperit cu mulțimi d-convexe netriviale
    public bool HasNontrivialConvexCover()
    {
        ConvexCover convexCover = GetNontrivialConvexCover();
        if (convexCover == null)
            return false;
        if (convexCover.Count >= 2)
            return true;
        else return false;
    }

    // verifică dacă un graf aparține familiei F
    public bool IsFGraph()
    {
        if (Keys.Count <= 3)
            return false;
        if (Keys.Count == 4)
            foreach (var vertex in Keys)
                if (this[vertex].Count != 2)
                    return false;
        int flag = 0;
        int bivertex = 0;
        foreach (var vertex in Keys)
            if (this[vertex].Count == 2)
            {
                flag++;
                bivertex = vertex;
            }
        if (flag != 1)
            return false;
        if (this[this[bivertex].First()].Contains(this[bivertex].Last()))
            return false;
        Set localSet1 = GetAllVertices();
        Set localSet2 = GetAllVertices();
        localSet1.Remove(this[bivertex].First());
        localSet1.Remove(bivertex);
        localSet2.Remove(this[bivertex].Last());
        localSet2.Remove(bivertex);
        if (IsCliqueSubGraph(localSet1) && IsCliqueSubGraph(localSet2))
            return true;
        else return false;
    }

    // determină tipul grafului
    public GraphType GetGraphType()
    {
        if (IsFGraph())
            return GraphType.FGraph;
        Set vertices = GetAllVertices();
        if (vertices.Count <= 4)
            return GraphType.OtherGraph;
        foreach (var vertex in vertices)
            if (IsCliqueSubGraph(GetNeighbors(vertex)))
                return GraphType.JGraph;
        HashSet<ConvexCover> setConvexCovers = new HashSet<ConvexCover>();
        Set setT = new Set();
        Set setNt = new Set();
```

```
        foreach (var x in vertices)
            foreach (var y in vertices)
            {
                if (x != y)
                {
                    setT = new Set() { x, y };
                    setNt = vertices.Except(setT);
                    if (IsConvex(setNt))
                        setConvexCovers.Add(new ConvexCover(this) { setT, setNt });
                }
            }
        if (setConvexCovers.Count == 0)
            return GraphType.OtherGraph;
        if (setConvexCovers.Count >= 2)
            return GraphType.JGraph;
        int x1 = setT.First();
        int y1 = setT.Last();
        Set aSet = GetNeighbors(x1);
        aSet.Remove(y1);
        Set bSet = GetNeighbors(y1);
        bSet.Remove(x1);
        if (aSet.Intersect(bSet).Count >= 1)
            return GraphType.HPrimPrimGraph;
        foreach (var vertex in aSet)
            if (GetNeighbors(vertex).Intersect(bSet).Count == 0)
                return GraphType.HPrimPrimGraph;
        foreach (var vertex in bSet)
            if (GetNeighbors(vertex).Intersect(aSet).Count == 0)
                return GraphType.HPrimPrimGraph;
        if (!ConvexHull(aSet.Union(bSet)).Equals(setNt))
            return GraphType.HPrimPrimGraph;
        if (aSet.Union(bSet).Equals(setNt))
            return GraphType.HPrimPrimGraph;
        return GraphType.HPrimGraph;
    }

    // verifică dacă un graf aparține familiei HPrim și respectă condiția a)
    public bool IsHPrinCaseA()
    {
        if (GetGraphType() != GraphType.HPrimGraph)
            return false;
        Set vertices = GetAllVertices();
        Set setT = new Set();
        Set setNt = new Set();
        foreach (var x in vertices)
        {
            int flag = 0;
            foreach (var y in vertices)
            {
                setT = new Set() { x, y };
                setNt = vertices.Except(setT);
                if (IsConvex(setNt))
                {
                    flag = 1;
                    break;
                }
            }
            if (flag == 1)
                break;
        }
        foreach (var vertex in setNt)
            if (!ConvexHull(setT.Union(new Set() { vertex })).Equals(vertices))
```

```
            return true;
    return false;
}

// verifică dacă un graf este conex
public bool IsConnectedGraph()
{
    if (TraverseBFS().Equals(GetAllVertices()))
        return true;
    else return false;
}

// verifică dacă mulțimea de vârfuri formează o clică
public bool IsCliqueSubGraph(Set set)
{
    foreach (var x in set)
        foreach (var y in set)
            if (x != y)
                if (!IsEdge(x, y))
                    return false;
    return true;
}

// determină componentele conexe ale grafului
public List<Graph> GetConnectedComponents()
{
    Graph localGraph = new Graph(this);
    List<Graph> connectedComponents = new List<Graph>();
    do
    {
        Set localSet = localGraph.TraverseBFS();
        connectedComponents.Add(localGraph.GetInducedSubGraph(localSet));
        localGraph.RemoveVertices(localSet);
    }
    while (localGraph.GetAllVertices().Count >= 1);
    return connectedComponents; }

// parcurgerea în lățime
public Set TraverseBFS()
{
    Queue<int> queue = new Queue<int>();
    Set set = new Set();
    queue.Enqueue(Keys.First());
    while (queue.Count > 0)
    {
        int tempVertex = queue.Dequeue();
        set.Add(tempVertex);
        Set tempSet = this[tempVertex].Except(set);
        foreach (var vertex in tempSet)
            queue.Enqueue(vertex);
    }
    return set;
}

// parcurgerea în adâncime
public Set TraverseDFS()
{
    Stack<int> stack = new Stack<int>();
    Set set = new Set();
    stack.Push(Keys.First());
    while (stack.Count > 0)
    {
```

```
            int tempVertex = stack.Pop();
            set.Add(tempVertex);
            Set tempSet = this[tempVertex].Except(set);
            foreach (var vertex in tempSet)
                stack.Push(vertex);
        }
        return set;
    }

    // determină învelitoarea d-convexă
    public Set ConvexHull(Set set)
    {
        Set localSet1;
        Set localSet2 = new Set(set);
        int dist;
        do
        {
            localSet1 = new Set(localSet2);
            foreach (var x in localSet1)
                foreach (var y in localSet1)
                    if (x != y)
                        localSet2 = localSet2.Union(MetricSegment(x, y, out dist));
        }
        while (!localSet2.Equals(localSet1));
        return localSet2;
    }

    // verifică d-convexitatea mulțimii
    public bool IsConvex(Set set)
    {
        if (set.Equals(ConvexHull(set)))
            return true;
        else return false;
    }

    public override string ToString()
    {
        string str = "Graph: ";
        List<int> vertices = new List<int>(Keys);
        vertices.Sort();
        if (vertices.Count == 0)
            return str + ".";
        for (int i = 0; i < vertices.Count - 1; i++)
            str += vertices[i] + "- " + this[vertices[i]] + "; ";
        str += vertices[vertices.Count-1]+"- "+this[vertices[vertices.Count-1]]+".";
        return str;
    }
}
```

Anexa 3. Determinarea numărului de acoperire/divizare *d*-convexă netrivială maximă a unui arbore

```
// familii de arbori
public enum TreeGraphType
{
    ATreeGraph, BTreeGraph, OtherTreeGraph
}

// arbore
public class TreeGraph : Graph
{
    public TreeGraph() : base() { }

    public TreeGraph(Set vertexSet)
        : this()
    {
        foreach (var vertex in vertexSet)
            Add(vertex, new Set());
    }

    public TreeGraph(Graph graf)
        : this()
    {
        foreach (var vertex in graf.Keys)
            Add(vertex, new Set(graf[vertex]));
    }

    // determină vârfurile terminale
    public Set GetTerminalVertices()
    {
        Set terminalSet = new Set();
        foreach (var vertex in GetAllVertices())
            if (GetNeighbors(vertex).Count <= 1)
                terminalSet.Add(vertex);
        return terminalSet;
    }

    // verifică dacă un graf este un arbore
    public bool IsTreeGraph()
    {
        TreeGraph localGraph = new TreeGraph(this);
        Set terminalVertices = localGraph.GetTerminalVertices();
        while (terminalVertices.Count >= 1)
        {
            localGraph.RemoveVertices(terminalVertices);
            terminalVertices = localGraph.GetTerminalVertices();
        }
        if (localGraph.GetAllVertices().Count >= 1)
            return false;
        else return true; }

    // determină tipul arborelui
    public TreeGraphType GetTreeGraphType()
    {
        Set vertices = GetAllVertices();
        if (vertices.Count <= 5)
            return TreeGraphType.OtherTreeGraph;
        int diam = GetDiameter();
        if (diam <= 2 || diam >= 5)
            return TreeGraphType.OtherTreeGraph;
```

```
            if (diam == 3)
            {
                int flag = 0;
                foreach (var vertex in vertices)
                    if (GetNeighbors(vertex).Count >= 3)
                        flag++;
                if (flag == 2)
                    return TreeGraphType.ATreeGraph;
                else return TreeGraphType.OtherTreeGraph;
            }
            else
            {
                foreach (var x in vertices)
                    foreach (var y in vertices)
                        foreach (var z in vertices)
                         if (x != y && x != z && y != z)
                           if (GetDistance(x, z)==diam && GetDistance(y, z) == diam)
                             if (GetNeighbors(x).Intersect(GetNeighbors(y)).Count == 1)
                                        return TreeGraphType.BTreeGraph;
                return TreeGraphType.OtherTreeGraph;
            }
        }

        // determină numărul de acoperire d-convexă netrivială maximă
        public int GetMaxConvexCoverNumber()
        {
            Set vertices = GetAllVertices();
            Set terminalVertices = GetTerminalVertices();
            Set neigborsOfTermianVertices = new Set();
            int diam = GetDiameter();
            if (diam <= 1)
                return 0;
            if (diam == 2)
                return terminalVertices.Count - 1;
            foreach (var vertex in terminalVertices)
                neigborsOfTermianVertices =
neigborsOfTermianVertices.Union(GetNeighbors(vertex));
            Set articulationVertices =
vertices.Except(terminalVertices.Union(neigborsOfTermianVertices));
            if ((diam >= 3 && diam <= 5)||(diam >= 6 && articulationVertices.Count == 0))
                return terminalVertices.Count;
            int maxConvexCoverNumber = 0;
            foreach (var vertexArtic in articulationVertices)
            {
                TreeGraph treeGraph = new TreeGraph(this);
                Set neigborsOfVertexArtic = GetNeighbors(vertexArtic);
                treeGraph.RemoveVertex(vertexArtic);
                List<Graph> connectedComponents = treeGraph.GetConnectedComponents();
                int maxLocal1 = 0;
                foreach (var vertex in neigborsOfVertexArtic)
                {
                    Graph localGraph = new Graph();
                    foreach (var graph in connectedComponents)
                    {
                        if (graph.ContainsVertex(vertex))
                        {
                            graph.AddVertex(vertexArtic);
                            graph.AddEdge(vertex, vertexArtic);
                            localGraph = graph;
                            break;
                        }
                    }
```

```
                int maxLocal2 = 0;
                foreach (var graph in connectedComponents)
                    maxLocal2 += (new TreeGraph(graph)).GetMaxConvexCoverNumber();
                if (maxLocal1 < maxLocal2)
                    maxLocal1 = maxLocal2;
                localGraph.RemoveEdge(vertex, vertexArtic);
                localGraph.RemoveVertex(vertexArtic);
            }
            if (maxConvexCoverNumber < maxLocal1)
                maxConvexCoverNumber = maxLocal1;
        }
        if (maxConvexCoverNumber > terminalVertices.Count)
            return maxConvexCoverNumber;
        else return terminalVertices.Count;
    }

    // determină mulțimile terminale netriviale
    public HashSet<Set> GetTerminalSets()
    {
        HashSet<Set> terminalSets = new HashSet<Set>();
        Set terminalVertices = GetTerminalVertices();
        Set vertices = GetAllVertices().Except(terminalVertices);
        foreach (var vertex1 in vertices)
        {
            int flag = 0;
            Set neigbors = GetNeighbors(vertex1);
            Set neigborsV = neigbors.Intersect(terminalVertices);
            if (neigborsV.Count >= 2)
                flag = 1;
            Set neigborsIAll = new Set();
            foreach (var vertex2 in neigbors.Except(terminalVertices))
            {
                Set neigborsVertex2 = GetNeighbors(vertex2);
                Set neigborsI = neigborsVertex2.Intersect(terminalVertices);
                if (neigborsVertex2.Count == 2 && neigborsI.Count == 1)
                {
                    neigborsIAll = neigborsIAll.Union(neigborsI);
                    neigborsIAll.Add(vertex2);
                    flag = 1;
                }
            }
            if (flag == 1)
                terminalSets.Add(neigborsV.Union(neigborsIAll).Union(new Set() {
vertex1 }));
        }
        return terminalSets;
    }

    // determină numărul de dvizare d-convexă netrivială maximă
    public int GetMaxConvexPartitionNumer()
    {
        if (GetAllVertices().Count <= 2)
            return 0;
        HashSet<Set> terminalSets = GetTerminalSets();
        TreeGraph localTree = new TreeGraph(this);
        foreach (var terminalSet in terminalSets)
            localTree.RemoveVertices(terminalSet);
        int maxConvexPartitionNumber = terminalSets.Count;
        if (localTree.GetAllVertices().Count == 0)
            return maxConvexPartitionNumber;
        List<Graph> connectedComponents = localTree.GetConnectedComponents();
        foreach (var connectedGraph in connectedComponents)
```

```
                maxConvexPartitionNumber += (new
TreeGraph(connectedGraph)).GetMaxConvexPartitionNumer();
            return maxConvexPartitionNumber;
        }
    }
}
```

DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnatul, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez, că în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.

Buzatu Radu

Semnătura:

CURRICULUM VITAE

Numele de familie și prenumele:	Buzatu Radu
Data nașterii:	24.12.1989
Locul nașterii:	Republica Moldova, or. Dondușeni
Cetățenia:	Republica Moldova
E-mail:	radubuzatu@gmail.com
Cunoașterea limbilor:	română, rusă, engleză

Studii

licență: 2008 – 2011, Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, specialitatea Management Informațional.

masterat: 2011 – 2013, Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, specialitatea Analiza Statistică a Datelor și Optimizarea Proceselor Economico-Financiare.

doctorat: 2013 – 2016, Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, specialitatea 112.03 – Cibernetică Matematică și Cercetări Operaționale.

Participări la proiecte științifice

1. Proiect 11.817.08.49A (proiect instituţional). Tema: „Metodologii și tehnologii moderne ale produselor software (PS)” (anii 2011-2014).
2. Proiect 1C/2012 (proiect compania moldo-americană „Est Computer”). Tema: „Dezvoltarea abordării A3 în Logică şi Informatică cu aplicări în Web-ul semantic” (anul 2012).
3. Proiect 15.820.18.02.03/B (proiect bilateral cu Belorusia). Tema: „Elaborarea modelelor și algoritmilor eficienți de rezolvare a problemelor de optimizare cu caracter aplicativ pe structuri discrete” (anii 2015-2016).
4. Proiect 15.817.02.37A (proiect instituţional). Tema: „Modele matematice şi calcul performant în soluţionarea problemelor cu caracter aplicativ” (anii 2015-2016).

Publicații și teze la conferințe științifice

1. *Algoritmi genetici. Unele aplicații*. Analele științifice ale Universității de Stat din Moldova, Științe ale naturii și exacte, 2011, Chișinău, Moldova.
2. *Knowledge interchange between semantic technologies in building of intelligent interfaces*. The Conference “Mathematics & Information Technologies: Research and Education” (MITRE – 2013), Augut 18-22, 2013, Chișinău, Republic of Moldova.

3. *Tridimentional spectral color model as an one to one transformation from rgb color space*. The Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE – 2013), Augut 18-22, 2013, Chișinău, Republic of Moldova.
4. *Convex covers of undirected graphs.* The 22nd Conference on Applied and Industrial Mathematics, (CAIM-2014), September 18-21, 2014, Bacau, Romania.
5. *NP-completeness of graph convex cover problems.* The Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE – 2015), July 2-5, 2015, Chișinău, Republic of Moldova.
6. *Ordering colors of the hvs color model in an one-dimentional physical spectrum.* The Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE – 2015), July 2-5, 2015, Chișinău, Republic of Moldova.
7. *Nontrivial convex 2-covers of simple connected graphs*. The 23rd Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2015), September 17-20, 2015, Suceava, Romania.
8. *2-acoperirile convexe în grafuri neorientate.* Conferința Științifică „Integrare prin Cercetare și Inovare", Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, 10-11 noiembrie, 2015.
9. *Acoperirea unui graf neorientat cu mulțimi convexe netriviale*. Conferința științifică internațională "Modelare Matematică, Optimizare și Tehnologii Informaționale", Ediția a V-a, Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Chișinău, 22-25 martie, 2016.
10. *Minimum convex covers of some graph operations.* A XX-a Conferința Anuală a Societății de Științe Matematice din România Dedicată celei de-a 80-a aniversări a Prof. Univ. Emerit Dr. Ioan A. RUS, Mai 19-22, 2016, Baia Mare, România.
11. *Nontirivial convex partition of a tree*. The Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE – 2016), June 23-26, 2016, Chișinău, Republic of Moldova.
12. *Nontrivial convex cover of a tree.* The 24th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2016), September 15-18, 2016, Craiova, Romania.

Publicații în reviste științifice recenzate

1. *Convex graph covers.* Computer Science Journal of Moldova, Vol. 23, Nr. 3 (69), 2015.
2. *Covers of graphs by two convex sets.* Studia Universitatis Babeș-Bolyai, Informatica, Vol. LXI, Nr. 1, 2016.
3. *Minimum convex cover of special nonoriented graphs*. Studia Universitatis Moldaviae, Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, Seria „Științe exacte și economice", Nr. 2 (92), 2016.
4. *Nontrivial convex covers of trees.* Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, Matematica, Nr. 3 (82), 2016.