ACADEMIA DE ŞTIINŢE A MOLDOVEI
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 517.925

VACARAŞ OLGA

SISTEME CUBICE DE ECUAŢII DIFERENŢIALE CU DOUĂ ŞI TREI DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE MAXIMALĂ

111.02 – ECUAŢII DIFERENŢIALE

Autoreferatul
tezei de doctor în ştiinţe matematice

CHIŞINĂU, 2017

Teza a fost elaborată în laboratorul Ecuaţii Diferenţiale al Institutului de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Moldovei.

Conducători ştiinţifici: Şubă Alexandru, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar; **Romanovski Valery,** doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar (Slovenia).

Referenţi oficiali:

1. **Cozma Dumitru,** doctor habilitat în ştiinţe matematice, conf. univ., Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chişinău) ;

2. **Pricop Victor,** doctor în ştiinţe matematice, conf. univ., Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă".

Membri ai Consiliului ştiinţific specializat:

1. **Cioban Mitrofan,** dr.hab. în şt. fiz.-matem., prof. univ., acad. AŞM, Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chişinău), preşedinte al C.Ş.S.;

2. **Orlov Victor,** dr. în şt. fiz.-matem, Universitatea Tehnică a Moldovei, secretar ştiinţific al C.Ş.S.;

3. **Neagu Vasile,** dr.hab. în şt. fiz.-matem., prof. univ., Universitatea de Stat din Moldova;

4. **Popa Mihail,** dr.hab. în şt. fiz.-matem., prof. univ., Institutul de Matematică şi Informatică al AŞM;

5. **Vulpe Nicolae,** dr.hab. în şt. fiz.-matem., prof. univ., m.c. al AŞM, Institutul de Matematică şi Informatică al AŞM.

Susţinerea tezei va avea loc la 19 mai 2017, ora 16^{00} în şedinţa Consiliului ştiinţific specializat D 01.111.02-04 din cadrul Institutului de Matematică şi Informatică al AŞM (str. Academiei 5, sala 340, Chişinău, MD-2028, Republica Moldova).

Teza de doctor şi autoreferatul pot fi consultate la Biblioteca Ştiinţifică Centrală "A. Lupan" a AŞM şi pe site-ul C.N.A.A. (www.cnaa.md).

Autoreferatul a fost expediat la ________________ 2017.

Secretar ştiinţific al C.Ş.S, Orlov Victor, dr.

Conducători ştiinţifici:

Şubă Alexandru, dr. hab., prof. univ.

Romanovski Valery, dr. hab., prof. univ.

Autor Vacaraş Olga Vacaraş

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

În teză, din punct de vedere al teoriei calitative a sistemelor dinamice, sunt studiate sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale cu drepte invariante multiple.

Actualitatea temei. Teoria ecuaţiilor diferenţiale este un domeniu fundamental al matematicii. Necesitatea dezvoltării acestei teorii se explică prin faptul că majoritatea fenomenelor şi proceselor din lumea înconjurătoare se modelează cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale.

La început atenţia cercetătorilor era îndreptată spre aflarea soluţiei generale a ecuaţiilor şi exprimarea acesteia prin funcţii elementare. Dar, cu timpul, s-a dovedit că clasa ecuaţiilor diferenţiale integrabile în cuadraturi este foarte îngustă. Astfel, la finele secolului 19 şi începutul secolului 20, în lucrările clasice ale lui H. Poincaré şi A. M. Lyapunov ia naştere teoria calitativă a ecuaţiilor difrenţiale ce constă în determinarea comportării traiectoriilor fără a recurge nemijlocit la integrarea ecuaţiilor.

Studiul calitativ al sistemelor diferenţiale $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$ de gradul n, unde $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt polinoame cu coeficienţi reali în x şi y, iar $n = max(degP, degQ)$, este pe departe de a fi terminat. În particular, investigarea sistemelor diferenţiale polinomiale cu drepte invariante, deşi acestea formează cea mai simplă clasă în mulţimea curbelor algebrice invariante, nu este completă.

În continuare, vom enumera unele rezultate şi direcţii de cercetare recente în studiul sistemelor diferenţiale cubice ($n = 3$) cu drepte invariante, care au tangenţă cu problemele abordate în lucrarea de faţă.

Astfel, la investigarea sistemelor diferenţiale cubice cu curbe algebrice invariante şi, în particular, cu drepte invariante, şi-au adus aportul J. Artes, B. Grünbaum, J. Llibre, C. Christopher, J. Pereira, T. Druzhkova, J. H. Grace, A. Young, R. Lyubimova, M. Popa, C. Sibirschi, D. Schlomiuk, N. Vulpe, J. Sokulski, Zhang Xiang, R. Kooij, D. Cozma, A. Şubă, V. Puţuntică, V. Repeşco, C. Bujac ş.a.

Se ştie, că un sistem cubic nedegenerat de ecuaţii diferenţiale are în partea finită a planului fazic cel mult opt drepte invariante. Cercetarea calitativă a sistemelor cubice cu exact şapte şi a celor cu exact opt drepte invariante reale şi distincte a fost efectuată de către R. Lyubimova [11]. În lucrarea lui J. Llibre şi N. Vulpe [10] la investigarea sistemelor cubice cu drepte invariante s-a ţinut cont de multiplicitatea acestora, precum şi de dreapta de la infinit. Studiul complet al sistemelor cubice cu drepte invariante afine de multiplicitate paralelă totală egală cu şapte a fost efectuat de către A. Şubă, V. Repeşco şi V. Puţuntică ([17], [18], iar al sistemelor cu drepte invariante de multiplicitate totală opt, ţinându-se cont şi de dreapta de la infinit - de către N. Vulpe şi C. Bujac ([8], [7], [3], [5]). Formele canonice şi portretele fazice pentru sistemele cubice cu şase drepte invariante reale de două şi trei direcţii au fost obţinute de V. Puţuntică şi A. Şubă în [14, 15], iar pentru sistemele cubice cu infinitul degenerat şi care posedă drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu cinci sau cu şase au fost aduse de A. Şubă şi V. Repeşco ([16]).

În lucrarea de faţă sunt studiate sistemele cubice ce posedă drepte invariante de multiplicitate maximală. La calcularea numărului de drepte invariante şi a multiplicităţilor lor se ia în vedere şi linia de la infinit.

Scopul şi obiectivele lucrării. Scopul principal al lucrării constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale ce posedă drepte invariante de multiplicitate maximală.

Realizarea acestui scop a fost însoţită de următoarele obiective:

– determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante reale pentru sistemul cubic;

– determinarea multiplicităţii maximale a dreptei invariante de la infinit pentru sistemul cubic;

– clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante de multiplicitate maximală;

– clasificarea sistemelor cubice cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală;

Metodologia cercetării ştiinţifice. În lucrare au fost aplicate metodele teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale şi metodele algebrei computaţionale.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. Până-n prezent, din punct de vedere calitativ, au fost studiate sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale cu şapte şi cu opt drepte invariante [10], [11], [3], [7], [8].

În această lucrare au fost cercetate sistemele cubice cu infinitul nedegenerat ce posedă cel mult trei drepte invariante multiple, ţinându-se cont şi de dreapta de la infinit. A fost efectuată clasificarea sistemelor cubice cu cel mult trei drepte invariante distincte de multiplicitate maximală şi construite sistemele cubice perturbate corespunzătoare formelor canonice.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu una (cea de la infinit), cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală şi construirea în cazul sistemelor cubice cu drepte invariante reale a sistemelor perturbate corespunzătoare formelor canonice.

Semnificaţia teoretică. În această teză pentru prima dată s-a pus şi s-a rezolvat problema de determinare în clasa sistemelor diferenţiale cubice a multiplicităţii maximale a unei drepte invariante afine, a dreptei de la infinit, a stabilirii consecutivităţilor maximale de multiplicităţi, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al sistemelor cubice ce posedă drepte invariante.

Valoarea aplicativă a lucrării. Această lucrare poartă un caracter teoretic, însă ea are şi largi perspective aplicative. Rezultatele obţinute pot fi incluse în programele cursurilor opţionale ţinute studenţilor şi masteranzilor facultăţilor de matematică şi fizică. La fel, ele se vor lua în calcul în studiul de mai departe al sistemelor cubice. Ultimele sisteme servesc drept modele matematice: al evoluţiei în timp a interacţiunii dintre specii în biologie; de cuplare a undelor în fizica lazerului; de mişcare a electronilor, ionilor şi neutronilor în fizica plasmei; a instabilităţii convective în problema Benard din hidrodinamică ş.a.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere:

– estimaţia multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine pentru sistemele polinomiale de gradul n;

– calcularea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante în familia sistemelor cubice;

– determinarea multiplicităţii maximale a dreptei de la infinit în clasa sistemelor cubice;

– clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante de multiplicitate maximală;

– clasificarea sistemelor cubice cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele obţinute în teză pot fi aplicate:

- în investigaţiile ulterioare ale sistemelor diferenţiale cubice ce posedă drepte invariante;

- în studiul diferitor modele matematice ce descriu unele procese din fizică, chimie, medicină ş.a.;

- drept suport pentru teme de masterat şi pot constitui conţinutul unor cursuri opţionale pentru studenţii şi masteranzii de la specialităţile matematice.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele principale ale lucrării au fost prezentate în cadrul multor forumuri ştiinţifice: The 20^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM) 2012 (Chişinău), 2013 (Bucureşti), 2015 (Suceava), 2016 (Craiova); The X^{th} International Conference of Young Researchers, 2012, Chişinău; International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), 2013, 2015, 2016 (Chişinău); The 9^{th} International Conference on Applied Mathematics (ICAM), 2013, Baia-Mare, Romania; Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, 2014, 2015 (Chişinău); IV International Hahn Conference, 2014, Chernivtsi, Ukraine; Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, 2014, Chişinău; Conferinţa ştiinţifică naţională cu participare internaţională: Învăţământul superior din Republica Moldova la 85 ani, 24-25 septembrie 2015, Chişinău; The International Scientific Conference: Differential-Functional Equations and their Application, September 28-30, 2016, Chernivtsi, Ukraine; şi în cadrul seminarelor: seminarul ”Ecuaţii Diferenţiale şi Algebre” din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chişinău) (2012-2017); seminarul din cadrul catedrei Ecuaţii Diferenţiale, Facultatea Matematică şi Mecanică, Universitatea de Stat din Belarus, Minsk, 2014, 2016.

Publicaţii la tema tezei. Rezultatele principale ale tezei au fost publicate în 17 lucrări: 2 articole ştiinţifice [25, 34] (un articol fără coautor), o lucrare în materialele Conferinţei IMCS-50 ([22]) şi 14 teze ale comunicărilor la conferinţe ştiinţifice [28, 29, 19, 20, 30, 21, 31, 23, 24, 32, 33, 26, 27, 35] (7 fără coautor).

Volumul şi structura tezei. Lucrarea este formată din introducere, trei capitole şi bibliografie din 95 titluri. Volumul total este de 149 pagini (137 pagini de text de bază).

Cuvinte-cheie. Sistem cubic de ecuaţii diferenţiale, dreaptă invariantă, multiplicitatea unei curbe algebrice invariante, sistem perturbat, integrabilitate Darboux.

CONŢINUTUL TEZEI

În **Introducere** se descrie actualitatea şi importanţa problemei abordate, scopul şi obiectivele tezei, noutatea ştiinţifică a rezultatelor obţinute, importanţa teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării, aprobarea rezultatelor şi sumarul compartimentelor tezei.

În **primul capitol** sunt enunţate rezultatele clasice şi recente ce ţin de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. Se face o analiză comparativă a situaţiei existente în domeniu: se discută despre estimaţia numărului de drepte invariante pentru sistemele diferenţiale polinomiale; sunt analizate sistemele diferenţiale polinomiale cu curbe algebrice invariante; este evidenţiat rolul curbelor algebrice în studiul integrabilităţii sistemelor diferenţiale polinomiale şi sunt descrise tipurile de multiplicităţi a curbelor invariante. Se formulează problema de cercetare şi direcţiile de soluţionare a ei.

În **capitolul 2** al tezei cu titlul “Sisteme cubice cu două drepte invariante de multiplicitate maximală” a fost determinată multiplicitatea maximală a unei drepte invariante afine şi multiplicitatea maximală a dreptei invariante de la infinit, a fost efectuată clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante distincte (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală maximală.

Considerăm sistemul diferenţial polinomial

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$

şi câmpul vectorial

$$\mathbb{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2}$$

asociat acestui sistem.

Notăm cu n gradul sistemului diferenţial (1), adică $n = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Dacă $n = 2$ ($n = 3$), atunci sistemul (1) se numeşte pătratic (cubic). Vom examina sistemul (1) în presupunerile:

$$deg(GCD(P,Q)) = 0, \quad yP_n(x,y) - xQ_n(x,y) \not\equiv 0. \tag{3}$$

Definiţia 1. *O curbă algebrică $f = 0, f \in \mathbb{C}[x,y]$, se numeşte curbă algebrică invariantă pentru sistemul* (1)*, dacă există un aşa polinom $K_f \in \mathbb{C}[x,y]$ încât $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ are loc identitatea*

$$\mathbb{X}(f) \equiv f(x,y)K_f(x,y).$$

Definiţia 2. *[9] Vom spune că o curbă algebrică invariantă $f = 0$ de gradul d a sistemului* (1) *are multiplicitatea algebrică egală cu m, dacă m este cel mai mare număr natural astfel că f^m divide $E_d(\mathbb{X})$, unde*

$$E_d(\mathbb{X}) = det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_l \\ \mathbb{X}(v_1) & \mathbb{X}(v_2) & \ldots & \mathbb{X}(v_l) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{X}^{l-1}(v_1) & \mathbb{X}^{l-1}(v_2) & \ldots & \mathbb{X}^{l-1}(v_l) \end{pmatrix},$$

iar $v_1, v_2, \ldots, v_l$ este o bază a spaţiului vectorial al polinoamelor de gradul d: $\mathbb{C}_d[x,y]$.

În cazul dreptelor invariante, adică $d = 1$, putem lua $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = y$ şi atunci

$$E_1(\mathbb{X}) = P \cdot \mathbb{X}(Q) - Q \cdot \mathbb{X}(P).$$

Notăm cu $L(P,Q)$ mulţimea dreptelor invariante afine ale sistemului $\{(1),(3)\}$;

$m_a(l)$ - multiplicitatea algebrică a dreptei $l \in L(P,Q)$;

$M_a(n) = max\{m_a(l) | l \in L(P,Q), \max\{\deg(P), \deg(Q)\} = n\}$.

Teorema 1. *În clasa sistemelor polinomiale diferenţiale* $\{(1),(3)\}$ *de gradul* $n \geq 2$ *au loc inegalităţile* $3n - 2 \leq M_a(n) \leq 3n - 1$.

Ipoteza 1. *În clasa sistemelor polinomiale diferenţiale* $\{(1),(3)\}$ *de gradul* $n \geq 2$ *are loc egalitatea* $M_a(n) = 3n - 2$.

În secţiunea 2.2 a tezei se arată că această ipoteză este justă pentru $n = 2, 3$.

Teorema 2. *Multiplicitatea algebrică a unei drepte invariante plane pentru sistemele afine nu este mai mare ca doi. Orice sistem afin care admite o dreaptă invariantă afină de multiplicitatea algebrică* $m = 2$ *poate fi scris sub forma*

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = a + x + y, \quad a \in \{0; 1\}.$$

Teorema 3. *Multiplicitatea algebrică a unei drepte invariante afine pentru sistemele pătratice nedegenerate nu poate fi mai mare ca patru. Orice sistem pătratic care admite o dreaptă invariantă afină de multiplicitatea algebrică patru, prin intermediul unei transformări afine nedegenerate de coordonate şi rescalarea timpului, poate fi scris sub forma*

$$\dot{x} = x^2, \qquad \dot{y} = 1 + 2xy.$$

Teorema 4. *În clasa sistemelor cubice diferenţiale multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante reale este egală cu 7. Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic care are o dreaptă invariantă de multiplicitatea algebrică 7 poate fi scris sub forma*

$$\dot{x} = x^3, \qquad \dot{y} = 1 + 3x^2y. \tag{4}$$

În secţiunea 2.3 a tezei sunt determinate multiplicitatea infinitezimală, integrabilă şi geometrică a unei drepte invariante afine pentru sistemele cubice care, de fapt, sunt echivalente, aşa cum se arată în [9].

O curbă algebrică invariantă $f = 0$ are *multiplicitatea infinitezimală* m în raport cu câmpul vectorial $\mathbb{X}$, dacă m este cel mai mare ordin al tuturor curbelor invariante algebrice generalizate nedegenerate F construite în baza $f = 0$ (vezi [9]). Pentru sistemul (4) ce posedă dreapta invariantă $f = x$, în caz particular, putem lua polinomul $F = x + (1 + x)\epsilon(1 + \epsilon) + (1 + x + y)\epsilon^3(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3)$ de ordinul $m = 7$ şi cofactorul lui $L_F = x^2 - x\epsilon + \epsilon^2 + 2xy\epsilon^3 - y\epsilon^4 - 2y^2\epsilon^6$.

Conform [9], se spune că curba algebrică invariantă $f = 0$ a câmpului vectorial $\mathbb{X}$ are *multiplicitatea integrabilă* egală cu m, dacă m este cel mai mare număr astfel că există $m - 1$

factori exponenţiali de forma $exp(g_j/f^j), j = 1, ..., m-1$, unde $deg(g_j) \leq j \cdot deg(f)$ şi fiecare g_j nu este un multiplu a lui f.

Pentru sistemul (4) cu $f = x$ avem şase factori exponenţiali: $g_1 = g_2 = 1$, $g_3 = 1+3x^2y$, $g_4 = 1 + 4x^2y$, $g_5 = 1 + 5x^2y$, $g_6 = 1 + 6x^2y + 3x^4y^2$.

Privitor la multiplicitatea geometrică, autorii lucrării [9] afirmă, că o curbă algebrică invariantă are *multiplicitatea geometrică* m, dacă există aşa mici perturbaţii ale câmpului vectorial încât noile câmpuri posedă exact m curbe algebrice invariante distincte ce bifurcă din curba $f = 0$.

Multiplicitatea geometrică maximală a unei drepte invariante reale pentru clasa sistemelor cubice este deasemenea egală cu 7.

Următorul sistem cubic perturbat

$$\begin{aligned}&\dot{x} = x(x-3\epsilon)(x-3\epsilon+6\epsilon^3), \qquad \dot{y} = 1 + 3x^2y - 12xy\epsilon - 3\epsilon^2 + 9y\epsilon^2 + \\ &+12xy\epsilon^3 - 12xy^2\epsilon^3 - 6\epsilon^4 - 18y\epsilon^4 + 24y^2\epsilon^4 + 8\epsilon^6 - 24y^2\epsilon^6 + 16y^3\epsilon^6.\end{aligned} \tag{5}$$

admite şapte drepte invariante afine distincte:

$l_1 = x$, $l_2 = x - 3\epsilon$, $l_3 = x - 3\epsilon + 6\epsilon^3$, $l_4 = x - \epsilon - 2\epsilon^3 - 4y\epsilon^3$, $l_5 = x - \epsilon + 4\epsilon^3 - 4y\epsilon^3$, $l_6 = x - 4\epsilon + 4\epsilon^3 - 4y\epsilon^3$, $l_7 = x - 2\epsilon + 2\epsilon^3 - 2y\epsilon^3$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci (5) tinde către sistemul (4), iar dreptele l_i, $i = 2, ..., 7$ converg spre dreapta l_1 care este invariantă pentru ambele sisteme diferenţiale.

În secţiunea 2.4 este determinată multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit pentru sistemele polinomiale de grad mai mic ca patru.

Teorema 5. *Multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit a oricărui sistem diferenţial afin cu infinitul nedegenerat nu depăşeşte trei, iar sistemele pentru care această multiplicitate este egală cu trei, cu exactitatea unei transformări afine şi rescalarea timpului, pot fi scrise sub forma*

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = x.$$

Teorema 6. *Multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit a oricărui sistem diferenţial pătratic cu infinitul nedegenerat nu depăşeşte cinci, iar sistemele pentru care această multiplicitate este egală cu cinci, cu exactitatea unei transformari afine şi rescalarea timpului, pot fi scrise sub forma*

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = x^2.$$

Teorema 7. *Multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit pentru sistemul cubic de ecuaţii diferenţiale nu este mai mare ca şapte. Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic de ecuaţii diferenţiale care are dreapta de la infinit de multiplicitatea şapte poate fi scris sub una dintre următoarele două forme:*

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = ax + x^3,$$

$$\dot{x} = -x, \qquad \dot{y} = 2y + x^3.$$

Definiţia 3. *Vom spune că consecutivitatea din k numere* $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$*, unde* $\mu_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \ldots, k-1, \infty$, $\mu_j \geq \mu_{j+1}, j = 1, \ldots, k-1$*, formează în clasa sistemelor cubice o consecutivitate de multiplicităţi a dreptelor invariante, dacă există un aşa sistem cubic ce are* $k-1$ *drepte afine invariante* $l_1, ..., l_{k-1}$ *de multiplicităţile* $\mu_1, ..., \mu_{k-1}$ *respectiv, iar dreapta de la infinit are multiplicitatea egală cu* μ_∞.

Definiţia 4. *Consecutivitatea* $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$ *o vom numi maximală după componenta* $j, j \in \{1, 2, ..., k-1, \infty\}$*, dacă* $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{j-1}, \mu_j + 1, \mu_{j+1}, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$ *nu este pentru clasa de sisteme diferenţiale cubice o consecutivitate de multiplicităţi a dreptelor invariante.*
Consecutivitatea dată o vom nota cu $m_j(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$*. Consecutivităţile de tipul* $m_j(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$ *le vom numi parţial maximale, iar dacă consecutivitatea* $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$ *este maximală după toate argumentele, atunci vom spune că ea este total maximală (pe scurt, maximală) şi o vom nota cu* $m(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$.

În secţiunea 2.5 este efectuată clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante distincte (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală maximală. Se cercetează multiplicitatea dreptelor invariante atât din punct de vedere algebric, cât şi geometric, urmărindu-se scopul de a arăta că multiplicităţile date coincid şi în cazul unui ansamblu de curbe algebrice invariante.

Teorema 8. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului, orice sistem cubic ce admite două drepte invariante, inclusiv dreapta invariantă de la infinit, şi are consecutivitatea (parţial) maximală de multiplicităţi* $m_\infty(\mu_1; \mu_\infty)$ $(m(\mu_1; \mu_\infty))$ *poate fi scris sub una dintre următoarele forme:*

1) $m(7; 1)$ $\quad \dot{x} = x^3, \quad \dot{y} = 1 + 3x^2 y;$

2) $m_\infty(6; 1)$ $\quad \dot{x} = x^3, \quad \dot{y} = 1 + ax + 3x^2 y, a \neq 0;$

3)	$m(5;4)$	$\dot{x} = x^3,$	$\dot{y} = 1;$
4)	$m(4;5)$	$\dot{x} = x,$	$\dot{y} = x^3 + y;$
5)	$m_\infty(3;5)$	$\dot{x} = x,$	$\dot{y} = x^3 + x^2 + y;$
6)	$m_\infty(2;5)$	$\dot{x} = x,$	$\dot{y} = x^3 + ax^2 + bx + y, b \neq 0;$
7)	$m(1;7)$	$\dot{x} = -x,$	$\dot{y} = x^3 + 2y.$

Aceste sisteme au o singură dreaptă invariantă afină, sunt Darboux integrabile şi au respectiv, următoarele integrale prime:

1) $F(x,y) = (1 + 5x^2y)/(5x^5);$

2) $F(x,y) = (20x^2y + 5ax + 4)/(20x^5);$

3) $F(x,y) = (2x^2y + 1)/(2x^2);$

4) $F(x,y) = (2y - x^3)/x;$

5) $F(x,y) = (2y - 2x^2 - x^3)/(2x);$

6) $F(x,y) = x^{2b}e^{(x^2(x+2a)-2y)/x};$

7) $F(x,y) = x^2(x^3 + 5y)/5.$

În **capitolul 3**, "Sisteme cubice cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală", este efectuată clasificarea sistemelor cubice ce au trei drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate maximală. Au fost cercetate următoarele clase de sisteme cubice:

$\mathbb{CSL}^{p}_{2(r)}$ - cu exact două dreapte invariante afine reale paralele distincte;

$\mathbb{CSL}^{np}_{2(r)}$ - cu exact două dreapte invariante afine reale concurente;

$\mathbb{CSL}^{p}_{2(c)}$ - cu exact două dreapte invariante afine pur imaginare;

$\mathbb{CSL}^{np}_{2(c)}$ - cu exact două dreapte invariante afine relativ complexe.

Pentru fiecare clasă de sisteme cubice, enumerate mai sus, sunt aduse formele canonice, iar în cazul dreptelor reale şi perturbările sistemelor respective, necesare pentru evaluarea multiplicităţii geometrice.

Teorema 9. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}^{p}_{2(r)}$ *ce admite consecutivitatea (parţial) maximală de multiplicităţi* $(m_\infty(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty))$ $m(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele 13 forme:*

$m(4,3;1)$	1)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = x^3 + y(x-1)^2.$
$m_\infty(4,2;1)$	2)	$\dot{x} = x^2(x-1), \ \dot{y} = ax^3 + 3x^2y - 2xy + 1.$
$m(4,1;3)$	3)	$\dot{x} = x(x-1), \ \dot{y} = -x^3 + y(x-1).$
$m_\infty(3,3;1)$	4)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \ \dot{y} = ax^3 + x^2 + y(x-1)^2, \ a \neq -1.$

$m(3,2;2)$	5.1)	$\dot{x} = x^2(x-1),\ \ \dot{y} = ax^2 + xy + 1;$
	5.2)	$\dot{x} = x(x-1)^2,\ \ \dot{y} = -x^2 - 2xy + y;$
	5.3)	$\dot{x} = x(x-1),\ \ \dot{y} = x^2 + y(x^2 + x - 1).$
$m(3,1;4)$	6)	$\dot{x} = x^2(x-1),\ \dot{y} = 1.$
$m_\infty(2,2;3)$	7.1)	$\dot{x} = x(x-1),\ \ \dot{y} = x^3 + 2xy + ax - y;$
	7.2)	$\dot{x} = x(x-1)^2,\ \ \dot{y} = x + y.$
$m_\infty(2,1;4)$	8)	$\dot{x} = -x(x-1),\ \ \dot{y} = x^3 + xy + y + a.$
$m_\infty(1,1;4)$	9.1)	$\dot{x} = x(x-1)(ax+y),\ \ \dot{y} = b, b \neq 0;$
	9.2)	$\dot{x} = x(x-1),\ \ \dot{y} = x^3 - xy + by + a,\ (b+1)(\lvert a\rvert + \lvert b\rvert) \neq 0.$

Pentru sistemele din teorema 9, cu excepţia sistemului 9.1), au fost construite integralele prime $F(x,y)$ (factorii integranţi $\mu(x,y)$) de tip Darboux:

1)	$F(x,y) = exp((x-y+xy)/(x(x-1)))/(x-1);$
2)	$F(x,y) = exp((1+6x^2-3(4+a)x^3+x(2-3y))/(3x^3(x-1)))(-1+1/x)^{(-4-a)};$
3)	$F(x,y) = (x-1)exp((x^2+y)/x);$
4)	$F(x,y) = exp((x+ax-y+xy)/(x(x-1)))/(x-1)^a;$
5.1)	$F(x,y) = x(1-x)^{a-1}/exp(((xy+a+1)/(x-1)));$
5.2)	$\mu(x,y) = 1/(x^2(x-1)exp(1/(x-1)));$
5.3)	$\mu(x,y) = 1/(x^2(x-1)^2exp(x));$
6)	$F(x,y) = xexp((xy-1)/x)/(1-x);$
7.1)	$F(x,y) = x^a(1-x)^{1-a}/exp(((x(a+1)+y)/(x(x-1))));$
7.2)	$\mu(x,y) = exp(1/(x-1))/(x^2(x-1));$
8)	$F(x,y) = x^a exp((6a-3x^3+2x^4+6y(x-1)^2)/(6x));$
9.2)	$\mu(x,y) = (x-1)^{-b}x^{b-1}.$

Teorema 10. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}^{np}_{2(r)}$ *ce admite consecutivitatea (parţial) maximală de multiplicităţi* $(m_\infty(\mu_1,\mu_2;\mu_\infty))$ $m(\mu_1,\mu_2;\mu_\infty)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele 14 forme:*

$m(3,3;1)$	1)	$\dot{x} = x^3,\quad \dot{y} = y(x^2 + ay + by^2),\ b \neq 0;$
$m(3,2;2)$	2.1)	$\dot{x} = ax^3,\quad \dot{y} = y^2, a \neq 0;$
	2.2)	$\dot{x} = x(ax^2 + y),\quad \dot{y} = y^2,\ \ a \neq 0;$
$m(3,1;3)$	3.1)	$\dot{x} = x^2(ax + by),\quad \dot{y} = y,\ \ a \neq 0;$
	3.2)	$\dot{x} = x(ay + b),\quad \dot{y} = y(x^2 + ay + b),\ \ b \neq 0;$

$m(2,2;3)$	4)	$\dot{x}=x, \quad \dot{y}=y(1+bxy), \quad b\neq 0;$
$m_\infty(2,1;3)$	5.1)	$\dot{x}=x^2(a+bx+cy), \quad \dot{y}=y, \quad c(a^2+b^2)\neq 0;$
	5.2)	$\dot{x}=x, \quad \dot{y}=y(1+ax+bx^2+cxy), \quad a(b^2+c^2)\neq 0;$
	5.3)	$\dot{x}=x(1+ax+bx^2+cxy), \quad \dot{y}=y, \quad c(a^2+b^2)\neq 0;$
	5.4)	$\dot{x}=x(1+ay), \quad \dot{y}=y(1+bx+ay+cx^2), \quad abc\neq 0;$
$m_\infty(1,1;3)$	6.1)	$\dot{x}=x, \quad \dot{y}=y(a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2),$ $(a^2+c^2+f^2)(d^2+e^2+f^2)(a^2+b^2+d^2)((a-1)^2+c^2+f^2)\cdot$ $((a-1)^2+b^2+d^2)((a-1)^2+(c^2d-bce+b^2f)^2)\neq 0;$
	6.2)	$\dot{x}=x(a+by), \ \dot{y}=y(c+dx+ey+x^2),$ $a(c^2+e^2)((a-c)^2+(b-e)^2)\neq 0;$
	6.3)	$\dot{x}=x(a+by+cxy+y^2), \ \dot{y}=-y(d+ex+c^2x^2+cxy),$ $ad(c^2+e^2+(a+d)^2)((a+d)^2+(bc-e)^2)\neq 0;$
	6.4)	$\dot{x}=x(a+by+cxy+dy^2), \ \dot{y}=\alpha y(1+bx+cx^2+dxy),$ $\alpha a(c^2+d^2)(\alpha-a)\neq 0.$

Sistemele 1), 2.1), 2.2), 3.1), 3.2), 4), 5.2), 6.3) din teorema 10 sunt Darboux integrabile şi au respectiv următoarele integrale prime $F(x,y)$ (factori integranţi $\mu(x,y)$):

1) $\mu(x,y)=exp((ay-x^2)^2/(2bx^2y^2))/y^3.$

2.1) $F(x,y)=(y-2ax^2)/(2ax^2y);$

2.2) $F(x,y)=(2ax^2y+y^2)/x^2.$

3.1) $\mu(x,y)=1/(x^3y^2exp((1+bxy)^2/(2ax^2)));$

3.2) $\mu(x,y)=exp((x^2-ay)^2/(2bx^2))/y^2.$

4) $F(x,y)=x(2+bxy)/(2y).$

5.2) $\mu=exp((x(2a+bx))/2)/y^2;$

6.3) $F(x,y)=x^dy^aexp((cx+y)^2/2+ex+by);$

Teorema 11. *În clasa sistemelor cubice{(1),(3)} multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante complexe este egală cu trei. Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic care are o dreaptă invariantă complexă de multiplicitatea algebrică trei poate fi scris sub una dintre următoarele două forme:*

$$\dot{x}=2x(x^2+1), \qquad \dot{y}=y(3x^2-1); \tag{6}$$

$$\dot{x}=x(x^2-3y^2), \quad \dot{y}=y(3x^2-y^2). \tag{7}$$

Teorema 12. *În clasa $\mathbb{CSL}^p_{2(c)}$ ($\mathbb{CSL}^{np}_{2(c)}$) multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante complexe este egală cu doi.*

Teorema 13. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}^{p}_{2(c)}$ *ce admite consecutivitatea (parţial) maximală de multiplicităţi* $(m_\infty(\mu_1,\mu_2;\mu_\infty))$ $m(\mu_1,\mu_2;\mu_\infty)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele 3 forme:*

$m(2,2;3)$ 1) $\dot{x} = x^2+1, \quad \dot{y} = x^3+2xy+a;$

$m_\infty(1,1;4)$ 2.1) $\dot{x} = x^2+1, \quad \dot{y} = x^3-xy+ay+b;$

2.2) $\dot{x} = (x^2+1)(ax+y), \quad \dot{y} = b, \ \ b \neq 0.$

Pentru sistemele 1) şi 2.1) din teorema 13 a fost obţinută următoarea integrală primă şi respectiv, factorul integrant:

1) $F(x,y) = (x^2+1)exp(((1+a\,x-2y)/(1+x^2)) + a\,arctgx);$

2.1) $\mu(x,y) = (x^2+1)^{-1/2}((x-i)/(x+i))^{ia/2}.$

Teorema 14. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}^{np}_{2(c)}$ *ce admite consecutivitatea (parţial) maximală de multiplicităţi* $(m_\infty(\mu_1,\mu_2;\mu_\infty))$ $m(\mu_1,\mu_2;\mu_\infty)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele 5 forme:*

$m(2,2;1)$ 1.1) $\dot{x} = 2dxy+ax^3+(b+2)x^2y+cxy^2+y^3,$

$\dot{y} = -dx^2+dy^2-x^3+ax^2y+bxy^2+cy^3;$

1.2) $\dot{x} = 2dxy+ax^3+(2b+3)x^2y+(3a-2c)xy^2+y^3,$

$\dot{y} = -dx^2+dy^2-(b+2)x^3+cx^2y+bxy^2+(2a-c)y^3;$

1.3) $\dot{x} = fx+dx^2+exy+ax^3+(b+2)x^2y+cxy^2+y^3,$

$\dot{y} = fy+dxy+ey^2-x^3+ax^2y+bxy^2+cy^3, f \neq 0.$

$m_\infty(1,1;3)$ 2.1) $\dot{x} = cx+dy+(x^2+y^2)(ax+y+b),$

$\dot{y} = -dx+cy-(x^2+y^2)(a^2x+ay-e), \quad c^2+d^2 \neq 0;$

2.2) $\dot{x} = cx+dy+(x^2+y^2)(ax+y+b),$

$\dot{y} = -dx+cy+e(x^2+y^2)(ax+y+b), \quad d \neq 0.$

Sistemele 1.1), 2.1) din teorema 14 au respectiv următoarele integrale prime:

1.1) $F(x,y) = ((a-c)xy+(b+1)y^2-2dx)/(x^2+y^2)+$

$+(a+c)arctg(y/x)+ln(x^2+y^2);$

2.1) $F = y^2+2by+2c\,arctg(y/x)+d\,ln(x^2+y^2)+x(a^2x+2ay-2e);$

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

În lucrare, din punct de vedere al teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, au fost studiate sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale cu drepte invariante multiple. Pentru a facilita efectuarea acestui studiu a fost introdusă noţiunea de *consecutivitate maximală (parţial maximală) de multiplicităţi a dreptelor invariante.*

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu una (cea de la infinit), cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală şi construirea în cazul dreptelor invariante reale a sistemelor cubice perturbate corespunzătoare formelor canonice.

Rezultatele cercetărilor elaborate ne permit de a efectua următoarele concluzii şi recomandări:

Concluzii generale:

1. În teza de faţă pentru prima dată s-a pus şi s-a rezolvat problema de determinare în clasa sistemelor cubice a multiplicităţii maximale a unei drepte invariante afine şi a dreptei invariante de la infinit, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al sistemelor cubice cu drepte invariante ([28]-[30], [19], [20], [22],[25], [27]);

2. Estimaţia multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine pentru clasa sistemelor diferenţiale polinomiale de gradul n poartă un caracter teoretic şi poate servi drept punct de reper pentru calcularea multiplicităţii maximale pentru sistemele diferenţiale polinomiale de grad mai mare ca trei ([25]);

3. Clasificarea sistemelor cubice cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală reprezintă o continuare a studiului sistemelor cubice cu drepte invariante, efectuat anterior ([21], [23], [24], [26],[27], [31]-[35]);

4. Problema de determinare a echivalenţei dintre noţiunile de multiplicitate algebrică şi cea geometrică pe un ansamblu de curbe algebrice invariante a fost rezolvată în cazul sistemelor cubice cu două drepte invariante reale, iar pentru dreptele invariante complexe problema dată rămâne deschisă.

Recomandări:

Rezultatele obţinute şi metodele elaborate pot fi folosite:

- la studierea sistemelor diferenţiale polinomiale cu drepte invariante de multiplicitate totală egală cu 5, 6, 7;

- la studierea ulterioară a sistemelor diferenţiale polinomiale cu curbe algebrice invariante;

- la investigarea diferitor modele matematice din fizică, chimie, biologie ş. a.;

- în programele cursurilor opţionale a facultăţilor universitare cu profil real.

BIBLIOGRAFIE

1. Andronov A.A. şi al. Qualitative theory of second-order dynamical systems. John. Wiler Sons, New York, 1973.
2. Artés J., Llibre J. and Vulpe N. Quadratic systems with an integrable saddle: A complete classification in the coefficient space $\mathbb{R}^{12}$, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2012, Volume 75, Issue 14, 5416–5447.
3. Bujac C. One subfamily of cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with two distinct real infinite singularities. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat., 2015, No. 1(77), 1–39.
4. Bujac C. One new class of cubic systems with maximum number of invariant omitted in the classification of J.Llibre and N.Vulpe. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat., 2014, No. 2(75), 102–105.
5. Bujac C. Cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight. Doctor thesis, 2016, 1-165.
6. Bujac C., Llibre J., Vulpe N. First Integrals and Phase Portraits of Planar Polynomial Differential Cubic Systems with the Maximum Number of Invariant Straight Lines. Qualitative Theory of Dynamical Systems. Volume 15, Issue 2. DOI: 10.1007/s12346-016-0211-2, pp.327- 348.
7. Bujac C. and Vulpe N. Cubic systems with invariant straight lines of total multiplicity eight and with three distinct infinite singularities. Qual. Theory Dyn. Syst. 14 (2015), No. 1, 109–137.
8. Bujac C. and Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 423 (2015), No. 2, 1025–1080.
9. Christopher C., Llibre J., Pereira J. V. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. Pacific Journal of Mathematics, 329, 2007, No. 1, 63-117.
10. Llibre J. and Vulpe N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines. Rocky Mountain J. Math., 2006, vol. 36, no. 4, p. 1301-1373.
11. Lyubimova R.A. On some differential equation possesses invariant lines (Russian). Differential and integral equations, Gorky Universitet 1 (1977), p. 19–22.

12. Lyubimova R.A. On some differential equation possesses invariant lines (Russian). In: Differential and integral equations. Gorky Universitet 8 (1984), p. 66–69.

13. Mironenko V. I. Linear dependence of functions along solutions of differential equations. Beloruss. Gos. Univ., Minsk, 1981. 104 p. (in Russian).

14. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along two directions. Studia Universitatis. Seria Ştiinţe Exacte şi Economice, 8(13), 2008, p. 5-26.

15. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along three directions. Buletinul Academiei de Ştiinţe a RM, Matematica, 2(60), 2009, p. 111-130.

16. Repeşco V. Cubic systems with degenerate infinity and invariant straight lines of total parallel multiplicity six. Romai Journal, v.9, no.1, 2013, p.133-146.

17. Şubă A., Repeşco V., Puţuntică V. Cubic systems with seven invariant straight lines of configuration $(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$. Bulletin of ASM. Mathematics, 2012, No. 2(69), p. 81–98.

18. Şubă A., Repeşco V., Puţuntică V. Cubic systems with invariant straight lines of total parallel multiplicity seven. Electron. J. Differential Equations, 2013, no.274, p.1–22.

19. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with a straight line of maximal geometric multiplicity. Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2013), 19-22 September, 2013. Bucharest, Romania. Book of Abstracts. 2013, p. 58.**

20. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic Systems with an Invariant Line at Infinity of the Maximal Geometric Multiplicity. 9th International Conference on Applied Mathematics (ICAM-2013), September 25-28, 2013, Baia Mare, Romania. Abstracts, p. 30.**

21. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with two invariant straight line of multiplicity $m(3,5)$. IV International Hahn Conference, June 30 -July 5, 2014, Chernivtsi, p. 263.**

22. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with a straight line of maximal multiplicity. Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, August 19-23, 2014, Chişinău, p. 291.**

23. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with two non-parallel real invariant straight lines of maximal multiplicity. International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), 2-5 July, 2015, Chişinău, p.80.**

24. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with two real invariant straight lines of maximal multiplicity. Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), 17-20 September, 2015, Suceava, Romania, p. 33.**

25. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with an invariant straight line of maximal multiplicity. Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series, 2015, 42, No. 2, 427–449.**

26. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with two parallel complex invariant straight lines of multiplicity $m(2,2;3)$. Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), 15-18 September, 2016, Craiova, Romania, p. 42.**

27. **Şubă A., Vacaraş O. Maximal multiplicity of the line at infinity for cubic differential systems with two real non-parallel invariant straight lines. International scientific conference Differential-Functional equations and their application, 28-30 September, 2016, Chernivtsi, p. 135.**

28. **Vacaraş O. Cubic systems with a straight line of maximal algebraic multiplicity. The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Chişinău, August 22-25, 2012. Communications., pag. 218-219.**

29. **Vacaraş O. Cubic systems with a straight line of maximal infinitesimal multiplicity. The International Conference of Young Researchers, Xth edition. Scientific abstracts, Chişinău, November 23, 2012, pag. 127.**

30. **Vacaraş O. Cubic systems with a real invariant straight line of maximal integrable multiplicity. International Conference: Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE 2013), Abstracts, August 18-22, 2013, Chişinău, p. 93.**

31. **Vacaraş O. Cubic differential systems with two invariant straight line of multiplicity $m(6;1)$. Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor**

Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, 10 martie 2014, Chişinău, p. 14.

32. **Vacaraş O. Cubic differential systems with two invariant straight line of multiplicity** $m(2;5)$. **Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, 10 martie, 2015, Chişinău, p.27.**

33. **Vacaraş O. Cubic differential systems with two affine real invariant straight lines, both of multiplicity three, and the line of infinity of multiplicity one. Conferinţa ştiinţifică naţională cu participare internaţională. Învăţământul superior din Republica Moldova la 85 ani, 24-25 septembrie 2015, Chişinău, p.53.**

34. **Vacaraş O. Cubic differential systems with two affine real non-parallel invariant straight lines of maximal multiplicity. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat., 2015, No. 3(79), 79–101.**

35. **Vacaraş O. Maximal multiplicity of the line at infinity for cubic differential systems with two real parallel invariant straight lines. International Conference: Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE 2016), Abstracts, June 23-26, 2016, Chişinău, p. 70.**

C.Z.U: 517.925

ADNOTARE

Vacaraş Olga, "Sisteme cubice de ecuaţii diferenţiale cu două şi trei drepte invariante de multiplicitate maximală", teză de doctor în ştiinţe matematice, Chişinău, 2017.

Teza constă din introducere, 3 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie din 95 titluri, 137 pagini de text de bază. La tema tezei sunt publicate 17 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte-cheie: sistem cubic de ecuaţii diferenţiale, dreaptă invariantă, multiplicitatea unei curbe algebrice invariante, sistem perturbat, integrabilitate Darboux.

Domeniul de studiu al tezei: teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. Obiectul de studiu al lucrării este sistemul cubic de ecuaţii diferenţile cu coeficienţi reali.

Scopul şi obiectivele lucrării: determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante pentru sistemele diferenţiale polinomiale; clasificarea sistemelor cubice cu una, cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală; studierea problemei de integrabilitate Darboux pentru sistemele obţinute.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică constă în studiul sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu infinitul nedegenerat ce posedă cel mult trei drepte invariante (enumerând şi dreapta de la infinit) multiple, precum şi în determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante pentru sistemele cubice şi estimarea multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante pentru sistemele polinomiale de gradul n, $n \geq 2$.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu una (cea de la infinit), cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală şi construirea în cazul sistemelor cubice cu drepte invariante reale a sistemelor perturbate corespunzătoare formelor canonice.

Semnificaţia teoretică: rezultatele obţinute în teză sunt noi şi reprezintă o continuare a studiului sistemelor cubice cu drepte invariante.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice: rezultatele tezei pot fi folosite: în investigaţiile ulterioare ale sistemelor cubice cu curbe algebrice invariante, în calitate de suport pentru perfectarea cursurilor opţionale universitare şi post-universitare, în studiul diverselor modele matematice ce descriu unele fenomene din fizică, chimie, biologie, economie ş. a.

УДК 517.925

АННОТАЦИЯ

на диссертацию Вакараш Ольга “Кубические дифференциальные системы с двумя и тремя инвариантными прямыми максимальной кратности”, Кишинев, 2017.

Диссертация представлена на соискание ученой степени доктора математических наук по специальности 111.02 – дифференциальные уравнения. Она состоит из введения, 3-х глав, общих выводов и рекомендаций, 95 источников литературы, 137 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 17 научных работах.

Ключевые слова: кубическая система дифференциальных уравнений, инвариантная прямая, кратность алгебраической инвариантной кривой, возмущенная система, интегрируемость Дарбу.

Область исследования: качественная теория дифференциальных уравнений. Объект исследования – кубическая система дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами.

Цель исследования: определение максимальной кратности одной инвариантной прямой для полиномиальных дифференциальных систем; классификация кубических систем с одной, двумя и тремя инвариантными прямыми максимальной кратности; исследование проблемы интегрируемости Дарбу для полученных систем.

Научная новизна и оригинальность: состоит в исследовании кубических систем дифференциальных уравнений с невырожденной бесконечностью имеющих не более трех кратных инвариантных прямых (считая и прямую на бесконечности), а также в определении максимальной кратности инвариантной прямой для кубических систем и оценке максимальной алгебраической кратности инвариантной прямой для полиномиальных систем порядка n, $n \geq 2$.

Главная решенная задача: состоит в классификации кубических систем с одной, двумя и тремя инвариантными прямыми максимальной кратности и построении в случае кубических систем с действительными прямыми возмущенных систем соответствующих каноническим формам.

Теоретическая значимость: полученные результаты являются новыми и представляют собой продолжение исследования кубических систем.

Внедрение научных результатов: результаты настоящей работы могут быть использованы в исследовании кубических систем с инвариантными алгебраическими кривыми, в разработке факультативных курсов в ВУЗах а также пост-университетских курсов, в изучении различных математических моделей.

C.Z.U: 517.925

ANNOTATION

Vacaraş Olga, “Cubic systems of differential equations with two and three invariant straight lines of maximal multiplicity”, doctoral thesis in mathematical sciences, Chisinau, 2017.

Thesis consists of an introduction, 3 chapters, general conclusions and recommendations, bibliography of 95 titles, 137 pages of basic text. Obtained results are published in 17 scientific papers.

Keywords: cubic differential system, invariant straight line, multiplicity of an algebraic invariant curve, perturbed system, Darboux integrability.

Field of study: qualitative theory of differential equations. The subject of study is the cubic system of differential equations with real coefficients.

The purpose and objectives: establishing the maximal multiplicity of an invariant straight line for differential polynomial systems; to give a classification of cubic systems with one, with two and with three invariant straight lines of maximal multiplicity; studying the problem of Darboux integrability for the obtained systems.

Scientific novelty and originality consists in the study of cubic systems of differential equations with non-degenerate infinity, having at most three multiple invariant straight lines (including the line at infinity) and in the establishing the maximal multiplicity of an invariant straight line for cubic systems and in the estimating the maximal algebraic multiplicity of an invariant straight line for polynomial systems of degree n, $n \geq 2$.

The important scientific problem solved consists in the classification of cubic systems with one (the line at infinity), with two and with three invariant straight lines of maximal multiplicity and the construction of the perturbed cubic systems corresponding to the canonical forms in the case of the real invariant straight lines.

The theoretical significance: the obtained results in this thesis are new and are a continuation of the study of the cubic systems with invariant straight lines.

Implementation of the scientific results: the results of this thesis can be used: in the further investigations of cubic systems with invariant algebraic curves, as a support for teaching optional courses in higher education, in the study of some mathematical models which describe processes in physics, chemistry, biology, economy and others.

VACARAŞ OLGA

SISTEME CUBICE DE ECUAŢII DIFERENŢIALE CU DOUĂ ŞI TREI DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE MAXIMALĂ

111.02 – ECUAŢII DIFERENŢIALE

Autoreferatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar:	Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset.	Tirajul
Coli de tipar:	Comanda nr.

Tipografia U.P.S. " Ion Creangă", str. I. Creangă, nr.1, MD 2069