ACADEMIA DE ŞTIINŢE A MOLDOVEI
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 517.925

VACARAŞ OLGA

SISTEME CUBICE DE ECUAŢII DIFERENŢIALE CU DOUĂ ŞI TREI DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE MAXIMALĂ

111.02 – ECUAŢII DIFERENŢIALE

Teză de doctor în ştiinţe matematice

Conducători ştiinţifici:

Şubă Alexandru,
doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar

Romanovski Valery,
doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar (Slovenia)

Autorul:

CHIŞINĂU, 2017

CUPRINS:

C.Z.U: 517.925

ADNOTARE

Vacaraş Olga, "Sisteme cubice de ecuaţii diferenţiale cu două şi trei drepte invariante de multiplicitate maximală", teză de doctor în ştiinţe matematice, Chişinău, 2017.

Teza constă din introducere, 3 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie din 95 titluri, 137 pagini de text de bază. La tema tezei sunt publicate 17 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte-cheie: sistem cubic de ecuaţii diferenţiale, dreaptă invariantă, multiplicitatea unei curbe algebrice invariante, sistem perturbat, integrabilitate Darboux.

Domeniul de studiu al tezei: teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. Obiectul de studiu al lucrării este sistemul cubic de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi reali.

Scopul şi obiectivele lucrării: determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante pentru sistemele diferenţiale polinomiale; clasificarea sistemelor cubice cu una, cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală; studierea problemei de integrabilitate Darboux pentru sistemele obţinute.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică constă în studiul sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu infinitul nedegenerat ce posedă cel mult trei drepte invariante (enumerând şi dreapta de la infinit) multiple, precum şi în determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante pentru sistemele cubice şi estimarea multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante pentru sistemele polinomiale de gradul n, $n \geq 2$.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu una (cea de la infinit), cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală şi construirea în cazul sistemelor cubice cu drepte invariante reale a sistemelor perturbate corespunzătoare formelor canonice.

Semnificaţia teoretică: rezultatele obţinute în teză sunt noi şi reprezintă o continuare a studiului sistemelor cubice cu drepte invariante.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice: rezultatele tezei pot fi folosite: în investigaţiile ulterioare ale sistemelor cubice cu curbe algebrice invariante, în calitate de suport pentru perfectarea cursurilor opţionale universitare şi post-universitare, în studiul diverselor modele matematice ce descriu unele fenomene din fizică, chimie, biologie, economie ş. a.

УДК 517.925

АННОТАЦИЯ

на диссертацию Вакараш Ольга “Кубические дифференциальные системы с двумя и тремя инвариантными прямыми максимальной кратности”, Кишинев, 2017.

Диссертация представлена на соискание ученой степени доктора математических наук по специальности 111.02 – дифференциальные уравнения. Она состоит из введения, 3-х глав, общих выводов и рекомендаций, 95 источников литературы, 137 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 17 научных работах.

Ключевые слова: кубическая система дифференциальных уравнений, инвариантная прямая, кратность алгебраической инвариантной кривой, возмущенная система, интегрируемость Дарбу.

Область исследования: качественная теория дифференциальных уравнений. Объект исследования – кубическая система дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами.

Цель исследования: определение максимальной кратности одной инвариантной прямой для полиномиальных дифференциальных систем; классификация кубических систем с одной, двумя и тремя инвариантными прямыми максимальной кратности; исследование проблемы интегрируемости Дарбу для полученных систем.

Научная новизна и оригинальность: состоит в исследовании кубических систем дифференциальных уравнений с невырожденной бесконечностью имеющих не более трех кратных инвариантных прямых (считая и прямую на бесконечности), а также в определении максимальной кратности инвариантной прямой для кубических систем и оценке максимальной алгебраической кратности инвариантной прямой для полиномиальных систем порядка n, $n \geq 2$.

Главная решенная задача: состоит в классификации кубических систем с одной, двумя и тремя инвариантными прямыми максимальной кратности и построении в случае кубических систем с действительными прямыми возмущенных систем соответствующих каноническим формам.

Теоретическая значимость: полученные результаты являются новыми и представляют собой продолжение исследования кубических систем.

Внедрение научных результатов: результаты настоящей работы могут быть использованы в исследовании кубических систем с инвариантными алгебраическими кривыми, в разработке факультативных курсов в ВУЗах а также пост-университетских курсов, в изучении различных математических моделей.

C.Z.U: 517.925

ANNOTATION

Vacaraş Olga, "Cubic systems of differential equations with two and three invariant straight lines of maximal multiplicity", doctoral thesis in mathematical sciences, Chisinau, 2017.

Thesis consists of an introduction, 3 chapters, general conclusions and recommendations, bibliography of 95 titles, 137 pages of basic text. Obtained results are published in 17 scientific papers.

Keywords: cubic differential system, invariant straight line, multiplicity of an algebraic invariant curve, perturbed system, Darboux integrability.

Field of study: qualitative theory of differential equations. The subject of study is the cubic system of differential equations with real coefficients.

The purpose and objectives: establishing the maximal multiplicity of an invariant straight line for differential polynomial systems; to give a classification of cubic systems with one, with two and with three invariant straight lines of maximal multiplicity; studying the problem of Darboux integrability for the obtained systems.

Scientific novelty and originality consists in the study of cubic systems of differential equations with non-degenerate infinity, having at most three multiple invariant straight lines (including the line at infinity) and in the establishing the maximal multiplicity of an invariant straight line for cubic systems and in the estimating the maximal algebraic multiplicity of an invariant straight line for polynomial systems of degree n, $n \geq 2$.

The important scientific problem solved consists in the classification of cubic systems with one (the line at infinity), with two and with three invariant straight lines of maximal multiplicity and the construction of the perturbed cubic systems corresponding to the canonical forms in the case of the real invariant straight lines.

The theoretical significance: the obtained results in this thesis are new and are a continuation of the study of the cubic systems with invariant straight lines.

Implementation of the scientific results: the results of this thesis can be used: in the further investigations of cubic systems with invariant algebraic curves, as a support for teaching optional courses in higher education, in the study of some mathematical models which describe processes in physics, chemistry, biology, economy and others.

INTRODUCERE

Teza de faţă ţine de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. În ea sunt studiate sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale ce posedă drepte invariante multiple.

Actualitatea şi importanţa problemei abordate. Teoria ecuaţiilor diferenţiale este un domeniu fundamental al matematicii ce are numeroase aplicaţii în diverse domenii ale ştiinţei şi tehnicii, precum: mecanică, astronomie, termodinamică, optică, chimie, biologie etc. Anume prin faptul, că majoritatea fenomenelor şi proceselor din lumea înconjurătoare se modelează cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale, se explică necesitatea dezvoltării teoriei acestora. Drept exemplu ne pot servi sistemele diferenţiale de tip Lotka-Voltera caracterizate prin existenţa a cel puţin două drepte invariante şi care descriu evoluţia în timp a interacţiunii dintre specii, a desfăşurării unor reacţii chimice ş.a.

La început atenţia cercetătorilor era îndreptată spre aflarea soluţiei generale a ecuaţiilor şi exprimarea acesteia prin funcţii elementare. Dar, cu timpul, s-a dovedit că clasa ecuaţiilor diferenţiale integrabile în cuadraturi este foarte îngustă. Astfel, la finele secolului 19 şi începutul secolului 20, în lucrările clasice ale lui H. Poincaré şi A. M. Lyapunov ia naştere teoria calitativă a ecuaţiilor difrenţiale ce constă în determinarea comportării traiectoriilor fără a recurge nemijlocit la integrarea ecuaţiilor.

Problemele de bază ale teoriei calitative a sistemelor diferenţiale sunt legate de determinarea comportării curbelor integrale în vecinătatea punctelor singulare, de delimitare a centrului de focar, de existenţa, numărul şi poziţia reciprocă a ciclurilor limită, de construire a integralelor prime.

Clasificarea punctelor singulare şi studierea comportării traiectoriilor în vecinătatea lor a fost efectuată de H. Poincaré, A. Lyapunov, I. Bendixon, M. Frommer, H. Dulac. Metodele elaborate de aceşti matematicieni au fost în continuare dezvoltate de A. Andronov, E. Leontovich, I. Gordon şi A. Mayer în [1]. Mai târziu, la îmbunătăţirea lor şi-au adus aportul şi alţi cercetători, printre care J. Argemi, H. Forster, S. Lefschtz, F. Takens, V. Arnold, L. Pontryagin, N. Bautin, F. Dumortier, A. Andreev, A. Bruno ş.a.

Problema centrului şi a focarului pentru sistemele pătratice şi cubice este abordată în lucrările lui H. Dulac, W. Kapteyn, M. Frommer, N. Saharnicov, I. Kukles, C. Sibirschi, A. Sadovskii, K. Malkin, I. Shirov, D. Boularas, N. Vulpe, D. Cozma, A. Şubă, H. Żołądek, R. Kooij şi alţii.

Existenţa, numărul şi poziţia reciprocă a ciclurilor limită ale sistemelor diferenţiale polinomiale sunt investigate în lucrările lui N. Bautin, L. Cherkas, W. Coppel, W. van Horssen, J. Reyn, F. Dumortier, R. Roussarie, C. Rousseau, V. Gaiko, L. Gilevici, V. Amelkin, N. Lukaşevici, A. Sadovskii, A. Zegeling, R. Kooij, Suo Guagilan, Sun Jifang, Ye Yanqian, A. Grini şi alţii.

O metodă importantă de integrare a sistemelor diferenţiale polinomiale este metoda Darboux, care constă în construcţia integralei prime prin folosirea curbelor algebrice invariante. Metoda Darboux este dezvoltată în lucrările lui J. Chavarriga, J. Llibre ([42]), J. Sotomayor, C. Christopher, J. Pereira, D. Schlomiuk, R. Kooij. În aceste lucrări la formarea integralei prime, pe lângă curbele algebrice invariante, se iau în consideraţie funcţiile exponenţiale invariante şi punctele singulare independente.

De problema clasificării topologice a sistemelor diferenţiale cubice şi a construcţiei portretelor de fază corespunzătoare s-au ocupat W. Buchel, A. Berlinski, J. Reyn, R. Kooij, P. de Jager, J. Artes în [3], J. Llibre, T. Date, N. Vulpe, D. Schlomiuk, D. Cozma, A. Şubă, V. Puţuntică, A. Cima, B. Colla în [22] şi alţii.

La investigarea sistemelor diferenţiale cubice cu curbe algebrice invariante şi, în particular, cu drepte invariante, şi-au adus aportul J. Artes, B. Grünbaum, J. Llibre, C. Christopher, J. Pereira, T. Druzhkova, J. H. Grace, A. Young, R. Lyubimova, M. Popa, C. Sibirschi, D. Schlomiuk, N. Vulpe, J. Sokulski, Zhang Xiang, R. Kooij, D. Cozma, A. Şubă, V. Puţuntică, V. Repeşco, C. Bujac etc.

Se ştie, că un sistem cubic nedegenerat de ecuaţii diferenţiale are în partea finită a planului fazic cel mult opt drepte invariante. Cercetarea calitativă a sistemelor cubice cu exact şapte şi a celor cu exact opt drepte invariante reale şi distincte a fost efectuată de către R. Lyubimova [44]. În lucrarea lui J. Llibre şi N. Vulpe [41] la investigarea sistemelor cubice cu drepte invariante s-a ţinut cont de multiplicitatea acestora, precum şi de dreapta de la infinit. Studiul complet al sistemelor cubice cu drepte invariante afine de multiplicitate paralelă totală egală cu şapte a fost efectuat de către A. Şubă, V. Repeşco şi V. Puţuntică ([71], [72], iar al sistemelor cu drepte invariante de multiplicitate totală opt, ţinându-se cont şi de dreapta de la infinit - de către N. Vulpe şi C. Bujac ([12], [11], [7], [9]). Formele canonice şi portretele fazice pentru sistemele cubice cu şase drepte invariante reale de două şi trei direcţii au fost obţinute de V. Puţuntică şi A. Şubă în [51, 52], iar pentru sistemele cubice cu infinitul degenerat şi care posedă drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu cinci sau cu şase au fost aduse de A. Şubă şi V. Repeşco ([55]).

În lucrarea de faţă sunt studiate sistemele cubice ce posedă drepte invariante de multiplicitate sumară maximală. La calcularea numărului de drepte invariante şi a multiplicităţilor lor se ia în vedere şi linia de la infinit.

Scopul şi obiectivele lucrării. Scopul principal al lucrării constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale ce posedă drepte invariante de multiplicitate maximală.

Realizarea acestui scop a fost însoţită de următoarele obiective:

– determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante reale pentru sistemul cubic;

– determinarea multiplicităţii maximale a dreptei invariante de la infinit pentru sistemul cubic;

– clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante de multiplicitate maximală;

– clasificarea sistemelor cubice cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală;

Metodologia cercetării ştiinţifice. În lucrare au fost aplicate metodele teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale şi metodele algebrei computaţionale.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. Până-n prezent, din punct de vedere calitativ, au fost studiate sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale cu şapte şi cu opt drepte invariante [41], [44], [7], [11], [12].

În această lucrare au fost cercetate sistemele cubice cu infinitul nedegenerat ce posedă cel mult trei drepte invariante multiple, ţinându-se cont şi de dreapta de la infinit. A fost efectuată clasificarea afină a sistemelor cubice cu cel mult trei drepte invariante distincte de multiplicitate maximală şi construite sistemele cubice perturbate corespunzătoare formelor canonice.

În lucrare au fost obţinute următoarele rezultate:

– a fost estimată multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine pentru sistemele polinomiale de gradul n;

– a fost determinată multiplicitatea maximală a unei drepte invariante afine şi a dreptei invariante de la infinit pentru sistemul cubic;

– a fost efectuată clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante de multiplicitate maximală;

– a fost efectuată clasificarea sistemelor cubice cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu una (cea de la infinit), cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală şi construirea în cazul sistemelor cubice cu drepte invariante reale a sistemelor perturbate corespunzătoare formelor canonice.

Semnificaţia teoretică. În această teză pentru prima dată s-a pus şi s-a rezolvat problema de determinare în clasa sistemelor diferenţiale cubice a multiplicităţii maximale a unei drepte invariante afine, a dreptei de la infinit, a stabilirii consecutivităţilor maximale de multiplicităţi, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al sistemelor cubice ce posedă drepte invariante.

Valoarea aplicativă a lucrării. Această lucrare poartă un caracter teoretic, însă ea are şi largi perspective aplicative. Rezultatele obţinute pot fi incluse în programele cursurilor opţionale ţinute studenţilor şi masteranzilor facultăţilor de matematică şi fizică. La fel, ele se vor lua în calcul în studiul de mai departe al sistemelor cubice. Ultimele sisteme servesc drept modele matematice: al evoluţiei în timp a interacţiunii dintre specii în biologie; de cuplare a undelor în fizica lazerului; de mişcare a electronilor, ionilor şi neutronilor în fizica plasmei; a instabilităţii convective în problema Benard din hidrodinamică ş.a.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere:

– estimaţia multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine pentru sistemele polinomiale de gradul n;

– multiplicitatea maximală a unei drepte invariante reale pentru sistemul cubic;

– multiplicitatea maximală a dreptei invariante de la infinit pentru sistemul cubic;

– clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante de multiplicitate maximală;

– clasificarea sistemelor cubice cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală;

Implementarea rezultatelor ştiinţifice.

Rezultatele obţinute în teză pot fi aplicate:

- în investigaţiile ulterioare ale sistemelor diferenţiale cubice ce posedă drepte invariante;

- în studiul diferitor modele matematice ce descriu unele procese din fizică, chimie, medicină ş.a.;

- drept suport pentru teme de masterat şi pot constitui conţinutul unor cursuri opţionale pentru studenţii şi masteranzii de la specialităţile matematice.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele principale ale lucrării au fost raportate şi aprobate la:

– The 20^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), August 22-25, 2012, Chişinău;

– The Xth International Conference of Young Researchers, November 23, 2012, Chişinău;

– International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), August 18-22, 2013, Chişinău;

– The 21st Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), September 19-22, 2013, Bucureşti, Romania;

– The 9th International Conference on Applied Mathematics (ICAM), September 25-28, 2013, Baia-Mare, Romania;

– Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, 10 martie, 2014, Chişinău;

– IV International Hahn Conference, June 30 -July 5, 2014, Chernivtsi, Ukraine;

– Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, August 19-23, 2014, Chişinău;

– Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor: Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, 10 martie, 2015, Chişinău;

– International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), July 2-5, 2015, Chişinău;

– Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), 17-20 September, 2015, Suceava, Romania;

– Conferinţa ştiinţifică naţională cu participare internaţională. Învăţământul superior din Republica Moldova la 85 ani, 24-25 septembrie 2015, Chişinău;

– International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), June 24-26, 2016, Chişinău;

– Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), September 15-18, 2016, Craiova, Romania;

– The International Scientific Conference: Differential-Functional Equations and their Application, September 28-30, 2016, Chernivtsi, Ukraine;

– seminarul ”Ecuaţii Diferenţiale şi Algebre” din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chişinău) (2012-2017);

– seminarul din cadrul catedrei Ecuaţii Diferenţiale, Facultatea Matematică şi Mecanică, Universitatea de Stat din Belarus, Minsk, 2014, 2016.

Publicaţii. Rezultatele principale ale tezei au fost publicate în 17 lucrări: 2 articole ştiinţifice [79, 89] (un articol fără coautor), o lucrare în materialele Conferinţei IMCS-50 ([76]) şi 14 teze ale comunicărilor la conferinţe ştiinţifice [83, 84, 73, 74, 85, 75, 86, 77, 78, 87, 88, 80, 81, 90] (7 fără coautor).

Sumarul compartimentelor tezei:

În **primul capitol**, format din patru secţiuni, sunt enunţate rezultatele clasice şi recente ce ţin de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. Se face o analiză comparativă a situaţiei existente în domeniu, se formulează problema de cercetare şi direcţiile de soluţionare a ei.

În **capitolul II**, format din cinci secţiuni, pentru sistemele polinomiale de gradul n este obţinută o estimaţie a multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine. În clasa sistemelor polinomiale de grad mai mic ca patru este determinată multiplicitatea maximală atât a unei drepte invariante afine, cât şi a dreaptei invariante de la infinit. Folosind grupul afin de transformări al planului de faze şi rescalarea timpului este efectuată clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante distincte (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală maximală, iar în **capitolul III**, format din trei secţiuni, este efectuată clasificarea sistemelor cubice ce posedă trei drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate maximală. Pentru această clasă de sisteme cubice sunt aduse formele canonice, iar în cazul dreptelor reale şi perturbările sistemelor respective, necesare pentru multiplicitatea geometrică.

În final, sunt expuse concluziile generale şi recomandări.

1. ANALIZA SITUAŢIEI ÎN DOMENIUL SISTEMELOR DIFERENŢIALE POLINOMIALE CU DREPTE INVARIANTE

În acest compartiment sunt descrise rezulatele clasice şi recente ale teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale folosite în această teză. Se face o analiză comparativă a situaţiei existente în domeniu, se formulează problema de cercetare şi direcţiile de soluţionare a ei.

1.1. Estimaţia numărului de drepte invariante pentru sistemele diferenţiale polinomiale

În prezent, sistemele de ecuaţii diferenţiale polinomiale sunt supuse unui studiu intens de către mai mulţi cercetători, având drept motivaţie interesul aplicativ, deoarece aceste sisteme servesc ca modele matematice: al evoluţiei în timp a interacţiunii dintre specii în biologie; de cuplare a undelor în fizica lazerului; de mişcare a electronilor, ionilor şi neutronilor în fizica plasmei; a instabilităţii în problema Benard din hidrodinamică; a interacţiunii gazelor din mediile subterane etc.

Studiul calitativ al sistemelor diferenţiale $\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y)$ de gradul n, unde $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt polinoame cu coeficienţi reali în x şi y, iar $n = max(degP, degQ)$, este pe departe de a fi terminat. În particular, investigarea sistemelor diferenţiale polinomiale cu drepte invariante, deşi acestea formează cea mai simplă clasă în mulţimea curbelor algebrice invariante, nu este completă.

Un sistem diferenţial polinomial poate avea ori un număr infinit, finit sau vid de drepte invariante. În lucrara de faţă vom examina doar sistemele ce posedă un număr finit de drepte invariante.

În clasa sistemelor diferenţiale polinomiale de gradul n numărul maximal de drepte invariante (de direcţii al dreptelor invariante) îl vom nota cu $\alpha(n)\quad(\beta(n))$.

În anii 1980 matematicienii care se ocupau de studierea sistemelor polinomiale de ecuaţii diferenţiale au înaintat o ipoteză referitoare la estimaţia numărului de drepte invariante (vezi, de exemplu, [92], [95]). Conform acestei ipoteze pentru sistemele polinomiale de ecuaţii diferenţiale de gradul n numărul maxim posibil de drepte invariante $\alpha(n)$ pentru n număr par este egal cu $2n+1$, iar pentru n - impar este egal cu $2n+2$.

În 1993 Zhang Xikang în lucrarea [92] demonstrează ipoteza în cazurile $n = 3$ şi $n = 4$. Cu toate acestea, în demonstraţiile Dumnealui s-a comis o neexactitate, considerând că $\beta(n) \leq n+1$. Eroarea a fost corectată în 1998 (vezi [93]).

De problema existenţei dreptelor invariante pentru sistemele polinomiale s-a ocupat şi J. Sokulski, demonstrând şi el în 1996 că pentru $n = 4$ numărul maxim de drepte invariante reale distincte este 9 (vezi [63]), adică ipoteza este justă.

În [4] J. C. Artés, B. Grünbaum şi J. Llibre au arătat că ipoteza anunţată mai sus nu este justă pentru $n > 4$. Mai exact, au demonstrat că $\alpha(5) = 14$ şi au adus contraexemple pentru $n \in \{6,7,...,20\}$. Mai mult ca atât, pentru dreptele invariante afine au demonstrat, că dacă n este număr par, atunci $2n+1 \leq \alpha(n) \leq 3n-1$, iar dacă n este impar, atunci $2n+2 \leq \alpha(n) \leq 3n-1$.

Într-o altă lucrare ([2]) J. C. Artés, şi J. Llibre au stabilit între numărul maxim de drepte invariate $\alpha(n)$ şi numărul maxim de direcţii $\beta(n)$ al dreptelor invariante o relaţie, dată de egalitatea $\beta(n) = \alpha(n-1)+1$. Ţinând cont că $\alpha(2) = 5$ şi $\alpha(3) = 8$, încă odată ne convingem, că inegalitatea $\beta(n) \leq n+1$, folosită de Zhang Xikang în cercetările sale, nu este justă.

Numărul maxim de drepte invariante, incluzând dreapta de la infinit şi multiplicităţile lor, pentru sistemele diferenţiale polinomiale de gradul n este $3n$. Numărul dat este atins, dacă se iau în consideraţie dreptele invariante reale şi complexe ale sistemului polinomial. Acest fapt ni-l demonstrează şi exemplul profesorului J. Llibre (comunicare privată): $\dot{x} = x^n,\ \dot{y} = y^n,\ n \geq 2$. Sistemul dat posedă dreptele invariante afine: $x = 0$, $y = 0$, fiecare de multiplicitatea n, dreapta $x-y=0$ şi dreptele complexe $x-\delta_j y = 0,\ j = \overline{1, n-2}$, unde δ_j sunt rădăcinile de ordinul n din unu şi distincte de 1.

Aşadar, ţinându-se cont de dreapta de la infinit, în clasa sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale ce posedă un număr finit de drepte invariante, numărul maxim al acestora este egal cu nouă. Clasificarea completă a sistemelor cubice ce posedă un număr maxim de drepte invariante, adică nouă, a fost efectuată de J. Llibre şi N. Vulpe în [41].

Infinitul pentru sistemele cubice reprezintă o dreaptă invariantă nesingulară în cazul când expresia $C_3(x,y) = yP_3(x,y) - xQ_3(x,y) \not\equiv 0$. În cazul când $C_3(x,y) \equiv 0$ infinitul este degenerat, adică constă doar din puncte singulare. Conform [70], sistemele cubice cu infinitul degenerat posedă cel mult şase drepte invariante. În [55] a fost efectuată clasificarea sistemelor cubice cu infinitul degenerat ce au drepte invariante de multiplicitate paralelă totală şase.

Menţionăm, că în teza de faţă sunt investigate sistemele cubice cu infinitul nedegenerat care admit drepte invariante de multiplicitate maximală.

Matematicianul chinez Dai Guoren în [31], deasemenea, a cercetat sistemele polinomiale cu drepte invariante. El a estimat numărul de drepte invariante ce au pantele diferite pentru $n \geq 3$, precum şi numărul celor paralele în cazul $n \geq 2$.

Estimaţia numărului de drepte invariante a sistemelor polinomiale diferenţiale care verifică anumite condiţii este o problemă actuală. Recent, matematicienii ruşi V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho şi D.S. Ushkho au arătat că câmpul vectorial polinomial de gradul n, $n \geq 3$, ce posedă un fascicol din $n+1$ drepte invariante şi un $n-$tuplu de drepte reciproc paralele nu poate avea mai mult de $2n+1$ $(2n+2)$ drepte invariante afine, dacă n este par (impar), adică pentru această clasă de câmpuri vectoriale are loc ipoteza, enunţată mai sus (vezi [82]).

1.2. Curbe algebrice invariante în studiul sistemelor diferenţiale polinomiale

Studiul sistemelor polinomiale de ecuaţii diferenţiale a început să ia amploare după publicarea lucrărilor clasice ale lui Darboux şi ale lui Poincaré, însă până-n prezent un numar mare de probleme încă nu-şi cunosc rezolvarea. Una dintre acestea este problema ciclurilor limită (partea a doua a problemei a 16-a a lui Hilbert). De fapt, în teoria calitativă a sistemelor diferenţiale polinomiale reale bidimensionale se consideră ca fiind principale următoarele trei probleme: problema determinării integralelor prime, a ciclurilor limită şi problema deosebirii centrului de focar.

Metoda lui Darboux de construire pentru sistemele diferenţiale polinomiale a integralelor prime cu ajutorul curbelor algebrice invariante a fost înalt apreciată de H. Poincaré şi a suscitat interesul şi a altor matematicieni. Ea îşi găseşte dezvoltarea în lucrările autorilor J. Chavarriga, J. Llibre, J. Sotomayor, C. Christopher, J. Pereira, D. Schlomiuk, A. Şubă, D. Cozma ş.a. În aceste lucrări la formarea integralei prime, pe lângă curbele algebrice invariante, se iau în vedere şi factorii exponenţiali, punctele singulare independente şi mărimile Lyapunov.

De la Poincaré încoace mai mulţi cercetători au abordat diverse probleme ce ţin de studiul calitativ al sistemelor polinomiale de ecuaţii diferenţiale ce posedă curbe algebrice invariante, în particular, drepte invariante. În cele ce urmează vom elucida unele studii şi rezultate referitoare la sistemele date ce au drepte invariante şi vom face referinţe la lucrările în care au fost realizate. Menţionăm, că sistemele diferenţiale cubice vor fi supuse unei analize mai detaliate, deoarece acestea sunt obiectul de studiu al tezei de faţă şi, desigur, vom descrie rezultatele, obţinute până-n prezent. La fel, comparativ cu ale noastre, vom expune direcţiile de cercetare, abordate de către alţi autori.

Existenţa dreptelor invariante. Determinarea condiţiile de existenţă a dreptelor invariante a constituit una dintre preocupările matematicienilor din ţara noastră. Astfel, M. Popa şi C. Sibirschi, în [48], [49] pentru unele sisteme polinomiale de ecuaţii diferenţiale au stabilit condiţiile centroafin-invariante de existenţă a dreptelor invariante omogene, iar condiţiile de existenţă a dreptelor invariante neomogene au fost stabilite în [50] şi [61]. În [50] se presupunea că sistemele pătratice examinate au cel puţin un punct singular de tip focar sau centru (focar slab(weak focus) sau focar fin (fine focus)). Pentru sistemele cubice cu focar slab în lucrările [26], [27], autori A. Şubă şi D. Cozma, sunt determinate condiţiile de existenţă a patru drepte invariante neomogene.

Drepte invariante şi cicluri limită. La determinarea pentru sistemele polinomiale de ecuaţii diferenţiale a existenţei şi a numărului maxim de cicluri limită mai mulţi cercetători au ţinut cont şi de faptul dacă aceste sisteme au sau nu curbe algebrice invariante. Astfel, pentru sistemul pătratic ce posedă două drepte invariante reale în [5] a fost demonstrat că nu are cicluri limită, iar în cazul a două drepte invariante complexe conjugate sistemul pătratic poate avea cel mult un ciclu limită (vezi [65]). Deasemenea, nu mai mult de un ciclu limită poate avea sistemul pătratic cu o dreaptă invariantă(vezi [18],[19],[56]).

Referitor la sistemele cubice, putem evidenţia următoarele rezultate. Sistemul cubic ce posedă cinci drepte invariante reale nu are cicluri limită ([30]). Cel mult un ciclu limită poate avea sistemul cubic cu patru drepte invariante reale sau cu două reale şi două complexe conjugate ([37],[38]). Două cicluri limită poate avea sistemul cubic cu patru drepte invariante complexe conjugate ([38], exemple cu mai multe cicluri nu se cunosc). În cazul sistemului cubic cu patru drepte invariante neomogene (la general vorbind, cu coeficienţi complecşi) ciclitatea centrului $(0,0)$ nu este mai mare ca unu ([27]).

Problema existenţei ciclurilor limită pentru sistemul diferenţial polinomial de gradul n ce au $n+1$ drepte invariante a fost studiată în [39]. Pentru o clasă de sisteme cubice ce posedă o dreapta invariantă în [94] a fost stabilită unicitatea ciclului limită. În [66] se arată că sistemul polinomial cu cel puţin $(n-1)(n+1)/2$ drepte invariante n-are cicluri limită (având în vedere estimaţia $\alpha(n) \leq 3n-1$, acest rezultat este valabil doar pentru $n \leq 5$).

Centre şi drepte invariante. Unele probleme de bază ale teoriei calitative a sistemelor diferenţiale polinomiale ţin de determinarea comportării curbelor integrale în vecinătatea punctelor singulare izolate. Printre aceste probleme se evidenţiază problema deosebirii centrului de focar. Se ştie, că dacă rădăcinile ecuaţiei caracteristice asociate punctului singular $O(0,0)$ sunt imaginare, atunci acesta poate fi de tip centru sau de tip focar (punct singular de speţa a doua). Problema deosebirii centrului de focar, numită pe scurt problema centrului, constă în determinarea condiţiilor asupra coeficienţilor membrilor din partea dreaptă a sistemului diferenţial polinomial ce asigură că punctul singular este de tip centru. Pentru sistemul pătratic problema centrului a fost pentru prima dată rezolvată de H. Dulac [34], iar pentru sistemul cubic simetric – de C. Sibirschi [62].

În caz general, adică când membrii din dreapta ai sistemului cubic conţin neliniarităţi de gradul doi şi de gradul trei, problema centrului nu este până-n prezent complet rezolvată deşi această problemă este supusă unui studiu intens în mai multe centre şiinţifice din diferite ţări şi îi sunt consacrate un număr impunător de lucrări.

În R. Moldova au fost elaborate următoarele metode de investigare a problemei centrului: metoda academicianului C.S. Sibirschi de determinare a condiţiilor invariante de existenţă a centrului; metoda utilizată de membrul corespondent A.Ş.M. N. Vulpe la efectuarea clasificării topologice centroafin-invariante a sistemelor diferenţiale ce posedă centru; metoda profesorului M. Popa de determinare a numărului de elemente ale bazei idealului Bautin prin aplicarea algeberelor Lie; metoda profesorilor A. Şubă şi D. Cozma de determinare a cuplurilor centrice ([68] ş. a.).

A. Şubă şi D. Cozma au dedicat un număr mare de lucrări ([27], [28], [29], [68], [69]) cercetării problemei centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu drepte invariante. În aceste lucrări problema centrului a fost complet rezolvată pentru sistemele cubice cu cel puţin trei drepte invariante.

Pentru sistemele cubice cu două drepte invariante omogene şi o conică invariantă, precum şi pentru sistemele cubice cu două drepte paralele invariante şi o conică invariantă problema centrului a fost rezolvată în [24] (a se vedea şi lucrarea de totalizare [25]).

Clasificarea şi studiul calitativ al sistemelor diferenţiale cu drepte invariante. Studiul calitativ al sistemelor pătratice care posedă drepte invariante de multiplicitate totală mai mare sau egală cu trei a fost efectuat de D. Schlomiuk şi N. Vulpe. În articolele [58], [60] autorii au construit toate configuraţiile posibile a dreptelor invariante de o anumită multiplicitate. Mai mult decât atât, aplicând teoria invarianţilor algebrici au determinat condiţiile necesare şi suficiente pentru realizarea fiecăreia dintre configuraţiile construite.

Investigarea calitativă a sistemelor cubice cu exact şapte şi cu exact opt drepte invariante reale distincte a fost realizată de către R. Lyubimova în [44] şi [45].

Clasificarea tuturor sistemelor cubice cu un număr maximal de drepte invariante, considerându-se şi multiplicităţile lor, a fost efectuată de J. Llibre şi N. Vulpe în [41]. În această lucrare autorii au determinat 23 de configuraţii de drepte invariante. Mai mult decât atât, utilizând teoria invarianţilor algebrici a ecuaţiilor diferenţiale au determinat condiţiile afin-invariante necesare şi suficiente de realizare ale fiecărei configuraţii obţinute. O clasa nouă de sisteme cubice omisă în [41] a fost depistată şi construită în [8]. Integralele prime şi portretele fazice ale sistemelor ce posedă un număr maxim de drepte invariante au fost aduse în [10].

Studiul calitativ al sistemelor cubice de ecuaţii invariante cu şase şi cu şapte drepte invariante reale a fost realizat de V. Puţuntică împreună cu A. Şubă ([51], [52], [53]). La investigarea acestor clase de sisteme cubice s-a ţinut cont de numărul de direcţii al dreptelor invariante. De studiul şi clasificarea sistemelor cubice cu drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu şapte s-au ocupat A. Şubă, V. Repeşco şi V. Puţuntică ([71], [72]). V. Repeşco şi A. Şubă au studiat şi sistemele cubice cu infinitul degenerat ce posedă drepte invariante a căror multiplicitate paralelă este egală cu cinci sau cu şase.

Clasificarea completă a sistemelor cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală egală cu opt a fost dată de C. Bujac şi N. Vulpe ([7], [9], [11], [12], [13], [14]). Această clasificare conţine 51 de configuraţii de drepte invariante, pentru care au fost determinate condiţiile necesare şi suficiente de realizare ale lor, au fost construite formele canonice, precum şi perturbările formelor canonice. 17 dintre aceste configuraţii (clasa sistemelor cubice cu patru puncte singulare la infinit) coincid cu cele date de A. Şubă şi discipolii săi, care au ţinut cont doar de multiplicitatea paralelă a dreptelor invariante.

În această teză sunt studiate sistemele cubice cu drepte invariante multiple. Mai exact, în clasa sistemelor cubice cu infinitul nedegenerat este:

– determinată multiplicitatea maximală a unei drepte invariante afine şi a dreptei de la infinit;

– efectuată clasificarea sistemelor cubice cu două şi cu trei drepte invariante (enumerând şi dreapta de la infinit) de multiplicitate maximală.

Pentru realizarea acestor obiective se introduce noţiunea de consecutivitate maximală de multiplicităţi a dreptelor invariante $(m(\mu_1, ..., \mu_i, ..., \mu_n; \mu_\infty))$.

1.3. Rolul curbelor algebrice invariante în studiul integrabilităţii sistemelor diferenţiale polinomiale

Existenţa curbelor algebrice invariante joacă un rol important în determinarea integralelor prime ale sistemelor polinomiale diferenţiale.

În 1878, Darboux a publicat lucrarea [32] despre integrabilitatea ecuaţiilor diferenţiale polinomiale de ordinul întâi în care a introdus pentru aceste ecuaţii noţiunea de curbă algebrică invariantă. Această noţiune poate fi uşor adaptată pentru sistemele diferenţiale polinomiale $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$. Conform [32], o curbă algebrică $f(x,y) = 0$, unde f este un polinom din $\mathbb{C}[x,y]$, este *o curbă algebrică invariantă* pentru sistemul diferenţial, dacă există un aşa polinom $K(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, numit cofactorul curbei invariante $f(x,y) = 0$, încât are loc identitatea $\mathbb{X}(f) \equiv fK$. Cu $\mathbb{X}$ s-a notat câmpul vectorial $\mathbb{X} = (P,Q)$ asociat sistemului polinomial. Darboux a arătat, că integrabilitatea sistemelor polinomiale poate fi obţinută prin folosirea curbelor algebrice invariante. Ideea lui consta în construirea pentru sistemul diferenţial polinomial a integralei prime (a factorului integrant) de forma (numită şi forma Darboux) $\prod\limits_{i=1}^{p} f_i^{\alpha_i}$, unde f_i sunt polinoamele ce definesc curbele algebrice invariante ale sistemului dat, iar α_i nişte numere complexe oarecare. În particular, el a demonstrat, că dacă un sistem polinomial diferenţial de gradul n are p curbe algebrice invariante $f_i = 0$, cofactorii cărora K_i verifică pentru nişte numere oarecare $\alpha_i \in \mathbb{C}$, nu toate egale cu zero, şi $\rho \in \{0,1\}$, relaţia

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i K_i + \rho\, div(P,Q) = 0,$$

atunci sistemul are integrală primă ($\rho = 0$) sau factor integrant ($\rho = 1$) de formă Darboux. Cu $div(P,Q)$ s-a notat divergenţa sistemului. Mai mult ca atât, el a arătat, că dacă sistemul posedă cel puţin $p \geq n(n+1)/2$ curbe algebrice invariante, atunci acest sistem are factor integrant de forma $\mu = \prod\limits_{i=1}^{p} f_i^{\alpha_i}$, iar dacă $p \geq [n(n+1)/2] + 1$, atunci sistemul polinomial are integrală primă de forma $F = \prod\limits_{i=1}^{p} f_i^{\alpha_i}$ (vezi [32]). Se mai ştie, că în cazul $p \geq [n(n+1)/2] + 2$ sistemul are integrală primă raţională, adică constantele α_i sunt numere întregi (vezi [35]).

În ultimii ani teoria Darboux de integrabilitate a fost dezvoltată, actualizată şi extinsă asupra sistemelor de ordin mai mare ca doi. Astfel, o completare a acestei teorii poate fi considerat faptul, că împreună cu curbele algebrice invariante, se mai iau în vedere şi multiplicităţile acestora. Curbele invariante multiple generează unele funcţii exponenţiale

$exp(g_j/h_j)$, numite factori exponenţiali, ce fac parte din componenţa integralei prime (sau a factorului integrant): $\prod_{i=1}^{p} f_i^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{s} exp(g_j/h_j)$. Funcţiile $exp(g_j/h_j)$ satisfac unei ecuaţii similare celei din cazul polinoamelor f_i ce definesc curbele algebrice invariante $f_i = 0$ (vezi [20]). În astfel de situaţii se vorbeşte despre integrabilitatea Darboux generalizată sau în sens generalizat.

O altă direcţie de dezvoltarea a teoriei Darboux constă în faptul, că pe lângă curbele algebrice invariante, se examinează şi alte elemente sau proprietăţi ale sistemului diferenţial care conduc la integrabilitatea Darboux. De exemplu, în [15] se iau în consideraţie punctele singulare independente, iar în [67] - mărimile Lyapunov.

Se cunoaşte, că dacă un sistem cubic ($n = 3$) de ecuaţii diferenţiale admite 6 drepte invariante distincte, atunci, în caz general, sistemul dat are factor integrant format din aceste drepte, iar dacă sistemul cubic posedă cel puţin 7 drepte invariante distincte, atunci sistemul are integrală primă de tip Darboux. De aici urmează, că sistemele cubice ce posedă un număr maxim de drepte invariante, formele canonice ale cărora au fost construite în [41] şi [8], sunt integrabile. Sistemele cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt, studiate în [9], deasemenea sunt integrabile. Pentru o subclasă a acestor sisteme, şi anume, a acelor sisteme cubice cu drepte invariante afine de multiplicitate paralelă şapte, problema integrabilităţii a fost rezolvată mai înainte în [71], [72]. Mai mult ca atât, s-a adeverit că formele canonice ale sistemele cubice cu drepte invariante afine de multiplicitate paralelă şapte sunt afin-echivalente cu cele din clasa sistemelor cubice cu opt drepte invarinte, incluzând dreapta de la infinit, ce au la infinit patru puncte singulare distincte.

În teza de faţă este efectuată clasificarea sistemelor cubice cu cel mult trei drepte invariante (enumerându-se şi dreapta de la infinit) de multiplicitate maximală. Se arată, că sistemele cubice ce posedă o dreaptă invariantă afină de multiplicitate maximală ($m = 7$), sistemele cubice pentru care dreapta de la infinit e de multiplicitate maximală ($m_\infty = 7$), cât şi sistemele cubice cu două drepte invariante dinstincte de multiplicitate maximală ($m(7;1)$, $m(6;1)$, $m(5;4)$, $m(4;5)$, $m(3;5)$,$m(2;5)$, $m(1;7)$) sunt integrabile.

1.4. Multiplicitatea curbelor algebrice invariante pentru sistemele diferenţiale polinomiale

Pe parcursul a mai mulţi ani diferiţi cercetători s-au străduit să definească noţiunea de multiplicitate a unei curbe algebrice invariante. Astfel, în literatura de specialitate întâlnim mai multe tipuri de multiplicităţi: geometrică, algebrică, infinitezimală, integrabilă, holonomică (vezi [21], [57]).

Cu toate că legătura dintre soluţiile algebrice care se contopesc şi existenţa factorilor exponenţiali a fost utilizată de mai mulţi autori, la început, nu exista o teorie generală în acest sens. În special, cazul în care mai multe curbe fuzionează şi formează factori exponenţiali a fost în mare parte ignorat. Dificultatea constă în faptul, că având dat un câmp vectorial polinomial, nu este evident, dacă o curbă algebrică este multiplă sau nu, şi nici ce multiplicitate să i se atribuie.

H. Żołądek [1992] a dat o definiţie în termeni de multiplicitate locală în fiecare punct critic. Din păcate, definiţia nu este suficient de puternică pentru a garanta că curbele date pot fi efectiv produse prin bifurcare. Această definiţie ar fi cel mai aprope de multiplicitatea holonomică, dar numai luată în considerare la nivel local.

D. Schlomiuk [1997] defineşte noţiunea de multiplicitate geometrică a unei curbe invariante, respectând o anumită familie de câmpuri vetoriale. Cu toate acestea, nu este dat nici un mijloc eficient de calculare a acestei multiplicităţi în afară de inspectarea familiei însăşi.

O versiune simplificată a lanţului de ecuaţii care stau la baza definiţiei multiplicităţii infinitezimale a fost luată în considerare de Gröbner şi Knapp [1967].

C. Christopher, J.Llibre şi J.V. Pereira au consacrat o lucrare multiplicităţii curbelor algebrice invariante. În acestă lucrare ([21]) autorii au introdus o definiţie concretă a multiplicităţii curbelor algebrice invariante, numită multiplicitate infinitezimală, care este efectiv calculabilă şi au arătat că, având în vedere unele ipoteze, există o echivalenţă între această definiţie şi alte definiţii, aduse în lucrarea dată (multiplicitatea integrabilă, algebrică, geometrică, holonomică).

În [21] se consideră multiplicitatea infinetizimală ca fiind principală. Definiţia acestei multiplicităţi exprimă faptul, că existenţa unei curbe multiple implică nu doar curba, dar şi unele informaţii infinitezimale despre aceasta. Fie ε o mărime algebrică pentru care $\varepsilon^k = 0$ (sau putem considera că ε aparţine inelului $\mathbb{C}(\varepsilon)/(\varepsilon^k)$). Se spune că o curbă algebrică invariantă $f = 0$ are *multiplicitatea infinitezimală* k, dacă există aşa polinoame $f_0 = f, f_1, \ldots, f_{k-1}$, de grad nu mai mare ca gradul polinomului f, astfel încât $F = f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots + \varepsilon^{k-1} f_{k-1}$ satisface relaţia $\mathbb{X}(F) = F L_F$ în $\mathbb{C}[x, y, \varepsilon]/(\varepsilon^k)$, unde $\mathbb{X}$ este câmpul vectorial, $L_F \in \mathbb{C}[x, y, \varepsilon]/(\varepsilon^k)$.

Multiplicitatea integrabilă este definită prin intermediul factorilor exponenţiali asociaţi unei curbe invariante $f = 0$. Conform [21], se spune, că o curbă invariantă$f = 0$ are *multiplicitatea integrabilă* k, dacă această curbă generează $k-1$ factori exponenţiali de forma $exp(g_j/f^j)$, unde $j = 1, ..., k-1$, $deg(g_j) \leq jdeg(f)$, şi fiecare g_j nu este multiplu pentru f. Aceşti factori exponenţiali pot fi folosiţi la construcţia integralei prime sau a factorului integrant de tip Darboux.

În [21] *multiplicitatea algebrică* este dată cu ajutorul curbelor extactice care au fost indroduse de Pereira în 2001. O caracteristică importantă a acestor curbe constă în faptul, că ele pot fi calculate direct din determinantul unei matrici. Se spune că curba algebrică invariantă $f = 0$ are multiplicitatea algebrică egală cu k, dacă k este cel mai mare număr natuaral astfel că f^k divide determinantul dat şi, prin urmare, multiplicitatea algebrică este efectiv calculabilă.

Din punct de vedere geometric, autorii lucrării [21] afirmă, că o curbă are *multiplicitatea geometrică* k, dacă există aşa mici perturbaţii ale câmpului vectorial încât noile câmpuri posedă exact k curbe algebrice invariante dictincte ce bifurcă din curba $f = 0$.

În această lucrare se arată în mod special că există o echivalenţă naturală între punctul de vedere algebric şi punctul de vedere geometric, referitor la multiplicitatea unei curbe invariante. Mai mult decât atât, din punct de vedere algebric, este dată o metodă eficientă de calculare a multiplicităţii unei anumite curbe.

Este important de menţionat faptul, că autorii articolului ştiinţific [21] şi-au concentrat atenţia doar asupra multiplicităţii unei singure curbe invariante ireductibile, însă, în teza de faţă se studiază sistemele cubice cu mai multe drepte invariante multiple. Din aceste considerente, se cercetează multiplicitatea dreptelor invariante atât din punct de vedere algebric, cât şi geometric, urmărindu-se scopul de a arăta că multiplicităţile date coincid şi în cazul unui ansamblu de curbe algebrice invariante. Mai mult decât atât, se aplică definiţia multiplicităţii geometrice, dată de D. Schlomiuk, respectând clasa sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale.

De studiul sistemelor cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală nouă şi respectiv opt s-au ocupat N. Vulpe, J. Llibre şi C. Bujac. În lucrărilor lor s-a ţinut cont de multiplicitatea geometrică dată de D. Schlomiuk.

În lucrările cercetătorilor A. Şubă, V. Puţuntică şi V. Repeşco întâlnim noţiunea de multiplicitate paralelă. Ei consideră că o dreaptă invariantă $f(x, y) = 0$ are *multiplicitatea paralelă* $1 \leq k \leq 3$, dacă exisă un aşa polinom $R(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ încât are loc identitatea

$\mathbb{X}(f) = f^k R(x, y)$.

În articolele [71], [72] au fost studiate sistemele cubice cu drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu şapte, iar în [55] se investighează sistemele cubice cu infinitul degenerat ce posedă drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu şase.

În această teză, dacă nu se va specifica aparte, prin multiplicitatea unei drepte invariante se va considera multiplicitatea ei algebrică. Ţinând cont de lucrarea [21], în care s-a demonstrat, că în unele ipoteze generice, există o echivalenţă între tipurile de multiplicităţi, totuşi, pentru sistemul cubic vom determina mai întâi multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine, apoi şi multiplicităţile ei infinitezimale, integrabile şi geometrice.

1.5. Concluzii la capitolul întâi

În primul capitol sunt descrise principalele rezultate cu referire la sistemele diferenţiale polinomiale ce posedă drepte invariante şi este menţionat aportul mai multor matematicieni la dezvoltarea teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale. În baza analizei situaţiei în domeniul studierii sistemelor polinomiale diferenţiale putem menţiona, că cercetarea acestor sisteme este cu atât mai dificilă cu cât numărul de drepte invariante este mai mic.

În prezenta lucrare se continuă investigarea sistemelor cubice cu drepte invariante prin folosirea diverselor noţiuni de multiplicităţi a acestor drepte.

Realizarea prezentei teze a pretins atingerea următorului scop: clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale ce posedă drepte invariante de multiplicitate maximală.

În conformitate cu scopul enunţat au fost stabilite următoarele obiective ale cercetării:

– determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante reale pentru sistemul cubic;

– determinarea multiplicităţii maximale a dreptei invariante de la infinit pentru sistemul cubic;

– clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante de multiplicitate maximală;

– clasificarea sistemelor cubice cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală.

Totuşi, precum s-a adeverit şi în teza de faţă, pe lângă altele, o problemă neclarificată rămâne a fi problema determinării echivalenţei pe un ansamblu de curbe algebrice dintre noţiunile de multiplicitate algebrică şi cea geometrică şi se cere a fi studiată în cercetările ulterioare.

2. SISTEME CUBICE CU DOUĂ DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE MAXIMALĂ

2.1. Estimaţia în clasa sistemele diferenţiale polinomiale de gradul n a multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine

Considerăm sistemul diferenţial polinomial

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \quad GCD(P,Q) = 1 \tag{2.1}$$

şi câmpul vectorial

$$\mathbb{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.2}$$

asociat acestui sistem.

Notăm cu n gradul sistemului diferenţial (2.1), adică $n = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Dacă $n = 2$ ($n = 3$), atunci sistemul (2.1) se numeşte pătratic (cubic).

Fie $P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x,y)$, $Q(x,y) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x,y)$, unde $P_k(x,y) = \sum_{j+l=k} a_{jl}x^j y^l$, $Q_k(x,y) = \sum_{j+l=k} b_{jl}x^j y^l$. Vom examina sistemul (2.1) în presupunerile că

$$deg(GCD(P,Q)) = 0 \tag{2.3}$$

şi

$$yP_n(x,y) - xQ_n(x,y) \not\equiv 0. \tag{2.4}$$

Condiţia (2.3) înseamnă că membrii din partea dreaptă a sistemului (2.1) n-au factori comuni de grad mai mare ca zero, iar (2.4) înseamnă că infinitul pentru (2.1) nu este degenerat, adică nu constă numai din puncte singulare.

Definiţia 2.1.1. *O curbă algebrică $f = 0, f \in \mathbb{C}[x,y]$, se numeşte curbă algebrică invariantă pentru sistemul (2.1), dacă există un aşa polinom $K_f \in \mathbb{C}[x,y]$ încât $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ are loc identitatea*

$$\mathbb{X}(f) \equiv f(x,y)K_f(x,y). \tag{2.5}$$

În particular, o dreaptă $l \equiv ax+by+c=0,\ a,b,c \in \mathbb{C},\ (a,b) \neq (0,0)$, se numeşte *invariantă* pentru sistemul (2.1), dacă există un aşa polinom $K_l \in \mathbb{C}[x,y]$ încât are loc identitatea $aP(x,y)+bQ(x,y) \equiv (ax+by+c)K(x,y)$.

Definiţia 2.1.2. *Vom spune că o curbă algebrică invariantă $f=0$ de gradul d a sistemului* (2.1) *are multiplicitatea algebrică egală cu m, dacă m este cel mai mare număr natural astfel că f^m divide $E_d(\mathbb{X})$, unde*

$$E_d(\mathbb{X}) = det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_l \\ \mathbb{X}(v_1) & \mathbb{X}(v_2) & ... & \mathbb{X}(v_l) \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbb{X}^{l-1}(v_1) & \mathbb{X}^{l-1}(v_2) & ... & \mathbb{X}^{l-1}(v_l) \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

iar $v_1, v_2, ..., v_l$ este o bază a spaţiului vectorial al polinoamelor de gradul d: $\mathbb{C}_d[x,y]$.

În cazul dreptelor invariante, adică $d=1$, putem lua $v_1=1$, $v_2=x$, $v_3=y$ şi atunci

$$E_1(\mathbb{X}) = P \cdot \mathbb{X}(Q) - Q \cdot \mathbb{X}(P). \tag{2.7}$$

Polinomul $E_d(\mathbb{X})$ are în x şi y gradul (vezi [46])

$$\frac{1}{24}d(d+1)(d+2)[8+3(d+3)(n-1)]. \tag{2.8}$$

În cazul sistemelor cubice ($n=3$) şi a dreptelor invariante ($d=1$) avem $deg(E_1(\mathbb{X}))=8$.

Notăm cu $L(P,Q)$ mulţimea dreptelor invariante afine ale sistemului $\{(2.1),(2.3),(2.4)\}$; $m_a(l)$ multiplicitatea algebrică a dreptei $l \in L(P,Q)$;

$$M_a(n) = max\{m_a(l) | l \in L(P,Q), \max\{\deg(P), \deg(Q)\} = n\}.$$

Se cunoaşte că $M_a(n) \leq 3n-1$ [4].

Apare problema determinării multiplicităţii maximale a unei drepte afine invariante pentru sistemele diferenţiale polinomiale.

Teorema 2.1.1. *În clasa sistemelor polinomiale diferenţiale $\{$(2.1),(2.3),(2.4)$\}$ de gradul $n \geq 2$ au loc inegalităţile $3n-2 \leq M_a(n) \leq 3n-1$.*

Demonstraţie. Pentru sistemul

$$\dot{x} = x^n, \qquad \dot{y} = 1 + nx^{n-1}y. \tag{2.9}$$

dreapta $x=0$ este invariantă şi $E_1(\mathbb{X}) = n(n-1)yx^{3n-2}$. □

Sistemul (2.9) este Darboux integrabil şi are integrala primă

$$\mathcal{F} = \left(1 + (2n-1)x^{n-1}y\right)/x^{2n-1}.$$

Ipoteza 2.1.1. *În clasa sistemelor polinomiale diferenţiale* $\{(2.1),(2.3),(2.4)\}$ *de gradul* $n \geq 2$ *are loc egalitatea* $M_a(n) = 3n-2$.

2.2. Multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte afine în clasa sistemelor polinomiale de grad mai mic ca patru

2.2.1. Cazul sistemelor afine

În clasa sistemelor de forma

$$\dot{x} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y, \qquad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y \tag{2.10}$$

vom determina multiplicitatea algebrică maximală m a unei drepte invariante afine.

Fără a restrânge generalitatea, putem considera că această dreaptă coincide cu axa de coordonate Oy, adică $x = 0$. Atunci,

$$a_{00} = a_{01} = 0. \tag{2.11}$$

Pentru $\{(2.10), (2.11)\}$ avem

$$E_1(\mathbb{X}) = -a_{10}x(b_{00}(a_{10} - b_{01}) - b_{01}b_{10}x + b_{01}(a_{10} - b_{01})y).$$

Vom cere de la $E_1(\mathbb{X})$ ca să se dividă la x^2. Pentru aceasta este necesar ca:

$$b_{00}(a_{10} - b_{01}) = 0, \qquad b_{01}(a_{10} - b_{01}) = 0. \tag{2.12}$$

Ţinând cont de (2.11) şi de condiţia $GCD(P,Q) = 1$, adică $a_{10}(|b_{00}| + |b_{01}|) \neq 0$, din (2.12) obţinem $b_{01} = a_{10}$. Astfel, $E_1(\mathbb{X}) = a_{10}^2 b_{10} x^2$, şi sistemul (2.10) ia forma

$$\dot{x} = a_{10}x, \qquad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + a_{10}y, \;\; a_{10}b_{10} \neq 0. \tag{2.13}$$

Dacă în sistemul (2.13) $b_{10} = 0$, atunci el are o infinitate de drepte invariante.

Transformarea nedegenerată de coordonate $x \to \frac{1}{b_{10}}x$, $y \to \frac{1}{a_{10}}y$ $\left(x \to \frac{b_{00}}{b_{10}}x,\ y \to \frac{b_{00}}{a_{10}}y\right)$, dacă $b_{00} = 0$ $(b_{00} \neq 0)$ şi rescalarea timpului $t = \frac{\tau}{a_{10}}$ reduce (2.13) la forma:

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = a + x + y, \;\; a \in \{0; 1\}. \tag{2.14}$$

Din cele expuse mai sus urmează

Teorema 2.2.1. *Multiplicitatea algebrică a unei drepte invariante plane pentru sistemele afine nu este mai mare ca doi. Orice sistem afin care admite o dreaptă invariantă afină de multiplicitatea algebrică $m = 2$ poate fi scris sub forma* (2.14).

2.2.2. Cazul sistemelor pătratice

Considerăm sistemul pătratic nedegenerat de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases} \tag{2.15}$$

şi fie că pentru el dreapta $x = 0$ este invariantă, adică

$$a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0. \tag{2.16}$$

Pentru $\{(2.15), (2.16)\}$ expresia $E_1(\mathbb{X})$ arată astfel:

$$E_1(\mathbb{X}) = x(A_1(y) + A_2(y)x + A_3(y)x^2 + A_4(y)x^3 + A_5(y)x^4), \tag{2.17}$$

unde

$A_1(y) = -(b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2)(a_{10}^2 + a_{11}b_{00} - a_{10}b_{01} + (2a_{10}(a_{11} - b_{02}))y + (a_{11}(a_{11} - b_{02}))y^2);$
$A_2(y) = -3a_{10}a_{20}b_{00} + a_{20}b_{00}b_{01} - 2a_{11}b_{00}b_{10} + a_{10}b_{01}b_{10} + a_{10}b_{00}b_{11} + (-3a_{11}a_{20}b_{00} - 3a_{10}a_{20}\cdot$
$b_{01} + a_{20}b_{01}^2 + 2a_{20}b_{00}b_{02} - a_{11}b_{01}b_{10} + 2a_{10}b_{02}b_{10} - a_{11}b_{00}b_{11} + 2a_{10}b_{01}b_{11})y + (-3a_{11}a_{20}b_{01}-$
$-3a_{10}a_{20}b_{02} + 3a_{20}b_{01}b_{02} + 3a_{10}b_{02}b_{11})y^2 + (-3a_{11}a_{20}b_{02} + 2a_{20}b_{02}^2 + a_{11}b_{02}b_{11})y^3;$
$A_3(y) = -2a_{20}^2b_{00} - a_{10}a_{20}b_{10} + a_{20}b_{01}b_{10} - a_{11}b_{10}^2 + a_{20}b_{00}b_{11} + a_{10}b_{10}b_{11} + a_{10}^2b_{20} - 2a_{11}b_{00}\cdot$
$b_{20} + a_{10}b_{01}b_{20} + (-2a_{20}^2b_{01} - a_{11}a_{20}b_{10} + 2a_{20}b_{02}b_{10} - a_{10}a_{20}b_{11} + 2a_{20}b_{01}b_{11} - a_{11}b_{10}b_{11} + a_{10}\cdot$
$b_{11}^2 + 2a_{10}a_{11}b_{20} - a_{11}b_{01}b_{20} + 2a_{10}b_{02}b_{20})y + (-2a_{20}^2b_{02} - a_{11}a_{20}b_{11} + 3a_{20}b_{02}b_{11} + a_{11}^2b_{20})y^2;$
$A_4(y) = -a_{20}^2b_{10} + a_{20}b_{10}b_{11} + a_{10}a_{20}b_{20} + a_{20}b_{01}b_{20} - 2a_{11}b_{10}b_{20} + a_{10}b_{11}b_{20} + (-a_{20}^2b_{11} + a_{20}\cdot$
$b_{11}^2 + a_{11}a_{20}b_{20} + 2a_{20}b_{02}b_{20} - a_{11}b_{11}b_{20})y;$
$A_5(y) = b_{20}(a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20}).$

Condiţia $GCD(P,Q) = 1$ de nedegenerare a sistemului (2.15) şi identitatea în raport cu y: $A_1(y) \equiv 0$ ne conduc la relaţiile:

$$\begin{gathered} a_{10}^2 + a_{11}b_{00} - a_{10}b_{01} = 0, 2a_{10}(a_{11} - b_{02}) = 0, \\ a_{11}(a_{11} - b_{02}) = 0, |b_{00}| + |b_{01}| + |b_{02}| \neq 0. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Sistemul de relaţii (2.18) se realizează doar atunci când are loc cel puţin una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$a_{11} = a_{10} = 0, a_{20} \neq 0, \tag{2.19}$$

$$a_{11} = b_{02} = 0, b_{01} = a_{10}, a_{10} \neq 0, \tag{2.20}$$

$$b_{02} = a_{11}, b_{00} = \frac{a_{10}}{a_{11}}(b_{01} - a_{10}). \tag{2.21}$$

Vom examina aparte fiecare dintre condiţiile (2.19)-(2.21).

1. *Condiţiile* (2.19). În aceste condiţii avem

$$A_2(y) = a_{20}(b_{01} + 2b_{02}y)(b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2).$$

Deoarece $a_{20}(b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2) \not\equiv 0$, identitatea $A_2(y) \equiv 0$ are loc, dacă $b_{01} = b_{02} = 0$, de unde $A_3(y) = -a_{20}b_{00}(2a_{20} - b_{11})$. La rândul său, identitatea $A_3(y) \equiv 0$ se realizează, dacă $b_{11} = 2a_{20}$. Astfel se vine la sistemul

$$\dot{x} = a_{20}x^2, \qquad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + 2a_{20}xy, \ \ a_{20}b_{00} \neq 0, \tag{2.22}$$

pentru care $E_1(\mathbb{X}) = a_{20}^2x^4(b_{10} + 2b_{20}x + 2a_{20}y)$ şi $A_4(y) = a_{20}^2(b_{10} + 2a_{20}y) \not\equiv 0$. Prin urmare, multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ a sistemului (2.22) este exact egală cu patru. Transformarea de coordonate $x \to x, y \to \frac{b_{10}}{2b_{00}} + \frac{b_{20}}{b_{00}}x + \frac{a_{20}}{b_{00}}y$ şi rescalarea timpului $t = \frac{\tau}{a_{20}}$ reduce (2.22) la sistemul

$$\dot{x} = x^2, \qquad \dot{y} = 1 + 2xy. \tag{2.23}$$

2. *Condiţiile* (2.20). Identitatea

$$A_2(y) = -a_{10}(2a_{20}b_{00} - a_{10}b_{10} - b_{00}b_{11} + 2a_{10}(a_{20} - b_{11})y) \equiv 0$$

are loc, dacă

$$b_{11} = a_{20}, b_{10} = \frac{a_{20}b_{00}}{a_{10}}. \tag{2.24}$$

Deoarece $E_1(\mathbb{X}) = b_{20}x^3(a_{10} + a_{20}x)(2a_{10} + a_{20}x)$ şi $A_3(y) = 2a_{10}^2b_{20} \neq 0$, concludem, că în cazul dat, multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ nu poate fi mai mare decât trei.

3. *Condiţiile* (2.21). Avem $A_2(y) = -\frac{1}{a_{11}}(a_{10}+a_{11}y)(-3a_{10}^2a_{20}+4a_{10}a_{20}b_{01}-a_{20}b_{01}^2-2a_{10}a_{11}b_{10}$ $+a_{11}b_{01}b_{10}+a_{10}^2b_{11}-a_{10}b_{01}b_{11}+2a_{10}a_{11}(a_{20}-b_{11})y+a_{11}^2(a_{20}-b_{11})y^2)$ şi că identitatea $A_2(y) \equiv 0$ are loc dacă se verifică cel puţin una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$b_{11} = a_{20}, b_{01} = 2a_{10}, \tag{2.25}$$

$$b_{11} = a_{20}, b_{10} = \frac{a_{20}}{a_{11}}(b_{01} - a_{10}). \tag{2.26}$$

În condiţiile (2.25) (respectiv, (2.26)) avem că $A_3(y) = \frac{1}{a_{11}}(a_{10}^2(a_{11}b_{20} - a_{20}^2) + a_{11}b_{10}(2a_{10}a_{20} - a_{11}b_{10})) + 2a_{10}a_{11}b_{20}y + a_{11}^2 b_{20}y^2$ (respectiv, $A_3(y) = b_{20}(a_{10} + a_{11}y)(3a_{10} - b_{01} + a_{11}y)$). Atât în cazul (2.25), cât şi în cazul (2.26), identitatea $A_3(y) \equiv 0$ ne conduce la un sistem pătratic degenerat. Astfel, s-a demonstrat

Teorema 2.2.2. *Multiplicitatea algebrică a unei drepte invariante afine pentru sistemele pătratice nedegenerate nu poate fi mai mare ca patru. Orice sistem pătratic care admite o dreaptă invariantă afină de multiplicitatea algebrică patru, prin intermediul unei transformări afine nedegenerate de coordonate şi rescalarea timpului, poate fi scris sub forma* (2.23).

2.2.3. Cazul sistemelor cubice

Considerăm sistemul cubic diferenţial

$$\begin{cases} \dot{x} = P_0 + P_1(x,y) + P_2(x,y) + P_3(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dot{y} = Q_0 + Q_1(x,y) + Q_2(x,y) + Q_3(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{2.27}$$

unde $P_k(x,y) = \sum\limits_{j+l=k} a_{jl}x^j y^l$, $Q_k(x,y) = \sum\limits_{j+l=k} b_{jl}x^j y^l$.

Presupunem că

$$yP_3(x,y) - xQ_3(x,y) \not\equiv 0, \qquad GCD(P,Q) = 1, \tag{2.28}$$

adică la infinit sistemul (2.27) are cel mult patru puncte singulare distincte şi membrii din partea dreaptă a sistemului (2.27) nu au divizori comuni de grad mai mare decât 0.

Fie că sistemul (2.27) are o dreaptă invariantă reală l. Cu ajutorul unei transformări afine putem face ca dreapta l să fie descrisă de ecuaţia $x = 0$. Atunci, (2.27) ia forma:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ &\dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Pentru (2.29) determinantul $E_1(\mathbb{X})$ reprezintă un polinom de gradul 8 în x şi y şi-l vom scrie sub forma:

$$\begin{aligned} E_1(\mathbb{X}) = \; & x(A_1(y) + A_2(y)x + A_3(y)x^2 + A_4(y)x^3 + A_5(y)x^4 + \\ & + A_6(y)x^5 + A_7(y)x^6 + A_8(y)x^7). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Multiplicitatea algebrică $m_a(l)$ a dreptei invariante $x = 0$ a sistemului (2.29) este cel mult egală cu doi, dacă are loc identitatea $A_1(y) \equiv 0$. Avem $A_1(y) = -A_{11}(y) \cdot A_{12}(y)$, unde

$$\begin{aligned} A_{11}(y) &= b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2 + b_{03}y^3, \\ A_{12}(y) &= a_{10}^2 + a_{11}b_{00} - a_{10}b_{01} + 2a_{10}a_{11}y + 2a_{12}b_{00}y - 2a_{10}b_{02}y + a_{11}^2y^2 + 2a_{10}a_{12}y^2 + \\ &\quad + a_{12}b_{01}y^2 - a_{11}b_{02}y^2 - 3a_{10}b_{03}y^2 + 2a_{11}a_{12}y^3 - 2a_{11}b_{03}y^3 + a_{12}^2y^4 - a_{12}b_{03}y^4. \end{aligned}$$

Condiţiile (2.28) nu permit ca polinomul $A_{11}(y)$ să fie identic egal cu zero.

Fie $A_{12}(y) \equiv 0$, adică

$$\begin{aligned} & a_{10}^2 + a_{11}b_{00} - a_{10}b_{01} = 0, \ a_{11}(a_{12} - b_{03}) = 0, \\ & a_{10}a_{11} + a_{12}b_{00} - a_{10}b_{02} = 0, \ a_{12}(a_{12} - b_{03}) = 0, \\ & a_{11}^2 + 2a_{10}a_{12} + a_{12}b_{01} - a_{11}b_{02} - 3a_{10}b_{03} = 0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Sistemul de egalităţi (2.31) este compatibil, dacă şi numai dacă, are loc cel puţin una dintre următoarele patru serii de condiţii:

$$a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0; \tag{2.32}$$

$$a_{11} = a_{12} = b_{02} = b_{03} = 0, \ b_{01} = a_{10}, \ a_{10} \neq 0; \tag{2.33}$$

$$a_{12} = b_{03} = 0, \ b_{00} = a_{10}(b_{01} - a_{10})/a_{11}, \ b_{02} = a_{11}; \tag{2.34}$$

$$b_{00} = a_{10}(b_{02} - a_{11})/a_{12}, \ b_{01} = a_{10} + a_{11}(b_{02} - a_{11})/a_{12}, \ b_{03} = a_{12}. \tag{2.35}$$

Astfel, are loc

Lema 2.2.1. *Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ a sistemului $\{$(2.29), (2.28)$\}$ nu este mai mică ca doi atunci şi numai atunci, când are loc cel puţin una dintre seriile de condiţii* (2.32), (2.33), (2.34), (2.35).

Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ este mai mare decât doi, dacă are loc identitatea $A_2(y) \equiv 0$. Punând în polinomul $A_2(y)$ fiecare dintre seriile de condiţii (2.32)-(2.35), avem respectiv:

$$A_2(y) = -A_{11}(y) \cdot (a_{21}b_{00} - a_{20}b_{01} - 2a_{20}b_{02}y - (a_{21}b_{02} + 3a_{20}b_{03})y^2 - 2a_{21}b_{03}y^3); \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned} A_2(y) = & -2a_{10}a_{20}b_{00} - a_{21}b_{00}^2 + a_{10}^2b_{10} + a_{10}b_{00}b_{11} + 2a_{10}(-a_{10}a_{20} - 2a_{21}b_{00} + a_{10}b_{11} \\ & + b_{00}b_{12})y + 3a_{10}^2(b_{12} - a_{21})y^2; \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$A_2(y) = (a_{10} + a_{11}y)(3a_{10}^2a_{20}a_{11} - a_{10}^3a_{21} + 2a_{10}a_{11}^2b_{10} - 4a_{10}a_{20}a_{11}b_{01} + 2a_{10}^2a_{21}\cdot b_{01} - a_{11}^2b_{10}b_{01} + a_{20}a_{11}b_{01}^2 - a_{10}a_{21}b_{01}^2 - a_{10}^2a_{11}b_{11} + a_{10}a_{11}b_{01}b_{11} + 2a_{10}a_{11}(-a_{20}a_{11} + 2a_{10}a_{21} - 2a_{21}b_{01} + a_{11}b_{11} - a_{10}b_{12} + b_{01}b_{12})y - a_{11}^2(a_{20}a_{11} + a_{10}a_{21} + 2a_{21}b_{01} - a_{11}\cdot b_{11} - 2a_{10}b_{12} - b_{01}b_{12})y^2 + 2a_{11}^3(b_{12} - a_{21})y^3; \tag{2.38}$$

$$A_2(y) = (a_{10} + a_{11}y + a_{12}y^2)(a_{20}a_{11}^3 - a_{10}a_{11}^2a_{21} + 2a_{10}a_{20}a_{11}a_{12} + a_{11}^2a_{12}b_{10} + a_{10}a_{12}^2\cdot b_{10} - a_{10}a_{11}a_{12}b_{11} - 2a_{20}a_{11}^2b_{02} + 2a_{10}a_{11}a_{21}b_{02} - 2a_{10}a_{20}a_{12}b_{02} - a_{11}a_{12}b_{10}b_{02} + a_{10}a_{12}\cdot b_{11}b_{02} + a_{20}a_{11}b_{02}^2 - a_{10}a_{21}b_{02}^2 + 2a_{12}(a_{20}a_{11}^2 + 2a_{10}a_{11}a_{21} - a_{10}a_{20}a_{12} + a_{11}a_{12}b_{10} + a_{10}\cdot a_{12}b_{11} - 2a_{20}a_{11}b_{02} - 2a_{10}a_{21}b_{02} - a_{12}b_{10}b_{02} + a_{20}b_{02}^2 - a_{10}a_{11}b_{12} + a_{10}b_{02}b_{12})y + a_{12}\cdot (3a_{11}^2a_{21} - 3a_{20}a_{11}a_{12} - 3a_{10}a_{21}a_{12} - a_{12}^2b_{10} + 2a_{11}a_{12}b_{11} - 4a_{11}a_{21}b_{02} + 2a_{20}a_{12}b_{02} - a_{12}b_{11}b_{02} + a_{21}b_{02}^2 - a_{11}^2b_{12} + 3a_{10}a_{12}b_{12} + a_{11}b_{02}b_{12})y^2 + a_{12}^2(b_{12} - a_{21})(2a_{11} + a_{12}y)y^3). \tag{2.39}$$

Ţinând cont de (2.28), în fiecare dintre cazurile (2.36)-(2.39), identitatea $A_2(y) \equiv 0$ ne dă următoarele serii de condiţii:

(2.36) $\Rightarrow$

$$a_{20} = a_{21} = 0,\ a_{30} \neq 0; \tag{2.40}$$

$$a_{21} = b_{01} = b_{02} = b_{03} = 0, a_{20} \neq 0; \tag{2.41}$$

$$b_{00} = a_{20}b_{01}/a_{21},\ b_{02} = b_{03} = 0; \tag{2.42}$$

(2.37) $\Rightarrow$

$$b_{10} = a_{20}b_{00}/a_{10},\ b_{11} = a_{20} + a_{21}b_{00}/a_{10},\ b_{12} = a_{21}; \tag{2.43}$$

(2.38) $\Rightarrow$

$$b_{01} = 2a_{10},\ b_{11} = a_{20} + a_{10}a_{21}/a_{11},\ b_{12} = a_{21}; \tag{2.44}$$

$$b_{10} = a_{20}(b_{01} - a_{10})/a_{11},\ b_{11} = a_{20} + a_{21}(b_{01} - a_{10})/a_{11},\ b_{12} = a_{21}; \tag{2.45}$$

(2.39) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &a_{10} = -(2a_{11}^2 - 3a_{11}b_{02} + b_{02}^2)/a_{12},\ b_{12} = a_{21}, \\ &b_{10} = (2a_{11}^2a_{21} - 3a_{20}a_{11}a_{12} + 2a_{20}a_{12}b_{02} - \\ &-3a_{11}a_{21}b_{02} + a_{21}b_{02}^2 + 2a_{11}a_{12}b_{11} - a_{12}b_{11}b_{02})/a_{12}^2; \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$b_{10} = a_{20}(b_{02} - a_{11})/a_{12},\ b_{11} = a_{20} + a_{21}(b_{02} - a_{11})/a_{12},\ b_{12} = a_{21}. \tag{2.47}$$

Lema 2.2.2. *Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ a sistemului $\{$(2.29), (2.28)$\}$ nu este mai mică ca trei atunci şi numai atunci, când are loc cel puţin una dintre seriile de condiţii:*

2.1) (2.32), (2.40); 2.2) (2.32), (2.41); 2.3) (2.32), (2.42); 2.4) (2.33), (2.43); 2.5) (2.34), (2.44); 2.6) (2.34), (2.45); 2.7) (2.35), (2.46); 2.8) (2.35), (2.47).

Dreapta invariantă $x = 0$ are multiplicitatea algebrică $m_a \geq 4$, dacă în fiecare dintre cazurile 2.1)-2.8) are loc identitatea $A_3(y) \equiv 0$. Ţinând cont de (2.28) avem:

2.1) $\Rightarrow A_3(y) = a_{30}(b_{01} + 2b_{02}y + 3b_{03}y^2) \cdot A_{11}(y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{01} = b_{02} = b_{03} = 0, b_{00} \neq 0; \tag{2.48}$$

2.2) $\Rightarrow A_3(y) = -a_{20}b_{00}(2a_{20} - b_{11} - 2b_{12}y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{11} = 2a_{20}, b_{12} = 0, b_{00} \neq 0; \tag{2.49}$$

2.3) $\Rightarrow A_3(y) = -A_{11}(y)(2a_{20}^2 - a_{30}b_{01} + a_{21}b_{10} - a_{20}b_{11} + 2a_{20}(2a_{21} - b_{12})y + a_{21}(2a_{21} - b_{12})y^2) \equiv 0$ $\Rightarrow$

$$b_{10} = (a_{30}b_{01} + a_{20}b_{11} - 2a_{20}^2)/a_{21},\ b_{12} = 2a_{21},\ b_{01} \neq 0; \tag{2.50}$$

2.4) $\Rightarrow A_{20}(y) = -a_{10}(3a_{30}b_{00} - 2a_{10}b_{20} - b_{00}b_{21} + 3a_{10}(a_{30} - b_{21})y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{20} = a_{30}b_{00}/a_{10},\ b_{21} = a_{30}; \tag{2.51}$$

2.5) $\Rightarrow A_3(y) = -(a_{10}^2a_{20}^2a_{11} + 2a_{10}^3a_{11}a_{30} - a_{10}^3a_{20}a_{21} - 2a_{10}a_{20}a_{11}^2b_{10} + a_{10}^2a_{11}a_{21}b_{10} + a_{11}^3b_{10}^2 - a_{10}^2a_{11}^2b_{20} - a_{10}^3a_{11}b_{21})/a_{11}^2 - 2a_{10}(3a_{10}a_{11}a_{30} - a_{10}a_{20}a_{21} + a_{11}a_{21}b_{10} - a_{11}^2b_{20} - 2a_{10}a_{11}b_{21})y/a_{11} - (6a_{10}a_{11}a_{30} - a_{10}a_{20}a_{21} + a_{11}a_{21}b_{10} - a_{11}^2b_{20} - 5a_{10}a_{11}b_{21})y^2 + 2a_{11}^2(b_{21} - a_{30})y^3 \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{10} = a_{10}a_{20}/a_{11},\ b_{20} = a_{10}a_{30}/a_{11},\ b_{21} = a_{30}; \tag{2.52}$$

2.6) $\Rightarrow A_3(y) = (a_{10} + a_{11}y)((4a_{10}^2a_{30} - 5a_{10}a_{30}b_{01} + a_{30}b_{01}^2 + 3a_{10}a_{11}b_{20} - a_{11}b_{01}b_{20} - a_{10}^2b_{21} + a_{10}b_{01}b_{21}) - a_{11}(2a_{10}a_{30} + a_{30}b_{01} - a_{11}b_{20} - 3a_{10}b_{21})y + 2a_{11}^2(a_{30} - b_{21})y^2)/a_{11} \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{20} = a_{30}(b_{01} - a_{10})/a_{11},\ b_{21} = a_{30}; \tag{2.53}$$

2.7) $\Rightarrow A_3(y) = -(2a_{11} - b_{02} + a_{12}y)(B_0 + B_1y + B_2y^2 + B_3y^3 + B_4y^4)/a_{12}^4$, unde

$B_0 = 6a_{11}^4a_{21}^2 - 5a_{11}^4a_{30}a_{12} - 11a_{20}a_{11}^3a_{21}a_{12} + 5a_{20}^2a_{11}^2a_{12}^2 - 3a_{11}^3a_{12}^2b_{20} + 10a_{11}^3a_{21}a_{12}b_{11} - 9a_{20}a_{11}^2a_{12}^2b_{11} + 4a_{11}^2a_{12}^2b_{11}^2 - 19a_{11}^3a_{21}^2b_{02} + 18a_{11}^3a_{30}a_{12}b_{02} + 24a_{20}a_{11}^2a_{21}a_{12}b_{02} - 6a_{20}^2a_{11}a_{12}^2b_{02} + 8a_{11}^2a_{12}^2b_{20}b_{02} - 21a_{11}^2a_{21}a_{12}b_{11}b_{02} + 10a_{20}a_{11}a_{12}^2b_{11}b_{02} - 4a_{11}a_{12}^2b_{11}^2b_{02} + 22a_{11}^2a_{21}^2b_{02}^2 - 24a_{11}^2a_{30}a_{12}b_{02}^2 - 17a_{20}a_{11}a_{21}a_{12}b_{02}^2 + 2a_{20}^2a_{12}^2b_{02}^2 - 7a_{11}a_{12}^2b_{20}b_{02}^2 + 14a_{11}a_{21}a_{12}b_{11}b_{02}^2 - 3a_{20}a_{12}^2b_{11}b_{02}^2 + a_{12}^2b_{11}^2b_{02}^2 - 11a_{11}a_{21}^2b_{02}^3 + 14a_{11}a_{30}a_{12}b_{02}^3 + 4a_{20}a_{21}a_{12}b_{02}^3 + 2a_{12}^2b_{20}b_{02}^3 - 3a_{21}a_{12}b_{11}b_{02}^3 + 2a_{21}^2b_{02}^4 - 3a_{30}a_{12}b_{02}^4 + 2a_{11}^4a_{12}b_{21} - 7a_{11}^3a_{12}b_{02}b_{21} + 9a_{11}^2a_{12}b_{02}^2b_{21} - 5a_{11}a_{12}b_{02}^3b_{21} + a_{12}b_{02}^4b_{21}$,

$B_1 = 2a_{12}^2(7a_{11}^3a_{30} - a_{20}a_{11}^2a_{21} + a_{20}^2a_{11}a_{12} + 3a_{11}^2a_{12}b_{20} + 2a_{11}^2a_{21}b_{11} - 3a_{20}a_{11}a_{12}b_{11} + 2a_{11}a_{12}b_{11}^2 - 18a_{11}^2a_{30}b_{02} + a_{20}a_{11}a_{21}b_{02} - 5a_{11}a_{12}b_{20}b_{02} - 3a_{11}a_{21}b_{11}b_{02} + a_{20}a_{12}b_{11}b_{02} - a_{12}b_{11}^2b_{02} + 15a_{11}a_{30}b_{02}^2 + 2a_{12}b_{20}b_{02}^2 + a_{21}b_{11}b_{02}^2 - 4a_{30}b_{02}^3 - 4a_{11}^3b_{21} + 10a_{11}^2b_{02}b_{21} - 8a_{11}b_{02}^2b_{21} + 2b_{02}^3b_{21})$,

$B_2 = a_{12}^2(3a_{11}^2a_{21}^2 - 12a_{11}^2a_{30}a_{12} - 5a_{20}a_{11}a_{21}a_{12} + 2a_{20}^2a_{12}^2 - 3a_{11}a_{12}^2b_{20} + 4a_{11}a_{21}a_{12}b_{11} - 3a_{20}a_{12}^2b_{11} + a_{12}^2b_{11}^2 - 5a_{11}a_{21}^2b_{02} + 18a_{11}a_{30}a_{12}b_{02} + 4a_{20}a_{21}a_{12}b_{02} + 2a_{12}^2b_{20}b_{02} - 3a_{21}a_{12}b_{11}b_{02} + 2a_{21}^2b_{02}^2 - 6a_{30}a_{12}b_{02}^2 + 9a_{11}^2a_{12}b_{21} - 13a_{11}a_{12}b_{02}b_{21} + 4a_{12}b_{02}^2b_{21})$,

$B_3 = 2a_{11}a_{12}^4(a_{30} - b_{21}), \qquad B_4 = a_{12}^5(a_{30} - b_{21})$.

În acest caz identitatea $A_3(y) \equiv 0$ are loc, dacă se îndeplineşte cel puţin una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$a_{20} = b_{11} - a_{21}(b_{02} - a_{11})/a_{12},\ b_{20} = a_{30}(b_{02} - a_{11})/a_{12},\ b_{21} = a_{30}; \tag{2.54}$$

$$a_{20} = b_{11}/2,\ b_{02} = 3a_{11}/2,\ b_{21} = a_{30}; \tag{2.55}$$

$$a_{20} = b_{11} - a_{11}a_{21}/(2a_{12}),\ b_{02} = 3a_{11}/2,\ b_{21} = a_{30}; \tag{2.56}$$

2.8) $\Rightarrow A_3(y) = (a_{10} + a_{11}y + a_{12}y^2)(a_{11}^3a_{30} + 3a_{10}a_{11}a_{30}a_{12} + a_{11}^2a_{12}b_{20} + 2a_{10}a_{12}^2b_{20} - 2a_{11}^2a_{30}b_{02} - 3a_{10}a_{30}a_{12}b_{02} - a_{11}a_{12}b_{20}b_{02} + a_{11}a_{30}b_{02}^2 - a_{10}a_{11}a_{12}b_{21} + a_{10}a_{12}b_{02}b_{21} + a_{12}(3a_{11}^2a_{30} - 3a_{10}a_{30}a_{12} + 3a_{11}a_{12}b_{20} - 5a_{11}a_{30}b_{02} - 2a_{12}b_{20}b_{02} + 2a_{30}b_{02}^2 + 3a_{10}a_{12}b_{21})y - a_{12}^2(3a_{11} - b_{02})(a_{30} - b_{21})y^2 - a_{12}^3(a_{30} - b_{21})y^3)/a_{12}^2 \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{21} = a_{30},\ b_{20} = a_{30}(b_{02} - a_{11})/a_{12}; \tag{2.57}$$

$$b_{21} = a_{30},\ b_{02} = 3a_{11}/2,\ a_{10} = a_{11}^2/(4a_{12}). \tag{2.58}$$

Lema 2.2.3. *Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ a sistemului $\{$(2.29), (2.28)$\}$ nu este mai mică ca patru atunci şi numai atunci, când are loc cel puţin una dintre seriile de condiţii:*

2.9) (2.32), (2.40), (2.48); *2.10)* (2.32), (2.41), (2.49); *2.11)* (2.32), (2.42), (2.50); *2.12)* (2.33), (2.43), (2.51); *2.13)* (2.34), (2.44), (2.52); *2.14)* (2.34), (2.45), (2.53); *2.15)* (2.35), (2.46), (2.54); *2.16)* (2.35), (2.46), (2.55); *2.17)* (2.35), (2.46), (2.56); *2.18)* (2.35), (2.47), (2.57); *2.19)* (2.35), (2.47), (2.58).

În fiecare dintre cazurile 2.10)-2.15), 2.18), identitatea $A_4(y) \equiv 0$ şi condiţiile (2.28) nu sunt compatibile. În cazurile 2.9), 2.16), 2.17) şi 2.19) avem respectiv implicaţiile:

2.9) $\Rightarrow A_4(y) = a_{30}b_{00}(b_{11} + 2b_{12}y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{11} = b_{12} = 0; \tag{2.59}$$

2.16) $\Rightarrow A_4(y) = (a_{11}+2a_{12}y)(-a_{11}^3a_{21}^3 - 2a_{11}^3a_{30}a_{21}a_{12} + 4a_{11}^2a_{21}a_{12}^2b_{20} + 4a_{11}^2a_{21}^2a_{12}b_{11} + {}$ $+ 2a_{11}^2a_{30}a_{12}^2b_{11} - 4a_{11}a_{12}^3b_{20}b_{11} - 5a_{11}a_{21}a_{12}^2b_{11}^2 + 2a_{12}^3b_{11}^3 + a_{11}^3a_{12}^2b_{30}2a_{12}(a_{11}^2a_{21}^3 - 2a_{11}^2a_{30}a_{21}a_{12} + 4a_{11}a_{21}a_{12}^2b_{20} - 2a_{11}a_{21}^2a_{12}b_{11} + 2a_{11}a_{30}a_{12}^2b_{11} - 4a_{12}^3b_{20}b_{11} + a_{21}a_{12}^2b_{11}^2 + 3a_{11}^2a_{12}^2b_{30})y + 12a_{11}a_{12}^4b_{30}y^2 + 8a_{12}^5b_{30}y^3)/(16a_{12}^4) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{30} = 0, b_{11} = \frac{a_{11}a_{21}}{a_{12}}; \tag{2.60}$$

2.17) $\Rightarrow A_4(y) = (a_{11}+2a_{12}y)^2(2a_{11}^2a_{30}a_{21} - 4a_{11}a_{21}a_{12}b_{20} - 2a_{11}a_{30}a_{12}b_{11} + 4a_{12}^2b_{20}b_{11} + a_{11}^2a_{12}b_{30} + 4a_{11}a_{12}^2b_{30}y + 4a_{12}^3b_{30}y^2)/(16a_{12}^3) \equiv 0 \Rightarrow$ (2.60);

2.19) $\Rightarrow A_4(y) = (a_{11}+2a_{12}y)^2(a_{11}^2a_{30}a_{21} - 2a_{20}a_{11}a_{30}a_{12} - 2a_{11}a_{21}a_{12}b_{20} + 4a_{20}a_{12}^2b_{20} + a_{11}^2a_{12}b_{30} + 4a_{11}a_{12}^2b_{30}y + 4a_{12}^3b_{30}y^2)/(16a_{12}^3) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{30} = 0, a_{20} = \frac{a_{11}a_{21}}{2a_{12}}. \tag{2.61}$$

Uşor se arată, că condiţiile {2.16), (2.60)}, {2.17), (2.60)} şi {2.19), (2.61)} sunt echivalente.

Lema 2.2.4. *Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ a sistemului {*(2.29), (2.28)*} nu este mai mică ca cinci atunci şi numai atunci, când are loc cel puţin una dintre seriile de condiţii:*

2.20) (2.32), (2.40), (2.48), (2.59); *2.21)* (2.35), (2.46), (2.55), (2.60).

În cazul 2.20) avem $A_5(y) = -a_{30}b_{00}(3a_{30} - b_{21}) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{21} = 3a_{30}, \tag{2.62}$$

iar în cazul 2.21) polinomul $A_5(y)$ are forma:

$$A_5(y) = -(a_{11}a_{30} - 2a_{12}b_{20})^2(a_{11}+2a_{12}y)/(4a_{12}^2) \not\equiv 0.$$

Lema 2.2.5. *Multiplicitatea algebrică m_a a dreptei invariante $x = 0$ a sistemului {*(2.29), (2.28)*} nu este mai mică ca şase, dacă şi numai dacă, are loc cel puţin una dintre seriile de condiţii:* (2.32), (2.40), (2.48), (2.59), (2.62).

În condiţiile Lemei 2.2.5 avem: $A_6(y) = a_{30}^2b_{10} \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{10} = 0 \tag{2.63}$$

$\Rightarrow A_7(y) = 2a_{30}^2(b_{20} + 3a_{30}y) \not\equiv 0$, $m_a = 7$ şi sistemul cubic (2.29) arată astfel:

$$\dot{x} = a_{30}x^3,\ \dot{y} = b_{00} + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + 3a_{30}x^2y, \quad a_{30}b_{00} \neq 0. \tag{2.64}$$

Prin intermediul transformării de coordonate: $x \to x, y \to -(2b_{20} + 3b_{30}x - 6b_{00}y)/(6a_{30})$ şi rescalarea timpului $t = \tau/a_{30}$ sistemul (2.64) poate fi scris sub forma:

$$\dot{x} = x^3, \qquad \dot{y} = 1 + 3x^2 y. \tag{2.65}$$

Astfel, s-a demonstrat următoarea teoremă.

Teorema 2.2.3. *În clasa sistemelor cubice diferenţiale* $\{(2.29), (2.28)\}$ *multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante reale este egală cu 7. Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic care are o dreaptă invariantă de multiplicitatea algebrică 7 poate fi scris sub forma* (2.65).

2.3. Multiplicitatea infinitezimală, integrabilă şi geometrică maximală a unei drepte afine pentru sistemele cubice

2.3.1. Multiplicitatea infinitezimală

Definiţia 2.3.1. *[21] Fie $f = 0$ o curbă algebrică invariantă de gradul d a câmpului vectorial $\mathbb{X}$ de gradul n. Se spune că*

$$F = f_0 + f_1\varepsilon + ... + f_{k-1}\varepsilon^{k-1} \in \mathbb{C}[x, y, \varepsilon]/(\varepsilon^k) \tag{2.66}$$

defineşte o curbă algebrică invariantă generalizată de ordinul k în baza $f = 0$, dacă polinoamele $f_0 = f, ..., f_{k-1} \in \mathbb{C}[x, y]$ au gradul nu mai mare ca d şi F verifică ecuaţia

$$\mathbb{X}(F) = F L_F \tag{2.67}$$

pentru un polinom oarecare

$$L_F = L_0 + L_1\varepsilon + ... + L_{k-1}\varepsilon^{k-1} \in \mathbb{C}[x, y, \varepsilon]/(\varepsilon^k) \tag{2.68}$$

de grad cel mult $n-1$ în x şi y. L_F se numeşte cofactorul curbei F.

Definiţia 2.3.2. *[21] O curbă algebrică invariantă generalizată F în baza $f = 0$ se numeşte nedegenerată, dacă polinomul f_1 din definiţia 2.3.1 nu este multiplu al lui f. Altfel, spunem că curba este degenerată.*

Definiţia 2.3.3. *[21] Se spune că curba algebrică invariantă $f = 0$ are multiplicitatea infinitezimală m în raport cu câmpul vectorial $\mathbb{X}$, dacă m este cel mai mare ordin al tuturor curbelor invariante algebrice generalizate nedegenerate bazate pe $f = 0$.*

Conform teoremei despre echivalenţa tipurilor de multiplicitate din [21], multiplicitatea infinitezimală este echivalentă cu multiplicitatea algebrică, prin urmare multiplicitatea infinitezimală a unei drepte invariante afine pentru sistemele cubice nu poate fi mai mare ca şapte. Orice sistem cubic care admite o dreaptă invariantă afină de multiplicitatea infinitezimală egală cu şapte poate fi scris sub forma (2.65).

Pentru acest sistem curba algebrică invariantă generalizată nedegenerată F de ordinul $m = 7$ şi cofactorul ei L_F sunt descrise respectiv de următoarele polinoame f_i şi $L_i,(i = \overline{0,6})$:

$f_0 = x,$

$f_1 = x\alpha_1 + \gamma_1,$

$f_2 = x\alpha_2 + \gamma_2,$

$f_3 = x\alpha_3 + y\gamma_1^3 + \gamma_3,$

$f_4 = x\alpha_4 + y(-2\alpha_1\gamma_1^3 + 3\gamma_1^2\gamma_2) + \gamma_4,$

$f_5 = x\alpha_5 + y(3\alpha_1^2\gamma_1^3 - 2\alpha_2\gamma_1^3 - 6\alpha_1\gamma_1^2\gamma_2 + 3\gamma_1\gamma_2^2 + 3\gamma_1^2\gamma_3) + \gamma_5,$

$f_6 = x\alpha_6 + y(-4\alpha_1^3\gamma_1^3 + 6\alpha_1\alpha_2\gamma_1^3 - 2\alpha_3\gamma_1^3 + 9\alpha_1^2\gamma_1^2\gamma_2 - 6\alpha_2\gamma_1^2\gamma_2 - 6\alpha_1\gamma_1\gamma_2^2 + \gamma_2^3 - 6\alpha_1\gamma_1^2\gamma_3 + 6\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + 3\gamma_1^2\gamma_4) + \gamma_6,$

$L_0 = x^2,$

$L_1 = -x\gamma_1,$

$L_2 = x\alpha_1\gamma_1 + \gamma_1^2 - x\gamma_2,$

$L_3 = -x\alpha_1^2\gamma_1 + x\alpha_2\gamma_1 - 2\alpha_1\gamma_1^2 + 2xy\gamma_1^3 + x\alpha_1\gamma_2 + 2\gamma_1\gamma_2 - x\gamma_3,$

$L_4 = x\alpha_1^3\gamma_1 - 2x\alpha_1\alpha_2\gamma_1 + x\alpha_3\gamma_1 + 3\alpha_1^2\gamma_1^2 - 2\alpha_2\gamma_1^2 - 6xy\alpha_1\gamma_1^3 - y\gamma_1^4 - x\alpha_1^2\gamma_2 + x\alpha_2\gamma_2 - 4\alpha_1\gamma_1\gamma_2 + 6xy\gamma_1^2\gamma_2 + \gamma_2^2 + x\alpha_1\gamma_3 + 2\gamma_1\gamma_3 - x\gamma_4,$

$L_5 = -x\alpha_1^4\gamma_1 + 3x\alpha_1^2\alpha_2\gamma_1 - x\alpha_2^2\gamma_1 - 2x\alpha_1\alpha_3\gamma_1 + x\alpha_4\gamma_1 - 4\alpha_1^3\gamma_1^2 + 6\alpha_1\alpha_2\gamma_1^2 - 2\alpha_3\gamma_1^2 + 12xy\alpha_1^2\gamma_1^3 - 6xy\alpha_2\gamma_1^3 + 4y\alpha_1\gamma_1^4 + x\alpha_1^3\gamma_2 - 2x\alpha_1\alpha_2\gamma_2 + x\alpha_3\gamma_2 + 6\alpha_1^2\gamma_1\gamma_2 - 4\alpha_2\gamma_1\gamma_2 - 18xy\alpha_1\gamma_1^2\gamma_2 - 4y\gamma_1^3\gamma_2 - 2\alpha_1\gamma_2^2 + 6xy\gamma_1\gamma_2^2 - x\alpha_1^2\gamma_3 + x\alpha_2\gamma_3 - 4\alpha_1\gamma_1\gamma_3 + 6xy\gamma_1^2\gamma_3 + 2\gamma_2\gamma_3 + x\alpha_1\gamma_4 + 2\gamma_1\gamma_4 - x\gamma_5,$

$L_6 = x\alpha_1^5\gamma_1 - 4x\alpha_1^3\alpha_2\gamma_1 + 3x\alpha_1\alpha_2^2\gamma_1 + 3x\alpha_1^2\alpha_3\gamma_1 - 2x\alpha_2\alpha_3\gamma_1 - 2x\alpha_1\alpha_4\gamma_1 + x\alpha_5\gamma_1 + 5\alpha_1^4\gamma_1^2 - 12\alpha_1^2\alpha_2\gamma_1^2 + 3\alpha_2^2\gamma_1^2 + 6\alpha_1\alpha_3\gamma_1^2 - 2\alpha_4\gamma_1^2 - 20xy\alpha_1^3\gamma_1^3 + 24xy\alpha_1\alpha_2\gamma_1^3 - 6xy\alpha_3\gamma_1^3 - 10y\alpha_1^2\gamma_1^4 + 4y\alpha_2\gamma_1^4 - 2y^2\gamma_1^6 - x\alpha_1^4\gamma_2 + 3x\alpha_1^2\alpha_2\gamma_2 - x\alpha_2^2\gamma_2 - 2x\alpha_1\alpha_3\gamma_2 + x\alpha_4\gamma_2 - 8\alpha_1^3\gamma_1\gamma_2 + 12\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2 - 4\alpha_3\gamma_1\gamma_2 + 36xy\alpha_1^2\gamma_1^2\gamma_2 - 18xy\alpha_2\gamma_1^2\gamma_2 + 16y\alpha_1\gamma_1^3\gamma_2 + 3\alpha_1^2\gamma_2^2 - 2\alpha_2\gamma_2^2 - 18xy\alpha_1\gamma_1\gamma_2^2 - 6y\gamma_1^2\gamma_2^2 + 2xy\gamma_2^3 + x\alpha_1^3\gamma_3 - 2x\alpha_1\alpha_2\gamma_3 + x\alpha_3\gamma_3 + 6\alpha_1^2\gamma_1\gamma_3 - 4\alpha_2\gamma_1\gamma_3 - 18xy\alpha_1\gamma_1^2\gamma_3 - 4y\gamma_1^3\gamma_3 - 4\alpha_1\gamma_2\gamma_3 + 12xy\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3^2 - x\alpha_1^2\gamma_4 + x\alpha_2\gamma_4 - 4\alpha_1\gamma_1\gamma_4 + 6xy\gamma_1^2\gamma_4 + 2\gamma_2\gamma_4 + x\alpha_1\gamma_5 + 2\gamma_1\gamma_5 - x\gamma_6,$

unde α_i, γ_i, $i = \overline{1,6}$, sunt parametri oarecare şi care pot fi aleşi astfel ca F să-şi păstreze ordinul şi să nu degenereze. În caz particular, putem lua $F = x + (1+x)\epsilon(1+\epsilon) + (1+x+y)\epsilon^3(1+\epsilon+\epsilon^2+\epsilon^3)$ pentru care $L_F = x^2 - x\epsilon + \epsilon^2 + 2xy\epsilon^3 - y\epsilon^4 - 2y^2\epsilon^6$.

2.3.2. Multiplicitatea integrabilă

Definiţia 2.3.4. *Fie $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$. Vom spune că $e = exp(g/f)$ este un factor exponenţial al câmpului vectorial $\mathbb{X}$ de gradul n, dacă $\mathbb{X}(e)/e$ reprezintă un polinom de grad nu mai mare ca $n-1$. Acest polinom se numeşte cofactorul factorului exponenţial e şi se notează cu L_e.*

Definiţia 2.3.5. *[21] Se spune că curba algebrică invariantă $f = 0$ a câmpului vectorial $\mathbb{X}$ are multiplicitatea integrabilă egală cu m, dacă m este cel mai mare număr astfel că există $m-1$ factorii exponenţiali de forma $exp(g_j/f^j), j = 1, ..., m-1$, unde $deg(g_j) \leq j \cdot deg(f)$ şi fiecare g_j nu este un multiplu a lui f.*

Noţiunile de multiplicitate algebrică şi integrabilă sunt echivalente (vezi [21]). Astfel, multiplicitatea integrabilă a unei drepte invariante afine pentru sistemele cubice nu poate fi mai mare ca şapte. Orice sistem cubic care admite o dreaptă invariantă reală de multiplicitatea integrabilă egală cu şapte poate fi scris sub forma (2.65).

Pentru sistemul (2.65) avem că $f = x$ şi factorii exponenţiali $exp(g_j/x^j), j = 1, ..., 6$, unde

$g_1 = x\alpha_1 + \gamma_1$,

$g_2 = \frac{1}{2}(-x^2\alpha_1^2 + 2x^2\alpha_2 - 2x\alpha_1\gamma_1 - \gamma_1^2 + 2x\gamma_2)$,

$g_3 = \frac{1}{3}(x^3\alpha_1^3 - 3x^3\alpha_1\alpha_2 + 3x^3\alpha_3 + 3x^2\alpha_1^2\gamma_1 - 3x^2\alpha_2\gamma_1 + 3x\alpha_1\gamma_1^2 + \gamma_1^3 + 3x^2y\gamma_1^3 - 3x^2\alpha_1\gamma_2 - 3x\gamma_1\gamma_2 + 3x^2\gamma_3)$,

$g_4 = \frac{1}{4}(-x^4\alpha_1^4 + 4x^4\alpha_1^2\alpha_2 - 2x^4\alpha_2^2 - 4x^4\alpha_1\alpha_3 + 4x^4\alpha_4 - 4x^3\alpha_1^3\gamma_1 + 8x^3\alpha_1\alpha_2\gamma_1 - 4x^3\alpha_3\gamma_1 - 6x^2\alpha_1^2\gamma_1^2 + 4x^2\alpha_2\gamma_1^2 - 4x\alpha_1\gamma_1^3 - 12x^3y\alpha_1\gamma_1^3 - \gamma_1^4 - 4x^2y\gamma_1^4 + 4x^3\alpha_1^2\gamma_2 - 4x^3\alpha_2\gamma_2 + 8x^2\alpha_1\gamma_1\gamma_2 + 4x\gamma_1^2\gamma_2 + 12x^3y\gamma_1^2\gamma_2 - 2x^2\gamma_2^2 - 4x^3\alpha_1\gamma_3 - 4x^2\gamma_1\gamma_3 + 4x^3\gamma_4)$,

$g_5 = \frac{1}{5}(x^5\alpha_1^5 - 5x^5\alpha_1^3\alpha_2 + 5x^5\alpha_1\alpha_2^2 + 5x^5\alpha_1^2\alpha_3 - 5x^5\alpha_2\alpha_3 - 5x^5\alpha_1\alpha_4 + 5x^5\alpha_5 + 5x^4\alpha_1^4\gamma_1 - 15x^4\alpha_1^2\alpha_2\gamma_1 + 5x^4\alpha_2^2\gamma_1 + 10x^4\alpha_1\alpha_3\gamma_1 - 5x^4\alpha_4\gamma_1 + 10x^3\alpha_1^3\gamma_1^2 - 15x^3\alpha_1\alpha_2\gamma_1^2 + 5x^3\alpha_3\gamma_1^2 + 10x^2\alpha_1^2\gamma_1^3 + 30x^4y\alpha_1^2\gamma_1^3 - 5x^2\alpha_2\gamma_1^3 - 15x^4y\alpha_2\gamma_1^3 + 5x\alpha_1\gamma_1^4 + 20x^3y\alpha_1\gamma_1^4 + \gamma_1^5 + 5x^2y\gamma_1^5 - 5x^4\alpha_1^3\gamma_2 + 10x^4\alpha_1\alpha_2\gamma_2 - 5x^4\alpha_3\gamma_2 - 15x^3\alpha_1^2\gamma_1\gamma_2 + 10x^3\alpha_2\gamma_1\gamma_2 - 15x^2\alpha_1\gamma_1^2\gamma_2 - 45x^4y\alpha_1\gamma_1^2\gamma_2 - 5x\gamma_1^3\gamma_2 - 20x^3y\gamma_1^3\gamma_2 + 5x^3\alpha_1\gamma_2^2 + 5x^2\gamma_1\gamma_2^2 + 15x^4y\gamma_1\gamma_2^2 + 5x^4\alpha_1^2\gamma_3 - 5x^4\alpha_2\gamma_3 + 10x^3\alpha_1\gamma_1\gamma_3 + 5x^2\gamma_1^2\gamma_3 + 15x^4y\gamma_1^2\gamma_3 - 5x^3\gamma_2\gamma_3 - 5x^4\alpha_1\gamma_4 - 5x^3\gamma_1\gamma_4 + 5x^4\gamma_5)$,

$g_6 = \frac{1}{6}(-x^6\alpha_1^6+6x^6\alpha_1^4\alpha_2-9x^6\alpha_1^2\alpha_2^2+2x^6\alpha_2^3-6x^6\alpha_1^3\alpha_3+12x^6\alpha_1\alpha_2\alpha_3-3x^6\alpha_3^2+6x^6\alpha_1^2\alpha_4-6x^6\alpha_2\alpha_4-6x^6\alpha_1\alpha_5+6x^6\alpha_6-6x^5\alpha_1^5\gamma_1+24x^5\alpha_1^3\alpha_2\gamma_1-18x^5\alpha_1\alpha_2^2\gamma_1-18x^5\alpha_1^2\alpha_3\gamma_1+12x^5\alpha_2\alpha_3\gamma_1+12x^5\alpha_1\alpha_4\gamma_1-6x^5\alpha_5\gamma_1-15x^4\alpha_1^4\gamma_1^2+36x^4\alpha_1^2\alpha_2\gamma_1^2-9x^4\alpha2^2\gamma_1^2-18x^4\alpha_1\alpha_3\gamma_1^2+6x^4\alpha_4\gamma_1^2-20x^3\alpha_1^3\gamma_1^3-60x^5y\alpha_1^3\gamma_1^3+24x^3\alpha_1\alpha_2\gamma_1^3+72x^5y\alpha_1\alpha_2\gamma_1^3-6x^3\alpha_3\gamma_1^3-18x^5y\alpha_3\gamma_1^3-15x^2\alpha_1^2\gamma_1^4-60x^4y\alpha_1^2\gamma_1^4+6x^2\alpha_2\gamma_1^4+24x^4y\alpha_2\gamma_1^4-6x\alpha_1\gamma_1^5-30x^3y\alpha_1\gamma_1^5-\gamma_1^6-6x^2y\gamma_1^6-3x^4y^2\gamma_1^6+6x^5\alpha_1^4\gamma_2-18x^5\alpha_1^2\alpha_2\gamma_2+6x^5\alpha_2^2\gamma_2+12x^5\alpha_1\alpha_3\gamma_2-6x^5\alpha_4\gamma_2+24x^4\alpha_1^3\gamma_1\gamma_2-36x^4\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2+12x^4\alpha_3\gamma_1\gamma_2+36x^3\alpha_1^2\gamma_1^2\gamma_2+108x^5y\alpha_1^2\gamma_1^2\gamma_2-18x^3\alpha_2\gamma_1^2\gamma_2-54x^5y\alpha_2\gamma_1^2\gamma_2+24x^2\alpha_1\gamma_1^3\gamma_2+96x^4y\alpha_1\gamma_1^3\gamma_2+6x\gamma_1^4\gamma_2+30x^3y\gamma_1^4\gamma_2-9x^4\alpha_1^2\gamma_2^2+6x^4\alpha_2\gamma_2^2-18x^3\alpha_1\gamma_1\gamma_2^2-54x^5y\alpha_1\gamma_1\gamma_2^2-9x^2\gamma_1^2\gamma_2^2-36x^4y\gamma_1^2\gamma_2^2+2x^3\gamma_2^3+6x^5y\gamma_2^3-6x^5\alpha_1^3\gamma_3+12x^5\alpha_1\alpha_2\gamma_3-6x^5\alpha_3\gamma_3-18x^4\alpha_1^2\gamma_1\gamma_3+12x^4\alpha_2\gamma_1\gamma_3-18x^3\alpha_1\gamma_1^2\gamma_3-54x^5y\alpha_1\gamma_1^2\gamma_3-6x^2\gamma_1^3\gamma_3-24x^4y\gamma_1^3\gamma_3+12x^4\alpha_1\gamma_2\gamma_3+12x^3\gamma_1\gamma_2\gamma_3+36x^5y\gamma_1\gamma_2\gamma_3-3x^4\gamma_3^2+6x^5\alpha_1^2\gamma_4-6x^5\alpha_2\gamma_4+12x^4\alpha_1\gamma_1\gamma_4+6x^3\gamma_1^2\gamma_4+18x^5y\gamma_1^2\gamma_4-6x^4\gamma_2\gamma_4-6x^5\alpha_1\gamma_5-6x^4\gamma_1\gamma_5+6x^5\gamma_6)$; $\alpha_i, i = \overline{1,4}$, $\gamma_j, j = \overline{1,6}$, - parametri.

În caz particular, putem considera: $g_1 = g_2 = 1$, $g_3 = 1 + 3x^2y$, $g_4 = 1 + 4x^2y$, $g_5 = 1 + 5x^2y$, $g_6 = 1 + 6x^2y + 3x^4y^2$.

2.3.3. Multiplicitatea geometrică

Definiţia 2.3.6. *Vom spune că curba algebrică invariantă $f = 0$ de gradul d a câmpului vectorial $\mathbb{X}$ are multiplicitatea geometrică slabă egală cu m, dacă m este cel mai mare număr pentru care există un aşa şir de câmpuri vectoriale $(\mathbb{X}_i)_{i>0}$ de grad total mărginit şi care converge către $h\mathbb{X}$ pentru un polinom oarecare h ce nu este divizibil prin f, astfel încât fiecare $\mathbb{X}_r$ are m curbe algebrice invariante distincte $f_{r,1} = 0, \ldots, f_{r,m} = 0$ de grad nu mai mare ca d ce tind către $f = 0$ când r tinde spre infinit.*

Definiţia 2.3.7. *Dacă în definiţia 2.3.6 câmpurile vectoriale $(\mathbb{X}_i)_{i>0}$ şi $\mathbb{X}$ sunt de acelaşi grad şi $h \equiv 1$, atunci se va spune că curba algebrică $f = 0$ are multiplicitatea geometrică egală cu m.*

Remarca 2.3.1. *Conform [21] noţiunile de multiplicitate algebrică, infinitezimală, integrabilă şi geometrică slabă a unei curbe algebrice invariante sunt echivalente.*

Bineînţeles, multiplicitatea geometrică a unei curbe algebrice nu depăşeşte multiplicitatea ei geometrică slabă. În clasa sistemelor cubice, suntem de părerea, că multiplicitatea geometrică a unei drepte invariante coincide cu multiplicitatea ei geometrică slabă. În cazul $m = 7$ această afirmaţie ne-o confirmă exemplul ce urmează.

Exemplul 2.3.1. Considerăm sistemul

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = x(x-3\epsilon)(x-3\epsilon+6\epsilon^3),\\
&\dot{y} = 1+3x^2y-12xy\epsilon-3\epsilon^2+9y\epsilon^2+12xy\epsilon^3-12xy^2\epsilon^3-\\
&\quad -6\epsilon^4-18y\epsilon^4+24y^2\epsilon^4+8\epsilon^6-24y^2\epsilon^6+16y^3\epsilon^6.
\end{aligned} \tag{2.69}
$$

Acest sistem admite următoarele şapte drepte invariante afine distincte:

$l_1 = x$, $l_2 = x-3\epsilon$, $l_3 = x-3\epsilon+6\epsilon^3$, $l_4 = x-\epsilon-2\epsilon^3-4y\epsilon^3$, $l_5 = x-\epsilon+4\epsilon^3-4y\epsilon^3$, $l_6 = x-4\epsilon+4\epsilon^3-4y\epsilon^3$, $l_7 = x-2\epsilon+2\epsilon^3-2y\epsilon^3$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci (2.69) tinde către sistemul (2.65), iar dreptele l_i, $i = 2,...,7$ converg spre dreapta l_1 care este invariantă pentru ambele sisteme diferenţiale.

2.4. Multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit pentru sistemele polinomiale de grad mai mic ca patru

2.4.1. Cazul sistemelor afine

Considerăm sistemul afin de ecuaţii diferenţiale (2.10) şi dreapta de la infinit $Z = 0$.

Menţionăm, că dreapta de la infinit este invariantă pentru orice sistem polinomial de ecuaţii diferenţiale. Definiţia multiplicităţii algebrice se aplică acestei drepte doar în cazul când ea nu constă numai din puncte singulare.

În continuare, vom determina pentru (2.10) multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit. Pentru aceasta considerăm sistemul omogenizat

$$
\begin{cases}
\dot{x} = a_{00}Z + a_{10}x + a_{01}y,\\
\dot{y} = b_{00}Z + b_{10}x + b_{01}y,
\end{cases} \tag{2.70}
$$

corespunzător sistemului (2.10). Pentru (2.70) $E_1(\mathbb{X})$ reprezintă un polinom de gradul 2 în raport cu variabilele x, y, Z. El arată astfel:

$$
E_1(\mathbb{X}) = A_0(x,y) + A_1(x,y)Z + A_2(x,y)Z^2, \tag{2.71}
$$

unde

$A_0(x,y) = A_{01}\cdot A_{02}$, $A_{01} = b_{10}x^2 - a_{10}xy + b_{01}xy - a_{01}y^2$, $A_{02} = a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10}$,

$A_1(x,y) = (-a_{10}^2b_{00} + a_{10}b_{00}b_{01} + a_{00}a_{10}b_{10} - 2a_{01}b_{00}b_{10} + a_{00}b_{01}b_{10})x + (-a_{01}a_{10}b_{00} - a_{00}a_{10}b_{01} - a_{01}b_{00}b_{01} + a_{00}b_{01}^2 + 2a_{00}a_{01}b_{10})y$,

$A_2(x,y) = -a_{00}a_{10}b_{00} - a_{01}b_{00}^2 + a_{00}b_{00}b_{01} + a_{00}^2 b_{10}$.

Notăm cu μ_∞ multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit $Z = 0$. Dacă Z^k divide $E_1(\mathbb{X})$, atunci $Z = 0$ are multiplicitatea μ_∞ egală cu $k+1$.

Dacă în $A_0(x,y)$ factorul A_{01} este identic zero, adică $b_{10} = a_{01} = b_{01} - a_{10} = 0$, atunci infinitul pentru sistemul (2.10) este degenerat, i.e. constă numai din puncte singulare.

Fie $A_{02} \equiv 0$ şi $A_{01} \not\equiv 0$. Sunt posibile următoarele trei cazuri:

1) $a_{01} = a_{10} = 0$, $|b_{10}| + |b_{01}| \neq 0$;

2) $a_{10} = b_{10} = 0$, $a_{01} \neq 0$;

3) $a_{10} \neq 0$, $b_{01} = a_{01}b_{10}/a_{10}$.

În cazul 1) avem $A_1(x,y) = a_{00}b_{01}(b_{10}x + b_{01}y)$. Egalitatea cu zero a lui a_{00} nu este permisă de condiţia $GCD(P,Q) = 1$. Fie $a_{00} \neq 0$ şi $b_{01} = 0$. Atunci sistemul (2.10) arată astfel $\dot{x} = a_{00}$, $\dot{y} = b_{00} + b_{10}x$ şi în rezultatul aplicării unei transformări afine, poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = x. \tag{2.72}$$

Pentru (2.72) avem $A_0 \equiv 0$, $A_1 \equiv 0$, $A_2 = 1$ şi, prin urmare, $\mu_\infty = 3$.

În condiţiile cazului 2) sistemul (2.10) arată astfel: $\dot{x} = a_{00} + a_{01}y$, $\dot{y} = b_{00} + b_{01}y$, şi uşor poate fi adus la forma:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = b_{00} + b_{01}y. \tag{2.73}$$

Bineînţeles, $b_{00} \neq 0$. Atunci, pentru (2.73) $A_1 \equiv 0$, dacă şi numai dacă, $b_{01} = 0$. Rescalând axele de coordonate şi schimbându-le cu locurile, de la (2.73) se trece la sistemul (2.72).

În cazul 3) putem considera $a_{00} = 0$ şi $a_{10} = 1$. Sistemul (2.10) are forma $\dot{x} = x + a_{01}y$, $\dot{y} = b_{00} + b_{10}(x + a_{01}y)$, de unde se vede că $b_{00} \neq 0$. Cerinţa $A_1 \equiv -b_{00}(1 + a_{01}b_{10})(x + a_{01}y) \equiv 0$ implică $1 + a_{01}b_{10} = 0$. Punând $b_{10} = -1/a_{01}$ şi efectuând în ultimul sistem transformarea $X = (-a_{01}b_{00} + x + a_{01}y)/(a_{01}b_{00})$, $Y = -y/b_{00}$, îl reducem la sistemul (2.72).

Din cele expuse mai sus urmează

Teorema 2.4.1. *Multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit a oricărui sistem diferenţial afin cu infinitul nedegenerat nu depăşeşte trei, iar sistemele pentru care această multiplicitate este egală cu trei, cu exactitatea unei transformări afine şi rescalarea timpului, pot fi scrise sub forma* (2.72).

2.4.2. Cazul sistemelor pătratice

Considerăm sistemul pătratic de ecuaţii diferenţiale (2.15) şi sistemul omogenizat corespunzător

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{00}Z^2 + a_{10}xZ + a_{01}yZ + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = b_{00}Z^2 + b_{10}xZ + b_{01}yZ + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{cases} \tag{2.74}$$

Fără a restrânge generalitatea, putem considera

$$|b_{20}| + |b_{11}| + |b_{02}| \neq 0. \tag{2.75}$$

În această secţiune vom arăta că în condiţiile $\{(2.3), (2.4)\}$ mutiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit ($Z = 0$) pentru sistemul (2.15) nu depăşeşte cinci şi că fiecare sistem pătratic ce realizează pentru $Z = 0$ multiplicitatea cinci, făcând abstracţie de o transformare afină şi rescalarea timpului, poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = x^2. \tag{2.76}$$

Pentru a realiza cele propuse, calculăm $E_1(X)$ (vezi (2.7)) care în cazul sistemului (2.74) reprezintă un polinom de gradul cinci în raport cu x, y, Z. Scriem $E_1(X)$ astfel:

$$\begin{aligned} E_1(\mathbb{X}) = A_0(x,y) + A_1(x,y)Z + A_2(x,y)Z^2 + \\ A_3(x,y)Z^3 + A_4(x,y)Z^4 + A_5(x,y)Z^5, \end{aligned} \tag{2.77}$$

unde $A_i, (i = \overline{0,5})$ sunt polinoame de x şi y.

În (2.77) $A_0(x,y) = A_{01}(x,y)A_{02}(x,y)$, unde $A_{01}(x,y) = -b_{20}x^3 + a_{20}x^2y - b_{11}x^2y + a_{11}xy^2 - b_{02}xy^2 + a_{02}y^3$, $A_{02}(x,y) = (a_{11}b_{20} - a_{20}b_{11})x^2 - 2(a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20})xy - (a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11})y^2$.

Dacă $A_{01}(x,y) \equiv 0$, atunci sistemul (2.15) are infinitul degenerat, caz ce nu se examinează de noi.

Ţinând cont de (2.75), identitatea $A_{02}(x,y) \equiv 0$ se realizează doar în cazurile:

1) $a_{02} = a_{20} = b_{02} = b_{20} = 0,\ b_{11} \neq 0$;

2) $a_{11} = a_{02}b_{11}/b_{02},\ a_{20} = b_{20} = 0$;

3) $a_{11} = a_{20}b_{11}/b_{20},\ a_{02} = a_{20}b_{02}/b_{20}$.

În 1) (2), 3)) putem considera $b_{11} = 1$ (respectiv: $b_{02} = 1$ şi $b_{20} = 1$).

În condiţiile 1) avem $A_1(x,y) = xy(a_{10}x^2 - a_{11}b_{10}x^2 + a_{01}a_{11}y^2 - a_{11}^2b_{01}y^2)$. Din $A_1(x,y) \equiv 0$ rezultă că $a_{10} = a_{11} = 0$ sau $a_{10} = a_{11}b_{10},\ a_{01} = a_{11}b_{01}$.

Dacă $a_{10} = a_{11} = 0$, atunci $A_2(x,y) = y(a_{00}x^2 - a_{01}b_{10}x^2 + a_{01}^2y^2)$ şi $A_2 \equiv 0$ implică $deg(GCD(P,Q)) > 0$ ceea ce contrazice condiţiei (2.3).

Fie $a_{10} = a_{11}b_{10},\ a_{01} = a_{11}b_{01},\ a_{11} \neq 0$. În acest caz $A_1(x,y) \equiv 0$ şi $A_2(x,y) = (a_{00} - a_{11}b_{00})xy(x + a_{11}y)$, de unde $A_2(x,y) \equiv 0 \Rightarrow a_{00} = a_{11}b_{00}$. Realizarea ultimei egalităţi nu este permisă de cerinţa (2.3).

Presupunem că avem condiţiile 2), adică $a_{20} = b_{20} = b_{02} - 1 = a_{11} - a_{02}b_{11} = 0$, atunci $A_1(x,y) = y(b_{11}x + y)(x(a_{10} - a_{02}b_{10})(b_{11}x + 2y) + (a_{01} - a_{02}a_{10} - a_{02}b_{01} + a_{02}^2b_{10} + a_{01}a_{02}b_{11} - a_{02}^2b_{01}b_{11})y^2)$.

Identitatea $A_1(x,y) \equiv 0$ ne dă $a_{10} = a_{02}b_{10}$ şi $(a_{01} - a_{02}b_{01})(1 + a_{02}b_{11}) = 0$.

Dacă $a_{01} = a_{02}b_{01}$, atunci $A_2(x,y) = (a_{00} - a_{02}b_{00})y(b_{11}x + y)(b_{11}x + 2y + a_{02}b_{11}y)$ şi $a_{00} = a_{02}b_{00}$ implică $deg(GCD(P,Q)) > 0$.

Fie $1{+}a_{02}b_{11} = 0$, de unde $a_{02} = -1/b_{11}$. În aceste condiţii avem că $A_2(x,y) = -y(b_{11}x(b_{01}b_{10} - b_{00}b_{11} + a_{01}b_{10}b_{11} - a_{00}b_{11}^2)(b_{11}x + 2y) + (b_{01}b_{10} - b_{00}b_{11} - b_{01}^2b_{11} + a_{01}b_{10}b_{11} - a_{00}b_{11}^2 - 2a_{01}b_{01}b_{11}^2 - a_{01}^2b_{11}^3)y^2)/b_{11}^2$. Din $A_2(x,y) \equiv 0$ rezultă că $b_{00} = -a_{00}b_{11},\ b_{01} = -a_{01}b_{11}$ şi $deg(GCD(P,Q)) > 0$.

În final, vom examina sistemul (2.74) în condiţiile 3), adică $b_{20} = 1,\ a_{11} = a_{20}b_{11},\ a_{02} = a_{20}b_{02}$.

Avem $A_1(x,y) = -(x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)((a_{01} - a_{10}a_{20} - a_{20}b_{01} + a_{20}^2b_{10} - a_{10}b_{11} + a_{20}b_{10}b_{11})x^2 + 2(a_{20}^2b_{01} - a_{01}a_{20} - a_{10}b_{02} + a_{20}b_{02}b_{10})xy + (-a_{01}b_{02} + a_{10}a_{20}b_{02} + a_{20}b_{01}b_{02} - a_{20}^2b_{02}b_{10} - a_{01}a_{20}b_{11} + a_{20}^2b_{01}b_{11})y^2)$.

Identitatea $A_1(x,y) \equiv 0$ ne dă $a_{01} = a_{10}a_{20} + a_{20}b_{01} - a_{20}^2b_{10} - a_{10}b_{11} - a_{20}b_{10}b_{11})$ şi $(a_{10} - a_{20}b_{10})(a_{20}^2 + b_{02} + a_{20}b_{11}) = 0$.

Dacă $a_{10} = a_{20}b_{10}$, atunci $A_2(x,y) = (a_{00} - a_{20}b_{00})(2a_{20}x + b_{11}x + 2b_{02}y + a_{20}b_{11}y)(x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)$. Egalitatea cu zero a primului factor a lui $A_2(x,y)$ ne conduce la inegalitatea $deg(GCD(P,Q)) > 0$.

Fie $a_{00} - a_{20}b_{00} \neq 0$ şi $2a_{20}x + b_{11}x + 2b_{02}y + a_{20}b_{11}y \equiv 0$, adică $b_{11} = -2a_{20}$ şi $b_{02} = -a_{20}b_{11}/2$. În aceste condiţii $A_3(x,y) = (a_{00} - a_{20}b_{00})(b_{01} + a_{20}b_{10})(x - a_{20}y)^2$.

Dacă $b_{01} = -a_{20}b_{10}$, atunci $A_4(x,y) = 2(a_{00} - a_{20}b_{00})^2(x - a_{20}y) \not\equiv 0$ şi sistemul (2.15) arată astfel:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{00} + a_{20}b_{10}x + a_{20}x^2 - a_{20}^2b_{10}y - 2a_{20}^2xy + a_{20}^3y^2, \\ \dot{y} &= b_{00} + b_{10}x + x^2 - a_{20}b_{10}y - 2a_{20}xy + a_{20}^2y^2. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Transformarea $X = (b_{10} + 2x - 2a_{20}y)/(2\alpha),\ Y = -(4b_{00}b_{10} - b_{10}^3 + 8b_{00}x - 2b_{10}^2x - 8a_{20}b_{00}y + 2a_{20}b_{10}^2y - 8\alpha y)/(8\alpha^3)$, unde $\alpha = a_{00} - a_{20}b_{00}$, reduce sistemul obţinut la sistemul (2.76).

A rămas de examinat cazul când $a_{10} - a_{20}b_{10} \neq 0$ şi $b_{02} = -a_{20}^2 - a_{20}b_{11}$.

În cazul dat avem $A_2(x,y) = (x + a_{20}y + b_{11}y)((2a_{00}a_{20} - 2a_{20}^2b_{00} + a_{00}b_{11} - a_{20}b_{00}b_{11} + b_{01}\beta - a_{20}b_{10}\beta - b_{10}b_{11}\beta + \beta^2)x^2 - 2(2a_{00}a_{20}^2 - 2a_{20}^3b_{00} + a_{00}a_{20}b_{11} - a_{20}^2b_{00}b_{11} + a_{20}b_{01}\beta - a_{20}^2b_{10}\beta -$

$a_{20}b_{10}b_{11}\beta - a_{20}\beta^2 - b_{11}\beta^2)xy + (2a_{00}a_{20}^3 - 2a_{20}^4 b_{00} + a_{00}a_{20}^2 b_{11} - a_{20}^3 b_{00}b_{11} + a_{20}^2 b_{01}\beta - a_{20}^3 b_{10}\beta - a_{20}^2 b_{10}b_{11}\beta + a_{20}^2\beta^2 + 2a_{20}b_{11}\beta^2 + b_{11}^2\beta^2)y^2)$, unde $\beta = a_{10} - a_{20}b_{10}$.

Ţinând cont că $\beta \neq 0$, identitatea $A_2(x,y) \equiv 0$ are loc atunci şi numai atunci, când $b_{01} = -a_{20}b_{10} - \beta, b_{11} = -2a_{20}$. Polinomul $A_3(x,y)$ arată astfel $A_3(x,y) = \beta(-x + a_{20}y)((-2a_{00} + 2a_{20}b_{00} + b_{10}\beta)x + (2a_{00}a_{20} - 2a_{20}^2 b_{00} - a_{20}b_{10}\beta - 2\beta^2)y)$. Uşor se arată că $A_3(x,y) \not\equiv 0$.

Aşadar, s-a demonstrat

Teorema 2.4.2. *Multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit a oricărui sistem diferenţial pătratic cu infinitul nedegenerat nu depăşeşte cinci, iar sistemele pentru care această multiplicitate este egală cu cinci, cu exactitatea unei transformari afine şi rescalarea timpului, pot fi scrise sub forma* (2.76).

2.4.3. Cazul sistemelor cubice

În secţiunea de faţă pentru sistemul cubic $\{(2.27), (2.28)\}$ vom determina multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit $Z = 0$. Pentru aceasta omogenizăm (2.27):

$$\begin{cases} \dot{x} = P_0 Z^3 + P_1(x,y)Z^2 + P_2(x,y)Z + P_3(x,y), \\ \dot{y} = Q_0 Z^3 + Q_1(x,y)Z^2 + Q_2(x,y)Z + Q_3(x,y). \end{cases} \tag{2.79}$$

Fără a restrânge generalitatea putem considera în (2.79) $b_{30} = 1$.

Pentru sistemul (2.79) $E_1(\mathbb{X})$ este un polinom de gradul 8 în raport cu variabilele x, y şi Z. Scriem $E_1(X)$ sub forma:

$$\begin{aligned} &E_1(\mathbb{X}) = A_0(x,y) + A_1(x,y)Z + A_2(x,y)Z^2 + A_3(x,y)Z^3 + \\ &A_4(x,y)Z^4 + A_5(x,y)Z^5 + A_6(x,y)Z^6 + A_7(x,y)Z^7 + A_8(x,y)Z^8, \end{aligned} \tag{2.80}$$

unde $A_i(x,y)$, $i = 0,...,7$, sunt polinoame de x şi y. În particular, polinomul $A_0(x,y)$ arată astfel:

$A_0(x,y) = -A_{01}(x,y)A_{02}(x,y)$, unde $A_{01}(x,y) = -x^4 + (a_{30} - b_{21})x^3y + (a_{21} - b_{12})x^2y^2 + (a_{12} - b_{03})xy^3 + a_{03}y^4$, $A_{02}(x,y) = (a_{30}b_{21} - a_{21})x^4 + 2(a_{30}b_{12} - a_{12})x^3y + (3a_{30}b_{03} + a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21} - 3a_{03})x^2y^2 + 2(a_{21}b_{03} - a_{03}b_{21})xy^3 + (a_{12}b_{03} - a_{03}b_{12})y^4$.

Deoarece $A_{01} \not\equiv 0$, cerem ca A_{02} să fie identic zero, i.e. $A_{02} \equiv 0$. Aceasta are loc dacă $a_{21} = a_{30}b_{21}, \ \ a_{12} = a_{30}b_{12}, \ \ a_{03} = a_{30}b_{03}$.

În virtutea acestor condiţii avem $A_1(x,y) = -A_{11}(x,y)A_{12}(x,y)$, unde

$A_{11}(x,y) = x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \not\equiv 0$,

$A_{12}(x,y) = (a_{11} - a_{20}a_{30} - a_{30}b_{11} + a_{30}^2b_{20} - a_{20}b_{21} + a_{30}b_{20}b_{21})x^4 + 2(a_{02} - a_{11}a_{30} - a_{30}b_{02} + a_{30}^2b_{11} - a_{20}b_{12} + a_{30}b_{20}b_{12})x^3y + (3a_{30}^2b_{02} - 3a_5a_{02}a_{30} + a_{02}b_{21} - a_{11}a_{30}b_{21} + a_{30}^2b_{11}b_{21} - a_{30}b_{02}b_{21} - a_{11}b_{12} + a_{20}a_{30}b_{12} - a_{30}^2b_{20}b_{12} + a_{30}b_{11}b_{12} - 3a_{20}b_{03} + 3a_{30}b_{20}b_{03})x^2y^2 - 2(a_{02}a_{30}b_{21} - a_{30}^2b_{02}b_{21} + a_{11}b_{03} - a_{20}a_{30}b_{03} + a_{30}^2b_{20}b_{03} - a_{30}b_{11}b_{03})xy^3 + (a_{30}^2b_{02}b_{12} - a_{02}a_{30}b_{12} - a_{02}b_{03} + a_{11}a_{30}b_{03} - a_{30}^2b_{11}b_{03} + a_{30}b_{02}b_{03})y^4$.

Identitatea $A_{12}(x,y) \equiv 0$ se realizează doar în unul dintre cazurile:

1) $a_{20} = a_{30}b_{20},\ a_{11} = a_{30}b_{11},\ a_{02} = a_{30}b_{02}$;

2) $a_{11} = a_{20}a_{30} + a_{30}b_{11} - a_{30}^2b_{20} + a_{20}b_{21} - a_{30}b_{20}b_{21},\ a_{02} = a_{20}a_{30}^2 + a_{30}b_{02} + a_{20}b_{12} - a_{30}^3b_{20} - a_{30}b_{20}b_{12} + a_{20}a_{30}b_{21} - a_{30}^2b_{20}b_{21},\ b_{03} = -a_{30}(a_{30}^2 + b_{12} + a_{30}b_{21}),\ a_{20} \neq a_{30}b_{20}$.

În condiţiile 1) avem $A_2(x,y) = -A_{11}(x,y)A_{21}(x,y)$, unde

$A_{21} = (a_{01} - 2a_{10}a_{30} - a_{30}b_{01} + 2a_{30}^2b_{10} - a_{10}b_{21} + a_{30}b_{10}b_{21})x^3 + (3a_{30}^2b_{01} - 3a_{01}a_{30} - 2a_{10}b_{12} + 2a_{30}b_{10}b_{12} - a_{10}a_{30}b_{21} + a_{30}^2b_{10}b_{21})x^3y + (3a_{30}b_{03}b_{10} - 3a_{10}b_{03} - a_{01}b_{12} + a_{30}b_{01}b_{12} - 2a_{01}a_{30}b_{21} + 2a_{30}^2b_{01}b_{21})xy^2 + (a_{10}a_{30}b_{03} - 2a_{01}b_{03} + 2a_{30}b_{01}b_{03} - a_{30}^2b_{03}b_{10} - a_{01}a_{30}b_{12} + a_{30}^2b_{01}b_{12})y^3$.

Identitatea $A_{21}(x,y) \equiv 0$ ne conduce la următoarele două serii de condiţii:

$$a_{10} = a_{30}b_{10},\ a_{01} = a_{30}b_{01}; \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} &a_{01} = 2a_{10}a_{30} + a_{30}b_{01} - 2a_{30}^2b_{10} + a_{10}b_{21} - a_{30}b_{10}b_{21},\\ &b_{12} = -a_{30}(3a_{30} + 2b_{21}),\ b_{03} = a_{30}^2(2a_{30} + b_{21}), a_{10} \neq a_{30}b_{10}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

În cazul condiţiilor (2.81) $A_3(x,y) = \alpha A_{11}(x,y)A_{31}(x,y)$, unde $\alpha = a_{00} - a_{30}b_{00}$, $A_{31}(x,y) = (3a_{30} + b_{21})x^2 + 2(b_{12} + a_{30}b_{21})xy + (3b_{03} + a_{30}b_{12})y^2)$.

Dacă $\alpha = 0$, atunci $deg(GCD(P,Q)) > 0$ (vezi (2.28)). Fie $\alpha \neq 0$ şi $A_{31}(x,y) \equiv 0$, adică $b_{21} = -3a_{30},\ b_{12} = 3a_{30}^2,\ b_{03} = -a_{30}^3$. Atunci, $A_4(x,y) = \alpha A_{11}(x,y)((b_{11} + 2a_{30}b_{20})x + (2b_{02} + a_{30}b_{11})y)$.

Identitatea $A_4(x,y) \equiv 0$ are loc, dacă $b_{11} = -2a_{30}b_{20}$ şi $b_{02} = a_{30}^2b_{20}$. În aceste condiţii $A_5(x,y) = \alpha A_{11}(x,y)(b_{01} + a_{30}b_{10}) \equiv 0 \Rightarrow b_{01} = -a_{30}b_{10} \Rightarrow A_6(x,y) = 3\alpha^2(a_{30}y - x)^2 \not\equiv 0$.

Astfel, $E_1(x,y) = \alpha^2Z^6(3x^2 - 6a_{30}xy + 3a_{30}^2y^2 + 2b_{20}xZ - 2a_{30}b_{20}yZ + b_{10}Z^2)$ şi deci multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit, în acest caz, este egală cu şapte. Sistemul cubic (2.27) ia forma:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_{30}b_{00} + \alpha + a_{30}b_{10}x - a_{30}^2b_{10}y + a_{30}b_{20}x^2 - 2a_{30}^2b_{20}xy + a_{30}^3b_{20}y^2 + a_{30}x^3 -\\ &3a_{30}^2x^2y + 3a_{30}^3xy^2 - a_{30}^4y^3, \qquad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x - a_{30}b_{10}y + b_{20}x^2 - 2a_{30}b_{20}xy +\\ &a_{30}^2b_{20}y^2 + x^3 - 3a_{30}x^2y + 3a_{30}^2xy^2 - a_{30}^3y^3. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Prin intermediul transformării $X = (b_{20} + 3x - 3a_{30}y)/(3\alpha)$, $Y = -((27b_{00} - 9b_{10}b_{20} + 2b_{20}^3)x - (27a_{30}b_{00} - 9a_{30}b_{10}b_{20} + 2a_{30}b_{20}^3 + 27\alpha)y)/(27\alpha^4)$ sistemul (2.83) poate fi scris sub forma

$$\dot{X} = 1, \qquad \dot{Y} = aX + X^3, \tag{2.84}$$

unde $a = (3b_{10} - b_{20}^2)/(3\alpha^2)$.

În cazul condiţiilor (2.82) $A_3(x, y) = A_{11}(x, y)A_{31}(x, y)$, unde

$A_{31}(x, y) = (3a_0a_{30} - 3a_{30}^2b_{00} + a_0b_{21} - a_{30}b_{00}b_{21} + b_{11}\beta - a_{30}b_{20}\beta - b_{20}b_{21}\beta)x^2 - 2(3a_0a_{30}^2 - 3a_{30}^3b_{00} + a_0a_{30}b_{21} - a_{30}^2b_{00}b_{21} - b_{02}\beta - 2a_{30}^2b_{20}\beta - a_{30}b_{20}b_{21}\beta)xy + (3a_0a_{30}^3 - 3a_{30}^4b_{00} + a_0a_{30}^2b_{21} - a_{30}^3b_{00}b_{21} + a_{30}b_{02}\beta + 2a_{30}^2b_{11}\beta + b_{02}b_{21}\beta + a_{30}b_{11}b_{21}\beta)y^2$, $\beta = a_{10} - a_{30}b_{10} \not\equiv 0$.

Identitatea $A_{31}(x, y) \equiv 0$ se realizează, dacă $b_{11} = (-3a_0a_{30} + 3a_{30}^2b_{00} - a_0b_{21} + a_{30}b_{00}b_{21} + a_{30}b_{20}\beta + b_{20}b_{21}\beta)/\beta$ şi $b_{02} = -a_{30}(-3a_0a_{30} + 3a_{30}^2b_{00} - a_0b_{21} + a_{30}b_{00}b_{21} + 2a_{30}b_{20}\beta + b_{20}b_{21}\beta)/\beta$.

Astfel avem $A_4(x, y) = A_{41}(x, y)A_{42}(x, y)/\beta$, unde

$A_{41} = (-x + a_{30}y)(x + 2a_{30}y + b_{21}y) \not\equiv 0$,

$A_{42}(x, y) = (3a_0^2a_{30} - 6a_0a_{30}^2b_{00} + 3a_{30}^3b_{00}^2 + a_0^2b_{21} - 2a_0a_{30}b_{00}b_{21} + a_{30}^2b_{00}^2b_{21} - 3a_0a_{30}b_{20}\beta + 3a_{30}^2b_{00}b_{20}\beta - a_0b_{20}b_{21}\beta + a_{30}b_{00}b_{20}b_{21}\beta - b_{01}\beta^2 + 2a_{30}b_{10}\beta^2 + b_{10}b_{21}\beta^2 - 2\beta^3)x^2 - 2(3a_0^2a_{30}^2 - 6a_0a_{30}^3b_{00} + 3a_{30}^4b_{00}^2 + a_0^2a_{30}b_{21} - 2a_0a_{30}^2b_{00}b_{21} + a_{30}^3b_{00}^2b_{21} - 3a_0a_{30}^2b_{20}\beta + 3a_{30}^3b_{00}b_{20}\beta - a_0a_{30}b_{20}b_{21}\beta + a_{30}^2b_{00}b_{20}b_{21}\beta - a_{30}b_{01}\beta^2 + 2a_{30}^2b_{10}\beta^2 + a_{30}b_{10}b_{21}\beta^2 + 4a_{30}\beta^3 + 2b_{21}\beta^3)xy + (3a_0^2a_{30}^3 - 6a_0a_{30}^4b_{00} + 3a_{30}^5b_{00}^2 + a_0^2a_{30}^2b_{21} - 2a_0a_{30}^3b_{00}b_{21} + a_{30}^4b_{00}^2b_{21} - 3a_0a_{30}^3b_{20}\beta + 3a_{30}^4b_{00}b_{20}\beta - a_0a_{30}^2b_{20}b_{21}\beta + a_{30}^3b_{00}b_{20}b_{21}\beta - a_{30}^2b_{01}\beta^2 + 2a_{30}^3b_{10}\beta^2 + a_{30}^2b_{10}b_{21}\beta^2 - 8a_{30}^2\beta^3 - 8a_{30}b_{21}\beta^3 - 2b_{21}^2\beta^3)y^2$.

Din $A_{42}(x, y) \equiv 0$ obţinem $b_{01} = -a_{30}b_{10} - 2\beta$ şi $b_{21} = -3a_{30}$. Atunci $A_5(x, y) = \beta(3a_{00} - 3a_{30}b_{00} - b_{20}\beta)A_{11}(x, y)$.

Identitatea $A_5(x, y) \equiv 0$, la rândul său, ne dă $a_{00} = (3a_{30}b_{00} + b_{20}\beta)/3$. În condiţiile obţinute, avem $A_6(x, y) = 2\beta^2(x - a_{30}y)((b_{20}^2 - 3b_{10})x + (9\beta - a_{30}(b_{20}^2 - 3b_{10}))y)/3 \not\equiv 0$ şi $E_1(X) = Z^6\beta^2(3x - 3a_{30}y + b_{20}Z)(2b_{20}^2x - 6b_{10}x + 6a_{30}b_{10}y - 2a_{30}b_{20}^2y - 9b_{00}Z + b_{10}b_{20}Z + 18y\beta)/9$. Prin urmare, $m_a(Z = 0) = 7$, iar sistemul cubic (2.27) ia forma

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (3a_{30}b_{00} + b_{20}\beta + 3(a_{30}b_{10} + \beta)x - 3a_{30}(a_{30}b_{10} + 3\beta)y + 3a_{30}b_{20}x^2 - 6a_{30}^2b_{20}xy \\
&\quad + 3a_{30}^3b_{20}y^2 + 3a_{30}x^3 - 9a_{30}^2x^2y + 9a6^3xy^2 - 3a_{30}^4y^3)/3, \\
\dot{y} &= b_{00} + b_{10}x - (a_{30}b_{10} + 2\beta)y + b_{20}x^2 - 2a_{30}b_{20}xy + a_{30}^2b_{20}y^2 + x^3 - 3a_{30}x^2y \\
&\quad + 3a_{30}^2xy^2 - a_{30}^3y^3.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Transformarea de coordonate $X = (b_{20} + 3x - 3a_{30}y)/3$, $Y = (9b_{00} - b_{10}b_{20} + 2(3b_{10} - b_{20}^2)x + 2(a_{30}b_{20}^2 - 3a_{30}b_{10} - 9\beta)y)/18$ şi rescalarea timpului $t = -\tau/\beta$, reduce (2.85) la sistemul

$$\dot{X} = -X, \qquad \dot{Y} = 2Y + X^3. \tag{2.86}$$

În cazul 2) avem $A_2(x,y) = -A_{21}(x,y)A_{22}(x,y)$, unde

$A_{21}(x,y) = (x^2 + a_{30}xy + b_{21}xy + a_{30}^2y^2 + b_{12}y^2 + a_{30}b_{21}y^2) \not\equiv 0$,

$A_{22}(x,y) = (a_{01} - 2a_{10}a_{30} - a_{30}b_{01} + 2a_{30}^2b_{10} - a_{10}b_{21} + a_{30}b_{10}b_{21} - b_{11}\gamma + a_{30}b_{20}\gamma + b_{20}b_{21}\gamma - \gamma^2)x^4 - 2(2a_{01}a_{30} - a_{10}a_{30}^2 - 2a_{30}^2b_{01} + a_{30}^3b_{10} + a_{10}b_{12} - a_{30}b_{10}b_{12} + b_{02}\gamma - a_{30}b_{11}\gamma - b_{12}b_{20}\gamma + a_{30}\gamma^2 + b_{21}\gamma^2)x^3y + (3a_{01}a_{30}^2 + 3a_{10}a_{30}^3 - 3a_{30}^3b_{01} - 3a_{30}^4b_{10} - a_{01}b_{12} + 5a_{10}a_{30}b_{12} + a_{30}b_{01}b_{12} - 5a_{30}^2b_{10}b_{12} - 2a_{01}a_{30}b_{21} + 4a_{10}a_{30}^2b_{21} + 2a_{30}^2b_{01}b_{21} - 4a_{30}^3b_{10}b_{21} + 3a_{30}b_{02}\gamma + b_{11}b_{12}\gamma - 3a_{30}^3b_{20}\gamma - 4a_{30}b_{12}b_{20}\gamma - b_{02}b_{21}\gamma + a_{30}b_{11}b_{21}\gamma - 3a_{30}^2b_{20}b_{21}\gamma - 3a_{30}^2\gamma^2 - 2b_{12}\gamma^2 - 4a_{30}b_{21}\gamma^2 - b_{21}^2\gamma^2)x^2y^2 + 2(a_{01}a_{30}^3 - 2a_{10}a_{30}^4 - a_{30}^4b_{01} + 2a_{30}^5b_{10} + a_{01}a_{30}b_{12} - 2a_{10}a_{30}^2b_{12} - a_{30}^2b_{01}b_{12} + 2a_{30}^3b_{10}b_{12} + 2a_{01}a_{30}^2b_{21} - 2a_{10}a_{30}^3b_{21} - 2a_{30}^3b_{01}b_{21} + 2a_{30}^4b_{10}b_{21} - a_{30}^3b_{11}\gamma - a_{30}b_{11}b_{12}\gamma + a_{30}^4b_{20}\gamma + a_{30}^2b_{12}b_{20}\gamma + a_{30}b_{02}b_{21}\gamma - a_{30}^2b_{11}b_{21}\gamma + a_{30}^3b_{20}b_{21}\gamma - a_{30}^3\gamma^2 - a_{30}b_{12}\gamma^2 - 2a_{30}^2b_{21}\gamma^2 - b_{12}b_{21}\gamma^2 - a_{30}b_{21}^2\gamma^2)xy^3 + (a_{10}a_{30}^5 - 2a_{01}a_{30}^4 + 2a_{30}^5b_{01} - a_{30}^6b_{10} - a_{01}a_{30}^2b_{12} + a_{10}a_{30}^3b_{12} + a_{30}^3b_{01}b_{12} - a_{30}^4b_{10}b_{12} - 2a_{01}a_{30}^3b_{21} + a_{10}a_{30}^4b_{21} + 2a_{30}^4b_{01}b_{21} - a_{30}^5b_{10}b_{21} - a_{30}^3b_{02}\gamma + a_{30}^4b_{11}\gamma + a_{30}^2b_{11}b_{12}\gamma - a_{30}^2b_{02}b_{21}\gamma + a_{30}^3b_{11}b_{21}\gamma - a_{30}^4\gamma^2 - 2a_{30}^2b_{12}\gamma^2 - b_{12}^2\gamma^2 - 2a_{30}^3b_{21}\gamma^2 - 2a_{30}b_{12}b_{21}\gamma^2 - a_{30}^2b_{21}^2\gamma^2)y^4$, $\gamma = a_{20} - a_{30}b_{20}$.

Identitata $A_{22}(x,y) \equiv 0$ are loc, dacă $a_{01} = 2a_{10}a_{30} + a_{30}b_{01} - 2a_{30}^2b_{10} + a_{10}b_{21} - a_{30}b_{10}b_{21} + b_{11}\gamma - a_{30}b_{20}\gamma - b_{20}b_{21}\gamma + \gamma^2$, $b_{02} = -a_{30}b_{11} - a_{30}^2b_{20} - 3a_{30}\gamma - b_{21}\gamma$, $b_{12} = -a_{30}(3a_{30} + 2b_{21})$. Ţinând cont de aceste condiţii, polinomul $A_3(x,y)$ arată astfel $A_3(x,y) = A_{21}(x,y)A_{31}(x,y)$, unde

$A_{31}(x,y) = (-3a_0a_{30} + 3a_{30}^2b_{00} - a_{10}b_{11} + a_{30}b_{10}b_{11} + a_{10}a_{30}b_{20} - a_{30}^2b_{10}b_{20} - a_0b_{21} + a_{30}b_{00}b_{21} + a_{10}b_{20}b_{21} - a_{30}b_{10}b_{20}b_{21} - 3a_{10}\gamma - b_{01}\gamma + 5a_{30}b_{10}\gamma + b_{11}b_{20}\gamma - a_{30}b_{20}^2\gamma + b_{10}b_{21}\gamma - b_{20}^2b_{21}\gamma + 2b_{20}\gamma^2)x^3 + (9a_0a_{30}^2 - 9a_{30}^3b_{00} + 3a_{10}a_{30}b_{11} - 3a_{30}^2b_{10}b_{11} - 3a_{10}a_{30}^2b_{20} + 3a_{30}^3b_{10}b_{20} + 3a_0a_{30}b_{21} - 3a_{30}^2b_{00}b_{21} - 3a_{10}a_{30}b_{20}b_{21} + 3a_{30}^2b_{10}b_{20}b_{21} - 3a_{10}a_{30}\gamma + 3a_{30}b_{01}\gamma - 3a_{30}^2b_{10}\gamma - 3a_{30}b_{11}b_{20}\gamma + 3a_{30}^2b_{20}^2\gamma - 4a_{10}b_{21}\gamma + a_{30}b_{10}b_{21}\gamma + 3a_{30}b_{20}^2b_{21}\gamma - 2b_{11}\gamma^2 + 2a_{30}b_{20}\gamma^2 + 4b_{20}b_{21}\gamma^2 - 4\gamma^3)x^2y + (9a_{30}^4b_{00} - 9a_0a_{30}^3 - 3a_{10}a_{30}^2b_{11} + 3a_{30}^3b_{10}b_{11} + 3a_{10}a_{30}^3b_{20} - 3a_{30}^4b_{10}b_{20} - 3a_0a_{30}^2b_{21} + 3a_{30}^3b_{00}b_{21} + 3a_{10}a_{30}^2b_{20}b_{21} - 3a_{30}^3b_{10}b_{20}b_{21} - 3a_{10}a_{30}^2\gamma - 3a_{30}^2b_{01}\gamma + 9a_{30}^3b_{10}\gamma + 3a_{30}^2b_{11}b_{20}\gamma - 3a_{30}^3b_{20}^2\gamma - 4a_{10}a_{30}b_{21}\gamma + 7a_{30}^2b_{10}b_{21}\gamma - 3a_{30}^2b_{20}^2b_{21}\gamma - 2a_{10}b_{21}^2\gamma + 2a_{30}b_{10}b_{21}^2\gamma + a_{30}b_{11}\gamma^2 + 2a_{30}^2b_{20}\gamma^2 - b_{11}b_{21}\gamma^2 + 2a_{30}b_{20}b_{21}\gamma^2 + 2b_{20}b_{21}^2\gamma^2 - 7a_{30}\gamma^3 - 5b_{21}\gamma^3)xy^2 + (3a_0a_{30}^4 - 3a_{30}^5b_{00} + a_{10}a_{30}^3b_{11} - a_{30}^4b_{10}b_{11} - a_{10}a_{30}^4b_{20} + a_{30}^5b_{10}b_{20} + a_0a_{30}^3b_{21} - a_{30}^4b_{00}b_{21} - a_{10}a_{30}^3b_{20}b_{21} + a_{30}^4b_{10}b_{20}b_{21} + 9a_{10}A_{30}^3\gamma + a_{30}^3b_{01}\gamma - 11a_{30}^4b_{10}\gamma - a_{30}^3b_{11}b_{20}\gamma + a_{30}^4b_{20}^2\gamma + 8a_{10}a_{30}^2b_{21}\gamma - 9a_{30}^3b_{10}b_{21}\gamma + a_{30}^3b_{20}^2b_{21}\gamma + 2a_{10}a_{30}b_{21}^2\gamma - 2a_{30}^2b_{10}b_{21}^2\gamma + a_{30}^2b_{11}\gamma^2 - 6a_{30}^3b_{20}\gamma^2 + a_{30}b_{11}b_{21}\gamma^2 - 6a_{30}^2b_{20}b_{21}\gamma^2 - 2a_{30}b_{20}b_{21}^2\gamma^2 - 7a_{30}^2\gamma^3 - 7a_{30}b_{21}\gamma^3 - 2b_{21}^2\gamma^3)y^3$.

Dacă $A_{31}(x,y) \equiv 0$, atunci $b_{01} = -a_{10}$, $b_{11} = -2(a_{30}b_{20} + \gamma)$, $b_{21} = -3a_{30}$ şi $A_4(x,y) = A_{21}(x,y)A_{41}(x,y)$, unde

$A_{41}(x,y) = (a_{10}^2 - 2a_{10}a_{30}b_{10} + a_{30}^2b_{10}^2 + 2a_0\gamma - 2a_{30}b_{00}\gamma - 2a_{10}b_{20}\gamma + 2a_{30}b_{10}b_{20}\gamma - b_{10}\gamma^2 + b_{20}^2\gamma^2)x^2 - 2(a_{10}^2a_{30} - 2a_{10}a_{30}^2b_{10} + a_{30}^3b_{10}^2 + 2a_0a_{30}\gamma - 2a_{30}^2b_{00}\gamma - 2a_{10}a_{30}b_{20}\gamma + 2a_{30}^2b_{10}b_{20}\gamma - 3a_{10}\gamma^2 +$

$2a_{30}b_{10}\gamma^2 + a_{30}b_{20}^2\gamma^2 + 2b_{20}\gamma^3)xy + (a_{10}^2a_{30}^2 - 2a_{10}a_{30}^3b_{10} + a_{30}^4b_{10}^2 + 2a_0a_{30}^2\gamma - 2a_{30}^3b_{00}\gamma - 2a_{10}a_{30}^2b_{20}\gamma + 2a_{30}^3b_{10}b_{20}\gamma - 6a_{10}a_{30}\gamma^2 + 5a_{30}^2b_{10}\gamma^2 + a_{30}^2b_{20}^2\gamma^2 + 4a_{30}b_{20}\gamma^3 + 3\gamma^4)y^2$. Uşor se arată că $A_{41}(x,y) \not\equiv 0$, şi deci, $m_a\{Z = 0\} = 5$.

Astfel, a fost demonstrată următoarea teoremă.

Teorema 2.4.3. *Multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit pentru sistemul cubic de ecuaţii diferenţiale nu este mai mare ca şapte. Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic de ecuaţii diferenţiale care are dreapta de la infinit de multiplicitatea şapte poate fi scris sub forma* (2.84) *sau* (2.86).

Următoarele două exemple arată că în clasa sistemelor cubice multiplicitatea geometrică maximală a dreptei de la infinit este deasemenea egală cu şapte.

Exemplul 2.4.1. Sistemul cubic

$$\begin{aligned}\dot{X} &= 1 - 4\epsilon^2 + \epsilon(a - 3 + 14\epsilon^2 - 4a\epsilon^2)X + 2\epsilon^2(1 - 7\epsilon^2)X^2 \\ &\quad + \epsilon(1 - 4\epsilon^2 + 4\epsilon^4)X^3, \\ \dot{Y} &= aX + X^3 - 4a\epsilon^2X - \epsilon(3 - 14\epsilon^2)Y + 4\epsilon^2(1 - 7\epsilon^2)XY \\ &\quad - 2\epsilon^3(1 - 7\epsilon^2)Y^2 - 4\epsilon^2X^3 + 12\epsilon^5X^2Y - 12\epsilon^6XY^2 + 4\epsilon^7Y^3\end{aligned} \tag{2.87}$$

are şase drepte invariante afine $l_j,\ j = 1, 2, \ldots, 6$:

$l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = 1 - 4\epsilon^2 + \epsilon(a - 3 + 14\epsilon^2 - 4a\epsilon^2)X + 2\epsilon^2(1 - 7\epsilon^2)X^2 + \epsilon(1 - 4\epsilon^2 + 4\epsilon^4)X^3$,

$l_4 = 1 - \epsilon X + \epsilon^2Y,\ l_5 = 1 - 2\epsilon X + 2\epsilon^2Y,\ l_6 = -1 + 4\epsilon^2 - 2\epsilon^3X + 2\epsilon^4Y.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci (2.87) tinde la sistemul (2.84) şi dreptele invariante $l_j,\ j = 1, ..., 6$ tind spre infinit.

Exemplul 2.4.2. Sistemul cubic

$$\begin{aligned}\dot{X} &= X(-1 + 3\epsilon X)(1 - 3\epsilon X + 6\epsilon^3X), \\ \dot{Y} &= 2Y + X^3 - 6\epsilon(1 - \epsilon^2)XY - 12\epsilon^3Y^2 - \epsilon^2(3 + 6\epsilon^2 - 8\epsilon^4)X^3 \\ &\quad + 24\epsilon^4(1 - \epsilon^2)XY^2 + 16\epsilon^6Y^3\end{aligned} \tag{2.88}$$

are şapte drepte invariante afine:

$l_1 = X,\ l_2 = -1 + 3\epsilon X,\ l_3 = 1 - 3\epsilon X + 6\epsilon^3X,\ \ l_4 = 1 - 4\epsilon X + 4\epsilon^3X - 4\epsilon^3Y,$

$l_5 = 1 - \epsilon X + 4\epsilon^3X - 4\epsilon^3Y,\ \ l_6 = 1 - 2\epsilon X + 2\epsilon^3X - 2\epsilon^3Y,\ \ l_7 = -1 + \epsilon X + 2\epsilon^3X + 4\epsilon^3Y.$

Dacă $\epsilon \to 0$, sistemul (2.88) converge spre sistemul (2.86) şi dreptele invariante $l_2, l_3, ..., l_7$ tind spre infinit, adică pentru sistemul (2.86) dreapta de la infinit are multiplicitatea geometrică egală cu şapte.

2.5. Clasificarea sistemelor cubice cu două drepte invariante de multiplicitate totală maximală

Definiţia 2.5.1. *Vom spune că consecutivitatea din k numere* $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$*, unde* $\mu_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \ldots, k-1, \infty$, $\mu_j \geq \mu_{j+1}, j = 1, \ldots, k-1$, *formează în clasa sistemelor cubice o consecutivitate de multiplicităţi a dreptelor invariante, dacă există un aşa sistem cubic ce are* $k-1$ *drepte afine invariante* $l_1, ..., l_{k-1}$ *de multiplicităţile* $\mu_1, ..., \mu_{k-1}$ *respectiv, iar dreapta de la infinit are multiplicitatea egală cu* μ_∞.

Definiţia 2.5.2. *Consecutivitatea* $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$ *o vom numi maximală după componenta* $j, j \in \{1, 2, ..., k-1, \infty\}$*, dacă* $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{j-1}, \mu_j + 1, \mu_{j+1}, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$ *nu este pentru clasa de sisteme diferenţiale cubice o consecutivitate de multiplicităţi a dreptelor invariante. Consecutivitatea dată o vom nota cu* $m_j(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$*. Consecutivităţile de tipul* $m_j(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$ *le vom numi parţial maximale, iar dacă consecutivitatea* $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$ *este maximală după toate argumentele, atunci vom spune că ea este total maximală (pe scurt, maximală) şi o vom nota cu* $m(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{k-1}; \mu_\infty)$.

După cum rezultă din secţiunile 2.2.3 şi 2.4.3, în clasa sistemelor diferenţiale cubice $\{(2.29), (2.28)\}$ cu o dreaptă invariantă afină avem $m(7; 1)$ şi $m(1; 7)$ (vezi teoremele 2.2.3, 2.4.3). Menţionăm, că $m(7; 1)$ este realizată de sistemul (2.65), iar $m(1; 7)$ de sistemul (2.86). Sistemele (2.65), (2.86) sunt Darboux integrabile şi au următoarele integrale prime:

$$F(x, y) = (1 + 5x^2y)/(5x^5);$$

$$F(x, y) = x^2(x^3 + 5y)/5.$$

În această secţiune, pentru sistemele diferenţiale cubice $\{(2.29), (2.28)\}$ cu o dreaptă invariantă afină, vom determina toate consecutivităţile parţial maximale de tipul $m_\infty(\mu_1; \mu_\infty)$.

Fără a restrânge generalitatea, putem considera că dreapta invariantă afină este descrisă de ecuaţia $x = 0$. Aceasta ne permite să apelăm la lemele 2.2.1-2.2.5. Fixând $\mu_1 \in \{2, ..., 6\}$, vom determina μ_∞ astfel ca consecutivitatea $(\mu_1; \mu_\infty)$ să fie parţial maximală după componenta ∞.

1. $\mu_1 = 6$ (lema 2.2.5). *Multiplicitatea algebrică.* Dacă pentru sistemul (2.29) au loc condiţiile (2.32), (2.40), (2.48), (2.59) şi (2.62), atunci el arată astfel

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + 3a_{30}x^2y \tag{2.89}$$

şi are dreapta invariantă $x = 0$ de multiplicitatea algebrică nu mai mică ca şase. Conform condiţiei (2.28), $a_{30}b_{00} \neq 0$ şi din egalitatea $E_1(X) = a_{30}^2x^6(b_{10} + 2b_{20}x + 3b_{30}x^2 + 6a_{30}xy)$ se observă că multiplicitatea dreptei invariante $x = 0$ este egală exact cu şase, dacă $a_{30}b_{10} \neq 0$.

Fie că $a_{30}b_{00}b_{10} \neq 0$, atunci pentru sistemul omogenizat

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = b_{00}Z^3 + b_{10}xZ^2 + b_{20}x^2Z + b_{30}x^3 + 3a_{30}x^2y,$$

polinomul $E_1(\mathbb{X}) = a_{30}^2x^6(3b_{30}x^2 + 6a_{30}xy + 2b_{20}xZ + b_{10}Z^2)$ nu este divizibil prin Z. Deci, dreapta de la infinit are multiplicitatea exact egală cu unu.

Notăm $a = b_{10}/b_{00}$. Transformarea afină de coordonate $X = x, Y = (2b_{20}+3b_{30}x+6a_{30}y)/(6b_{00})$ şi rescalarea timpului $\tau = a_{30}t$, reduce (2.89) la sistemul de forma:

$$\dot{x} = x^3, \ \dot{y} = 1 + ax + 3x^2y, \quad a \neq 0. \tag{2.90}$$

Egalitatea $E_1(X) = x^6(a + 6xy)$ ne spune că sistemul (2.90) n-are drepte invariante afine distincte de $x = 0$. Sistemul (2.90) este Darboux integrabil şi are integrala primă

$$F(x, y) = (20x^2y + 5ax + 4)/(20x^5).$$

Multiplicitatea geometrică. Vom arăta că în cazul sistemului (2.90) multiplicităţile algebrice şi geometrice ale dreptei invariante $x = 0$ sunt egale.

Perturbăm sistemul (2.90) astfel:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + x^2) \equiv P(x, y), \\ &\dot{y} = 1 + ax + 3x^2y + b_{01}y + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \equiv Q(x, y). \end{aligned} \tag{2.91}$$

Sistemul perturbat (2.91) are un triplet de drepte invariante paralele l_1, l_2, l_3, unde $l_1 = x$ şi $l_2 \cdot l_3 = a_{10} + a_{20}x + x^2$. Vom mai cere de la el ca să mai admită un asemenea triplet:

$$l_4 = x - \epsilon_1 y - d_1, l_5 = x - \epsilon_1 y - d_2, l_6 = x - \epsilon_1 y - d_3. \tag{2.92}$$

Invarianţa dreptelor (2.92) este asigurată de identitatea cu zero în raport cu x şi y a expresiei

$$P(x, y) - \epsilon_1 Q(x, y) - l_4 \cdot l_5 \cdot l_6, \tag{2.93}$$

de unde urmează egalităţile

$d_1d_2d_3 - \epsilon_1 = 0$, $a_{10} - d_1d_2 - d_1d_3 - d_2d_3 - b_{10}\epsilon_1 = 0$, $(b_{01} - d_1d_2 - d_1d_3 - d_2d_3)\epsilon_1 = 0$, $a_{20} + d_1 + d_2 + d_3 = 0$, $(b_{11} + 2d_1 + 2d_2 + 2d_3)\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_1(b_{02} - d_1\epsilon_1 - d_2\epsilon_1 - d_3\epsilon_1) = 0$, $\epsilon_1(b_{12} + 3\epsilon_1) = 0$, $\epsilon_1(b_{03} - \epsilon_1^2) = 0$.

Sistemul de egalităţi obţinut este compatibil dacă, de exemplu,

$\epsilon_1 = d_1d_2d_3$; $b_{03} = (d_1d_2d_3)^2$; $b_{12} = -3d_1d_2d_3$; $a_{10} = d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 + b_{10}d_1d_2d_3$; $b_{01} = d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3$; $a_{20} = -d_1 - d_2 - d_3$; $b_{11} = -2d_1 - 2d_2 - 2d_3$; $b_{02} = d_1^2d_2d_3 + d_1d_2^2d_3 + d_1d_2d_3^2$;

Ţinând cont de aceasta şi punând $d_1 = \epsilon$, $d_2 = -\epsilon$, $d_3 = 2\epsilon$, sistemul (2.91) se reduce la sistemul

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x^2 - 2\epsilon x - 2a\epsilon^3 - \epsilon^2), \\ \dot{y} &= 1 + ax + 3x^2y - \epsilon^2 y - 4\epsilon xy - 4\epsilon^4y^2 + 6\epsilon^3xy^2 + 4\epsilon^6y^3, \end{aligned} \tag{2.94}$$

ce posedă dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 \cdot l_3 = x^2 - 2\epsilon x - 2a\epsilon^3 - \epsilon^2$, $l_4 = x + 2\epsilon^3y + \epsilon$, $l_5 = x + 2\epsilon^3y - \epsilon$, $l_6 = x + 2\epsilon^3y + 2\epsilon$. Dacă $\epsilon \to 0$, atunci (2.94) tinde către sistemul (2.90), iar dreptele $l_i, i = 2, .., 6$, - către dreapta $x = 0$.

Astfel, a fost demonstrată următoarea teoremă.

Teorema 2.5.1. *Cu ajutorul unei transformări afine şi rescalarea timpului orice sistem diferenţial cubic ce posedă o dreaptă invariantă afină de multipicitatea strict egală cu şase poate fi scris sub forma* (2.90). *Aceste sisteme au o singură dreaptă invariantă afină, sunt Darboux integrabile şi avem* $m_\infty(6;1)$.

2. $\mu_1 = 5$ (lema 2.2.4). *Multiplicitatea algebrică.* În condiţiile 2.20): (2.32), (2.40), (2.48), (2.59), sistemul $\{(2.29), (2.28)\}$ are forma

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y, \ \ a_{30}b_{00} \neq 0. \tag{2.95}$$

Pentru (2.95) $A_j(y) \equiv 0, j = \overline{1,4}$ şi $A_5(y) = a_{30}b_{00}(b_{21} - 3a_{30})$ (vezi (3.126)). Dacă $b_{21} - 3a_{30} \neq 0$, atunci dreapta invariantă $x = 0$ a sistemului (2.95) are multiplicitatea algebrică exact egală cu cinci.

Considerăm sistemul omogenizat

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = b_{00}Z^3 + b_{10}xZ^2 + b_{20}x^2Z + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y, \ \ a_{30}b_{00} \neq 0, \tag{2.96}$$

corespunzător sistemului (2.95). Calculăm $E_1(X)$ şi-l scriem sub forma (2.80). Astfel avem: $A_0(x, y) = a_{30}b_{21}x^7(b_{30}x - a_{30}y + b_{21}y)$. Polinomul $A_0(x, y)$ este identic zero, dacă $b_{21} = a_{30}$ şi $b_{30} = 0$ sau dacă $b_{21} = 0$. Dacă $b_{21} = a_{30}$ şi $b_{30} = 0$, atunci sistemul cubic (2.95) are infinitul degenerat. Dacă $b_{21} = 0$, atunci: $A_1(x, y) = -a_{30}^2b_{20}x^7 \equiv 0 \Rightarrow b_{20} = 0 \Rightarrow A_2(x, y) = -2a_{30}^2b_{10}x^6 \equiv 0 \Rightarrow b_{10} = 0 \Rightarrow A_3(x, y) = -3a_{30}^2b_{00}x^5 \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 4$. Sistemul cubic (2.95) obţine forma

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = b_{00} + b_{30}x^3. \tag{2.97}$$

Transformarea $X = x, Y = (-b_{30}x + a_{30}y)/b_{00}$, $\tau = a_{30}t$, reduce (2.97) la următorul sistem

$$\dot{x} = x^3, \quad \dot{y} = 1. \tag{2.98}$$

Sistemul obţinut este Darboux integrabil şi are integrala primă:

$$F(x, y) = (2x^2y + 1)/(2x^2).$$

În condiţiile 2.21) ((2.35), (2.46), (2.55); (2.60)) avem sistemul cubic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a_{11}^2 + 2a_{11}a_{21}x + 4a_{11}a_{12}y + 4a_{30}a_{12}x^2 + 4a_{21}a_{12}xy + 4a_{12}^2y^2)/(4a_{12}), \\ \dot{y} &= (a_{11}^3 + 2a_{11}^2a_{21}x + 6a_{11}^2a_{12}y + 8a_{12}^2b_{20}x^2 + 8a_{11}a_{21}a_{12}xy + 12a_{11}a_{12}^2y^2 \\ &\quad +8a_{30}a_{12}^2x^2y + 8a_{21}a_{12}^2xy^2 + 8a_{12}^3y^3)/(8a_{12}^2). \end{aligned} \tag{2.99}$$

Pentru acest sistem polinomial $E_1(\mathbb{X})$ arată astfel $E_1(X) = -x^5(a_{11}a_{30} - 2a_{12}b_{20})^2(a_{11} + a_{21}x + 2a_{12}y)/(4a_{12}^2)$. Prin urmare, dacă $a_{11}a_{30} - 2a_{12}b_{20} \neq 0$, atunci dreapta invariantă $x = 0$ a sistemului (2.99) are multiplicitatea algebrică exact egală cu cinci.

În cazul sistemului (2.99) pentru dreapta de la infinit avem: $A_0(x, y) = A_1(x, y) = 0$, $A_2(x, y) = -x^5((a_{11}a_{30} - 2a_{12}b_{20})^2(a_{21}x + 2a_{12}y))/(4a_{12}^2) \not\equiv 0$, adică ea are multiplicitatea 3, i.e. $\mu_\infty = 3$.

Multiplicitatea geometrică. Multiplicitatea geometrică a dreptei de la infinit a sistemului (2.98) este egală cu patru. Această afirmaţie este confirmată de următorul exemplu.

Exemplul 2.5.1. *[41]* Sistemul

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x + 3\epsilon)(x + 6\epsilon), \\ \dot{y} &= (1 - 2\epsilon^2y)(1 + 4\epsilon^2y)(1 - 8\epsilon^2y) \end{aligned} \tag{2.100}$$

are dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x + 3\epsilon$, $l_3 = x + 6\epsilon$, $l_4 = x + 8\epsilon^3y + 2\epsilon$, $l_5 = x - 8\epsilon^3y + 4\epsilon$, $l_6 = 1 - 2\epsilon^2y$, $l_7 = 1 + 4\epsilon^2y$, $l_8 = 1 - 8\epsilon^2y$. Dacă $\epsilon \to 0$, atunci sistemul (2.100) tinde la (2.98) şi $l_{1,\dots,5} \to x$, $l_{6,7,8} \to \infty$.

Are loc

Teorema 2.5.2. *Cu ajutorul unei transformări afine şi rescalarea timpului orice sistem diferenţial cubic ce posedă o dreaptă invariantă afină de multipicitate strict egală cu cinci şi pentru care dreapta de la infinit are multiplicitatea patru poate fi scris sub forma* (2.98). *Aceste sisteme au o singură dreaptă invariantă afină, sunt Darboux integrabile şi avem* $m(5; 4)$.

3. $\mu_1 = 4$ (lema 2.2.3). *Multiplicitatea algebrică.* În cazul 2.9) ((2.32), (2.40), (2.48)) sistemul $\{(2.29), (2.28)\}$ arată astfel

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \ \ \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2, \ \ a_{30}b_{00} \neq 0. \tag{2.101}$$

Pentru (2.101): $A_j(y) = 0$, $j = \overline{1, 3}$, $A_4(y) = a_{30}b_{00}(b_{11} + 2b_{12}y)$. Dacă $(b_{11}, b_{12}) \neq 0$, atunci multiplicitatea algebrică a dreptei $x = 0$ este exact egală cu patru.

Presupunem că $(b_{11}, b_{12}) \neq 0$ şi considerăm sistemul omogenizat asociat sistemului (2.101). Pentru acest sistem avem $A_0(x,y) = a_{30}x^5(b_{21}x + 2b_{12}y)(b_{30}x^2 + (b_{21} - a_{30})xy + b_{12}y^2)$. Dacă $b_{21} = b_{12} = 0$, atunci $A_1(x,y) = a_{30}x^6((b_{11}b_{30} - a_{30}b_{20})x - 2a_{30}b_{11}y) \not\equiv 0$ şi $\mu_\infty = 2$, iar dacă $b_{30} = b_{21} - a_{30} = b_{12} = 0$, atunci $A_0(x,y) \equiv 0$, $A_1(x,y) \equiv 0$, $A_2(x,y) = a_{30}x^5((b_{20}b_{11} - a_{30}b_{10})x + b_{11}^2 y) \not\equiv 0$ şi $\mu_\infty = 3$.

În condiţiile 2.10) ((2.32), (2.41), (2.49)) sistemul cubic $\{(2.29), (2.28)\}$ are forma

$$\dot{x} = x^2(a_{20} + a_{30}x), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + 2a_{20}xy + b_{21}x^2y, \quad a_{20}b_{00} \neq 0. \tag{2.102}$$

Pentru (2.102): $A_j(y) = 0$, $j = \overline{1,3}$, $A_4(y) = a_{20}(a_{20}b_{10} + b_{00}b_{21} - 3a_{30}b_{00} + 2a_{20}^2 y) \neq 0$ şi $m_a(x = 0) = 4$, iar pentru sistemul omogenizat asociat sistemului (2.102) avem $A_0(x,y) = a_{30}b_{21}x^7(b_{30}x - a_{30}y + b_{21}y)$. Dacă $b_{30}x - a_{30}y + b_{21}y \equiv 0$, atunci infinitul pentru (2.102) este degenerat, ceea ce este contrar condiţiei (2.28). Dacă $a_{30} = 0$, atunci $A_1(x,y) = a_{20}b_{21}x^6(b_{30}x + b_{21}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{21} = 0 \Rightarrow A_2(x,y) = 3a_{20}^2 b_{30}x^6 \not\equiv 0 \Rightarrow \mu_\infty = 3$. Fie $b_{21} = 0$ şi $a_{30} \neq 0$. Prin urmare, $A_1(x,y) = -a_{30}x^6(a_{30}b_{20}x - 3a_{20}b_{30}x + 4a_{20}a_{30}y) \not\equiv 0 \Rightarrow \mu_\infty = 2$.

Este uşor de aratat, că în cazurile 2.11), 2.15), 2.16), 2.17), 2.18) şi 2.19) multiplicitatea dreptei de la infinit pentru sistemul $\{(2.29), (2.28)\}$ este egală cu unu, deoarece $A_0(x,y) \not\equiv 0$.

În cazul 2.12) ((2.33), (2.43), (2.51)) avem următorul sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \quad \dot{y} = (a_{10}b_{00} + a_{20}b_{00}x + a_{10}^2 y + a_{30}b_{00}x^2 \\ +(a_{10}a_{20} + a_{21}b_{00})xy + a_{10}b_{30}x^3 + a_{10}a_{30}x^2y + a_{10}a_{21}xy^2)/a_{10} \end{aligned} \tag{2.103}$$

şi polinoamele $A_j(y) = 0$, $j = 1, 2, 3$; $A_4(y) = 3a_{10}^2 b_{30}$. Dacă $b_{30} = 0$, atunci infinitul este degenerat. Dacă $b_{30} \neq 0$, atunci $A_4(y) \neq 0$ şi $m_a(x = 0) = 4$.

Pentru sistemul omogenizat asociat sistemului (2.103) avem $A_0(x,y) = -b_{30}x^6((a_{21}b_{30} - a_{30}^2)x^2 - 2a_{30}a_{21}xy - a_{21}^2 y^2)$. Deoarece $b_{30} \neq 0$, identitatea $A_0(x,y) \equiv 0$ implică $a_{30} = a_{21} = 0$. Astfel $A_0(x,y) \equiv 0$, $A_1(x,y) \equiv 0$ şi $A_2(x,y) = 2a_{20}^2 b_{30}x^6 \equiv 0 \Rightarrow a_{20} = 0 \Rightarrow A_2(x,y) \equiv 0$, $A_3(x,y) \equiv 0$, $A_4(x,y) = 3a_{10}^2 b_{30}x^4 \not\equiv 0 \Rightarrow \mu_\infty = 5$. Sistemul cubic (2.103) are forma

$$\dot{x} = a_{10}x, \ \dot{y} = b_{00} + a_{10}y + b_{30}x^3, \quad a_{10} \neq 0. \tag{2.104}$$

Transformarea $X = x$, $Y = (b_{00} + a_{10}y)/b_{30}$, $\tau = a_{10}t$, reduce (2.104) la sistemul

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y + x^3. \tag{2.105}$$

Acest sistem are o singură dreaptă invariantă afină $x = 0$, este Darboux integrabil şi are integrala primă $F(x,y) = (2y - x^3)/x$. Menţionăm, că sistemul (2.105) a fost examinat în [41].

În condiţiile cazului 2.13) ((2.34), (2.44), (2.52)) avem sistemul

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_{10}+a_{20}x+a_{30}x^2+a_{11}y+a_{21}xy),\ \ \dot{y}=(a_{10}^2+a_{10}a_{20}x+2a_{10}a_{11}y+a_{10}a_{30}x^2\\ &\quad +(a_{20}a_{11}+a_{10}a_{21})xy+a_{11}^2y^2+a_{11}b_{30}x^3+a_{11}a_{30}x^2y+a_{11}a_{21}xy^2)/a_{11},\end{aligned} \tag{2.106}$$

$A_j(y)=0$, $j=1,2,3$, şi $A_4(y)=2b_{30}(a_{10}+a_{11}y)^2$. Dacă $b_{30}\neq 0$, atunci dreapta invariantă $x=0$ are multiplicitatea algebrică exact egală cu patru.

Pentru sistemul omogenizat asociat sistemului (2.106) polinomul $A_0(x,y)=-b_{30}x^6(-a_{30}^2x^2+a_{21}b_{30}x^2-2a_{30}a_{21}xy-a_{21}^2y^2)$ este identic egal cu zero dacă $a_{30}=a_{21}=0$. Atunci, $A_1(x,y)=-a_{11}b_{30}^2x^7\not\equiv 0$ şi, prin urmare, $\mu_\infty=2$.

În utimul caz 2.14) ((2.34), (2.45), (2.53)) sistemul cubic are forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_{10}+a_{20}x+a_{11}y+a_{30}x^2+a_{21}xy),\\ \dot{y} &= (-a_{10}^2+a_{10}b_{01}+a_{20}(b_{01}-a_{10})x+a_{11}b_{01}y+a_{30}(b_{01}-a_{10})x^2\\ &\quad +(a_{20}a_{11}-a_{10}a_{21}+a_{21}b_{01})xy+a_{11}^2y^2+a_{11}b_{30}x^3+a_{11}a_{30}x^2y+a_{11}a_{21}xy^2)/a_{11}\end{aligned} \tag{2.107}$$

şi pentru el $A_j(y)=0$, $j=\overline{1,3}$, $A_4(y)=b_{30}(a_{10}+a_{11}y)(4a_{10}-b_{01}+2a_{11}y)$. Fie $b_{30}\neq 0$, atunci $A_4(y)\not\equiv 0$, deci multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x=0$ este exact egală cu patru. Pentru sistemul omogenizat asociat sistemului (2.107) avem: $A_0(x,y)=-b_{30}x^6(-a_{30}^2x^2+a_{21}b_{30}x^2-2a_{30}a_{21}xy-a_{21}^2y^2)\Rightarrow a_{30}=a_{21}=0\Rightarrow A_1(x,y)=-a_{11}b_{30}^2x^7\not\equiv 0\Rightarrow \mu_\infty=2$.

Multiplicitatea geometrică. Următorul exemplu arată că multiplicitatea geometrică a dreptei invariante afine $x=0$ a sistemului (2.105) este egală cu patru şi dreapta de la infinit are multiplicitatea egală cu cinci.

Exemplul 2.5.2. *[41]* Sistemul

$$\dot{x}=x-4\epsilon^2x^3,\quad \dot{y}=y+x^3-3\epsilon^2x^2y-9\epsilon^4xy^2-9\epsilon^6y^3, \tag{2.108}$$

posedă opt drepte invariante afine: $l_1=x$, $l_{2,3}=x\pm 3\epsilon^2y$, $l_4=x+\epsilon^2y$, $l_{5,6}=2\epsilon x\pm 1$, $l_{7,8}=\epsilon x+3\epsilon^3y\pm 1$, şi (2.108)$\to$ (2.105), $l_{1,2,3,4}\to x$, $l_{5,6,7,8}\to\infty$, dacă $\epsilon\to 0$.

Astfel, are loc

Teorema 2.5.3. *Cu ajutorul unei transformări afine şi rescalarea timpului orice sistem diferenţial cubic ce posedă o dreaptă invariantă afină de multipicitatea strict egală cu patru şi pentru care dreapta de la infinit are multiplicitatea cinci poate fi scris sub forma* (2.105). *Aceste sisteme au o singură dreaptă invariantă afină, sunt Darboux integrabile şi avem* $m(4;5)$.

4. $\mu_1 = 3$ (lema 2.2.2). *Multiplicitatea algebrică.* În cazul 2.1) ((2.32), (2.40)) sistemul cubic $\{(2.29),(2.28)\}$ are forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \\ +b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3, a_{30} \neq 0. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Pentru acest sistem $A_1(y) \equiv 0$, $A_2(y) \equiv 0$ şi $A_3(y) = a_{30}(b_{01} + 2b_{02}y + 3b_{03}y^2)(b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2 + b_{03}y^3)$. Dacă $(b_{01}, b_{02}, b_{03}) \neq 0$, atunci pentru (2.109) dreapta invariantă $x = 0$ are multiplicitatea algebrică egală cu trei. În aceste condiţii vom stabili multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit. Pentru sistemul omogenizat asociat sistemului (2.109) avem $A_0(x,y) = -a_{30}x^3(b_{21}x^2+2b_{12}xy+3b_{03}y^2)(-b_{30}x^3+(a_{30}-b_{21})x^2y-b_{12}xy^2-b_{03}y^3)$ (vezi (2.80)). Identitatea $A_0(x,y) \equiv 0$ are loc dacă $b_{30} = b_{12} = b_{03} = 0$, $b_{21} = a_{30}$ sau $b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0$. Dacă $b_{30} = b_{12} = b_{03} = 0$, $b_{21} = a_{30}$, atunci pentru sistemul cubic (2.29) infinitul este degenerat. Fie $b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0$. Ţinând cont de condiţiile (2.28) şi egalităţile $b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0$, obţinem $A_1(x,y) = -a_{30}x^5((a_{30}b_{20} - b_{11}b_{30})x^2 + 2(a_{30}b_{11} - b_{02}b_{30})xy + 3a_{30}b_{02}y^2) \equiv 0 \Rightarrow b_{20} = b_{11} = b_{02} = 0$ şi $A_2(x,y) = -a_{30}x^5((2a_{30}b_{10} - b_{01}b_{30})x + 3a_{30}b_{01}y) \not\equiv 0$. Prin urmare, $\mu_\infty = 3$.

În cazul 2.2) ((2.32), (2.41)) avem sistemul

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x^2(a_{20} + a_{30}x), \\ &\dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2, \;\; a_{20} \not\equiv 0. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Pentru (2.110): $A_1(y) = A_2(y) = 0$ şi $A_3(y) = -a_{20}b_{00}(2a_{20} - b_{11} - 2b_{12}y)$. Dacă $a_{20}b_{00}(|b_{11} - 2a_{20}| + |b_{12}|) \neq 0$, adică $A_3(y) \not\equiv 0$, atunci dreapta invariantă $x = 0$ a sistemului (2.110) are multiplicitatea algebrică exact egală cu trei. Pentru sistemul omogenizat asociat sistemului (2.110) polinomul $A_0(x,y) = a_{30}x^5(b_{21}x+2b_{12}y)(b_{30}x^2+(b_{21}-a_{30})xy+b_{12}y^2)$ este identic egal cu zero dacă are loc una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$a_{30} = 0; \tag{2.111}$$

$$b_{21} = b_{12} = 0, a_{30} \neq 0; \tag{2.112}$$

$$b_{30} = b_{12} = 0, b_{21} = a_{30}, a_{30} \neq 0. \tag{2.113}$$

Fie că are loc (2.111). În acest caz: $\{(2.28),\ A_1(x,y) = a_{20}x^4(b_{21}x + 2b_{12}y)(b_{30}x^2 + b_{21}xy + b_{12}y^2) \equiv 0\} \Rightarrow b_{12} = b_{21} = 0,\ a_{20}b_{30} \neq 0 \Rightarrow A_2(x,y) = a_{20}(a_{20} + b_{11})b_{30}x^6 \equiv 0 \Rightarrow b_{11} = -a_{20} \Rightarrow A_3(x,y) = a_{20}^2x^4(-b_{20}x + 2a_{20}y) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 4$.

Presupunem că se realizează condiţiile (2.112), atunci $A_1(x,y) = -a_{30}x^6((a_{30}b_{20} - a_{20}b_{30} - b_{11}b_{30})x + 2a_{30}b_{11}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{11} = 0,\ b_{20} = a_{20}b_{30}/a_{30} \Rightarrow A_2(x,y) = -2a_{30}^2b_{10}x^6 \equiv 0 \Rightarrow b_{10} = 0 \Rightarrow A_3(x,y) = -3a_{30}^2b_{00}x^5 \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 4$.

În condiţiile (2.113) sistemul (2.110) are infinitul degenerat.

În cazul 2.3) ((2.32), (2.42)) avem sistemul

$$\begin{aligned}&\dot{x} = x^2(a_{20} + a_{30}x + a_{21}y), \quad \dot{y} = (a_{20}b_{01} + a_{21}b_{10}x + a_{21}b_{20}x^2 + a_{21}b_{30}x^3 + \\ &+a_{21}b_{01}y + a_{21}b_{11}xy + a_{21}b_{21}x^2y + a_{21}b_{12}xy^2)/a_{21}\end{aligned} \tag{2.114}$$

şi polinoamele: $A_1(y) = A_2(y) = 0$ şi $A_3(y) = -b_{01}(a_{20} + a_{21}y)(2a_{20}^2 - a_{30}b_{01} + a_{21}b_{10} - a_{20}b_{11} + 2a_{20}(2a_{21} - b_{12})y + a_{21}(2a_{21} - b_{12})y^2)/a_{21}$. Dacă

$$b_{01} \neq 0 \tag{2.115}$$

şi $(|2a_{21} - b_{12}| + |2a_{20}^2 - a_{30}b_{01} + a_{21}b_{10} - a_{20}b_{11}|) \neq 0$, atunci dreapta invariantă $x = 0$ a sistemului (2.114) are multiplicitatea algebrică exact egală cu trei. Pentru sistemul omogenizat corespunzător sistemului (2.114) polinomul $A_0(x, y)$ arată astfel: $A_0(x, y) = A_{01}(x, y)A_{02}(x, y)$, unde $A_{01}(x, y) = x^4(-b_{30}x^2 + (a_{30} - b_{21})xy + (a_{21} - b_{12})y^2)$ şi $A_{02}(x, y) = (a_{21}b_{30} - a_{30}b_{21})x^2 - 2a_{30}b_{12}xy - a_{21}b_{12}y^2$. Dacă $A_{01}(x, y) \equiv 0$, atunci infinitul pentru (2.114) este degenerat. Fie $A_{01}(x, y) \not\equiv 0$ şi $A_{02}(x, y) \equiv 0$, atunci $b_{30} = a_{30}b_{21}/a_{21}$ şi $b_{12} = 0$. În aceste condiţii $A_1(x, y) = x^4(a_{30}x + a_{21}y)((a_{30}a_{21}b_{20} - a_{20}a_{30}b_{21} + a_{21}b_{20}b_{21} - a_{30}b_{11}b_{21} - a_{20}b_{21}^2)x^2 + 2a_{30}a_{21}b_{11}xy + a_{21}^2b_{11}y^2)$. Dacă $A_1(x, y) \equiv 0$, atunci $b_{11} = a_{30} + b_{21} = 0$ sau $b_{11} = a_{20}b_{21} - a_{21}b_{20} = 0$. În ambele cazuri identitatea $A_2(x, y) \equiv 0$ contrazice (2.115).

În cazul 2.4) ((2.33), (2.43)) sistemul $\{(2.29), (2.28)\}$ ia forma

$$\begin{aligned}&\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \quad \dot{y} = (a_{10}b_{00} + a_{20}b_{00}x + a_{10}^2y + a_{10}b_{20}x^2 \\ &+(a_{10}a_{20} + a_{21}b_{00})xy + a_{10}b_{30}x^3 + a_{10}b_{21}x^2y + a_{10}a_{21}xy^2)/a_{10}.\end{aligned} \tag{2.116}$$

Pentru (2.116): $A_1(y) \equiv 0$, $A_2(y) \equiv 0$ şi $A_3(y) = -a_{10}(3a_{30}b_{00} - 2a_{10}b_{20} - b_{00}b_{21} + 3a_{10}(a_{30} - b_{21})y)$. Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ este egală cu trei, dacă are loc următoarea inegalitate: $|a_{30} - b_{21}| + |3a_{30}b_{00} - 2a_{10}b_{20} - b_{00}b_{21}| \neq 0$. Ţinând cont de această inegalitate, vom calcula multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit $Z = 0$. Identitatea $A_0(x, y) \equiv 0$, unde $A_0(x, y) = x^5(b_{30}x + (b_{21} - a_{30})y)((a_{30}b_{21} - a_{21}b_{30})x^2 + 2a_{21}a_{30}xy + a_{21}^2y^2)$ are loc, dacă se realizează una dintre următoarele serii de condiţii:

$$b_{30} = 0, b_{21} = a_{30}; \tag{2.117}$$

$$a_{30} = a_{21} = 0; \tag{2.118}$$

$$a_{21} = 0, b_{21} = 0, a_{30} \neq 0. \tag{2.119}$$

În condiţiile (2.117) sistemul cubic are infinitul degenerat. Dacă au loc egalităţile (2.118), atunci $A_1(x,y) = a_{20}b_{21}x^6(b_{30}x + b_{21}y)$. Identitatea $A_1(x,y) \equiv 0$ are loc, dacă $a_{20} = 0$ sau $b_{21} = 0, a_{20} \neq 0$. Dacă $a_{20} = 0$ atunci $A_2(x,y) = a_{10}b_{21}x^5(b_{30}x + b_{21}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{21} = 0 \Rightarrow A_3(x,y) \equiv 0, A_4(x,y) = 3a_{10}^2b_{30}x^4 \not\equiv 0$ (vezi (2.28)) $\Rightarrow \mu_\infty = 5$.

În acest caz sistemul $\{(2.29), (2.28)\}$ arată astfel

$$\dot{x} = a_{10}x, \quad \dot{y} = b_{00} + a_{10}y + b_{20}x^2 + b_{30}x^3, a_{10}b_{20}b_{30} \neq 0. \tag{2.120}$$

Transformarea afină $X = b_{30}x/b_{20}$, $Y = b_{30}^2(b_{00} + a_{10}y))/b_{20}^3$ şi rescalarea timpului $\tau = a_{10}t$ reduc (2.120) la următorul sistem

$$\dot{X} = X, \quad \dot{Y} = Y + X^2 + X^3. \tag{2.121}$$

Acest sistem este Darboux integrabil şi are următoarea integrală primă

$$F(X,Y) = (2Y - 2X^2 - X^3)/(2X).$$

Dacă $b_{21} = 0, a_{20} \neq 0$, atunci $A_2(x,y) = 2a_{20}^2b_{30}x^6 \not\equiv 0 \Rightarrow \mu_\infty = 3$.

Dacă au loc condiţiile (2.119), atunci $A_1(x,y) = -a_{30}x^6((a_{30}b_{20} - 2a_{20}b_{30})x + 2a_{20}a_{30}y) \equiv 0$ $\Rightarrow a_{20} = 0, b_{20} = 0 \Rightarrow A_2(x,y) = 3a_{10}a_{30}x^5(b_{30}x - a_{30}y) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$.

În cazurile 2.5) şi 2.6) avem repectiv sistemele:

$$\begin{aligned}\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \quad \dot{y} = (a_{10}^2 + a_{11}b_{10}x + 2a_{10}a_{11}y + a_{11}b_{20}x^2 \\ +(a_{20}a_{11} + a_{10}a_{21})xy + a_{11}^2y^2 + a_{11}b_{30}x^3 + a_{11}b_{21}x^2y + a_{11}a_{21}xy^2)/a_{11};\end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \quad \dot{y} = ((b_{01} - a_{10})(a_{10} + a_{20}x + a_{21}xy) \\ +a_{11}b_{01}y + a_{11}b_{20}x^2 + a_{11}a_{20}xy + a_{11}^2y^2 + a_{11}b_{30}x^3 + a_{11}b_{21}x^2y + a_{11}a_{21}xy^2)/a_{11}.\end{aligned} \tag{2.123}$$

Pentru aceste sisteme $A_1(y) \equiv 0$, $A_2(y) \equiv 0$, iar $A_3(y)$ arată respectiv astfel:

$$A_3(y) = -(B_0 + B_1y + B_2y^2 + B_3y^3)/a_{11}^2,$$

$$A_3(y) = -(a_{10} + a_{11}y)(B_0' + B_1'y + B_2'y^2)/a_{11},$$

unde $B_0 = a_{10}^2a_{20}^2a_{11} - a_{10}^3a_{20}a_{21} + 2a_{10}^3a_{11}a_{30} - 2a_{10}a_{20}a_{11}^2b_{10} + a_{10}^2a_{11}a_{21}b_{10} + a_{11}^3b_{10}^2 - a_{10}^2a_{11}^2b_{20} - a_{10}^3a_{11}b_{21}$, $B_1 = 2a_{10}a_{11}(3a_{10}a_{11}a_{30} - a_{10}a_{20}a_{21} + a_{11}a_{21}b_{10} - a_{11}^2b_{20} - 2a_{10}a_{11}b_{21})$,
$B_2 = a_{11}^2(6a_{10}a_{11}a_{30} - a_{10}a_{20}a_{21} + a_{11}a_{21}b_{10} - a_{11}^2b_{20} - 5a_{10}a_{11}b_{21})$, $B_3 = 2a_{11}^4(a_{30} - b_{21})$,
$B_0' = -4a_{10}^2a_{30} + 5a_{10}a_{30}b_{01} - a_{30}b_{01}^2 - 3a_{10}a_{11}b_{20} + a_{11}b_{01}b_{20} + a_{10}^2b_{21} - a_{10}b_{01}b_{21}$,
$B_1' = a_{11}(2a_{10}a_{30} + a_{30}b_{01} - a_{11}b_{20} - 3a_{10}b_{21})$, $B_2' = 2a_{11}^2(a_{30} - b_{21})$.

Pentru (2.122) ((2.123)) dreapta invariantă $x = 0$ are multiplicitatea algebrică exact egală cu trei, dacă $|B_0| + |B_1| + |B_2| + |B_3| \neq 0$ $(|B_0'| + |B_1'| + |B_2'| \neq 0)$.

Pentru ambele sisteme omogenizate corespunzătoare sistemelor (2.122) şi (2.123) avem $A_0(x,y) = x^5(b_{30}x + (b_{21} - a_{30})y)((a_{30}b_{21} - a_{21}b_{30})x^2 + 2a_{30}a_{21}xy + a_{21}^2y^2)$. În condiţiile (2.28) identitatea $A_0(x,y) \equiv 0$ are loc, dacă $a_{21} = b_{21} = 0, a_{30} \neq 0$ sau $a_{21} = a_{30} = 0$. Aceste relaţii dau respectiv: $A_1(x,y) = -x^5(a_{30}^2b_{20}x^2 - 2a_{20}a_{30}b_{30}x^2 + a_{11}b_{30}^2x^2 + 2a_{20}a_{30}^2xy - 4a_{11}a_{30}b_{30}xy + 3a_{11}a_{30}^2y^2) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 2$ şi $A_1(x,y) = (a_{20}b_{21} - a_{11}b_{30})x^6(b_{30}x + b_{21}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{30} = a_{20}b_{21}/a_{11}$, $A_2(x,y) = b_{21}x^3(a_{20}x + a_{11}y)(2a_{20}^2x^2 - a_{11}b_{20}x^2 + a_{10}b_{21}x^2 + 4a_{20}a_{11}xy + 2a_{11}^2y^2)/a_{11} \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$.

În fiecare dintre cazurile 2.7) şi 2.8) multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit a sistemului cubic $\{(2.29), (2.28)\}$ este egală cu unu, deoarece $A_0(x,y) \neq 0$.

Multiplicitatea geometrică. Considerăm sistemul cubic de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X(1+\epsilon)(1+\epsilon+2x\epsilon^2)(1+4X\epsilon^2), \\ \dot{Y} &= Y + X^2 + X^3 + \epsilon((2+\epsilon)(Y + X^2 + X^3) - 2\epsilon(1+\epsilon)XY \\ &\quad +16\epsilon^3(1+\epsilon)Y^2 + 4\epsilon(1+\epsilon)(-3-3\epsilon+2\epsilon^2)X^2Y \\ &\quad +16\epsilon^3(3+6\epsilon+2\epsilon^2)XY^2 - 64\epsilon^5(1+2\epsilon)Y^3). \end{aligned} \tag{2.124}$$

Acest sistem are şapte drepte invariante :

$l_1 = X$, $l_2 = X - 4\epsilon^2Y$, $l_3 = (1+\epsilon)X - 4\epsilon^2Y$, $l_4 = 1 + 4\epsilon^2X$, $l_5 = 1 + \epsilon + 2\epsilon^2X$, $l_6 = (1+\epsilon)(1+2\epsilon X) - 8\epsilon^3Y$, $l_7 = (1+\epsilon)(1-2\epsilon X) + 8\epsilon^3(1+2\epsilon)Y$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci sistemul (2.124) converge către sistemul (2.121), dreptele l_2, l_3 tind către dreapta invariantă l_1, iar dreptele l_4, l_5, l_6, l_7 tind spre infinit.

Astfel, are loc

Teorema 2.5.4. *Cu ajutorul unei transformări afine şi rescalarea timpului orice sistem diferenţial cubic ce posedă o dreaptă invariantă afină de multipicitatea strict egală cu trei şi pentru care dreapta de la infinit are multiplicitatea cinci poate fi scris sub forma* (2.121). *Aceste sisteme au o singură dreaptă invariantă afină, sunt Darboux integrabile şi avem* $m_\infty(3;5)$.

5. $\mu_1 = 2$ (lema 2.2.1).

În condiţiile (2.32) sistemul cubic (2.29) arată astfel

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x^2(a_{20} + a_{30}x + a_{21}y), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy \\ &+b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + +b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3. \end{aligned} \tag{2.125}$$

Pentru (2.125): $A_1(y) = 0$, $A_2(y) = (b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2 + b_{03}y^3)(a_{20}b_{01} - a_{21}b_{00} + 2a_{20}b_{02}y + (a_{21}b_{02} + 3a_{20}b_{03})y^2 + 2a_{21}b_{03}y^3)$. Prin urmare, dreapta invariantă $x = 0$ a lui (2.125) are multiplicitatea algebrică exact egală cu doi, dacă

$$(|b_{00}| + |b_{01}| + |b_{02}| + |b_{03}|)(|a_{20}b_{01} - a_{21}b_{00}| + |a_{20}b_{02}| + |a_{21}b_{02} + 3a_{20}b_{03}| + |a_{21}b_{03}|) \neq 0. \tag{2.126}$$

Pentru sistemul omogenizat corespunzător sistemului (2.125) polinomul $A_0(x,y)$ are forma $A_0(x,y) = x^2 A_{01}(x,y) A_{02}(x,y)$, unde $A_{01}(x,y) = b_{30}x^3 - a_{30}x^2y + b_{21}x^2y - a_{21}xy^2 + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3$, $A_{02} = a_{30}b_{21}x^3 - a_{21}b_{30}x^3 + 2a_{30}b_{12}x^2y + 3a_{30}b_{03}xy^2 + a_{21}b_{12}xy^2 + 2a_{21}b_{03}y^3$. Dacă $A_{01}(x,y) \equiv 0$, atunci sistemul cubic (2.125) are infinitul degenerat. Fie $A_{01}(x,y) \not\equiv 0$ şi $A_{02}(x,y) \equiv 0$. Identitatea $A_{02}(x,y) \equiv 0$ are loc dacă se realizează cel puţin una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$a_{30} = a_{21} = 0, \tag{2.127}$$

$$a_{21} = b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0,\ a_{30} \neq 0, \tag{2.128}$$

$$b_{30} = a_{30}b_{21}/a_{21}, b_{12} = b_{03} = 0. \tag{2.129}$$

În condiţiile (2.127) avem $\{A_1(x,y) = a_{20}x^2 A_{01}(x,y)(b_{21}x^2 + 2b_{12}xy + 3b_{03}y^2) \equiv 0, (2.28)\} \Rightarrow b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0, a_{20} \neq 0 \Rightarrow A_2(x,y) = a_{20}x^2 A_{01}(x,y)((a_{20} + b_{11})x + 2b_{02}y) \Rightarrow b_{11} = -a_{20}, b_{02} = 0, a_{20}b_{30} \neq 0 \Rightarrow A_3(x,y) = a_{20}x^4((b_{01}b_{30} - a_{20}b_{20})x + 2a_{20}^2 y) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 4$.

În cazul (2.128): $A_1(x,y) = -a_{30}x^5(a_{30}b_{20}x^2 - a_{20}b_{30}x^2 - b_{11}b_{30}x^2 + 2a_{30}b_{11}xy - 2b_{02}b_{30}xy + 3a_{30}b_{02}y^2) \equiv 0 \Rightarrow b_{02} = b_{11} = 0, b_{20} = a_{20}b_{30}/a_{30} \Rightarrow A_2(x,y) = -a_{30}x^5(2a_{30}b_{10}x - b_{01}b_{30}x + 3a_{30}b_{01}y)$. Ţinând cont de inegalitatea (2.126), polinomul $A_2(x,y)$ nu este identic zero, prin urmare, $\mu_\infty = 3$.

Presupunem că au loc egalităţile (2.129), atunci identitatea $A_1(x,y) = -x^3(a_{30}x + a_{21}y) \cdot ((a_{30}a_{21}b_{20} - a_{20}a_{30}b_{21} + a_{21}b_{20}b_{21} - a_{30}b_{11}b_{21} - a_{20}b_{21}^2)x^3 + 2a_{30}(a_{21}b_{11} - b_{02}b_{21})x^2y + a_{21}(a_{21}b_{11} + 3a_{30}b_{02} - b_{02}b_{21})xy^2 + 2a_{21}^2 b_{02}y^3)/a_{21} \equiv 0$ ne dă următoarele două serii de condiţii:

$$b_{11} = b_{02} = 0,\ b_{21} = -a_{30}; \tag{2.130}$$

$$b_{20} = a_{20}b_{21}/a_{21},\ b_{11} = b_{02} = 0. \tag{2.131}$$

În condiţiile (2.130) avem $\{A_2(x,y) = -x^3((a_{20}^2a_{30}^2 + a_{30}^2a_{21}b_{10} + a_{30}^3b_{01} + 2a_{20}a_{30}a_{21}b_{20} + a_{21}^2b_{20}^2)x^3 + 2a_{30}a_{21}(a_{21}b_{10} + 2a_{30}b_{01})x^2y + a_{21}^2(a_{21}b_{10} + 5a_{30}b_{01})xy^2 + 2a_{21}^3b_{01}y^3)/a_{21} \equiv 0,\ (2.28)\} \Rightarrow b_{10} = b_{01} = 0, b_{20} = -a_{20}a_{30}/a_{21}, b_{00} \neq 0 \Rightarrow A_3(x,y) = -2b_{00}x^3(a_{30}x + a_{21}y)^2 \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 4$, iar în condiţiile (2.131): $\{A_2(x,y) = -x^3(a_{30}x + a_{21}y)((2a_{30}a_{21}b_{10} + a_{21}b_{10}b_{21} - a_{30}b_{01}b_{21})x^2 + a_{21}(a_{21}b_{10} + 3a_{30}b_{01})xy + 2a_{21}^2b_{01}y^2)/a_{21} \equiv 0,\ (2.28)\} \Rightarrow b_{10} = b_{01} = 0, b_{00} \neq 0 \Rightarrow A_3(x,y) = -b_{00}x^3(a_{30}x + a_{21}y)(3a_{30}x + b_{21}x + 2a_{21}y) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 4$.

În condiţiile (2.33) din lema 2.2.1 sistemul cubic (2.29) are forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + a_{10}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy \\ &+b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2,\ a_{10} \neq 0. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Pentru acest sistem: $A_1(y) \equiv 0$, iar $A_2(y) = B_0 + B_1 y + B_2 y^2$, unde $B_0 = -2a_{10}a_{20}b_{00} - a_{21}b_{00}^2 + a_{10}^2 b_{10} + a_{10}b_{00}b_{11}$, $B_1 = -2a_{10}(a_{10}a_{20} + 2a_{21}b_{00} - a_{10}b_{11} - b_{00}b_{12})$, $B_2 = -3a_{10}^2(a_{21} - b_{12})$. Dreapta invariantă $x = 0$ a sistemului (2.132) are multiplicitatea exact egală cu doi, dacă are loc inegalitatea $|B_0| + |B_1| + |B_2| \neq 0$.

În continuare, considerăm sistemul omogenizat corespunzător sistemului (2.132). Avem: $A_0(x,y) = x^4 A_{01}(x,y)A_{02}(x,y)$, unde $A_{01}(x,y) = b_{30}x^2 + (b_{21} - a_{30})xy + (b_{12} - a_{21})y^2$, $A_{02}(x,y) = (a_{30}b_{21} - a_{21}b_{30})x^2 + 2a_{30}b_{12}xy + a_{21}b_{12}y^2$. Dacă $A_{01}(x,y) \equiv 0$, atunci pentru (2.132) infinitul este degenerat. Identitatea $A_{02}(x,y) \equiv 0$ are loc dacă se realizează cel puţin una dintre următoarele trei serii de condiţii (2.127), (2.133), (2.134):

$$a_{21} = b_{21} = b_{12} = 0, a_{30} \neq 0; \tag{2.133}$$

$$b_{30} = a_{30}b_{21}/a_{21}, b_{12} = 0. \tag{2.134}$$

Fie că au loc egalităţile (2.127). Atunci $A_1(x,y) = a_{20}x^4(b_{21}x + 2b_{12}y)(b_{30}x^2 + b_{21}xy + b_{12}y^2) \equiv 0 \Rightarrow b_{21} = b_{12} = 0, a_{20} \neq 0$ sau $a_{20} = 0$. Dacă $b_{21} = b_{12} = 0, a_{20} \neq 0$, avem $\{A_2(x,y) = a_{20}b_{30}(a_{20} + b_{11})x^6 \equiv 0,\ (2.28)\} \Rightarrow b_{11} = -a_{20} \Rightarrow A_{20}(x,y) = -a_{20}x^4(a_{20}b_{20}x - 3a_{10}b_{30}x - 2a_{20}^2 y) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 4$.

Dacă $a_{20} = 0$ atunci: $A_2(x,y) = a_{10}x^3(b_{21}x + 2b_{12}y)(b_{30}x^2 + b_{21}xy + b_{12}y^2) \equiv 0 \Rightarrow b_{12} = b_{21} = 0$ $\Rightarrow \{A_{20}(x,y) = a_{10}b_{11}b_{30}x^5 \equiv 0,\ (2.28)\} \Rightarrow b_{11} = 0, b_{30} \neq 0 \Rightarrow A_4(x,y) = 3a_{10}^2 b_{30}x^4 \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 5$. Sistemul cubic $\{(2.132), (2.28)\}$ ia forma

$$\dot{x} = a_{10}x, \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + a_{10}y + b_{20}x^2 + b_{30}x^3,\ a_{10}b_{30} \neq 0. \tag{2.135}$$

Transformarea afină $X = \sqrt[3]{b_{30}/a_{10}}\,x$, $Y = y + b_{00}/a_{10}$ şi rescalarea timpului $\tau = a_{10}t$ reduc (2.135) la sistemul

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y + ax + bx^2 + x^3,\ \ a \neq 0, \tag{2.136}$$

unde $a = b_{10}/\sqrt[3]{a_{10}^2 b_{30}}$, $b = b_{20}/\sqrt[3]{a_{10}b_{30}^2}$. Acest sistem are: a) o singură dreaptă invariantă afină: $x = 0$; b) factor integrant de forma Darboux: $\mu(x,y) = 1/x^2$; şi c) integrala primă: $F(x,y) = x^{2b}e^{(x^2(x+2a)-2y)/x}$.

În condiţiile (2.133) avem: $A_1(x,y) = -a_{30}x^6((a_{30}b_{20} - a_{20}b_{30} - b_{11}b_{30})x + 2a_{30}b_{11}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{11} = 0, b_{20} = a_{20}b_{30}/a_{30} \Rightarrow A_2(x,y) = -a_{30}x^5((2a_{30}b_{10} - 3a_{10}b_{30})x + 3a_{10}a_{30}y) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$, iar în condiţiile (2.134):

$$A_1(x,y) = x^4(a_{30}x + a_{21}y)((a_{30}b_{11}b_{21} - (a_{30} + b_{21})(a_{21}b_{20} - a_{20}b_{21}))x^2 + 2a_{30}a_{21}b_{11}xy$$
$$+ a_{21}^2 b_{11}y^2)/a_{21} \equiv 0 \Rightarrow b_{11} = 0, b_{20} = a_{20}b_{21}/a_{21} \Rightarrow A_2(x,y) = -x^3(a_{30}x + a_{21}y)((2a_{30}a_{21}b_{10} -$$
$$3a_{10}a_{30}b_{21} + a_{21}b_{10}b_{21} - a_{10}b_{21}^2)x^2 + a_{21}(3a_{10}a_{30} + a_{21}b_{10} - a_{10}b_{21})xy + 2a_{10}a_{21}^2 y^2)/a_{21} \not\equiv 0,\ \mu = 3;$$

sau

$$b_{11}=0, b_{21}=-a_{30} \Rightarrow A_2(x,y)=-x^3((a_{20}^2a_{30}^2+2a_{10}a_{30}^3+a_{30}^2a_{21}b_{10}+2a_{20}a_{30}a_{21}b_{20}+a_{21}^2b_{20}^2)x^3$$
$$+2a_{30}a_{21}(3a_{10}a_{30}+a_{21}b_{10})x^2y+a_{21}^2(6a_{10}a_{30}+a_{21}b_{10})xy^2+2a_{10}a_{21}^3y^3)/a_{21}\not\equiv 0,\ \mu=3.$$

În condiţiile (2.34) din lema 2.2.1 sistemul cubic (2.29) ia forma

$$\begin{gathered}\dot{x}=x(a_{10}+a_{20}x+a_{11}y+a_{30}x^2+a_{21}xy),\quad \dot{y}=(a_{10}b_{01}-a_{10}^2+a_{11}b_{10}x\\ +a_{11}b_{01}y+a_{11}b_{20}x^2+a_{11}b_{11}xy+a_{11}^2y^2+a_{11}b_{30}x^3+a_{11}b_{21}x^2y+a_{11}b_{12}xy^2)/a_{11}.\end{gathered}\tag{2.137}$$

Pentru acest sistem: $A_1(y)=0$, $A_2(y)=-(a_{10}+a_{11}y)(B_0+B_1y+B_2y^2+B_3y^3)/a_{11}^2$, unde $B_0=a_{10}^3a_{21}-3a_{10}^2a_{20}a_{11}-2a_{10}a_{11}^2b_{10}+4a_{10}a_{20}a_{11}b_{01}-2a_{10}^2a_{21}b_{01}+a_{11}^2b_{10}b_{01}-a_{20}a_{11}b_{01}^2+a_{10}a_{21}b_{01}^2+a_{10}^2a_{11}b_{11}-a_{10}a_{11}b_{01}b_{11}$, $B_1=2a_{10}a_{11}(a_{20}a_{11}-2a_{10}a_{21}+2a_{21}b_{01}-a_{11}b_{11}+a_{10}b_{12}+b_{01}b_{12})$, $B_2=a_{11}^2(a_{20}a_{11}+a_{10}a_{21}+2a_{21}b_{01}-a_{11}b_{11}-2a_{10}b_{12}-b_{01}b_{12})$, $B_3=2a_{11}^3(a_{21}-b_{12})$. Multiplicitatea dreptei invariante $x=0$ este exact egală cu doi, dacă are loc inegalitatea $|B_0|+|B_1|+|B_2|+|B_3|\neq 0$.

Pentru sistemul omogenizat corespunzător sistemului (2.137) avem: $A_0(x,y)=x^4A_{01}(x,y)\cdot A_{02}(x,y)$, unde $A_{01}(x,y)=b_{30}x^2+(b_{21}-a_{30})xy+(b_{12}-a_{21})y^2$, $A_{02}(x,y)=(a_{30}b_{21}-a_{21}b_{30})x^2+2a_{30}b_{12}xy+a_{21}b_{12}y^2$, şi $\{A_0(x,y)\equiv 0,\ (2.28)\}\Rightarrow A_{02}(x,y)\equiv 0 \Rightarrow$ (2.127), (2.133) sau (2.134).

În condiţiile (2.127) avem $A_1(x,y)=x^3A_{01}(x,y)((a_{20}b_{21}-a_{11}b_{30})x^2+2a_{20}b_{12}xy+a_{11}b_{12}y^2)\equiv 0 \Rightarrow b_{12}=0, b_{30}=a_{20}b_{21}/a_{11} \Rightarrow A_2(x,y)=b_{21}x^3(a_{20}x+a_{11}y)((a_{20}^2+a_{20}b_{11}-a_{11}b_{20}+a_{10}b_{21})x^2+4a_{11}a_{20}xy+2a_{11}^2y^2)/a_{11}\not\equiv 0$, $\mu_\infty=3$. Menţionăm, că condiţia (2.28) impune $b_{21}\neq 0$.

În fiecare dintre cazurile (2.133) şi (2.134) avem respectiv

$A_1(x,y)=-x^5((a_{30}^2b_{20}-a_{20}a_{30}b_{30}-a_{30}b_{11}b_{30}+a_{11}b_{30}^2)x^2+2a_{30}(a_{30}b_{11}-2a_{11}b_{30})xy+3a_{11}a_{30}^2y^2)\not\equiv 0$;

$A_1(x,y)=-x^3(a_{30}x+a_{21}y)((a_{30}a_{21}^2b_{20}-a_{20}a_{30}a_{21}b_{21}+a_{21}^2b_{20}b_{21}-a_{30}a_{21}b_{11}b_{21}+a_{11}a_{30}b_{21}^2-a_{20}a_{21}b_{21}^2)x^3+2a_{30}a_{21}(a_{21}b_{11}-2a_{11}b_{21})x^2y+a_{21}^2(3a_{11}a_{30}+a_{21}b_{11}-2a_{11}b_{21})xy^2+2a_{11}a_{21}^3y^3)/a_{21}^2\not\equiv 0$.
Prin urmare, în ambele cazuri multiplicitatea dreptei de la infinit este egală cu doi.

În ultimul caz (2.35) din lema 2.2.1 avem sistemul cubic

$$\begin{aligned}&\dot{x}=x(a_{10}+a_{20}x+a_{11}y+a_{30}x^2+a_{21}xy+a_{12}y^2),\\ &\dot{y}=(a_{10}(b_{02}-a_{11})+a_{12}b_{10}x+(a_{10}a_{12}+a_{11}b_{02}-a_{11}^2)y+a_{12}b_{20}x^2+a_{12}b_{11}xy\\ &\qquad +a_{12}b_{02}y^2+a_{12}b_{30}x^3+a_{12}b_{21}x^2y+a_{12}b_{12}xy^2+a_{12}^2y^3)/a_{12}\end{aligned}\tag{2.138}$$

pentru care $A_1(y)\equiv 0$, iar $A_2(y)=-(a_{10}+a_{11}y+a_{12}y^2)(B_0+B_1y+B_2y^2+B_3y^3+B_4y^4)/a_{12}^2$, unde $B_0=a_{10}a_{11}^2a_{21}-a_{20}a_{11}^3-2a_{10}a_{20}a_{11}a_{12}-a_{11}^2a_{12}b_{10}-a_{10}a_{12}^2b_{10}+a_{10}a_{11}a_{12}b_{11}+2a_{20}a_{11}^2b_{02}-2a_{10}a_{11}a_{21}b_{02}+2a_{10}a_{20}a_{12}b_{02}+a_{11}a_{12}b_{10}b_{02}-a_{10}a_{12}b_{11}b_{02}-a_{20}a_{11}b_{02}^2+a_{10}a_{21}b_{02}^2$, $B_1=-2a_{12}(a_{20}a_{11}^2+2a_{10}a_{11}a_{21}-a_{10}a_{20}a_{12}+a_{11}a_{12}b_{10}+a_{10}a_{12}b_{11}-2a_{20}a_{11}b_{02}-2a_{10}a_{21}b_{02}-a_{12}b_{10}b_{02}+a_{20}b_{02}^2-$

$a_{10}a_{11}b_{12} + a_{10}b_{02}b_{12})$, $B_2 = -a_{12}(3a_{11}^2 a_{21} - 3a_{20}a_{11}a_{12} - 3a_{10}a_{21}a_{12} - a_{12}^2 b_{10} + 2a_{11}a_{12}b_{11} - 4a_{11}a_{21}b_{02} + 2a_{20}a_{12}b_{02} - a_{12}b_{11}b_{02} + a_{21}b_{02}^2 - a_{11}^2 b_{12} + 3a_{10}a_{12}b_{12} + a_{11}b_{02}b_{12})$, $B_3 = 2a_{11}a_{12}^2(a_{21} - b_{12})$, $B_4 = a_{12}^3(a_{21} - b_{12})$. Fie $A_2(y) \not\equiv 0$. Atunci multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ a sistemului (2.138) este exact egală cu doi.

Pentru sistemul omogenizat corespunzător sistemului (2.138) polinomul $A_0(x, y)$ are forma: $A_0(x, y) = x^2 A_{01}(x, y) A_{02}(x, y)$, unde $A_{01} = (a_{30}b_{21} - a_{21}b_{30})x^4 + 2(a_{30}b_{12} - a_{12}b_{30})x^3 y + (3a_{30}a_{12} - a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12})x^2 y^2 + 2a_{21}a_{12}xy^3 + a_{12}^2 y^4 \not\equiv 0$ şi (2.28) $\Rightarrow A_{02} = b_{30}x^2 + (b_{21} - a_{30})xy + (b_{12} - a_{21})y^2 \not\equiv 0$. Prin urmare, dreapta de la infinit are multiplicitatea egală cu unu.

Multiplicitatea geometrică

Pentru sistemul (2.136) vom construi un sistem diferenţial perturbat, mai exact, un sistem diferenţial ce să depindă de un parametru oarecare ϵ, astfel încât acest sistem să admită şapte drepte afine invariante distincte, două dintre care când $\epsilon \to 0$ să tindă la dreaptă invariantă $x = 0$, iar celelalte cinci să tindă spre dreapta invariantă de la infinit.

Efectuând prima transformare Poincaré: $x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z}$ în sistemul (2.136), obţinem sistemul: $\frac{dz}{dt} = -z^3, \frac{du}{dt} = 1 + bz + az^2$. Pentru comoditate vom renota $z = x, u = y$ şi vom rescrie sistemul transformat:

$$\dot{x} = -x^3, \dot{y} = 1 + bx + ax^2. \tag{2.139}$$

Pentru acest sistem dreapta afina $x = 0$ are multiplicitatea egală cu cinci, iar dreapta de la infinit are multiplicitatea egală cu doi. Perturbăm sistemul (2.139) astfel:

$$\dot{x} = -x(x - A)(x + A), \dot{y} = (1 + bx + ax^2 + By + Fy^2)(\epsilon y + 1). \tag{2.140}$$

Sistemul perturbat (2.140) are dreptele invariante:

$$l_1 = x; l_2 = \epsilon y + 1; l_3 = x - A; l_4 = x + A.$$

Se ştie, că dacă pentru curba algebrică invariantă $f(x, y) = 0$ avem descompunerea în factori ireductibili: $f_1, ..., f_s$, atunci $f_j(x, y) = 0, j = 1, ..., s$, la fel, sunt curbe algebrice invariante. Deaceea, dreptele l_5 şi l_6 ce tind către $x = 0$ le vom căuta, presupunând că ele sunt factori ai conicii invariante $f(x, y) = 0$. Fie $f = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2$, unde $c_{20} = 1$ şi $c_{00} \neq 0$. Pentru ca f să se descompună în factori liniari trebuie ca invariantul $I_3 = -c_{01}^2 c_{20} + c_{01}c_{10}c_{11} - c_{02}c_{10}^2 + 4c_{00}c_{02}c_{20} - c_{00}c_{11}^2$ să fie egal cu zero. Fie $K(x, y) = d_{00} + d_{10}x + d_{01}y + d_{20}x^2 + d_{11}xy + d_{02}y^2$ cofactorul conicii $f(x, y) = 0$. Cerem ca expresia

$$P(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} - fK(x, y)$$

să fie identic egală cu zero în raport cu x şi y. Egalând cu zero coeficienţii de pe lângă aceleaşi puteri ale lui x şi y, obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$c_{01} - c_{00}d_{00} = 0$, $bc_{01} + A^2c_{10} + c_{11} - c_{10}d_{00} - c_{00}d_{10}$, $Bc_{01} + 2c_{02} - c_{01}d_{00} - c_{00}d_{01} + c_{01}\epsilon = 0$, $2A^2 + ac_{01} + bc_{11} - d_{00} - c_{10}d_{10} - c_{00}d_{20} = 0$, $2bc_{02} + A^2c_{11} + Bc_{11} - c_{11}d_{00} - c_{10}d_{01} - c_{01}d_{10} - c_{00}d_{11} + bc_{01}\epsilon + c_{11}\epsilon = 0$, $2Bc_{02} - c_{02}d_{00} - c_{01}d_{01} - c_{00}d_{02} + c_{01}F + Bc_{01}\epsilon + 2c_{02}\epsilon = 0$, $-c_{10} + ac_{11} - d_{10} - c_{10}d_{20} = 0$, $2ac_{02} - d_{01} - c_{11}d_{10} - c_{10}d_{11} - c_{01}d_{20} + ac_{01}\epsilon + bc_{11}\epsilon = 0$, $-c_{11}d_{01} - c_{10}d_{02} - c_{02}d_{10} - c_{01}d_{11} + c_{11}F + 2bc_{02}\epsilon + Bc_{11}\epsilon = 0$, $-c_{02}d_{01} - c_{01}d_{02} + 2c_{02}F + 2Bc_{02}\epsilon + c_{01}F\epsilon = 0$, $2 + d_{20} = 0$, $-c_{11} - d_{11} - c_{11}d_{20} + ac_{11}\epsilon = 0$, $-d_{02} - c_{11}d_{11} - c_{02}d_{20} + 2ac_{02}\epsilon = 0$, $-c_{11}d_{02} - c_{02}d_{11} + c_{11}F\epsilon = 0$, $c_{02}(d_{02} - 2F\epsilon) = 0$.

Acest sistem are soluţia:

$$\begin{aligned}
&A = b\epsilon/(3 + 2a\epsilon), B = 2\epsilon\mu, F = \epsilon^2\mu,\\
&c_{00} = \epsilon/(1 + a\epsilon), c_{10} = 2b\epsilon/(3 + 2a\epsilon),\\
&c_{01} = 2\epsilon^2\mu/(1 + a\epsilon), c_{11} = 0, c_{02} = \epsilon^3\mu/(1 + a\epsilon),\\
&d_{00} = 2\epsilon\mu, d_{10} = 2b\epsilon/(3 + 2a\epsilon),\\
&d_{01} = 4\epsilon^2\mu, d_{20} = -2, d_{11} = 0, d_{02} = 2\epsilon^3\mu,
\end{aligned} \tag{2.141}$$

unde $\mu = (9 + 12a\epsilon - b^2\epsilon + 4a^2\epsilon^2 - ab^2\epsilon^2)/(3 + 2a\epsilon)^2$.

Această soluţie ne conduce la sistemul:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = -x(3x - b\epsilon + 2ax\epsilon)(3x + b\epsilon + 2ax\epsilon)/9, \quad \dot{y} = (1 + y\epsilon)((3 + 2a\epsilon)^2(1 + bx + ax^2)+\\
&+\epsilon(9 + 12a\epsilon - b^2\epsilon + 4a^2\epsilon^2 - ab^2\epsilon^2)(2y + \epsilon y^2))/9,
\end{aligned} \tag{2.142}$$

pentru care conica $f = \epsilon(3 + 2a\epsilon)^2 + (1 + a\epsilon)(3 + 2a\epsilon)(2b\epsilon x + (3 + 2a\epsilon)x^2) + \epsilon^2(9 + 12a\epsilon - b^2\epsilon + 4a^2\epsilon^2 - ab^2\epsilon^2)(2 + \epsilon y)y$ este invariantă. Deoarece pentru conica dată avem $I_3 = 0$, rezultă că ea reprezintă produsul a doi factori de gradul întâi în raport cu x şi y. Efectuând în sistemul (2.142) transformarea inversă primei transformări Poincaré: $x \to \frac{1}{x}, y \to \frac{y}{x}$, obţinem următorul sistem diferenţial:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = x(3 + 2a\epsilon - bx\epsilon)(3 + 2a\epsilon + bx\epsilon)/9,\\
&\dot{y} = (x^2y\epsilon(3 + 2a\epsilon)(9 + 6a\epsilon - b^2\epsilon) + y^2\epsilon^2(3x + y\epsilon)(9+\\
&12a\epsilon - b^2\epsilon + 4a^2\epsilon^2 - ab^2\epsilon^2) + (3 + 2a\epsilon)^2(ax + bx^2 + x^3+\\
&bxy\epsilon + y(1 + a\epsilon)))/9.
\end{aligned} \tag{2.143}$$

Acest sistem admite dreptele invariante:

$l_1 = x$, $l_2 = x + y\epsilon$, $l_3 = 3 + 2a\epsilon - bx\epsilon$; $l_4 = 3 + 2a\epsilon + bx\epsilon$, şi conica invariantă reductibilă: $g(x,y) = x^2\epsilon(3+2a\epsilon)^2 + (1+a\epsilon)(3+2a\epsilon)(3+2a\epsilon+2bx\epsilon) + y\epsilon^2(2x+y\epsilon)(9+12a\epsilon-b^2\epsilon+4a^2\epsilon^2-ab^2\epsilon^2)$, unde $g = l_5 \cdot l_6$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci (2.143) tinde la sistemul iniţial (2.136), iar dreapta l_2 tinde către dreapta $l_1 = x$, iar l_3, l_4, l_5, l_6 tind spre dreapta invariantă de la infinit.

Are loc

Teorema 2.5.5. *Cu ajutorul unei transformări afine şi rescalarea timpului orice sistem diferenţial cubic ce posedă o dreaptă invariantă afină de multipicitatea strict egală cu doi şi pentru care dreapta de la infinit are multiplicitatea cinci poate fi scris sub forma* (2.136). *Aceste sisteme au o singură dreaptă invariantă afină, sunt Darboux integrabile şi avem* $m_\infty(2;5)$.

2.6. Concluzii la capitolul doi

În capitolul doi au fost supuse cercetării sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale cu cel mult două drepte invariante de multiplicitate maximală.

În urma acestei cercetări au fost obţinute următoarele rezultate:

– a fost determinată multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine pentru clasa sistemelor de ecuaţii diferenţiale afine, pătratice şi cubice;

– pentru sistemele cubice au fost determinate şi multiplicităţile infinitezimală, integrabilă şi geometrică maximală a unei drepte invariante afine, care de fapt sunt egale cu multiplicitatea algebrică maximală;

– pentru clasa sistemelor diferenţiale polinomiale de gradul n a fost dată o estimaţie a multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine;

– a fost determinată multiplicitatea maximală a dreptei invariante de la infinit pentru sistemele diferenţiale afine, pătratice şi cubice;

– au fost clasificate sistemele cubice cu două drepte invariante, inclusiv dreapta invariantă de la infinit de multiplicitate maximală în şapte clase: ($m(7;1)$, $m(6;1)$, $m(5;4)$, $m(4;5)$, $m(3;5)$, $m(2;5)$, $m(1;7)$);

– au fost construite integralele prime Darboux sau factorul integrant Darboux pentru sistemele obţinute.

Sistemele cubice cu multiplicitatea dreptelor inavariante $m(5;4)$ şi $m(4;5)$ au fost studiate şi de Llibre J. şi Vulpe N. în [41], cele cu multiplicităţile: $m(7;1)$, $m(3;5)$, $m(1;7)$ au fost depistate, mai târziu, şi de C. Bujac în [9], însă în teza de faţă s-a aplicat o metodologie de cercetare diferită de cea utilizată de autorii menţionaţi mai sus.

Ţinând cont de rezultatele obţinute în capitolul doi deducem următoarele concluzii:

1. pentru sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale multiplicitatea maximală a unei drepte invariante afine este egală cu multiplicitatea maximală a dreptei invariante de la infinit, ambele fiind egale cu şapte.

2. obţinerea estimaţiei multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine a devenit posibilă în urma determinării multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine pentru sistemele diferenţiale de gradul întâi, pătratice şi cubice;

3. cunoaşterea rezultatelor teoretice ce ţin de studiul sistemelor cubice cu drepte invariante a permis efectuarea clasificării sistemelor cubice cu două drepte invariante de multiplicitate maximală;

4. pentru sistemele cubice cu două drepte invariante, inclusiv dreapta invariantă de la infinit, micşorarea multiplicităţii unei drepte invariante afine nu implică creşterea proporţională a multiplicităţii maximale a dreptei de la infinit.

Rezultatele expuse în acest capitol au fost publicate în [73]-[76], [79], [83]-[87].

3. SISTEME CUBICE CU TREI DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE MAXIMALĂ

3.1. Sistemele cubice ce posedă trei drepte invariante de multiplicitatea maximală dintre care dreptele afine sunt reale şi paralele

În această secţiune este efectuată clasificarea sistemelor cubice cu trei drepte invariante distincte, inclusiv dreapta de la infinit, de multiplicitate maximală şi toate consecutivităţile parţial maximale de tipul $m_j(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty)$, $j = \overline{1,3}$, în presupunerea că sistemele cubice examinate au exact două dreapte invariante afine reale paralele distincte, nu sunt degenerate şi infinitul nu constă numai din puncte singulare. Vom nota această clasă de sisteme cubice cu $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$.

Teorema 3.1.1. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din clasa $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ de multiplicitate (parţial) maximală $(m_\infty(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty))$ $m(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty)$ poate fi scris sub una dintre următoarele 13 forme:*

$m(4,3;1)$	1)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = x^3 + y(x-1)^2.$
$m_\infty(4,2;1)$	2)	$\dot{x} = x^2(x-1), \; \dot{y} = ax^3 + 3x^2y - 2xy + 1.$
$m(4,1;3)$	3)	$\dot{x} = x(x-1), \; \dot{y} = -x^3 + y(x-1).$
$m_\infty(3,3;1)$	4)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \; \dot{y} = ax^3 + x^2 + y(x-1)^2, \; a \neq -1.$
$m(3,2;2)$	5.1)	$\dot{x} = x^2(x-1), \quad \dot{y} = ax^2 + xy + 1;$
	5.2)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = -x^2 - 2xy + y;$
	5.3)	$\dot{x} = x(x-1), \quad \dot{y} = x^2 + y(x^2 + x - 1).$
$m(3,1;4)$	6)	$\dot{x} = x^2(x-1), \; \dot{y} = 1.$
$m_\infty(2,2;3)$	7.1)	$\dot{x} = x(x-1), \quad \dot{y} = x^3 + 2xy + ax - y;$
	7.2)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = x + y.$
$m_\infty(2,1;4)$	8)	$\dot{x} = -x(x-1), \quad \dot{y} = x^3 + xy + y + a.$
$m_\infty(1,1;4)$	9.1)	$\dot{x} = x(x-1)(ax + y), \quad \dot{y} = b, b \neq 0;$
	9.2)	$\dot{x} = x(x-1), \quad \dot{y} = x^3 - xy + by + a, \; (b+1)(\lvert a\rvert + \lvert b\rvert) \neq 0.$

3.1.1. Multiplicităţile algebrice maximale a două drepte invariante afine reale şi paralele

Scopul acestei subsecţiuni este de a determina pentru sistemele cubice cu două drepte invariante reale şi paralele multiplicităţile algebrice posibile ale acestor drepte.

Considerăm sistemul cubic de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \dot{x} = P_0 + P_1(x,y) + P_2(x,y) + P_3(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dot{y} = Q_0 + Q_1(x,y) + Q_2(x,y) + Q_3(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{3.1}$$

unde $P_k = \sum\limits_{i+j=k} a_{ij}x^iy^j$ şi $Q_k = \sum\limits_{i+j=k} b_{ij}x^iy^j$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0,3}$.

Presupunem că

$$yP_3(x,y) - xQ_3(x,y) \not\equiv 0, \qquad GCD(P,Q) = 1, \tag{3.2}$$

adică la infinit sistemul (3.1) are cel mult patru puncte singulare distincte şi părţile drepte ale sistemului (3.1) nu au factori comuni de grad mai mare decât zero.

Fie sistemul (3.1) are două drepte invariante reale paralele l_1, l_2. Prin intermediul unei transformări afine putem face ca dreptele l_1 şi l_2 să fie descrise de ecuaţiile $x = 0$ şi $x = 1$. Prin urmare, (3.1) ia forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(1-x)(a_{10} + a_{10}x + a_{20}x + a_{11}y), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + \\ &+b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vom nota cu μ_1 multiplicitatea dreptei $x = 0$, cu μ_2 multiplicitatea dreptei $x = 1$ şi cu μ_∞ multiplicitatea dreptei de la infinit.

Aplicând definiţia 2.1.2, mai întâi, vom determina multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $x = 0$, apoi multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $x = 1$ şi, în final, vom determina multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit $Z = 0$.

Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $x = 0$.

Vom examina determinantul $E_1(\mathbb{X})$ din definiţia 2.1.2. Pentru (3.3) el reprezintă un polinom de gradul 8 în raport cu x şi y. Pentru a determina multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $x = 0$, vom scrie $E_1(\mathbb{X})$ sub forma:

$$\begin{aligned} E_1(\mathbb{X}) = x(&A_1(y) + A_2(y)x + A_3(y)x^2 + A_4(y)x^3 + A_5(y)x^4 \\ &+A_6(y)x^5 + A_7(y)x^6 + A_8(y)x^7). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Avem $A_1(y) = -A_{11}(y) \cdot A_{12}(y)$, unde $A_{11}(y) = b_{03}y^3 + b_{02}y^2 + b_{01}y + b_{00}$ şi $A_{12}(y) = -2a_{11}b_{03}y^3 + (a_{11}^2 - a_{11}b_{02} - 3a_{10}b_{03})y^2 + 2a_{10}(a_{11} - b_{02})y + a_{10}^2 + a_{11}b_{00} - a_{10}b_{01}$. Dreapta invariantă $x = 0$ are multiplicitatea $\mu_1 \geq 2$, atunci când $A_1(y) \equiv 0$. Ţinând cont de condiţia (3.2), $A_{11}(y)$ nu poate fi identic zero, adică $|b_{00}| + |b_{01}| + |b_{02}| + |b_{03}| \neq 0$. Prin urmare, $A_{12}(y)$ trebuie să fie identic egal cu zero. Identitatea $A_{12}(y) \equiv 0$ are loc atunci când se realizează una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$a_{10} = a_{11} = 0; \tag{3.5}$$

$$a_{11} = b_{02} = b_{03} = 0, b_{01} = a_{10}, a_{10} \neq 0; \tag{3.6}$$

$$b_{03} = 0, b_{02} = a_{11}, b_{00} = a_{10}(b_{01} - a_{10})/a_{11}, a_{11} \neq 0. \tag{3.7}$$

Lema 3.1.1. *Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ pentru sistemul cubic $\{(3.3), (3.2)\}$ nu este mai mică ca doi atunci şi numai atunci, când are loc cel puţin una dintre următoarele trei serii de condiţii:* (3.5), (3.6), (3.7).

Multiplicitatea μ_1 a dreptei $x = 0$ este mai mare ca doi, i.e. $\mu_1 \geq 3$, atunci când are loc identitatea $A_2(y) \equiv 0$. În fiecare dintre condiţiile (3.5)-(3.7) polinomul $A_2(y)$ arată respectiv astfel:

$$A_2(y) = a_{20}(3b_{03}y^2 + 2b_{02}y + b_{01}) \cdot A_{11}(y);$$

$$A_2(y) = a_{10}(3a_{10}b_{12}y^2 + 2(b_{00}b_{12} - a_{10}a_{20} + a_{10}b_{11})y - 2a_{20}b_{00} + a_{10}b_{10} + b_{00}b_{11});$$

$$A_2(y) = (a_{11}y + a_{10})(2a_{11}^2(a_{11} + b_{12})y^3 + a_{11}(a_{10}a_{11} - a_{11}a_{20} + 2a_{11}b_{01} + a_{11}b_{11} + 2a_{10}b_{12} + b_{01}b_{12})y^2 - 2a_{10}(2a_{10}a_{11} + a_{11}a_{20} - 2a_{11}b_{01} - a_{11}b_{11} + a_{10}b_{12} - b_{01}b_{12})y + a_{10}^3 + 3a_{10}^2a_{20} - 2a_{10}^2b_{01} - 4a_{10}a_{20}b_{01} + a_{10}b_{01}^2 + a_{20}b_{01}^2 + 2a_{10}a_{11}b_{10} - a_{11}b_{01}b_{10} - a_{10}^2b_{11} + a_{10}b_{01}b_{11})/a_{11}.$$

Ţinând cont de condiţia (3.2), în fiecare dintre cazurile (3.5)-(3.7), identitatea $A_2(y) \equiv 0$ ne conduce la următoarele patru serii de condiţii:

(3.5) $\Rightarrow$

$$b_{01} = b_{02} = b_{03} = 0, a_{20} \neq 0; \tag{3.8}$$

(3.6) $\Rightarrow$

$$b_{12} = 0, b_{11} = a_{20}, b_{10} = a_{20}b_{00}/a_{10}; \tag{3.9}$$

(3.7) $\Rightarrow$

$$b_{12} = -a_{11}, b_{11} = a_{20} - a_{10}, b_{01} = 2a_{10}; \tag{3.10}$$

$$b_{12} = -a_{11}, b_{11} = a_{10} + a_{20} - b_{01}, b_{10} = a_{20}(b_{01} - a_{10})/a_{11}. \tag{3.11}$$

Lema 3.1.2. *Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ pentru sistemul cubic $\{(3.3), (3.2)\}$ nu este mai mică ca trei atunci şi numai atunci, când are loc cel puţin una* *dintre următoarele patru serii de condiţii: 1)* (3.5), (3.8); *2)* (3.6), (3.9); *3)* (3.7), (3.10); *4)* (3.7), (3.11).

Dreapta invariantă $x = 0$ are multiplicitatea $\mu_1 \geq 4$, dacă în fiecare dintre cazurile 1)-4) din lema 3.1.2 are loc identitatea $A_3(y) \equiv 0$. În conformitate cu condiţia (3.2), avem următoarele implicaţii:

1) $\Rightarrow A_3(y) = a_{20}b_{00}(2b_{12}y - 2a_{20} + b_{11}) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{12} = 0, b_{11} = 2a_{20}; \tag{3.12}$$

2) $\Rightarrow A_3(y) = a_{10}(3a_{10}(a_{10} + a_{20} + b_{21})y + 3a_{10}b_{00} + 3a_{20}b_{00} + 2a_{10}b_{20} + b_{00}b_{21}) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{21} = -(a_{10} + a_{20}), b_{20} = -b_{00}(a_{10} + a_{20})/a_{10}; \tag{3.13}$$

3) $\Rightarrow A_3(y) = (2a_{11}^3(a_{10} + a_{20} + b_{21})y^3 + a_{11}^2(6a_{10}^2 + 5a_{10}a_{20} + a_{11}b_{10} + a_{11}b_{20} + 5a_{10}b_{21})y^2 + 2a_{10}a_{11}(3a_{10}^2+2a_{10}a_{20}+a_{11}b_{10}+a_{11}b_{20}+2a_{10}b_{21})y+2a_{10}^4+a_{10}^3a_{20}-a_{10}^2a_{20}^2+a_{10}^2a_{11}b_{10}+2a_{10}a_{11}a_{20}b_{10}-a_{11}^2b_{10}^2 + a_{10}^2a_{11}b_{20} + a_{10}^3b_{21})/a_{11} \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{21} = -a_{10} - a_{20}, b_{20} = -a_{10}(a_{10} + a_{20})/a_{11}, b_{10} = a_{10}a_{20}/a_{11}; \tag{3.14}$$

4) $\Rightarrow A_3(y) = (a_{10}+a_{11}y)(2a_{11}^2(a_{10}+a_{20}+b_{21})y^2+a_{11}(2a_{10}^2+2a_{10}a_{20}+a_{10}b_{01}+a_{20}b_{01}+a_{11}b_{20}+3a_{10}b_{21})y-4a_{10}^3-4a_{10}^2a_{20}+5a_{10}^2b_{01}+5a_{10}a_{20}b_{01}-a_{10}b_{01}^2-a_{20}b_{01}^2+3a_{10}a_{11}b_{20}-a_{11}b_{01}b_{20}-a_{10}^2b_{21}+a_{10}b_{01}b_{21})/a_{11} \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{21} = -(a_{10} + a_{20}), b_{20} = -(a_{10} + a_{20})(b_{01} - a_{10}). \tag{3.15}$$

Lema 3.1.3. *Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ pentru sistemul cubic $\{$(3.3), (3.2)$\}$ nu este mai mică ca patru atunci şi numai atunci, când are loc cel puţin una dintre următoarele patru serii de condiţii: 1)* (3.5), (3.8), (3.12); *2)* (3.6), (3.9), (3.13); *3)* (3.7), (3.10),(3.14); *4)* (3.7), (3.11), (3.15).

În fiecare dintre cazurile *1)-4)* din lema 3.1.3 $A_4(y) \not\equiv 0$:

$$A_4(y) = a_{20}(2a_{20}^2y + 3a_{20}b_{00} + a_{20}b_{10} + b_{00}b_{21}) \not\equiv 0;$$

$$A_4(y) = 3a_{10}^2b_{30} \not\equiv 0;$$

$$A_4(y) = 2b_{30}(a_{11}y + a_{10})^2 \not\equiv 0;$$

$$A_4(y) = b_{30}(a_{11}y + a_{10})(2a_{11}y + 4a_{10} - b_{01}) \not\equiv 0.$$

Aşadar, s-a demostrat

Lema 3.1.4. *În $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ multiplicitatea algebrică maximală a uneia dintre dreptele invariante afine nu este mai mare ca patru.*

Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $x = 1$.

Pentru a determina multiplicitatea algebrică maximală μ_2 a dreptei $x = 1$ vom reprezenta polinomul $E_1(\mathbb{X})$ din definiţia 2.1.2 astfel:

$$\begin{aligned} E_1(\mathbb{X}) = (x-1)(B_1(y) + B_2(y)(x-1) + B_3(y)(x-1)^2 + B_4(y)(x-1)^3 + \\ B_5(y)(x-1)^4 + B_6(y)(x-1)^5 + B_7(y)(x-1)^6 + B_8(y)(x-1)^7), \end{aligned} \tag{3.16}$$

unde $B_j(y)$, $j = 1, ..., 8$, sunt polinoame cu coeficienţi reali în raport cu variabila y.

În condiţiile lemei 3.1.3 şi în conformitate cu (3.2) avem:

1) $\Rightarrow B_1(y) = -a_{20}(3a_{20} + b_{21})((2a_{20} + b_{21})y + b_{00} + b_{10} + b_{20} + b_{30}) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{21} = -3a_{20} \tag{3.17}$$

$\Rightarrow B_2(y) = -a_{20}^2(4a_{20}y - b_{10} - 2b_{20} - 3b_{30}) \not\equiv 0$, $\mu_2 = 2$;

2) $\Rightarrow B_1(y) = -(2a_{10} + a_{20})^2 b_{30} \equiv 0 \Rightarrow$

$$a_{20} = -2a_{10} \tag{3.18}$$

$\Rightarrow B_2(y) \equiv 0$, $B_3(y) = -2a_{10}^2 b_{30} \not\equiv 0$, $\mu_2 = 3$.

3), 4) $\Rightarrow B_1(y) = -b_{30}(a_{11}^2 y^2 + 2a_{11}(2a_{10} + a_{20})y + 4a_{10}^2 + 4a_{10}a_{20} + a_{20}^2 - a_{11}b_{30}) \not\equiv 0$, $\mu_2 = 1$.

Lema 3.1.5. *Pentru sistemul cubic* $\{(3.3), (3.2)\}$ *dreptele invariante* $x = 0$ *şi* $x = 1$ *au multiplicităţile* $\mu_1 = 4$ *şi* $\mu_2 = 2$ *atunci şi numai atunci, când are loc seria de condiţii* $\{(3.5), (3.8), (3.12), (3.17)\}$.

Lema 3.1.6. *Pentru sistemul cubic* $\{(3.3), (3.2)\}$ *dreptele invariante* $x = 0$ *şi* $x = 1$ *au multiplicităţile* $\mu_1 = 4$ *şi* $\mu_2 = 3$ *atunci şi numai atunci, când are loc seria de condiţii* $\{(3.6), (3.9), (3.13), (3.18)\}$.

3.1.2. Clasificarea sistemelor cubice diferenţiale ce posedă două drepte invariante afine reale paralele şi pentru care dreapta de la infinit are multiplicitatea algebrică maximală

În această secţiune pentru sistemul $\{(3.3),(3.2)\} \in \mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ vom determina consecutivităţile (parţial) maximale de tipul $(m_\infty(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty))$ $m(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty)$.

Fixăm $\mu_1 \in \{1,2,3,4\}$ şi $\mu_2 \in \{1,2,3\}$, $\mu_1 \geq \mu_2$. Vom calcula multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit astfel încât consecutivitatea $(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty)$ să fie maximală după a treia componentă. Vom examina cazurile:

1) $m(4,3;\mu_\infty)$, **2)** $m_\infty(4,2;\mu_\infty)$, **3)** $m_\infty(4,1;\mu_\infty)$, **4)** $m_\infty(3,3;\mu_\infty)$, **5)** $m_\infty(3,2;\mu_\infty)$, **6)** $m_\infty(3,1;\mu_\infty)$, **7)** $m_\infty(2,2;\mu_\infty)$, **8)** $m_\infty(2,1;\mu_\infty)$, **9)** $m_\infty(1,1;\mu_\infty)$.

Considerăm sistemul cubic $\{(3.3), (3.2)\} \in \mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ şi sistemul omogenizat corespunzător

$$\dot{x} = x(Z-x)(a_{10}Z + a_{10}x + a_{20}x + a_{11}y), \quad \dot{y} = b_{00}Z^3 + b_{10}xZ^2 + b_{01}yZ^2 + \\ + b_{20}x^2Z + b_{11}xyZ + b_{02}y^2Z + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3. \tag{3.19}$$

Pentru (3.19) vom scrie $E_1(\mathbb{X})$ sub forma

$$E_1(\mathbb{X}) = C_0(x,y) + C_1(x,y)Z + C_2(x,y)Z^2 + C_3(x,y)Z^3 + C_4(x,y)Z^4 \\ + C_5(x,y)Z^5 + C_6(x,y)Z^6 + C_7(x,y)Z^7 + C_8(x,y)Z^8, \tag{3.20}$$

unde $C_j(x,y), j = \overline{0,8}$ sunt polinoame în x şi y.

Dacă $\mu_\infty \in \mathbb{N}^*$ este cel mai mare număr astfel încât $Z^{(\mu_\infty - 1)}$ divide $E_1(\mathbb{X})$, atunci multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit este egală cu μ_∞.

1) Cazul $m(4,3;\mu_\infty)$.

Sistemul cubic (3.3) admite dreptele invariante $x = 0$ şi $x = 1$ de multiplicităţile 4, respectiv 3, atunci când se realizează seria de condiţii din lema 3.1.6. În aceste condiţii sistemul (3.3) obţine următoarea formă

$$\dot{x} = a_{10}x(x-1)^2, \qquad \dot{y} = (b_{00} + a_{10}y)(x-1)^2 + b_{30}x^3, \;\; a_{10}b_{30} \neq 0. \tag{3.21}$$

Considerăm sistemul omogenizat

$$\dot{x} = a_{10}x(x-Z)^2, \qquad \dot{y} = (b_{00}Z + a_{10}y)(x-Z)^2 + b_{30}x^3, \;\; a_{10}b_{30} \neq 0,$$

corespunzător sistemului (3.21) şi calculăm polinomul $C_0(x,y)$ din (3.20): $C_0(x,y) = a_{10}^2 b_{30} x^8 \not\equiv 0$. Prin urmare, multiplicitatea dreptei de la infinit pentru (3.21) nu poate fi mai mare decât unu şi deci, în clasa de sisteme cubice $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ avem consecutivitatea maximală de multiplicităţi $m(4,3;1)$.

Sistemul (3.21) prin intermediul transformării afine $x \to x$, $y \to (b_{30}y - b_{00})/a_{10}$ şi rescalarea timpului $t = \tau/a_{10}$ poate fi scris astfel:

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \qquad \dot{y} = x^3 + y(x-1)^2. \tag{3.22}$$

Sistemul obţinut este Darboux integrabil şi are integrala primă:

$$F(x,y) = (x-1)^{-1} exp[(x - y + xy)/(x(x-1))].$$

Lema 3.1.7. *Cu exactitatea unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ *ce admite consecutivitatea maximală de multiplicităţi* $m(4,3;1)$ *poate fi scris sub forma* (3.22).

2) Cazul $m_\infty(4,2;\mu_\infty)$

În condiţiile lemei 3.1.5 sistemul cubic ia forma

$$\dot{x} = -a_{20}(x-1)x^2,\ \ \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + 2a_{20}xy - 3a_{20}x^2y,\ a_{20}b_{00} \neq 0. \quad (3.23)$$

În acest caz $C_0(x,y) = -3a_{20}^2x^7(2a_{20}y - b_{30}x) \not\equiv 0$, deci μ_∞ nu poate fi mai mare decât unu. Aşadar, avem consecutiviatea parţial maximală de multiplicităţi $m_\infty(4,2;1)$. Transformarea de coordonate $x \to x$, $y \to -(b_{10} + (3b_{10} + 2b_{20})x + 2b_{00}y)/(2a_{20})$, şi rescalarea timpului $t \to -t/a_{20}$, reduce (3.23) la sistemul

$$\dot{x} = x^2(x-1), \quad \dot{y} = ax^3 + 3x^2y - 2xy + 1, \quad (3.24)$$

unde $a = (3b_{10} + 2b_{20} + b_{30})/b_{00}$.

Sistemul obţinut este Darboux integrabil şi are integrala primă:

$$F(x,y) = exp((1 + 6x^2 - 3(4+a)x^3 + x(2-3y))/(3x^3(x-1)))(-1+1/x)^{(-4-a)}.$$

Lema 3.1.8. *Cu ajutorul unei transformări afine şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ *ce admite consecutivitatea parţial maximală de multiplicităţi* $m_\infty(4,2;1)$ *poate fi scris sub forma* (3.24).

3) Cazul $m_\infty(4,1;\mu_\infty)$

Sistemul cubic (3.3) admite dreptele invariante $x = 0$ şi $x = 1$ de multiplicităţile $\mu_1 = 4$, respectiv $\mu_2 = 1$, atunci când se realizează cel puţin una dintre cele patru serii de condiţii din lema 3.1.3.

1) Condiţiile (3.5), (3.8), (3.12). Sistemul (3.3) ia forma

$$\dot{x} = a_{20}x^2(1-x), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + 2a_{20}xy + b_{21}x^2y,\ \ a_{20}b_{00} \neq 0. \quad (3.25)$$

În acest caz $C_0(x,y) = -a_{20}b_{21}x^7(b_{30}x + (a_{20} + b_{21})y)$. Ţinând cont de (3.2), identitatea $C_0(x,y) \equiv 0$ are loc doar dacă $b_{21} = 0$. Atunci $C_1(x,y) = -a_{20}^2x^6((b_{20} + 3b_{30})x + 4a_{20}y) \not\equiv 0$ şi deci, μ_∞ nu poate fi mai mare decât doi.

2) Condiţiile (3.6), (3.9), (3.13). În acest caz avem următorul sistem cubic

$$\begin{aligned}&\dot{x} = x(1-x)(a_{10} + (a_{10} + a_{20})x), \quad \dot{y} = (a_{10}b_{00} + a_{20}b_{00}x - (a_{10}b_{00} + a_{20}b_{00})x^2 + \\ &a_{10}b_{30}x^3 + a_{10}^2y + a_{10}a_{20}xy - (a_{10}^2 + a_{10}a_{20})x^2y)/a_{10},\ \ a_{10}b_{30} \neq 0,\end{aligned} \quad (3.26)$$

pentru care $C_0(x,y) = (a_{10} + a_{20})^2 b_{30} x^8$.

Respectând condiţia (3.2), $C_0(x,y) \equiv 0 \Rightarrow a_{20} = -a_{10}$. Condiţia $a_{20} = -a_{10}$ anulează şi $C_1(x,y)$, iar $C_2(x,y) = 2a_{10}^2 b_{30} x^6 \not\equiv 0$, prin urmare $\mu_\infty = 3$, iar sistemul cubic (3.26) ia forma

$$\dot{x} = -a_{10}x(x-1), \quad \dot{y} = b_{30}x^3 - a_{10}xy - b_{00}x + a_{10}y + b_{00}, \;\; a_{10}b_{30} \neq 0. \tag{3.27}$$

Transformarea de coordonate $x \to x$, $y \to (b_{30}y - b_{00})/a_{10}$ şi rescalarea timpului $t \to -t/a_{10}$ aduce sistemul (3.27) la forma

$$\dot{x} = x(x-1), \quad \dot{y} = -x^3 + y(x-1). \tag{3.28}$$

Sistemul (3.28) este Darboux integrabil şi are integrala primă:

$$F(x,y) = (x-1)exp((x^2+y)/x).$$

3) Condiţiile (3.7)*,* (3.10)*,* (3.14). Avem următorul sistem cubic

$$\begin{aligned}&\dot{x} = x(1-x)(a_{10} + (a_{10}+a_{20})x + a_{11}y), \quad \dot{y} = (a_{10}^2 + a_{10}a_{20}x - a_{10}^2x^2 - \\ &a_{10}a_{20}x^2 + a_{11}b_{30}x^3 + 2a_{10}a_{11}y - a_{10}a_{11}xy + a_{11}a_{20}xy - a_{10}a_{11}x^2y - \\ &a_{11}a_{20}x^2y + a_{11}^2y^2 - a_{11}^2xy^2)/a_{11}, \;\; a_{11}b_{30} \neq 0.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Pentru el $C_0(x,y) = b_{30}x^6(a_{10}^2x^2 + 2a_{10}a_{20}x^2 + a_{20}^2x^2 + a_{11}b_{30}x^2 + 2a_{10}a_{11}xy + 2a_{11}a_{20}xy + a_{11}^2y^2) \not\equiv 0$, deoarece $a_{11} \neq 0$ şi $b_{30} \neq 0$ (în caz contrar, (3.29) ar avea infinitul degenerat). Prin urmare, μ_∞ nu poate fi mai mare decât unu.

4) Condiţiile (3.7)*,* (3.11)*,* (3.15). Sistemul cubic (3.3) are forma

$$\begin{aligned}&\dot{x} = x(1-x)(a_{10} + (a_{10}+a_{20})x + a_{11}y), \quad \dot{y} = (-a_{10}^2 + a_{10}b_{01} - a_{10}a_{20}x + a_{20}b_{01}x + \\ &a_{10}^2x^2 + a_{10}a_{20}x^2 - a_{10}b_{01}x^2 - a_{20}b_{01}x^2 + a_{11}b_{30}x^3 + a_{11}b_{01}y + a_{10}a_{11}xy + a_{11}a_{20}xy - \\ &a_{11}b_{01}xy - a_{10}a_{11}x^2y - a_{11}a_{20}x^2y + a_{11}^2y^2 - a_{11}^2xy^2)/a_{11}, \; a_{11}b_{30} \neq 0.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Polinomul $C_0(x,y) = b_{30}x^6(a_{10}^2x^2 + 2a_{10}a_{20}x^2 + a_{20}^2x^2 + a_{11}b_{30}x^2 + 2a_{10}a_{11}xy + 2a_{11}a_{20}xy + a_{11}^2y^2)$ nu este identic zero, deoarece $a_{11}b_{30} \neq 0$. Deci, μ_∞ nu poate fi mai mare decât unu.

Lema 3.1.9. *Cu exactitatea unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{p}$ *ce admite consecutivitatea maximală de multiplicităţi* $m(4,1;3)$ *poate fi scris sub forma* (3.28)*.*

4) Cazul $m_\infty(3,3;\mu_\infty)$

Sistemul cubic (3.3) admite dreapta invariantă $x = 0$ de multiplicitatea $\mu_1 = 3$, dacă se îndeplineşte una din cele patru serii de condiţii ale lemei 3.1.2. Pentru fiecare caz vom cere ca dreapta invariantă $x = 1$ să fie de multiplicitatea $m_2 = 3$, apoi vom studia multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit.

1) Condiţiile (3.5)*,* (3.8). În aceste condiţii sistemul (3.3) ia forma:

$$\dot{x} = -a_{20}x^2(x-1),\ \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + b_{11}xy + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2,\ a_{20}b_{00} \neq 0. \quad (3.31)$$

Pentru acest sistem reprezentăm $E_1(\mathbb{X})$ sub forma (3.16). Dreapta invariantă $x = 1$ va avea multiplicitatea $\mu_2 \geq 3$ atunci când polinoamele $B_1(y)$ şi $B_2(y)$ din (3.16) vor fi identic egale cu zero. Pentru (3.31) avem

$B_1(y) = -a_{20}(a_{20} + b_{11} + b_{21} + 2b_{12}y)(b_{00} + b_{10} + b_{20} + b_{30} + (b_{11} + b_{21})y + b_{12}y^2)$,

$B_2(y) = -a_{20}(6a_{20}b_{00} + 6a_{20}b_{10} + 3b_{00}b_{11} + 4b_{10}b_{11} + 6a_{20}b_{20} + 5b_{11}b_{20} + 4b_{00}b_{21} + 5b_{10}b_{21} + 6b_{20}b_{21} + 6a_{20}b_{30} + 6b_{11}b_{30} + 7b_{21}b_{30} + 2(3a_{20}b_{11} + 2b_{11}^2 + 3b_{00}b_{12} + 4b_{10}b_{12} + 5b_{12}b_{20} + 3a_{20}b_{21} + 5b_{11}b_{21} + 3b_{21}^2 + 6b_{12}b_{30})y + 3b_{12}(2a_{20} + 4b_{11} + 5b_{21})y^2 + 8b_{12}^2y^3)$.

Ţinând cont de condiţia (3.2), $B_1(y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{12} = 0,\ \ b_{21} = -(b_{11} + a_{20}). \quad (3.32)$$

Astfel, dreapta invariantă $x = 1$ are multiplicitatea $\mu_2 = 2$, iar $B_2(y) = -a_{20}(2a_{20}b_{00} + a_{20}b_{10} - b_{00}b_{11} - b_{10}b_{11} - b_{11}b_{20} - a_{20}b_{30} - b_{11}b_{30} + 2a_{20}b_{11}y)$. Multiplicitatea dreptei invariante $x = 1$ este egală cu trei, dacă

$$b_{11} = 0,\ \ b_{30} = 2b_{00} + b_{10}. \quad (3.33)$$

În condiţiile {(3.32), (3.33)} sistemul (3.31) arată astfel:

$$\dot{x} = -a_{20}x^2(x-1), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + (2b_{00} + b_{10})x^3 - a_{20}x^2y,\ a_{20}b_{00} \neq 0. \quad (3.34)$$

Pentru sistemul (3.34) multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât unu, deoarece, respectând condiţia (3.2), avem $C_0(x,y) = a_{20}^2(2b_{00} + b_{10})x^8 \not\equiv 0$.

Transformare afină $x \to x$, $y \to (-b_{00}y + b_{20})/a_{20}$ şi rescalarea timpului $t = -\tau/a_{20}$ reduce sistemul (3.34) la forma

$$\dot{x} = x^2(x-1), \quad \dot{y} = (2+b)x^3 + x^2y + bx + 1,\ \ b \neq -3, \quad (3.35)$$

unde $b = b_{10}/b_{00}$. Dacă $b = -3$, atunci (3.35) admite consecutivitatea de multiplicităţi $(3,4;1)$.

2) Condiţiile (3.6)*,* (3.9). Sistemul (3.3) are forma

$$\begin{gathered}\dot{x} = -x(x-1)(a_{10} + (a_{10} + a_{20})x), \quad \dot{y} = (a_{10}b_{00} + a_{20}b_{00}x + \\ + a_{10}b_{20}x^2 + a_{10}b_{30}x^3 + a_{10}^2y + a_{10}a_{20}xy + a_{10}b_{21}x^2y)/a_{10}, \quad a_{10} \neq 0.\end{gathered} \quad (3.36)$$

Pentru (3.36) avem $B_1(y) = -(2a_{10} + a_{20})(3a_{10} + 2a_{20} + b_{21})(a_{10}b_{00} + a_{20}b_{00} + a_{10}b_{20} + a_{10}b_{30} + a_{10}(a_{10} + a_{20} + b_{21})y)/a_{10}$. Ţinând cont de (3.2), $B_1(y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$a_{20} = -2a_{10}, \tag{3.37}$$

$$b_{21} = -3a_{10} - 2a_{20}, \;\; a_{20} \neq -2a_{10}. \tag{3.38}$$

În condiţiile {(3.6), (3.9), (3.37)} dreapta invariantă $x = 1$ are pentru sistemul cubic (3.3) multiplicitatea $\mu_2 = 2$, iar $B_2(y) = a_{10}(a_{10} - b_{21})(b_{00} - b_{20} - b_{30} + (a_{10} - b_{21})y) \equiv 0$, dacă

$$b_{21} = a_{10}. \tag{3.39}$$

În aşa caz, $\mu_2 = 3$ şi (3.36) capătă forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_{10}x(x-1)^2, \\ &\dot{y} = b_{00} - 2b_{00}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + a_{10}y - 2a_{10}xy + a_{10}x^2y, \;\; a_{10}b_{30}(b_{20} - b_{00}) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Menţionăm, că dacă în sistemul (3.40) b_{30} ar fi egal cu zero, atunci infinitul pentru (3.40) ar fi degenerat, ceia ce nu se admite. În cazul $b_{20} - b_{00} = 0$ dreapta invariantă $x = 0$ are multiplicitatea $\mu_1 = 4$, în timp ce noi examinăm consecutivităţile de tipul $(3, 3, \mu_\infty)$. Deoarece $C_0(x, y) = a_{10}^2 b_{30}x^8 \not\equiv 0$ rezultă, că pentru (3.40) avem $\mu_\infty = 1$.

Transformarea $x \to x$, $y \to ((b_{20} - b_{00})y - b_{00})/a_{10}$, şi rescalarea timpului $t = \tau/a_{10}$, aduce sistemul (3.40) la forma

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = ax^3 + x^2 + y(x-1)^2, \;\; a \neq -1, \tag{3.41}$$

unde $a = -b_{30}/(b_{00} - b_{20})$.

Notând $a = -(b + 2)/(b + 3)$ şi efectuând transformarea $x \to -x + 1$, $y \to (3 + b)y - 3 - 2b$, $b \neq -3$, reducem (3.35) la forma (3.41), deci sistemele (3.35) şi (3.41) sunt afin-echivalente.

Sistemul (3.41) este Darboux integrabil şi are integrala primă:

$$F(x, y) = exp((x + ax - y + xy)/(x(x-1)))/(x-1)^a.$$

În condiţiile {(3.6), (3.9), (3.38)} multiplicitatea μ_2 a dreptei $x = 1$ este egală cu doi, iar $B_2(y) = (2a_{10} + a_{20})(a_{20}b_{00} + 4a_{10}b_{20} + a_{20}b_{20} + 6a_{10}b_{30} + 2a_{20}b_{30} - 2(2a_{10} + a_{20})(3a_{10} + a_{20})y)$. Dacă

$$a_{20} = -3a_{10}, \;\; b_{20} = 3b_{00}, \tag{3.42}$$

atunci $\mu_2 = 3$, iar sistemul cubic are forma:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_{10}x(x-1)(2x-1), \quad \dot{y} = b_{00} - 3b_{00}x + 3b_{00}x^2 + b_{30}x^3 + \\ &+a_{10}y - 3a_{10}xy + 3a_{10}x^2y, \ \ a_{10} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Multiplicitatea dreptei de la infinit pentru (3.43) este egală cu unu, deoarece $C_0(x,y) = 6a_{10}^2x^7(b_{30}x + a_{10}y) \not\equiv 0$. Menţionăm, că sistemul (3.43), pe lângă dreptele $x = 0$ şi $x = 1$, mai posedă şi dreptele invariante: $2x - 1 = 0$ şi $b_{00} + b_{30}x + a_{10}y = 0$. Prin urmare, pentru sistemul (3.43) avem consecutivitatea de multiplicităţi $(3,3,1,1;1)$.

3) Condiţiile (3.7), (3.10). Sistemul cubic (3.3) are forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -x(x-1)(a_{10} + (a_{10}+a_{20})x + a_{11}y), \quad \dot{y} = (a_{10}^2 + a_{11}b_{10}x + a_{11}b_{20}x^2 + a_{11}b_{30}x^3 + \\ &+2a_{10}a_{11}y + (a_{11}a_{20} - a_{10}a_{11})xy + a_{11}b_{21}x^2y + a_{11}^2y^2 - a_{11}^2xy^2)/a_{11}, \ \ a_{11} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Ţinând cont de condiţiile (3.2), pentru (3.44) avem $B_1(y) = -(a_{10}^2 + a_{11}b_{10} + a_{11}b_{20} + a_{11}b_{30} + a_{11}(a_{10}+a_{20}+b_{21})y)(5a_{10}^2 + 7a_{10}a_{20} + 2a_{20}^2 - a_{11}b_{10} - a_{11}b_{20} + 2a_{10}b_{21} + a_{20}b_{21} - a_{11}b_{30} + 2a_{11}(2a_{10} + a_{20})y + a_{11}^2y^2)/a_{11} \not\equiv 0$, deci $\mu_2 = 1$.

4) Condiţiile (3.7), (3.11). În acest caz avem următorul sistem:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -x(x-1)(a_{10} + (a_{10}+a_{20})x + a_{11}y), \quad \dot{y} = -(a_{10}(a_{10} - b_{01}) + \\ &+a_{20}(a_{10} - b_{01})x - a_{11}b_{20}x^2 - a_{11}b_{30}x^3 - a_{11}b_{01}y + a_{11}(b_{01} - a_{10} - \\ &-a_{20})xy - a_{11}b_{21}x^2y - a_{11}^2y^2 + a_{11}^2xy^2)/a_{11}, \ \ a_{11} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Pentru (3.45) plinomul $B_1(y) = (a_{10}^2 + a_{10}a_{20} - a_{10}b_{01} - a_{20}b_{01} - a_{11}b_{20} - a_{11}b_{30} - a_{11}(a_{10} + a_{20} + b_{21})y)(7a_{10}^2 + 8a_{10}a_{20} + 2a_{20}^2 - a_{10}b_{01} - a_{20}b_{01} - a_{11}b_{20} + 2a_{10}b_{21} + a_{20}b_{21} - a_{11}b_{30} + 2a_{11}(2a_{10} + a_{20})y + a_{11}^2y^2)/a_{11} \not\equiv 0$ şi, prin urmare, $\mu_2 = 1$.

Lema 3.1.10. *Pentru sistemul cubic* $\{(3.3), (3.2)\}$ *dreptele invariante* $x = 0$ *şi* $x = 1$ *au respectiv multiplicităţile* $\mu_1 = 3$ *şi* $\mu_2 = 2$ *atunci şi numai atunci, când are loc una dintre următoarele trei serii de condiţii: 1)* (3.5), (3.8), (3.32)*; 2)*(3.6), (3.9), (3.37)*; 3)*(3.6), (3.9), (3.38).

Lema 3.1.11. *Cu exactitatea unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{p}$ *ce admite consecutivitatea parţial maximală de multiplicităţi* $m_\infty(3,3;1)$ *poate fi scris sub forma* (3.41).

5) Cazul $m_\infty(3;2;\mu_\infty)$.

Sistemul cubic (3.3) admite dreptele invariante reale $x = 0$ şi $x = 1$ de multiplicităţile $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$, atunci când se realizează una din cele trei serii de condiţii din lema 3.1.10.

1) Condiţiile (3.5), (3.8), (3.32). Sistemul cubic (3.3) se scrie astfel:

$$\dot{x} = -a_{20}x^2(x-1), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + b_{11}xy - a_{20}x^2y - b_{11}x^2y, \; a_{20} \neq 0. \tag{3.46}$$

Pentru sistemul omogenizat

$$\dot{x} = -a_{20}x^2(x-Z), \quad \dot{y} = b_{00}Z^3 + b_{10}xZ^2 + b_{20}x^2Z + b_{30}x^3 + b_{11}xyZ - a_{20}x^2y - b_{11}x^2y, \tag{3.47}$$

corespunzător sistemului (3.46), reprezentăm $E_1(\mathbb{X})$ sub forma (3.20). Avem $C_0(x,y) = a_{20}(a_{20}+b_{11})x^7(b_{30}x - b_{11}y)$. Ţinând cont de condiţiile (3.2), polinomul $C_0(x,y)$ este identic zero, dacă

$$b_{11} = -a_{20}. \tag{3.48}$$

Luând în consideraţie (3.48), sistemul (3.46) arată astfel

$$\dot{x} = -a_{20}x^2(x-1), \quad \dot{y} = b_{30}x^3 + b_{20}x^2 - a_{20}xy + b_{10}x + b_{00}, a_{20}b_{00} \neq 0. \tag{3.49}$$

Pentru (3.49) $C_1(x,y) = a_{20}^2x^6(2a_{20}y - b_{20}x) \not\equiv 0$, deci el admite consecutivitatea maximală de multiplicităţi $(3,2;2)$

Folosind transformarea afină $x \to x$, $y \to (b_{10} - b_{30}x - b_{00}y)/a_{20}$ $(b_{00} \neq 0)$ şi rescalarea timpului $t \to -t/a_{20}$ $(a_{20} \neq 0)$, sistemul (3.49) se scrie sub forma

$$\dot{x} = x^2(x-1), \qquad \dot{y} = ax^2 + xy + 1, \tag{3.50}$$

unde $a = (b_{20} + 2b_{30})/b_{00}$.

Uşor se verifică, că (3.50) are integrala primă de tip Darboux:

$$F(x,y) = x(1-x)^{a-1}/exp(((xy+a+1)/(x-1))).$$

2) Condiţiile (3.6), (3.9), (3.37). Sistemul cubic (3.3) ia forma

$$\dot{x} = a_{10}x(x-1)^2, \quad \dot{y} = b_{00} - 2b_{00}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + a_{10}y - 2a_{10}xy + b_{21}x^2y, \; a_{10} \neq 0. \tag{3.51}$$

În acest caz $C_0(x,y) = -a_{10}b_{21}x^7((a_{10}-b_{21})y - b_{30}x)$. Ţinând cont de (3.2), avem implicaţiile: $C_0(x,y) \equiv 0 \Rightarrow b_{21} = 0 \Rightarrow C_1(x,y) = -a_{10}^2x^6((b_{20}+4b_{30})x - 4a_{10}y) \not\equiv 0$. Punând în (3.51), obţinem sistemul

$$\dot{x} = a_{10}x(x-1)^2, \quad \dot{y} = b_{00} - 2b_{00}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + a_{10}y - 2a_{10}xy, \; a_{10} \neq 0. \tag{3.52}$$

Dacă $b_{20} = 0$, atunci (3.52) admite dreapta invariantă $a_{10}y - b_{30}x + b_{00} = 0$, adică el nu aparţine clasei de sisteme cubice $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$. Presupunem că $b_{20} \neq 0$. Transformarea $x \to x$,

$y \to (-b_{20}y + b_{30}x - b_{00})/a_{10}$, $a_{10} \neq 0$, $b_{20} \neq 0$ şi rescalarea timpului $t \to t/a_{10}$ aduc sistemul (3.52) la forma

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \qquad \dot{y} = -x^2 - 2xy + y. \tag{3.53}$$

Pentru (3.53) avem consecutivitatea maximală de multiplicităţi $(3, 2; 2)$. Mai mult ca atât, (3.53) are factor integrant de tip Darboux:

$$\mu(x, y) = 1/(x^2(x-1)exp(1/(x-1))).$$

3) Condiţiile (3.6), (3.9), (3.38). Avem următorul sistem cubic

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -x(x-1)((a_{10} + a_{20})x + a_{10}), \ \ \dot{y} = (a_{10}b_{00} + a_{20}b_{00}x + a_{10}b_{20}x^2 + \\ &a_{10}b_{30}x^3 + a_{10}^2y + a_{10}a_{20}xy - 3a_{10}^2x^2y - 2a_{10}a_{20}x^2y)/a_{10}, \ a_{10}(a_{20} + 2a_{10}) \neq 0 \end{aligned} \tag{3.54}$$

şi $C_0(x, y) = (a_{10} + a_{20})(3a_{10} + 2a_{20})x^7(b_{30}x - (2a_{10} + a_{20})y)$. Identitatea $C_0(x, y) \equiv 0$ are loc, dacă se realizează cel puţin una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$a_{20} = -a_{10}, \tag{3.55}$$

$$a_{20} = -3a_{10}/2. \tag{3.56}$$

În cazul condiţiei (3.55) avem $C_1(x, y) = -a_{10}^2x^6(a_{10}y - b_{30}x) \not\equiv 0$, deci $\mu_\infty = 2$. Sistemul cubic (3.54) ia forma

$$\dot{x} = -a_{10}x(x-1), \quad \dot{y} = b_{30}x^3 - a_{10}x^2y + b_{20}x^2 - a_{10}xy - b_{00}x + a_{10}y + b_{00}, \ a_{10} \neq 0. \tag{3.57}$$

Dacă $b_{20} = -b_{00}$, atunci (3.57), pe lângă dreptele $x = 0$ şi $x = 1$, mai admite şi dreapta invariantă $a_{10}y - b_{30}x + b_{00} = 0$. De aceea, vom presupune că $b_{20} \neq -b_{00}$.

Prin intermediul transformării afine $x \to x$, $y \to (-(b_{20}+b_{00})y+b_{30}x-b_{00})/a_{10}$ şi rescalarea timpului $t \to -t/a_{10}$ sistemul (3.57) se scrie astfel

$$\dot{x} = x(x-1), \qquad \dot{y} = x^2 + y(x^2 + x - 1). \tag{3.58}$$

Pentru (3.58) avem consecutivitatea maximală de multiplicităţi $(3, 2; 2)$ şi factorul integrant de tip Darboux:

$$\mu(x, y) = 1/x^2(x-1)^2exp(x)).$$

Dacă se realizează condiţia (3.56), atunci $C_1(x, y) = a_{10}^2x^6(3a_{10}y - (b_{20} + 6b_{30})x)/4 \not\equiv 0$ şi deci, $\mu_\infty = 2$. În acest caz sistemul cubic (3.54) ia forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_{10}x(x-2)(x-1)/2, \ \ \dot{y} = (2b_{30}x^3 + 2b_{20}x^2 - \\ &3a_{10}xy - 3b_{00}x + 2a_{10}y + 2b_{00})/2, \ \ a_{10} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Evident, pentru (3.59) dreaptele $x = 0, x = 1$ şi $x = 2$ sunt invariante şi se realizează consecutivitatea de multiplicităţi $(3, 2, 1; 2)$.

Lema 3.1.12. *Cu ajutorul unei transformări afine şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ *ce admite consecutivitatea maximală de multiplicităţi* $m(3, 2; 2)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele trei forme:* (3.50), (3.53), (3.58).

6) Cazul $m_\infty(3, 1; \mu_\infty)$.

În condiţiile lemei 3.1.2 vom determina pentru sistemul cubic (3.3) multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit.

1) Condiţiile (3.5), (3.8). Sistemul (3.3) are forma

$$\dot{x} = -a_{20}x^2(x-1), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + b_{11}xy + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2, \quad a_{20} \neq 0. \tag{3.60}$$

Pentru (3.60) avem $C_0(x, y) = -a_{20}x^5(b_{21}x + 2b_{12}y)(b_{30}x^2 + a_{20}xy + b_{21}xy + b_{12}y^2)$. Ţinând cont de (3.2), multiplicitatea $\mu_\infty \geq 2$, dacă

$$b_{12} = b_{21} = 0. \tag{3.61}$$

Egalităţile (3.61) ne conduc la implicaţiile: $C_1(x, y) = -a_{20}x^6(a_{20}b_{20}x + a_{20}b_{30}x + b_{11}b_{30}x + 2a_{20}b_{11}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{11} = 0, b_{30} = -b_{20}, \Rightarrow C_2(x, y) = -2a_{20}^2b_{10}x^6 \equiv 0 \Rightarrow b_{10} = 0 \Rightarrow C_3(x, y) = -3a_{20}^2b_{00}x^5 \not\equiv 0$, deci $\mu_\infty = 4$, iar sistemul cubic se scrie astfel

$$\dot{x} = -a_{20}x^2(x-1), \qquad \dot{y} = -b_{20}x^3 + b_{20}x^2 + b_{00}, \quad a_{20}b_{00} \neq 0. \tag{3.62}$$

Cu ajutorul transformării de coordonate $x \to x$, $y \to (b_{20}x - b_{00}y)/a_{20}$ şi rescalarea timpului $t \to -t/a_{20}$ sistemul (3.62) se aduce la forma

$$\dot{x} = x^2(x-1), \qquad \dot{y} = 1. \tag{3.63}$$

Sistemul obţinut este Darboux integrabil şi are integrala primă:

$$F(x, y) = x\,exp((xy-1)/x)/(1-x).$$

2) Condiţiile (3.6), (3.9). În aceste condiţii sistemul cubic (3.3) capătă forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(x-1)(a_{10} + a_{10}x + a_{20}x), \quad \dot{y} = (a_{10}b_{00} + a_{20}b_{00}x + \\ &a_{10}b_{20}x^2 + a_{10}b_{30}x^3 + a_{10}^2y + a_{10}a_{20}xy + a_{10}b_{21}x^2y)/a_{10}, \quad a_{10} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Pentru (3.64) avem $C_0(x, y) = -(a_{10}+a_{20})b_{21}x^7(b_{30}x+a_{10}y+a_{20}y+b_{21}y)$. Identitatea $C_0(x, y) \equiv 0$ are loc atunci când se realizează una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$a_{20} = -a_{10}; \tag{3.65}$$

$$b_{21} = 0, a_{20} \neq -a_{10}; \tag{3.66}$$

$$b_{30} = 0, b_{21} = -a_{10} - a_{20}, a_{20} \neq -a_{10}. \tag{3.67}$$

Egalitatea (3.65) ne conduce la implicaţiile $C_1(x,y) = -a_{10}b_{21}x^6(b_{30}x + b_{21}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{21} = 0 \Rightarrow C_2(x,y) = 2a_{10}^2 b_{30}x^6 \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$.

Dacă se realizează (3.66), obţinem $C_1(x,y) = -(a_{10}+a_{20})x^5(a_{10}b_{30}x + a_{10}b_{20}x^2 + a_{20}b_{20}x^2 + 2a_{20}b_{30}x^2 + 3a_{10}^2 y + 3a_{10}a_{20}y + 2a_{10}a_{20}xy + 2a_{20}^2 xy) \not\equiv 0$, deci $\mu_\infty = 2$.

Pentru (3.67) avem $C_1(x,y) = -a_{10}(a_{10} + a_{20})^2 x^5 y \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 2$.

3) Condiţiile (3.7), (3.10) şi *4) Condiţiile* (3.7), (3.11). În ambele cazuri polinomul $C_0(x,y)$ arată astfel: $C_0(x,y) = x^5(b_{30}x + a_{10}y + a_{20}y + b_{21}y)(-a_{10}b_{21}x^2 - a_{20}b_{21}x^2 + a_{11}b_{30}x^2 + 2a_{10}a_{11}xy + 2a_{11}a_{20}xy + a_{11}^2 y^2)$. Dacă $C_0(x,y)$ este identic zero, atunci sistemul cubic (3.3) are infinitul degenerat, ceea ce nu permite (3.2). Prin urmare, în aceste cazuri μ_∞ nu poate fi mai mare decât unu.

În concluzie, multiplicitatea dreptei invariante de la infinit pentru sistemul cubic ce posedă două drepte invariante afine, reale şi paralele, dintre care una este triplă, nu poate fi mai mare decât patru.

Lema 3.1.13. *Cu exactitatea unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ *ce admite consecutivitatea maximală de multiplicităţi* $m(3,1;4)$ *poate fi scris sub forma* (3.63).

7) Cazul $m_\infty(2,2;\mu_\infty)$.

În această subsecţiune vom determina multiplicitatea maximală a dreptei invariante de la infinit în cazul când dreptele invariante $x = 0$ şi $x = 1$ au respectiv multiplicităţile $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$. Pentru sistemul cubic (3.3) dreapta invariantă $x = 0$ are multiplicitatea $\mu_1 = 2$, dacă se îndeplineşte una dintre seriile de condiţii ale lemei 3.1.1. Mai întâi, pentru fiecare serie vom cere ca dreapta invariantă $x = 1$ să fie de multiplicitatea $\mu_2 = 2$, apoi vom calcula multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit.

1) Condiţiile (3.5). Sistemul cubic (3.3) are forma

$$\begin{gathered} \dot{x} = -a_{20}x^2(x-1),\ \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + b_{01}y + b_{11}xy + \\ b_{21}x^2y + b_{02}y^2 + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3,\quad a_{20} \neq 0. \end{gathered} \tag{3.68}$$

Dreapta invariantă $x = 1$ va avea multiplicitatea $\mu_2 = 2$ atunci când $B_1(y)$ din (3.16) va fi identic egal cu zero. Pentru $\{(3.68), (3.2)\}$ avem $B_1(y) = -a_{20}(a_{20} + b_{01} + b_{11} + b_{21} + 2(b_{02} +$

$b_{12})y + 3b_{03}y^2)(b_{00} + b_{10} + b_{20} + b_{30} + (b_{01} + b_{11} + b_{21})y + (b_{02} + b_{12})y^2 + b_{03}y^3) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{03} = 0, b_{12} = -b_{02}, b_{21} = -(a_{20} + b_{01} + b_{11}). \tag{3.69}$$

Prin urmare, $\mu_2 = 2$, iar sistemul ia forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -a_{20}x^2(x-1),\ \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + b_{01}y + b_{11}xy - \\ &(a_{20} + b_{01} + b_{11})x^2y + b_{02}y^2 - b_{02}xy^2,\ \ a_{20} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Omogenizăm (3.70) şi determinăm polinomul $C_0(x,y) = a_{20}x^5(a_{20}x+b_{01}x+b_{11}x+2b_{02}y)(b_{30}x^2-b_{01}xy - b_{11}xy - b_{02}y^2)$. Ţinând cont de (3.2), identitatea $C_0(x,y) \equiv 0$ are loc, dacă

$$b_{02} = 0, b_{11} = -(b_{01} + a_{20}). \tag{3.71}$$

Avem $\mu_\infty \geq 2$ şi $C_1(x,y) = a_{20}x^6((b_{01}b_{30} - a_{20}b_{20})x + 2a_{20}(a_{20} + b_{01})y)$. Dacă

$$b_{01} = -a_{20}, b_{30} = -b_{20}, \tag{3.72}$$

atunci $C_1(x,y)$ este identic zero, iar $C_2(x,y) = -a_{20}^2x^5((2b_{10} + b_{20})x - 3a_{20}y) \not\equiv 0$. Astfel, multiplicitatea dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât doi, în acest caz. Sistemul cubic se scrie sub forma

$$\dot{x} = -a_{20}x^2(x-1), \quad \dot{y} = -b_{20}x^3 + b_{20}x^2 + b_{10}x - a_{20}y + b_{00},\ \ a_{20} \neq 0. \tag{3.73}$$

Dacă $b_{10} = b_{20}$, atunci (3.73) admite dreapta invariantă $a_{20}y - b_{20}x - b_{00} = 0$. Presupunem că $b_{10} - b_{20} \neq 0$. Transformarea afină $x \to x$, $y \to (-(b_{10} - b_{20})y + b_{20}x + b_{00})/a_{20}$, şi rescalarea timpului $t \to -t/a_{20}$ reduce (3.73) la sistemul

$$\dot{x} = x^2(x-1), \qquad \dot{y} = x + y. \tag{3.74}$$

2) Condiţiile (3.6). Sistemul (3.3) ia forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -(x-1)x(a_{10} + (a_{10} + a_{20})x), \\ &\dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + a_{10}y + b_{11}xy + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2,\ \ a_{10} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Pentru acest sistem avem $B_1(y) = -(2a_{10} + a_{20})(3a_{10} + a_{20} + b_{11} + b_{21} + 2b_{12}y)(b_{00} + b_{10} + b_{20} + b_{30} + (a_{10} + b_{11} + b_{21})y + b_{12}y^2)$. Ţinând cont de (3.2), identitatea $B_1(y) \equiv 0$ are loc dacă se îndeplineşte una dintre următoarele două serii de condiţii

$$a_{20} = -2a_{10}, \tag{3.76}$$

$$b_{21} = -(3a_{10} + a_{20} + b_{11}), b_{12} = 0. \tag{3.77}$$

În virtutea condiţiilor {(3.6), (3.76)}, obţinem sistemul

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_{10}x(x-1)^2, \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + a_{10}y \\ &\quad + b_{11}xy + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2, \ \ a_{10} \neq 0, \end{aligned} \tag{3.78}$$

pentru care multiplicitatea dreptei $x = 1$ este egală cu doi şi $C_0(x,y) = a_{10}x^5(b_{21}x + 2b_{12}y)\cdot(b_{30}x^2 + (b_{21} - a_{10})xy + b_{12}y^2)$. Pentru dreapta de la infinit avem $\mu_\infty \geq 2$, dacă

$$b_{21} = 0, b_{12} = 0. \tag{3.79}$$

Identitatea $C_1(x,y) = -a_{10}x^6(a_{10}b_{20}x + 2a_{10}b_{30}x - b_{11}b_{30}x + 2a_{10}b_{11}y) \equiv 0$ ne conduce la egalităţile

$$b_{11} = 0, b_{20} = -2b_{30}, \tag{3.80}$$

după care $C_2(x,y) = -a_{10}^2x^5((2b_{10} - 3b_{30})x + 3a_{10}y) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$, iar sistemul cubic ia forma

$$\dot{x} = a_{10}x(x-1)^2, \quad \dot{y} = b_{30}x^3 - 2b_{30}x^2 + b_{10}x + a_{10}y + b_{00}, \ \ a_{10} \neq 0. \tag{3.81}$$

De la (3.81) vom cere ca $b_{10} \neq 0$ fiindcă, în caz contrar, (3.81) admite a treia dreaptă afină $a_{10}y - b_{30}x + b_{00} = 0$. Aplicând transformarea de coordonate $x \to x$, $y \to (b_{10}y + b_{30}x - b_{00})/a_{10}$ şi rescalarea timpului $t \to t/a_{10}$ scriem (3.81) sub forma

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \qquad \dot{y} = x + y. \tag{3.82}$$

Menţionăm, că dacă în (3.74) efectuăm transformarea $x \to -x+1, y \to -y-1$ şi rescalarea timpului $t \to -t$, obţinem sistemul (3.82). Ultimul sistem are factorul integrant de tip Darboux

$$\mu(x,y) = exp(1/(x-1))/(x^2(x-1)).$$

În cazul realizării condiţiilor {(3.6), (3.77)}, obţinem sistemul

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -x(x-1)(a_{10} + (a_{10} + a_{20})x), \\ &\dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + a_{10}y + b_{11}xy - (3a_{10} + a_{20} + b_{11})x^2y, \ \ a_{10} \neq 0, \end{aligned} \tag{3.83}$$

pentru care $\mu_2 = 2$ şi $C_0(x,y) = (a_{10} + a_{20})(3a_{10} + a_{20} + b_{11})x^7(b_{30}x - (2a_{10} - b_{11})y)$. Identitatea $C_0(x,y) \equiv 0$ ne spune că multiplicitatea μ_∞ a dreptei de la infinit nu este mai mică ca doi, dacă se realizează una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$a_{20} = -a_{10}, \tag{3.84}$$

$$b_{11} = -a_{20} - 3a_{10},\ a_{20} \neq -a_{10}, \tag{3.85}$$

În condiţiile $\{(3.6), (3.77), (3.84)\}$, avem $C_1(x,y) = -a_{10}(2a_{10} + b_{11})x^6(-b_{30}x + (2a_{10} + b_{11})y)$. Multiplicitatea dreptei de la infinit va fi egală cu trei dacă $C_1(x,y) \equiv 0$ şi $C_2(x,y) \not\equiv 0$, adică dacă

$$b_{11} = -2a_{10}, b_{30} \neq 0. \tag{3.86}$$

Astfel, sistemul cubic (3.3) ia forma

$$\dot{x} = -a_{10}x(x-1), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + a_{10}y - 2a_{10}xy,\ \ a_{10}b_{30} \neq 0. \tag{3.87}$$

Acest sistem admite consecutivitatea de multiplicităţi $(2,2;3)$. Cu ajutorul transformării afine $x \to x$, $y \to (-b_{30}y + b_{20}x - b_{00})/a_{10}$, rescalarea timpului $t = -\tau/a_{10}$ şi a notaţiei $a = (2b_{00} + b_{10})/b_{30}$, sistemul (3.87) ia forma

$$\dot{x} = x(x-1), \quad \dot{y} = x^3 + 2xy - y + ax,\ \ a \in \mathbb{R}. \tag{3.88}$$

Sistemul obţinut este Darboux integrabil şi are integrala primă:

$$F(x,y) = x^a(1-x)^{1-a}/exp(((x(a+1)+y)/(x(x-1))))).$$

Dacă se realizează condiţiile $\{(3.6), (3.77), (3.85)\}$, atunci $C_1(x,y)$ arată astfel $C_1(x,y) = -(a_{10}+a_{20})x^6(a_{10}b_{20}x + a_{20}b_{20}x - 3a_{10}b_{30}x - 2(a_{10}+a_{20})(3a_{10}+a_{20})y)$ şi identitatea $C_1(x,y) \equiv 0$, ce ne asigură multiplicitatea $\mu_\infty \geq 3$, ne dă

$$a_{20} = -3a_{10}, b_{20} = -3b_{30}/2. \tag{3.89}$$

Sistemul cubic (3.3) ia forma

$$\dot{x} = a_{10}x(x-1)(2x-1), \quad \dot{y} = (2b_{30}x^3 - 3b_{30}x^2 + 2b_{10}x + 2a_{10}y + 2b_{00})/2,\ \ a_{10} \neq 0. \tag{3.90}$$

Pentru el dreapta $2x-1=0$ este invariantă. Prin urmare, (3.90) admite trei drepte invariante afine şi realizează consecutivitatea de multiplicităţi $(2,2,1;3)$.

3) Condiţiile (3.7). Sistemul (3.3) arată astfel

$$\begin{gathered}\dot{x} = -x(x-1)(a_{10} + (a_{10}+a_{20})x + a_{11}y), \quad \dot{y} = (a_{10}(b_{01} - a_{10}) + a_{11}b_{10}x + a_{11}b_{20}x^2 + \\ a_{11}b_{30}x^3 + a_{11}b_{01}y + a_{11}b_{11}xy + a_{11}b_{21}x^2y + a_{11}^2y^2 + a_{11}b_{12}xy^2)/a_{11}),\ \ a_{11} \neq 0.\end{gathered} \tag{3.91}$$

Pentru (3.91) avem $B_1(y) = B_{11}(y)B_{12}(y)/a_{11}$, unde $B_{11}(y) = a_{10}(b_{01} - a_{10}) + a_{11}(b_{10} + b_{20} + b_{30}) + a_{11}(b_{01} + b_{11} + b_{21})y + a_{11}(a_{11} + b_{12})y^2$, $B_{12}(y) = 5a_{10}^2 + 4a_{10}a_{20} + a_{20}^2 + a_{10}b_{01} + a_{20}b_{01} - a_{11}b_{10} +$

$2a_{10}b_{11}+a_{20}b_{11}-a_{11}b_{20}+2a_{10}b_{21}+a_{20}b_{21}-a_{11}b_{30}+2(2a_{10}+a_{20})(2a_{11}+b_{12})y+a_{11}(2a_{11}+b_{12})y^2$. Multiplicitatea dreptei invariante $x=1$ va fi egală cu doi atunci când $B_{11}(y)\equiv 0$ sau $B_{12}(y)\equiv 0$. Dacă

$$b_{12}=-a_{11},\ b_{21}=-(b_{11}+b_{01}),\ b_{30}=(a_{10}^2-a_{10}b_{01}-a_{11}b_{10}-a_{11}b_{20})/a_{11}, \tag{3.92}$$

atunci $B_{11}(y)\equiv 0$, însă condiţiile (3.92) ne conduc la un sistem degenerat.

Dacă se realizează condiţiile

$$\begin{aligned} &b_{12}=-2a_{11},\ \ b_{30}=(5a_{10}^2+4a_{10}a_{20}+a_{20}^2+a_{10}b_{01}+a_{20}b_{01}-\\ &a_{11}b_{10}+2a_{10}b_{11}+a_{20}b_{11}-a_{11}b_{20}+2a_{10}b_{21}+a_{20}b_{21})/a_{11}, \end{aligned} \tag{3.93}$$

atunci $B_{12}(y)\equiv 0$. În acest caz sistemul ia forma

$$\begin{aligned} &\dot{x}=-x(x-1)(a_{10}+(a_{10}+a_{20})x+a_{11}y),\qquad \dot{y}=(a_{10}(b_{01}-a_{10})+\\ &a_{11}b_{10}x+a_{11}b_{20}x^2+(5a_{10}^2+4a_{10}a_{20}+a_{20}^2+a_{10}b_{01}+a_{20}b_{01}-a_{11}b_{10}+\\ &2a_{10}b_{11}+a_{20}b_{11}-a_{11}b_{20}+2a_{10}b_{21}+a_{20}b_{21})x^3+a_{11}b_{01}y+a_{11}b_{11}xy+\\ &a_{11}b_{21}x^2y+a_{11}^2y^2-2a_{11}^2xy^2)/a_{11},\ \ a_{11}\neq 0. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Aici $C_0(x,y)=x^4((5a_{10}^2+4a_{10}a_{20}+a_{20}^2+a_{10}b_{01}+a_{20}b_{01}-a_{11}b_{10}+2a_{10}b_{11}+a_{20}b_{11}-a_{11}b_{20}+2a_{10}b_{21}+a_{20}b_{21})x^2+a_{11}(a_{10}+a_{20}+b_{21})xy-a_{11}^2y^2)((5a_{10}^2+4a_{10}a_{20}+a_{20}^2+a_{10}b_{01}+a_{20}b_{01}-a_{11}b_{10}+2a_{10}b_{11}+a_{20}b_{11}-a_{11}b_{20}+a_{10}b_{21})x^2+4a_{11}(a_{10}+a_{20})xy+2a_{11}^2y^2)/a_{11}\not\equiv 0$. În acest caz, multiplicitatea dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât unu. Sistemul (3.94) admite consecutivitatea de multiplicităţi $(2,2;1)$.

Lema 3.1.14. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ *ce admite consecutivitatea maximală de multiplicităţi* $m(2,2;3)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele două forme:* (3.82), (3.90).

8) Cazul $m_\infty(2,1;\mu_\infty)$

În continuare vom determina multiplicitatea maximală a dreptei invariante de la infinit în cazul când dreptele invariante $x=0$ şi $x=1$ au respectiv multiplicităţile $\mu_1=2$, $\mu_2=1$, adică atunci când se îndeplineşte una dintre seriile de condiţii ale lemei 3.1.1.

1) Condiţiile (3.5). În aceste condiţii sistemul cubic (3.3) are forma (3.68). Pentru (3.68) $C_0(x,y)=-a_{20}x^3(b_{21}x^2+2b_{12}xy+3b_{03}y^2)(b_{30}x^3+a_{20}x^2y+b_{21}x^2y+b_{12}xy^2+b_{03}y^3)$. Respectând condiţiile (3.2), avem următoarele implicaţii: $C_0(x,y)\equiv 0\Rightarrow$

$$b_{03}=b_{12}=b_{21}=0; \tag{3.95}$$

$(3.95) \Rightarrow C_1(x,y) = -a_{20}x^5((a_{20}b_{20}+a_{20}b_{30}+b_{11}b_{30})x^2+2(a_{20}b_{11}+b_{02}b_{30})xy+3a_{20}b_{02}y^2) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{02} = b_{11} = 0,\ b_{30} = -b_{20}; \tag{3.96}$$

$(3.96) \Rightarrow C_2(x,y) = -a_{20}x^5((2a_{20}b_{10} - b_{01}b_{20})x + 3a_{20}b_{01}y)$, $\mu_\infty = 3$. Dacă $C_2(x,y) \equiv 0$, adică $b_{01} = b_{10} = 0$, atunci $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$ şi $\mu_\infty = 4$ sau, altfel spus, avem consecutivitatea de multiplicităţi $(3,1,4)$.

2) Condiţiile (3.6). În acest caz sistemul cubic (3.3) are forma (3.75), iar $C_0(x,y) = -(a_{10}+a_{20})x^5(b_{21}x+2b_{12}y)(b_{30}x^2+(a_{10}+a_{20}+b_{21})xy+b_{12}y^2)$. Ţinând cont de condiţiile (3.2), multiplicitatea $\mu_\infty \geq 2$, dacă are loc una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$a_{20} = -a_{10}; \tag{3.97}$$

$$b_{12} = b_{21} = 0, a_{20} \neq -a_{10}. \tag{3.98}$$

În condiţiile $\{(3.6), (3.97)\}$ avem:

$C_1(x,y) = -a_{10}x^4(b_{21}x + 2b_{12}y)(b_{30}x^2 + b_{21}xy + b_{12}y^2) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{12} = b_{21} = 0, a_{10} \neq 0,\ b_{30} \neq 0, \tag{3.99}$$

$\Rightarrow C_2(x,y) = a_{10}(a_{10} - b_{11})b_{30}x^6 \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{11} = a_{10}. \tag{3.100}$$

Prin urmare, $C_3(x,y) = -a_{10}^2x^4(b_{20}x + 3b_{30}x + 2a_{10}y) \not\equiv 0$ şi $\mu_\infty = 4$. Sistemul cubic (3.75) capătă forma

$$\dot{x} = -a_{10}x(x-1),\quad \dot{y} = b_{30}x^3 + b_{20}x^2 + a_{10}xy + b_{10}x + a_{10}y + b_{00},\ \ a_{10}b_{30} \neq 0. \tag{3.101}$$

Acest sistem are consecutivitatea de multiplicităţi $m(2,1;4)$. Efectuând transformarea $x \to x$, $y \to -(2b_{10}+b_{20}x-2b_{30}y)/(2a_{10})$, rescalarea timpului $t \to t/a_{10}$ şi notaţia $a = (b_{00}-b_{10})/b_{30}$, sistemul (3.101) obţine forma

$$\dot{x} = -x(x-1),\quad \dot{y} = x^3 + y + xy + a,\ \ a \in \mathbb{R}. \tag{3.102}$$

Uşor se verifică, că (3.102) este Darboux integrabil şi are integrala primă

$$F(x,y) = x^a\, exp((6a - 3x^2 + 2x^4 + 6y(x-1)^2)/(6x)).$$

În cazul condiţiilor $\{(3.6), (3.98)\}$ avem $\{(3.2),\ C_1(x,y) = -(a_{10}+a_{20})x^6((b_{20}(a_{10}+a_{20}) + b_{30}(a_{20}+b_{11}))x + 2b_{11}(a_{10}+a_{20})y)\} \Rightarrow$

$$b_{11} = 0,\ b_{20} = -a_{20}b_{30}/(a_{10}+a_{20}) \tag{3.103}$$

$\Rightarrow \mu_\infty = 3$. Ţinând cont de (3.103), $C_2(x,y) = -x^5(a_{10} + a_{20})((2a_{10}b_{10} + 2a_{20}b_{10} + 3a_{10}b_{30})x + 3a_{10}(a_{10}+a_{20})y)$. Dacă $C_2(x,y) \equiv 0$, atunci $\mu_1 = 3$, în timp ce noi examinăm consecutivităţile de multiplicităţi de forma $(2,1;\mu_\infty)$.

3) Condiţiile (3.7). Sistemul cubic (3.3) are forma (3.91), iar $C_0(x,y) = x^4(b_{30}x^2 + (a_{10} + a_{20} + b_{21})xy + (a_{11} + b_{12})y^2)((a_{11}b_{30} - a_{10}b_{21} - a_{20}b_{21})x^2 - 2b_{12}(a_{10} - a_{20})xy - a_{11}b_{12}y^2)$. Multiplicitatea $\mu_\infty \geq 2$, dacă

$$b_{12} = 0, b_{30} = b_{21}(a_{20} + a_{10})/a_{11}, a_{11} \neq 0,$$

dar în acest caz $C_1(x,y) = -x^3((a_{10}+a_{20})x + a_{11}y)((a_{10}a_{11}b_{20} + a_{11}a_{20}b_{20} + a_{10}a_{20}b_{21} + a_{20}^2b_{21} + a_{10}b_{11}b_{21} + a_{20}b_{11}b_{21} - a_{11}b_{20}b_{21} + a_{10}b_{21}^2)x^3 + (2a_{10}a_{11}b_{11} + 2a_{11}a_{20}b_{11} + 4a_{10}a_{11}b_{21} + 4a_{11}a_{20}b_{21})x^2y + (3a_{10}a_{11}^2 + 3a_{11}^2a_{20} + a_{11}^2b_{11} + 2a_{11}^2b_{21})xy^2 + 2a_{11}^3y^3)/a_{11} \not\equiv 0$.

Lema 3.1.15. *Cu exactitatea unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}^p_{2(r)}$ *care admite consecutivitatea parţial maximală de multiplicităţi* $m_\infty(2,1;4)$ *poate fi scris sub forma* (3.102).

9) Cazul $m_\infty(1,1;\mu_\infty)$

Pentru sistemul cubic (3.3) vom cerceta multiplicitatea maximală a dreptei invariante de la infinit. Considerăm sistemul omogenizat

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(Z-x)(a_{10}Z + a_{10}x + a_{20}x + a_{11}y), \quad \dot{y} = b_{00}Z^3 + b_{10}xZ^2 + b_{01}yZ^2 + \\ &b_{20}x^2Z + b_{11}xyZ + b_{02}y^2Z + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3. \end{aligned} \tag{3.104}$$

corespunzător sistemului (3.3). Reprezentăm pentru sistemul (3.104) polinomul $E_1(\mathbb{X})$ sub forma (3.20). Astfel, $C_0(x,y) = -x^2C_{01}(x,y)C_{02}(x,y)$, unde $C_{01}(x,y) = b_{30}x^3 + (a_{10} + a_{20} + b_{21})x^2y + (a_{11} + b_{12})xy^2 + b_{03}y^3$ şi $C_{02}(x,y) = (b_{21}(a_{10} + a_{20}) - a_{11}b_{30})x^3 + 2b_{12}(a_{10} + a_{20})x^2y + (3b_{03}(a_{10} + a_{20}) + a_{11}b_{12})xy^2 + 2a_{11}b_{03}y^3$. Multiplicitatea dreptei de la infinit $\mu_\infty \geq 2$ atunci când $C_0(x,y)$ este identic zero.

Conform (3.2) $C_{01}(x,y) \not\equiv 0$, deci vom cere ca $C_{02}(x,y) \equiv 0$. Identitatea $C_{02}(x,y) \equiv 0$ are loc atunci când se realizează una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$a_{11} = 0, a_{20} = -a_{10}; \tag{3.105}$$

$$a_{11} = 0, b_{12} = b_{21} = b_{30} = 0, a_{20} \neq -a_{10}; \tag{3.106}$$

$$b_{03} = b_{12} = 0, b_{30} = b_{21}(a_{10} + a_{20})/a_{11}, a_{11} \neq 0. \tag{3.107}$$

1) Condiţiile (3.105). Sistemul (3.3) ia forma

$$\begin{aligned}&\dot{x} = -a_{10}x(x-1), \quad \dot{y} = b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 +\\ &b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{10}x + b_{01}y + b_{00}, \quad a_{10} \neq 0.\end{aligned} \tag{3.108}$$

Pentru acest sistem dreapta de la infinit are multiplicitatea $\mu_\infty = 2$, iar $C_1(x,y) = -a_{10}x^2(b_{21}x^2 + 2b_{12}xy + 3b_{03}y^2)(b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3)$.

Dacă

$$b_{03} = 0, \; b_{12} = 0, \; b_{21} = 0, \; a_{10} \neq 0, b_{30} \neq 0, \tag{3.109}$$

atunci $C_1(x,y) \equiv 0$ şi $\mu_\infty = 3$, iar $C_2(x,y) = a_{10}b_{30}x^5(a_{10}x - b_{11}x - 2b_{02}y)$. Multiplicitatea dreptei de la infinit va fi egală cu patru atunci când

$$b_{11} = a_{10}, \; b_{02} = 0. \tag{3.110}$$

Astfel, se obţine sistemul

$$\dot{x} = -a_{10}x(x-1), \quad \dot{y} = b_{30}x^3 + b_{20}x^2 + a_{10}xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00}, \quad a_{10}b_{30} \neq 0, \tag{3.111}$$

pentru care $C_3(x,y) = -a_{10}x^4((a_{10}b_{20} + 2a_{10}b_{30} + b_{01}b_{30})x + 2a_{10}^2y) \not\equiv 0$ şi deci, în acest caz, multiplicitatea dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât patru. Pentru (3.111) avem consecutivitatea de multiplicităţi $(1,1;4)$.

Cu ajutorul transformării afine $x \to x$, $y \to (-2b_{30}y - b_{20}x - 2b_{10} - b_{20})/(2a_{10}) + b_{01}b_{20}/(2a_{10}^2)$, rescalării timpului $t = -\tau/a_{10}$, şi notaţiilor $a = (2a_{10}^2b_{00} - 2a_{10}b_{01}b_{10} - a_{10}b_{01}b_{20} + b_{01}^2b_{20})/(2a_{10}^2b_{30})$, $b = -b_{01}/a_{10}$, sistemul (3.111) ia forma

$$\dot{x} = x(x-1), \qquad \dot{y} = x^3 - xy + by + a, \quad (|a| + |b|)(b+1) \neq 0. \tag{3.112}$$

Sistemul obţinut are integrala primă $F(x,y) = x^{b-1}(x-1)^{-b}$.

2) Condiţiile (3.106). În aceste condiţii sistemul diferenţial

$$\begin{aligned}&\dot{x} = -x(x-1)((a_{10} + a_{20})x + a_{10}), \quad \dot{y} = b_{30}x^3 + b_{20}x^2 +\\ &b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{10}x + b_{01}y + b_{00}, \quad b_{30}(a_{10} + a_{20}) \neq 0,\end{aligned} \tag{3.113}$$

admite trei drepte invariante afine: $x = 0$, $x = 1$ şi $(a_{10} + a_{20})x + a_{10} = 0$, în timp ce noi examinăm doar sistemele cubice ce posedă doar două drepte invariante afine.

3) Condiţiile (3.107). Sistemul (3.3) are forma

$$\begin{aligned}&\dot{x} = -x(x-1)((a_{10} + a_{20})x + a_{11}y + a_{10}), \quad \dot{y} = b_{21}x^3(a_{10} + a_{20})/a_{11} +\\ &b_{21}x^2y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{10}x + b_{01}y + b_{00}, \quad a_{11} \neq 0.\end{aligned} \tag{3.114}$$

În acest caz avem $C_1(x,y) = -x^3((a_{10}+a_{20})x + a_{11}y)(((a_{10}a_{11}b_{20} + a_{11}a_{20}b_{20} + a_{10}a_{20}b_{21} + a_{20}^2b_{21} + a_{10}b_{11}b_{21} + a_{20}b_{11}b_{21} - a_{11}b_{20}b_{21} + a_{10}b_{21}^2))x^3 + 2(a_{10}+a_{20})(a_{11}b_{11} + a_{11}b_{21} + b_{02}b_{21})x^2y + a_{11}(3a_{10}b_{02} + 3a_{20}b_{02} + a_{11}b_{11} + a_{11}b_{21} + b_{02}b_{21})xy^2 + 2a_{11}^2b_{02}y^3)/a_{11}$.

Polinomul $C_1(x,y)$ este identic zero atunci când se îndeplineşte una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$b_{02} = 0,\ b_{21} = a_{10} + a_{20},\ b_{11} = -(a_{10}+a_{20}); \tag{3.115}$$

$$b_{02} = 0,\ b_{21} = -b_{11},\ b_{20} = a_{20}b_{11}/a_{11}. \tag{3.116}$$

În condiţiile (3.115) avem următorul sistem

$$\begin{aligned}&\dot{x} = -x(x-1)((a_{10}+a_{20})x + a_{11}y + a_{10}),\quad \dot{y} = x^3(a_{10}+a_{20})^2/a_{11}+\\&(a_{10}+a_{20})x^2y + b_{20}x^2 - (a_{10}+a_{20})xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00},\ \ a_{11}\neq 0,\end{aligned} \tag{3.117}$$

pentru care $C_2(x,y) = -x^3((a_{10}^4 + 4a_{10}^3a_{20} + 5a_{10}^2a_{20}^2 + 2a_{10}a_{20}^3 + a_{10}^3b_{01} + 3a_{10}^2a_{20}b_{01} + 3a_{10}a_{20}^2b_{01} + a_{20}^3b_{01} + a_{10}^2a_{11}b_{10} + 2a_{10}a_{11}a_{20}b_{10} + a_{11}a_{20}^2b_{10} + a_{10}^2a_{11}b_{20} - a_{11}a_{20}^2b_{20} - a_{11}^2b_{20}^2)x^3 + 2a_{11}(a_{10}+a_{20})(a_{10}^2 + 2a_{10}a_{20} + a_{20}^2 + 2a_{10}b_{01} + 2a_{20}b_{01} + a_{11}b_{10} + a_{11}b_{20})x^2y + a_{11}^2(a_{10}^2 + 2a_{10}a_{20} + a_{20}^2 + 5a_{10}b_{01} + 5a_{20}b_{01} + a_{11}b_{10} + a_{11}b_{20})xy^2 + 2a_{11}^3b_{01}y^3)/a_{11}$.

Dacă

$$b_{01} = 0, b_{20} = -(a_{20}(a_{10}+a_{20}))/a_{11}, b_{10} = -(a_{10}(a_{10}+a_{20}))/a_{11}, \tag{3.118}$$

atunci $C_2(x,y) \equiv 0$, $\mu_\infty = 4$. Sistemul (3.117) ia forma

$$\begin{aligned}&\dot{x} = -x(x-1)((a_{10}+a_{20})x + a_{11}y + a_{10}),\quad \dot{y} = x^3(a_{10}+a_{20})^2/a_{11} + (a_{10}+a_{20})x^2y-\\&a_{20}x^2(a_{10}+a_{20})/a_{11} - (a_{10}+a_{20})xy - a_{10}x(a_{10}+a_{20})/a_{11} + b_{00},\ \ a_{11}b_{00}\neq 0.\end{aligned} \tag{3.119}$$

Pentru el $C_3(x,y) = -2b_{00}x^3((a_{10}+a_{20})x + a_{11}y)^2 \not\equiv 0$ şi, prin urmare, multiplicitatea dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât patru. Sistemul (3.119) realizează consecutivitatea de multiplicităţi $(1,1;4)$.

Prin intermediul transformărilor $x \to x$, $y \to (y - (a_{10}+a_{20})x - a_{10})/a_{11}$, $b = a_{11}b_{00}$, sistemul (3.119) ia forma

$$\dot{x} = -x(x-1)y,\quad \dot{y} = b,\ \ b\neq 0. \tag{3.120}$$

În condiţiile (3.116) avem sistemul

$$\begin{aligned}&\dot{x} = -x(x-1)((a_{10}+a_{20})x + a_{11}y + a_{10}),\quad \dot{y} = -(b_{11}(a_{10}+a_{20})x^3+\\&a_{11}b_{11}x^2y - a_{20}b_{11}x^2 - a_{11}b_{11}xy - a_{11}b_{10}x - a_{11}b_{01}y - a_{11}b_{00})/a_{11},\ \ a_{11}\neq 0,\end{aligned} \tag{3.121}$$

şi polinomul $C_2(x,y) = x^3((a_{10}+a_{20})x+a_{11}y)((-2a_{10}a_{11}b_{10}-2a_{11}a_{20}b_{10}+2a_{10}^2b_{11}+2a_{10}a_{20}b_{11}+a_{10}b_{01}b_{11}+a_{20}b_{01}b_{11}-a_{11}b_{10}b_{11}+a_{10}b_{11}^2)x^2-a_{11}(3a_{10}b_{01}+3a_{20}b_{01}+a_{11}b_{10}-a_{10}b_{11})xy-2a_{11}^2b_{01}y^2)$.

Multiplicitatea $\mu_\infty = 4$ atunci când

$$b_{01} = 0,\ b_{10} = a_{10}b_{11}/a_{11}. \tag{3.122}$$

Astfel, sistemul (3.121) ia forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -x(x-1)((a_{10}+a_{20})x+a_{11}y+a_{10}), \quad \dot{y} = -(a_{10}b_{11}x^3+a_{20}b_{11}x^3+\\ &a_{11}b_{11}x^2y-a_{20}b_{11}x^2-a_{11}b_{11}xy-a_{10}b_{11}x-a_{11}b_{00})/a_{11}, a_{11}b_{00} \neq 0, \end{aligned} \tag{3.123}$$

iar $C_3(x,y) = -b_{00}x^3((a_{10}+a_{20})x+a_{11}y)((3a_{10}+3a_{20}+b_{11})x+2a_{11}y) \not\equiv 0$. Prin urmare, multiplicitatea dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât patru, deci avem consecutivitatea de multiplicităţi $(1,1;4)$.

Transformările $x \to x$, $y \to (y+b_{11}x-a_{10})/a_{11}$, $a = b_{11}+a_{10}+a_{20}$ şi $b = a_{11}b_{00}$ reduc (3.123) la forma

$$\dot{x} = x(x-1)(ax+y), \quad \dot{y} = b,\ \ b \neq 0. \tag{3.124}$$

Menţionăm, că (3.120) reprezintă un caz particular al sistemului (3.124).

Lema 3.1.16. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}_{2(r)}^p$ *ce admite consecutivitatea parţial maximală de multiplicităţi* $m_\infty(1,1;4)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele două forme:* (3.112), (3.124)*.*

Lemele 3.1.7-3.1.16 demonstrează Teorema 3.1.1.

3.1.3. Multiplicitatea geometrică

În această subsecţiune formele canonice ale sistemelor cubice din teorema 3.1.1 sunt supuse unor mici perturbări prin care se arată că multiplicitatea geometrică a fiecărei dintre dreptele invariante ($x = 0$, $x = 1$ şi $Z = 0$) coincide cu multiplicitatea algebrică a acestor drepte.

1) $m(4,3;1)$: $\quad \dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = x^3 + y(x-1)^2.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(x+2x\epsilon-1)$, $\dot{y} = x^3+y-2xy+x^2y-2xy\epsilon+2x^2y\epsilon+x^2y\epsilon^2-xy^2\epsilon^2-2xy^2\epsilon^3-xy^2\epsilon^4-y^3\epsilon^4-2y^3\epsilon^5-y^3\epsilon^6$.

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x+y\epsilon^2$, $l_3 = x-y\epsilon-y\epsilon^2$, $l_4 = x+y\epsilon+y\epsilon^2$, $l_5 = x-1$, $l_6 = x+2x\epsilon-1$, $l_7 = x+x\epsilon+y\epsilon^2+y\epsilon^3-1$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_2, l_3, l_4 \to l_1 = x$, iar $l_5, l_6, l_7 \to l_5 = x - 1$.

2) $m_\infty(4,2;1)$: $\dot{x} = x^2(x-1),\ \dot{y} = ax^3 + 3x^2y - 2xy + 1$.

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(x + 8\epsilon^2 + 2a\epsilon^2 - 8x\epsilon^2 - 2ax\epsilon^2)$, $\dot{y} = (8 + 8ax^3 - 16xy + 24x^2y - 18\epsilon - 14x\epsilon - 8ax\epsilon + 154x^2\epsilon + 52ax^2\epsilon + 22x^3\epsilon + 28ax^3\epsilon - 24ax^2y\epsilon + 8y^2\epsilon - 24xy^2\epsilon + 75\epsilon^2 + 12a\epsilon^2 - 51x\epsilon^2 - 6ax\epsilon^2 + 441x^2\epsilon^2 + 144ax^2\epsilon^2 + 183x^3\epsilon^2 + 66ax^3\epsilon^2 - 50y\epsilon^2 - 8ay\epsilon^2 - 52xy\epsilon^2 - 40axy\epsilon^2 - 258x^2y\epsilon^2 - 96ax^2y\epsilon^2 - 12y^2\epsilon^2 + 36xy^2\epsilon^2 + 24axy^2\epsilon^2 + 8y^3\epsilon^2 - 63\epsilon^3 - 9a\epsilon^3 + 171x\epsilon^3 + 63ax\epsilon^3 + 531x^2\epsilon^3 + 153ax^2\epsilon^3 + 297x^3\epsilon^3 + 81ax^3\epsilon^3 + 30y\epsilon^3 - 6ay\epsilon^3 - 420xy\epsilon^3 - 132axy\epsilon^3 - 450x^2y\epsilon^3 - 126ax^2y\epsilon^3 + 44y^2\epsilon^3 + 20ay^2\epsilon^3 + 204xy^2\epsilon^3 + 60axy^2\epsilon^3 - 24y^3\epsilon^3 - 8ay^3\epsilon^3 + 108\epsilon^4 + 27a\epsilon^4 + 324x\epsilon^4 + 81ax\epsilon^4 + 324x^2\epsilon^4 + 81ax^2\epsilon^4 + 108x^3\epsilon^4 + 27ax^3\epsilon^4 - 216y\epsilon^4 - 54ay\epsilon^4 - 432xy\epsilon^4 - 108axy\epsilon^4 - 216x^2y\epsilon^4 - 54ax^2y\epsilon^4 + 144y^2\epsilon^4 + 36ay^2\epsilon^4 + 144xy^2\epsilon^4 + 36axy^2\epsilon^4 - 32y^3\epsilon^4 - 8ay^3\epsilon^4)/8$.

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x - 1$, $l_3 = x + 8\epsilon^2 + 2a\epsilon^2 - 8x\epsilon^2 - 2ax\epsilon^2$, $l_4 \cdot l_5 = 4x^2 + 4\epsilon + 4x\epsilon + 16x^2\epsilon - 8xy\epsilon - 3\epsilon^2 + 18x\epsilon^2 + 21x^2\epsilon^2 - 4y\epsilon^2 - 20xy\epsilon^2 + 4y^2\epsilon^2 + 9\epsilon^3 + 18x\epsilon^3 + 9x^2\epsilon^3 - 12y\epsilon^3 - 12xy\epsilon^3 + 4y^2\epsilon^3$, $l_6 = 2x - 2 + 3\epsilon - 5x\epsilon - 2ax\epsilon - 2y\epsilon - 12\epsilon^2 - 3a\epsilon^2 - 12x\epsilon^2 - 3ax\epsilon^2 + 8y\epsilon^2 + 2ay\epsilon^2$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3, l_4, l_5 \to l_1 = x$, iar $l_2, l_6 \to l_2 = x - 1$.

3) $m(4,1;3)$: $\dot{x} = x(x-1),\ \dot{y} = -x^3 + y(x-1)$.

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(2x\epsilon + 1)$, $\dot{y} = -x^3 + y(x-1) - 2xy\epsilon + 2x^2y\epsilon - x^2y\epsilon^2 + xy^2\epsilon^2 + 2xy^2\epsilon^3 + xy^2\epsilon^4 + y^3\epsilon^4 + 2y^3\epsilon^5 + y^3\epsilon^6$.

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x - y\epsilon - y\epsilon^2$, $l_3 = x + y\epsilon + y\epsilon^2$, $l_4 = x + y\epsilon^2$, $l_5 = x - 1$, $l_6 = 2x\epsilon + 1$, $l_7 = 1 + x\epsilon + y\epsilon^2 + y\epsilon^3$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_2, l_3, l_4 \to l_1 = x$, iar $l_6, l_7 \to \infty$.

4) $m_\infty(3,3;1)$: $\dot{x} = x(x-1)^2,\ \dot{y} = ax^3 + x^2 + y(x-1)^2,\ a \neq -1$.

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(x + x\epsilon - 1)$, $\dot{y} = (16x^2 + 48ax^2 + 48a^2x^2 + 16a^3x^2 + 16ax^3 + 48a^2x^3 + 48a^3x^3 + 16a^4x^3 + 16y + 48ay + 48a^2y + 16a^3y - 32xy - 96axy - 96a^2xy - 32a^3xy + 16x^2y + 48ax^2y + 48a^2x^2y + 16a^3x^2y + 8ax^3\epsilon + 24a^2x^3\epsilon + 24a^3x^3\epsilon + 8a^4x^3\epsilon - 16xy\epsilon - 48axy\epsilon - 48a^2xy\epsilon - 16a^3xy\epsilon + 16x^2y\epsilon + 48ax^2y\epsilon + 48a^2x^2y\epsilon + 16a^3x^2y\epsilon + 4ax^2y\epsilon^2 + 8a^2x^2y\epsilon^2 + 4a^3x^2y\epsilon^2 - 4y^2\epsilon^2 - 4ay^2\epsilon^2 - 4axy^2\epsilon^2 - 4a^2xy^2\epsilon^2 - 2axy^2\epsilon^3 - 2a^2xy^2\epsilon^3 - ay^3\epsilon^4)/(16(a+1)^3)$, $a \neq -1$.

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x - \epsilon y/(2a+2)$, $l_3 = x + \epsilon y/(2a+2)$, $l_4 = x - 1$, $l_5 = x + \epsilon x - 1$, $l_6 = x - 1 + (2x\epsilon + 2ax\epsilon + y\epsilon^2)/(4a+4)$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_2, l_3 \to l_1 = x$, iar $l_4, l_5, l_6 \to l_4 = x - 1$.

5.1) $m_\infty(3,2;2)$: $\quad \dot{x} = x^2(x-1), \;\; \dot{y} = ax^2 + xy + 1.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(x + a\epsilon^3 - a\epsilon^4), \quad \dot{y} = (1 - y\epsilon + y\epsilon^2)(1 + ax^2 + xy - 2y\epsilon - ax\epsilon^2 + 2y\epsilon^2 + y^2\epsilon^2 + 2ay\epsilon^3 - 2y^2\epsilon^3 - 2ay\epsilon^4 + y^2\epsilon^4 - ay^2\epsilon^4 + 2ay^2\epsilon^5 - ay^2\epsilon^6).$

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x + a\epsilon^3 - a\epsilon^4$, $l_3 = x - \epsilon + y\epsilon^2 - y\epsilon^3$, $l_4 = x - 1$, $l_5 = 1 - x - \epsilon - ax\epsilon - y\epsilon - a\epsilon^2 + ax\epsilon^2 + 2y\epsilon^2 + a\epsilon^3 - y\epsilon^3 + ay\epsilon^3 - 2ay\epsilon^4 + ay\epsilon^5$, $l_6 = 1 - y\epsilon + y\epsilon^2$.

Pentru $\epsilon \to 0$, $l_1, l_2, l_3 \to l_1 = x$,$l_4, l_5 \to l_4 = x - 1$, iar $l_6 \to \infty$.

5.2) $m_\infty(3,2;2)$: $\quad \dot{x} = x(x-1)^2, \;\; \dot{y} = -x^2 - 2xy + y.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(x - x\epsilon - 1), \dot{y} = (y\epsilon + 1)(x^2 - y + 2xy - x^2\epsilon + y\epsilon - xy\epsilon + y^2\epsilon)/(\epsilon - 1).$

Dreptele invariante: $l_1 = x, l_2 = x + \epsilon y, l_3 = -x + x\epsilon - y\epsilon, l_4 = x - 1, l_5 = x - x\epsilon - 1, l_6 = \epsilon y + 1.$

Pentru $\epsilon \to 0$, $l_1, l_2, l_3 \to l_1 = x$,$l_4, l_5 \to l_4 = x - 1$, iar $l_6 \to \infty$.

5.3) $m_\infty(3,2;2)$: $\quad \dot{x} = x(x-1), \;\; \dot{y} = x^2 + y(x^2 + x - 1).$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = -x(x-1)(x\epsilon - 1), \quad \dot{y} = (x^2 - y + xy + x^2y - 3x^2\epsilon + y\epsilon - 2xy\epsilon - 4x^2y\epsilon - 2xy^2\epsilon + 2x^2\epsilon^2 + 2xy\epsilon^2 + 3x^2y\epsilon^2 + y^2\epsilon^2 + 3xy^2\epsilon^2 + y^3\epsilon^2)/(1 - \epsilon).$

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = -x + x\epsilon + y\epsilon$, $l_3 = -x + 2x\epsilon + y\epsilon$, $l_4 = x - 1$, $l_5 = -1 + x\epsilon$, $l_6 = 1 - x + x\epsilon + y\epsilon$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_2, l_3 \to l_1 = x$,$l_4, l_5 \to l_4 = x - 1$, iar $l_6 \to \infty$.

6) $m(3,1;4)$: $\quad \dot{x} = x^2(x-1), \; \dot{y} = 1.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x + 2\epsilon)(x - 1), \qquad \dot{y} = (y\epsilon^2 - 1)(y\epsilon + y\epsilon^2 - 1)(y\epsilon + y\epsilon^2 + 1).$

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x + 2\epsilon$, $l_3 = x + \epsilon - y\epsilon^2 - y\epsilon^3$, $l_4 = x - 1$, $l_5 = y\epsilon^2 - 1$, $l_6 = y\epsilon + y\epsilon^2 - 1$, $l_7 = y\epsilon + y\epsilon^2 + 1$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_, l_2, l_3 \to l_1 = x$, iar $l_5, l_6, l_7 \to \infty$.

7.1) $m(2,2;3)$: $\quad \dot{x} = x(x-1), \;\; \dot{y} = x^3 + 2xy + ax - y.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(1 + ax\epsilon^3 - ax\epsilon^4), \quad \dot{y} = ax + x^3 - y + 2xy - ay\epsilon - 3x^2y\epsilon - y^2\epsilon - ax^2\epsilon^2 + ay\epsilon^2 + 3x^2y\epsilon^2 + y^2\epsilon^2 + 3xy^2\epsilon^2 + 3ax^2y\epsilon^3 - 6xy^2\epsilon^3 - y^3\epsilon^3 - 3ax^2y\epsilon^4 + 3xy^2\epsilon^4 - 3axy^2\epsilon^4 + 3y^3\epsilon^4 + 6axy^2\epsilon^5 - 3y^3\epsilon^5 + ay^3\epsilon^5 - 3axy^2\epsilon^6 + y^3\epsilon^6 - 3ay^3\epsilon^6 + 3ay^3\epsilon^7 - ay^3\epsilon^8.$

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x - y\epsilon + y\epsilon^2$, $l_3 = x - 1$, $l_4 = x - 1 - a\epsilon - x\epsilon - y\epsilon + a\epsilon^2 - ax\epsilon^2 + 2y\epsilon^2 + ax\epsilon^3 - y\epsilon^3 + ay\epsilon^3 - 2ay\epsilon^4 + ay\epsilon^5$, $l_5 = x\epsilon - y\epsilon^2 + y\epsilon^3 - 1$, $l_6 = 1 + ax\epsilon^3 + ax\epsilon^4$,.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_, l_2 \to l_1 = x$, iar $l_3, l_4 \to l_3 = x - 1$, $l_5, l_6 \infty$.

7.2) $m(2,2;3)$: $\quad \dot{x} = x(x-1)^2$, $\dot{y} = x + y$.

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(x-1+\epsilon)$, $\quad \dot{y} = -(x+y)(y\epsilon+1)(y\epsilon-\epsilon+1)/(\epsilon-1)$.

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x + y\epsilon$, $l_3 = x - 1$, $l_4 = x - 1 + \epsilon$, $l_5 = 1 + y\epsilon$, $l_6 = 1 - \epsilon + y\epsilon$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_2 \to l_1 = x$, $l_3, l_4 \to l_2 = x - 1$, and $l_5, l_6 \to \infty$.

8) $m_\infty(2,1;4)$: $\quad \dot{x} = -x(x-1)$, $\dot{y} = x^3 + xy + y + a$.

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = -x(x-1)(1+2ax\epsilon^2)$, $\quad \dot{y} = a + y + xy + x^3 - ax^2\epsilon + 3ay\epsilon + 3x^2y\epsilon + 2y^2\epsilon + xy^2\epsilon + 2axy\epsilon^2 - ax^2y\epsilon^2 + 3ay^2\epsilon^2 + 3xy^2\epsilon^2 + y^3\epsilon^2 + ay^2\epsilon^3 + 2axy^2\epsilon^3 + y^3\epsilon^3 + ay^3\epsilon^3 + ay^3\epsilon^4$.

Dreptele invariante: $l_1 = x, l_2 = x + a\epsilon + y\epsilon + ay\epsilon^2, l_2 = x - 1, l_4 = 1 + 2ax\epsilon^2, l_5 \cdot l_6 = 1 + x^2\epsilon + 2y\epsilon + 2xy\epsilon^2 + y^2\epsilon^2 + y^2\epsilon^3$.

Pentru $\epsilon \to 0$, l_1, $l_2 \to l_1 = x$, iar l_4, l_5, $l_6 \to \infty$.

9.1) $m_\infty(1,1;4)$: $\quad \dot{x} = x(x-1)(ax+y)$, $\dot{y} = b, b \neq 0$.

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(ax+y)$, $\qquad \dot{y} = b(1+\epsilon y)(1-\epsilon y)(1+2\epsilon y)$.

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x - 1$, $l_3 = 1 + \epsilon y, l_4 = 1 - \epsilon y$, $l_5 = 1 + 2\epsilon y$.

Pentru $\epsilon \to 0$, $l_3, l_4, l_5 \to \infty$.

9.2) $m_\infty(1,1;4)$: $\quad \dot{x} = x(x-1)$, $\dot{y} = x^3 - xy + by + a$, $(b+1)(|a|+|b|) \neq 0$.

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x-1)(2 - 2x\epsilon + 2bx\epsilon - 2a\epsilon^2 - b\epsilon^2 - 2b^2\epsilon^2 + b^3\epsilon^2 - 4ax\epsilon^2 - 2bx\epsilon^2 - 4b^2x\epsilon^2 + 2b^3x\epsilon^2)/2$;

$\dot{y} = (-128a - 128x^3 - 128by + 128xy + 32\epsilon - 64a\epsilon + 64b\epsilon + 64ab\epsilon - 192b^2\epsilon - 256b^3\epsilon + 288b^4\epsilon - 64b^5\epsilon + 192x\epsilon - 128ax\epsilon - 64bx\epsilon - 672b^2x\epsilon + 512b^3x\epsilon - 96b^4x\epsilon + 384ax^2\epsilon + 384bx^2\epsilon + 288b^2x^2\epsilon - 192b^3x^2\epsilon + 192x^3\epsilon - 256bx^3\epsilon + 96b^2x^3\epsilon - 128y\epsilon - 64by\epsilon + 704b^2y\epsilon - 256b^3y\epsilon - 320xy\epsilon + 320bxy\epsilon - 128b^2xy\epsilon - 256x^2y\epsilon + 128bx^2y\epsilon + 128y^2\epsilon - 256by^2\epsilon + 128xy^2\epsilon + 16\epsilon^2 + 96a\epsilon^2 + 384a^2\epsilon^2 + 576ab\epsilon^2 - 16b^2\epsilon^2 + 576ab^2\epsilon^2 + 576b^3\epsilon^2 - 576ab^3\epsilon^2 + 432b^4\epsilon^2 + 96ab^4\epsilon^2 - 1024b^5\epsilon^2 + 464b^6\epsilon^2 - 64b^7\epsilon^2 + 80x\epsilon^2 + 384ax\epsilon^2 - 96bx\epsilon^2 + 576abx\epsilon^2 + 336b^2x\epsilon^2 - 768ab^2x\epsilon^2 + 1408b^3x\epsilon^2 + 192ab^3x\epsilon^2 - 2192b^4x\epsilon^2 + 992b^5x\epsilon^2 - 144b^6x\epsilon^2 + 64x^2\epsilon^2 + 64ax^2\epsilon^2 - 224bx^2\epsilon^2 - 320abx^2\epsilon^2 + 496b^2x^2\epsilon^2 + 96ab^2x^2\epsilon^2 - 960b^3x^2\epsilon^2 + 560b^4x^2\epsilon^2 - 96b^5x^2\epsilon^2 + 128x^3\epsilon^2 + 640ax^3\epsilon^2 + 96bx^3\epsilon^2 - 128abx^3\epsilon^2 + 656b^2x^3\epsilon^2 - 416b^3x^3\epsilon^2 + 48b^4x^3\epsilon^2 - 32y\epsilon^2 -$

$$384ay\epsilon^2+224by\epsilon^2-384aby\epsilon^2-128b^2y\epsilon^2+384ab^2y\epsilon^2-1472b^3y\epsilon^2+1312b^4y\epsilon^2-288b^5y\epsilon^2-64xy\epsilon^2-1152axy\epsilon^2+320bxy\epsilon^2+384abxy\epsilon^2-2624b^2xy\epsilon^2+1984b^3xy\epsilon^2-384b^4xy\epsilon^2-192bx^2y\epsilon^2+288b^2x^2y\epsilon^2-96b^3x^2y\epsilon^2-64y^2\epsilon^2+384ay^2\epsilon^2-384by^2\epsilon^2+1216b^2y^2\epsilon^2-384b^3y^2\epsilon^2-192xy^2\epsilon^2+384bxy^2\epsilon^2-192b^2xy^2\epsilon^2+128y^3\epsilon^2-128by^3\epsilon^2-16\epsilon^3+48a\epsilon^3+192a^2\epsilon^3-72b\epsilon^3+208ab\epsilon^3-192a^2b\epsilon^3+80b^2\epsilon^3-96ab^2\epsilon^3+424b^3\epsilon^3-512ab^3\epsilon^3-400b^4\epsilon^3+528ab^4\epsilon^3-616b^5\epsilon^3-208ab^5\epsilon^3+1072b^6\epsilon^3+32ab^6\epsilon^3-616b^7\epsilon^3+160b^8\epsilon^3-16b^9\epsilon^3-88x\epsilon^3+384a^2x\epsilon^3-248bx\epsilon^3+192abx\epsilon^3+648b^2x\epsilon^3-128ab^2x\epsilon^3+312b^3x\epsilon^3+992ab^3x\epsilon^3-2008b^4x\epsilon^3-640ab^4x\epsilon^3+2840b^5x\epsilon^3+96ab^5x\epsilon^3-1768b^6x\epsilon^3+488b^7x\epsilon^3-48b^8x\epsilon^3-160x^2\epsilon^3+320ax^2\epsilon^3-1152a^2x^2\epsilon^3+240bx^2\epsilon^3-2880abx^2\epsilon^3+160b^2x^2\epsilon^3-592ab^2x^2\epsilon^3-4168b^3x^2\epsilon^3+496ab^3x^2\epsilon^3+3216b^4x^2\epsilon^3+96ab^4x^2\epsilon^3-856b^5x^2\epsilon^3+208b^6x^2\epsilon^3-48b^7x^2\epsilon^3-96x^3\epsilon^3-320ax^3\epsilon^3+224bx^3\epsilon^3+512abx^3\epsilon^3-664b^2x^3\epsilon^3-288ab^2x^3\epsilon^3+984b^3x^3\epsilon^3+32ab^3x^3\epsilon^3-696b^4x^3\epsilon^3+200b^5x^3\epsilon^3-16b^6x^3\epsilon^3+112y\epsilon^3-128ay\epsilon^3+288by\epsilon^3+384aby\epsilon^3-528b^2y\epsilon^3+640ab^2y\epsilon^3-192b^3y\epsilon^3-832ab^3y\epsilon^3+1904b^4y\epsilon^3+192ab^4y\epsilon^3-1984b^5y\epsilon^3+752b^6y\epsilon^3-96b^7y\epsilon^3+416xy\epsilon^3+64axy\epsilon^3+32bxy\epsilon^3+2048abxy\epsilon^3-1280b^2xy\epsilon^3-1728ab^2xy\epsilon^3+4512b^3xy\epsilon^3+384ab^3xy\epsilon^3-4256b^4xy\epsilon^3+1536b^5xy\epsilon^3-192b^6xy\epsilon^3+384x^2y\epsilon^3+1024ax^2y\epsilon^3-736bx^2y\epsilon^3-896abx^2y\epsilon^3+2064b^2x^2y\epsilon^3+192ab^2x^2y\epsilon^3-2080b^3x^2y\epsilon^3+784b^4x^2y\epsilon^3-96b^5x^2y\epsilon^3-256y^2\epsilon^3-64ay^2\epsilon^3-160by^2\epsilon^3-832aby^2\epsilon^3+832b^2y^2\epsilon^3+384ab^2y^2\epsilon^3-1824b^3y^2\epsilon^3+1088b^4y^2\epsilon^3-192b^5y^2\epsilon^3-480xy^2\epsilon^3-896axy^2\epsilon^3+800bxy^2\epsilon^3+384abxy^2\epsilon^3-1760b^2xy^2\epsilon^3+1120b^3xy^2\epsilon^3-192b^4xy^2\epsilon^3+192y^3\epsilon^3+256ay^3\epsilon^3-256by^3\epsilon^3+448b^2y^3\epsilon^3-128b^3y^3\epsilon^3-12\epsilon^4-40a\epsilon^4-96a^2\epsilon^4-384a^3\epsilon^4-56b\epsilon^4-256ab\epsilon^4-768a^2b\epsilon^4-72b^2\epsilon^4-664ab^2\epsilon^4-960a^2b^2\epsilon^4-160b^3\epsilon^4-784ab^3\epsilon^4+768a^2b^3\epsilon^4-448b^4\epsilon^4+136ab^4\epsilon^4-96a^2b^4\epsilon^4+96b^5\epsilon^4+800ab^5\epsilon^4+616b^6\epsilon^4-392ab^6\epsilon^4-448b^7\epsilon^4+48ab^7\epsilon^4+108b^8\epsilon^4-8b^9\epsilon^4-68x\epsilon^4-304ax\epsilon^4-384a^2x\epsilon^4-184bx\epsilon^4-1008abx\epsilon^4-576a^2bx\epsilon^4-200b^2x\epsilon^4-240ab^2x\epsilon^4+768a^2b^2x\epsilon^4-768b^3x\epsilon^4+1024ab^3x\epsilon^4-192a^2b^3x\epsilon^4+368b^4x\epsilon^4-80ab^4x\epsilon^4+1984b^5x\epsilon^4-208ab^5x\epsilon^4-2456b^6x\epsilon^4+48ab^6x\epsilon^4+1184b^7x\epsilon^4-268b^8x\epsilon^4+24b^9x\epsilon^4-128x^2\epsilon^4-608ax^2\epsilon^4+320a^2x^2\epsilon^4-40bx^2\epsilon^4+64abx^2\epsilon^4+320a^2bx^2\epsilon^4-316b^2x^2\epsilon^4+3640ab^2x^2\epsilon^4-96a^2b^2x^2\epsilon^4+256b^3x^2\epsilon^4-2496ab^3x^2\epsilon^4+3776b^4x^2\epsilon^4+536ab^4x^2\epsilon^4-4888b^5x^2\epsilon^4-48ab^5x^2\epsilon^4+2364b^6x^2\epsilon^4-528b^7x^2\epsilon^4+48b^8x^2\epsilon^4-80x^3\epsilon^4-704ax^3\epsilon^4-896a^2x^3\epsilon^4+16bx^3\epsilon^4+768abx^3\epsilon^4+256a^2bx^3\epsilon^4-788b^2x^3\epsilon^4-2896ab^2x^3\epsilon^4+1184b^3x^3\epsilon^4+1856ab^3x^3\epsilon^4-2528b^4x^3\epsilon^4-304ab^4x^3\epsilon^4+2232b^5x^3\epsilon^4-764b^6x^3\epsilon^4+88b^7x^3\epsilon^4+72y\epsilon^4+256ay\epsilon^4+384a^2y\epsilon^4+200by\epsilon^4+992aby\epsilon^4+384a^2by\epsilon^4+152b^2y\epsilon^4+448ab^2y\epsilon^4-384a^2b^2y\epsilon^4+680b^3y\epsilon^4-1088ab^3y\epsilon^4+8b^4y\epsilon^4+64ab^4y\epsilon^4-1928b^5y\epsilon^4+96ab^5y\epsilon^4+1640b^6y\epsilon^4-488b^7y\epsilon^4+48b^8y\epsilon^4+272xy\epsilon^4+1280axy\epsilon^4+1152a^2xy\epsilon^4+224bxy\epsilon^4+1568abxy\epsilon^4-384a^2bxy\epsilon^4+832b^2xy\epsilon^4-2048ab^2xy\epsilon^4+1600b^3xy\epsilon^4+928ab^3xy\epsilon^4-5072b^4xy\epsilon^4-192ab^4xy\epsilon^4+4192b^5xy\epsilon^4-1472b^6xy\epsilon^4+192b^7xy\epsilon^4+256x^2y\epsilon^4+1536ax^2y\epsilon^4-272bx^2y\epsilon^4-2880abx^2y\epsilon^4+1752b^2x^2y\epsilon^4+1632ab^2x^2y\epsilon^4-4120b^3x^2y\epsilon^4-288ab^3x^2y\epsilon^4+3416b^4x^2y\epsilon^4-1176b^5x^2y\epsilon^4+144b^6x^2y\epsilon^4-$$

$144y^2\epsilon^4 - 544ay^2\epsilon^4 - 384a^2y^2\epsilon^4 - 128by^2\epsilon^4 - 768aby^2\epsilon^4 - 256b^2y^2\epsilon^4 + 736ab^2y^2\epsilon^4 - 896b^3y^2\epsilon^4 - 192ab^3y^2\epsilon^4 + 1936b^4y^2\epsilon^4 - 1088b^5y^2\epsilon^4 + 192b^6y^2\epsilon^4 - 272xy^2\epsilon^4 - 1344axy^2\epsilon^4 + 288bxy^2\epsilon^4 + 1920abxy^2\epsilon^4 - 1632b^2xy^2\epsilon^4 - 576ab^2xy^2\epsilon^4 + 3008b^3xy^2\epsilon^4 - 1680b^4xy^2\epsilon^4 + 288b^5xy^2\epsilon^4 + 96y^3\epsilon^4 + 384ay^3\epsilon^4 - 96by^3\epsilon^4 - 384aby^3\epsilon^4 + 480b^2y^3\epsilon^4 - 672b^3y^3\epsilon^4 + 192b^4y^3\epsilon^4 - 2\epsilon^5 - 28a\epsilon^5 - 112a^2\epsilon^5 - 192a^3\epsilon^5 - 18b\epsilon^5 - 196ab\epsilon^5 - 560a^2b\epsilon^5 + 192a^3b\epsilon^5 - 80b^2\epsilon^5 - 532ab^2\epsilon^5 - 96a^2b^2\epsilon^5 - 204b^3\epsilon^5 - 372ab^3\epsilon^5 + 1184a^2b^3\epsilon^5 - 176b^4\epsilon^5 + 948ab^4\epsilon^5 - 624a^2b^4\epsilon^5 + 288b^5\epsilon^5 + 740ab^5\epsilon^5 + 80a^2b^5\epsilon^5 + 412b^6\epsilon^5 - 1228ab^6\epsilon^5 - 316b^7\epsilon^5 + 468ab^7\epsilon^5 - 206b^8\epsilon^5 - 56ab^8\epsilon^5 + 242b^9\epsilon^5 - 76b^{10}\epsilon^5 + 8b^{11}\epsilon^5 - 12x\epsilon^5 - 184ax\epsilon^5 - 352a^2x\epsilon^5 - 384a^3x\epsilon^5 - 86bx\epsilon^5 - 528abx\epsilon^5 - 1120a^2bx\epsilon^5 - 264b^2x\epsilon^5 - 528ab^2x\epsilon^5 + 320a^2b^2x\epsilon^5 - 260b^3x\epsilon^5 - 520ab^3x\epsilon^5 - 288a^2b^3x\epsilon^5 + 284b^4x\epsilon^5 + 440ab^4x\epsilon^5 + 160a^2b^4x\epsilon^5 - 40b^5x\epsilon^5 - 336ab^5x\epsilon^5 - 700b^6x\epsilon^5 + 336ab^6x\epsilon^5 + 868b^7x\epsilon^5 - 88ab^7x\epsilon^5 - 336b^8x\epsilon^5 + 30b^9x\epsilon^5 + 4b^{10}x\epsilon^5 - 24x^2\epsilon^5 - 400ax^2\epsilon^5 - 704a^2x^2\epsilon^5 + 1152a^3x^2\epsilon^5 - 128bx^2\epsilon^5 - 240abx^2\epsilon^5 + 2880a^2bx^2\epsilon^5 - 326b^2x^2\epsilon^5 + 1780ab^2x^2\epsilon^5 + 2896a^2b^2x^2\epsilon^5 + 630b^3x^2\epsilon^5 + 3308ab^3x^2\epsilon^5 - 1648a^2b^3x^2\epsilon^5 + 1784b^4x^2\epsilon^5 + 1428ab^4x^2\epsilon^5 - 728b^5x^2\epsilon^5 - 3340ab^5x^2\epsilon^5 + 1030b^6x^2\epsilon^5 + 856ab^6x^2\epsilon^5 - 1982b^7x^2\epsilon^5 + 1024b^8x^2\epsilon^5 - 160b^9x^2\epsilon^5 - 16x^3\epsilon^5 - 288ax^3\epsilon^5 - 320a^2x^3\epsilon^5 - 56bx^3\epsilon^5 + 640abx^3\epsilon^5 + 384a^2bx^3\epsilon^5 - 92b^2x^3\epsilon^5 - 1480ab^2x^3\epsilon^5 - 64a^2b^2x^3\epsilon^5 + 526b^3x^3\epsilon^5 + 1768ab^3x^3\epsilon^5 - 1316b^4x^3\epsilon^5 - 728ab^4x^3\epsilon^5 + 1780b^5x^3\epsilon^5 + 88ab^5x^3\epsilon^5 - 1092b^6x^3\epsilon^5 + 294b^7x^3\epsilon^5 - 28b^8x^3\epsilon^5 + 12y\epsilon^5 + 160ay\epsilon^5 + 448a^2y\epsilon^5 + 80by\epsilon^5 + 656aby\epsilon^5 + 384a^2by\epsilon^5 + 280b^2y\epsilon^5 + 496ab^2y\epsilon^5 - 896a^2b^2y\epsilon^5 + 376b^3y\epsilon^5 - 768ab^3y\epsilon^5 + 320a^2b^3y\epsilon^5 - 432b^4y\epsilon^5 - 608ab^4y\epsilon^5 - 632b^5y\epsilon^5 + 752ab^5y\epsilon^5 + 840b^6y\epsilon^5 - 176ab^6y\epsilon^5 - 280b^7y\epsilon^5 + 4b^8y\epsilon^5 + 8b^9y\epsilon^5 + 48xy\epsilon^5 + 704axy\epsilon^5 + 1088a^2xy\epsilon^5 + 232bxy\epsilon^5 + 560abxy\epsilon^5 - 1280a^2bxy\epsilon^5 + 616b^2xy\epsilon^5 - 1328ab^2xy\epsilon^5 + 320a^2b^2xy\epsilon^5 - 576b^3xy\epsilon^5 + 176ab^3xy\epsilon^5 - 1776b^4xy\epsilon^5 + 176ab^4xy\epsilon^5 + 2936b^5xy\epsilon^5 - 32ab^5xy\epsilon^5 - 1832b^6xy\epsilon^5 + 544b^7xy\epsilon^5 - 64b^8xy\epsilon^5 + 48x^2y\epsilon^5 + 768ax^2y\epsilon^5 + 144bx^2y\epsilon^5 - 2208abx^2y\epsilon^5 + 156b^2x^2y\epsilon^5 + 2256ab^2x^2y\epsilon^5 - 1992b^3x^2y\epsilon^5 - 960ab^3x^2y\epsilon^5 + 3192b^4x^2y\epsilon^5 + 144ab^4x^2y\epsilon^5 - 2112b^5x^2y\epsilon^5 + 636b^6x^2y\epsilon^5 - 72b^7x^2y\epsilon^5 - 24y^2\epsilon^5 - 304ay^2\epsilon^5 - 448a^2y^2\epsilon^5 - 104by^2\epsilon^5 - 336aby^2\epsilon^5 + 320a^2by^2\epsilon^5 - 288b^2y^2\epsilon^5 + 400ab^2y^2\epsilon^5 + 96b^3y^2\epsilon^5 + 16ab^3y^2\epsilon^5 + 792b^4y^2\epsilon^5 - 32ab^4y^2\epsilon^5 - 952b^5y^2\epsilon^5 + 416b^6y^2\epsilon^5 - 64b^7y^2\epsilon^5 - 48xy^2\epsilon^5 - 672axy^2\epsilon^5 - 120bxy^2\epsilon^5 + 1632abxy^2\epsilon^5 - 240b^2xy^2\epsilon^5 - 1248ab^2xy^2\epsilon^5 + 1680b^3xy^2\epsilon^5 + 288ab^3xy^2\epsilon^5 - 2064b^4xy^2\epsilon^5 + 936b^5xy^2\epsilon^5 - 144b^6xy^2\epsilon^5 + 16y^3\epsilon^5 + 192ay^3\epsilon^5 + 32by^3\epsilon^5 - 384aby^3\epsilon^5 + 96b^2y^3\epsilon^5 + 192ab^2y^3\epsilon^5 - 448b^3y^3\epsilon^5 + 400b^4y^3\epsilon^5 - 96b^5y^3\epsilon^5 - 4a\epsilon^6 - 40a^2\epsilon^6 + 128a^4\epsilon^6 - 2b\epsilon^6 - 52ab\epsilon^6 - 112a^2b\epsilon^6 + 192a^3b\epsilon^6 - 20b^2\epsilon^6 - 168ab^2\epsilon^6 + 200a^2b^2\epsilon^6 + 384a^3b^2\epsilon^6 - 66b^3\epsilon^6 - 8ab^3\epsilon^6 + 608a^2b^3\epsilon^6 - 192a^3b^3\epsilon^6 - 48b^4\epsilon^6 + 544ab^4\epsilon^6 - 56a^2b^4\epsilon^6 + 140b^5\epsilon^6 + 192ab^5\epsilon^6 - 304a^2b^5\epsilon^6 + 168b^6\epsilon^6 - 536ab^6\epsilon^6 + 88a^2b^6\epsilon^6 - 164b^7\epsilon^6 + 136ab^7\epsilon^6 - 112b^8\epsilon^6 + 36ab^8\epsilon^6 + 150b^9\epsilon^6 - 12ab^9\epsilon^6 - 52b^{10}\epsilon^6 + 6b^{11}\epsilon^6 - 28ax\epsilon^6 - 160a^2x\epsilon^6 - 14bx\epsilon^6 - 176abx\epsilon^6 - 48a^2bx\epsilon^6 - 76b^2x\epsilon^6 - 160ab^2x\epsilon^6 + 576a^2b^2x\epsilon^6 - 70b^3x\epsilon^6 + 528ab^3x\epsilon^6 - 512a^2b^3x\epsilon^6 + 176b^4x\epsilon^6 + 280ab^4x\epsilon^6 + 160a^2b^4x\epsilon^6 + 164b^5x\epsilon^6 - 784ab^5x\epsilon^6 - 16a^2b^5x\epsilon^6 - 200b^6x\epsilon^6 + 416ab^6x\epsilon^6 - 28b^7x\epsilon^6 - 80ab^7x\epsilon^6 + 48b^8x\epsilon^6 + 4ab^8x\epsilon^6 + 10b^9x\epsilon^6 - 12b^{10}x\epsilon^6 + 2b^{11}x\epsilon^6 -$

$64ax^2\epsilon^6 - 224a^2x^2\epsilon^6 - 448a^3x^2\epsilon^6 - 32bx^2\epsilon^6 - 104abx^2\epsilon^6 - 160a^2bx^2\epsilon^6 - 64a^3bx^2\epsilon^6 - 60b^2x^2\epsilon^6 - 84ab^2x^2\epsilon^6 - 1832a^2b^2x^2\epsilon^6 + 94b^3x^2\epsilon^6 - 1260ab^3x^2\epsilon^6 + 592a^2b^3x^2\epsilon^6 - 276b^4x^2\epsilon^6 - 1232ab^4x^2\epsilon^6 + 88a^2b^4x^2\epsilon^6 - 846b^5x^2\epsilon^6 + 1416ab^5x^2\epsilon^6 + 456b^6x^2\epsilon^6 - 156ab^6x^2\epsilon^6 + 314b^7x^2\epsilon^6 - 52ab^7x^2\epsilon^6 - 148b^8x^2\epsilon^6 - 26b^9x^2\epsilon^6 + 12b^{10}x^2\epsilon^6 - 48ax^3\epsilon^6 + 64a^2x^3\epsilon^6 + 384a^3x^3\epsilon^6 - 24bx^3\epsilon^6 + 272abx^3\epsilon^6 + 416a^2bx^3\epsilon^6 - 128a^3bx^3\epsilon^6 + 72b^2x^3\epsilon^6 - 108ab^2x^3\epsilon^6 + 1088a^2b^2x^3\epsilon^6 + 122b^3x^3\epsilon^6 + 1128ab^3x^3\epsilon^6 - 992a^2b^3x^3\epsilon^6 - 128b^4x^3\epsilon^6 + 416ab^4x^3\epsilon^6 + 192a^2b^4x^3\epsilon^6 + 742b^5x^3\epsilon^6 - 1496ab^5x^3\epsilon^6 - 432b^6x^3\epsilon^6 + 700ab^6x^3\epsilon^6 - 434b^7x^3\epsilon^6 - 96ab^7x^3\epsilon^6 + 472b^8x^3\epsilon^6 - 150b^9x^3\epsilon^6 + 16b^{10}x^3\epsilon^6 + 24ay\epsilon^6 + 160a^2y\epsilon^6 + 12by\epsilon^6 + 184aby\epsilon^6 + 128a^2by\epsilon^6 + 128a^3by\epsilon^6 + 76b^2y\epsilon^6 + 280ab^2y\epsilon^6 - 320a^2b^2y\epsilon^6 + 120b^3y\epsilon^6 - 296ab^3y\epsilon^6 + 640a^2b^3y\epsilon^6 - 72b^4y\epsilon^6 - 152ab^4y\epsilon^6 - 224a^2b^4y\epsilon^6 - 160b^5y\epsilon^6 + 776ab^5y\epsilon^6 + 192b^6y\epsilon^6 - 536ab^6y\epsilon^6 + 72b^7y\epsilon^6 + 104ab^7y\epsilon^6 - 184b^8y\epsilon^6 + 84b^9y\epsilon^6 - 12b^{10}y\epsilon^6 + 112axy\epsilon^6 + 320a^2xy\epsilon^6 - 128a^3xy\epsilon^6 + 56bxy\epsilon^6 + 160abxy\epsilon^6 - 736a^2bxy\epsilon^6 + 112b^2xy\epsilon^6 - 400ab^2xy\epsilon^6 - 128a^2b^2xy\epsilon^6 - 248b^3xy\epsilon^6 - 448ab^3xy\epsilon^6 + 160a^2b^3xy\epsilon^6 - 192b^4xy\epsilon^6 - 112ab^4xy\epsilon^6 + 328b^5xy\epsilon^6 + 416ab^5xy\epsilon^6 - 528b^6xy\epsilon^6 - 112ab^6xy\epsilon^6 + 536b^7xy\epsilon^6 - 224b^8xy\epsilon^6 + 32b^9xy\epsilon^6 + 128ax^2y\epsilon^6 + 64bx^2y\epsilon^6 - 496abx^2y\epsilon^6 - 120b^2x^2y\epsilon^6 + 744ab^2x^2y\epsilon^6 - 188b^3x^2y\epsilon^6 - 536ab^3x^2y\epsilon^6 + 724b^4x^2y\epsilon^6 + 184ab^4x^2y\epsilon^6 - 816b^5x^2y\epsilon^6 - 24ab^5x^2y\epsilon^6 + 440b^6x^2y\epsilon^6 - 116b^7x^2y\epsilon^6 + 12b^8x^2y\epsilon^6 - 48ay^2\epsilon^6 - 160a^2y^2\epsilon^6 - 24by^2\epsilon^6 - 112aby^2\epsilon^6 + 192a^2by^2\epsilon^6 - 64b^2y^2\epsilon^6 + 64ab^2y^2\epsilon^6 - 32a^2b^2y^2\epsilon^6 + 56b^3y^2\epsilon^6 + 128ab^3y^2\epsilon^6 + 80b^4y^2\epsilon^6 - 16ab^4y^2\epsilon^6 - 136b^5y^2\epsilon^6 - 16ab^5y^2\epsilon^6 + 160b^6y^2\epsilon^6 - 88b^7y^2\epsilon^6 + 16b^8y^2\epsilon^6 - 112axy^2\epsilon^6 - 56bxy^2\epsilon^6 + 384abxy^2\epsilon^6 + 80b^2xy^2\epsilon^6 - 480ab^2xy^2\epsilon^6 + 200b^3xy^2\epsilon^6 + 256ab^3xy^2\epsilon^6 - 544b^4xy^2\epsilon^6 - 48ab^4xy^2\epsilon^6 + 472b^5xy^2\epsilon^6 - 176b^6xy^2\epsilon^6 + 24b^7xy^2\epsilon^6 + 32ay^3\epsilon^6 + 16by^3\epsilon^6 - 96aby^3\epsilon^6 - 16b^2y^3\epsilon^6 + 96ab^2y^3\epsilon^6 - 64b^3y^3\epsilon^6 - 32ab^3y^3\epsilon^6 + 128b^4y^3\epsilon^6 - 80b^5y^3\epsilon^6 + 16b^6y^3\epsilon^6 - 4a^2\epsilon^7 + 64a^4\epsilon^7 - 4ab\epsilon^7 - 12a^2b\epsilon^7 + 96a^3b\epsilon^7 - 64a^4b\epsilon^7 - b^2\epsilon^7 - 20ab^2\epsilon^7 + 60a^2b^2\epsilon^7 + 96a^3b^2\epsilon^7 - 7b^3\epsilon^7 + 180a^2b^3\epsilon^7 - 288a^3b^3\epsilon^7 - 11b^4\epsilon^7 + 112ab^4\epsilon^7 - 124a^2b^4\epsilon^7 + 96a^3b^4\epsilon^7 + 19b^5\epsilon^7 + 56ab^5\epsilon^7 - 308a^2b^5\epsilon^7 + 46b^6\epsilon^7 - 216ab^6\epsilon^7 + 260a^2b^6\epsilon^7 - 30b^7\epsilon^7 - 32ab^7\epsilon^7 - 52a^2b^7\epsilon^7 - 62b^8\epsilon^7 + 176ab^8\epsilon^7 + 46b^9\epsilon^7 - 84ab^9\epsilon^7 + 19b^{10}\epsilon^7 + 12ab^{10}\epsilon^7 - 27b^{11}\epsilon^7 + 9b^{12}\epsilon^7 - b^{13}\epsilon^7 - 16a^2x\epsilon^7 - 32a^3x\epsilon^7 + 128a^4x\epsilon^7 - 16abx\epsilon^7 - 56a^2bx\epsilon^7 + 320a^3bx\epsilon^7 - 4b^2x\epsilon^7 - 64ab^2x\epsilon^7 + 264a^2b^2x\epsilon^7 + 480a^3b^2x\epsilon^7 - 22b^3x\epsilon^7 + 88ab^3x\epsilon^7 + 928a^2b^3x\epsilon^7 - 256a^3b^3x\epsilon^7 - 6b^4x\epsilon^7 + 624ab^4x\epsilon^7 + 144a^2b^4x\epsilon^7 + 148b^5x\epsilon^7 + 488ab^5x\epsilon^7 - 680a^2b^5x\epsilon^7 + 220b^6x\epsilon^7 - 544ab^6x\epsilon^7 + 184a^2b^6x\epsilon^7 - 96b^7x\epsilon^7 - 312ab^7x\epsilon^7 - 224b^8x\epsilon^7 + 304ab^8x\epsilon^7 + 76b^9x\epsilon^7 - 56ab^9x\epsilon^7 + 72b^{10}x\epsilon^7 - 42b^{11}x\epsilon^7 + 6b^{12}x\epsilon^7 - 16a^2x^2\epsilon^7 - 384a^4x^2\epsilon^7 - 16abx^2\epsilon^7 + 32a^2bx^2\epsilon^7 - 768a^3bx^2\epsilon^7 - 4b^2x^2\epsilon^7 - 580a^2b^2x^2\epsilon^7 - 1536a^3b^2x^2\epsilon^7 - 8b^3x^2\epsilon^7 - 116ab^3x^2\epsilon^7 - 2332a^2b^3x^2\epsilon^7 + 768a^3b^3x^2\epsilon^7 - b^4x^2\epsilon^7 - 1220ab^4x^2\epsilon^7 - 1132a^2b^4x^2\epsilon^7 - 171b^5x^2\epsilon^7 - 1760ab^5x^2\epsilon^7 + 2300a^2b^5x^2\epsilon^7 - 541b^6x^2\epsilon^7 + 832ab^6x^2\epsilon^7 - 576a^2b^6x^2\epsilon^7 - 175b^7x^2\epsilon^7 + 1700ab^7x^2\epsilon^7 + 657b^8x^2\epsilon^7 - 1148ab^8x^2\epsilon^7 + 163b^9x^2\epsilon^7 + 192ab^9x^2\epsilon^7 - 471b^{10}x^2\epsilon^7 + 191b^{11}x^2\epsilon^7 - 24b^{12}x^2\epsilon^7 + 192a^3x^3\epsilon^7 + 288a^2bx^3\epsilon^7 - 256a^3bx^3\epsilon^7 + 144ab^2x^3\epsilon^7 + 192a^2b^2x^3\epsilon^7 + 64a^3b^2x^3\epsilon^7 + 24b^3x^3\epsilon^7 + 384ab^3x^3\epsilon^7 - 960a^2b^3x^3\epsilon^7 + 112b^4x^3\epsilon^7 -$

$432ab^4x^3\epsilon^7 + 576a^2b^4x^3\epsilon^7 + 32b^5x^3\epsilon^7 - 768ab^5x^3\epsilon^7 - 96a^2b^5x^3\epsilon^7 - 336b^6x^3\epsilon^7 + 1008ab^6x^3\epsilon^7 - 16b^7x^3\epsilon^7 - 384ab^7x^3\epsilon^7 + 400b^8x^3\epsilon^7 + 48ab^8x^3\epsilon^7 - 288b^9x^3\epsilon^7 + 80b^{10}x^3\epsilon^7 - 8b^{11}x^3\epsilon^7 + 16a^2y\epsilon^7 + 16aby\epsilon^7 + 16a^2by\epsilon^7 + 64a^3by\epsilon^7 + 4b^2y\epsilon^7 + 48ab^2y\epsilon^7 + 32a^2b^2y\epsilon^7 - 64a^3b^2y\epsilon^7 + 20b^3y\epsilon^7 + 96a^2b^3y\epsilon^7 + 16b^4y\epsilon^7 - 240a^2b^4y\epsilon^7 - 32b^5y\epsilon^7 + 16ab^5y\epsilon^7 + 80a^2b^5y\epsilon^7 - 8b^6y\epsilon^7 - 208ab^6y\epsilon^7 + 8b^7y\epsilon^7 + 160ab^7y\epsilon^7 - 48b^8y\epsilon^7 - 32ab^8y\epsilon^7 + 64b^9y\epsilon^7 - 28b^{10}y\epsilon^7 + 4b^{11}y\epsilon^7 + 32a^2xy\epsilon^7 - 64a^3xy\epsilon^7 + 32abxy\epsilon^7 - 144a^2bxy\epsilon^7 + 64a^3bxy\epsilon^7 + 8b^2xy\epsilon^7 - 32ab^2xy\epsilon^7 - 112a^2b^2xy\epsilon^7 + 12b^3xy\epsilon^7 - 288ab^3xy\epsilon^7 + 336a^2b^3xy\epsilon^7 - 76b^4xy\epsilon^7 + 160ab^4xy\epsilon^7 - 112a^2b^4xy\epsilon^7 - 84b^5xy\epsilon^7 + 384ab^5xy\epsilon^7 + 196b^6xy\epsilon^7 - 320ab^6xy\epsilon^7 + 52b^7xy\epsilon^7 + 64ab^7xy\epsilon^7 - 180b^8xy\epsilon^7 + 84b^9xy\epsilon^7 - 12b^{10}xy\epsilon^7 - 16a^2y^2\epsilon^7 - 16aby^2\epsilon^7 + 16a^2by^2\epsilon^7 - 4b^2y^2\epsilon^7 - 16ab^2y^2\epsilon^7 + 16a^2b^2y^2\epsilon^7 - 12b^3y^2\epsilon^7 + 64ab^3y^2\epsilon^7 - 16a^2b^3y^2\epsilon^7 + 12b^4y^2\epsilon^7 + 36b^5y^2\epsilon^7 - 48ab^5y^2\epsilon^7 - 28b^6y^2\epsilon^7 + 16ab^6y^2\epsilon^7 - 20b^7y^2\epsilon^7 + 20b^8y^2\epsilon^7 - 4b^9y^2\epsilon^7 + 64a^4x^2\epsilon^8 + 128a^3bx^2\epsilon^8 + 64a^4bx^2\epsilon^8 + 96a^2b^2x^2\epsilon^8 + 384a^3b^2x^2\epsilon^8 + 32ab^3x^2\epsilon^8 + 480a^2b^3x^2\epsilon^8 + 128a^3b^3x^2\epsilon^8 + 4b^4x^2\epsilon^8 + 224ab^4x^2\epsilon^8 + 576a^2b^4x^2\epsilon^8 - 128a^3b^4x^2\epsilon^8 + 36b^5x^2\epsilon^8 + 480ab^5x^2\epsilon^8 - 192a^2b^5x^2\epsilon^8 + 112b^6x^2\epsilon^8 + 160ab^6x^2\epsilon^8 - 288a^2b^6x^2\epsilon^8 + 112b^7x^2\epsilon^8 - 416ab^7x^2\epsilon^8 + 96a^2b^7x^2\epsilon^8 - 72b^8x^2\epsilon^8 - 96ab^8x^2\epsilon^8 - 136b^9x^2\epsilon^8 + 160ab^9x^2\epsilon^8 + 48b^{10}x^2\epsilon^8 - 32ab^{10}x^2\epsilon^8 + 48b^{11}x^2\epsilon^8 - 28b^{12}x^2\epsilon^8 + 4b^{13}x^2\epsilon^8)/(16(-2-\epsilon+b\epsilon)(2-2a\epsilon^2-b\epsilon^2-2b^2\epsilon^2+b^3\epsilon^2)^2)$.

Dreptele invariante: $l_1 = x$, $l_2 = x-1$, $l_3 = 2-2x\epsilon+2bx\epsilon-2a\epsilon^2-b\epsilon^2-2b^2\epsilon^2+b^3\epsilon^2-4ax\epsilon^2-2bx\epsilon^2-4b^2x\epsilon^2+2b^3x\epsilon^2$,

$l_4 \cdot l_5 = -16+16\epsilon+32b\epsilon-16b^2\epsilon+32x\epsilon-16bx\epsilon+16x^2\epsilon-32y\epsilon+4\epsilon^2+32a\epsilon^2+8b\epsilon^2+8b^3\epsilon^2-4b^4\epsilon^2-48bx\epsilon^2+40b^2x\epsilon^2-8b^3x\epsilon^2-16x^2\epsilon^2+16bx^2\epsilon^2-4b^2x^2\epsilon^2+48by\epsilon^2-16b^2y\epsilon^2+32xy\epsilon^2-16bxy\epsilon^2-16y^2\epsilon^2-4\epsilon^3-16a\epsilon^3-20b\epsilon^3-32ab\epsilon^3-24b^2\epsilon^3+16ab^2\epsilon^3+8b^3\epsilon^3+12b^4\epsilon^3-4b^5\epsilon^3-16x\epsilon^3-32ax\epsilon^3-24bx\epsilon^3+16abx\epsilon^3+32b^2x\epsilon^3-8b^3x\epsilon^3-16x^2\epsilon^3-32ax^2\epsilon^3+16bx^2\epsilon^3-52b^2x^2\epsilon^3+20b^3x^2\epsilon^3+16y\epsilon^3+32ay\epsilon^3+32by\epsilon^3-16b^2y\epsilon^3+32xy\epsilon^3-48bxy\epsilon^3+16b^2xy\epsilon^3-16y^2\epsilon^3+16by^2\epsilon^3-\epsilon^4-8a\epsilon^4-16a^2\epsilon^4-6b\epsilon^4-24ab\epsilon^4-11b^2\epsilon^4-8ab^2\epsilon^4-4b^3\epsilon^4+8ab^3\epsilon^4+5b^4\epsilon^4+2b^5\epsilon^4-b^6\epsilon^4-4x\epsilon^4-16ax\epsilon^4-6bx\epsilon^4+24abx\epsilon^4+12b^2x\epsilon^4-8ab^2x\epsilon^4+4b^3x\epsilon^4-8b^4x\epsilon^4+2b^5x\epsilon^4-4x^2\epsilon^4+12bx^2\epsilon^4-13b^2x^2\epsilon^4+6b^3x^2\epsilon^4-b^4x^2\epsilon^4+4y\epsilon^4+16ay\epsilon^4+8by\epsilon^4-16aby\epsilon^4-8b^2y\epsilon^4-8b^3y\epsilon^4+4b^4y\epsilon^4+8xy\epsilon^4-20bxy\epsilon^4+16b^2xy\epsilon^4-4b^3xy\epsilon^4-4y^2\epsilon^4+8by^2\epsilon^4-4b^2y^2\epsilon^4+16a^2x^2\epsilon^5+16abx^2\epsilon^5+4b^2x^2\epsilon^5+32ab^2x^2\epsilon^5+16b^3x^2\epsilon^5-16ab^3x^2\epsilon^5+8b^4x^2\epsilon^5-16b^5x^2\epsilon^5+4b^6x^2\epsilon^5$.

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_3, l_4, l_5 \to \infty$.

3.2. Sistemele cubice ce posedă trei drepte invariante de multiplicitatea maximală dintre care dreptele afine sunt reale şi concurente

Notăm cu $\mathbb{CSL}^{np}_{2(r)}$ clasa sistemelor cubice cu exact două drepte invariante afine reale şi concurente. În secţiunea de faţă vom determina toate consecutivităţile (parţial) maximale de multiplicităţi ale dreptelor din $\mathbb{CSL}^{np}_{2(r)}$ şi anume, vom demonstra următoarea teoremă de bază.

Teorema 3.2.1. *Cu ajutorul unei transformări afine şi rescalarea timpului orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}^{np}_{2(r)}$ *ce admite consecutivitatea (parţial) maximală de multiplicităţi* $(m_\infty(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty))$ $m(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele forme:*

$m(3,3;1)$	1)	$\dot{x} = x^3, \quad \dot{y} = y(x^2 + ay + by^2),\ b \neq 0;$
$m(3,2;2)$	2.1)	$\dot{x} = ax^3, \quad \dot{y} = y^2, a \neq 0;$
	2.2)	$\dot{x} = x(ax^2 + y), \quad \dot{y} = y^2, \ a \neq 0;$
$m(3,1;3)$	3.1)	$\dot{x} = x^2(ax + by), \quad \dot{y} = y, \ a \neq 0;$
	3.2)	$\dot{x} = x(ay + b), \quad \dot{y} = y(x^2 + ay + b), \ b \neq 0;$
$m(2,2;3)$	4)	$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y(1 + bxy), \ b \neq 0;$
$m_\infty(2,1;3)$	5.1)	$\dot{x} = x^2(a + bx + cy), \quad \dot{y} = y, \quad c(a^2 + b^2) \neq 0;$
	5.2)	$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y(1 + ax + bx^2 + cxy), \quad a(b^2 + c^2) \neq 0;$
	5.3)	$\dot{x} = x(1 + ax + bx^2 + cxy), \quad \dot{y} = y, \quad c(a^2 + b^2) \neq 0;$
	5.4)	$\dot{x} = x(1 + ay), \quad \dot{y} = y(1 + bx + ay + cx^2), \quad abc \neq 0;$
$m_\infty(1,1;3)$	6.1)	$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2),$ $(a^2+c^2+f^2)(d^2+e^2+f^2)(a^2+b^2+d^2)((a-1)^2+c^2+f^2)\cdot$ $((a-1)^2+b^2+d^2)((a-1)^2+(c^2d-bce+b^2f)^2) \neq 0;$
	6.2)	$\dot{x} = x(a + by), \ \dot{y} = y(c + dx + ey + x^2),$ $a(c^2+e^2)((a-c)^2+(b-e)^2) \neq 0;$
	6.3)	$\dot{x} = x(a + by + cxy + y^2), \ \dot{y} = -y(d + ex + c^2x^2 + cxy),$ $ad(c^2+e^2+(a+d)^2)((a+d)^2+(bc-e)^2) \neq 0;$
	6.4)	$\dot{x} = x(a + by + cxy + dy^2), \ \dot{y} = \alpha y(1 + bx + cx^2 + dxy),$ $\alpha a(c^2+d^2)(\alpha - a) \neq 0.$

3.2.1. Multiplicităţile algebrice a două drepte invariante afine reale şi concurente.

Pentru demonstrarea teoremei 3.2.1, mai întâi, vom determina multiplicitatea algebrică maximală a dreptelor invariante afine din clasa $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$.

Fie că sistemul (3.1) posedă două drepte invariante afine reale şi concurente l_1 şi l_2. Prin intermediul unei transformări afine putem face ca aceste drepte să fie descrise respectiv de ecuaţiile $x = 0$ şi $y = 0$. Atunci, sistemul (3.1) are forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ \dot{y} = y(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2). \end{cases} \tag{3.125}$$

Vom nota cu μ_1 multiplicitatea dreptei invariante $x = 0$, cu μ_2 multiplicitatea dreptei invariante $y = 0$, iar cu μ_∞ multiplicitatea dreptei de la infinit.

Aplicând definiţia 2.1.2, vom calcula multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $x = 0$, după care vom determina multiplicitatea algebrică a dreptei $y = 0$.

Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$.

Pentru sistemul (3.125) calculăm determinantul $E_1(\mathbb{X})$ (vezi definiţia 2.1.2). El reprezintă un polinom de gradul 8 în x şi y şi-l vom scrie sub forma

$$\begin{aligned} E_1(\mathbb{X}) = x(A_1(y) + A_2(y)x + A_3(y)x^2 + A_4(y)x^3 + A_5(y)x^4 \\ +A_6(y)x^5 + A_7(y)x^6 + A_8(y)x^7). \end{aligned} \tag{3.126}$$

Avem $A_1(y) = -yA_{11}(y)A_{12}(y)$, unde $A_{11}(y) = b_{01} + b_{02}y + b_{03}y^2$ şi $A_{12}(y) = a_{10}^2 - a_{10}b_{01} + 2a_{10}a_{11}y - 2a_{10}b_{02}y + a_{11}^2y^2 + 2a_{10}a_{12}y^2 + a_{12}b_{01}y^2 - a_{11}b_{02}y^2 - 3a_{10}b_{03}y^2 + 2a_{11}a_{12}y^3 - 2a_{11}b_{03}y^3 + a_{12}^2y^4 - a_{12}b_{03}y^4$.

Multiplicitatea algebrică μ_1 a dreptei invariante $x = 0$ este cel puţin egală cu doi, dacă are loc identitatea $A_1(y) \equiv 0$. Condiţiile (3.2) nu permit ca polinomul $A_{11}(y)$ să fie identic zero, ceea ce implică inegalitatea $|b_{01}| + |b_{02}| + |b_{03}| \neq 0$. Prin urmare, vom cere ca $A_{12}(y)$ să fie identic zero. Identitatea $A_{12}(y) \equiv 0$ are loc, dacă se îndeplineşte una dintre următoarele şase serii de condiţii:

$$a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0; \tag{3.127}$$

$$a_{11} = a_{12} = b_{02} = b_{03} = 0, b_{01} = a_{10},\ a_{10} \neq 0; \tag{3.128}$$

$$a_{10} = a_{12} = b_{03} = 0, b_{02} = a_{11},\ a_{11} \neq 0; \tag{3.129}$$

$$a_{12} = b_{03} = 0, b_{01} = a_{10}, b_{02} = a_{11},\ a_{10}a_{11} \neq 0; \tag{3.130}$$

$$a_{10} = 0, b_{01} = a_{11}(b_{02} - a_{11})/a_{12}, b_{03} = a_{12},\ a_{12} \neq 0; \tag{3.131}$$

$$b_{01} = a_{10}, b_{02} = a_{11}, b_{03} = a_{12},\ a_{10}a_{12} \neq 0. \tag{3.132}$$

Lema 3.2.1. *Pentru sistemul cubic diferenţial* {(3.125), (3.2)} *multiplicitatea algebrică* μ_1 *a dreptei invariante* $x = 0$ *este cel puţin egală cu doi, dacă şi numai dacă are loc una dintre următoarele şase serii de condiţii:* (3.127), (3.128), (3.129), (3.130), (3.131), (3.132).

Vom examina separat fiecare serie de condiţii din lema 3.2.1.

1) *Condiţiile* (3.127).

Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ este cel puţin egală cu trei ($\mu_1 \geq 3$), dacă are loc identitatea $A_2(y) \equiv 0$. Avem $A_2(y) = yA_{11}(a_{20}b_{01} + 2a_{20}b_{02}y + a_{21}b_{02}y^2 + 3a_{20}b_{03}y^2 + 2a_{21}b_{03}y^3)$. Identitatea $A_2(y) \equiv 0$ are loc, dacă se realizează una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$a_{20} = a_{21} = 0; \tag{3.133}$$

$$a_{20} = b_{02} = b_{03} = 0, a_{21} \neq 0. \tag{3.134}$$

În conformitate cu condiţiile {(3.2), (3.127), (3.133)}, sistemul (3.125) ia forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = y(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2), \\ &a_{30}(|b_{01}| + |b_{02}| + |b_{03}|) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.135}$$

Pentru acest sistem $A_3(y) = a_{30}yA_{11}(y)(b_{01} + 2b_{02}y + 3b_{03}y^2) \not\equiv 0$, deci în acest caz multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 0$ este egală cu trei.

Dacă se îndeplinesc condiţiile {(3.2), (3.127), (3.134)}, atunci sistemul (3.125) arată astfel:

$$\dot{x} = x^2(a_{30}x + a_{21}y), \quad \dot{y} = y(b_{01} + b_{11}x + b_{21}x^2 + b_{12}xy),\ a_{21}a_{30}b_{01} \neq 0, \tag{3.136}$$

şi pentru el avem $A_3(y) = b_{01}y(a_{30}b_{01} - a_{21}(2a_{21} - b_{12})y^2) \not\equiv 0$, adică $\mu_1 = 3$.

2) *Condiţiile* (3.128):

$A_2(y) = -a_{10}^2 y(2(a_{20} - b_{11}) + 3(a_{21} - b_{12})y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{11} = a_{20}, b_{12} = a_{21} \tag{3.137}$$

$\Rightarrow A_3(y) = -3a_{10}^2(a_{30} - b_{21})y \not\equiv 0$, astfel $\mu_1 = 3$.

În condiţiile {(3.2), (3.128), (3.137)} sistemul (3.125) ia forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \\ &\dot{y} = y(a_{10} + a_{20}x + b_{21}x^2 + a_{21}xy),\ a_{10}(b_{21} - a_{30}) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.138}$$

3) *Condiţiile* (3.129).

Identitatea $A_2(y) = y(a_{20}b_{01}^2 - a_{11}(a_{11}a_{20} + 2a_{21}b_{01} - a_{11}b_{11} - b_{01}b_{12})y^2 - 2a_{11}^2(a_{21} - b_{12})y^3) \equiv 0$ are loc, dacă se realizează una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$a_{20} = 0,\ b_{11} = a_{21}b_{01}/a_{11},\ b_{12} = a_{21}; \tag{3.139}$$

$$b_{01} = 0,\ b_{11} = a_{20},\ b_{12} = a_{21},\ a_{20} \neq 0. \tag{3.140}$$

Conform condiţiilor $\{(3.129), (3.139)\}$ sistemul (3.125) se scrie astfel

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \\ &\dot{y} = y(a_{11}b_{01} + a_{21}b_{01}x + a_{11}^2y + a_{11}b_{21}x^2 + a_{11}a_{21}xy)/a_{11},\ \ b_{21} - a_{30} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.141}$$

Pentru (3.141) avem $A_3(y) = y(a_{30}b_{01}^2 - a_{11}a_{30}b_{01}y - 2a_{11}^2(a_{30} - b_{21})y^2) \not\equiv 0$ şi, prin urmare, $\mu_1 = 3$.

Dacă se realizează condiţiile $\{(3.129), (3.140)\}$, atunci (3.125) obţine forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \\ &\dot{y} = y(a_{20}x + a_{11}y + b_{21}x^2 + a_{11}y + a_{21}xy),\ \ a_{11}a_{20}(b_{21} - a_{30}) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.142}$$

Pentru (3.142) multiplicitatea algebrică a dreptei $x = 0$ nu poate fi mai mare decât trei, deoarece $A_3(y) = 2a_{11}^2(b_{21} - a_{30})y^3 \not\equiv 0$.

4) *Condiţiile* (3.130):

$A_2(y) = -y(a_{10} + a_{11}y)(2a_{10}(a_{20} - b_{11}) + (a_{11}a_{20} + 3a_{10}a_{21} - a_{11}b_{11} - 3a_{10}b_{12})y + 2a_{11}(a_{21} - b_{12})y^2) \equiv 0 \ \Rightarrow\ \{b_{11} = a_{20}, b_{12} = a_{21}\} \Rightarrow A_3(y) = y(b_{21} - a_{30})(a_{10} + a_{11}y)(3a_{10} + 2a_{11}y) \not\equiv 0$, deci $\mu_1 = 3$. Sistemul cubic (3.125) are forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \\ &\dot{y} = y(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + b_{21}x^2 + a_{21}xy),\ a_{10}a_{11}(b_{21} - a_{30}) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.143}$$

5) *Condiţiile* (3.131).

Identitatea $A_2(y) = y(a_{11} + a_{12}y)(a_{11}a_{20}(a_{11} - b_{02})^2 + 2a_{12}a_{20}(a_{11} - b_{02})^2y + a_{12}(3a_{11}^2a_{21} - 3a_{11}a_{12}a_{20} + 2a_{12}a_{20}b_{02} - 4a_{11}a_{21}b_{02} + a_{21}b_{02}^2 + 2a_{11}a_{12}b_{11} - a_{12}b_{02}b_{11} - a_{11}^2b_{12} + a_{11}b_{02}b_{12})y^2 - 2a_{11}a_{12}^2(a_{21} - b_{12})y^3 - a_{12}^3(a_{21} - b_{12})y^4)/a_{12}^2 \equiv 0$ are loc dacă se satisface una dintre următoarele patru serii de condiţii:

$$a_{20} = 0, b_{02} = 2a_{11}, b_{12} = a_{21}; \tag{3.144}$$

$$a_{20} = 0, b_{11} = a_{21}(b_{02} - a_{11})/a_{12}, b_{12} = a_{21}, b_{02} \neq 2a_{11}; \tag{3.145}$$

$$a_{11} = 0, a_{20} \neq 0, b_{02} = 0, b_{12} = a_{21}; \tag{3.146}$$

$$a_{11} \neq 0, a_{20} \neq 0, b_{02} = a_{11}, b_{11} = a_{20}, b_{12} = a_{21}. \tag{3.147}$$

a) Condiţiile $\{(3.131), (3.144)\}$ ne conduc la sistemul

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \quad \dot{y} = y(a_{11}^2 + 2a_{11}a_{12}y \\ &+a_{12}b_{21}x^2 + a_{12}a_{21}xy + \ a_{12}^2y^2)/a_{12}, \ b_{21} - a_{30} \neq 0, \end{aligned} \tag{3.148}$$

pentru care $A_3(y) = y(a_{11}^4a_{30} + 2a_{11}^3a_{12}a_{30}y + a_{12}(a_{11}^2a_{12}b_{21} - a_{11}^2a_{21}^2 + 2a_{11}a_{12}a_{21}b_{11} - a_{12}^2b_{11}^2)y^2 - 2a_{11}a_{12}^3(a_{30} - b_{21})y^3 - a_{12}^4(a_{30} - b_{21})y^4)/a_{12}^2 \not\equiv 0$, deci $\mu_1 = 3$.

b) În condiţiile (3.145) avem $A_3(y) = y(a_{11} + a_{12}y)(a_{11}a_{30}(a_{11} - b_{02})^2 + a_{12}a_{30}(3a_{11} - 2b_{02})(a_{11} - b_{02})y - a_{12}^2(3a_{11} - b_{02})(a_{30} - b_{21})y^2 - a_{12}^3(a_{30} - b_{21})y^3)/a_{12}^2 \not\equiv 0$. Prin urmare, în acest caz, $\mu_1 = 3$. Sistemul cubic (3.125) are forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \quad \dot{y} = y(a_{11}(b_{02} - a_{11}) + \\ &a_{21}(b_{02} - a_{11})x + a_{12}b_{02}y + a_{12}b_{21}x^2 + a_{12}a_{21}xy + a_{12}^2y^2)/a_{12}, \\ &(b_{21} - a_{30})(b_{02} - 2a_{11}) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.149}$$

c) Dacă se realizează condiţiile $\{(3.131), (3.146)\}$ avem $A_3(y) = -a_{12}y^3(2a_{20}^2 - 3a_{20}b_{11} + b_{11}^2 + a_{12}a_{30}y^2 - a_{12}b_{21}y^2) \not\equiv 0$ şi obţinem următorul sistem

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{20}x + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ &\dot{y} = y(b_{11}x + b_{21}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \ \ a_{20}a_{12}(b_{21} - a_{30}) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.150}$$

Multiplicitatea μ_1 este egală cu trei.

d) Condiţiile $\{(3.131), (3.147)\}$ ne dau sistemul

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ &\dot{y} = y(a_{20}x + a_{11}y + b_{21}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \ \ a_{11}a_{12}a_{20}(b_{21} - a_{30}) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.151}$$

Pentru (3.151) avem $A_3(y) = (b_{21} - a_{30})(a_{11} + a_{12}y)(2a_{11} + a_{12}y)y^3 \not\equiv 0$, prin urmare, $\mu_1 = 3$.

6) *Condiţiile* (3.132):

$A_2(y) = -y(a_{10} + a_{11}y + a_{12}y^2)(2a_{10}a_{20} - 2a_{10}b_{11} + a_{11}a_{20}y + 3a_{10}a_{21}y - a_{11}b_{11}y - 3a_{10}b_{12}y + 2a_{11}a_{21}y^2 - 2a_{11}b_{12}y^2 + a_{12}a_{21}y^3 - a_{12}b_{12}y^3) \equiv 0 \ \Rightarrow \{b_{11} = a_{20}, b_{12} = a_{21}\} \Rightarrow \ A_3(y) = y(b_{21} - a_{30})(a_{10} + a_{11}y + a_{12}y^2)(3a_{10} + 2a_{11}y + a_{12}y^2) \not\equiv 0$, deci $\mu_1 = 3$. În acest caz sistemul cubic (3.125) ia forma

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ &\dot{y} = y(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + b_{21}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \ a_{10}a_{12}(b_{21} - a_{30}) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.152}$$

Astfel, au fost demonstrate următoarele două leme.

Lema 3.2.2. *Fie că sistemul cubic* $\{(3.1), (3.2)\}$ *are două drepte invariante afine reale şi concurente. Atunci, multiplicitatea algebrică a uneia dintre aceste drepte este cel mult egală cu trei.*

Lema 3.2.3. *Pentru sistemul cubic* $\{(3.125), (3.2)\}$ *multiplicitatea algebrică a dreptei invariante* $x = 0$ *este egală cu trei, dacă şi numai dacă el are una dintre următoarele unsprezece forme:* (3.135), (3.136), (3.138), (3.141), (3.142), (3.143), (3.148), (3.149), (3.150), (3.151), (3.152).

Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $y = 0$.

Pentru fiecare dintre sistemele, enumerate în lema 3.2.3, vom determina multiplicitatea algebrică posibilă a dreptei invariante $y = 0$. În acest scop, polinomul $E_1(\mathbb{X})$ din definiţia 2.1.2 îl vom scrie sub forma:

$$\begin{aligned} E_1(\mathbb{X}) = y(B_1(x) + B_2(x)y + B_3(x)y^2 + B_4(x)y^3 + B_5(x)y^4 \\ +B_6(x)y^5 + B_7(x)y^6 + B_8(x)y^7). \end{aligned} \tag{3.153}$$

Multiplicitatea algebrică μ_2 a dreptei invariante $y = 0$ este egală cu k, dacă $B_1(x) \equiv 0, \cdots, B_{k-1}(x) \equiv 0$, $B_k \not\equiv 0$.

Vom examina aparte fiecare sistem din lema 3.2.3.

Ţinând cont de condiţia (3.2), în cazul sistemelor (3.136), (3.138), (3.142), (3.143), (3.151), (3.152), avem $B_1(x) \not\equiv 0$, deci $\mu_2 = 1$.

Pentru sistemul (3.135) identitatea $B_1(x) = a_{30}x^3(b_{01}^2 + 2b_{01}b_{11}x - 3a_{30}b_{01}x^2 + b_{11}^2x^2 + 2b_{01}b_{21}x^2 - 2a_{30}b_{11}x^3 + 2b_{11}b_{21}x^3 - a_{30}b_{21}x^4 + b_{21}^2x^4) \equiv 0$ are loc, dacă se realizează una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$b_{01} = b_{11} = b_{21} = 0; \tag{3.154}$$

$$b_{01} = b_{11} = 0, b_{21} = a_{30}. \tag{3.155}$$

Condiţiile (3.154) implică $B_2(x) = -a_{30}^2x^5(3b_{02} + 2b_{12}x) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{02} = b_{12} = 0. \tag{3.156}$$

Sistemul cubic $\{(3.135), (3.154), (3.156)\}$ are forma $\dot{x} = a_{30}x^3$, $\dot{y} = b_{03}y^3$, $a_{30}b_{03} \neq 0$. El aparţine clasei $\mathbb{CSL}_4^*$ şi realizează consecutivitatea de multiplicităţi $m(3,3,1,1;1)$ (vezi [41]).

Condiţiile (3.155) ne conduc la implicaţiile $B_2(x) = a_{30}^2b_{12}x^6 \equiv 0 \Rightarrow b_{12} = 0 \Rightarrow B_3(x) = a_{30}x^3(2b_{02}^2 + a_{30}b_{03}x^2) \not\equiv 0$. Prin urmare, $\mu_2 = 3$, iar sistemul (3.135) ia forma

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = y(b_{02}y + a_{30}x^2 + b_{03}y^2), \quad a_{30}b_{03} \neq 0. \tag{3.157}$$

Pentru (3.141) avem $B_1(x) = a_{30}x^3(a_{11}^2b_{01}^2 + 2a_{11}a_{21}b_{01}^2x - b_{01}(3a_{11}^2a_{30} - a_{21}^2b_{01} - 2a_{11}^2b_{21})x^2 - 2a_{11}a_{21}b_{01}(a_{30} - b_{21})x^3 - a_{11}^2b_{21}(a_{30} - b_{21}))/a_{11}^2$ şi $\{B_1(x) \equiv 0, (3.2)\} \Rightarrow$

$$b_{01} = b_{21} = 0,\ a_{11}a_{21}a_{30} \neq 0 \tag{3.158}$$

$\Rightarrow B_2(x) = -a_{30}^2x^5(3a_{11} + 2a_{21}x) \not\equiv 0,\ \mu_2 = 2.$

În cazul sistemului (3.148): $B_1(x) = a_{30}x^3(a_{11}^4 + 2a_{11}^2a_{12}b_{11}x - a_{12}(3a_{11}^2a_{30} - a_{12}b_{11}^2 - 2a_{11}^2b_{21})x^2 - 2a_{12}^2b_{11}(a_{30} - b_{21})x^3 - a_{12}^2b_{21}(a_{30} - b_{21})x^4)/a_{12}^2 \equiv 0 \Rightarrow$

$$a_{11} = b_{11} = b_{21} = 0, \tag{3.159}$$

$\Rightarrow B_2(x) = -2a_{21}a_{30}^2x^6 \equiv 0 \Rightarrow a_{21} = 0 \Rightarrow B_3(x) = -3a_{12}a_{30}^2x^5 \not\equiv 0, \quad \mu_2 = 3$. Sistemul (3.148) ia forma

$$\dot{x} = x(a_{30}x^2 + a_{12}y^2), \quad \dot{y} = a_{12}y^3, \quad a_{30}a_{12} \neq 0. \tag{3.160}$$

Pentru sistemul (3.149) identitatea $B_1(x) = a_{30}x^3(a_{11}^2(a_{11} - b_{02})^2 + 2a_{11}a_{21}(a_{11} - b_{02})^2x + (a_{11}-b_{02})(a_{11}a_{21}^2+3a_{11}a_{12}a_{30}-a_{21}^2b_{02}-2a_{11}a_{12}b_{21})x^2+2a_{12}a_{21}(a_{11}-b_{02})(a_{30}-b_{21})x^3-a_{12}^2b_{21}(a_{30}-b_{21})x^4)/a_{12}^2 \equiv 0$ are loc, dacă se îndeplineşte una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$a_{11} = a_{21} = b_{21} = 0, \tag{3.161}$$

$$b_{02} = a_{11}, b_{21} = 0, a_{11} \neq 0. \tag{3.162}$$

Dacă are loc (3.161) ((3.162)), atunci polinomul $B_2(x) = -3a_{30}^2b_{02}x^5$ ($B_2(x) = -a_{30}^2x^5(3a_{11} + 2a_{21}x)$) nu este identic zero, prin urmare, $\mu_2 = 2$.

Pentru (3.150) avem: $B_1(x) = -x^4(a_{20} + a_{30}x)(a_{20}b_{11} - b_{11}^2 + 2a_{30}b_{11}x - 2b_{11}b_{21}x + a_{30}b_{21}x^2 - b_{21}^2x^2) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{11} = 0,\ b_{21} = 0 \tag{3.163}$$

$\Rightarrow B_2(x) = -a_{21}x^4(a_{20} + a_{30}x)(a_{20} + 2a_{30}x) \equiv 0 \Rightarrow a_{21} = 0 \Rightarrow B_3(x) = -a_{12}x^3(a_{20} + a_{30}x)(2a_{20} + 3a_{30}x) \not\equiv 0,\ \mu_2 = 3$. Sistemul cubic (3.150) arată astfel:

$$\dot{x} = x(a_{20}x + a_{30}x^2 + a_{12}y^2), \quad \dot{y} = a_{12}y^3, \quad a_{12}a_{20}a_{30} \neq 0. \tag{3.164}$$

Transformarea $X = y, Y = x$ reduce (3.160) şi (3.164) la un sistem de forma (3.157).

Lema 3.2.4. *Pentru sistemul cubic diferenţial* $\{(3.125), (3.2)\}$ *multiplicitatea algebrică a dreptelor* $x = 0$ *şi* $y = 0$ *este respectiv* $\mu_1 = 3$ *şi* $\mu_2 \geq 2$, *dacă şi numai dacă el are una dintre formele: 1)* $\{(3.135), (3.154)\}$, *2)* $\{(3.135), (3.155)\}$, *3)* $\{(3.141), (3.158)\}$, *4)* $\{(3.148), (3.159)\}$, *5)* $\{(3.149), (3.161)\}$, *6)* $\{(3.149), (3.162)\}$, *7)* $\{(3.150), (3.163)\}$.

Lema 3.2.5. *Orice sistem cubic din* $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ *pentru care fiecare dintre dreptele afine are multiplicitatea algebrică egală cu trei poate fi adus cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului la forma* (3.157).

3.2.2. Clasificarea sistemelor cubice ce posedă două drepte invariante afine reale concurente şi pentru care dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică maximală

În această secţiune pentru subclasa de sisteme cubice $\{(3.125), (3.2)\} \subset \mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ au fost stabilite consecutivităţile de multiplicităţi parţial maximale de tipul $m_\infty(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty)$.

Fixăm $\mu_1 \in \{1,2,3\}$, $\mu_2 \in \{1,2,3\}$, $\mu_1 \geq \mu_2$ şi determinăm multiplicitatea dreptei de la infinit astfel încât consecutivitatea $(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty)$ să fie maximală după a treia componentă. Sunt posibile următoarele şase cazuri:

1. $m(3,3;\mu_\infty)$, **2.** $m_\infty(3,2;\mu_\infty)$, **3.** $m_\infty(3,1;\mu_\infty)$, **4.** $m_\infty(2,2;\mu_\infty)$, **5.** $m_\infty(2,1;\mu_\infty)$, **6.** $m_\infty(1,1;\mu_\infty)$.

Considerăm sistemul cubic $\{(3.125), (3.2)\} \in \mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ şi sistemul omogenizat corespunzător

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_{10}Z^2 + a_{20}xZ + a_{11}yZ + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ \dot{y} = y(b_{01}Z^2 + b_{11}xZ + b_{02}yZ + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2). \end{cases} \tag{3.165}$$

Pentru (3.165) scriem $E_1(\mathbb{X})$ sub forma (3.20), adică

$$\begin{aligned} E_1(\mathbb{X}) = {} & C_0(x,y) + C_1(x,y)Z + C_2(x,y)Z^2 + C_3(x,y)Z^3 + C_4(x,y)Z^4 \\ & + C_5(x,y)Z^5 + C_6(x,y)Z^6 + C_7(x,y)Z^7 + C_8(x,y)Z^8, \end{aligned}$$

unde $C_j(x,y), j = \overline{0,8}$ sunt polinoame în x şi y.

Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit este $\mu_\infty \in \mathbb{N}^*$, dacă μ_∞ este cel mai mare număr astfel încât $Z^{(\mu_\infty - 1)}$ divide $E_1(\mathbb{X})$.

1. Cazul $m(3,3;\mu_\infty)$**.**

Cu scopul determinării multiplicităţii algebrice maximale a dreptei de la infinit pentru sistemul (3.157) (vezi lema 3.2.5), considerăm sistemul omogenizat

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = y(b_{02}yZ + a_{30}x^2 + b_{03}y^2), \quad a_{30}b_{03} \neq 0. \tag{3.166}$$

Pentru (3.166) avem $C_0(x,y) = a_{30}b_{03}x^3y^3(a_{30}x^2 + 3b_{03}y^2) \not\equiv 0$ şi, prin urmare, multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât unu. Astfel, în clasa $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ avem consecutivitatea maximală de multiplicităţi $m(3,3;1)$.

Lema 3.2.6. *Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem din clasa* $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ *ce realizează consecutivitatea maximală de multiplicităţi* $m(3,3;1)$ *poate fi scris sub forma*

$$\dot{x} = x^3, \quad \dot{y} = y(ay + x^2 + by^2),\ b \neq 0. \tag{3.167}$$

Sistemul (3.167) are factorul integrant de tip Darboux $\mu(x,y) = exp((ay - x^2)^2/(2bx^2y^2))/y^3$.

2. Cazul $m_\infty(3,2;\mu_\infty)$**.**

Conform lemei 3.2.4, sistemul cubic {(3.125), (3.2)} admite dreptele invariante $x = 0$ şi $y = 0$ de multiplicităţile trei şi respectiv doi, dacă el are una dintre următoarele şapte forme:

1) {(3.135), (3.154)}, 2) {(3.135), (3.155)}, 3) {(3.141), (3.158)}, 4) {(3.148), (3.159)}, 5) {(3.149), (3.161)}, 6) {(3.149), (3.162)}, 7) {(3.150), (3.163)}.

Cazul 1) {(3.135), (3.154)*}.* Ţinând cont de (3.154), sistemul (3.135) arată astfel

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = y^2(b_{02} + b_{12}x + b_{03}y),\ a_{30}(|b_{02}| + |b_{03}|) \neq 0. \tag{3.168}$$

Pentru sistemul omogenizat, asociat sistemului (3.168), avem $C_0(x,y) = -a_{30}x^3y^2(2b_{12}x + 3b_{03}y)(a_{30}x^2 - b_{12}xy - b_{03}y^2) \equiv 0 \Rightarrow b_{03} = b_{12} = 0 \Rightarrow C_1(x,y) = -3a_{30}^2b_{02}x^5y^2 \not\equiv 0$. Prin urmare, multiplicitatea dreptei de la infinit este egală cu doi. Sistemul (3.168) ia forma $\dot{x} = a_{30}x^3$, $\dot{y} = b_{02}y^2$, $b_{02}a_{30} \neq 0$, iar după rescalarea timpului îl putem scrie astfel

$$\dot{x} = ax^3, \quad \dot{y} = y^2,\ a \neq 0 \tag{3.169}$$

(vezi sistemul 2.1) din teorema 3.2.1).

Din cele expuse de mai sus, rezultă că în $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ are loc egalitatea $m_\infty(3,2;2) = m(3,2;2)$.

Menţionăm, că (3.169) este integrabil şi are integrala primă $F(x,y) = (y - 2ax^2)/(2ax^2y)$.

În *cazurile 2), 4), 5), 6), 7)* avem respectiv

$$\begin{aligned}&\dot{x} = a_{30}x^3, \quad \dot{y} = y(a_{30}x^2 + b_{02}y + b_{12}xy + b_{03}y^2),\ a_{30}(b_{02}^2 + b_{03}^2 + b_{12}^2) \neq 0,\\ &C_0(x,y) = a_{30}x^3y^2(b_{12}x + b_{03}y)(a_{30}x^2 + 2b_{12}xy + 3b_{03}y^2) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\dot{x} = x(a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \quad \dot{y} = y^2(a_{21}x + a_{12}y),\ a_{12}a_{30} \neq 0,\\ &C_0(x,y) = -a_{30}x^3y^2(2a_{21}a_{30}x^3 + a_{21}^2x^2y + 3a_{12}a_{30}x^2y + 2a_{12}a_{21}xy^2\\ &+a_{12}^2y^3) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\dot{x} = x(a_{30}x^2 + a_{12}y^2), \quad \dot{y} = y^2(a_{12}y + b_{02}),\ a_{12}a_{30} \neq 0,\\ &C_0(x,y) = -a_{12}a_{30}x^3y^3(3a_{30}x^2 + a_{12}y^2) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 1;\end{aligned}$$

$$\dot{x} = x(a_{30}x^2 + a_{11}y + a_{21}xy + a_{12}y^2), \quad \dot{y} = y^2(a_{11} + a_{21}x + a_{12}y),$$
$$a_{12}a_{30} \neq 0, \; C_0(x, y) = -a_{30}x^3y^2(2a_{21}a_{30}x^3 + a_{21}^2x^2y + 3a_{12}a_{30}x^2y$$
$$+2a_{12}a_{21}xy^2 + a_{12}^2y^3) \not\equiv 0, \; \mu_\infty = 1;$$

$$\dot{x} = x(a_{20}x + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \quad \dot{y} = y^2(a_{21}x + a_{12}y),$$
$$a_{12}a_{20}a_{30} \neq 0, \quad C_0(x, y) = -a_{30}x^3y^2(2a_{21}a_{30}x^3 + a_{21}^2x^2y+$$
$$3a_{12}a_{30}x^2y + 2a_{12}a_{21}xy^2 + a_{12}^2y^3) \not\equiv 0, \; \mu_\infty = 1.$$

Cazul 3) {(3.141), (3.158)}. În acest caz $C_0(x, y) = -a_{21}a_{30}x^5y^2(2a_{30}x + a_{21}y) \equiv 0 \Rightarrow a_{21} = 0 \Rightarrow C_1(x, y) = -3a_{11}a_{30}^2x^5y^2 \not\equiv 0, \quad \mu_\infty = 2$. Sistemul {(3.141), (3.158)} obţine forma $\dot{x} = x(a_{11}y + a_{30}x^2), \; \dot{y} = a_{11}y^2, \; a_{11}a_{30} \neq 0$, iar după rescalarea timpului poate fi scris astfel

$$\dot{x} = x(y + ax^2), \quad \dot{y} = y^2, \; a \neq 0 \tag{3.170}$$

(vezi sistemul 2.2) din teorema 3.2.1).

În $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ avem egalitatea $m_\infty(3, 2; 2) = m(3, 2; 2)$. Sistemul (3.170) este integrabil şi are integrala primă $F(x, y) = (2ax^2y + y^2)/x^2$.

Lema 3.2.7. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem din clasa $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ ce realizează consecutivitatea maximală de multiplicităţi $m(3, 2; 2)$ poate fi scris sub forma* (3.169) *sau* (3.170).

3. Cazul $m_\infty(3, 1; \mu_\infty)$.

Următoarele sisteme cubice: (3.135), (3.136), (3.138), (3.141), (3.142), (3.143), (3.148), (3.149), (3.150), (3.151), (3.152) posedă dreptele invariante $x = 0$ şi $y = 0$ de multiplicităţile $\mu_1 = 3$ şi respectiv $\mu_2 = 1$ (vezi lema 3.2.3).

Procedând similar cazului anterior şi ţinând cont de condiţia (3.2), vom examina separat fiecare dintre sistemele enunţate.

Sistemul (3.135). Pentru acest sistem avem $C_0(x, y) = -a_{30}x^3yC_{01}(x, y)C_{02}(x, y)$, unde $C_{01}(x, y) = a_{30}x^2 - b_{21}x^2 - b_{12}xy - b_{03}y^2$, $C_{02} = (b_{21}x^2 + 2b_{12}xy + 3b_{03}y^2)$. Dacă $C_{01}(x, y) \equiv 0$, atunci pentru (3.135) infinitul este degenerat. Fie $C_{01}(x, y) \not\equiv 0$, adică $|a_{30} - b_{21}| + |b_{12}| + |b_{03}| \neq 0$, iar $C_{02}(x, y) \equiv 0$. Atunci, $b_{03} = b_{12} = b_{21} = 0 \Rightarrow C_1(x, y) = -a_{30}^2x^5y(2b_{11}x + 3b_{02}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{02} = b_{11} = 0 \Rightarrow C_2(x, y) = -3a_{30}^2b_{01}x^5y \not\equiv 0, \quad \mu_\infty = 3$. Sistemul (3.135) ia forma

$$\dot{x} = a_{30}x^3, \qquad \dot{y} = b_{01}y, \quad a_{30}b_{01} \neq 0. \tag{3.171}$$

Sistemul (3.136). În acest caz: $\{(3.2), \; C_0(x, y) = -x^4y((a_{30}-b_{21})x+(a_{21}-b_{12})y)(a_{30}b_{21}x^2+ 2a_{30}b_{12}xy+a_{21}b_{12}y^2) \equiv 0\} \Rightarrow \{|a_{30}-b_{21}|+|a_{21}-b_{12}| \neq 0, \; b_{21} = b_{12} = 0\} \Rightarrow C_1(x, y) = -b_{11}x^4y(a_{30}x+$

$a_{21}y)(2a_{30}x+a_{21}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{11} = 0 \Rightarrow C_2(x,y) = -b_{01}x^3y(a_{30}x+a_{21}y)(3a_{30}x+2a_{21}y) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 3.$ Sistemul (3.136) capătă forma

$$\dot{x} = x^2(a_{30}x + a_{21}y),\ \ \dot{y} = b_{01}y,\ \ a_{30}b_{01} \neq 0. \qquad (3.172)$$

Menţionăm, că sistemul (3.171) este un caz particular al sistemului (3.172), iar, după rescalarea timpului, ultimul sistem poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = x^2(ax + by), \quad \dot{y} = y,\ \ a \neq 0 \qquad (3.173)$$

(vezi sistemul 3.1) din teorema 3.2.1). Sistemul (3.173) nu admite alte drepte invariante diferite de $x = 0$ şi $y = 0$, deoarece $E_1(\mathbb{X}) = -x^3y(-a + 3a^2x^2 + 5abxy + 2b^2y^2)$. Conica $f \equiv -a + 3a^2x^2 + 5abxy + 2b^2y^2 = 0$ este reductibilă în $\mathbb{C}[x,y]$, dacă şi numai dacă $b = 0$, adică $f = a(-1 + 3ax^2)$, dar $f = 0$ nu este invariantă pentru $\{(3.173),\ b = 0\}$.

Sistemul (3.173) are factorul integrant de tip Darboux $\mu(x,y) = 1/(x^3y^2\,exp((1 + bxy)^2/(2ax^2)))$ şi în $\mathbb{CSL}^{np}_{2(r)}$ are loc egalitatea $m_\infty(3,1;3) = m(3,1;3)$.

Remarca 3.2.1. *Pentru fiecare dintre sistemele omogenizate, asociate sistemelor cubice* (3.138), (3.141), (3.142), (3.143), *polinomul* $C_0(x,y)$ *are forma* $C_0(x,y) = (b_{21}-a_{30})x^5y(a_{30}b_{21}x^2+2a_{21}a_{30}xy+a_{21}^2y^2)$. *Identitatea* $C_0(x,y) \equiv 0$ *are loc, dacă se îndeplineşte una dintre următoarele două serii de condiţii:*

$$A)\ a_{21} = b_{21} = 0 \qquad \text{şi} \qquad B)\ a_{21} = a_{30} = 0.$$

Sistemul (3.138). În condiţiile A) (B)) avem $C_1(x,y) = -2a_{20}a_{30}^2x^6y \equiv 0$ ($C_1(x,y) = a_{20}b_{21}^2x^6y \equiv 0$) $\Rightarrow a_{20} = 0 \Rightarrow C_2(x,y) = -3a_{10}a_{30}^2x^5y \not\equiv 0$ ($C_2(x,y) = a_{10}b_{21}^2x^5y \not\equiv 0$), $\mu_\infty = 3$, şi sistemele

$$\dot{x} = x(a_{30}x^2 + a_{10}), \quad \dot{y} = a_{10}y,\ \ a_{10}a_{30} \neq 0; \qquad (3.174)$$

$$\dot{x} = a_{10}x, \quad \dot{y} = y(b_{21}x^2 + a_{10}),\ \ a_{10}b_{21} \neq 0. \qquad (3.175)$$

Sistemul (3.174) are patru drepte invariante afine: $l_1 = x$, $l_2 = y$, $l_{3,4} = x \pm \sqrt{-a_{10}/a_{30}}$, care, împreună cu dreapta de la infinit, formează o consecutivitate de multiplicităţi de forma $(3,1,1,1;3)$.

Sistemul (3.141). În condiţiile B) sistemul (3.141) este degenerat, adică $\deg(\gcd(P,\,Q)) > 0$ (vezi (3.2)). Fie $a_{30} \neq 0$. Atunci, A) $\Rightarrow C_1(x,y) = -3a_{11}a_{30}^2x^5y^2 \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 2$.

Sistemul (3.142). Dacă se realizează condiţiile A) (B)), atunci $C_1(x,y) = a_{20}b_{21}^2x^6y \not\equiv 0$ ($C_1(x,y) = -a_{30}^2x^5y(2a_{20}x + 3a_{11}y) \not\equiv 0$), $\mu_\infty = 2$.

Sistemul (3.143). Conform condiţiilor A) avem $C_1(x,y) = -a_{30}^2x^5y(2a_{20}x+3a_{11}y) \not\equiv 0$, deci $\mu_\infty = 2$. În cazul condiţiilor B): $C_1(x,y) = a_{20}b_{21}^2x^6y \equiv 0 \Rightarrow a_{20} = 0$, $C_2(x,y) = b_{21}x^3y(a_{10}b_{21}x^2+2a_{11}^2y^2) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$. Sistemul (3.143) ia forma

$$\dot{x} = x(a_{11}y + a_{10}), \quad \dot{y} = y(b_{21}x^2 + a_{11}y + a_{10}), \quad a_{10}a_{11}b_{21} \neq 0. \tag{3.176}$$

Uşor se arată, că pentru sistemele (3.148), (3.149), (3.150), (3.151), (3.152) multiplicitatea algebrică a dreptei de la infinit este egală cu unu.

Menţionăm, că sistemele (3.175) şi (3.176) pot fi combinate într-un singur sistem, care, prin intermediul unei transformări afine de cordonate şi rescalarea timpului, poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = x(ay + b), \quad \dot{y} = y(x^2 + ay + b), \; b \neq 0 \tag{3.177}$$

(vezi sistemul 3.2) din teorema 3.2.1). Pentru sistemul (3.177) doar dreptele $x = 0$ şi $y = 0$ sunt drepte invariante afine, întrucât $E_1(\mathbb{X}) = x^3y(3b^2+5aby+bx^2+2a^2y^2)$, iar curba algebrică $3b^2 + 5aby + bx^2 + 2a^2y^2 = 0$ n-are factori liniari invarianţi pentru (3.177). Mai mult ca atât, avem egalitatea $m_\infty(3,1;3) = m(3,1;3)$ şi (3.177) are factorul integrant de tip Darboux $\mu(x,y) = exp((x^2 - ay)^2/(2bx^2))/y^2$.

Lema 3.2.8. *Prin intermediul unei transformări afine şi rescalarea timpului orice sistem cubic care are două drepte invariante reale concurente de multiplicitatea maximală* $m(3,1;3)$*, poate fi scris sub forma* (3.173) *sau* (3.177).

4. Cazul $m_\infty(2,2;\mu_\infty)$.

În cazul $m_\infty(3,2;\mu_\infty)$, examinat mai sus, au fost obţinute formele canonice ale sistemelor cubice (vezi lema 3.2.7) ce realizează consecutivitatea maximală de multiplicităţi $m(3,2;2)$. Pentru fiecare dintre aceste sisteme dreapta invariantă afină $x = 0$ $(y = 0)$ are multiplicitatea algebrică trei (doi) şi dreapta de la infinit l_∞ are multiplicitatea doi. Transformarea Poincaré $z = 1/x$, $u = y/x$ aplică: dreapta $x = 0$ în dreapta de la infinit a planului fazic Ozu, dreapta de la infinit a planului fazic Oxy în dreapta $z = 0$, dreapta $y = 0$ în dreapta $u = 0$, păstrând multiplicităţile. Această transformare reduce sistemele (3.169) şi (3.170) respectiv la sistemele cubice

$$\dot{z} = -az, \quad \dot{u} = -u(a - zu); \tag{3.178}$$

$$\dot{z} = -z(a + zu), \quad \dot{u} = -au. \tag{3.179}$$

Punând în (3.178) ((3.179)) $z = x, u = y, t = -\tau/a, a = -1/b$ $(z = y, u = x, t = -\tau/a, a = 1/b,)$

obţinem sistemul

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y(1 + bxy), \quad b \neq 0, \tag{3.180}$$

care este integrabil şi are integrala primă $F(x,y) = x(2 + bxy)/(2y)$.

Lema 3.2.9. *Orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ *ce realizează consecutivitatea maximală de multiplicităţi* $m(2,2;3)$ *poate fi redus cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului la sistemul* (3.180).

5. Cazul $m_\infty(2,1;\mu_\infty)$.

Vom examina seriile de condiţii (3.127)-(3.132), conform cărora sistemul cubic (3.125) admite dreptele invariante $x = 0$ şi $y = 0$ de multiplicităţile $\mu_1 = 2$ şi $\mu_2 = 1$.

1) Condiţiile (3.127).

În aceste condiţii pentru sistemul cubic (3.125) avem $C_0(x,y) = -x^2yC_{01}(x,y)\cdot C_{02}(x,y)$, unde $C_{01}(x,y) = ((a_{30} - b_{21})x^2 + (a_{21} - b_{12})xy - b_{03}y^2)$, $C_{02}(x,y) = (a_{30}b_{21}x^3 + 2a_{30}b_{12}x^2y + (3a_{30}b_{03} + a_{21}b_{12})xy^2 + 2a_{21}b_{03}y^3)$.

Ţinând cont de (3.2), polinomul $C_{01}(x,y)$ nu poate fi identic egal cu zero. Vom cere ca $C_{02}(x,y)$ să fie identic zero. Cerinţa dată ne conduce la următoarele serii de condiţii

$$a_{30} = a_{21} = 0; \tag{3.181}$$

$$a_{30} = b_{12} = b_{03} = 0,\ a_{21} \neq 0; \tag{3.182}$$

$$b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0,\ a_{30} \neq 0. \tag{3.183}$$

Condiţiile $\{(3.181), (3.2)\}$ ne dau $C_1(x,y) = a_{20}x^2y(b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2)(b_{21}x^2 + 2b_{12}xy + 3b_{03}y^2) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 2$.

Pentru condiţiile $\{(3.182),\ (3.2)\}$ obţinem $C_1(x,y) = x^3y(a_{20}b_{21}^2x^3 + (a_{21}b_{02}b_{21} - a_{21}^2b_{11})xy^2 - 2a_{21}^2b_{02}y^3) \equiv 0 \Rightarrow b_{02} = b_{11} = b_{21} = 0 \Rightarrow C_2(x,y) = -2a_{21}^2b_{01}x^3y^3 \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 3$. Sistemul $\{(3.125), (3.2)\}$ capătă forma

$$\dot{x} = x^2(a_{20} + a_{21}y), \quad \dot{y} = b_{01}y, \quad a_{20}a_{21}b_{01} \neq 0. \tag{3.184}$$

În cazul condiţiilor $\{(3.183), (3.2)\}$ avem: $C_1(x,y) = -x^3y(a_{30}x + a_{21}y)\cdot(2a_{30}b_{11}x^2 + 3a_{30}b_{02}xy + a_{21}b_{11}xy + 2a_{21}b_{02}y^2) \equiv 0 \Rightarrow b_{11} = b_{02} = 0 \Rightarrow C_2(x,y) = -b_{01}x^3y(a_{30}x + a_{21}y)(3a_{30}x + 2a_{21}y) \neq 0,\ \mu_\infty = 3$. Obţinem următorul sistem cubic

$$\dot{x} = x^2(a_{30}x + a_{21}y + a_{20}), \quad \dot{y} = b_{01}y, \quad a_{30}a_{21}b_{01} \neq 0. \tag{3.185}$$

După rescalarea timpului $t = \tau/b_{01}$ sistemele (3.184) şi (3.185) pot fi combinate într-un singur sistem

$$\dot{x} = x^2(a + bx + cy), \quad \dot{y} = y, \;\; c(a^2 + b^2) \neq 0 \tag{3.186}$$

(vezi sistemul 5.1) din teorema 3.2.1).

2) Condiţiile (3.128).

Ţinând cont de (3.2), polinomul $C_0(x,y) = -x^4y((a_{30} - b_{21})x + (a_{21} - b_{12})y)(a_{30}b_{21}x^2 + 2a_{30}b_{12}xy + a_{21}b_{12}y^2)$ este identic egal cu zero, dacă se satisface una dintre următoarele trei serii de condiţii: $a_{30} = a_{21} = 0$, adică (3.181), şi

$$a_{30} = b_{12} = 0, a_{21} \neq 0; \tag{3.187}$$

$$b_{21} = b_{12} = 0, a_{30} \neq 0. \tag{3.188}$$

În conformitate cu condiţiile (3.181) avem: $\{(3.2);\ C_1(x,y) = a_{20}x^4y(b_{21}x + b_{12}y)(b_{21}x + 2b_{12}y) \equiv 0\} \Rightarrow \{(3.2);\ a_{20} = 0\} \Rightarrow C_2(x,y) = a_{10}x^3y(b_{21}x + b_{12}y)(b_{21}x + 2b_{12}y) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 3$. Sistemul cubic ia forma

$$\dot{x} = a_{10}x, \quad \dot{y} = y(a_{10} + b_{11}x + b_{21}x^2 + b_{12}xy), \quad a_{10}(b_{21}^2 + b_{12}^2) \neq 0. \tag{3.189}$$

Condiţiile (3.187) ne dau $C_1(x,y) = x^4y(a_{20}b_{21}^2x^2 - a_{21}^2b_{11}y^2)$. Pentru multiplicităţile μ_1, μ_2, μ_∞ avem $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$ şi $\mu_\infty \geq 3$, dacă $b_{11} = a_{20} = 0, b_{21} \neq 0$ sau $b_{11} = b_{21} = 0, a_{20} \neq 0$. Astfel, se vine la sistemele

$$\dot{x} = x(a_{10} + a_{21}xy), \quad \dot{y} = y(a_{10} + b_{21}x^2), \quad a_{10}b_{21}a_{21} \neq 0; \tag{3.190}$$

$$\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{21}xy), \quad \dot{y} = a_{10}y, \quad a_{10}a_{20}a_{21} \neq 0. \tag{3.191}$$

Pentru $\{(3.190), (3.2)\}$ ($\{(3.191), (3.2)\}$) polinomul $C_2(x,y) \equiv a_{10}x^3y(b_{21}x - a_{21}y)(b_{21}x + 2a_{21}y)$ ($C_2(x,y) \equiv -2a_{10}a_{21}^2x^3y^3$) nu este identic zero, prin urmare, $\mu_\infty = 3$.

Pentru condiţiile (3.188): $C_1(x,y) = -b_{11}x^4y(a_{30}x + a_{21}y)(2a_{30}x + a_{21}y) \equiv 0 \Rightarrow b_{11} = 0$; $\{b_{11} = 0, (3.2)\} \Rightarrow C_2(x,y) \equiv -a_{10}x^3y(a_{30}x + a_{21}y)(3a_{30}x + 2a_{21}y) \neq 0,\ \mu_\infty = 3 \Rightarrow$

$$\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{30}x^2 + a_{21}xy), \quad \dot{y} = a_{10}y, \quad a_{10}a_{21}a_{30} \neq 0. \tag{3.192}$$

Sistemul $\{(3.189),\ b_{11} = 0,\ b_{21}b_{12} \neq 0\}$ (respectiv, (3.190) şi $\{(3.192),\ a_{20} = 0,\ a_{30}a_{21} \neq 0\}$) are dreptele invariante afine $l_1 = x$, $l_2 = y$, $l_3 = b_{21}x + b_{12}y$ (respectiv, $l_3 = b_{21}x - a_{21}y$ şi $l_3 = a_{30}x + a_{21}y$) care realizează consecutivitatea de multiplicităţi $(2,1,1;3)$. Dacă pentru sistemul (3.189): $b_{11} = b_{21} = 0$ ($b_{11} = b_{12} = 0$), atunci $\mu_1 = 3 > 2$ ($\mu_2 = 2 > 1$). Fie $a_{10}b_{11}(b_{21}^2 + b_{12}^2) \neq 0$, atunci, după rescalarea timpului şi renotarea coeficienţilor, putem scrie sistemul (3.189) sub forma

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y(1 + ax + bx^2 + cxy), \quad a(b^2 + c^2) \neq 0 \tag{3.193}$$

(vezi sistemul 5.2) din teorema 3.2.1).

Sistemul (3.193) are factor integrant de tip Darboux $\mu(x, y) = exp((x(2a + bx))/2)/y^2$.

După rescalarea timpului şi renotarea coeficienţiilor sistemele (3.191) şi (3.192) pot fi combinate într-un singur sistem:

$$\dot{x} = x(1 + ax + bx^2 + cxy), \quad \dot{y} = y, \quad c(a^2 + b^2) \neq 0 \tag{3.194}$$

(vezi sistemul 5.3) din teorema 3.2.1).

3) Condiţiile (3.129).

Ţinând cont de (3.2), polinomul $C_0(x, y) = -x^4y((a_{30} - b_{21})x + (a_{21} - b_{12})y)(a_{30}b_{21}x^2 + 2a_{30}b_{12}xy + a_{21}b_{12}y^2)$ este identic zero, dacă se realizează una dintre condiţiile (3.181), (3.187), (3.188).

Dacă au loc condiţiile $\{(3.181), (3.2)\}$ ($\{(3.187), (3.2)\}$ şi $\{(3.188), (3.2)\}$) obţinem $C_1(x, y) = x^3y(b_{21}x + b_{12}y)(a_{20}b_{21}x^2 + 2a_{20}b_{12}xy + a_{11}b_{12}y^2) \not\equiv 0$ (respectiv, $C_1(x, y) = x^3y(a_{20}b_{21}^2x^3 - a_{21}^2b_{11}xy^2 + 2a_{11}a_{21}b_{21}xy^2 - 2a_{11}a_{21}^2y^3) \not\equiv 0$ şi $C_1(x, y) = -x^3y(a_{30}x + a_{21}y)\cdot(2a_{30}b_{11}x^2 + 3a_{11}a_{30}xy + a_{21}b_{11}xy + 2a_{11}a_{21}y^2) \not\equiv 0$), $\mu_\infty = 2$.

4) Condiţiile (3.130).

În acest caz avem $C_0(x, y) = -x^4y((a_{30} - b_{21})x + (a_{21} - b_{12})y)(a_{30}b_{21}x^2 + 2a_{30}b_{12}xy + a_{21}b_{12}y^2)$. Polinomul $C_0(x, y)$ este identic zero, dacă se realizează cel puţin una dintre condiţiile (3.181), (3.187), (3.188).

Ccondiţiile (3.181) ne dau $\{(3.2),\ C_1(x, y) = x^3y(b_{21}x + b_{12}y)(a_{20}b_{21}x^2 + 2a_{20}b_{12}xy + a_{11}b_{12}y^2) \equiv 0\} \Rightarrow \{(3.2),\ a_{20} = b_{12} = 0\} \Rightarrow C_2(x, y) = b_{21}x^3y(a_{10}b_{21}x^2 + 2a_{11}^2y^2) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 3$. Sistemul cubic arată astfel

$$\dot{x} = x(a_{11}y + a_{10}), \quad \dot{y} = y(b_{21}x^2 + b_{11}x + a_{11}y + a_{10}), \quad a_{10}a_{11}b_{21} \neq 0. \tag{3.195}$$

Dacă $b_{11} = 0$, atunci dreapta invariantă $x = 0$ a sistemului (3.195) are multiplicitatea $\mu_1 = 3$. Fie $b_{11} \neq 0$. Sistemul (3.195) după rescalarea timpului şi renotarea coeficienţiilor, poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = x(1 + ay), \quad \dot{y} = y(1 + bx + ay + cx^2), \quad abc \neq 0 \tag{3.196}$$

(vezzi sistemul 5.4) din teorema 3.2.1).

În cazurile (3.187) şi (3.188) avem $C_1(x,y) \equiv x^3y(a_{20}b_{21}^2x^3 - a_{21}^2b_{11}xy^2 + 2a_{11}a_{21}b_{21}xy^2 - 2a_{11}a_{21}^2y^3) \not\equiv 0$ şi respectiv $C_1(x,y) = -x^3y(a_{30}x + a_{21}y)\cdot(2a_{30}b_{11}x^2 + (3a_{11}a_{30} + a_{21}b_{11})xy + 2a_{11}a_{21}y^2) \not\equiv 0$, astfel μ_∞ nu poate fi mai mare decât doi.

5) Condiţiile (3.131) *şi condiţiile* (3.132). Ţinând cont de (3.2), în fiecare dintre aceste condiţii avem $C_0(x,y) = -x^2y((a_{30} - b_{21})x + (a_{21} - b_{12})y)(a_{30}b_{21}x^4 + 2a_{30}b_{12}x^3y + (3a_{12}a_{30} + a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21})x^2y^2 + 2a_{12}a_{21}xy^3 + a_{12}^2y^4) \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 1.$

Lema 3.2.10. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ *ce realizează consecutivitatea parţial maximală de multiplicităţi* $m_\infty(2,1;3)$ *poate fi scris sub forma unuia dintre următoarele patru sisteme* (3.186), (3.189), (3.194) *şi* (3.196).

6. Cazul $m_\infty(1,1;\mu_\infty)$.

Considerăm sistemul omogenizat, corespunzător sistemului (3.125),

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_{10}Z^2 + a_{20}xZ + a_{11}yZ + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ \dot{y} = y(b_{01}Z^2 + b_{11}xZ + b_{02}yZ + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2). \end{cases} \tag{3.197}$$

Pentru (3.197) avem $C_0(x,y) = -xyC_{01}(x,y)C_{02}(x,y)$, unde $C_{01}(x,y) = (a_{30} - b_{21})x^2 + (a_{21} - b_{12})xy + (a_{12} - b_{03})y^2$ şi $C_{02}(x,y) = (a_{30}b_{21}x^4 + 2a_{30}b_{12}x^3y + (3a_{30}b_{03} + a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21})x^2y^2 + 2a_{21}b_{03}xy^3 + a_{12}b_{03}y^4)$. Dacă $C_{01} \equiv 0$, atunci sistemul (3.125) are infinitul degenerat. Fie $C_{01} \not\equiv 0$. Identitatea $C_{02}(x,y) \equiv 0$ are loc, dacă se îndeplineşte cel puţin una dintre următoarele patru serii de condiţii

$$a_{30} = a_{21} = a_{12} = 0; \tag{3.198}$$

$$a_{30} = a_{21} = b_{21} = b_{03} = 0,\ a_{12} \neq 0; \tag{3.199}$$

$$a_{30} = b_{03} = 0, b_{12} = a_{12}b_{21}/a_{21}; \tag{3.200}$$

$$b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0, a_{30} \neq 0. \tag{3.201}$$

1) Condiţiile $\{(3.198), (3.2)\}$: $C_1(x,y) = -xyC_{01}(x,y)(a_{20}b_{21}x^3 + 2a_{20}b_{12}x^2y + 3a_{20}b_{03}xy^2 + a_{11}b_{12}xy^2 + 2a_{11}b_{03}y^3) \equiv 0 \Rightarrow$

$$a_{20} = a_{11} = 0 \tag{3.202}$$

sau

$$a_{20} = b_{12} = b_{03} = 0, a_{11} \neq 0. \tag{3.203}$$

În condiţiile $\{(3.202), (3.2)\}$ avem sistemul

$$\begin{gathered} \dot{x} = a_{10}x, \quad \dot{y} = y(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2), \\ a_{10}(b_{21}^2 + b_{12}^2 + b_{03}^2)(b_{01}^2 + b_{02}^2 + b_{03}^2) \neq 0, \end{gathered} \tag{3.204}$$

pentru care $C_2(x,y) = -a_{10}xyC_{01}(x,y)(b_{21}x^2 + 2b_{12}xy + 3b_{03}y^2) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$, iar în condiţiile $\{(3.203), (3.2)\}$ sistemul cubic arată astfel

$$\dot{x} = x(a_{10} + a_{11}y), \quad \dot{y} = y(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2), \; a_{10}a_{11}b_{21}(b_{01}^2 + b_{02}^2) \neq 0. \qquad (3.205)$$

Pentru (3.205) avem $C_2(x,y) = b_{21}x^3y(a_{10}b_{21}x^2 + a_{11}^2y^2 + a_{11}b_{02}y^2) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$. După rescalarea timpului şi renotarea coeficienţilor sistemul (3.204) poate fi redus la sistemul

$$\dot{x} = x, \; \dot{y} = y(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2), \; (a^2 + c^2 + f^2)(d^2 + e^2 + f^2) \neq 0 \qquad (3.206)$$

(vezi sistemul 6.1) din teorema 3.2.1). În 6.1) condiţia $(a^2 + b^2 + d^2)((a-1)^2 + (c^2d - bce + b^2f)^2) \neq 0$ ne asigură că sistemul (3.206) are doar dreptele invariante afine $x = 0$ şi $y = 0$, iar condiţia $((a-1)^2 + c^2 + f^2)((a-1)^2 + b^2 + d^2) \neq 0$ înseamnă că fiecare dintre aceste drepte are multiplicitatea algebrică egală cu unu.

2) Condiţiile $\{(3.199), (3.2)\}$. Polinomul $C_1(x,y) = xy^3(2a_{20}b_{12}^2x^3 - b_{12}(a_{12}a_{20} + a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12})x^2y - a_{12}^2b_{02}y^3)$ este identic zero, dacă se realizează una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$b_{02} = b_{12} = 0; \qquad (3.207)$$

$$a_{20} = b_{02} = 0, b_{11} = a_{11}b_{12}/a_{12}, \; b_{12} \neq 0. \qquad (3.208)$$

Condiţiile $\{(3.207), (3.2)\}$ şi $\{(3.208), (3.2)\}$ ne conduc, respectiv, la sistemele

$$\dot{x} = x(a_{12}y^2 + a_{20}x + a_{11}y + a_{10}), \quad \dot{y} = y(b_{11}x + b_{01}), \; a_{12}b_{01}(a_{10}^2 + a_{20}^2) \neq 0, \qquad (3.209)$$

$C_2(x,y) = -a_{12}xy^3(b_{11}(a_{20} + b_{11})x^2 + a_{12}b_{01}y^2) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$;

$$\dot{x} = x(a_{12}y^2 + a_{11}y + a_{10}), \; \dot{y} = y(a_{12}b_{12}xy + a_{11}b_{12}x + a_{12}b_{01})/a_{12}, a_{10}b_{12}b_{01} \neq 0, \qquad (3.210)$$

$C_2(x,y) = -xy^3(-2a_{10}b_{12}^2x^2 + a_{12}b_{01}b_{12}xy + a_{12}^2b_{01}y^2) \not\equiv 0$, $\mu_\infty = 3$.

Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului sistemul (3.209) poate fi redus la sistemul

$$\dot{x} = x(a + by), \; \dot{y} = y(c + dx + ey + x^2), \; a(c^2 + e^2) \neq 0 \qquad (3.211)$$

(vezi sistemul 6.2) din teorema 3.2.1). În 6.2) inegalitatea $(a-c)^2 + (b-e)^2 \neq 0$ asigură egalitatea $\mu_1 = 1$.

Menţionăm, că făcând abstracţie de rescalarea timpului, sistemul (3.205) este un caz particular al sistemului (3.211).

3) Condiţiile $\{(3.200), (3.2)\}$. În acest caz polinomul $C_1(x,y) = -xy(a_{21}x + a_{12}y) \cdot (-a_{20}a_{21}b_{21}^2x^4 - 2a_{12}a_{20}b_{21}^2x^3y + (a_{21}^3b_{11} + a_{12}a_{20}a_{21}b_{21} - a_{11}a_{21}^2b_{21} - a_{21}^2b_{02}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{21} - a_{11}a_{12}b_{21}^2)x^2y^2 + 2a_{21}^3b_{02}xy^3 + a_{12}a_{21}^2b_{02}y^4)/a_{21}^2$ este identic zero, dacă se realizează una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$b_{11} = b_{02} = b_{21} = 0, a_{20} \neq 0; \tag{3.212}$$

$$a_{20} = b_{02} = 0, a_{12} = -a_{21}^2/b_{21}; \tag{3.213}$$

$$a_{20} = b_{02} = 0, b_{11} = a_{11}b_{21}/a_{21}. \tag{3.214}$$

Condiţiile (3.212), (3.213), (3.214) ne dau, respectiv, sistemele:

$$\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{21}xy + a_{12}y^2),\ \dot{y} = b_{01}y,\ b_{01}(a_{10}^2 + a_{20}^2)(a_{21}^2 + a_{12}^2) \neq 0 \tag{3.215}$$

cu $C_2(x,y) \equiv -b_{01}xy^3(a_{21}x + a_{12}y)(2a_{21}x + a_{12}y) \neq 0$;

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{10}b_{21} + a_{11}b_{21}y + a_{21}b_{21}xy - a_{21}^2y^2)/b_{21}, \\ &\dot{y} = y(b_{01} + b_{11}x + b_{21}x^2 - a_{21}xy),\ a_{10}b_{01} \neq 0 \end{aligned} \tag{3.216}$$

cu $C_2(x,y) \equiv xy(a_{10}b_{21}^4x^4 - 2a_{10}a_{21}b_{21}^3x^3y + a_{21}^2b_{11}^2b_{21}x^2y^2 + a_{10}a_{21}^2b_{21}^2x^2y^2 - a_{21}^2b_{01}b_{21}^2x^2y^2 - 2a_{11}a_{21}b_{11}b_{21}^2x^2y^2 + a_{11}^2b_{21}^3x^2y^2 + 2a_{21}^3b_{01}b_{21}xy^3 - a_{21}^4b_{01}y^4)/b_{21}^2 \neq 0$;

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(a_{10} + a_{11}y + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ &\dot{y} = y(a_{21}b_{01} + a_{11}b_{21}x + a_{21}b_{21}x^2 + a_{12}b_{21}xy)/a_{21} \end{aligned} \tag{3.217}$$

cu $C_2(x,y) \equiv -xy(a_{21}x + a_{12}y)(-a_{10}a_{21}b_{21}^2x^3 - a_{10}a_{21}^2b_{21}x^2y - 2a_{10}a_{12}b_{21}^2x^2y + 2a_{21}^3b_{01}xy^2 + a_{12}a_{21}b_{01}b_{21}xy^2 + a_{12}a_{21}^2b_{01}y^3)/a_{21}^2 \neq 0$. Astfel, în cazul condiţiilor $\{(3.200), (3.2)\}$ multiplicitatea μ_∞ este egală cu trei.

Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului sistemul (3.215) poate fi redus la sistemul (3.204). Dacă $a_{21} = 0$, atunci sistemul (3.216) printr-o rescalare a timpului reprezintă un caz particular al sistemului (3.211). Fie $a_{21} \neq 0$. Atunci, după rescalarea timpului $t \to -b_{21}t/a_{21}^2$, sistemul (3.216) capătă forma

$$\dot{x} = x(a + by + cxy + y^2),\ \dot{y} = -y(d + ex + c^2x^2 + cxy),\ ad \neq 0, \tag{3.218}$$

unde $a = -a_{10}b_{21}/a_{21}^2, b = -a_{11}b_{21}/a_{21}^2, c = -b_{21}/a_{21}, d = b_{01}b_{21}/a_{21}^2); e = b_{11}b_{21}/a_{21}^2)$ (vezi sistemul 6.3) din teorema 3.2.1). În 6.3) condiţia $c^2 + e^2 + (a+d)^2 \neq 0$ (respectiv, $(a+d)^2 + (bc-e)^2 \neq 0$) înseamnă că $\mu_2 = 1$ (respectiv, doar $x = 0$ şi $y = 0$ sunt drepte invariante afine pentru 6.3)).

Sistemul (3.218) este integrabil şi are integrala primă $F(x,y) = x^d y^a exp((cx+y)^2/2+ex+by)$.

Dacă $b_{21} = 0$, atunci cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului se poate arăta că (3.217) este un caz particular al sistemului (3.206). Fie $b_{21} \neq 0$. Rescalarea timpului $t \to b_{21}t/(a_{21}b_{01})$ reduce (3.217) la următorul sistem

$$\dot{x} = x(a + by + cxy + dy^2),\ \dot{y} = \alpha y(1 + bx + cx^2 + dxy),\ \ \alpha a(c^2 + d^2) \neq 0, \tag{3.219}$$

unde $a = a_{10}b_{21}/(a_{21}b_{01})$, $b = a_{11}b_{21}/(a_{21}b_{01})$, $c = b_{21}/b_{01}$, $d = a_{12}b_{21}/(a_{21}b_{01})$, $\alpha = b_{21}/a_{21}$ (vezi sistemul 6.4) din teorema 3.2.1). Dacă se respectă inegalitatea $\alpha - a \neq 0$, atunci sistemul 6.4) are doar dreptele invariante $x = 0$ şi $y = 0$.

4) Condiţiile $\{(3.201), (3.2)\}$:

$C_1(x,y) = -xy(a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2)(2a_{30}b_{11}x^3 + (3a_{30}b_{02} + a_{21}b_{11})x^2y + 2a_{21}b_{02}xy^2 + a_{12}b_{02}y^3) \equiv 0 \Rightarrow b_{11} = b_{02} = 0 \Rightarrow C_2(x,y) = -b_{01}xy(a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2)(3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2) \not\equiv 0 \Rightarrow \mu_\infty = 3$. Sistemul cubic are forma:

$$\begin{gathered}\dot{x} = x(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2),\ \dot{y} = b_{01}y,\\ a_{30}b_{01}(a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2) \neq 0.\end{gathered} \tag{3.220}$$

Prin intermediul unei transformări afine se poate arăta că sistemul (3.220) este un caz particular al sistemului (3.204).

Lema 3.2.11. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}_{2(r)}^{np}$ *ce realizează consecutivitatea parţial maximală de multiplicităţi* $m_\infty(1,1;3)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele patru forme:* (3.206), (3.211), (3.218) *şi* (3.219).

Lemele 3.2.6–3.2.11 demonstrează teorema 3.2.1.

3.2.3. Multiplicitatea geometrică.

În această subsecţiune, supunând sistemele de formă canonică din teorema 3.2.1 unor mici perturbări, se arată că multiplicitatea algebrică a dreptelor invariante $x = 0$, $y = 0$ şi $Z = 0$ coincide cu multiplicitatea lor geometrică.

1) $m(3,3;1)$: $\quad \dot{x} = x^3, \quad \dot{y} = y(x^2 + ay + by^2),\ b \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(x - a\epsilon + 2bx\epsilon^2)(x + a\epsilon + 2bx\epsilon^2), \quad \dot{y} = y(x^2 + ay + by^2 + a^2\epsilon^2 + 3bx^2\epsilon^2 + 4aby\epsilon^2 + 4b^2y^2\epsilon^2 + a^2b\epsilon^4 + 4ab^2y\epsilon^4 + 4b^3y^2\epsilon^4 - 4b^3x^2\epsilon^6),\ b \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ l_2 = y,\ l_3 = x - a\epsilon + 2bx\epsilon^2,\ l_4 = x + a\epsilon + 2bx\epsilon^2,\quad l_5 = y - x\epsilon + a\epsilon^2 + 2by\epsilon^2 - 2bx\epsilon^3,\ l_6 = y + x\epsilon + a\epsilon^2 + 2by\epsilon^2 + 2bx\epsilon^3.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3, l_4 \to l_1$, iar $l_2, l_5, l_6 \to l_2$.

2.1) $m(3,2;2)$: $\quad \dot{x} = ax^3, \quad \dot{y} = y^2, a \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat: $\dot{x} = ax(x-\epsilon)(x+\epsilon), \quad \dot{y} = y(y-\epsilon)(\epsilon y + 1), a \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ l_2 = y,\ l_3 = x - \epsilon,\ l_4 = x + \epsilon,\ l_5 = y - \epsilon,\ l_6 = \epsilon y + 1.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3, l_4 \to l_1$; $l_2, l_5 \to l_2$, iar $l_6 \to l_\infty$.

2.2) $m(3,2;2)$: $\quad \dot{x} = x(ax^2 + y), \quad \dot{y} = y^2,\ a \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat: $\dot{x} = x(ax^2 + y + \epsilon - a\epsilon^4), \quad \dot{y} = y(y+\epsilon)(1 + ay\epsilon^2 - a\epsilon^3), a \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ l_2 = y,\ l_3 = x - y\epsilon,\ l_4 = x + y\epsilon,\ l_5 = y - \epsilon,\ l_6 = ay\epsilon^2 - a\epsilon^3 + 1.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3, l_4 \to l_1$; $l_2, l_5 \to l_2$, iar $l_6 \to l_\infty$.

3.1) $m(3,1;3)$: $\quad \dot{x} = x^2(ax + by), \quad \dot{y} = y,\ a \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(ax^2 + bxy - a\epsilon^2 + 4a^2x^2\epsilon^2 + 4abxy\epsilon^2 + 2b^2y^2\epsilon^2 - 4a^2\epsilon^4 + 4a^3x^2\epsilon^4 + 4a^2bxy\epsilon^4 + ab^2y^2\epsilon^4 - 4a^3\epsilon^6),\ \dot{y} = y(-1 + by\epsilon - 2a\epsilon^2)(1 + by\epsilon + 2a\epsilon^2),\ a \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ l_2 = y,\ l_3 = x - \epsilon + 2ax\epsilon^2 + by\epsilon^2 - 2a\epsilon^3,\ l_4 = x + \epsilon + 2ax\epsilon^2 + by\epsilon^2 + 2a\epsilon^3,\ l_5 = by\epsilon - 2a\epsilon^2 - 1,\ l_6 = by\epsilon + 2a\epsilon^2 + 1.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3, l_4 \to l_1$, iar $l_5, l_6 \to l_\infty$.

3.2) $m(3,1;3)$: $\quad \dot{x} = x(ay + b), \quad \dot{y} = y(x^2 + ay + b),\ b \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = -x(-b - ay - 4b^2\epsilon^2 + bx^2\epsilon^2 - 4aby\epsilon^2 - 2a^2y^2\epsilon^2 - 4b^3\epsilon^4 + 4b^2x^2\epsilon^4 - 4ab^2y\epsilon^4 - a^2by^2\epsilon^4 + 4b^3x^2\epsilon^6), \quad \dot{y} = y(b + x^2 + ay + 4b^2\epsilon^2 + 3bx^2\epsilon^2 + 4aby\epsilon^2 + a^2y^2\epsilon^2 + 4b^3\epsilon^4 + 4ab^2y\epsilon^4 + a^2by^2\epsilon^4 - 4b^3x^2\epsilon^6), \quad b \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ l_2 = y,\ l_3 = x - ay\epsilon + 2bx\epsilon^2,\ l_4 = x + ay\epsilon + 2bx\epsilon^2,\ l_5 = x\epsilon - 2b\epsilon^2 - ay\epsilon^2 + 2bx\epsilon^3 - 1,\ l_6 = x\epsilon + 2b\epsilon^2 + ay\epsilon^2 + 2bx\epsilon^3 + 1.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3, l_4 \to l_1$, iar $l_5, l_6 \to l_\infty$.

4) $m(2,2;3)$: $\quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = y(1 + bxy),\ b \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat: $\dot{x} = -x(x\epsilon - 1)(x\epsilon + 1), \quad \dot{y} = y(1 + bxy + by^2\epsilon - y^2\epsilon^4),\ b \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ l_2 = y,\ l_3 = x + \epsilon y,\ l_4 = by + x\epsilon^2 - y\epsilon^3,\ l_5 = x\epsilon + 1,\ l_6 = x\epsilon - 1.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3 \to l_1$; $l_2, l_4 \to l_2$, iar $l_5, l_6 \to l_\infty$.

5.1) $m_\infty(2,1;3)$: $\dot{x} = x^2(a + bx + cy), \quad \dot{y} = y, \quad c(a^2 + b^2) \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat: $\dot{x} = x(a+bx+cy)(x+\epsilon), \quad \dot{y} = -y(-1+\epsilon y)(1+\epsilon y), \quad c(a^2+b^2) \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ l_2 = y,\ l_3 = x + \epsilon,\ l_4 = \epsilon y - 1,\ l_5 = \epsilon y + 1.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3 \to l_1$, iar $l_4, l_5 \to l_\infty$.

5.2) $m_\infty(2,1;3)$: $\quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = y(1 + ax + bx^2 + cxy), \quad a(b^2 + c^2) \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = -x(-1 + x\epsilon)(1 + x\epsilon), \quad \dot{y} = y(1 + ax + bx^2 + cxy + ay\epsilon + bxy\epsilon + cy^2\epsilon - x^2\epsilon^2), \quad a(b^2 + c^2) \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ \ l_2 = y,\ \ l_3 = x + \epsilon y,\ l_4 = \epsilon x + 1,\ l_5 = \epsilon x - 1.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3 \to l_1$, iar $l_4, l_5 \to l_\infty$.

5.3) $m_\infty(2,1;3)$: $\quad \dot{x} = x(1 + ax + bx^2 + cxy), \quad \dot{y} = y, \quad c(a^2 + b^2) \neq 0;$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(1 + ax + bx^2 + cxy + ay\epsilon + bxy\epsilon + cy^2\epsilon - y^2\epsilon^2), \quad \dot{y} = -y(-1 + y\epsilon)(1 + y\epsilon),\ c(a^2 + b^2) \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ \ l_2 = y,\ \ l_3 = x + \epsilon y,\ \ l_4 = \epsilon y + 1,\ \ l_5 = \epsilon y - 1.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3 \to l_1$, iar $l_4, l_5 \to l_\infty$.

5.4) $m_\infty(2,1;3)$: $\quad \dot{x} = x(1 + ay), \quad \dot{y} = y(1 + bx + ay + cx^2), \quad abc \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = x(1 + x\epsilon)(1 + ay - x\epsilon), \quad \dot{y} = y(c^2 + bc^2x + c^3x^2 + ac^2y + 2bc\epsilon + 2b^2cx\epsilon + 2bc^2x^2\epsilon + abcy\epsilon - 2ac^2xy\epsilon + b^2\epsilon^2 + 4c\epsilon^2 + b^3x\epsilon^2 + 4bcx\epsilon^2 + b^2cx^2\epsilon^2 + 3c^2x^2\epsilon^2 + 4acy\epsilon^2 - abcxy\epsilon^2 + 2a^2cy^2\epsilon^2 + 4b\epsilon^3 + 4b^2x\epsilon^3 + 2bcx^2\epsilon^3 + 2aby\epsilon^3 + ab^2xy\epsilon^3 - 2acxy\epsilon^3 + 4\epsilon^4 + 4bx\epsilon^4 - b^2x^2\epsilon^4 + 4ay\epsilon^4 + 4abxy\epsilon^4 - 4bx^2\epsilon^5 + 4axy\epsilon^5 - 4x^2\epsilon^6)/(c + b\epsilon + 2\epsilon^2)^2, \quad c \neq 0.$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ \ l_2 = y,\ \ l_3 = -cx - bx\epsilon + ay\epsilon - 2x\epsilon^2,\ l_4 = x\epsilon + 1,\ l_5 = c + b\epsilon - cx\epsilon + 2\epsilon^2 - bx\epsilon^2 + 2ay\epsilon^2 - 2x\epsilon^3.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_1, l_3 \to l_1$, iar $l_4, l_5 \to l_\infty$.

6.1) $m_\infty(1,1;3)$: $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2),\ (a^2 + c^2 + f^2)(d^2 + e^2 + f^2)(a^2 + b^2 + d^2)((a-1)^2 + c^2 + f^2)((a-1)^2 + b^2 + d^2)((a-1)^2 + (c^2d - bce + b^2f)^2) \neq 0;$

Sistemul cubic perturbat: $\dot{x} = x(\epsilon x + 1)(\epsilon x - 1), \quad \dot{y} = y(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2).$

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ \ l_2 = y,\ \ l_3 = \epsilon x + 1,\ \ l_4 = \epsilon x - 1.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_3, l_4 \to l_\infty$.

6.2) $m_\infty(1,1;3)$: $\dot{x} = x(a + by), \quad \dot{y} = y(c + dx + ey + x^2), \quad a(c^2 + e^2)((a-c)^2 + (b-e)^2) \neq 0.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x} = -x(1 + x\epsilon)(-a - by + x\epsilon), \quad \dot{y} = y(a^5c + a^5dx + a^5x^2 + a^5ey + 2a^4cd\epsilon - a^5x\epsilon + a^6x\epsilon +$

$2a^4d^2x\epsilon+2a^4dx^2\epsilon+2a^4dey\epsilon-a^4bxy\epsilon-a^4exy\epsilon+2a^5c\epsilon^2+2a^3c^2\epsilon^2+a^3cd^2\epsilon^2-2a^4dx\epsilon^2+4a^5dx\epsilon^2+2a^3cdx\epsilon^2+a^3d^3x\epsilon^2+a^5x^2\epsilon^2+2a^3cx^2\epsilon^2+a^3d^2x^2\epsilon^2+2a^5ey\epsilon^2+2a^3cey\epsilon^2+a^3d^2ey\epsilon^2-a^3bdxy\epsilon^2+a^4bdxy\epsilon^2-2a^3dexy\epsilon^2+a^3bey^2\epsilon^2+a^4bey^2\epsilon^2+2a^4cd\epsilon^3+2a^2c^2d\epsilon^3-2a^5x\epsilon^3+2a^6x\epsilon^3-2a^3cx\epsilon^3+2a^4cx\epsilon^3-a^3d^2x\epsilon^3+3a^4d^2x\epsilon^3+2a^2cd^2x\epsilon^3+2a^2cdx^2\epsilon^3+2a^4dey\epsilon^3+2a^2cdey\epsilon^3-a^4bxy\epsilon^3+a^5bxy\epsilon^3+2a^3bcxy\epsilon^3+a^3bd^2xy\epsilon^3-2a^4exy\epsilon^3-2a^2cexy\epsilon^3-a^2d^2exy\epsilon^3+a^2bdey^2\epsilon^3+a^3bdey^2\epsilon^3+a^5c\epsilon^4+2a^3c^2\epsilon^4+ac^3\epsilon^4-2a^4dx\epsilon^4+3a^5dx\epsilon^4-2a^2cdx\epsilon^4+4a^3cdx\epsilon^4+ac^2dx\epsilon^4-a^5x^2\epsilon^4+ac^2x^2\epsilon^4-a^3d^2x^2\epsilon^4+a^5ey\epsilon^4+2a^3cey\epsilon^4+ac^2ey\epsilon^4+2a^4bdxy\epsilon^4+abcdxy\epsilon^4+3a^2bcdxy\epsilon^4-2a^3dexy\epsilon^4-2acdexy\epsilon^4-ab^2cy^2\epsilon^4-2a^2b^2cy^2\epsilon^4-a^3b^2cy^2\epsilon^4+a^3bey^2\epsilon^4+a^4bey^2\epsilon^4+abcey^2\epsilon^4+a^2bcey^2\epsilon^4-a^5x\epsilon^5+a^6x\epsilon^5-2a^3cx\epsilon^5+2a^4cx\epsilon^5-ac^2x\epsilon^5+a^2c^2x\epsilon^5-2a^4dx^2\epsilon^5-2a^2cdx^2\epsilon^5+a^5bxy\epsilon^5+a^2bcxy\epsilon^5+3a^3bcxy\epsilon^5+bc^2xy\epsilon^5+2abc^2xy\epsilon^5-a^4exy\epsilon^5-2a^2cexy\epsilon^5-c^2exy\epsilon^5-a^5x^2\epsilon^6-2a^3cx^2\epsilon^6-ac^2x^2\epsilon^6)/(a(a^2+ad\epsilon+a^2\epsilon^2+c\epsilon^2)^2).$

Dreptele invariante: $l_1=x,\ l_2=y,\ l_3=x\epsilon+1,\ l_4=a^3+a^2d\epsilon-a^2x\epsilon+a^3\epsilon^2+ac\epsilon^2-adx\epsilon^2+aby\epsilon^2+a^2by\epsilon^2-a^2x\epsilon^3-cx\epsilon^3.$

Dacă $\epsilon\to 0$, atunci $l_3,l_4\to l_\infty$.

6.3) $m_\infty(1,1;3)$: $\dot{x}=x(a+by+cxy+y^2),\ \dot{y}=-y(d+ex+c^2x^2+cxy),\ ad(c^2+e^2+(a+d)^2)((a+d)^2+(bc-e)^2)\neq 0.$

Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x}=x(a+by+cxy+y^2-bcxy\epsilon+exy\epsilon-a^2\epsilon^2-ab^2\epsilon^2+2abcx\epsilon^2-2aex\epsilon^2-ac^2x^2\epsilon^2-aby\epsilon^2-b^3y\epsilon^2-acxy\epsilon^2-2bexy\epsilon^2-ay^2\epsilon^2-b^2y^2\epsilon^2-a^2b\epsilon^3-2a^2cx\epsilon^3+2abex\epsilon^3+2abc^2x^2\epsilon^3-2acex^2\epsilon^3-ab^2y\epsilon^3-2aexy\epsilon^3+b^2exy\epsilon^3-aby^2\epsilon^3-2a^2bcx\epsilon^4+2a^2ex\epsilon^4-a^2c^2x^2\epsilon^4+ab^2c^2x^2\epsilon^4+2abcex^2\epsilon^4+2abexy\epsilon^4-a^2bc^2x^2\epsilon^5+2a^2cex^2\epsilon^5+a^2exy\epsilon^5),\quad \dot{y}=y(-d-ex-c^2x^2-cxy-acx\epsilon+b^2cx\epsilon+2bc^2x^2\epsilon-2cex^2\epsilon+bcxy\epsilon-exy\epsilon+ad\epsilon^2+b^2d\epsilon^2+b^3cx\epsilon^2-2bcdx\epsilon^2+b^2ex\epsilon^2+2dex\epsilon^2-2ac^2x^2\epsilon^2+b^2c^2x^2\epsilon^2+c^2dx^2\epsilon^2+2bcex^2\epsilon^2-acxy\epsilon^2+2b^2cxy\epsilon^2+2cdxy\epsilon^2+dy^2\epsilon^2+abd\epsilon^3-a^2cx\epsilon^3+2acdx\epsilon^3+2abex\epsilon^3-2bdex\epsilon^3+abc^2x^2\epsilon^3-2bc^2dx^2\epsilon^3+2cdex^2\epsilon^3-2bcdxy\epsilon^3+b^2exy\epsilon^3+2dexy\epsilon^3-a^2bcx\epsilon^4+2abcdx\epsilon^4+a^2ex\epsilon^4-2adex\epsilon^4-a^2c^2x^2\epsilon^4+ab^2c^2x^2\epsilon^4+ac^2dx^2\epsilon^4-b^2c^2dx^2\epsilon^4+2abcex^2\epsilon^4-2bcdex^2\epsilon^4-2b^2cdxy\epsilon^4+2abexy\epsilon^4-2bdexy\epsilon^4-ady^2\epsilon^4-b^2dy^2\epsilon^4-a^2bc^2x^2\epsilon^5+abc^2dx^2\epsilon^5+2a^2cex^2\epsilon^5-2acdex^2\epsilon^5+a^2exy\epsilon^5-2adexy\epsilon^5-abdy^2\epsilon^5).$

Dreptele invariante: $l_1=x,\ \ l_2=y,\ \ l_3=1+cx\epsilon+y\epsilon,\ \ l_4=-1+cx\epsilon+y\epsilon+a\epsilon^2+b^2\epsilon^2-2bcx\epsilon^2+2ex\epsilon^2+ab\epsilon^3+acx\epsilon^3-b^2cx\epsilon^3-2bex\epsilon^3-ay\epsilon^3-b^2y\epsilon^3+abcx\epsilon^4-2aex\epsilon^4-aby\epsilon^4.$

Dacă $\epsilon\to 0$, atunci $l_3,l_4\to l_\infty$.

6.4) $m_\infty(1,1;3)$: $\dot{x}=x(a+by+cxy+dy^2),\ \dot{y}=\alpha y(1+bx+cx^2+dxy),\ \alpha a(c^2+d^2)(\alpha-a)\neq 0.$
Sistemul cubic perturbat:

$\dot{x}=-x(-a-by-cxy-dy^2-axy\alpha\epsilon^2+ax^2\alpha^2\epsilon^2-2xy\alpha^2\epsilon^2),\quad \dot{y}=-y\alpha(-1-bx-cx^2-dxy-$

$axy\epsilon^2 + y^2\epsilon^2 + ax^2\alpha\epsilon^2 - 2xy\alpha\epsilon^2 - x^2\alpha^2\epsilon^2)$.

Dreptele invariante: $l_1 = x,\ \ l_2 = y,\ \ l_3 = 1 - y\epsilon + x\alpha\epsilon,\ \ l_4 = -1 - y\epsilon + x\alpha\epsilon.$

Dacă $\epsilon \to 0$, atunci $l_3, l_4 \to l_\infty$.

3.3. Sistemele cubice ce posedă trei drepte invariante de multiplicitate algebrică maximală dintre care dreptele invariante afine sunt complexe

În această secţiune este determinată multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante complexe şi efectuată clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu două drepte invariante afine distincte complexe de multiplicitate algebrică maximală.

Vom spune că *dreapta* l este *complexă,* dacă ecuaţia ei $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, are cel mult o soluţie în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. În cazul când $ax + by + c = 0$ n-are soluţii (are o singură) soluţie în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, atunci l se va numi *pur imaginară (relativ complexă).*

Menţionăm, că dacă dreapta l este pur imaginară (relativ complexă), atunci şi conjugata ei $\bar{l}$ e de acelaşi tip. Cu $\mathbb{CSL}^{p}_{2(c)}$ $\left(\mathbb{CSL}^{np}_{2(c)}\right)$ notăm clasa sistemelor cubice cu coeficienţi reali ce posedă exact două drepte invariante pur imaginare (relativ complexe).

3.3.1. Multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante complexe

Deoarece sunt considerate doar sistemele cubice (3.1) cu coeficienţi reali, atunci o dreaptă complexă l_1 este invariantă pentru (3.1) doar împreună cu conjugata ei $l_2 = \overline{l_1}$. Mai mult ca atât, l_1 şi $l_2 = \overline{l_1}$ au aceeaşi multiplicitate. Ţinând cont, că pentru un sistem cubic multiplicitatea sumară a dreptelor invariante (incluzând şi dreapta de la infinit) nu depăşeşte nouă, este evident, că multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte complexe este mai mică decât multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante reale, care este egală cu şapte (vezi secţiunea 2.2.3).

Teorema 3.3.1. *În clasa sistemelor cubice* $\{(3.1), (3.2)\}$ *multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante complexe este egală cu trei.*

Mai întâi, demonstraţia teoremei 3.3.1 vom efectua-o pentru dreptele invariante pur imaginare, apoi pentru dreptele invariante relativ complexe.

1) Cazul dreptelor invariante complexe pur imaginare.

Se cunoaşte, că o dreaptă invariantă complexă a sistemului cubic (3.1) este pur imaginară, atunci şi numai atunci când ea este paralelă cu conjugata sa. Mai mult ca atât, printr-o transformare liniară nedegenerată a planului fazic aşa dreaptă poate fi făcută paralelă la una din axele sistemului de coordonate, adică să fie descrisă de una din ecuaţiile $x = \gamma$ sau $y = \gamma$, $\gamma \in \mathbb{C}$.

Fie că sistemul (3.1) posedă două drepte invariante complexe paralele l_1 şi $l_2 = \overline{l_1}$. Fără a restrânge generalitatea, putem considera că ele sunt descrise respectiv de ecuaţiile $x = i$ şi $x = -i$. În aşa caz, sistemul cubic (3.1) arată astfel

$$\begin{aligned}&\dot{x} = (x^2+1)(a_{00} + a_{30}x + a_{21}y), \quad \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + \\ &b_{30}x^3 + b_{01}y + b_{11}xy + b_{21}x^2y + b_{02}y^2 + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3.\end{aligned} \tag{3.221}$$

Notăm cu μ multiplicitatea algebrică a dreptelor invariante $x = i$ şi $x = -i$. Pentru determinarea în clasa sistemelor cubice a valorii maximale a lui μ calculăm pentru (3.221) polinomul $E_1(\mathbb{X})$. Avem $E_1(\mathbb{X}) = (x^2+1)R_1(x,y)$, unde $R_1(x,y)$ este un polinom de gradul şase în raport cu variabilele x şi y.

Multiplicitatea algebrică μ a dreptelor invariante $x = \pm i$ este cel puţin egală cu doi, dacă $(x^2+1)|R_1(x,y)$, adică dacă are loc identitatea $R_1(i,y) \equiv 0$. Polinomul $R_1(i,y)$ poate fi scris sub forma $R_1(i,y) = A(y) + iB(y)$, unde

$A(y) = 4a_{00}a_{30}b_{00} - a_{21}b_{00}^2 + a_{00}b_{00}b_{01} + 2a_{00}^2b_{10} - 2a_{30}^2b_{10} - a_{30}b_{01}b_{10} + a_{21}b_{10}^2 - a_{30}b_{00}b_{11} - a_{00}b_{10}b_{11} - 4a_{00}a_{30}b_{20} + 2a_{21}b_{00}b_{20} - a_{00}b_{01}b_{20} + a_{30}b_{11}b_{20} - a_{21}b_{20}^2 - a_{00}b_{00}b_{21} + a_{30}b_{10}b_{21} + a_{00}b_{20}b_{21} - 2a_{00}^2b_{30} + 2a_{30}^2b_{30} + a_{30}b_{01}b_{30} - 2a_{21}b_{10}b_{30} + a_{00}b_{11}b_{30} - a_{30}b_{21}b_{30} + a_{21}b_{30}^2 + (4a_{21}a_{30}b_{00} + 4a_{00}a_{30}b_{01} - a_{21}b_{00}b_{01} + a_{00}b_{01}^2 + 2a_{00}b_{00}b_{02} + 4a_{00}a_{21}b_{10} - 2a_{30}b_{02}b_{10} + 2a_{00}^2b_{11} - 2a_{30}^2b_{11} - 2a_{30}b_{01}b_{11} + a_{21}b_{10}b_{11} - a_{00}b_{11}^2 - 2a_{30}b_{00}b_{12} - 2a_{00}b_{10}b_{12} - 4a_{21}a_{30}b_{20} + a_{21}b_{01}b_{20} - 2a_{00}b_{02}b_{20} + 2a_{30}b_{12}b_{20} - 4a_{00}a_{30}b_{21} + a_{21}b_{00}b_{21} - 2a_{00}b_{01}b_{21} + 2a_{30}b_{11}b_{21} - a_{21}b_{20}b_{21} + a_{00}b_{21}^2 - 4a_{00}a_{21}b_{30} + 2a_{30}b_{02}b_{30} - a_{21}b_{11}b_{30} + 2a_{00}b_{12}b_{30})y + (4a_{21}a_{30}b_{01} + 4a_{00}a_{30}b_{02} + 3a_{00}b_{01}b_{02} + 3a_{00}b_{00}b_{03} + 2a_{21}^2b_{10} - 3a_{30}b_{03}b_{10} + 4a_{00}a_{21}b_{11} - 3a_{30}b_{02}b_{11} + 2a_{00}^2b_{12} - 2a_{30}^2b_{12} - 3a_{30}b_{01}b_{12} - 3a_{00}b_{11}b_{12} - 3a_{00}b_{03}b_{20} - 4a_{21}a_{30}b_{21} - 3a_{00}b_{02}b_{21} + 3a_{30}b_{12}b_{21} - 2a_{21}^2b_{30} + 3a_{30}b_{03}b_{30})y^2 + (4a_{21}a_{30}b_{02} + a_{21}b_{01}b_{02} + 2a_{00}b_{02}^2 + 4a_{00}a_{30}b_{03} + a_{21}b_{00}b_{03} + 4a_{00}b_{01}b_{03} + 2a_{21}^2b_{11} - 4a_{30}b_{03}b_{11} + 4a_{00}a_{21}b_{12} - 4a_{30}b_{02}b_{12} - a_{21}b_{11}b_{12} - 2a_{00}b_{12}^2 - a_{21}b_{03}b_{20} - a_{21}b_{02}b_{21} - 4a_{00}b_{03}b_{21})y^3 + (a_{21}b_{02}^2 + 4a_{21}a_{30}b_{03} + 2a_{21}b_{01}b_{03} + 5a_{00}b_{02}b_{03} + 2a_{21}^2b_{12} - 5a_{30}b_{03}b_{12} - a_{21}b_{12}^2 - 2a_{21}b_{03}b_{21})y^4 + 3b_{03}(a_{21}b_{02} + a_{00}b_{03})y^5 + 2a_{21}b_{03}^2y^6,$

$B(y) = -2a_{00}^2b_{00} + 2a_{30}^2b_{00} + a_{30}b_{00}b_{01} + 4a_{00}a_{30}b_{10} - 2a_{21}b_{00}b_{10} + a_{00}b_{01}b_{10} + a_{00}b_{00}b_{11} - a_{30}b_{10}b_{11} + 2a_{00}^2b_{20} - 2a_{30}^2b_{20} - a_{30}b_{01}b_{20} + 2a_{21}b_{10}b_{20} - a_{00}b_{11}b_{20} - a_{30}b_{00}b_{21} - a_{00}b_{10}b_{21} + a_{30}b_{20}b_{21} - 4a_{00}a_{30}b_{30} + 2a_{21}b_{00}b_{30} - a_{00}b_{01}b_{30} + a_{30}b_{11}b_{30} - 2a_{21}b_{20}b_{30} + a_{00}b_{21}b_{30} + (-4a_{00}a_{21}b_{00} - 2a_{00}^2b_{01} + 2a_{30}^2b_{01} + a_{30}b_{01}^2 + 2a_{30}b_{00}b_{02} + 4a_{21}a_{30}b_{10} - a_{21}b_{01}b_{10} + 2a_{00}b_{02}b_{10} + 4a_{00}a_{30}b_{11} - a_{21}b_{00}b_{11} + 2a_{00}b_{01}b_{11} - a_{30}b_{11}^2 +$

$2a_{00}b_{00}b_{12} - 2a_{30}b_{10}b_{12} + 4a_{00}a_{21}b_{20} - 2a_{30}b_{02}b_{20} + a_{21}b_{11}b_{20} - 2a_{00}b_{12}b_{20} + 2a_{00}^2b_{21} - 2a_{30}^2b_{21} - 2a_{30}b_{01}b_{21} + a_{21}b_{10}b_{21} - 2a_{00}b_{11}b_{21} + a_{30}b_{21}^2 - 4a_{21}a_{30}b_{30} + a_{21}b_{01}b_{30} - 2a_{00}b_{02}b_{30} + 2a_{30}b_{12}b_{30} - a_{21}b_{21}b_{30})y + (-2a_{21}^2b_{00} - 4a_{00}a_{21}b_{01} - 2a_{00}^2b_{02} + 2a_{30}^2b_{02} + 3a_{30}b_{01}b_{02} + 3a_{30}b_{00}b_{03} + 3a_{00}b_{03}b_{10} + 4a_{21}a_{30}b_{11} + 3a_{00}b_{02}b_{11} + 4a_{00}a_{30}b_{12} + 3a_{00}b_{01}b_{12} - 3a_{30}b_{11}b_{12} + 2a_{21}^2b_{20} - 3a_{30}b_{03}b_{20} + 4a_{00}a_{21}b_{21} - 3a_{30}b_{02}b_{21} - 3a_{00}b_{12}b_{21} - 3a_{00}b_{03}b_{30})y^2 + (-2a_{21}^2b_{01} - 4a_{00}a_{21}b_{02} + 2a_{30}b_{02}^2 - 2a_{00}^2b_{03} + 2a_{30}^2b_{03} + 4a_{30}b_{01}b_{03} + a_{21}b_{03}b_{10} + a_{21}b_{02}b_{11} + 4a_{00}b_{03}b_{11} + 4a_{21}a_{30}b_{12} + a_{21}b_{01}b_{12} + 4a_{00}b_{02}b_{12} - 2a_{30}b_{12}^2 + 2a_{21}^2b_{21} - 4a_{30}b_{03}b_{21} - a_{21}b_{12}b_{21} - a_{21}b_{03}b_{30})y^3 + (-2a_{21}^2b_{02} - 4a_{00}a_{21}b_{03} + 5a_{30}b_{02}b_{03} + 2a_{21}b_{03}b_{11} + 2a_{21}b_{02}b_{12} + 5a_{00}b_{03}b_{12})y^4 + b_{03}(2a_{21}^2 - 3a_{30}b_{03} - 3a_{21}b_{12})y^5.$

Ţinând cont de condiţiile (3.2), identităţile $A(y) \equiv 0$ şi $B(y) \equiv 0$ au loc, dacă se realizează una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$a_{21} = b_{03} = b_{02} = b_{12} = 0,\ b_{21} = 2a_{30} + b_{01},\ b_{11} = 2a_{00}; \tag{3.222}$$

$$\begin{gathered} b_{03} = b_{02} = 0,\ b_{12} = 2a_{21}, \\ b_{20} = (-4a_{00}a_{30} + a_{21}b_{00} - a_{00}b_{01} + a_{30}b_{11} + a_{00}b_{21})/a_{21}, \\ b_{30} = (2a_{00}^2 - 2a_{30}^2 - a_{30}b_{01} + a_{21}b_{10} - a_{00}b_{11} + a_{30}b_{21})/a_{21}. \end{gathered} \tag{3.223}$$

Astfel, are loc

Lema 3.3.1. *Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = i$ a sistemului $\{$(3.221), (3.2)$\}$ nu este mai mică ca doi atunci şi numai atunci, când are loc cel puţin una dintre seriile de condiţii* (3.222), (3.223).

În condiţiile (3.222) sistemul cubic (3.221) ia forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a_{00} + a_{30}x)(1 + x^2), \\ \dot{y} &= b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + b_{01}y + 2a_{00}xy + (2a_{30} + b_{01})x^2y. \end{aligned} \tag{3.224}$$

Pentru acest sistem $E_1(\mathbb{X}) = (x^2 + 1)^2 R_2(x, y)$, unde $R_2(x, y) = (a_{00} + a_{30}x)(a_{00}b_{10} + b_{00}(b_{01} - a_{30}) + (2a_{00}b_{20} + b_{01}b_{10})x + (3a_{00}b_{30} + b_{20}(a_{30} + b_{01}))x^2 + b_{30}(2a_{30} + b_{01})x^3 + (2a_{00}^2 + b_{01}(b_{01} - a_{30}))y + 4a_{00}(a_{30} + b_{01})xy + (a_{30} + b_{01})(2a_{30} + b_{01})x^2y)$. Multiplicitatea algebrică μ a dreptei $x = i$ nu este mai mică ca trei, dacă $R_2(i, y)$ este identic zero. Ţinând cont de (3.2), $R_2(i, y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{01} = -a_{30}/2, b_{10} = -3b_{30}, b_{20} = -3b_{00}, a_{00} = 0. \tag{3.225}$$

În condiţiile (3.225) sistemul cubic (3.224) obţine forma

$$\dot{x} = a_{30}x(x^2 + 1), \quad \dot{y} = (2b_{00} - 6b_{30}x - 6b_{00}x^2 + 2b_{30}x^3 - a_{30}y + 3a_{30}x^2y)/2,\ a_{30} \neq 0. \tag{3.226}$$

Pentru (3.226) avem $E_1(\mathbb{X}) = 3a_{30}^2x(1+x^2)^3(2b_{30}x + a_{30}y - 2b_{00})/4$. Este evident, că multiplicitatea algebrică a dreptei invariante complexe $x = i$ nu poate fi mai mare decât trei.

Prin intermediul transformării $x \to x, y \to (2b_{00} - 2b_{30}x + y)/a_{30}$ şi rescalarea timpului $t \to 2t/a_{30}$ sistemul (3.226) poate fi scris sub forma:

$$\dot{x} = 2x(x^2 + 1), \qquad \dot{y} = y(3x^2 - 1). \tag{3.227}$$

Procedând în mod similar şi ţinând cont de condiţia (3.2), uşor se arată, că în cazul realizării seriei de condiţii (3.223), multiplicitatea algebrică a dreptei $x = i$ nu poate fi mai mare decât doi.

Lema 3.3.2. *În clasa sistemelor cubice diferenţiale* $\{(3.1), (3.2)\}$ *multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante complexe pur imaginare este egală cu trei.*

Lema 3.3.3. *Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic care admite o dreaptă invariantă complexă pur imaginară de multiplicitatea algebrică trei poate fi scris sub forma* (3.227).

Menţionăm, că sistemul (3.227) face parte din clasa $\mathbb{CSL}_9$, adică posedă numărul maximal de drepte invariante, ţinând cont de multiplicităţile lor, şi a fost studiat în lucrarea [41]. În acelaşi timp, (3.227) nu aparţine clasei $\mathbb{CSL}^p_{2(c)}$.

Lema 3.3.4. *În clasa* $\mathbb{CSL}^p_{2(c)}$ *multiplicitatea algebrică maximală a fiecărei drepte invariante complexe pur imaginare este egală cu doi.*

2) Cazul dreptelor invariante relativ complexe.

Fie sistemul cubic (3.1) posedă două drepte complexe concurente l_1, $l_2 = \overline{l_1}$. Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate putem face ca aceste drepte să fie descrise de ecuaţiile $y = ix$ şi $y = -ix$. În aşa caz (3.1) se scrie astfel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ \dot{y} &= a_{10}y - a_{01}x + (b_{02} - a_{11})x^2 + (a_{20} - a_{02})xy + b_{02}y^2 + (a_{03} - a_{21} + b_{12})x^3 + \\ &\quad + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + (a_{12} - a_{30} + b_{21})y^3. \end{aligned} \tag{3.228}$$

Pentru sistemul (3.228) $E_1(X) = (x^2 + y^2)R_1(x, y)$, unde $R_1(x, y)$ este un polinom de gradul şase în raport cu x şi y.

Dreptele invariante $y = \pm ix$ au multiplicitatea algebrică $\mu \geq 2$, dacă $(x^2 + y^2)|R_1(x, y)$, adică dacă are loc identitatea $R_1(x, ix) \equiv 0$, unde $R_1(x, ix) = A(y) + iB(y)$, iar

$A(y) = -a_{01}(a_{01}^2 + a_{10}^2) + (a_{01}a_{02}a_{10} - 3a_{01}^2a_{11} - 2a_{10}^2a_{11} - a_{01}a_{10}a_{20} + 2a_{01}^2b_{02} + 2a_{10}^2b_{02})x + (3a_{01}a_{02}^2 + 4a_{01}^2a_{03} + 6a_{03}a_{10}^2 + 2a_{02}a_{10}a_{11} - 3a_{01}a_{11}^2 - a_{01}a_{02}a_{20} - 3a_{10}a_{11}a_{20} - 3a_{01}^2a_{21} - 3a_{10}^2a_{21} + 2a_{01}a_{10}a_{30} + a_{02}a_{10}b_{02} + 5a_{01}a_{11}b_{02} + 3a_{10}a_{20}b_{02} - 2a_{01}b_{02}^2 + a_{01}^2b_{12} + 3a_{10}^2b_{12} - 2a_{01}a_{10}b_{21})x^2 +$

$(-4a_{02}a_{03}a_{10} + 3a_{02}^2a_{11} + 9a_{01}a_{03}a_{11} - a_{11}^3 + 3a_{01}a_{02}a_{12} + 2a_{10}a_{11}a_{12} + 10a_{03}a_{10}a_{20} - a_{01}a_{12}a_{20} -$
$a_{11}a_{20}^2 + 3a_{02}a_{10}a_{21} - 6a_{01}a_{11}a_{21} - 5a_{10}a_{20}a_{21} - a_{10}a_{11}a_{30} + 2a_{01}a_{20}a_{30} - 3a_{02}^2b_{02} - 10a_{01}a_{03}b_{02} +$
$3a_{11}^2b_{02} - 2a_{10}a_{12}b_{02} + 2a_{02}a_{20}b_{02} + a_{20}^2b_{02} + 6a_{01}a_{21}b_{02} + 6a_{10}a_{30}b_{02} - 2a_{11}b_{02}^2 - a_{02}a_{10}b_{12} + 3a_{01}a_{11}b_{12} +$
$5a_{10}a_{20}b_{12} - 4a_{01}b_{02}b_{12} - 3a_{01}a_{02}b_{21} - a_{10}a_{11}b_{21} - a_{01}a_{20}b_{21} - 4a_{10}b_{02}b_{21})x^3 + (-5a_{02}^2a_{03} - 9a_{01}a_{03}^2 +$
$5a_{03}a_{11}^2 - 8a_{03}a_{10}a_{12} + 2a_{02}a_{11}a_{12} + a_{01}a_{12}^2 - a_{02}a_{03}a_{20} + a_{11}a_{12}a_{20} + 4a_{03}a_{20}^2 + 3a_{02}^2a_{21} + 10a_{01}a_{03}a_{21} -$
$3a_{11}^2a_{21} + 4a_{10}a_{12}a_{21} + a_{02}a_{20}a_{21} - 2a_{20}^2a_{21} - 3a_{01}a_{21}^2 + 12a_{03}a_{10}a_{30} + 2a_{02}a_{11}a_{30} - 2a_{01}a_{12}a_{30} -$
$a_{11}a_{20}a_{30} - 4a_{10}a_{21}a_{30} + 3a_{01}a_{30}^2 - 11a_{03}a_{11}b_{02} - 3a_{02}a_{12}b_{02} - a_{12}a_{20}b_{02} + 7a_{11}a_{21}b_{02} - a_{02}a_{30}b_{02} +$
$5a_{20}a_{30}b_{02} + 2a_{03}b_{02}^2 - 2a_{21}b_{02}^2 - 2a_{02}^2b_{12} - 8a_{01}a_{03}b_{12} + 2a_{11}^2b_{12} - 4a_{10}a_{12}b_{12} + 2a_{20}^2b_{12} + 4a_{01}a_{21}b_{12} +$
$8a_{10}a_{30}b_{12} - 4a_{11}b_{02}b_{12} - 2a_{01}b_{12}^2 - 4a_{03}a_{10}b_{21} - 4a_{02}a_{11}b_{21} - 4a_{01}a_{30}b_{21} + 4a_{02}b_{02}b_{21} - 4a_{20}b_{02}b_{21} -$
$4a_{10}b_{12}b_{21} + 2a_{01}b_{21}^2)x^4 + (-10a_{03}^2a_{11} - 2a_{02}a_{03}a_{12} - 6a_{03}a_{12}a_{20} + 11a_{03}a_{11}a_{21} + a_{02}a_{12}a_{21} + 3a_{12}a_{20}a_{21} -$
$3a_{11}a_{21}^2 - 7a_{02}a_{03}a_{30} + a_{11}a_{12}a_{30} + 11a_{03}a_{20}a_{30} + 4a_{02}a_{21}a_{30} - 4a_{20}a_{21}a_{30} + a_{11}a_{30}^2 + 8a_{03}^2b_{02} -$
$12a_{03}a_{21}b_{02} + 4a_{21}^2b_{02} - 4a_{12}a_{30}b_{02} + 4a_{30}^2b_{02} - 9a_{03}a_{11}b_{12} - a_{02}a_{12}b_{12} - 3a_{12}a_{20}b_{12} + 5a_{11}a_{21}b_{12} -$
$3a_{02}a_{30}b_{12} + 7a_{20}a_{30}b_{12} + 4a_{03}b_{02}b_{12} - 4a_{21}b_{02}b_{12} - 2a_{11}b_{12}^2 + 9a_{02}a_{03}b_{21} - a_{11}a_{12}b_{21} - 5a_{03}a_{20}b_{21} -$
$5a_{02}a_{21}b_{21} + a_{20}a_{21}b_{21} - 3a_{11}a_{30}b_{21} + 4a_{12}b_{02}b_{21} - 4a_{30}b_{02}b_{21} + 4a_{02}b_{12}b_{21} - 4a_{20}b_{12}b_{21} + 2a_{11}b_{21}^2)x^5 +$
$(6a_{03}^3 + 2a_{03}a_{12}^2 - 11a_{03}^2a_{21} - a_{12}^2a_{21} + 6a_{03}a_{21}^2 - a_{21}^3 - 10a_{03}a_{12}a_{30} + 4a_{12}a_{21}a_{30} + 6a_{03}a_{30}^2 - a_{21}a_{30}^2 +$
$7a_{03}^2b_{12} + a_{12}^2b_{12} - 10a_{03}a_{21}b_{12} + 3a_{21}^2b_{12} - 6a_{12}a_{30}b_{12} + 5a_{30}^2b_{12} + 2a_{03}b_{12}^2 - 2a_{21}b_{12}^2 + 6a_{03}a_{12}b_{21} -$
$2a_{12}a_{21}b_{21} - 2a_{03}a_{30}b_{21} - 2a_{21}a_{30}b_{21} + 4a_{12}b_{12}b_{21} - 4a_{30}b_{12}b_{21} - 2a_{03}b_{21}^2 + 2a_{21}b_{21}^2)x^6,$

$B(y) = (-3a_{01}^2a_{02} - 2a_{02}a_{10}^2 - a_{01}a_{10}a_{11} + a_{01}^2a_{20})x + (a_{02}^2a_{10} + 4a_{01}a_{03}a_{10} - 6a_{01}a_{02}a_{11} - a_{10}a_{11}^2 -$
$2a_{01}^2a_{12} - 3a_{02}a_{10}a_{20} + a_{01}a_{11}a_{20} - 2a_{01}a_{10}a_{21} + a_{01}^2a_{30} - 3a_{10}^2a_{30} + 5a_{01}a_{02}b_{02} - a_{10}a_{11}b_{02} - a_{01}a_{20}b_{02} +$
$2a_{10}b_{02}^2 + 2a_{01}a_{10}b_{12} + a_{01}^2b_{21} + 3a_{10}^2b_{21})x^2 + (a_{02}^3 + 9a_{01}a_{02}a_{03} + 4a_{03}a_{10}a_{11} - 3a_{02}a_{11}^2 + 2a_{02}a_{10}a_{12} -$
$3a_{01}a_{11}a_{12} + a_{01}a_{03}a_{20} - a_{02}a_{20}^2 - 6a_{01}a_{02}a_{21} - 3a_{10}a_{11}a_{21} - a_{02}a_{10}a_{30} - 5a_{10}a_{20}a_{30} + 6a_{03}a_{10}b_{02} +$
$6a_{02}a_{11}b_{02} + 2a_{01}a_{12}b_{02} - 2a_{11}a_{20}b_{02} - 2a_{10}a_{21}b_{02} + 2a_{01}a_{30}b_{02} - 2a_{02}b_{02}^2 + 2a_{20}b_{02}^2 + 3a_{01}a_{02}b_{12} +$
$a_{10}a_{11}b_{12} + a_{01}a_{20}b_{12} + 4a_{10}b_{02}b_{12} - a_{02}a_{10}b_{21} + 3a_{01}a_{11}b_{21} + 5a_{10}a_{20}b_{21} - 4a_{01}b_{02}b_{21})x^3 + (10a_{02}a_{03}a_{11} +$
$a_{02}^2a_{12} + 2a_{01}a_{03}a_{12} - a_{11}^2a_{12} + a_{03}a_{11}a_{20} + a_{02}a_{12}a_{20} + 4a_{03}a_{10}a_{21} - 6a_{02}a_{11}a_{21} - 2a_{01}a_{12}a_{21} - a_{11}a_{20}a_{21} -$
$2a_{10}a_{21}^2 + a_{02}^2a_{30} + 6a_{01}a_{03}a_{30} - a_{11}^2a_{30} + 4a_{10}a_{12}a_{30} - a_{02}a_{20}a_{30} - 2a_{20}^2a_{30} - 2a_{01}a_{21}a_{30} - 6a_{10}a_{30}^2 -$
$11a_{02}a_{03}b_{02} + 3a_{11}a_{12}b_{02} + 7a_{03}a_{20}b_{02} + 7a_{02}a_{21}b_{02} - 3a_{20}a_{21}b_{02} + a_{11}a_{30}b_{02} - 2a_{12}b_{02}^2 + 2a_{30}b_{02}^2 +$
$4a_{03}a_{10}b_{12} + 4a_{02}a_{11}b_{12} + 4a_{01}a_{30}b_{12} - 4a_{02}b_{02}b_{12} + 4a_{20}b_{02}b_{12} + 2a_{10}b_{12}^2 - 2a_{02}^2b_{21} - 8a_{01}a_{03}b_{21} + 2a_{11}^2b_{21} -$
$4a_{10}a_{12}b_{21} + 2a_{20}^2b_{21} + 4a_{01}a_{21}b_{21} + 8a_{10}a_{30}b_{21} - 4a_{11}b_{02}b_{21} - 4a_{01}b_{12}b_{21} - 2a_{10}b_{21}^2)x^4 + (-10a_{02}a_{03}^2 +$
$2a_{03}a_{11}a_{12} + 2a_{03}^2a_{20} + 11a_{02}a_{03}a_{21} - a_{11}a_{12}a_{21} + a_{03}a_{20}a_{21} - 3a_{02}a_{21}^2 - a_{20}a_{21}^2 + 7a_{03}a_{11}a_{30} + a_{02}a_{12}a_{30} +$
$3a_{12}a_{20}a_{30} - 4a_{11}a_{21}a_{30} + a_{02}a_{30}^2 - 5a_{20}a_{30}^2 - 8a_{03}a_{12}b_{02} + 4a_{12}a_{21}b_{02} + 4a_{03}a_{30}b_{02} - 9a_{02}a_{03}b_{12} +$
$a_{11}a_{12}b_{12} + 5a_{03}a_{20}b_{12} + 5a_{02}a_{21}b_{12} - a_{20}a_{21}b_{12} + 3a_{11}a_{30}b_{12} - 4a_{12}b_{02}b_{12} + 4a_{30}b_{02}b_{12} - 2a_{02}b_{12}^2 +$
$2a_{20}b_{12}^2 - 9a_{03}a_{11}b_{21} - a_{02}a_{12}b_{21} - 3a_{12}a_{20}b_{21} + 5a_{11}a_{21}b_{21} - 3a_{02}a_{30}b_{21} + 7a_{20}a_{30}b_{21} + 4a_{03}b_{02}b_{21} -$

$4a_{21}b_{02}b_{21} - 4a_{11}b_{12}b_{21} + 2a_{02}b_{21}^2 - 2a_{20}b_{21}^2)x^5 + (-4a_{03}^2a_{12} + 2a_{03}a_{12}a_{21} - 3a_{03}^2a_{30} - a_{12}^2a_{30} + 8a_{03}a_{21}a_{30} - 3a_{21}^2a_{30} + 4a_{12}a_{30}^2 - 3a_{30}^3 - 6a_{03}a_{12}b_{12} + 2a_{12}a_{21}b_{12} + 2a_{03}a_{30}b_{12} + 2a_{21}a_{30}b_{12} - 2a_{12}b_{12}^2 + 2a_{30}b_{12}^2 + 7a_{03}^2b_{21} + a_{12}^2b_{21} - 10a_{03}a_{21}b_{21} + 3a_{21}^2b_{21} - 6a_{12}a_{30}b_{21} + 5a_{30}^2b_{21} + 4a_{03}b_{12}b_{21} - 4a_{21}b_{12}b_{21} + 2a_{12}b_{21}^2 - 2a_{30}b_{21}^2)x^6$.

Cerinţa ca $R(x, ix) \equiv 0$, sau $A(y) \equiv 0$ şi $B(y) \equiv 0$, este satisfăcută, dacă se realizează una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$a_{01} = a_{02} = a_{10} = a_{20} = 0,\ a_{11} = 2b_{02},\ a_{21} = 2a_{03} + b_{12},\ b_{21} = a_{30}; \tag{3.229}$$

$$a_{01} = a_{02} = a_{10} = a_{20} = 0,\ a_{11} = 2b_{02},\ a_{12} = 3a_{30} - 2b_{21},\ a_{21} = 3a_{03} + 2b_{12}; \tag{3.230}$$

$$a_{01} = a_{02} = 0,\ a_{21} = 2a_{03} + b_{12},\ b_{02} = a_{11},\ b_{21} = a_{30},\ a_{10} \neq 0. \tag{3.231}$$

Lema 3.3.5. *Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $y = ix$ a sistemului $\{(3.228), (3.2)\}$ nu este mai mică ca doi atunci şi numai atunci când are loc cel puţin una dintre seriile de condiţii* (3.229)-(3.231).

În cazul condiţiilor (3.230) sistemul cubic (3.228) are următoarea formă

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{30}x^3 + 2b_{02}xy + 3a_{03}x^2y + 2b_{12}x^2y + 3a_{30}xy^2 - 2b_{21}xy^2 + a_{03}y^3, \\ \dot{y} &= -b_{02}x^2 - 2a_{03}x^3 - b_{12}x^3 + b_{21}x^2y + b_{02}y^2 + b_{12}xy^2 + 2a_{30}y^3 - b_{21}y^3, \end{aligned} \tag{3.232}$$

iar $E_1(\mathbb{X}) = (x^2 + y^2)^2 R_2(x, y)$, unde $R_2(x, y) = -(2a_{03} + b_{12})(6a_{03}^2 + 7a_{03}b_{12} + 2b_{12}^2 + a_{30}b_{21})x^4 - (30a_{03}^2a_{30} + 35a_{03}a_{30}b_{12} + 10a_{30}b_{12}^2 - 22a_{03}^2b_{21} + a_{30}^2b_{21} - 23a_{03}b_{12}b_{21} - 6b_{12}^2b_{21} - a_{30}b_{21}^2)x^3y - b_{02}(20a_{03}^2 - a_{30}^2 + 22a_{03}b_{12} + 6b_{12}^2 + a_{30}b_{21})x^3 - (6a_{03}^3 + 24a_{03}a_{30}^2 + 5a_{03}^2b_{12} + 14a_{30}^2b_{12} + a_{03}b_{12}^2 - 33a_{03}a_{30}b_{21} - 19a_{30}b_{12}b_{21} + 12a_{03}b_{21}^2 + 6b_{12}b_{21}^2)x^2y^2 - b_{02}(33a_{03}a_{30} + 18a_{30}b_{12} - 23a_{03}b_{21} - 12b_{12}b_{21})x^2y - b_{02}^2(11a_{03} + 6b_{12})x^2 - (12a_{03}^2a_{30} + 6a_{30}^3 + 7a_{03}a_{30}b_{12} - 8a_{03}^2b_{21} - 13a_{30}^2b_{21} - 3a_{03}b_{12}b_{21} + 9a_{30}b_{21}^2 - 2b_{21}^3)xy^3 - b_{02}(8a_{03}^2 + 11a_{30}^2 + 4a_{03}b_{12} - 17a_{30}b_{21} + 6b_{21}^2)xy^2 - 2b_{02}^2(4a_{30} - 3b_{21})xy - 2b_{02}^3x + a_{03}(-6a_{30}^2 + a_{03}b_{12} + 7a_{30}b_{21} - 2b_{21}^2)y^4 - a_{03}b_{02}(9a_{30} - 5b_{21})y^3 - 3a_{03}b_{02}^2y^2$.

Pentru ca multiplicitatea algebrică μ a dreptelor invariante $y = \pm ix$ să fie mai mare decât doi este necesar ca $R_2(x, ix) = -2b_{02}^3x + (-8a_{03}b_{02}^2 - 6b_{02}^2b_{12})x^2 + (-12a_{03}^2b_{02} + 12a_{30}^2b_{02} - 18a_{03}b_{02}b_{12} - 6b_{02}b_{12}^2 - 18a_{30}b_{02}b_{21} + 6b_{02}b_{21}^2)x^3 + (-6a_{03}^3 + 18a_{03}a_{30}^2 - 14a_{03}^2b_{12} + 14a_{30}^2b_{12} - 10a_{03}b_{12}^2 - 2b_{12}^3 - 28a_{03}a_{30}b_{21} - 20a_{30}b_{12}b_{21} + 10a_{03}b_{21}^2 + 6b_{12}b_{21}^2)x^4 + i(-8a_{30}b_{02}^2 + 6b_{02}^2b_{21})x^2 + (-24a_{03}a_{30}b_{02} - 18a_{30}b_{02}b_{12} + 18a_{03}b_{02}b_{21} + 12b_{02}b_{12}b_{21})x^3 + (-18a_{03}^2a_{30} + 6a_{30}^3 - 28a_{03}a_{30}b_{12} - 10a_{30}b_{12}^2 + 14a_{03}^2b_{21} - 14a_{30}^2b_{21} + 20a_{03}b_{12}b_{21} + 6b_{12}^2b_{21} + 10a_{30}b_{21}^2 - 2b_{21}^3)x^4 \equiv 0$. Ţinând cont de (3.2), $R_2(x, ix) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{02} = 0,\ a_{03} = -b_{12}/3,\ a_{30} = b_{21}/3. \tag{3.233}$$

Astfel, sistemul cubic (3.228) ia forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (b_{21}x^3 + 3b_{12}x^2y - 3b_{21}xy^2 - b_{12}y^3)/3,\\ \dot{y} &= (-b_{12}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 - b_{21}y^3)/3.\end{aligned} \tag{3.234}$$

Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului sistemul (3.234) poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = x(x^2 - 3y^2), \quad \dot{y} = y(3x^2 - y^2). \tag{3.235}$$

Acest sistem, pe lângă dreptele complexe $y = \pm ix$, fiecare de multiplicitatea trei, mai admite două drepte invariante reale $x = 0$ şi $y = 0$. Prin urmare, (3.235) aparţine clasei $\mathbb{CSL}_9$ şi a fost studiat în lucrarea [41].

Respectând condiţia (3.2), uşor se poate arăta, că în cazul realizării condiţiilor (3.229) sau (3.231) multiplicitatea algebrică a dreptelor $y = \pm ix$ nu poate fi mai mare decât doi.

Lema 3.3.6. *În clasa sistemelor cubice diferenţiale* $\{(3.1), (3.2)\}$ *multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante relativ complexe este egală cu trei.*

Lema 3.3.7. *Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic ce admite o dreptă invariantă relativ complexă de multiplicitatea algebrică trei poate fi scris sub forma* (3.235)*.*

Lema 3.3.8. *În clasa* $\mathbb{CSL}^{np}_{2(c)}$ *multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante relativ complexe este egală cu doi.*

Demonstraţia Teoremei 3.3.1 rezultă din lemele 3.3.2 şi 3.3.6.

3.3.2. Clasificarea sistemelor cubice ce posedă două drepte invariante afine pur imaginare şi pentru care dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică maximală

În clasa $\mathbb{CSL}^{p}_{2(c)}$ are loc următoarea teoremă:

Teorema 3.3.2. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului, orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}^{p}_{2(c)}$*, ce realizează consecutivitatea de multiplicităţi (parţial) maximală* $(m_\infty(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty))$ $m(\mu_1, \mu_2; \mu_\infty)$*, poate fi scris sub una dintre următoarele forme:*

$m(2,2;3)$	1)	$\dot{x} = x^2 + 1, \quad \dot{y} = x^3 + 2xy + a;$
$m_\infty(1,1;4)$	2.1)	$\dot{x} = x^2 + 1, \quad \dot{y} = x^3 - xy + ay + b;$
	2.2)	$\dot{x} = (x^2 + 1)(ax + y), \quad \dot{y} = b, \ b \neq 0.$

Pentru demonstrarea acestei teoreme vom examina următoarele două cazuri posibile în clasa $\mathbb{CSL}^p_{2(c)}$:

1) $m_\infty(2,2;\mu_\infty)$**,** **2)** $m_\infty(1,1;\mu_\infty)$**.**

1) Cazul $m_\infty(2,2;\mu_\infty)$.

Vom determina multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit μ_∞ în cazul când dreptele $x = \pm i$, au multiplicitatea $\mu = 2$, adică atunci când se realizează una dintre seriile de condiţii (3.222)-(3.223) din lema 3.3.1.

1. Condiţiile $\{(3.222), (3.2)\}$. Sistemul cubic (3.221) ia forma

$$\begin{aligned}&\dot{x} = (a_{00} + a_{30}x)(x^2 + 1),\\ &\dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{30}x^3 + b_{01}y + 2a_{00}xy + (b_{01} + 2a_{30})x^2y.\end{aligned} \tag{3.236}$$

Considerăm sistemul omogenizat, corespunzător sistemului (3.236),

$$\begin{aligned}&\dot{x} = (a_{00}Z + a_{30}x)(x^2 + Z^2), \quad \dot{y} = b_{00}Z^3 + b_{10}xZ^2 + b_{20}x^2Z + b_{30}x^3 +\\ &b_{01}yZ^2 + 2a_{00}xyZ + (b_{01} + 2a_{30})x^2y.\end{aligned} \tag{3.237}$$

Pentru (3.237) avem $C_0(x,y) = a_{30}(2a_{30} + b_{01})x^7(b_{30}x + a_{30}y + b_{01}y)$. Ţinând cont de (3.2), $C_0(x,y)$ va fi identic egal cu zero atunci când are loc una dintre următoarele două condiţii:

$$a_{30} = 0; \tag{3.238}$$

$$b_{01} = -2a_{30}, a_{30} \neq 0. \tag{3.239}$$

În cazul condiţiei (3.238) au loc implicaţiile: $\{(3.2),\ C_1(x,y) = a_{00}b_{01}x^6(b_{30}x + b_{01}y) \equiv 0\}$ $\Rightarrow \{\ b_{01} = 0, a_{00}b_{30} \neq 0\} \Rightarrow C_2(x,y) = 3a_{00}^2b_{30}x^6 \not\equiv 0,\ \mu_\infty = 3$.

Sistemul cubic (3.236) ia forma:

$$\dot{x} = a_{00}(x^2 + 1), \qquad \dot{y} = b_{30}x^3 + b_{20}x^2 + 2a_{00}xy + b_{10}x + b_{00}, \quad a_{00}b_{30} \neq 0, \tag{3.240}$$

iar $C_2(x,y) = 3a_{00}^2b_{30}x^6 \not\equiv 0$. Astfel, în acest caz multiplicitatea dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât trei. Sistemul (3.240) realizează consecutivitatea de multiplicităţi $m_\infty(2,2;3)$.

Prin intermediul transformării $x \to x, y \to (2b_{30}y - 2b_{20}x - b_{10})/(2a_{00})$, rescalării timpului $t \to t/a_{00}$ şi a notaţiei $a = (b_{00} + b_{20})/b_{30}$, sistemul (3.240) se scrie sub forma:

$$\dot{x} = x^2 + 1, \qquad \dot{y} = x^3 + 2xy + a. \tag{3.241}$$

Sistemul obţinut este Darboux integrabil şi are integrala primă

$$F(x,y) = (x^2 + 1)\, exp(((1 + ax - 2y)/(1 + x^2)) + a \cdot arctg\, x).$$

În cazul când are loc condiţia (3.239) avem: $\{(3.2),\ C_1(x,y) = -a_{30}x^6(a_{30}b_{20}x - 3a_{00}b_{30}x + 4a_{00}a_{30}y) \equiv 0\} \Rightarrow \{\ a_{00} = b_{20} = 0\} \Rightarrow C_2(x,y) = 2a_{30}^2x^5(-b_{10}x + 3a_{30}y) \not\equiv 0$. Sistemul cubic (3.236) ia forma:

$$\dot{x} = a_{30}x(x^2+1), \qquad \dot{y} = b_{30}x^3 + b_{10}x - 2a_{30}y + b_{00}, \quad a_{30}b_{30} \neq 0. \tag{3.242}$$

Acest sistem cubic realizează consecutivitatea de multiplicităţi $m_\infty(2,2,1;3)$, adică mai admite o dreaptă invariantă afină $x = 0$, şi nu aparţine clasei $\mathbb{CSL}^p_{2(c)}$.

2. Condiţiile $\{(3.223),\ (3.2)\}$. În acest caz sistemul cubic (3.221) şi polinomul $C_0(x,y)$ arată astfel

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = (a_{00} + a_{30}x + a_{21}y)(x^2+1),\\
&\dot{y} = (a_{21}b_{00} + a_{21}b_{10}x - 4a_{00}a_{30}x^2 + a_{21}b_{00}x^2 - a_{00}b_{01}x^2 + a_{30}b_{11}x^2 +\\
&a_{00}b_{21}x^2 + 2a_{00}^2x^3 - 2a_{30}^2x^3 - a_{30}b_{01}x^3 + a_{21}b_{10}x^3 - a_{00}b_{11}x^3 + a_{30}b_{21}x^3 +\\
&a_{21}b_{01}y + a_{21}b_{11}xy + a_{21}b_{21}x^2y + 2a_{21}^2xy^2)/a_{21};
\end{aligned} \tag{3.243}$$

$C_0(x,y) \equiv x^4(2a_{00}^2x^2 - 2a_{30}^2x^2 - a_{30}b_{01}x^2 + a_{21}b_{10}x^2 - a_{00}b_{11}x^2 + a_{30}b_{21}x^2 - a_{21}a_{30}xy + a_{21}b_{21}xy + a_{21}^2y^2)(-2a_{00}^2x^2 + 2a_{30}^2x^2 + a_{30}b_{01}x^2 - a_{21}b_{10}x^2 + a_{00}b_{11}x^2 + 4a_{21}a_{30}xy + 2a_{21}^2y^2)/a_{21} \not\equiv 0$. Prin urmare, pentru (3.243) multiplicitatea dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât unu.

Lema 3.3.9. *Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic ce are exact două drepte invariante complexe paralele de multiplicitatea maximală $m(2,2;3)$ poate fi scris sub forma* (3.241).

Multiplicitate geometrică.

Exemplul 3.3.1. *Sistemul cubic perturbat*

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = (x^2+1)(\epsilon x+1), \quad \dot{y} = (4x^3 + 8xy + 4a - 3\epsilon + 8ax\epsilon - 12x^2\epsilon + 4y\epsilon + 24x^2y\epsilon +\\
&4y^2\epsilon - 4a\epsilon^2 + 6x\epsilon^2 + 8ay\epsilon^2 - 24xy\epsilon^2 + 24xy^2\epsilon^2 - \epsilon^3 + 6y\epsilon^3 - 12y^2\epsilon^3 + 8y^3\epsilon^3)/4,
\end{aligned} \tag{3.244}$$

admite şase drepte invariante diferite: $l_1 \equiv x - i = 0$, $l_2 \equiv x + i = 0$, $l_{3,4} \equiv x \pm i\sqrt{1+a\epsilon} + \epsilon y - \epsilon/2 = 0$, $l_5 \equiv x + 1/\epsilon = 0$, $l_6 \equiv 2x + 2\epsilon y - \epsilon + 1/\epsilon = 0$.

Dacă $\epsilon \to 0$, *atunci sistemul* (3.244) *tinde spre* (3.241), *dreptele* l_1, l_3 *tind spre* $x = i$, l_2, l_4 *tind spre* $x = -i$, *iar* l_5 *şi* l_6 *tind spre infinit.*

2) Cazul $m_\infty(1,1;\mu_\infty)$.

Considerăm sistemul omogenizat, corespunzător sistemului (3.221),

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = (x^2+Z^2)(a_{00}Z + a_{30}x + a_{21}y), \qquad \dot{y} = b_{00}Z^3 + b_{10}xZ^2 + b_{20}x^2Z + b_{30}x^3 +\\
&b_{01}yZ^2 + b_{11}xyZ + b_{21}x^2y + b_{02}y^2Z + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3.
\end{aligned} \tag{3.245}$$

Pentru (3.245) reprezentăm polinomul $E_1(\mathbb{X})$ sub forma (3.20). Astfel, $C_0(x,y) = x^2(b_{30}x^3 - (a_{30}-b_{21})x^2y - (a_{21}-b_{12})xy^2 + b_{03}y^3)((a_{30}b_{21} - a_{21}b_{30})x^3 + 2a_{30}b_{12}x^2y + (3a_{30}b_{03} + a_{21}b_{12})xy^2 + 2a_{21}b_{03}y^3)$. Pentru multiplicitatea algebrică μ_∞ a dreptei de la infinit avem $\mu_\infty \geq 2$, atunci când are loc identitatea $C_0(x,y) \equiv 0$. Ţinând cont de (3.2), polinomul $C_0(x,y)$ este identic zero, dacă se realizează una dintre următoarele trei serii de condiţii:

$$a_{21} = a_{30} = 0; \tag{3.246}$$

$$a_{21} = b_{03} = b_{21} = b_{12} = 0, a_{30} \neq 0; \tag{3.247}$$

$$b_{03} = b_{12} = 0, b_{30} = a_{30}b_{21}/a_{21}, a_{21} \neq 0. \tag{3.248}$$

1. Condiţiile $\{(3.246), (3.2)\}$. În acest caz obţinem $C_1(x,y) = a_{00}x^2(b_{21}x^2 + 2b_{12}xy + 3b_{03}y^2)\cdot(b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3)$. Identitatea $C_1(x,y) \equiv 0$ implică următoarele două seturi de condiţii:

$$b_{30} = b_{03} = b_{21} = b_{12} = 0; \tag{3.249}$$

$$b_{03} = b_{21} = b_{12} = 0. \tag{3.250}$$

Condiţiile (3.249) ne conduc la un sistem pătratic, dar în cazul realizării condiţiilor (3.250) muliplicitatea dreptei de la infinit $\mu_\infty = 3$, iar $C_2(x,y) = a_{00}b_{30}x^5(a_{00}x + b_{11}x + 2b_{02}y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$b_{02} = 0, b_{11} = -a_{00}, a_{00}b_{30} \neq 0. \tag{3.251}$$

Astfel, sistemul cubic (3.221) ia forma

$$\dot{x} = a_{00}(x^2+1), \quad \dot{y} = b_{30}x^3 + b_{20}x^2 - a_{00}xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00}, a_{00}b_{30} \neq 0. \tag{3.252}$$

La acest pas $C_3(x,y) = -a_{00}x^4(a_{00}b_{20}x - b_{01}b_{30}x - 2a_{00}^2y) \not\equiv 0$, deci multiplicitatea dreptei de la infinit este egală cu patru.

Prin intermediul transformării $x \to x$, $y \to (4b_{10}a_{00} + 2b_{01}b_{20} + 2b_{20}a_{00}x + 4b_{30}a_{00}y)/(4a_{00}^2)$, rescalării timpului $t \to t/a_{00}$ şi a notaţiilor $a = b_{01}/a_{00}$, $b = (2a_{00}^2b_{00} + 2a_{00}b_{01}b_{10} - a_{00}^2b_{20} + b_{01}^2b_{20})/(2a_{00}^2b_{30})$, sistemul (3.252) poate fi scris sub forma:

$$\dot{x} = x^2+1, \qquad \dot{y} = x^3 - xy + ay + b. \tag{3.253}$$

Sistemul obţinut are factorul integrant $\mu(x) = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}((x-i)/(x+i))^{\frac{ia}{2}}$.

2. Condiţiile $\{(3.247), (3.2)\}$. În acest caz sistemul cubic

$$\dot{x} = (a_{30}x + a_{00})(x^2+1), \quad a_{30} \neq 0, \quad \dot{y} = b_{30}x^3 + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{10}x + b_{01}y + b_{00},$$

pe lângă dreptele invariante $x = \pm i$, mai admite şi dreapta afină invariantă $a_{30}x + a_{00} = 0$, deci el nu face parte din clasa sistemelor diferenţiale, studiate în această lucrare.

3. Condiţiile $\{(3.248),\ (3.2)\}$. Identitatea $C_1(x,y) = -x^3(a_{30}x + a_{21}y)\cdot(a_{21}a_{30}b_{20}x^3 - a_{00}a_{30}b_{21}x^3 - a_{30}b_{11}b_{21}x^3 + a_{21}b_{20}b_{21}x^3 - a_{00}b_{21}^2x^3 + 2a_{21}a_{30}b_{11}x^2y - 2a_{30}b_{02}b_{21}x^2y + 3a_{21}a_{30}b_{02}xy^2 + a_{21}^2b_{11}xy^2 - a_{21}b_{02}b_{21}xy^2 + 2a_{21}^2b_{02}y^3)/a_{21} \equiv 0$ are loc atunci când se verifică una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$b_{02} = 0, b_{11} = 0, b_{20} = a_{00}b_{21}/a_{21}; \tag{3.254}$$

$$b_{02} = 0, b_{11} = 0, b_{21} = -a_{30}. \tag{3.255}$$

În cazul (3.254) avem $\mu_\infty = 3$ şi $C_2(x,y) = x^3(a_{30}x + a_{21}y)(-2a_{21}a_{30}b_{10}x^2 + 2a_{30}^2b_{21}x^2 + a_{30}b_{01}b_{21}x^2 - a_{21}b_{10}b_{21}x^2 - 3a_{21}a_{30}b_{01}xy - a_{21}^2b_{10}xy + 4a_{21}a_{30}b_{21}xy - 2a_{21}^2b_{01}y^2 + 2a_{21}^2b_{21}y^2)/a_{21}$. Polinomul $C_2(x,y)$ este identic egal cu zero, dacă

$$b_{21} = b_{01}, b_{10} = a_{30}b_{01}/a_{21}. \tag{3.256}$$

Astfel, obţinem următorul sistem cubic

$$\begin{gathered}\dot{x} = (a_{30}x + a_{21}y + a_{00})(x^2 + 1), \quad \dot{y} = (a_{30}b_{01}x^3 + a_{21}b_{01}x^2y + \\ a_{00}b_{01}x^2 + a_{30}b_{01}x + a_{21}b_{01}y + a_{21}b_{00})/a_{21},\end{gathered} \tag{3.257}$$

pentru care $C_3(x,y) \equiv -((a_{21}b_{00} - a_{00}b_{01})x^3(a_{30}x + a_{21}y)(3a_{30}x + b_{01}x + 2a_{21}y))/a_{21} \neq 0$, deci, în acest caz, multiplicitatea dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât patru. Prin intermediul transformării $x \to x$, $y \to (y + b_{01}x - a_{00})/a_{21}$ şi a notaţiilor $a = a_{30} + b_{01}$, $b = a_{21}b_{00} - a_{00}b_{01}$, sistemul (3.257) se scrie sub forma:

$$\dot{x} = (x^2 + 1)(ax + y), \qquad \dot{y} = b, \ \ b \neq 0. \tag{3.258}$$

În cazul (3.255) avem $C_2(x,y) = -x^3(a_{00}^2a_{30}^2x^3 + 2a_{30}^4x^3 + a_{30}^3b_{01}x^3 + a_{21}a_{30}^2b_{10}x^3 + 2a_{00}a_{21}a_{30}b_{20}x^3 + a_{21}^2b_{20}^2x^3 + 6a_{21}a_{30}^3x^2y + 4a_{21}a_{30}^2b_{01}x^2y + 2a_{21}^2a_{30}b_{10}x^2y + 6a_{21}^2a_{30}^2xy^2 + 5a_{21}^2a_{30}b_{01}xy^2 + a_{21}^3b_{10}xy^2 + 2a_{21}^3a_{30}y^3 + 2a_{21}^3b_{01}y^3)/a_{21}$ şi $\mu_\infty = 3$. Polinomul $C_2(x,y)$ este identic zero, dacă

$$b_{01} = -a_{30}, b_{10} = -a_{30}^2/a_{21}, b_{20} = -(a_{00}a_{30})/a_{21}. \tag{3.259}$$

Astfel, obţinem următorul sistem cubic

$$\begin{gathered}\dot{x} = (a_{30}x + a_{21}y + a_{00})(x^2 + 1), \quad \dot{y} = -(a_{30}^2x^3 + a_{21}a_{30}x^2y + \\ a_{00}a_{30}x^2 + a_{30}^2x + a_{21}a_{30}y - a_{21}b_{00})/a_{21},\end{gathered} \tag{3.260}$$

pentru care $C_3(x,y) \equiv -(2(a_{00}a_{30}+a_{21}b_{00})x^3(a_{30}x+a_{21}y)^2)/a_{21} \not\equiv 0$, deci, în acest caz, multiplicitatea dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât patru. Prin intermediul transformării $x \to x$, $y \to -(y+a_{30}x+a_{00})/a_{21}$, $t \to -t$, şi a notaţiei $b = a_{00}a_{30}+a_{21}b_{00}$, sistemul (3.260) se scrie sub forma:

$$\dot{x} = y(x^2+1), \quad \dot{y} = b, \quad b \neq 0. \tag{3.261}$$

Sistemul (3.261) reprezintă un caz particular al sistemului (3.258).

Lema 3.3.10. *Cu exactitatea unei transformări afine de coordonate şi a rescalării timpului orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}^{p}_{2(c)}$ *ce realizează consecutivitatea de multiplicităţi parţial maximală* $m_\infty(1,1;4)$ *are forma* (3.253) *sau* (3.258).

Multiplicitatea geometrică.

Exemplul 3.3.2. *Sistemul cubic perturbat*

$$\dot{x} = (x^2+1)(ax+y), \qquad \dot{y} = b(\epsilon y+1)(\epsilon y-1)(2\epsilon y+1), \ \ b \neq 0, \tag{3.262}$$

admite dreptele invariante: $l_1 = x-i$, $l_2 = x+i$, $l_3 = \epsilon y+1$, $l_4 = \epsilon y-1$, $l_5 = 2\epsilon y+1$.

Dacă $\epsilon \to 0$, *atunci sistemul* (3.262) *tinde către* (3.258), *iar dreptele* l_3, l_4, l_5 *tind la dreapta de la infinit* l_∞.

3.3.3. Clasificarea sistemelor cubice ce posedă două drepte invariante afine relativ complexe şi pentru care dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică maximală

În această secţiune vom arăta că are loc următoarea teoremă:

Teorema 3.3.3. *Cu ajutorul unei transformări afine şi a rescalării timpului, orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}^{np}_{2(c)}$ *ce realizează consecutivitatea (parţial) maximală de multiplicităţi* $(m_\infty(\mu_1,\mu_2;\mu_\infty))$ $m(\mu_1,\mu_2;\mu_\infty)$, *poate fi scris sub una dintre următoarele forme:*

$m(2,2;1)$ 1.1) $\dot{x} = 2dxy + ax^3 + (b+2)x^2y + cxy^2 + y^3,$
$\dot{y} = -dx^2 + dy^2 - x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3;$

1.2) $\dot{x} = 2dxy + ax^3 + (2b+3)x^2y + (3a-2c)xy^2 + y^3,$
$\dot{y} = -dx^2 + dy^2 - (b+2)x^3 + cx^2y + bxy^2 + (2a-c)y^3.$

$$1.3)\quad \dot{x} = fx + dx^2 + exy + ax^3 + (b+2)x^2y + cxy^2 + y^3,$$
$$\dot{y} = fy + dxy + ey^2 - x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3, f \neq 0;$$

$m_\infty(1,1;3)$

$$2.1)\quad \dot{x} = cx + dy + (x^2+y^2)(ax+y+b),$$
$$\dot{y} = -dx + cy - (x^2+y^2)(a^2x + ay - e), \quad c^2 + d^2 \neq 0;$$
$$2.2)\quad \dot{x} = cx + dy + (x^2+y^2)(ax+y+b),$$
$$\dot{y} = -dx + cy + e(x^2+y^2)(ax+y+b), \quad d \neq 0.$$

Pentru demonstrarea teoremei 3.3.3 vom examina cazurile:

1) $m_\infty(2,2;\mu_\infty)$**,** **2)** $m_\infty(1,1;\mu_\infty)$**.**

1) Cazul $m_\infty(2,2;\mu_\infty)$**.**

Vom determina multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit μ_∞ în cazul când dreptele $y = \pm ix$ au multiplicitatea $\mu = 2$, adică atunci când se realizează una dintre seriile de condiţii (3.229)-(3.231) ale lemei 3.3.5.

Uşor se poate arăta, că în fiecare dintre cazurile (3.229)-(3.231) multiplicitatea algebrică μ_∞ a dreptei de la infinit nu poate fi mai mare decât unu. Atunci, ţinând cont de condiţiile (3.229)-(3.231) şi făcând abstracţie de rescalarea timpului, obţinem următoarele trei sisteme cubice ce posedă exact trei drepte invariante (incluzând şi dreapta de la infinit), dintre care dreptele afine sunt relativ complexe, ce realizează consecutivitatea maximală de multiplicităţi $m(2,2;1)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2dxy + ax^3 + (b+2)x^2y + cxy^2 + y^3, \\ \dot{y} &= -dx^2 + dy^2 - x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3; \end{aligned} \tag{3.263}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2dxy + ax^3 + (2b+3)x^2y + (3a-2c)xy^2 + y^3, \\ \dot{y} &= -dx^2 + dy^2 - (b+2)x^3 + cx^2y + bxy^2 + (2a-c)y^3; \end{aligned} \tag{3.264}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= fx + dx^2 + exy + ax^3 + (b+2)x^2y + cxy^2 + y^3, \\ \dot{y} &= fy + dxy + ey^2 - x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3, f \neq 0. \end{aligned} \tag{3.265}$$

Lema 3.3.11. *Cu ajutorul unei transformări afine de coordonate şi a rescalării timpului orice sistem cubic din clasa* $\mathbb{CSL}^{np}_{2(c)}$ *ce realizează consecutivitatea maximală de multiplicităţi* $m(2,2;1)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele trei forme:* (3.263), (3.264), (3.265).

Sistemul (3.263) are integrala primă $F(x,y) = ((a-c)xy + (b+1)y^2 - 2dx)/(x^2+y^2) + (a + c)arctg(y/x) + ln(x^2+y^2)$.

Multiplicitatea geometrică.

Exemplul 3.3.3. *Sistemul cubic perturbat*

$$\dot{x} = ax^3 + 2dxy + 3x^2y + 2bx^2y + 3axy^2 - 2cxy^2 + y^3 + dy\alpha + 3xy\alpha + bxy\alpha + 3ay^2\alpha - cy^2\alpha$$
$$-ax\alpha^2 + y\alpha^2,$$
$$\dot{y} = -dx^2 - 2x^3 - bx^3 + cx^2y + dy^2 + bxy^2 + 2ay^3 - cy^3 - dx\alpha - 3x^2\alpha - bx^2\alpha - 3axy\alpha + cxy\alpha$$
$$-x\alpha^2 - ay\alpha^2$$

admite dreptele invariante: $l_1 \cdot l_2 = x^2 + y^2$, $l_3 \cdot l_4 = x^2 + y^2 + 2x\alpha + \alpha^2$.

Dacă $\alpha \to 0$, *atunci sistemul perturbat tinde la sistemul* (3.264) *şi dreptele* l_3, l_4 *tind la dreptele* l_1, l_2.

Exemplul 3.3.4. *Următorul sistem cubic perturbat*

$$\dot{x} = (2fx + 2dx^2 + 2ax^3 + 2exy + 2bx^2y + 2cxy^2 + 2y^3 + 2fx\alpha + 2dx^2\alpha + 2ax^3\alpha + 2exy\alpha + 2bx^2y\alpha$$
$$+2cxy^2\alpha + 4y^3\alpha + fx\alpha^2 + dx^2\alpha^2 + ax^3\alpha^2 + exy\alpha^2 + bx^2y\alpha^2 + cxy^2\alpha^2 + 2y^3\alpha^2)/(2 + 2\alpha + \alpha^2),$$
$$\dot{y} = (-2x^3 + 2fy + 2dxy + 2ax^2y + 2ey^2 - 4xy^2 + 2bxy^2 + 2cy^3 + 2fy\alpha + 2dxy\alpha + 2ax^2y\alpha$$
$$+2ey^2\alpha - 4xy^2\alpha + 2bxy^2\alpha + 2cy^3\alpha + fy\alpha^2 + dxy\alpha^2 + ax^2y\alpha^2 + ey^2\alpha^2 - 2xy^2\alpha^2$$
$$+bxy^2\alpha^2 + cy^3\alpha^2)/(2 + 2\alpha + \alpha^2)$$

posedă dreptele invariante: $l_1 \cdot l_2 = x^2 + y^2$, $l_3 \cdot l_4 = x^2 + y^2 + 2y^2\alpha + y^2\alpha^2$.

Pentru $\alpha \to 0$ *sistemul perturbat tinde la sistemul* (3.265), *iar dreptele* l_3 *şi* l_4 *tind către dreptele* l_1 *şi* l_2.

2) Cazul $m_\infty(1, 1; \mu_\infty)$**.**

Considerăm sistemul omogenizat

$$\begin{aligned}&\dot{x} = a_{10}xZ^2 + a_{01}yZ^2 + a_{20}x^2Z + a_{11}xyZ + a_{02}y^2Z + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y+\\&+a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \quad \dot{y} = a_{10}yZ^2 - a_{01}xZ^2 + (b_{02} - a_{11})x^2Z + (a_{20} - a_{02})xyZ+\\&+b_{02}y^2Z + (a_{03} - a_{21} + b_{12})x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + (a_{12} - a_{30} + b_{21})y^3,\end{aligned} \tag{3.266}$$

corespunzător sistemului (3.228). Pentru (3.266) determinăm $C_0(x, y) = -(x^2+y^2)C_{01}(x, y)\cdot C_{02}(x, y)$, unde $C_{01}(x, y) = (a_{03} - a_{21} + b_{12})x^2 + (b_{21} - a_{30})xy - a_{03}y^2$, $C_{02}(x, y) = (a_{03}a_{21} - a_{21}^2 + a_{21}b_{12} - a_{30}b_{21})x^4 + 2(a_{03}a_{12} - a_{12}a_{21} + a_{12}b_{12} - a_{30}b_{12})x^3y + (3a_{03}^2 - 3a_{03}a_{21} - 3a_{12}a_{30} + 3a_{30}^2 + 3a_{03}b_{12} - a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} - 3a_{30}b_{21})x^2y^2 + (a_{12}a_{30} + a_{03}b_{12} - a_{12}b_{21} - a_{12}^2)y^4$. Dacă $C_{01}(x, y) \equiv 0$, atunci sistemul cubic (3.228) are infinitul degenerat, prin urmare, vom cere ca $C_{02}(x, y) \equiv 0$ şi $C_{01}(x, y) \not\equiv 0$. Aşadar, multiplicitatea dreptei de la infinit $\mu_\infty = 2$, dacă

$$a_{12} = a_{30}, a_{21} = a_{03}, b_{12} = a_{30}b_{21}/a_{03}, a_{03} \neq 0. \tag{3.267}$$

Ţinând cond de (3.267), obţinem $C_1(x,y) = -(x^2+y^2)C_{11}(x,y)C_{12}(x,y)$, unde $C_{11}(x,y) = (a_{30}x+a_{03}y)/a_{03}^2 \not\equiv 0$, $C_{12}(x,y) = (a_{03}^2a_{30}b_{02}-a_{03}^2a_{11}a_{30}-a_{03}^2a_{11}b_{21}+a_{02}a_{03}a_{30}b_{21}-2a_{03}a_{20}a_{30}b_{21}+a_{03}^2b_{02}b_{21}-a_{03}a_{20}b_{21}^2+a_{11}a_{30}b_{21}^2)x^4-2a_{30}(a_{02}a_{03}^2-a_{03}^2a_{20}+2a_{03}a_{11}b_{21}-a_{02}b_{21}^2+a_{20}b_{21}^2)x^3y+(a_{03}^3a_{20}-a_{02}a_{03}^3+a_{03}^2a_{11}a_{30}+2a_{03}^2a_{30}b_{02}-4a_{03}^2a_{11}b_{21}-4a_{02}a_{03}a_{30}b_{21}+2a_{03}a_{20}a_{30}b_{21}+2a_{03}^2b_{02}b_{21}+a_{02}a_{03}b_{21}^2-3a_{03}a_{20}b_{21}^2-a_{11}a_{30}b_{21}^2)x^2y^2+2a_{03}(a_{03}^2a_{11}-2a_{02}a_{03}b_{21}+2a_{03}a_{20}b_{21}-a_{11}b_{21}^2)xy^3+a_{03}(a_{02}a_{03}^2-a_{03}^2a_{20}+a_{03}a_{30}b_{02}+a_{03}a_{11}b_{21}-a_{02}a_{30}b_{21}+a_{03}b_{02}b_{21}-a_{02}b_{21}^2)y^4$. Astfel, $\mu_\infty \geq 3$, dacă se realizează una dintre următoarele două serii de condiţii:

$$a_{20} = a_{02}, a_{11} = 0, b_{21} = -a_{30}; \tag{3.268}$$

$$a_{20} = a_{02}, a_{11} = 0, b_{02} = a_{02}b_{21}/a_{03}. \tag{3.269}$$

Avem respectiv sistemele:

$$\begin{gathered}\dot{x} = a_{30}x^3 + a_{03}x^2y + a_{30}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{02}x^2 + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y, \quad \dot{y} = -(a_{30}^2x^3+ \\ +a_{03}a_{30}x^2y + a_{30}^2xy^2 + a_{03}a_{30}y^3 - a_{03}b_{02}x^2 - a_{03}b_{02}y^2 + a_{01}a_{03}x - a_{03}a_{10}y)/a_{03};\end{gathered} \tag{3.270}$$

$$\begin{gathered}\dot{x} = a_{30}x^3 + a_{03}x^2y + a_{30}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{02}x^2 + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y, \quad \dot{y} = (a_{30}b_{21}x^3+ \\ +a_{03}b_{21}x^2y + a_{30}b_{21}xy^2 + a_{03}b_{21}y^3 + a_{02}b_{21}x^2 + a_{02}b_{21}y^2 - a_{01}a_{03}x + a_{03}a_{10}y)/a_{03}.\end{gathered} \tag{3.271}$$

În ambele cazuri μ_∞ nu poate fi mai mare decât trei, deoarece, dacă $C_2(x,y) \equiv 0$, atunci ambele sisteme degenerează.

Efectuând în (3.270), (3.271) rescalarea timpului $t \to t/a_{03}$ şi notând $a = a_{30}/a_{03}$, $b = a_{02}/a_{03}$, $c = a_{10}/a_{03}$, $d = a_{01}/a_{03}$, $e = b_{02}/a_{03}$, sistemul (3.270) capătă forma

$$\dot{x} = cx + dy + (x^2+y^2)(ax+y+b), \quad \dot{y} = -dx + cy - (x^2+y^2)(a^2x+ay-e), \tag{3.272}$$

iar, notând $a = a_{30}/a_{03}$, $b = a_{02}/a_{03}$, $c = a_{10}/a_{03}$, $d = a_{01}/a_{03}$, $e = b_{21}/a_{03}$, sistemul (3.271) se scrie astfel:

$$\dot{x} = cx + dy + (x^2+y^2)(ax+y+b), \quad \dot{y} = -dx + cy + e(x^2+y^2)(ax+y+b). \tag{3.273}$$

Lema 3.3.12. *Prin intermediul unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic ce are două drepte invariante complexe concurente şi care realizează consecutivitatea parţial maximală de multiplicităţi* $m_\infty(1,1;3)$ *poate fi scris sub una dintre următoarele două forme:* (3.272), (3.273).

Sistemul (3.272) are integrala primă $F = y^2 + 2by + 2c \cdot arctg(y/x) + d \cdot ln(x^2+y^2) + x(a^2x + 2ay - 2e)$.

Multiplicitatea geometrică.

Exemplul 3.3.5. *Sistemul cubic perturbat*

$\dot{x} = cx + bx^2 + ax^3 + dy + x^2y + by^2 + axy^2 + y^3 - cxy\epsilon + cexy\epsilon + dexy\epsilon - de^2xy\epsilon - dy^2\epsilon - cey^2\epsilon + dey^2\epsilon + ce^2y^2\epsilon + cdex\epsilon^2 - c^2e^2x\epsilon^2 + bdex^2\epsilon^2 - bce^2x^2\epsilon^2 + adex^3\epsilon^2 - ace^2x^3\epsilon^2 + d^2ey\epsilon^2 - cde^2y\epsilon^2 + 2dex^2y\epsilon^2 + ce^2x^2y\epsilon^2 - de^3x^2y\epsilon^2 + bdey^2\epsilon^2 - bce^2y^2\epsilon^2 - cexy^2\epsilon^2 + adexy^2\epsilon^2 - ace^2xy^2\epsilon^2 + 2de^2xy^2\epsilon^2 + ce^3xy^2\epsilon^2 + dey^3\epsilon^2 - ce^2y^3\epsilon^2 + 2c^2e^2xy\epsilon^3 + cde^2xy\epsilon^3 + d^2e^2xy\epsilon^3 - c^2e^3xy\epsilon^3 - cde^3xy\epsilon^3 - 2d^2e^3xy\epsilon^3 + cde^2y^2\epsilon^3 + d^2e^2y^2\epsilon^3 + c^2e^3y^2\epsilon^3 + cde^3y^2\epsilon^3 - c^2de^3x\epsilon^4 - bcde^3x^2\epsilon^4 - acde^3x^3\epsilon^4 - cd^2e^3y\epsilon^4 - cde^3x^2y\epsilon^4 - 2c^2e^4x^2y\epsilon^4 - 2d^2e^4x^2y\epsilon^4 - bcde^3y^2\epsilon^4 + 2c^2e^3xy^2\epsilon^4 - acde^3xy^2\epsilon^4 + 2d^2e^3xy^2\epsilon^4 - cde^3y^3\epsilon^4 - c^3e^4xy\epsilon^5 - c^2de^4xy\epsilon^5 - cd^2e^4xy\epsilon^5 - d^3e^4xy\epsilon^5 - c^2de^5x^2y\epsilon^6 - d^3e^5x^2y\epsilon^6 - c^3e^5xy^2\epsilon^6 - cd^2e^5xy^2\epsilon^6,$

$\dot{y} = (-dx + bex^2 + aex^3 + cy + ex^2y + bey^2 + aexy^2 + ey^3 - dex^2\epsilon - ce^2x^2\epsilon + de^2x^2\epsilon + ce^3x^2\epsilon + dxy\epsilon + cexy\epsilon - dexy\epsilon - ce^2xy\epsilon - cy^2\epsilon + cey^2\epsilon - ce^2y^2\epsilon + ce^3y^2\epsilon - d^2ex\epsilon^2 + 2cde^2x\epsilon^2 + 2bde^2x^2\epsilon^2 - bce^3x^2\epsilon^2 + 2ade^2x^3\epsilon^2 - ace^3x^3\epsilon^2 + de^3x^3\epsilon^2 + ce^4x^3\epsilon^2 + cdey\epsilon^2 - 2c^2e^2y\epsilon^2 + de^2x^2y\epsilon^2 - 2ce^3x^2y\epsilon^2 + 2bde^2y^2\epsilon^2 - bce^3y^2\epsilon^2 + dexy^2\epsilon^2 + 2ce^2xy^2\epsilon^2 + 2ade^2xy^2\epsilon^2 - ace^3xy^2\epsilon^2 + ce^4xy^2\epsilon^2 - cey^3\epsilon^2 + 3de^2y^3\epsilon^2 - ce^3y^3\epsilon^2 - d^2e^2x^2\epsilon^3 + 2d^2e^3x^2\epsilon^3 + c^2e^4x^2\epsilon^3 + 2cde^4x^2\epsilon^3 - 2cde^2xy\epsilon^3 - d^2e^2xy\epsilon^3 - 2c^2e^3xy\epsilon^3 + c^2e^4xy\epsilon^3 + 3c^2e^2y^2\epsilon^3 + cde^2y^2\epsilon^3 - 2c^2e^3y^2\epsilon^3 - 2cde^3y^2\epsilon^3 + c^2e^4y^2\epsilon^3 + 3cde^4y^2\epsilon^3 + 2cd^2e^3x\epsilon^4 - c^2de^4x\epsilon^4 + bd^2e^3x^2\epsilon^4 - 2bcde^4x^2\epsilon^4 + ad^2e^3x^3\epsilon^4 - 2acde^4x^3\epsilon^4 + 2d^2e^4x^3\epsilon^4 + 2cde^5x^3\epsilon^4 - 2c^2de^3y\epsilon^4 + c^3e^4y\epsilon^4 - 2cde^4x^2y\epsilon^4 + c^2e^5x^2y\epsilon^4 + bd^2e^3y^2\epsilon^4 - 2bcde^4y^2\epsilon^4 - cde^3xy^2\epsilon^4 + ad^2e^3xy^2\epsilon^4 - 4c^2e^4xy^2\epsilon^4 - 2acde^4xy^2\epsilon^4 + 3cde^5xy^2\epsilon^4 + 3c^2e^3y^3\epsilon^4 + 2d^2e^3y^3\epsilon^4 - 4cde^4y^3\epsilon^4 + cd^2e^4x^2\epsilon^5 + d^3e^4x^2\epsilon^5 + c^2de^5x^2\epsilon^5 + cd^2e^5x^2\epsilon^5 + c^2de^4xy\epsilon^5 + cd^2e^4xy\epsilon^5 + c^3e^5xy\epsilon^5 + c^2de^5xy\epsilon^5 - 3c^3e^4y^2\epsilon^5 - 2c^2de^4y^2\epsilon^5 - cd^2e^4y^2\epsilon^5 + c^3e^5y^2\epsilon^5 + 2c^2de^5y^2\epsilon^5 + 3cd^2e^5y^2\epsilon^5 - c^2d^2e^5x\epsilon^6 - bcd^2e^5x^2\epsilon^6 - acd^2e^5x^3\epsilon^6 + d^3e^5x^3\epsilon^6 + cd^2e^6x^3\epsilon^6 + c^3de^5y\epsilon^6 + c^2de^6x^2y\epsilon^6 - bcd^2e^5y^2\epsilon^6 - c^2de^5xy^2\epsilon^6 - acd^2e^5xy^2\epsilon^6 + 2c^3e^6xy^2\epsilon^6 + 3cd^2e^6xy^2\epsilon^6 - 3c^3e^5y^3\epsilon^6 - 3cd^2e^5y^3\epsilon^6 + c^2de^6y^3\epsilon^6 + c^4e^6y^2\epsilon^7 + c^3de^6y^2\epsilon^7 + c^2d^2e^6y^2\epsilon^7 + cd^3e^6y^2\epsilon^7 + c^3de^7xy^2\epsilon^8 + cd^3e^7xy^2\epsilon^8 + c^4e^7y^3\epsilon^8 + c^2d^2e^7y^3\epsilon^8)/(1 - ce^2\epsilon^2)$

are dreptele invariante: $l_1 \cdot l_2 = x^2 + y^2$, $\quad l_3 = 1 + ex\epsilon - y\epsilon + de\epsilon^2 + de^2x\epsilon^3 + ce^2y\epsilon^3$, $\quad l_4 = -1 + e^2x\epsilon - ey\epsilon + ce^2\epsilon^2 + de^3x\epsilon^3 + ce^3y\epsilon^3$.

Pentru $\epsilon \to 0$ *sistemul dat tinde la sistemul* (3.273)*, iar dreptele* $l_3, l_4 \to l_\infty$.

3.4. Concluzii la capitolul trei.

În capitolul trei au fost cercetate sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale cu exact trei drepte invariante distincte (incluzând şi dreapta de la infinit). În studiul acestei clase de sisteme cubice s-a ţinut cont de multiplicitatea maximală a dreptelor invariante, fiind determinate consecutivităţile de multiplicităţi total maximale, dar şi consecutivităţile de multiplicităţi parţial maximale a dreptelor invariante. Astfel, făcând abstracţie de o transformare afină a spaţiului de fază şi de rescalarea timpului, au fost obţinute următoarele rezulatate:

– au fost determinate formele canonice ale sistemelor cubice ce admit două drepte invariante afine (reale sau complexe) de multiplicitate maximală;

– a fost efectuată clasificarea afină a sistemelor cubice diferenţiale cu trei drepte invariante, inclusiv dreapta de la infinit, de multiplicitate maximală. Această clasificare conţine elemente din clasa sistemelor cubice diferenţiale cu drepte invariante de multiplicitate totală opt ($m(4,3;1), m(4,1,3), m(3,1;4)$), şapte ($m(4,2;1), m(3,3;1), m(3,2;2), m(3,1;3), m(2,2;3)$, $m(2,1;4)$), şase ($m(2,1;3)$, $m(1,1;4)$) şi cinci ($m(2,2;1)$, $m(1,1;3)$).

– au fost construite sistemele cubice perturbate corespunzătoare formelor canonice obţinute în cazul sistemelor cubice ce posedă două drepte invariante afine şi reale;

– au fost construite integralele prime Darboux sau factorul integrant Darboux pentru sistemele obţinute care au un număr suficient de drepte invariante (enumerându-se şi multiplicităţile) pentru a fi integrabile Darboux.

Menţionăm că formele canonice a sistemelor cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală opt, adică sistemele cubice ce admit una din consecutivităţile $m(4,3;1)$, $m(4,1,3)$, $m(3,1;4)$, au fost determinate şi de C. Bujac în [9], însă în teza de faţă s-a folosit o altă metodologie de cercetare, având drept scop determinarea multiplicităţilor maximale a dreptelor invariante.

Ţinând cont de rezultatele obţinute în capitolul trei deducem următoarele concluzii:

1. multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine din clasa $\mathbb{CSL}^{p}_{2(r)}$ este mai mare decât a celor din clasele $\mathbb{CSL}^{np}_{2(r)}$, $\mathbb{CSL}^{p}_{2(c)}$, $\mathbb{CSL}^{np}_{2(c)}$.

2. pentru sistemele cubice cu trei drepte invariante (enumerând şi dreapta invariantă de la infinit) micşorarea multiplicităţii unei drepte invariante afine nu implică creşterea proporţională a multiplicităţii maximale a dreptei de la infinit;

3. problema determinării echivalenţei dintre noţiunile de multiplicitate algebrică şi cea geometrică pe un ansamblu de drepte invariante complexe rămâne o problemă deschisă.

Rezultatele expuse în acest capitol au fost publicate în [77]-[81], [88]-[90].

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

În lucrare, din punct de vedere al teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, au fost studiate sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale cu drepte invariante multiple. Pentru a facilita efectuarea acestui studiu a fost introdusă noţiunea de *consecutivitate maximală (parţial maximală) de multiplicităţi a dreptelor invariante.*

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu una (cea de la infinit), cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală şi construirea în cazul dreptelor invariante reale a sistemelor cubice perturbate corespunzătoare formelor canonice.

Rezultatele cercetărilor elaborate ne permit de a efectua următoarele concluzii şi recomandări:

Concluzii generale:

1. În teza de faţă pentru prima dată s-a pus şi s-a rezolvat problema de determinare în clasa sistemelor cubice a multiplicităţii maximale a unei drepte invariante afine şi a dreptei invariante de la infinit, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al sistemelor cubice cu drepte invariante ([83]-[85], [73], [74], [76],[79], [81]);

2. Estimaţia multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine pentru clasa sistemelor diferenţiale polinomiale de gradul n poartă un caracter teoretic şi poate servi drept punct de reper pentru calcularea multiplicităţii maximale pentru sistemele diferenţiale polinomiale de grad mai mare ca trei ([79]);

3. Clasificarea sistemelor cubice cu două şi cu trei drepte invariante de multiplicitate maximală reprezintă o continuare a studiului sistemelor cubice cu drepte invariante, efectuat anterior ([75], [77], [78], [80],[81], [86]-[90]);

4. Problema de determinare a echivalenţei dintre noţiunile de multiplicitate algebrică şi cea geometrică pe un ansamblu de curbe algebrice invariante a fost rezolvată în cazul sistemelor cubice cu două drepte invariante reale, iar pentru dreptele invariante complexe problema dată rămâne deschisă.

Recomandări:

Rezultatele obţinute şi metodele elaborate pot fi folosite:

- la studierea sistemelor diferenţiale polinomiale cu drepte invariante de multiplicitate totală egală cu 5, 6, 7;

- la studierea ulterioară a sistemelor diferenţiale polinomiale cu curbe algebrice invariante;

- la investigarea diferitor modele matematice din fizică, chimie, biologie ş. a.;

- în programele cursurilor opţionale a facultăţilor universitare cu profil real.

BIBLIOGRAFIE

1. Andronov A.A. şi al. Qualitative theory of second-order dynamical systems. John. Wiler Sons, New York, 1973.
2. Artés J. and Llibre J. On the number of slopes of invariant straight lines for polynomial differential systems., Jour. of Nanjing University, 1996, vol. 13, p. 143-149.
3. Artés J., Llibre J. and Vulpe N. Quadratic systems with an integrable saddle: A complete classification in the coefficient space $\mathbb{R}^{12}$, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2012, Volume 75, Issue 14, 54165447.
4. Artés J. C., Grünbaum B., Llibre J On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems, Pacific Journal of Mathematics, 184, 1998, No. 2, 207-300.
5. Bautin N. N. On periodic solutions of a system of differential equations, Prikl. Mat. i Mekh., 18, 1954, No. 1, 128.
6. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math., 24, 1901, p. 1-88.
7. Bujac C. One subfamily of cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with two distinct real infinite singularities. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat., 2015, No. 1(77), 1–39.
8. Bujac C. One new class of cubic systems with maximum number of invariant omitted in the classification of J.Llibre and N.Vulpe. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat., 2014, No. 2(75), 102–105.
9. Bujac C. Cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight. Doctor thesis, 2016, 1-165.
10. Bujac C., J. Llibre, N. Vulpe First Integrals and Phase Portraits of Planar Polynomial Differential Cubic Systems with the Maximum Number of Invariant Straight Lines. Qualitative Theory of Dynamical Systems. Volume 15, Issue 2. DOI: 10.1007/s12346-016-0211-2, pp.327- 348.
11. Bujac C. and Vulpe N. Cubic systems with invariant straight lines of total multiplicity eight and with three distinct infinite singularities, Qual. Theory Dyn. Syst. 14 (2015), No. 1, 109–137.

12. Bujac C. and Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 423 (2015), No. 2, 1025–1080.
13. Bujac C. and Vulpe N. Classification of cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight and two distinct infinite singularities. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2015, no. 74, pp. 1–38.
14. Bujac C. and Vulpe N. Cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight possessing one infinite singularity. Qualitative Theory of Dynamical Systems. DOI: 10.1007/s12346-016-0188-x, pp. 1-30.
15. Chavarriga J., Llibre J. and Sotomayor J. Algebraic solutions for polynomial systems with emphasis in the quadratic case. Expos. Math., 1997, vol. 15, no. 2, p. 161-173.
16. Chavarriga J., Giné J. Integrability of cubic systems with degenerate infinity. Differential Equations Dynam. Systems, 6, 1998, No. 4, 425-438.
17. Chavarriga J., Giné J., García I. Isochronous centers of cubic systems with degenerate infinity. Differential Equations Dynam. Systems, 7, 1999, No. 2, 221-238.
18. Cherkas L. A., Zhilevich L. I. Some tests for the absence or uniqueness of limit cycles. Differentsial'nye Uravnenia, 6, 1970, No. 7, 1170-1178 (Russian).
19. Cherkas L. A., Zhilevich L. I. The limit cycles of certain differential equations. Differentsial'nye Uravnenia, 8, 1972, No. 7, 1207-1213 (Russian).
20. Christopher C.J. Invariant algebraic curves and conditions for a center. Proc. Roy. Soc., Edinburgh, Sect. A, 1994, vol. 124, p. 1209-1229.
21. Christopher C., Llibre J., Pereira J. V. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. Pacific Journal of Mathematics, 329, 2007, No. 1, 63-117.
22. Colla B., Ferragutb A., Llibre J. Polynomial inverse integrating factors for quadratic differential systems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2010, Volume 73, Issue 4, 881-914.
23. Cozma D. Darboux integrability in the cubic differential systems with three invariant straight lines. Romai Journal, 2009, 5, No. 1, 45-61.
24. Cozma D. The problem of the center for cubic systems with two parallel invariant straight lines and one invariant conic. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2009, 16, No. 2, 213-234.

25. Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight line and invariant conics. Chişinău: Ştiinţa, 2013, - 240p.

26. Cozma D. V., Şubă A. S. Conditions of the existence of four invariant straight lines of the cubic systems in the case of centre or focus. Bulletin of Academy of Sciences of Rep. Moldova. Mathematics, 3, 1993, 54-62 (Russian).

27. Cozma D. V., Şubă A. S. Partial integrals and the first focal value in the problem of centre. Nonlinear Differential Equations, Italy, 2, 1995, No. 2, 21-34.

28. Cozma D., Şubă A. The solution of the problem of center for cubic differential systems with four invariant straight lines. Scientific Annals of the "Al. I. Cuza" University, Romania, Mathematics, 1998, XLIV, S. I.a, 517-530.

29. Cozma D., Şubă A. Solution of the problem of the center for a cubic differential system with three invariant straight lines. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2001, 2, No. 1, 129-143.

30. Dai Guoren, Wo Songlin Closed orbits and straight line invariants in E_3 systems. Acta Mathematica Scientia, 9, 1989, No. 3, 251-261 (Chinese).

31. Dai Guoren. Two estimates of the number of invariant lines of a system of polynomials of degree n (Chinese). In: Acta Math. Sci. 16 (1996), no. 2, p.232240.

32. Darboux G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. Bull. Sci. Math. Sér. 2, 1878, Vol. 2, p. 60-96, 123-144, 151-200.

33. Druzhkova T. A. Differential equations with algebraic invariant curves. PhD Thesis, Gorky, 1975, 129p (Russian).

34. Dulac H. Détérmination et intégration d'une certaine classe d'equations différentielles ayant pour point singuliere un centre. Bull. Sci. Math., 32, 1908, 230-252.

35. Jouanolou J.P. Equations de Pfaff algébriques. Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1979.

36. Kooij R.E. Limit cycles in polynomial systems. PhD Thesis Delft, 1993, p. 1-159.

37. Kooij R. E. Cubic systems with four real line invariants. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 118, 1995, No. 1, 7-19.

38. Kooij R. E. Cubic systems with four real line invariants, including complex conjugated lines. Preprint.

39. Kooij R. E. Real polynomial systems of degree n with $n + 1$ line invariants. J. of Diff. Eqs., 116, 1995, No. 2, 249-264.

40. Lawrence Perko Differential equations and dynamical systems. Third Edition, Springer, 2000, 555 p.

41. Llibre J. and Vulpe N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines. Rocky Mountain J. Math., 2006, vol. 36, no. 4, p. 1301-1373.

42. Llibre J. and Zhang X. Darboux theory of integrability for polynomial vector fields in $\mathbb{R}^n$ taking into account the multiplicity at infinity. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2009, Volume 133, Issue 7, 765-778.

43. Lloyd N. G. ş. a. Quadratic-like cubic systems. Differential Equations Dynam. Systems, 5, 1997, No. 3/4, 329-345.

44. Lyubimova R.A. On some differential equation possesses invariant lines (Russian). Differential and integral equations, Gorky Universitet 1 (1977), p. 1922.

45. Lyubimova R.A. On some differential equation possesses invariant lines (Russian). In: Differential and integral equations. Gorky Universitet 8 (1984), p. 6669.

46. Mironenko V. I. Linear dependence of functions along solutions of differential equations. Beloruss. Gos. Univ., Minsk, 1981. 104 p. (in Russian).

47. Pantazi S. Inverse problems of the Darboux theory of integrability for planar polinomial differential systems. Tesis doctorat, Universitat Autònoma de Barselona, May, 2004.

48. Popa M. N., Sibirskii K. S. Conditions for the existence of a homogeneous linear partial integral of a differential system. Differencial'nye Uravnenia 23, 1987, 1324-1331 (Russian).

49. Popa M. N. Application of invariant processes to the study of the homogeneous linear particular integrals of a differential system. Dokl. Akad. Nauk SSSR 317, 1991, No. 4, 834-839 (Russian); translation in Soviet Math. Dokl. 43, 1991, No. 2, 550-555.

50. Popa M. N., Sibirskii K. S. Conditions of the existence of nonhomogeneous invariant straight line of the quadratic system. Izv. Akad. Nauk Moldav. SSR. Matematica, 1, 1991, 77-80 (Russian).

51. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along two directions. Studia Universitatis. Seria Ştiinţe Exacte şi Economice, 8(13), 2008, p. 5-26.

52. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along three directions. Buletinul Academiei de Ştiinţe a RM, Matematica, 2(60), 2009, p. 111-130.

53. Puţuntică V. Studiul calitativ al sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu şase şi cu şapte drepte invariante reale. Teză de doctor, 2010, 1-134.

54. Repeşco V. Sisteme cubice de ecuaţii diferenţiale cu drepte invariante. Teză de doctor, 2013, 1-134.

55. Repeşco V. Cubic systems with degenerate infinity and invariant straight lines of total parallel multiplicity six. Romai Journal, v.9, no.1, 2013, p.133-146.

56. Rychkov G. S. The limit cycles of the equation $u(x+1) = (-x+ax^2+bxy+cu+du^2)dx$. Differentsial'nye Uravnenia, 8, 1972, No. 12, 2257-2259 (Russian).

57. D. Schlomiuk Basic algebro-geometric concepts in the study of planar polynomial vector fields. Publ. Mat. 41:1 (1997), p. 269295.

58. Schlomiuk D., Vulpe N. Planar quadratic vector fields with invariant lines of total multiplicity at least five. Qual. Theory Dyn. Syst., 5, 2004, No. 1, 135-194.

59. Schlomiuk D., Vulpe N. The full study of planar quadratic differential systems possessing a line of singularities at infinity. J. Dynam. Differential Equations, 20, 2008, No. 4, 737-775.

60. Schlomiuk D., Vulpe N. Planar quadratic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity four. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2008, Volume 68, Issue 4, 681715.

61. Sibirskii K. S. Conditions of the existence of an invariant straight line of the quadratic system in the case of centre or focus. Kishinev, Mat. Issled, 106, 1989, 114-118 (Russian).

62. Sibirskii K. S. On the number of limit cycles in the neighborhood of a singular point. Differential Equations, 1, 1965, 36-47.

63. Sokulski J. On the number of invariant lines for polynomial vector fields. Nonlinearity, 1996, 9, 479–485.

64. Suo Guangjian and Sun Jifang The n-degree differential system with $(n-1)(n+1)/2$ straight line solutions has no limit cycles. Proc. of Ordinary Differential Equations and Control Theory, Wuhan, 1987, p. 216-220 (in Chinese).

65. Suo Guangjan, Chen Yongshao The real quadratic system with two conjugate imaginary straight line solutions. Ann. of Diff. Eqs., 2, 1986, No. 2, 197-207.

66. Suo Guangjan, Sun Jifang The n-degree differential system with $(n-1)(n+1)/2$ straight line solutions has no limit cycles. Proc. of Ordinary Differential Equations and Control Theory, Wuhan, 1987, 216-220 (Chinese).

67. Şubă A. Particular integrals, integrability and the center problem. Differ. equation, 1996, vol. 32, no. 7, p. 880-889. (Russian)

68. Şubă A., Cozma D. Solution of the problem of the center for cubic systems with two homogeneous and one nonhomogeneous invariant straight lines. Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics, 1999, 29, No. 1, 37-44.

69. Şubă A., Cozma D. Solution of the problem of the center for cubic systems with three invariant straight lines in generic position. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2005, 6, 45-58.

70. Şubă A., Repeşco V. Configurations of invariant straight lines of cubic differential systems with degenerate infinity. Scientific Bulletin of Chernivtsi University, Series "Mathematics". 2012, **2**, no. 2-3, 177-182.

71. Şubă A., Repeşco V., Puţuntică V. Cubic systems with seven invariant straight lines of configuration $(3, 3, 1)$. Bulletin of ASM. Mathematics, 2012, No. 2(69), p. 81–98.

72. Şubă A., Repeşco V., Puţuntică V. Cubic systems with invariant straight lines of total parallel multiplicity seven. Electron. J. Differential Equations, 2013, no.274, p.1–22.

73. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with a straight line of maximal geometric multiplicity. Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM-2013), 19-22 September, 2013. Bucharest, Romania. Book of Abstracts. 2013, p. 58.**

74. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic Systems with an Invariant Line at Infinity of the Maximal Geometric Multiplicity. 9th International Conference on Applied Mathematics (ICAM-2013), September 25-28, 2013, Baia Mare, Romania. Abstracts, p. 29.**

75. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with two invariant straight line of multiplicity $m(3,5)$. IV International Hahn Conference, June 30 -July 5, 2014, Chernivtsi, p. 263.**

76. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with a straight line of maximal multiplicity. Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, August 19-23, 2014, Chişinău, p. 291-294.**

77. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with two non-parallel real invariant straight lines of maximal multiplicity. International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), 2-5 July, 2015, Chişinău, p.80.**

78. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with two real invariant straight lines of maximal multiplicity. Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), 17-20 September, 2015, Suceava, Romania, p. 33.**

79. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with an invariant straight line of maximal multiplicity. Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series, 2015, 42, No. 2, 427–449.**

80. **Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with two parallel complex invariant straight lines of multiplicity $m(2,2;3)$. Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), 15-18 September, 2016, Craiova, Romania, p. 42.**

81. **Şubă A., Vacaraş O. Maximal multiplicity of the line at infinity for cubic differential systems with two real non-parallel invariant straight lines. International scientific conference Differential-Functional equations and their application, 28-30 September, 2016, Chernivtsi, p. 135.**

82. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. An Estimate from Above of the Number of Invariant Straight Lines of n-th Degree Polynomial Vector Field. Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2015, vol.15, no.2, pp. 171-179 (in Russian).

83. **Vacaraş O. Cubic systems with a straight line of maximal algebraic multiplicity. The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Chişinău, August 22-25, 2012. Communications., pag. 218-219.**

84. **Vacaraş O. Cubic systems with a straight line of maximal infinitesimal multiplicity. The International Conference of Young Researchers, Xth edition. Scientific abstracts, Chişinău, November 23, 2012, pag. 127.**

85. **Vacaraş O. Cubic systems with a real invariant straight line of maximal integrable multiplicity. International Conference: Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE 2013), Abstracts, August 18-22, 2013, Chişinău, p. 93.**

86. **Vacaraş O. Cubic differential systems with two invariant straight line of multiplicity** $m(6,1)$**. Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, 10 martie 2014, Chişinău, p. 14.**

87. **Vacaraş O. Cubic differential systems with two invariant straight line of multiplicity** $m(2;5)$**. Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, 10 martie, 2015, Chişinău, p.27.**

88. **Vacaraş O. Cubic differential systems with two affine real invariant straight lines, both of multiplicity three, and the line of infinity of multiplicity one. Conferinţa ştiinţifică naţională cu participare internaţională. Învăţământul superior din Republica Moldova la 85 ani, 24-25 septembrie 2015, Chişinău, p.53.**

89. **Vacaraş O. Cubic differential systems with two affine real non-parallel invariant straight lines of maximal multiplicity. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat., 2015, No. 3(79), 79–101.**

90. **Vacaraş O. Maximal multiplicity of the line at infinity for cubic differential systems with two real parallel invariant straight lines. International Conference: Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE 2016), Abstracts, June 23-26, 2016, Chişinău, p. 70.**

91. Vulpe N. Characterization of the finite weak singularities of quadratic systems via invariant theory. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2011, Volume 74, Issue 17, 6553-6582.

92. Zhang Xikang Number of integral lines of a polynomial systems of degree three and four. J. of Nanjing University, Math. Biquarterly, 1993, vol. 10, p. 209-212.

93. Zhang Xiang and Ye Yanqian On the number of invariant lines for polynomial systems. Proc. of the American Math. Soc., 1998, vol. 126, no. 8, p. 2249-2265.

94. Xiea X., Zhan Q. Uniqueness of limit cycles for a class of cubic system with an invariant straight line. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2009, Volume 70, Issue 12, 4217-4225.

95. Ye Yanqian Qualitative theory of polynomial differential systems. Shanghai Science-Technical Publisher, Shanghai, 1995.

DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

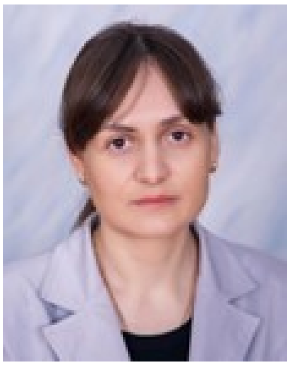
Subsemnata, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări şi realizări ştiinţifice. Conştientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecinţele în conformitate cu legislaţia în vigoare.

Vacaraş Olga

Semnătura: Vacaraş

Data:

CV-ul AUTORULUI



Nume: Vacaraş

Prenume: Olga

Data naşterii: 12.01.1986

Locul naşterii: s.Todireşti, r.Ungheni, R. Moldova

Cetăţănia: R. Moldova

Studii:

- licenţă: 2004-2009, Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chişinău), Facultatea Fizică Matematică şi Tehnologii Informaţionale, specialitatea matematică şi informatică;

- masterat: 2009-2011, Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chişinău), Facultatea Fizică Matematică şi Tehnologii Informaţionale, specializarea Matematici moderne şi tehnologii moderne de instruire;

- doctorat: 2011-2015, Universitatea Academiei de Ştiinţe a Moldovei, specialitatea 111.02 - Ecuaţii diferenţiale.

Activitatea profesională:

2009 - prezent - L.T. Emil Nicula, Mereni, Anenii-Noi, profesoară de matematică;

2012 - prezent - IMI, laboratorul Ecuaţii Diferenţiale, inginer-matematician.

Domeniu de interes ştiinţific: teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale

Participări în proiecte ştiinţifice:

– 11.817.08.01F, "Probleme actuale ale algebrei şi ecuaţiilor diferenţiale: aspecte teoretice şi aplicative", 2011-2014;

– FP7 316338, "Dynamical systems and their applications", 2012-2016;

– 15.817.02.03F, "Invarianţi algebrici şi geometrici în studiul calitativ al sistemelor diferenţiale polinomiale", 2015-2017.

Participări la foruri ştiinţifice:

– The Xth International Conference of Young Researchers, Chişinău, 2012;

– The Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM). Chişinău, 2012; Bucureşti, 2013; Suceava, 2015; Craiova, 2016;

– The International Conference: "Mathematics and Information Technologies: Research and Education" (MITRE). Chişinău, 2013, 2015, 2016;

– The 9th International Conference on Applied Mathematics (ICAM), Baia-Mare, 2013;

– Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători. Chişinău, 2014, 2015.

– IV International Hahn Conference, Chernivtsi, 2014;

– Third Conference of Mathematical Society of Moldova, IMCS-50, Chişinău, 2014;

– Conferinţa ştiinţifică naţională cu participare internaţională. Învăţământul superior din Republica Moldova la 85 ani, Chişinău, 2015;

– The International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application", Chernivtsi, 2016.

Lucrări ştiinţifice publicate: 2 articole ştiinţifice, o lucrare în materialele conferinţei IMCS-50, 14 teze ale comunicărilor la foruri ştiinţifice.

Cunoaşterea limbilor: româna (maternă), franceza (nivel B1), engleza (nivel A2).

Date de contact: Chişinău, str. Academiei 5, IMI, bir. 334, tel. 72-92-11, e-mail: vacarasolga@yahoo.com