

**ACADEMIA DE ȘTIINȚE A MOLDOVEI
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**

Cu titlu de manuscris

CZU: 514.742.2:514.120/514.140

POPA ALEXANDRU
GEOMETRIA ANALITICĂ A SPAȚIILOR OMOGENE
111.04 GEOMETRIE ȘI TOPOLOGIE

Autoreferatul tezei de doctor în științe matematice

CHIȘINĂU, 2017

Teza a fost elaborată la Academia de Științe a Moldovei, Institutul de Matematică și Informatică.

Conducător științific: **Damian Florin**, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, Universitatea de Stat din Moldova.

Referenți oficiali:

1. **Macarov Vitalii**, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, Universitatea de Stat din Moscova, Rusia;
2. **Balan Vladimir**, doctor în matematică, profesor universitar, Universitatea Politehnică din București, România;

Membrii Consiliului Științific Specializat:

1. **Cioban Mitrofan**, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, academician, Universitatea de Stat din Tiraspol, președinte al CȘS;
2. **Cozma Dumitru**, doctor habilitat în științe matematice, conferențiar universitar, Universitatea de Stat din Tiraspol, secretar științific al CȘS;
3. **Guțul Ion**, doctor în științe fizico-matematice, cercetător științific superior, Academia de Științe a Moldovei, Institutul de Matematică și Informatică;
4. **Cataranciuc Serghei**, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar, Universitatea de Stat din Moldova;
5. **Moroianu Sergiu**, doctor în matematică, profesor universitar, Institutul de Matematică al Academiei Române, România.

Susținerea tezei va avea loc la 5 iulie 2017 la ora 10:00 în ședința Consiliului Științific Specializat D 36.111.04-03 din cadrul Universității de Stat din Tiraspol (str. Gh. Iablocikin, 5, sala 304, Chișinău, MD 2069, Republica Moldova).

Teza de doctor și autoreferatul pot fi consultate la Biblioteca Universității de Stat din Tiraspol și pe site-ul CNAA (www.cnaa.acad.md).

Autoreferatul a fost expediat la 05 ianuarie 2017.

**Secretar științific al Consiliului
Științific Specializat**



Cozma Dumitru

Conducător științific



Damian Florin

Autor



Popa Alexandru

© Popa Alexandru, 2017

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea temei. Istoria geometriei neeuclidiene numără mai puțin de 200 de ani. În 1829 Nikolai Lobachevsky și, independent de el, în 1831 János Bolyai, au publicat teoria dezvoltată în mod axiomatic a geometriei hiperbolice. Arthur Cayley a introdus în 1859 diferite modalități de a defini metrica spațiilor. Felix Klein în 1871, utilizând metrica lui Cayley, construiește 9 modele de planimetrii. Klein propune „Programul Erlangen” [7], o nouă soluție a problemei de clasificare și caracterizare a geometriei în baza geometriei proiective și a teoriei grupurilor. Geometriile Euclidiană, hiperbolică și eliptică, cunoscute până în acel moment, se integrau ușor în clasificarea lui Klein. În 1892, Hendrik Lorentz a propus ecuațiile de transformare ale spațiului. În 1905 Henri Poincaré a observat că transformările lui Lorentz nu sunt altceva decât rotațiile hiperbolice. Grupul transformărilor Lorentz este unul dintre cele mai importante grupuri Lie. Datorită corespondenței grupurilor Lie și algebrilor Lie, este posibilă studiere obiectelor geometrice utilizând limbajul algebric. Clasificarea spațiilor omogene pe bază clasificării algebrice a grupurilor lor Lie este în atenția cercetătorilor din ultimii ani. Idee lui Lorentz a fost preluată în teză prezentă pentru a generaliza noțiunea de rotație pentru orice spațiu omogen.

Albert Einstein în 1905 a dezvoltat idee de geometrizare a fizicii, propusă de Lorentz, în teoria specială a relativității, care ulterior fusese dezvoltată de Hermann Minkowski în 1907. Geometria Minkowski se încadrează perfect în clasificarea lui Klein. Și cinematica clasică a lui Galilei–Newton se încadrează în clasificarea lui Klein. Diverse cercetări geometrice cu aplicații în diverse domenii ale matematicii fizice s-au interpretat de Hermann Weyl (anul 1913), Élie Cartan, George Vranceanu, Finsler, Radu Miron și alții (anii 1960 – 1970). Atunci când Willem de Sitter a propus modelul cosmologic de evoluție timpurie a universului în anul 1917, s-a constatat că și spațiile De Sitter și Anti de Sitter își găsesc loc în clasificarea făcută de Klein. Ultimile avansări în fizica teoretică, (în particular în teoria coardelor Green, Schwartz, anul 1970 – 1980), au dat naștere la noi spații omogene, care au adus la necesitate dezvoltării unor noi metode de studiere. Metodele algebrei lineare prezintă un instrument universal de studiere. Prin urmare, cercetarea diferitor structuri matematice cu metode lineare prezintă o direcție actuală de cercetări importante și pentru domeniile matematice, și pentru aplicațiile ei.

Domeniul de cercetare a spațiilor omogene Geometria diferențială a spațiilor omogene a fost elaborată de către Élie Cartan în 1923 și dezvoltată ulterior de către Ehresmann Ch., fiind similară cu propuse anterior Riemann pentru geometriile Euclid, Lobachevsky și Bolyai. Riemann a introdus termenul ”metrică”, iar Cartan a introdus ceea ce este acum cunoscut sub numele de ”conexiune Cartan”. Pentru următoarele câteva decenii geometria diferențială devine principalul instrument în studiul spațiilor omogene. O nouă abordare a geometriei diferențiale, cu conexiuni cu studiul spațiilor omogene și-au adus contribuția Buseman G., Bachmann F., Efimov N.V., Hjelslev J., Nash L.F., Kallenberg G.W., Borisov Yu.V., Borisenko A.A., Milka A.D., Verner A.L., Schwartz J. T., Naoum A., Roitberg J., Klingenberg R., Karzel H., Struve H., Struve R. ș.a. (vezi [1, 4, 6, 8, 9, 21, 22, 23, 24]).

Domeniul de cercetare a spațiilor omogene are tangențe cu multiple compartimente ale geometriei contemporane, iar dintre cele mai recente contribuții menționăm monografia autorilor Bourguignon J. P., Hijazi O., Milhorat J. L., Moroianu A., Moroianu S. [3]. Un considerabil aport în geometria diferențială a spațiilor Finsle, Lagrange, Hamilton și generalizările lor, care și ele sunt în strânsă legătură cu geometriile

omogene, aparține lui Miron R. și Anastasiei M. [11], Udriște C. și Balan V. [2].

Rezultate importante pentru unele spații omogene de diferite dimensiuni au fost obținute și în domeniul geometriei discrete. Vom menționa lucrările elaborate de Zamorzaev A. [20] în dezvoltarea teoriei simetriei pentru spații omogene (Euclidiene, pseudo-Euclidiene, Minkowski), rezultatele în domeniul geometriei discrete a spațiului hiperbolic, elaborate de Macarov V. [10] și în domeniul varietăților hiperbolice obținute de Guțul I. [5] și Damian F. [25].

În geometria metrică a spațiilor omogene vom menționa unele rezultate care au stat la baza prezentei lucrări. Rosenfeld B., Yaglom I., Evghenia Yasinskaya E. [27, 31] au contribuit la clasificarea și dezvoltarea metodelor de studiere a geometriilor omogene bidimensionale. Romakina L. a descris unele spații omogene bidimensionale [28, 29, 30]. Rezultatele autorului se pot găsi în publicațiile [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 26].

Scopul și obiectivele tezei. Scopul cercetării este să se ofere un instrument, care poate fi folosit pentru a studia spațiile omogene în limbajul algebrei liniare. Pentru a atinge acest scop este necesar realizarea următoarelor obiective:

- Argumentarea conceptului nou de semnătură;
- Pe baza conceptului de semnătură, construirea spațiilor omogene;
- Construirea modelului spațiului omogen cu orice semnătură dată;
- Expresia măsurării cantităților geometrice via semnătură, care reflectă rolul lor în geometria analitică a spațiilor omogene;
- Găsirea diferitor aplicații ale geometriei analitice a spațiilor omogene.

Metodologia cercetării științifice. Teoria utilizează metodele și limbajul *algebrei liniare* pentru a studia spații neliniare. În calitate de subiect al studiului, este construit *modelul* spațiilor omogene.

În teză este investigată noțiunea de spațiu omogen și sunt stabilite proprietățile așteptate. Acest obiectiv se realizează prin *generalizarea* axiomelor cunoscute. Apoi, prin metoda *dualității* sunt formulate proprietățile noi, duale celor cunoscute.

O metodă importantă folosită în cercetare este *modelarea computațională*, realizată sub forma proiectului software GeomSpace.

Noutatea științifică a rezultatelor obținute. Noutatea principală a teoriei elaborate constă în faptul că conținutul și forma ei sunt *parametrizate* datorită introducerii semnăturii spațiului. Elementele semnăturii sunt variabile cu anumit domeniu de definiție. Fiecare spațiu omogen este determinat în mod univoc de semnatura lui și invers, fiecare valori concrete ale semnăturii determină un spațiu omogen. Toate definițiile și toate afirmațiile sunt formulate în limbajul semnăturii.

Abordarea parametrizată are mai multe avantaje. În primul rând, din cauza numărului atât de mare al spațiilor omogene este aproape imposibil să se descrie fiecare spațiu cu geometria lui. Abordarea universală permite să se descrie un spațiu cu toate particularitățile lui sau să se compare orice două spații.

În al doilea rând, unele rezultate se obțin mai ușor pentru spații neliniare, și apoi ele se generalizează la cazul spațiilor liniare. Alte rezultate se obțin mai inițial pentru spații liniare, și apoi ele se extind la spațiile neliniare.

Problema științifică importantă soluționată constă în cercetarea spațiilor omogene prin metode liniare aplicând conceptul de semnătură.

Semnificația teoretică a tezei. În teză dată se propune un nou concept de semnătură a spațiului omogen, care permite o abordare unică a tuturor spațiilor omogene.

Valoarea aplicativă a lucrării. Aceasta lucrare poartă caracterul teoretic, însă ea are și potențialul aplicativ.

Deși lucrarea se focusează pe geometria analitică, rezultatele ei au valoare în geometria diferențială. Metodele geometriei diferențiale moderne sunt construite pe baza geometriei analitice a spațiului Euclidian. Acest fapt implică două consecințe. Prima, această abordare nu oferă rezultate când se vrea descrierea proprietăților unui spațiu neeuclidian care sunt absente în spațiul Euclidian sau să compare astfel de proprietăți între două spații neeuclidiene. A doua, geometria diferențială are unele restricții în a descrie spații care nu pot fi approximate de spațiul Euclidian în nici un punct.

Rezultatele obținute pot fi incluse în cadrul cursurilor opționale pentru studenți, masteranți și doctoranți pentru domeniile matematice și fizice teoretice.

Rezultatele științifice principale înaintate spre susținere:

- Clasificarea spațiilor omogene pe baza formei noi de semnătură, introduse în această lucrare;
- Deducerea formei universale a ecuațiilor trigonometrice, comune pentru toate spațiile omogene;
- Introducerea grupului de matrice generalizat ortogonale și studiul lui în conexiune cu grupul mișcărilor spațiului omogen;
- Adaptare la spații omogene a formulelor și a algoritmilor algebrei lineare, care operează cu vectori sau familii de vectori;
- Introducerea vectorilor de decompoziție pentru vectorii limită (vectorii izotropici) și studiul vectorilor limită cu ajutorul vectorilor lor de decompoziție;
- Definirea și studiul volumelor în spații omogene via volumele corespunzătoare în metaspațiu;
- Teorema despre izomorfismul grupurilor cristalografice ale spațiilor omogene duale.

Implementarea rezultatelor științifice. Teoria poate fi folosită ca un curs facultativ în liceu sau universitate

O altă implementare constă în proiectul software GeomSpace (<http://sourceforge.net/projects/geospace/>), cu scopul de a crea un mediu de geometrie interactivă pentru spații omogene.

Aprobarea rezultatelor științifice. Diferite aspecte ale teoriei au fost prezentate la următoarele evenimente științifice:

2009 Alba Iulia, România — International Conference on Theory and Applications in Mathematics and Informatics;

2010 Moscow, Russia — International conference “Metric geometry of surfaces and polyhedra”, dedicated to 100th anniversary of N. V. Efimov;

2010 Moscow, Russia — The International Conference “Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications” dedicated to the 120th anniversary of B. N. Delone;

2014 Chișinău, Moldova — The Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50;

2015 Tula, Russia — International conference “Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications”, dedicated to 85th anniversary of professor S. S. Ryshkov,

2015 Iași, România — The 8th Congress of Romanian Mathematicians.

2016 Chișinău, Moldova — International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education, MITRE — 2016.

Publicații la tema tezei. La tema tezei au fost publicate 9 lucrări: [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 26], 5 articole și 4 comunicări în cadrul conferințelor internaționale și naționale: 2 articole sunt publicate în 2 reviste diferite recenzate (una de categoria A, alta de categoria B+). Toate publicațiile sunt de un singur autor.

Cuvinte-cheie: spațiu omogen, spațiu Riemanian, geometrie Klein, metrică proiectivă, geometrie analitică.

Volumul și structura tezei. Teza este scrisă în engleză și constă din: introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, anexe, bibliografie din 210 de titluri, volumul total de 189 de pagini, 140 de pagini de text de bază, 3 anexe, 27 de figuri, 9 algoritmi, 5 tabele, adnotări în limbile română, rusă și engleză.

CONȚINUTUL TEZEI

În **Introducere** se argumentează actualitatea temei, scopul și obiectivele lucrării și metodologia cercetării. Se prezintă pe scurt conținutul tezei.

Capitolul 1 „**Analiza situației în domeniul spațiilor omogene**” introduce structuri algebrice folosite în cercetare, prezintă situația în domeniul tezei, analizează avantajele și limitele abordării axiomatice și ale modelării în cercetare.

Definiția 1.2.1 (Spațiu omogen). Fie X o mulțime nevidă și G un grup care acționează pe X . Structura lui X este $\tau : G \rightarrow \text{Aut}(X)$. Perechea (X, τ) se numește *spațiu omogen*, dacă:

- τ este un omomorfism, adică pentru orice $g \in G$ maparea $\tau(g)$ păstrează structura;
- $\tau(G)$ acționează tranzitiv pe X .

Se descrie principiul dualității metrice. Se prezintă pe scurt cele mai importante rezultate ale tezei.

În capitolul 2 „**Geometria analitică**” se construiește modelul uniform al spațiilor omogene și se studiază proprietățile lui metrice. În secțiunea 2.1 „**Tipuri de drepte, distanțe și unghiuri**” se introduc proprietățile de bază care sunt de așteptat în orice model al spațiilor omogene.

Definiția 2.1.2 (Funcțiile trigonometrice generalizate). Fie $k \in \{-1, 0, 1\}$. Funcțiile $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ și $T(\varphi)$, unde:

$$C(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-k)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}, \quad S(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-k)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad T(\varphi) = \frac{S(\varphi)}{C(\varphi)}$$

se numesc, respectiv, *cosinus generalizat*, *sinus generalizat* și *tangentă generalizată*.

În secțiunea 2.2 „**Modelul spațiului omogen**” se construiește un model liniar și parametrizat al spațiilor omogene.

Definiția 2.2.1 (Rotațiile principale ale spațiului). Numim *rotații principale ale spațiului* transformările $\mathfrak{R}_i(\varphi)$, $i = \overline{1, n}$, exprimate prin matrice pătratice de ordinul $n+1$, având elementele:

$$r_{i-1 \ i-1} = r_{ii} = C_i(\varphi), \quad r_{i \ i-1} = S_i(\varphi), \quad r_{i-1 \ i} = -k_i S_i(\varphi), \quad r_{pq} = \delta_{pq}, p, q \neq i, j.$$

Considerăm spațiul vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$ și o colecție de numere $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{-1, 0, 1\}$, fiecare reprezentând tipul unei rotații principale. Fie $C_i(x) = C(x, k_i)$, $S_i(x) = S(x, k_i)$ și $T_i(x) = \frac{S_i(x)}{C_i(x)}$.

Definiția 2.2.2 (Meta produs al vectorilor). Numim *meta produs* $\odot$ al vectorilor $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ expresia:

$$x \odot y = \sum_{i=0}^n K_i x_i y_i, \text{ unde } K_0 \equiv 1, K_i = \prod_{j=1}^i k_j, i = \overline{1, n}.$$

Definiția 2.2.3 (Modelul spațiului omogen, semnatura, metaspațiu). Numim *spațiu omogen* $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \odot x = 1\}$. Colecția de numere $\{k_1, \dots, k_n\}$ se numește *semnatura* spațiului omogen. Numim *metaspațiu* spațiul $\mathbb{R}^{n+1}$ cu meta produsul vectorilor $\odot$. Vectorul $e = (1 : 0 : \dots : 0)$ îl vom numi *origine* $E = (1 : 0 : \dots : 0)$.

Remarcă. Vectorii opuși, $x, -x \in \mathbb{R}^n$ ai modelului reprezintă același vector al spațiului omogen.

Definiția 2.2.4 (Mișcări, drepte, plane). Numim *mișcări* în $\mathbb{B}^n$ toate transformările posibile care se obțin ca compoziția unui număr finit de rotații principale. Definim *dreptele* ca imaginile $\mathfrak{M}(\mathbb{B}^1)$ la toate mișcările posibile $\mathfrak{M} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$. Similar, definim *planele m -dimensionale* ca imaginile $\mathfrak{M}(\mathbb{B}^m)$, $m = \overline{0, n-1}$ la toate mișcările posibile $\mathfrak{M}$.

Definiția 2.2.6 (Distanțe, unghiuri). Vom spune: *distanța* între punctul $A \in \mathbb{B}^1 \subset \mathbb{B}^n$ și originea E este egală cu φ , dacă $A = \mathfrak{R}_1(\varphi)E$, vom spune: *unghiul unidimensional (planar)* între $\mathbb{B}^1$ și o dreaptă $\mathbb{B}^0 \subset \mathbb{B}'^1 \subset \mathbb{B}^2$ este egal cu φ , dacă $\mathbb{B}'^1 = \mathfrak{R}_2(\varphi)\mathbb{B}^1$. Similar, definim *unghiul $(m+1)$ -dimensional φ* între $\mathbb{B}^m$ și planul m -dimensional $\mathbb{B}^{m-1} \subset \mathbb{B}'^m \subset \mathbb{B}^{m+1}$, dacă $\mathbb{B}'^m = \mathfrak{R}_{m+1}(\varphi)\mathbb{B}^m$, $\forall m = \overline{0, m-1}$.

În secțiunea 2.3 „**Relațiile triunghiului**” sunt deduse ecuațiile și inecuațiile triunghiului precum și ecuațiile triunghiului dreptunghic.

Tabelul 2.1: Egalitățile triunghiului

$\frac{S_1(a)}{S_2(\alpha)} = \frac{S_1(b)}{S_2(\beta')} = \frac{S_1(c)}{S_2(\gamma)}$
$C_1(a) = C_1(b)C_1(c) + k_1 S_1(b)S_1(c)C_2(\alpha)$ $C_1(b) = C_1(a)C_1(c) - k_1 S_1(a)S_1(c)C_2(\beta')$ $C_1(c) = C_1(a)C_1(b) + k_1 S_1(a)S_1(b)C_2(\gamma)$ $C_2(\alpha) = C_2(\beta')C_2(\gamma) + k_2 S_2(\beta')S_2(\gamma)C_1(a)$ $C_2(\beta') = C_2(\alpha)C_2(\gamma) - k_2 S_2(\alpha)S_2(\gamma)C_1(b)$ $C_2(\gamma) = C_2(\alpha)C_2(\beta') + k_2 S_2(\alpha)S_2(\beta')C_1(c)$

Propoziția 2.3.1. Cea mai lungă latură a unui triunghi este opusă celui mai mare unghi și cea mai scurtă latura este opusă celui mai mic unghi.

În spațiile omogene inegalitatea triunghiului, care joacă un rol important în definiția metricii, o generalizează pe binecunoscuta inegalitate din spațiul Euclidian, ceea ce se reflectă în următoarea propoziție.

Propoziția 2.3.2. Cea mai scurtă latură a și cea mai lungă latură b sunt:

$$a \begin{cases} > b - c, & k_2 = 1; \\ = b - c, & k_2 = 0; \\ < b - c, & k_2 = -1. \end{cases} \quad b \begin{cases} < a + c, & k_2 = 1; \\ = a + c, & k_2 = 0; \\ > a + c, & k_2 = -1. \end{cases}$$

Unghiul interior α și unghiul exterior β' sunt:

$$\alpha \begin{cases} > \beta' - \gamma, & k_1 = 1; \\ = \beta' - \gamma, & k_1 = 0; \\ < \beta' - \gamma, & k_1 = -1. \end{cases} \quad \beta' \begin{cases} < \alpha + \gamma, & k_1 = 1; \\ = \alpha + \gamma, & k_1 = 0; \\ > \alpha + \gamma, & k_1 = -1. \end{cases}$$

În următorul tabel sunt descrise egalitățile triunghiului dreptunghic, valabile pentru toate planele omogene.

Tabelul 2.2: Egalitățile triunghiului dreptunghic

$T_1(b) = T_1(c)C_2(\alpha)$	$T_{12}(a) = T_1(c)S_2(\beta')$
$S_{12}(a) = S_1(c)S_2(\alpha)$	$S_1(b) = S_1(c)C_2(\beta')$
$T_{12}(a) = S_1(b)T_2(\alpha)$	$S_{12}(a) = T_1(b)T_2(\beta')$
$C_2(\alpha) = C_{12}(a)C_2(\beta')$	$S_2(\beta') = C_1(b)S_2(\alpha)$
$C_1(c) = C_{12}(a)C_1(b)$	$T_2(\beta') = C_1(c)T_2(\alpha)$

Existența formei universale a ecuațiilor triunghiurilor poate fi generalizată la orice figură liniară.

Propoziția 2.3.3. Fie Ω o figură liniară a spațiului omogen $\mathbb{B}^n$. Dacă există ecuația:

$$F(p_1, \dots, p_n) = 0,$$

care leagă elementele $p_1, \dots, p_n$ acestei figuri, atunci există și o formă a acestei ecuații:

$$H(Tr(p_1), \dots, Tr(p_n)) = 0,$$

care este exprimată prin:

- Funcția H , care este algebrică și nu depinde de spațiul $\mathbb{B}^n$;
- Funcția $Tr(p_i)$, care are una dintre următoarele trei forme $C_i(p_i)$, $\sqrt{k_i}S_i(p_i)$, $\sqrt{k_i}T_i(p_i)$, și depinde doar de tipul k_i al argumentului p_i .

Corolar 2.3.3. Proprietățile descrise de funcția H sunt proprietăți ale figuri Ω , independent de spațiu, proprietățile descrise de funcția Tr sunt proprietăți ale spațiului $\mathbb{B}^n$, independent de figura Ω .

În secțiunea 2.4 „Mișcări” se introduc matricele generalizat ortogonale, se arată că mișcările au matrice generalizat ortogonale și se studiază teoria mișcărilor spațiului omogen ca teoria matricelor generalizat ortogonale.

Să generalizăm produsul vectorilor. Pentru aceasta definim întâi tipul K_{ij} :

$$K_{ij} = 1, i = j; \quad \prod_{p=i+1}^j k_p, i < j; \quad \frac{1}{K_{ji}}, i > j.$$

Definiția 2.4.2 (Produs de indice i). *Produsul de indice i , $i = \overline{0, n}$, al vectorilor x și y este o formă biliniară:*

$$x \odot_i y = \sum_{j=0}^n K_{ij} x_j y_j.$$

Definiția 2.4.3 (Indicele vectorului). Vom spune că numărul i , $0 \leq i \leq n$, este *indicele vectorului* $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, dacă $x \odot_i x > 0$. În acest caz notația este x^i .

Teorema 2.4.3. Indicele vectorilor nu depinde de alegerea bazei spațiului.

Definiția 2.4.4 (Produsul natural). *Produsul natural* a doi vectori x^i și y^j este produsul de indice $k = \min(i, j)$: $x^i \odot y^j = x^i \odot_{\min(i, j)} y^j$.

Remarcă. Pentru punctele spațiului produsul natural are indicele zero.

În continuare definim și studiem proprietățile matricelor generalizat ortogonale.

Definiția 2.4.5 (Vectori normalizați, ortogonali, matrice generalizat ortogonale). Vom numi vectorul x^i în $\mathbb{R}^{n+1}$, cu signatura, dată, *normalizat* dacă $x^i \odot x^i = 1$. Vom numi vectorii x^i, y^j *ortogonali*, dacă $x^i \odot y^j = 0$. Definim matricea pătratică M , de ordinul $n + 1$, *generalizat ortogonală*, sau succint, *GM-ortogonală*, dacă toate coloanele ei m^j au indicele j , sunt normalizate și orice două coloane sunt ortogonale.

Teorema 2.4.11. Mulțimea matricelor GM-ortogonale formează un grup. Grupul izometriilor (al mișcărilor) spațiului este un subgrup al acestui grup.

Algoritmul 2.1 (Descompunerea matricei ortogonale în produs de rotații).

1. Pentru liniile r de la n până la 1:

- (a) Împărțim elementele liniei x_{ri} , $i = \overline{0, r}$ în trei categorii după tipul K_{ri} , care este egal cu 1, 0 sau -1 . Înmulțim X din dreapta cu $\mathfrak{R}_{ir}(\varphi)$, $i = \overline{0, r}$, astfel încât în linia r să rămână câte un element din categoriile 1 și -1 , diferite de zero. Pentru elementele x_{ri} și x_{rj} de aceleași tipuri folosim $\cos \varphi = \frac{x_{ri}}{\sqrt{x_{ri}^2 + x_{rj}^2}}$ și $\sin \varphi = \frac{x_{rj}}{\sqrt{x_{ri}^2 + x_{rj}^2}}$.
- (b) Avem câte un element de tip 1 și -1 , diferite de zero (de exemplu, r și p). Există o rotație hiperbolică cu unghiul φ , astfel încât $\cosh \varphi = \frac{x_{rr}}{\sqrt{x_{rr}^2 - x_{rp}^2}}$ și $\sinh \varphi = \frac{-x_{rp}}{\sqrt{x_{rr}^2 - x_{rp}^2}}$.
- (c) Pentru elementele din categoria 0 există rotații parabolice. Pentru elementul q unghiul parabolic este $\varphi = -\frac{x_{rq}}{x_{rr}}$.
- (d) Rotațiile eliptice, hiperbolice și parabolice de asemenea transformă elementele de la 0 la $r - 1$ ale coloanei r în zero.

2. În acest punct putem considera matricea ca având ordinul r în loc de $r + 1$ și să repetăm procesul pentru ea. În final obținem matricea $E = \text{diag}(\pm 1)$. Obținem ecuația $X \prod_{j=1}^q M_j = E$, deci $X = E \prod_{j=q}^1 M_j^{-1}$.

Definiția 2.4.7 (Vectori echivalenți, interschimbabili și neinterschimbabili). Vom numi doi vectori cu indicii i, j *neinterschimbabili*, dacă nu există un spațiu omogen izomorf cu spațiul dat, în care vectori corespunzători să aibă indicii j, i . Dacă astfel de spațiu există, atunci îl numim vectori *interschimbabili*. Vom numi vectori *echivalenți* dacă spațiul conține mișcarea care transformă fiecare vector în celălalt.

Teorema 2.4.17. Doi vectori e^i, e^j , unde $i < j$, sunt:

- neinterschimbabili, dacă $K_{ij} = 0$;
- interschimbabili, dacă $K_{ij} = -1$;
- echivalenți, dacă $K_{ij} = 1$.

În secțiunea 2.5 „**Lineal**” se deduc diferiți algoritmi care operează pe familii de vectori.

Definiția 2.5.1 (Lineal). Numim *lineal* orice intersecție între sfera $\mathbb{B}^n$ și subspațiul liniar generat de un număr finit de vectori din metaspațiul.

Toate subspațiile sunt lineale, dar nu fiecare lineal este și subspațiu. Evident, linealele congruente au semnături identice. Însă coincidența semnăturilor nu garantează congruența linealelor.

Definiția 2.5.3 (Proiecția vectorului pe lineal). Numim *proiecția* vectorului v pe linealul L^m vectorul v' , unde $v' \in L^m, v'' = v - v' \perp L^m$. În acest caz v'' se numește *proiecția* vectorului v pe complementul ortogonal al linealului L^m .

Lema 2.5.1. Proiecția v' a vectorului v pe linealul L^m poate fi calculată în felul următor:

$$v' = \sum_{i=0}^m (v \odot_i l^i) l^i,$$

unde familia de vectori $\{l^i\}_{i=0, \overline{m}}$ este o bază ortonormată a linealului L^m .

Considerăm o familie de vectori $\{x^i\}_{i=0, \overline{m}}$. Pentru a o ortonormaliza, considerăm următorul algoritm:

Algoritmul 2.2 (Ortogonalizarea și normalizarea unei familii de vectori).

1. Luăm vectorul x cu cel mai mic indice, pe care îl normalizăm. Adăugăm y la familia ortonormată a vectorilor $\{y^i\}$ și eliminăm x din familia inițială a vectorilor $\{x^i\}$.
2. Atâta timp cât familia $\{x^i\}$ nu este vidă:
 - (a) Alegem din familia $\{x^i\}$ vectorul x cu cel mai mic indice și calculăm proiecția lui pe complementul ortogonal al $\{y^i\}$.
 - (b) Eliminăm vectorul x din familia $\{x^i\}$ și, dacă x' nu este nul, îl normalizăm și îl adăugăm la familia $\{y^i\}$.

Considerăm o familie ortonormată de vectori $\{x^i\}_{i=0, \overline{m}} \in \mathbb{B}^n, m < n$. Următorul algoritm descrie cum putem să completăm această familie până la $n + 1$ vectori, astfel încât familia să rămână ortonormată.

Algoritmul 2.3 (Completarea familiei ortonormate a vectorilor).

1. Pentru fiecare vector al unei baze $\{e^j\}_{j=\overline{0,n}}$ a spațiului calculăm vectorul y ortogonal cu familia $\{x^i\}$. Dacă vectorul y nu este nul, îl normalizăm și îl adăugăm la familia $\{x^i\}$.

Apare necesitatea de a defini o formă unică a unui lineal. Pentru a găsi o astfel de bază, putem folosi următorul algoritm:

Algoritmul 2.4 (Forma canonică a bazei linealului).

1. Considerăm o familie de vectori din bază $\{e^p\}_{p=\overline{0,n}}$ a spațiului $\mathbb{R}^{n+1}$. Pornim de la baza vidă a linealului L .
2. Până când baza nouă va conține $m + 1$ vectori, calculăm proiecția e'^p a următorului vector e^p pe L^m .
 - (a) Dacă e'^p este nenul, calculăm proiecția e''^p a vectorului e'^p pe complementul ortogonal al bazei existente $\{l^i\}$ a linealului L .
 - (b) Dacă e''^p este nenul, îl normalizăm și îl adăugăm la baza existentă $\{l^i\}$ a linealului L .

În secțiunea 2.6 „**Vectori și lineale limită**” se studiază teoria vectorilor fără indici, numiți *vectori limită*. În spațiul bidimensional aceștia sunt vectori isotropici. De asemenea, se studiază teoria linealelor limită.

Definiția 2.6.1 (Vector limită). Vectorul care nu are indice se va numi *vector limită*.

Considerăm un vector limită $x \in \mathbb{B}^n$. Construim vectorii $a, b \in \mathbb{B}^n$, astfel încât vectorul a să aibă coordonatele a_i egale cu x (care intră în forma biliniară cu semnul „+” sau cu coeficientul 0), restul să fie 0, iar vectorul b să aibă coordonatele b_j egale cu x (care intră în forma biliniară cu semnul „-”), celelalte coordonate fiind 0.

Definiția 2.6.2 (Vectori de decompoziție ai vectorului limită). Numim perechea de vectori a, b *vectori de decompoziție* ai vectorului x .

Remarcă. Definiția vectorilor limită depinde de alegerea bazei spațiului și nu este unică.

Lema 2.6.1. Indicii vectorilor de decompoziție nu depind de alegerea bazei spațiului.

Teorema 2.6.2. (Tipul intermediar). Vectorii limită au tipul egal cu 0.

Lema 2.6.3. Valoarea măsurii vectorului limită $x \in \mathbb{B}^n$ este egală cu valoarea măsurilor vectorilor săi de decompoziție a și b :

$$|x| = |a| = |b|.$$

Remarcă. Măsura vectorului limită depinde de alegerea bazei spațiului și *nu este invariantă* la mișcări. Astfel, ea nu poate fi considerată o măsură în sensul strict al cuvântului.

Deoarece pentru vectorul limită x are loc egalitatea $x \odot x = 0$, se pot ivi situații în care un vector limită este ortogonal cu un vector indexat, sau doi vectori limită sunt ortogonali între ei, însă vectorii de decompoziție ai vectorilor limită nu sunt ortogonali cu vectorul indexat sau între ei. În continuare se prezintă procedura de ortogonalizare a vectorilor limită în astfel de situații.

Propoziția 2.6.6. Vom considera vectorii limită ortogonali cu vectorii indexați sau ortogonali între ei, dacă toți vectorii de decompoziție sunt ortogonali cu vectorii indexați sau între ei.

Definiția 2.6.3 (Lineal limită). Un lineal în baza ortonormată a căruia există vectori limită se numește *lineal limită*.

Lema 2.6.7. Dacă baza ortonormată a unui lineal conține un vector limită, atunci indicii vectorilor de decompoziție ai acestuia sunt liberi în lineal.

Propoziția 2.6.8. Numim indicele compus al unui vector limită perechea de indici ai vectorilor lui de decompoziție. Indicele compus nu depinde de alegerea bazei spațiului și este liber în lineal. Notăția este $x^{ij} = a^i + b^j$, unde a^i, b^j sunt vectorii lui de decompoziție.

Signatura linealului limită nu poate fi dedusă ducând la limită signatura linealelor.

Algoritmul 2.5 (Signatura linealului limită).

1. Împărțim toți vectori din bază ai linealului în grupuri de echivalență, fiecare conținând doar vectorii echivalenți sau interschimbabili și fiecare vector dintr-un grup să fie neinterschimbabil cu toți vectorii următorului grup. În locul vectorilor limită folosim vectorii lor de decompoziție.
2. În fiecare grup găsim elemente ale semnăturii ca fiind tipurile mișcărilor de la un vector indexat la altul.
3. În fiecare grup adăugăm la semnatura elementul 0 corespunzător tipului de mișcare de la ultimul vector indexat la primul vector limită, dacă există vreunul.
4. În fiecare grup adăugăm la semnatura elementul 1 corespunzător tipului de mișcare între vectorii limită, dacă există mai mulți.
5. Inserăm elementul 0 între fiecare grup de vectori neinterschimbabili de la primul la ultimul.

În secțiunea 2.7 „**Construcții și calcule**” deducem câțiva algoritmi cu scop computațional. Dacă facem abstracție de normalizare, spațiul omogen $\mathbb{B}^n$ coincide cu metaspaziul lui $\mathbb{R}^{n+1}$, care este un spațiu liniar. Multe construcții, calcule și algoritmi pentru spații liniare sunt aplicabile și pentru spațiul $\mathbb{B}^n$ cu o singură mențiune: rezultatul trebuie întotdeauna să fie normalizat.

În următorii algoritmi considerăm linealele A^p, B^q cu bazele ortonormate $\{a^i\}_{i=\overline{0,p}}$ și $\{b^j\}_{j=\overline{0,q}}$.

Algoritmul 2.6 (Diferența linealelor).

1. Găsim proiecțiile a'^i ale vectorilor a^i pe complementul ortogonal al subspațiului $\mathbb{B}^q$.
2. Ortonormalizăm familia $\{a'^i\}$.

Algoritmul 2.7 (Suma și intersecția linealelor).

1. Notăm baza sumei $\{w^i\}$ și a intersecției $\{v^i\}$. Folosim încă o familie de vectori $\{h^i\}$.
2. Copiem toți vectorii $\{a^i\}$ în $\{w^i\}$ și în $\{h^i\}$, umplem cu vectorii nuli toți indicii liberi ai familiilor $\{w^i\}$ și $\{h^i\}$, astfel încât ele să conțină $n + 1$ de vectori.
3. Pentru fiecare vector b^i :

(a) Găsim vectorul:

$$b'^i = b^i - \sum_j (b^i \odot w^j) w^j,$$

ortogonal cu familia $\{w^i\}$. Folosind aceiași coeficienți, calculăm:

$$h = - \sum_j (b^i \odot w^j) h^j.$$

(b) Dacă b'^i nu este nul, îl normalizăm:

$$w = \frac{1}{\sqrt{b' \odot b'}} \cdot b'$$

și îl adăugăm la $\{w^i\}$. Folosind același factor, adăugăm la $\{h^i\}$ vectorul:

$$h' = \frac{1}{\sqrt{b' \odot b'}} \cdot h.$$

(c) Dacă b'^i este nul, ortonormalizăm vectorul h cu familia $\{v^i\}$ și îl adăugăm la ea.

4. Excludem vectorii nuli din familia $\{w^i\}$. Familia $\{v^i\}$ este baza intersecției și familia $\{w^i\}$ este baza sumei.

Considerăm spațiul $\mathbb{B}^n$ și $m + 1$ vectori $\{v^i\}_{i=\overline{0,m}}$. Fie $(v_{0i} : \dots : v_{ni})$, $i = \overline{0,m}$ coordonatele vectorului v^i , și fie familia de vectori v^i ordonată și liniar independentă. Compunem matricea V cu elementele $\{v_{ij}\}$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$.

Definiția 2.7.2 (Matricea de coordonate, matricea de status). Numim *matrice de coordonate* a familiei de vectori $\{v^i\}$ matricea dreptunghiulară compusă din coordonatele vectorilor acestei familii. Numim *matrice de status* matricea compusă din elementele $w_{ij} = v^i \odot_i v^j$.

Propoziția 2.7.10. Dacă măsura între lineale este egală cu zero sau aceștia sunt ortogonali, atunci tipul măsurii este, în caz general, nedeterminat.

Algoritmul 2.8 (Măsura între lineale).

1. Găsim bazele ortonormate $\{a^i\}, \{b^j\}$ ale linealelor $A^p - B^q$ și $B^q - A^p$. Considerăm numărul vectorilor $\{a^i\}$ mai mic sau egal cu numărul vectorilor $\{b^j\}$, altfel schimbăm rolurile lor.
2. Descompunem vectorii $a^i = a'^i + a''^i$, unde vectorii $\{a'^i\}$ sunt proiecțiile vectorilor $\{a^i\}$ pe $B^q - A^p$ și vectorii $\{a''^i\}$ sunt proiecțiile lor pe complementul ortogonal al $B^q - A^p$.
3. Calculăm determinanții w', w'' ai matricelor de status W', W'' ale familiilor de vectori $\{a'^i\}, \{a''^i\}$.
 - (a) Dacă $w' = 1, w'' = 0$ atunci $\varphi = 0, \psi$ este nedefinit și k este nedeterminat.
 - (b) Dacă $w' = 0, w'' = 1$ atunci φ este nedefinit, $\psi = 0$ și k este nedeterminat.
 - (c) Dacă $w' + w'' = 1$ atunci $\varphi = \tan^{-1} \sqrt{\frac{w''}{w'}}$, $\psi = \tan^{-1} \sqrt{\frac{w'}{w''}}$ și $k = 1$.
 - (d) Dacă $w' = 1, w'' \neq 0$ atunci $\varphi = \sqrt{w''}$, ψ este nemăsurabil și $k = 0$.
 - (e) Dacă $w' \neq 0, w'' = 1$ atunci φ este nemăsurabil, $\psi = \sqrt{w'}$ și $k = 0$.
 - (f) Dacă $w' - w'' = 1$ atunci $\varphi = \tanh^{-1} \sqrt{\frac{w''}{w'}}$, ψ este nemăsurabil și $k = -1$.
 - (g) Dacă $w'' - w' = 1$ atunci φ este nemăsurabil, $\psi = \tanh^{-1} \sqrt{\frac{w'}{w''}}$ și $k = -1$.
 - (h) Dacă unul sau amândouă linealele sunt lineale limită și $w' = w''$, atunci $\varphi = \psi = \infty$ și $k = -1$.

În secțiunea 2.8 „**Volum**” se definește volumul în spațiul omogen prin volumul în metaspațiul liniar și se studiază teoria volumelor cu rezultate concrete în cazul bidimensional.

Propoziția 2.8.2. Dacă $F \subset \mathbb{B}^n$ este o figură cu volumul $v_{\mathbb{B}}$ (în sensul $\mathbb{B}^n$), și volumul conului (în sensul $\mathbb{R}^{n+1}$) cu originea în $O \notin \mathbb{B}^n$ și baza în $F \subset \mathbb{B}^n$ este egal cu $v_{\mathbb{R}}$, atunci

$$v_{\mathbb{B}} = (n + 1)v_{\mathbb{R}}.$$

Corolar 2.8.2. Volumul $v_{\mathbb{B}}$ este invariant la mișcări.

Considerăm triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$ cu catetele a, b , ipotenuza c , unghiul interior α și cel exterior β' . Aria s a triunghiului este:

$$s = \frac{\alpha - \beta'}{k_1}.$$

Aceasta ecuație a ariei este convenabilă când $k_1 \neq 0$. În toate cazurile putem folosi una dintre ecuațiile din tabelul 2.4.

Tabelul 2.4: Formule ale ariei triunghiului dreptunghic

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{S(a)S(b)}{1 + C(a)C(b)} \\ C(s) &= \frac{C(a) + C(b)}{1 + C(a)C(b)} \\ T(s) &= \frac{S(a)S(b)}{C(a) + C(b)} \end{aligned}$$

Teorema 2.8.3. Tipul ariei k este egal cu produsul tipurilor vectorilor din bază:

$$k = K_1 K_2.$$

Propoziția 2.8.4. Tipul volumului este nul dacă și numai dacă signatura $\{k_1, \dots, k_n\}$ conține cel puțin un element nul $k_i = 0, i = \overline{1, n}$.

Conjectura 2.8.6. Tipul volumului în spațiul $\mathbb{B}^n$ cu signatura $\{k_1, \dots, k_n\}$ este:

$$k = \prod_{i=1}^n K_i.$$

În capitolul 3 „**Aplicări ale teoriei**” sunt descrise unele aplicări ale teoriei în diferite domenii ale geometriei algebrice, geometriei diferențiale și topologiei. Secțiunea 3.1 „**Geometria algebrică**” descrie câteva aplicări ale teoriei în acest domeniu.

Lema 3.1.1. Distanța nenulă $d(\bar{x}, \bar{y})$ între vectori din spațiul semi-Euclidian ${}^d\mathbb{E}_n^m$ se exprimă prin distanța $d(x, y)$ între vectorii corespunzători din spațiu omogen $\mathbb{B}^n$ cu signatura $\left\{0, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_2}, \dots, \frac{p_n}{p_{n-1}}\right\}$ în felul următor:

$$d(x, y) = \begin{cases} d(\bar{x}, \bar{y}), & d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}, \\ -i d(\bar{x}, \bar{y}), & d(\bar{x}, \bar{y}) \in i\mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarcă. În cazul spațiului semi-Euclidian cu defectul $d > 1$ signatura spațiului omogen este incomplet determinată, precum și geometria lui. Spațiul permite transformarea de dilatare a unor unghiuri, deci distanțele nu definesc toată metrica.

Corolar 3.1.1. Metaspațiul $\mathbb{R}^{n+1}$ unui spațiu omogen $\mathbb{B}^n$ cu signatura $\{k_1, \dots, k_n\}$ este un spațiu omogen și are signatura $\{0, k_1, \dots, k_n\}$.

Lema 3.1.2. Spațiul semi-Riemannian ${}^d\mathbb{V}_n^m$ corespunde (în sensul tensorului metric) spațiului omogen cu signatura $\left\{k_1, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_n}{p_{n-1}}\right\}$, unde $k_1 = 0$ pentru spații semi-Riemaniene liniare, $k_1 = 1$ pentru spații

pozitiv curbate și $k_1 = -1$ pentru spații negativ curbate, iar $p_i, i = \overline{1, n}$ sunt coeficienți ai formei biliniare a tensorului lui metric.

Corolar 3.1.2. La distanțe mici spațiul neliniar omogen cu semnatura $\{\pm 1, k_2, \dots, k_n\}$ se aproximează cel mai bine cu spațiul liniar cu semnatura $\{0, k_2, \dots, k_n\}$.

Lema 3.1.3. Grupul cristalografic al spațiului cu semnatura $\{k_1, \dots, k_n\}$, generat prin rotații principale $\mathfrak{R}_1(\varphi_1), \dots, \mathfrak{R}_n(\varphi_n)$, este izomorf cu grupul cristalografic al spațiului dual cu semnatura $\{k_n, \dots, k_1\}$, generat prin rotații principale $\mathfrak{R}'_1(\varphi_n), \dots, \mathfrak{R}'_n(\varphi_1)$.

Remarcă. Deși grupurile cristalografice ale spațiilor duale sunt izomorfe, nici spațiile duale și nici laticile grupurilor, în caz general, nu sunt izometrice.

În secțiunea 3.2 „**Topologia**” sunt prezentate câteva rezultate ale teoriei cu efecte topologice. Definiția clasică a separabilității punctelor pe dreaptă face diferența între punctele drepte eliptice (neseparabile) și ale dreptelor Euclidiene și hiperbolice (separabile). Pentru a face distincție între ultimele două drepte, definim altfel separabilitatea punctelor pe dreaptă.

Definiția 3.2.1 (Punctele separabile și neseparabile). Numim punctele unei drepte *neseparabile* dacă toate punctele acestei drepte sunt conectibile cu orice punct al metaplanului. Numim punctele unei drepte *separabile* dacă între orice trei puncte distincte A, B, C și un punct D al metaplanului conectibil cu A, C și neconectibil cu B , unghiul $\angle ADC$ este nemăsurabil.

Definiția 3.2.3 (Separabilitatea slabă și puternică). Numim punctele unei drepte *slab separabile* dacă în metaplanul acestei drepte orice punct D , fiind neconectibil cu punctul de mijloc B și conectibil cu celelalte puncte A, C , este conectibil cu toate punctele dintr-o vecinătate a lui B . Numim punctele unei drepte *puternic separabile* dacă în aceleași condiții orice punct D este neconectibil nu numai cu punctul B , ci și cu toate punctele dintr-o vecinătate a lui.

În aceste definiții punctele drepte eliptice sunt neseparabile, punctele drepte parabolice (Euclidiene) sunt slab separabile și punctele drepte hiperbolice sunt puternic separabile.

Noțiunea de vecinătate pentru spații de dimensiuni mai mari ca 1 nu corespunde principiului dualității.

Definiția 3.2.4 (Vecinătatea generalizată). Numim *vecinătate* a punctului A cu o bază definită în el $\{a^0 = A, a^1, \dots, a^n\}$ într-un spațiu omogen $\mathbb{B}^n$ o structură de puncte, drepte și plane de diferite dimensiuni, astfel încât măsura m -dimensională între fiecare (punct, dreapta sau plan) dintre ele și cel din bază (punct, dreapta sau plan) de aceeași dimensiune m să fie mai mică decât $r_m, m = \overline{0, n-1}$.

Această definiție este autoduală, adică, noțiunea duală vecinătății generalizate coincide cu ea însăși. Vecinătatea clasică este un caz particular al acestei noțiuni, pentru care măsurile tuturor unghiurilor sunt mărginite. În cazul acesta $r_0 = r, r_i = \frac{\pi}{2}, i = \overline{1, n-1}$. Noțiunea generalizată este esențială în spații cu măsuri nemărginite ale unor unghiuri.

Înlocuind vecinătatea cu generalizarea ei în axiomele de separabilitate ale spațiilor topologice, obținem axiomele de separabilitate generalizată. Deși majoritatea spațiilor omogene nu sunt separabile, ele sunt generalizat separabile.

În teoria varietăților diferențiale omeomorfismul între spațiul studiat și cel Euclidian poate fi înlocuit cu omeomorfismul între spațiul studiat și unul omogen, ținând cont de generalizările anterioare. Se construiesc exemple de varietăți diferențiale omogene.

În secțiunea 3.3 „**Geometria diferențială**” se analizează câteva aplicări ale teoriei utile în acest domeniu.

Propoziția 3.3.1. În caz general, într-un spațiu omogen linia geodesică între punctele A, B nu poate fi definită ca având lungime minimă sau maximă.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Teoria spațiilor omogene a apărut:

- din cercetările ce țin de rezolvarea problemei independenței axiomei paralelelor a lui Euclid;
- din tendințele de a crea o teorie comună pentru diverse geometrii introduse în secolul al XIX-lea de către Arthur Cayley și Felix Klein.

Programul Erlangen a fost lansat în scopul realizării unei priviri în ansamblu și unei clasificări ale spațiilor geometrice. Însă acest obiective nu s-a realizat pentru geometriile metrice de dimensiuni mai mari ca 2, cu excepția spațiilor de curbura constantă și a celor folosite în fizică. Prin urmare este actuală următoarea problemă: **cercetarea spațiilor omogene prin metode liniare, aplicând conceptul de semnătură**. Conceptul nou de semnătură a permis construire geometriei analitice a spațiilor omogene. Această teorie se aplică în diferite aspecte ale

În capitolul 2, a fost construită geometria analitică a spațiilor omogene. În capitolul 3, a fost dezvoltată aplicarea teoriei construite în diferite domenii ale matematicii: geometria algebrică, topologie, pentru obiectele cărora este posibilă aplicarea noțiunii de semnătură. Teoria dezvoltată în teza permite formularea următoarelor concluzii:

1. A fost argumentat un nou concept de semnătură. Cu ajutorul lui, a fost construit modelul spațiului omogen de semnatura dată. Aceasta permite clasificarea spațiilor omogene pe baza conceptului de semnătură. De asemenea, pentru fiecare spațiu omogen cunoscut (spații de curbura constantă, Galilean, Minkowski, De Sitter, Anti de Sitter și alte spații) au fost găsite semnatura și locul în clasificarea prezentată [12, 13].
2. În dependență de semnatura spațiului, au fost date formele parametrizate ale unor axiome geometrice importante. Pe bază lor, afirmațiile sunt formulate în termenii parametrilor semnaturii. Iar demonstrarea lor de asemenea se prezintă în aceeași manieră parametrizată. Au fost introduse funcțiile trigonometrice generalizate, care depind de semnătură. Aceste funcții fac posibilă găsirea formelor universale ale ecuațiilor trigonometrice, comune pentru toate spațiile omogene, introduse în teză [13, 15, 18].
3. Prin intermediul noului concept al grupului de matrice ortogonale generalizate, a fost descris grupul de izometrii al oricărui spațiu omogen. În conformitate cu conceptul geometriei al lui Felix Klein, descris în Programul Erlangen binecunoscut, grupul de izometrii al unui spațiu determină geometria acestui spațiu [19, 26].
4. Via conceptul nou de semnătură, a fost determinat tipul (eliptic, parabolic și hiperbolic) cantităților geometrice (distanțelor, unghiurilor, ariilor, volumelor) [14, 16].

5. Pe bază conceptului nou de semnătură, a fost formalizată noțiunea de dualitate a spațiilor omogene, ceea ce ne duce la teorema despre izomorfismul grupurilor cristalografice ale spațiilor duale [17].

6. Utilizând primul element al semnăturii, a fost oferită diferențiere topologică și metrică între dreptele eliptică, parabolică și hiperbolică. Aceasta diferențiere duce la generalizarea noțiunilor de vecinătate și de spațiu Hausdorff și prezintă spații omogene ca obiecte importante de studiu printre spațiile metrice. Aceasta deschide calea pentru studiul varietăților omogene [17].

7. Cele menționate mai sus permit să afirmăm că este complet rezolvată problema științifică: **cercetarea spațiilor omogene prin metode liniare, aplicând conceptul de semnătură.**

Diferite spații omogene concrete au fost folosite cu succes în matematică și fizică: Euclidian, hiperbolic, Minkowskii, De Sitter. În diferite cursuri matematice, au jucat un rol important aplicațiile geometriilor spațiilor omogene. De aici rezultă că geometria analitică a spațiilor omogene are potențialul să lărgască și să aprofundeze aceste aplicații.

Recomandări: Rezultatele obținute și metode elaborate pot fi folosite:

- la studierea ulterioară a diferitor spații omogene concrete;
- la cercetarea și modelarea teoretică a diferitor fenomene fizice;
- la cursuri facultative și opționale. În acest scop a fost realizat produsul software GeomSpace.

Bibliografie

1. Bachmann F. Rigidity in the geometry of involutory elements of a group. Geometry and differential geometry (Proc. Conf., Univ. Haifa, Haifa, 1979), p. 8 — 13, Lecture Notes in Math., 792, Springer, Berlin, 1980.
2. Balan V., Udriște C., Țevy, I. Sub-Riemannian geometry and optimal control on Lorenz-induced distributions. Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. 77 no. 2, 2015, p. 29 — 42.
3. Bourguignon J. P., Hijazi O., Milhorat J. L., Moroianu A., Moroianu S. A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry. EMS Monographs in Mathematics, Zürich, 2015. ix+452 p.
4. Cho Yun. Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space. Bull. Korean Math. Soc., 2009, vol. 46 nr. 6 p. 1099 — 1133.
5. Guțul I. Some hyperbolic manifolds. Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat., 2004, no. 3, p. 63 — 70.
6. Karzel H., Wefelscheid H. A geometric construction of the K-loop of a hyperbolic space (English summary). Geom. Dedicata 58 (1995), no. 3, 227 — 236.
7. Klein F. A comparative review of recent researches in geometry. Bull. New York Math. Soc., 1893, vol. 2 (1892-1893), p. 215 — 249.
8. Klingenberg R. Metric planes and metric vector spaces. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1979. xi+209 p. ISBN 0-471-04901-8
9. Liu H., Liu G. Weingarten rotation surfaces in 3-dimensional de Sitter space. J. of Geometry, 2004, vol. 79 iss. 1-2 p. 156 — 168.
10. Makarov, V. S., Damian F. L., Makarov, P. V. Star complex over regular maps. Proceedings of the Yroslavl International Conference “Geometry, Topology and Applicayions”, 2013, p. 27 — 32.
11. Miron R., Anastasiei M. The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications. Fundamental Theories of Physics, v. 59, 1994, XIV+289 p.
12. Popa A. Uniform model of geometric spaces. Alba Iulia: Acta Universitatis Apulensis, sp. iss., 2009, p. 23 — 28.
13. Popa A. On axiomatic parametrization. Abstracts of The International Conference “Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications” dedicated to the 120th anniversary of B. N. Delone. Steklov Mathematical Institute of RAS and Moscow State University, 2010.
14. Popa A. Linear approach to non-linear geometry. Proceedings of International conference “Metric geometry of surfaces and polyhedra. Actual Problems in Mathematics and Mechanics, v. VI, Mathematics”, dedicated to 100th anniversary of N. V. Efimov, Moscow State University, 2011, p. 224 — 229.

15. Popa A. Uniform Theory of Geometric Spaces. 2010, p. 44, <http://arxiv.org/pdf/1008.4074v2>, http://www.intellectualarchive.com/getfile.php?file=x0tKq9LiBCA&orig_file=Alexander_Popa__Uniform_Theory_of_Geometric_Spaces.pdf
16. Popa A. Properties of figures and properties of spaces. Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, 2014, pp. 142 — 145.
17. Popa A. On the distinction between one-dimensional Euclidean and hyperbolic spaces. Bul. Acad. de Ştiinţe a Rep. Moldova. Matematica, 2015, vol. 77 nr. 1, p. 97 — 102.
18. Popa A. Space duality as instrument for construction of new geometries. The 8th Congress of Romanian Mathematicians, 2015, 1 p.
19. Popa A. Generalized Orthogonal Matrices as Lie Group of Homogeneous Spaces. International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE - 2016), June 23-26, 2016, Chişinău, p. 17 — 18.
20. Заморзаев А. М. Теория простой и кратной антисимметрии. Кишинев: Штиинца, 1976. 283 с.
21. Struve H., Struve R. Projective spaces with Cayley-Klein metrics. (English summary) J. Geom. 81 (2004), no. 1-2, 155 — 167.
22. Struve R. Orthogonal Cayley-Klein groups. (English summary) Results Math. 48 (2005), no. 1-2, 168 — 183.
23. Struve H., Struve R. Lattice theory and metric geometry. (English summary) Algebra Universalis 58 (2008), no. 4, 461 — 477.
24. Struve H., Struve R. Non-Euclidean geometries: the Cayley-Klein approach. J. Geom. 98 (2010), no. 1-2, 151 — 170.
25. Макаров В. С., Дамиан, Ф. Л., Макаров П. В. Компактные линзы и гиперболические многообразия. Библиотека Чебышевского сборника, Международная конференция «Алгебра теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 85-летию со дня рождения профессора С. С. Рышкова. Тула, 2015, с. 25 — 30.
26. Попа А. Н. Новые методы исследования изотропных векторов. Библиотека Чебышевского сборника, Международная конференция «Алгебра теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 85-летию со дня рождения профессора С. С. Рышкова. Тула, 2015, с. 317 — 319.
27. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М.: ГИТТЛ, 1955. — 744 с.
28. Ромакина Л. Н. Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей. Саратов: Научная книга, 2008.

29. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. Часть 1: Тригонометрия. Саратов, Изд. Саратовского Ун-та, 2013, 245 с.
30. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. Часть 2: Преобразования и простые разбиения. Саратов, Изд. Саратовского Ун-та, 2013, 277 с.
31. Яглом И. М., Розенфельд Б. А., Ясинская Е. У. Проективные метрики. УМН, 1964.

ADNOTARE

Popa Alexandru, „Geometria analitică a spațiilor omogene”, teză de doctor în științe matematice, Chișinău, 2017.

Teza este scrisă în engleză și constă din: introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, apendice, bibliografie din 210 de titluri, 140 de pagini de text de bază, 27 de figuri, 9 algoritmi, 5 tabele. Rezultatele obținute sunt publicate în 9 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: Spațiu omogen, spațiu Riemanian, geometrie Klein, metrică proiectivă, geometrie analitică.

Domeniul de studii: Geometria spațiilor omogene.

Scopul și obiectivele tezei: Scopul cercetării este să se ofere un instrument, care poate fi folosit pentru a studia spații omogene în limbajul algebrei lineare. Obiectivele sunt: argumentarea conceptului de semnătură, pe baza lui, construirea spațiilor omogene, construirea modelului spațiului omogen cu semnatura dată, expresia măsurării cantităților geometrice via semnatura, aplicațiile geometriei analitice a spațiilor omogene.

Noutatea științifică a rezultatelor obținute:

- Geometria analitică este dezvoltată folosind limbajul algebrei lineare, chiar și pentru spații nelineare.
- Este dezvoltată o teorie universală, în care elementele semnăturii spațiului sunt parametri.

Problema științifică importantă soluționată: Cercetarea spațiilor omogene prin metode lineare, aplicând conceptul de semnătură.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a tezei: Rezultatele prezentate în teză sunt noi, au un caracter teoretic și cu ajutorul conceptului de semnătură prezintă o teorie generală a spațiilor omogene.

Implementarea rezultatelor:

- Rezultate noi pot fi folosite în investigarea problemelor în geometria diferențială, în fizica teoretică și în alte domenii unde poate fi aplicat conceptul de semnătură în sensul dat.
- Teza poate fi folosită în calitate de suport pentru cursurile opționale universitate și postuniversitare.

АННОТАЦИЯ

Попа Александру, «Аналитическая геометрия однородных пространств», докторская диссертация, Кишинёв, 2017.

Диссертация написана на английском языке и состоит из: введения, трёх глав, общих выводов и рекомендаций, приложения, библиографии из 210 наименований, 140 страниц основного текста, 27 иллюстраций, 9 алгоритмов, 5 таблиц. Результаты исследований опубликованы в 9 научных работах.

Ключевые слова: Однородное пространство, Риманово пространство, геометрия Клейна, проективная метрика, аналитическая геометрия.

Область исследования: Геометрия однородных пространств.

Цели и задачи исследования: Цель исследования — предоставить инструмент для исследования однородных пространств на языке линейной алгебры. Задачи исследования: введение сигнатуры, построение однородного пространства с его помощью, построение модели однородного пространства по сигнатуре, выражение геометрических мер через сигнатуру, приложения аналитической геометрии однородных пространств.

Научная новизна и оригинальность:

- Аналитическая геометрия построена на языке линейной алгебры, даже для нелинейных пространств.
- Разработана одна универсальная теория, в которой элементы сигнатуры пространства являются параметрами.

Решенная научная проблема: Исследование однородных пространств с помощью линейных методов, посредством концепцию сигнатуры.

Теоретическая и прикладная значимость: результаты данной работы новы, имеют теоретический характер, и с помощью концепции сигнатуры предоставляют общую теорию однородных пространств.

Внедрение научных результатов:

- Новые результаты можно использовать в рассмотрении задач дифференциальной геометрии, в физике и других областей, в которых имеет смысл понятие сигнатуры в указанном смысле.
- Диссертацию можно использовать в качестве учебного руководства в факультативных курсах в университете и аспирантуре.

ANNOTATION

Popa Alexandru, “Analytic geometry of homogeneous spaces”, PhD thesis, Chisinau, 2017.

The thesis is written in English and consists of: introduction, three chapters, general conclusions and recommendations, appendix, 210 bibliography titles, 140 pages of main text, 27 figures, 9 algorithms, 5 tables. The obtained results were published in 9 scientific papers.

Keywords: Homogeneous space, Riemannian space, Klein geometry, projective metric, analytic geometry.

Domain of research: Geometry of homogeneous spaces.

Goals and objectives: The goal of the research is to provide a toolchain that can be used to study of homogeneous spaces by means of linear algebra. The objectives of the research are: introduction of the new concept of the space signature, construction of homogeneous space based on signature concept, construction of the model of homogeneous space with given signature, expression of the measurement of different geometric quantities via signature, different applications of the analytic geometry of homogeneous spaces.

Scientific innovation of obtained results:

- Analytic geometry is developed in linear algebra language, even for non-linear spaces.
- One universal theory is developed that uses the elements of space signature as parameters.

Important scientific problem solved: The investigation of the homogeneous spaces with linear methods via concept of the signature.

Theoretical and practical value of the work: Rezultatele prezentate în teză sunt noi, au un caracter teoretic și cu ajutorul conceptului de semnătură prezintă o teorie generală a spațiilor omogene.

Implementation of scientific results:

- New results can be used in investigation of the problems of differential geometry, in theoretic physics and in other domains where notion of the signature can be applied in the given sense.
- The thesis can be used as the didactic support for optional courses in the university and doctoral studies.

POPA ALEXANDRU

GEOMETRIA ANALITICĂ A SPAȚIILOR OMOGENE

111.04 — GEOMETRIE ȘI TOPOLOGIE

Autoreferatul tezei de doctor în științe matematice

Aprobat spre tipar: 2.06.2017

Hârtie offset. Tipar offset.

Coli de tipar: 2,1

Formatul hârtiei: 60x84 1/16

Tirajul 40 ex în română și 30 ex în engleză.

Comanda Nr. 60/17

Centrul Editorial-Poligrafic al USM
str. Al. Mateevici, nr. 60, Chișinău, MD 2009