INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ AL ACADEMIEI DE ŞTIINŢE A MOLDOVEI

Cu titlu de manuscris

C.Z.U.: 512.548

CEBAN DINA

QUASIGRUPURI AUTOORTOGONALE: CONEXIUNI CU PARATOPIILE UNOR SISTEME ORTOGONALE

111.03 - LOGICĂ MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Autoreferatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

CHIŞINĂU, 2017

Teza a fost elaborată în cadrul Departamentului Matematică, Universitatea de Stat din Moldova.

Conducător ştiinţific:
SÎRBU Parascovia, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ., 111.03 – logică matematică, algebră şi teoria numerelor

Referenţi oficiali:
SOKHATSKY Fedir, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ., Universitatea Naţională din Doneţk în numele lui Vasyl' Stus, Vinnytsia, Ukraina
CUZNEŢOV Eugeniu, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ., Institutul de Matematică şi Informatică al Academiei de ştiinţe a Moldovei

Componenţa Consiliului ştiinţific Specializat:
1. **REABUHIN Iurii, preşedinte**, acad. al AŞM, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ., IMI
2. **IZBAŞ Vladimir, secretar ştiinţific**, dr. în şt. fiz.-mat., conf. cercet., IMI
3. **CIOBAN Mitrofan**, acad. al AŞM, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ., UST
4. **URSU Vasile**, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ., UTM
5. **ŞCERBACOV Victor**, dr. hab. în şt. fiz.-mat., conf. cercet., IMI

Susţinerea va avea loc la **7 iulie 2017**, ora **15:00** în şedinţa Consiliului ştiinţific specializat D 01.01.01.06 - 03, din cadrul Institutul de Matematică şi Informatică al Academiei de ştiinţe a Moldovei (cab. 340; str. Academiei 5, or. Chişinău, MD-2028, Republica Moldova).

Teza de doctor şi autoreferatul pot fi consultate la biblioteca Institutului de Matematică şi Informatică al Academiei de ştiinţe a Moldovei şi la pagina web a C.N.A.A. (www.cnaa.md).

Autoreferatul a fost expediat la _______ iunie 2017.

Secretar ştiinţific al Consiliului ştiinţific specializat,
Izbaş Vladimir, dr., conf. cercet. V. Izbaş

Conducător ştiinţific,
Sîrbu Parascovia, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ. P. Sîrbu

Autor,
Ceban Dina Ceban

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea temei. Teoria quasigrupurilor se află la frontiera dintre algebră şi combinatorică, poziţie ce îi oferă multiple oportunităţi de dezvoltare şi de aplicare la soluţionarea problemelor cu caracter combinatoric. Ortogonalitatea operaţiilor (quasigrupurilor, pătratelor latine) este, până în prezent, printre noţiunile cheie, utilizate la construirea codurilor, în criptografie, în teoria reţelelor algebrice ş.a. care, prin necesităţile lor, contribuie la evoluţia teoriei date [22, 24-26, 29-31, 35-37]. Studiul transformărilor sistemelor ortogonale de operaţii, în particular a paratopiilor, permite nu doar trecerea la sisteme ortogonale de quasigrupuri (pătrate latine), care sunt obiecte cu propietăţi mai bogate, dar conduce şi la apariţia unor identităţi ce implică ortogonalitatea parastrofilor quasigrupurilor din sistemul respectiv (quasigrupuri parastrofic ortogonale, autoortogonale), problema caracterizării lor fiind una de actualitate în teoria quasigrupurilor [7, 8, 10-14, 16, 17, 21, 33, 34, 38].

Descrierea situaţiei în domeniul de cercetare şi identificarea problemelor de cercetare. Apariţia şi dezvoltarea teoriei operaţiilor ortogonale se datorează în mare parte ipotezei lui L. Euler despre inexistenţa pătratelor latine ortogonale de ordinul $q \equiv 2\ (mod\ 4)$, formulată în 1782, care se verifică uşor pentru $q = 2$ (caz trivial), iar pentru $q = 6$ a fost confirmată abia în 1901 de către G. Tarry. Această ipoteză a fost soluţionată definitiv (negativ) în anii 1959-1960 de către Bose, Parker şi Shrikhande [19], care au arătat că există pătrate latine ortogonale de orice ordin $q \neq 2, 6$.

Pătratele latine reprezintă tablele multiplicative ale quasigrupurilor finite, astfel noţiunea de ortogonalitate a două pătrate latine conduce în mod firesc la noţiunea de ortogonalitate a două operaţii de quasigrup: două quasigrupuri $(G,\cdot)$ şi $(G,*)$ se numesc ortogonale dacă sistemul de ecuaţii $x \cdot y = a$ şi $x * y = b$ are o singură soluţie în G, pentru fiecare $a, b \in G$. Dacă G este o mulţime finită, atunci această definiţie poate fi formulată, echivalent, în felul următor: două quasigrupuri finite $(G,\cdot)$ şi $(G,*)$ sunt ortogonale dacă sistemul de egalităţi $x \cdot y = z \cdot t$, $x * y = z * t$ implică $x = z$, $y = t$.

Pentru prima dată un criteriu al ortogonalităţii quasigrupurilor binare în limbajul identităţilor a fost formulat de H. Mann în 1944 [27]. Au urmat o serie de rezultate obţinute de A. Sade, S. K. Stein, T. Evans şi V. Belousov, care au considerat identităţi în grupoizii binari (quasigrupuri binare) ce implică ortogonalitatea parastrofilor grupoidului (quasigrupului).

În literatura de specialitate un număr mare de lucrări este dedicat quasigrupurilor care posedă sisteme ortogonale de parastrofi (parastrofi principali). Quasigrupurile n-are care posedă sisteme ortogonale din n parastrofi (n parastrofi principali) se numesc quasigrupuri parastrofic-ortogonale (respectiv, autoortogonale). Noţiunea de pătrat latin autoortogonal este atribuită lui E. Nemeth, care a numit astfel pătratul latin ortogonal conjugatei sale [32]. Primii care au publicat rezultate ce ţin de autoortogonalitatea pătratelor latine au fost N. Mendelsohn, S. K. Stein şi A. Sade [28, 39, 42]. R. Brayton, D.Coppersmith şi A.Hoffman au demonstrat că există quasigrupuri binare autoortogonale finite de orice ordin $q \neq 1, 2, 3, 6$ [20]. Problema caracterizării quasigrupurilor parastrofic-ortogonale (autoortogonale), inclusiv a spectrului lor, în prezent este rezolvată doar parţial [8,9, 13, 14-18, 21, 24, 26, 29, 34 ş.a.].

În [2, 9] V. Belousov arată că lungimea minimală posibilă a identităţilor „netriviale" cu două variabile în quasigrupuri este 5 şi că aceste identităţi implică ortogonalitatea parastrofilor quasigrupului respectiv. În aceleaşi lucrări V. Belousov a obţinut o clasificare a identităţilor de lungime 5 cu două variabile (identităţi minimale) în quasigrupuri, ce constă din 7 clase de identităţi. Această clasificare a fost obţinută, independent, şi de F. Bennett [15]. V. Belousov în [2, 9] a pus problema elaborării teoriei quasigrupurilor cu fiecare din cele 7 identităţi minimale – reprezentanţi ai claselor de echivalenţă parastrofică. Quasigrupurile Stein şi Shroder (definite de identităţi de tipurile T_4, T_6, T_8, T_{10} şi T_{11}) au fost studiate în [4, 17, 18, 33, 39, 41, ş. a.] Până în prezent rămân mai puţin studiate quasigrupurile cu primele două identităţi din clasificarea lui Belousov (π-quasigrupurile de tipurile T_1 şi T_2). O problemă aparte o constituie caracterizarea grupurilor izotope unor quasigrupuri cu identităţi minimale (π-quasigrupuri). Identităţile minimale apar, de asemenea, şi la caracterizarea paratopiilor sistemelor ortogonale din două quasigrupuri binare şi selectorii binari [3].

k-Reţelelor algebrice le corespund sisteme ortogonale de operaţii binare şi, reciproc, sistemele ortogonale de operaţii binare determină k-reţele. Diferite transformări ale k-reţelei (ale liniilor sau punctelor) modifică sistemul ortogonal de operaţii, care o coordonatizează, păstrând ortogonalitatea sistemului. Astfel, apare problema descrierii transformărilor sistemelor ortogonale, care păstrează ortogonalitatea lor, în particular, a transformărilor care lasă invariante sistemele ortogonale (numite paratopii) [1, 35, 36]. În caz binar, V. Belousov a caracterizat în lucrarea [3] toate sistemele ortogonale din două quasigrupuri binare şi selectorii binari ce admit cel puţin o paratopie netrivială, arătând că există exact 9 astfel de sisteme, quasigrupurile sistemului sunt parastrofe între ele sau se exprimă unul prin celălalt cu ajutorul superpoziţiei, iar identităţile pe care le implică existenţa paratopiilor sunt printre cele 7 identităţi minimale din clasificarea lui Belousov. Acest rezultat definitiv, obţinut în caz binar de V. Belousov, pune problema generalizării lui în caz n-ar.

Scopul şi obiectivele lucrării. Scopul principal al tezei constă în studiul sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari, care admit cel puţin o paratopie netrivială. Realizarea acestui scop generează următoarele obiective:

- descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari, care admit cel puţin o paratopie netrivială;
- determinarea tuturor sistemelor de tipul dat;
- caracterizarea paratopiilor sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari;
- studiul identităţilor implicate de paratopii şi a quasigrupurilor parastrofic-ortogonale (autoortogonale) de diferită aritate, ce verifică astfel de identităţi.

Metodologia cercetării ştiinţifice. Construcţiile şi metodele de demonstraţie se bazează pe aplicarea noţiunilor de quasigrup, sistem ortogonal, quasigrup autoortogonal, paratopie, identitate minimală, proprietate universală.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. În lucrare sunt determinate pentru prima dată toate sistemele ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari care admit cel puţin o paratopie netrivială şi toate paratopiile acestor sisteme; sunt deduse şi clasificate identităţile implicate de existenţa paratopiilor. Descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari, care admit cel puţin o paratopie netrivială, generalizează rezultatul lui V. Belousov despre paratopiile sistemelor ortogonale din două quasigrupuri binare şi selectorii binari. În acest scop a fost utilizată o metodă generală ce poate fi aplicată în cazul quasigrupurilor de orice aritate finită. Sunt obţinute estimări ale spectrului quasigrupurilor n-are autoortogonale, sunt studiate quasigrupuri binare şi ternare cu identităţi ce implică ortogonalitatea parastrofilor.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari, care admit cel puţin o paratopie netrivială.

Semnificaţia teoretică. Rezultatele ce ţin de descrierea paratopiilor sistemelor ortogonale de quasigrupuri reprezintă un pas important în studiul transformărilor sistemelor ortogonale de operaţii n-are şi a identităţilor ce implică ortogonalitatea parastrofilor unui quasigrup n-ar.

Valoarea aplicativă a lucrării. Lucrarea poartă un caracter teoretic, însă are şi largi perspective de aplicare la codificarea şi cifrarea informaţiei, la planificarea experimentelor, în combinatorică, teoria reţelelor algebrice ş.a. De asemenea, rezultatele lucrării pot fi utilizate în predarea cursurilor opţionale de specialitate pentru studenţii şi masterazii de la specialităţile Matematica, Matematica Aplicată ş.a.

Rezultatele principale înaintate spre susţinere:

a) există exact 153 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi trei selectori ternari care admit cel puţin o paratopie netrivială;

b) identităţile implicate de existenţa paratopiilor în caz ternar se reduc la 4 tipuri posibile;

c) există quasigrupuri n-are autoortogonale de ordinul $q \neq 2(2p+1), p \geq 1$, pentru orice $n, q \geq 3$;

d) sunt deduse condiţii necesare şi suficiente ca un π-quasigrup de tipul T_1, respectiv T_2, să fie izotop unui grup (grup abelian);

e) sunt obţinute caracterizări ale universalităţii identităţilor minimale de tipurile T_1 şi T_2, ale ordinului π-quasigrupurilor finite de tipul T_1 şi ale grupului substituţiilor interne în π-quasigrupurile de tipul T_1;

f) sunt stabilite condiţii necesare şi suficiente ca un T-quasigrup să fie π-quasigrup de tipul T_1, respectiv de tipul T_2.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Sistemele ortogonale de quasigrupuri n-are, $n \geq 2$, sunt utilizate cu succes la construirea MDS-codurilor, în criptografie, la planificarea experimentelor, în combinatorică, în teoria k-reţelelor algebrice ş.a. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele ştiinţifice obţinute au fost examinate şi aprobate la: Sesiunea specială a Seminarului „Algebră şi Logică matematică”, dedicată memoriei Profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe din Moldova, ediţiile din anii 2012, 2014-2017;

Seminarul Departamentului Matematică, Universitatea de Stat din Moldova, 2016; Seminarul de Ştiinţe Matematice P. Osmătescu, Departamentul de Matematică, Universitatea Tehnică a Moldovei, 2017.

Rezultatele principale incluse în teză au fost prezentate la următoarele conferinţe ştiinţifice:

- The 12th International Scientific Seminar „Discrete Mathematics and its Applications”, dedicated to the memory of academician O. B. Lupanov, State University „M. V. Lomonosov”, Moscow, Russia, 2016;
- The 24th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM - 2016), September 15-18, 2016, Craiova, România;
- The 11th Summer School „Algebra, Topology, Analysis”, Odessa, Ukraine, 2016;
- International Congress of Women Mathematicians (ICWM), Ewha Womans University, Seoul, Korea, 2014;
- Third Conference of Mathematical Society of Republic of Moldova, Chişinău, 2014;
- International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE), Chişinău, 2013, 2015, 2016;
- Conferinţa Ştiinţifică naţională cu participare internaţională „Învăţământul superior din Republica Moldova la 85 de ani”, Universitatea de Stat din Tiraspol, 24-25 septembrie 2015, Chişinău;
- Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor „Tendințe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători”, Academia de Ştiinţe a Moldovei, 2015, Chişinău;
- International Conference of Young Researchers, X edition, ULIM, Chişinău, 2012;
- Conferinţa Interuniversitară „Educaţie prin cercetare – garant al performanţei învăţământului superior”, Chişinău, 2012;
- Conferinţa ştiinţifică „Integrare prin cercetare şi inovare”, Universitatea de Stat din Moldova, Chişinău, 2013, 2014.

Publicaţiile la tema tezei. Rezultatele obţinute în teză sunt publicate în 20 lucrări ştiinţifice: 5 articole în reviste, 4 articole în culegeri, 6 teze la conferinţe internaţionale, 5 teze la conferinţe naţionale; inclusiv 3 articole şi 5 teze de un singur autor [43-62]. Volumul total al publicaţiilor este 5,64 coli de autor.

Volumul şi structura tezei. Teza este scrisă în limba română, cuprinde 137 pagini (inclusiv 117 pagini text de bază) şi este compusă din: Introducere, trei capitole, Concluzii generale şi recomandări, Bibliografie cu 142 titluri şi o anexă.

Cuvintele-cheie: quasigrup, sistem ortogonal, quasigrup autoortogonal, paratopie, identitate minimală, proprietate universală

CONŢINUTUL TEZEI

În **Introducere** este argumentată actualitatea temei tezei, se prezintă scopul şi obiectivele tezei, noutatea ştiinţifică a rezultatelor obţinute, importanţa teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării, aprobarea rezultatelor, sunt caracterizate publicaţiile la tema tezei şi se expune succint conţinutul lucrării pe capitole, cu evidenţierea rezultatelor principale.

În **Capitolul 1 – Analiza situaţiei în domeniul teoriei quasigrupurilor ortogonale şi autoortogonale –** ce poartă un caracter de iniţiere în domeniul tezei, este dată o analiză a publicaţiilor la tema tezei, fiind prezentate rezultate cunoscute necesare expunerii conţinutului lucrării în capitolele următoare, sunt fundamentate şi argumentate problemele şi obiectivele cercetării. În acest capitol este expusă succint evoluţia teoriei operaţiilor ortogonale şi autoortogonale, sunt expuse etape ale soluţionării definitive a ipotezei lui Euler şi generalizarea noţiunii de ortogonalitate în cazul operaţiilor arbitrare, binare şi n-are. Sunt prezentate metode de construcţie a sistemelor ortogonale de quasigrupuri (pătrate latine). Sunt descrise identităţi ce implică ortogonalitatea parastrofilor unor quasigrupuri şi este dată clasificarea identităţilor de lungime 5 cu 2 variabile (numite identităţi minimale) obţinută de V. Belousov. Sunt prezentate rezultate referitoare la problema caracterizării π-quasigrupurilor (quasigrupurilor cu identităţi minimale), în particular, a grupurilor izotope unor π-quasigrupuri.

Problema autoortogonalităţii operaţiilor n-are este tratată sub următoarele aspecte: criterii de autoortogonalitate, metode de construcţie a operaţiilor (quasigrupurilor) autoortogonale, identităţi ce implică autoortogonalitatea şi spectrul lor. Sunt definite sistemele ortogonale de operaţii n-are şi este prezentat rezultatul referitor la caracterizarea tuturor sistemelor ortogonale de două quasigrupuri binare şi selectorii binari ce posedă cel puţin o paratopie netrivială, cu o demonstraţie diferită de cea a lui

V.Belousov. Această abordare permite generalizarea rezultatului lui V. Belousov pentru sistemele ortogonale din n quasigrupuri n-are şi cei n selectori n-ari, $n \geq 3$.

În acest capitol este argumentată problema ştiinţifică de cercetare şi direcţiile de soluţionare ale ei.

În **Capitolul 2 - Quasigrupuri parastrofic-ortogonale şi autoortogonale** - sunt studiate: quasigrupurile binare cu identităţile de tipul T_1: $x \cdot (x \cdot xy) = y$ şi de tipul T_2: $x \cdot (y \cdot yx) = y$ din clasificarea lui Belousov; holomorful π-quasigrupurilor şi ordinul quasigrupurilor n-are autoortogonale finite. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [43-45, 47, 49, 52, 54, 55, 59-62].

În *paragraful 2.1* sunt date condiţii necesare şi suficiente de invarianţă a identităţii minimale de tipul T_1 la izotopia buclelor; caracterizări ale ordinului π-quasigrupurilor finite de tipul T_1, ale grupului substituţiilor interne în π-quasigrupurile finite de tipul T_1 şi ale π-T-quasigrupurilor de tipul T_1.

Propoziţia 2.2. *Dacă $(Q,\cdot)$ este un π-quasigrup finit de tipul T_1 fără unitate la stânga, atunci $|I_h| \equiv 0 (mod\ 3)$, pentru orice $h \in Q$.*

Propoziţia 2.3. *Fie $(Q,\cdot)$ un π-quasigrup de tipul T_1 şi $h \in Q$. Dacă $|I_h| \equiv 1$ sau $2\ (mod\ 3)$, atunci $(Q,\cdot)$ are unitate la stânga.*

Propoziţia 2.5. *Fie $(Q,\cdot)$ un π-quasigrup de tipul T_1. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. dacă $(Q,\cdot)$ are unitate la stânga, atunci $\lambda^3 = \varepsilon$, pentru orice substituţie regulară la stânga λ a lui $(Q,\cdot)$;

2. dacă $(Q,\cdot)$ este finit şi nucleul său stâng N_l conţine cel puţin două elemente, atunci $|Q| \equiv 0\ (mod\ 3)$;

3. dacă $(Q,\cdot)$ este o π-buclă finită de tipul T_1 şi nucleul său mediu are cel puţin două elemente, atunci $|Q| \equiv 0\ (mod\ 3)$.

Propoziţia 2.8. *Identitatea de tipul T_1 este universală într-o buclă $(Q,\cdot)$ dacă şi numai dacă $(Q,\cdot)$ verifică identitatea*

$$x \cdot b\Big(b \cdot x\big(b(b \cdot xy)\big)\Big) = b \cdot y.$$

Propoziţia 2.9. *Un T-quasigrup $(Q,\cdot)$ cu T-forma $((Q,+),\varphi,\psi,g)$ este un π-quasigrup de tipul T_1 dacă şi numai dacă $\psi^2 + \psi + \varepsilon = \omega$, unde $\omega: Q \to Q, \omega(x) = 0, \forall x \in Q, 0$ este elementul neutru al grupului $(Q,+)$.*

Propoziţia 2.10. *Dacă* $(Q,\cdot)$ *este un* π-T-*quasigrup finit de tipul* T_1 *şi are unitate la stânga, atunci* $|Q| \equiv 0\ (mod\ 3)$.

Propoziţia 2.11. *Dacă* $(Q,\cdot)$ *este un* π-*quasigrup finit de tipul* T_1, *atunci* $|Q| \equiv 0$ *sau* $1\ (mod\ 3)$.

În *paragraful 2.2* sunt studiate π-quasigrupurile de tipul T_2 (şi T_1) izotope unor grupuri (grupuri abeliene). Se demonstrează că π-quasigrupurile de tipul T_2 sunt admisibile, π-T-quasigrupurile de tipul T_2 sunt mediale, iar π-quasigrupurile de ambele tipuri T_1 şi T_2 sunt RIP-quasigrupuri.

Propoziţţia 2.12. *Un* π-*quasigrup* $(Q,\cdot)$ *de tipul* T_2 *este un* π-*quasigrup de tipul* T_1 *dacă şi numai dacă* $(Q,\cdot)$ *verifică identitatea* $yx \cdot x = x$.

Propoziţia 2.13. *Un* π-*quasigrup* $(Q,\cdot)$ *de tipul* T_2 *este izotop unui grup abelian dacă şi numai dacă verifică identitatea*

$$[y \cdot (v \cdot vu)] \cdot \big[\big(y \cdot (v \cdot vu)\big) \cdot x\big] = [y \cdot (v \cdot vx)] \cdot \big[\big(y \cdot (v \cdot vx)\big) \cdot u\big].$$

Propoziţia 2.14. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un* π-*quasigrup de tipurile* T_1 *şi* T_2. $(Q,\cdot)$ *este izotop unui grup dacă şi numai dacă el verifică identitatea*

$$x(y \cdot y(zu \cdot v)) = (x(y \cdot yz) \cdot u)v.$$

Propoziţia 2.16. *Orice* π-*quasigrup de tipul* T_2 *este izotop unui quasigrup idempotent.*

Propoziţia 2.17. *Un* T-*quasigrup* $(Q,\cdot)$ *cu* T-*forma* $((Q,+),\varphi,\psi,g)$ *este un* π-*quasigrup de tipul* T_2 *dacă şi numai dacă au loc următoarele condiții:*

1) $\psi^2(g) + \psi(g) + g = 0$,

2) $\varphi = -\psi^3$,

3) $\psi^5 + \psi^4 = -\varepsilon$,

unde 0 *este elementul neutru al grupului* $(Q,+)$ *și* $\varepsilon\colon Q \to Q, \varepsilon(x) = x, \forall x \in Q$.

Corolarul 2.10. π-T-*Quasigrupurile de tipul* T_2 *sunt quasigrupuri mediale*.

În *paragraful 2.3* este studiat holomorful quasigrupurilor cu fiecare din cele 7 identităţi minimale. Se arată că grupul multiplicativ la stânga (la dreapta) al unui π-quasigrup de tipul T_1 este izomorf cu un subgrup normal al grupului multiplicativ la stânga (la dreapta) al holomorfului său.

Propoziţia 2.18. *Holomorful unui* π-*quasigrup de tipul* T_1 *este* π-*quasigrup de tipul* T_1 *dacă şi numai dacă sunt verificate condițiile:*

1) $\alpha^3 = \varepsilon, \forall \alpha \in Aut(Q,\cdot)$;

2) $x \cdot \left(\alpha^2(x) \cdot (\alpha(x) \cdot y)\right) = y,\ \forall \alpha \in Aut(Q,\cdot), \forall x, y \in Q$.

Propoziţia 2.19. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un* π*-quasigrup de tipul* T_1 *şi fie* $Q_1 = \{(\varepsilon, x) | x \in Q\}$. *Atunci* $(Q,\cdot) \cong (Q_1,\circ)$ *şi sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1) $LM(Q_1,\circ) \lhd LM(Hol(Q,\cdot),\circ)$;

2) $RM(Q_1,\circ) \lhd RM(Hol(Q,\cdot),\circ)$.

Propoziţia 2.20. *Dacă* $(Q,\cdot)$ *un* π*-quasigrup de unul din tipurile* $T_2, T_4, T_6, T_{10}, T_8, T_{11}$, *atunci holomorful său* $(H,\circ)$ *este un* π*-quasigrup de acelaţi tip ca şi* $(Q,\cdot)$ *dacă şi numai dacă* $Aut(Q,\cdot) = \{\varepsilon\}$, *unde* ε *este substituţia identică pe* Q.

În *paragraful 2.4* este studiat ordinul quasigrupurilor n-are autoortogonale, $n \geq 3$.

Lema 2.1. *Dacă există quasigrupuri autoortogonale* n*-are de ordinul* q_1 *şi de ordinul* q_2 *cu acelaşi tip de autoortogonalitate, atunci există quasigrupuri autoortogonale* n*-are de ordinul* $q_1 \cdot q_2$ *cu acelaşi tip de autoortogonalitate.*

Rezolvarea problemei de existenţă a quasigrupurilor n-are autoortogonale de anumit ordin se conţine în următoarea teoremă.

Teorema 2.3. *Pentru orice* $n, q \geq 3$ *există quasigrupuri* n*-are autoortogonale de ordinul* $q \neq 2(2p+1), p \geq 1$.

În **Capitolul 3 - Paratopiile sistemelor ortogonale de quasigrupuri -** sunt descrise sistemele ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari care admit cel puţin o paratopie netrivială şi sunt caracterizate paratopiile lor; sunt deduse şi clasificate identităţile pe care le implică existenţa paratopiilor acestor sisteme; sunt studiate unele sisteme din n quasigrupuri n-are şi selectorii n-ari, $n \geq 2$, care admit cel puţin a paratopie netrivială. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [46, 48, 50, 51, 53, 56-58].

În *paragraful 3.1* se demonstrează că există exact 153 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari care admit cel puţin o paratopie netrivială şi sunt deduse aceste sisteme.

Teorema 3.1. *Tripletul de quasigripuri ternare* (A_1, A_2, A_3), *definite pe o mulţime nevidă* Q, *este paratopie a sistemului ortogonal* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 =^{(132)} A_1,\ A_3 =^{(123)} A_1$ *şi* $A_1(A_1, {}^{(132)}A_1, {}^{(123)}A_1) = E_2$;

II. $A_2 =^{(132)} A_1,\ A_3 =^{(123)} A_1$ *şi* $A_1(A_1, {}^{(132)}A_1, {}^{(123)}A_1) = E_3$;

III. $A_1 =^{(12)} A_2,\ A_3 =^{\pi_3} A_2({}^{(12)}A_2, A_2, E_1)$ *şi* $A_3 =^{(12)} A_3$;

IV. $A_2 =^{(23)} A_3,\ A_1 =^{\pi_1} A_3(E_2,^{(23)} A_3, A_3)$ *şi* $A_1 =^{(23)} A_1$;

V. $A_3 =^{(13)} A_1,\ A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_3,^{(13)} A_1)$ *şi* $A_2 =^{(13)} A_2$;

VI. $A_3 =^{\pi_3} A_1(A_1, A_2, E_1) =^{\pi_3} A_2(A_1, A_2, E_2)$.

Corolarul 3.1. *Există exact 6 sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi trei selectori ternari care admit cel puţin o paratopie, componentele căreia sunt trei quasigrupuri ternare.*

Observaţia 3.1. T. Evans a demonstrat în [23] că dacă un quasigrup ternar (Q, A) verifică identitatea

$$A(A,^{(132)} A,^{(123)} A) = E_i,$$

pentru $i \in \{1,2,3\}$, atunci sistemul de parastrofi principali $\{A,^{(132)} A,^{(123)} A\}$ ai quasigrupului (Q, A) este ortogonal, deci (Q, A) este autoortogonal, cu tipul de autoortogonalitate $(\varepsilon, (132), (123))$, unde ε este unitatea grupului simetric S_4.

Lema 3.1. *Tripletul* (E_1, A_1, A_2) *este paratopie a sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 =^{(23)} A_1,\ A_3(E_1, A_1,^{(23)} A_1) = A_3$ *şi* $A_1(E_1, A_1,^{(23)} A_1) = E_3$;

II. $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_2),\ A_3(E_1, A_1,^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_2)) = A_3$;

III. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_1, E_2, A_2), A_3 =^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3)$ *şi*

$A_2(E_1, E_3,^{\pi_2} A_2(E_1, E_2, A_2)) =^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3)$;

IV. $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_3), A_3 =^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$ *şi*

$A_1(E_1,^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_3), E_2) =^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$.

Lema 3.2. *Tripletul* (A_1, E_1, A_2) *este paratopie a sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_2),\ A_3 =^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_1)$;

II. $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2), A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$ *şi*

$A_3(^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2), E_1,^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)) = A_3$;

III. $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_3), A_3 =^{\pi_2} A_1(E_2, E_1, A_1)$ *şi*

$A_1(^{\pi_2} A_1(E_2, E_1, A_1),^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_3), E_1) = E_2$;

IV. $A_1 =^{\pi_3} A_2(A_2, E_3,^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)),\ A_3 =^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)$ *şi*

$A_2(^{\pi_3} A_2(A_2, E_3,^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)), E_1, A_2) = E_2$;

V. $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2), A_3 =^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2)$ *şi*

$A_2(^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2),^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2), E_3) = A_2$.

Lema 3.3. *Tripletul* (A_1, A_2, E_1) *este paratopie a sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 =^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ *şi*

$A_3({}^{\pi_3}A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), E_1) = A_3$;

II. $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_3 =^{\pi_2} A_1(E_2, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_1)$ *şi*

$A_1(E_3, A_1, {}^{\pi_2} A_1(E_2, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_1)) = E_1$;

III. $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_3, E_1), A_3 =^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, A_1)$;

IV. $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_2, A_2, E_1), A_3 =^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, E_2)$ *şi*

$A_2({}^{\pi_3}A_2(E_3, A_2, E_2), E_2, {}^{\pi_1} A_2(E_2, A_2, E_1)) = A_2$;

V. $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1), A_3 =^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$ *şi*

$A_2(A_2, {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1), E_2) =^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$.

Lema 3.4. *Tripletul* (E_2, A_1, A_2) *este paratopie a sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_1),\ A_3 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_2)$;

II. $A_1 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1),\ A_2 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$ *şi*

$A_3(E_2, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1), {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)) = A_3$;

III. $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_3),\ A_3 =^{\pi_1} A_1(E_2, E_1, A_1)$ *şi*

$A_1({}^{\pi_3}A_1(E_2, A_1, E_3), {}^{\pi_1} A_1(E_2, E_1, A_1), E_2) = E_1$;

IV. $A_3 =^{\pi_3} A_2(A_2, E_1, E_3),\ A_1 =^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_1, E_3))$ *şi*

$A_2(E_2, {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_1, E_3)), A_2) = E_1$;

V. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2),\ A_3 =^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2)$ *şi*

$A_2({}^{\pi_2}A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2), E_3) = A_2$.

Lema 3.5. *Tripletul* (A_1, E_2, A_2) *este paratopie a sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_2, E_1), A_3(A_1, E_2, {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_2, E_1)) = A_3$;

II. $A_2 =^{(13)} A_1,\ A_3\left(A_1, E_2, {}^{(13)} A_1\right) = A_3$ *şi* $A_1(A_1, E_2, {}^{(13)} A_1) = E_3$;

III. $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_2, E_3),\ A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, E_2, A_1)$ *şi*

$A_1({}^{\pi_3}A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_1) =^{\pi_1} A_1(E_1, E_2, A_1)$;

IV. $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, E_2, A_2),\ A_3 =^{\pi_3} A_2(A_2, E_2, E_3)$ *şi*

$A_2(E_3, E_2, {}^{\pi_1} A_2(E_1, E_2, A_2) =^{\pi_3} A_2(A_2, E_2, E_3)$.

Lema 3.6. *Tripletul* (A_1, A_2, E_2) *este paratopie a sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$

dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:

I. $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2), A_3 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1)$ *şi*

$A_1(E_1, {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)) = A_1$;

II. $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_2), A_3 =^{\pi_1} A_2({}^{\pi_1}A_2(E_1, A_2, E_2), E_1, A_2)$ *şi*

$A_2(A_2, E_3, {}^{\pi_1} A_2({}^{\pi_1}A_2(E_1, A_2, E_2), E_1, A_2))) = E_2$;

III. $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_2), A_3 =^{\pi_1} A_2(E_2, E_3, A_2)$;

IV. $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1), A_2 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ *şi*

$A_3({}^{\pi_2}A_3(E_2, A_3, E_1), {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), E_2) = A_3$;

V. $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_3, E_2), A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, E_3, A_1)$ *şi*

$A_1({}^{\pi_2}A_1(A_1, E_3, E_2), A_1, E_1) =^{\pi_1} A_1(E_1, E_3, A_1)$.

Lema 3.7. *Tripletul* (E_3, A_1, A_2) *este paratopie a sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, E_1, A_2),\ A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_1)$;

II. $A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2),\ A_1 =^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$ *şi*

$A_3(E_3, {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)) = A_3$;

III. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2),\ A_3 =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)$ *şi*

$A_2({}^{\pi_2}A_2(E_3, E_2, A_2), E_3, {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)) = E_1$;

IV. $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_1),\ A_3 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$ *şi*

$A_1(E_2, {}^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_1), A_1) =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$;

V. $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_2),\ A_3 =^{\pi_1} A_1(E_2, A_1, E_1)$ *şi*

$A_1({}^{\pi_3}A_1(E_3, A_1, E_2), E_2, {}^{\pi_1} A_1(E_2, A_1, E_1)) = A_1$.

Lema 3.8. *Tripletul* (A_1, E_3, A_2) *este paratopie a sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_2, E_3, A_2),\ A_3 =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_2)$;

II. $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1),\ A_3 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)$ *şi*

$A_1(E_1, {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)) = A_1$;

III. $A_2 =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1),\ A_1 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ *şi*

$A_3({}^{\pi_3}A_3(E_3, E_1, A_3), E_3, {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)) = A_3$;

IV. $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_2),\ A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$ *şi*

$A_1({}^{\pi_3}A_1(A_1, E_3, E_2), E_1, A_1) =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$;

V. $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_2),\ A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)$ *şi*

$A_2(E_3, {}^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_2), {}^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)) = E_2$.

Lema 3.9. *Tripletul* (A_1, A_2, E_3) *este paratopie a sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_3), A_3(A_1, ^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = A_3$;

II. $A_2 =^{(12)} A_1,\ A_3(A_1, ^{(12)} A_1, E_3) = A_3$ *şi* $A_1(A_1, ^{(12)} A_1, E_3) = E_2$;

III. $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3),\ A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$ *şi*

$A_1(^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3), E_1, E_3) =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$;

IV. $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_3),\ A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$ *şi*

$A_2(E_2, ^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_3), E_3) =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$.

Teorema 3.2. *Există exact 42 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi trei selectori ternari care admit cel puţin o paratopie, componentele căreia sunt două quasigrupuri ternare şi un selector ternar.*

Corolarul 3.2. *Dacă un quasigrup ternar* (Q, A) *verifică identitatea*

$$A(E_1(x_1^3), A(x_1^3), ^{(23)} A(x_1^3)) = E_3(x_1^3),$$

atunci, pentru $\forall a \in Q$, 1-*retractul* $B(x, y) = A(a, x, y)$ *este autoortogonal.*

Corolarul 3.3. *Dacă un quasigrup ternar* (Q, A) *verifică identitatea* $A(A, E_2, ^{(13)} A) = E_3$ *atunci pentru* $\forall a \in Q$ 2-*retractul său* $B(x, y) = A(x, a, y)$ *este autoortogonal.*

Corolarul 3.4. *Dacă un quasigrup ternar* (Q, A) *verifică identitatea* $A(A, ^{(12)} A, E_3) = E_2$, *atunci pentru* $\forall a \in Q$, 3-*retractul* $B(x, y) = A(x, y, a)$ *este autoortogonal.*

Lema 3.10. *Tripletul* (E_1, E_2, A_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(E_1, E_2, A_1), A_3 =^{\pi_3} A_1$ *şi* $A_1(E_1, E_2, A_1(E_1, E_2, A_1)) =^{\pi_3} A_1$;

II. $A_3 = A_1(E_1, E_2, A_1), A_2 =^{\pi_3} A_1$ *şi* $A_1(E_1, E_2, A_1(E_1, E_2, A_1)) =^{\pi_3} A_1$;

III. $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_3) =^{\pi_3} A_3(E_1, E_2, A_2)$.

Lema 3.11. *Tripletul* (E_2, E_1, A_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(E_2, E_1, A_1), A_3 =^{(12)\pi_3} A_1$ *şi* $A_1(E_1, E_2, A_1(E_2, E_1, A_1)) =^{(12)\pi_3} A_1$;

II. $A_3 = A_1(E_2, E_1, A_1), A_2 =^{(12)\pi_3} A_1$ *şi* $A_1(E_1, E_2, A_1(E_2, E_1, A_1)) =^{(12)\pi_3} A_1$;

III. $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2) =^{\pi_3} A_3(E_2, E_1, A_3)$;

IV. $A_2(E_2, E_1, A_1) = A_3$ *şi* $A_1 =^{(12)\pi_3} A_1$.

Lema 3.12. *Tripletul* (E_1, A_1, E_2) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_2), A_3 =^{(23)\pi_3} A_1$ *şi* $A_1(E_1, {}^{(23)\pi_3} A_1, A_1(E_1, A_1, E_2)) = E_3$;

II. $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2), A_2 =^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$ *şi*

$A_3(E_1, {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)) = A_3$;

III. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2), A_3 =^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$ *şi*

$A_2(E_1, {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)) = A_2$;

IV. $A_2 =^{(23)\pi_3} A_1, A_3 = A_1(E_1, A_1, E_2)$ *şi* $A_1(E_1, {}^{(23)\pi_3} A_1, A_1(E_1, A_1, E_2)) = E_3$;

V. $A_1 =^{(23)\pi_2} A_1 =^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2) =^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$.

Lema 3.13. *Tripletul* (E_2, A_1, E_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 =^{(132)\pi_2} A_3, A_2 = A_3(E_3, E_1, A_3)$ *şi*

${}^{(132)\pi_2}A_3(E_2, {}^{(132)\pi_2} A_3, E_1) = A_3(E_3, E_1, A_3)$;

II. $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1), A_2 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ *şi*

${}^{\pi_2}A_3({}^{\pi_3}A_3(E_3, E_1, A_3), A_3, {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)) = E_3$;

III. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1), A_3 =^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2)$ *şi*

${}^{\pi_2}A_2({}^{\pi_3}A_2(E_3, E_1, A_2), A_2, {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)) = E_3$;

IV. $A_1 =^{(132)\pi_2} A_2, A_3 = A_2(E_3, E_1, A_2)$ *şi* $A_2(A_2, E_3, A_2(E_3, E_1, A_2)) =^{(132)\pi_2} A_2$;

V. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1) =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$ *şi* $A_1 =^{(132)\pi_2} A_1$;

VI. $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), A_3 = A_2(E_3, E_1, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2))$ *şi* $A_1 =^{(132)\pi_2} A_1$.

Lema 3.14. *Tripletul* (A_1, E_1, E_2) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_3 =^{(132)\pi_1} A_1, A_2 = A_1(A_1, E_1, E_2)$ *şi* $A_1(E_3, {}^{(132)\pi_1} A_1, A_1(A_1, E_1, E_2)) = E_2$;

II. $A_1 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), A_2 =^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$ *şi*

$A_3(E_3, {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)) = A_3$;

III. $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2), A_3 =^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$ *şi*

$A_2(E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)) = A_2$;

IV. $A_2 =^{(132)\pi_3} A_1, A_3 = A_1(A_1, E_1, E_2)$ *şi*

$A_1(E_3, {}^{(132)\pi_3} A_1, A_1(A_1, E_1, E_2)) = E_2$;

V. $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2) =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ *şi* $A_1 =^{(123)\pi_1} A_1$;

VI. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1), A_3 = A_2({}^{\pi_2}A_2(E_3, A_2, E_1), E_1, E_2)$ *şi* $A_1 =^{(123)\pi_1} A_1$.

Lema 3.15. *Tripletul* (A_1, E_2, E_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_1), A_3 =^{(13)\pi_3} A_1$ *şi* $A_1(^{(13)\pi_3}A_1, E_2, A_1(A_1, E_2, E_1)) = E_1$;

II. $A_1 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1), A_2 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3)$ *şi*

$A_3(^{\pi_3}A_3(E_3, E_2, A_3), E_2, ^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)) = A_3$;

III. $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1), A_3 =^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2)$ *şi*

$A_2(^{\pi_3}A_2(E_3, E_2, A_2), E_2, ^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)) = A_2$;

IV. $A_1 =^{(13)\pi_1} A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1) =^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)$;

V. $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_1), A_2 =^{(13)\pi_3} A_1$ *şi* $A_1(^{(13)\pi_3}A_1, E_2, A_1(A_1, E_2, E_1)) = E_3$.

Lema 3.16. *Tripletul* (E_1, E_3, A_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(E_1, E_3, A_1), A_3 =^{(23)\pi_2} A_1$ *şi* $A_1(E_1, A_1(E_1, E_3, A_1), ^{(23)\pi_2} A_1) = E_2$;

II. $A_1 =^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), A_2 =^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$ *şi*

$A_3(E_1, ^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), ^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)) = A_3$;

III. $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), A_3 =^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$ *şi*

$A_2(E_1, ^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), ^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)) = A_2$;

IV. $A_3 = A_1(E_1, E_3, A_1), A_2 =^{(23)\pi_2} A_1$ *şi* $A_1(E_1, A_1(E_1, E_3, A_1), ^{(23)\pi_2} A_1) = E_2$;

V. $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2) =^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$ *şi* $A_1 =^{(23)\pi_3} A_1$.

Lema 3.17. *Tripletul* (E_3, E_1, A_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 =^{(123)\pi_3} A_3, A_2 = A_3(E_2, A_3, E_1)$ *şi*

$A_3(A_3, A_3(E_2, A_3, E_1), E_2) =^{(123)\pi_3} A_3$;

II. $A_1 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), A_2 =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$ *şi*

$A_3(^{\pi_2}A_3(E_2, A_3, E_1), ^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), E_2) = A_3$;

III. $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2), A_3 =^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$ *şi*

$A_2(^{\pi_2}A_2(E_2, A_2, E_1), ^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2), E_2) = A_2$;

IV. $A_1 =^{(123)\pi_3} A_2, A_3 = A_2(E_2, A_2, E_1)$ *şi*

$A_2(A_2, A_2(E_2, A_2, E_1), E_2) =^{(123)\pi_3} A_2$;

V. $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2) =^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ *şi* $A_1 =^{(132)\pi_3} A_1$;

VI. $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), A_3 = A_2(E_2, ^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), E_1)$ *şi* $A_1 =^{(123)\pi_3} A_1$.

Lema 3.18. *Tripletul* (E_1, A_1, E_3) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_3), A_3 =^{\pi_2} A_1$ *şi* $A_1(E_1, A_1(E_1, A_1, E_3)) =^{\pi_2} A_1$;

II. $A_3 = A_1(E_1, A_1, E_3), A_2 =^{\pi_2} A_1$ *şi* $A_1(E_1, A_1(E_1, A_1, E_3)) =^{\pi_2} A_1$;

III. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_1, A_3, E_3) =^{\pi_2} A_3(E_1, A_2, E_3)$.

Lema 3.19. *Tripletul* (E_3, A_1, E_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_3 =^{(13)\pi_2} A_1, A_2 = A_1(E_3, A_1, E_1), A_1(E_1, A_1(E_3, A_1, E_1), E_3) =^{(13)\pi_2} A_1$;

II. $A_3 = A_1(E_3, A_1, E_1), A_2 =^{(13)\pi_2} A_1, A_1(E_1, A_1(E_3, A_1, E_1), E_3) =^{(13)\pi_2} A_1$;

III. $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1) =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_1)$;

IV. $A_1(E_3, A_1, E_1) = E_2, A_3 = A_2(E_3, A_1, E_1)$.

Lema 3.20. *Tripletul* (A_1, E_1, E_3) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(A_1, E_1, E_3), A_3 =^{(12)\pi_2} A_1$ *şi* $A_1({}^{(12)\pi_2}A_1, A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = E_2$;

II. $A_1 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3), A_2 =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$ *şi*

$A_3({}^{\pi_2}A_3(E_2, A_3, E_3), {}^{\pi_1}A_3(A_3, E_1, E_3), E_3) = A_3$;

III. $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3), A_3 =^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3)$ *şi*

$A_2({}^{\pi_2}A_2(E_2, A_2, E_3), {}^{\pi_1}A_2(A_2, E_1, E_3), E_3) = A_2$;

IV. $A_3 = A_1(A_1, E_1, E_3), A_2 =^{(12)\pi_2} A_1$ *şi* $A_1({}^{(12)\pi_2}A_1, A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = E_2$;

V. $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3) =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$ *şi* $A_1 =^{(12)\pi_1} A_1$.

Lema 3.21. *Tripletul* (A_1, E_3, E_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(A_1, E_3, E_1), A_3 =^{(123)\pi_2} A_1$ *şi* $A_1(E_2, A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{(123)\pi_2}A_1) = E_3$;

II. $A_1 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1), A_2 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$ *şi*

$A_3(E_2, {}^{\pi_1}A_3(A_3, E_3, E_1), {}^{\pi_2}A_3(E_3, A_3, E_2)) = A_3$;

III. $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1), A_3 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)$ *şi*

$A_2(E_2, {}^{\pi_1}A_2(A_2, E_3, E_1), {}^{\pi_2}A_2(E_3, A_2, E_2)) = A_2$;

IV. $A_2 =^{(123)\pi_2} A_1, A_3 = A_1(A_1, E_3, E_1)$ *şi* $A_1(E_2, A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{(123)\pi_2}A_1) = E_3$;

V. $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1) =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$ *şi* $A_1 =^{(132)\pi_1} A_1$;

VI. $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), A_3 = A_2(E_3, {}^{\pi_3}A_2(E_2, E_1, A_2), E_2)$ *şi* $A_1 =^{(132)\pi_1} A_1$.

Lema 3.22. *Tripletul* (E_2, E_3, A_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(E_2, E_3, A_1), A_3 =^{(123)\pi_1} A_1$ *şi* $A_1(A_1(E_2, E_3, A_1), {}^{(123)\pi_1}A_1, E_1) = E_2$;

II. $A_1 =^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ *şi*

$A_3({}^{\pi_3}A_3(E_2,E_3,A_3),{}^{\pi_1}A_3(A_3,E_1,E_2),E_1) = A_3$;

III. $A_1 ={}^{\pi_3} A_2(E_2,E_3,A_2), A_3 ={}^{\pi_1} A_2(A_2,E_1,E_2)$ *şi*

$A_2({}^{\pi_3}A_2(E_2,E_3,A_2),{}^{\pi_1}A_2(A_2,E_1,E_2),E_1) = A_2$;

IV. $A_3 = A_1(E_2,E_3,A_1), A_2 ={}^{(123)\pi_1} A_1$ *şi* $A_1(A_1(E_2,E_3,A_1),{}^{(123)\pi_1}A_1,E_1) = E_2$;

V. $A_1 ={}^{\pi_3} A_2(E_2,E_3,A_2) ={}^{\pi_3} A_3(E_2,E_3,A_3)$ *şi* $A_1 ={}^{(132)\pi_3} A_1$;

VI. $A_1 ={}^{\pi_2} A_2(E_3,A_2,E_1), A_3 = A_2(E_2,E_3,{}^{\pi_2}A_2(E_3,A_2,E_1))$ *şi* $A_1 ={}^{(132)\pi_3} A_1$.

Lema 3.23. *Tripletul* (E_3,E_2,A_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(E_3,E_2,A_1), A_3 ={}^{(123)\pi_1} A_1$ *şi*

$A_1(A_1(E_3,E_2,A_1),E_2,{}^{(123)\pi_1}A_1) = E_1$;

II. $A_1 ={}^{\pi_3} A_3(E_3,E_2,A_3), A_2 ={}^{\pi_1} A_3(A_3,E_2,E_1)$ *şi*

$A_3({}^{\pi_3}A_3(E_3,E_2,A_3),E_2,{}^{\pi_1}A_3(A_3,E_2,E_1)) = A_3$;

III. $A_1 ={}^{\pi_3} A_2(E_3,E_2,A_2), A_3 ={}^{\pi_1} A_2(A_2,E_2,E_1)$ *şi*

$A_2({}^{\pi_3}A_2(E_3,E_2,A_2),E_2,{}^{\pi_1}A_2(A_2,E_2,E_1)) = A_2$;

IV. $A_1 ={}^{(123)\pi_3} A_2, A_3 = A_2(A_2,E_2,E_1)$ *şi*

$A_2(A_2(A_2,E_2,E_1),E_2,A_2) ={}^{(123)\pi_3} A_2$;

V. $A_1(E_3,E_2,A_1) = E_1, A_1 ={}^{\pi_3} A_2(E_3,E_2,A_2) ={}^{\pi_3} A_3(E_3,E_2,A_3)$.

Lema 3.24. *Tripletul* (E_2,A_1,E_3) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(E_2,A_1,E_3), A_3 ={}^{(12)\pi_1} A_1$ *şi* $A_1(A_1(E_2,A_1,E_3),{}^{(12)\pi_1}A_1,E_3) = E_1$;

II. $A_1 ={}^{\pi_2} A_3(E_2,A_3,E_3), A_2 ={}^{\pi_1} A_3(A_3,E_1,E_3)$ *şi*

$A_3({}^{\pi_2}A_3(E_2,A_3,E_3),{}^{\pi_1}A_3(A_3,E_1,E_3),E_3) = A_3$;

III. $A_1 ={}^{\pi_1} A_2(E_2,A_2,E_3), A_3 ={}^{\pi_1} A_2(A_2,E_1,E_3)$ *şi*

$A_2({}^{\pi_2}A_2(E_2,A_2,E_3),{}^{\pi_1}A_2(A_2,E_1,E_3),E_3) = A_2$;

IV. $A_3 = A_1(E_2,A_1,E_3), A_2 ={}^{(12)\pi_1} A_1$ *şi* $A_1(A_1(E_2,A_1,E_3),{}^{(12)\pi_1}A_1,E_3) = E_1$;

V. $A_1 ={}^{\pi_2} A_2(E_2,A_2,E_3) ={}^{\pi_2} A_3(E_2,A_3,E_3)$ *şi* $A_1 ={}^{(12)\pi_2} A_1$.

Lema 3.25. *Tripletul* (E_3,A_1,E_2) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_3 ={}^{(132)\pi_1} A_1, A_2 = A_1(E_3,A_1,E_2)$ *şi* $A_1(A_1(E_3,A_1,E_2),E_1,{}^{(132)\pi_1}A_1) = E_3$;

II. $A_1 ={}^{\pi_2} A_3(E_3,A_3,E_2), A_2 ={}^{\pi_1} A_3(A_3,E_3,E_1)$ *şi*

$A_3({}^{\pi_2}A_3(E_3,A_3,E_2),E_1,{}^{\pi_1}A_3(A_3,E_3,E_1)) = A_3$;

III. $A_1 ={}^{\pi_2} A_2(E_3,A_2,E_2), A_3 ={}^{\pi_1} A_2(A_2,E_3,E_1)$ *şi*

$A_2({}^{\pi_2}A_2(E_3, A_2, E_2), E_1, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)) = A_2;$

IV. $A_2 = {}^{(132)\pi_1} A_1, A_3 = A_1(E_3, A_1, E_2)$ *şi* $A_1(A_1(E_3, A_1, E_2), E_1, {}^{(132)\pi_1} A_1) = E_3;$

V. $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2) = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$ *şi* $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_1;$

VI. $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), A_3 = A_2({}^{\pi_3}A_2(E_2, E_1, A_2), E_3, E_1)$ *şi* $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_1.$

Lema 3.26. *Tripletul* (A_1, E_2, E_3) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_3), A_3 = {}^{\pi_1} A_1$ *şi* $A_1(A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_1;$

II. $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_3), A_2 = {}^{\pi_1} A_1$ *şi* $A_1(A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_1;$

III. $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_3, E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_3(A_2, E_2, E_3).$

Lema 3.27. *Tripletul* (A_1, E_3, E_2) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_3 = {}^{(23)\pi_1} A_1, A_2 = A_1(A_1, E_3, E_2)$ *şi* $A_1(A_1(A_1, E_3, E_2), E_2, E_3) = {}^{(23)\pi_1} A_1;$

II. $A_3 = A_1(A_1, E_3, E_2), A_2 = {}^{(23)\pi_1} A_1$ *şi* $A_1(A_1(A_1, E_3, E_2), E_2, E_3) = {}^{(23)\pi_1} A_1;$

III. $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2) = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_2);$

IV. $A_3 = A_2(A_1, E_3, E_2)$ *şi* $A_1(A_1, E_3, E_2) = E_1.$

Teorema 3.3. *Există exact 87 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi trei selectori ternari care admit cel puţin o paratopie, componentele căreia sunt un quasigrup ternar şi doi selectori ternari.*

Lema 3.28. *Tripletul* (E_1, E_3, E_2) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 = {}^{(23)} A_1, A_2 = {}^{(23)} A_2, A_3 = {}^{(23)} A_3;$

II. $A_3 = {}^{(23)} A_2, A_1 = {}^{(23)} A_1;$

III. $A_2 = {}^{(23)} A_1, A_3 = {}^{(23)} A_3;$

IV. $A_3 = {}^{(23)} A_1, A_2 = {}^{(23)} A_2.$

Lema 3.29. *Tripletul* (E_2, E_1, E_3) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 = {}^{(12)} A_1, A_2 = {}^{(12)} A_2, A_3 = {}^{(12)} A_3;$

II. $A_3 = {}^{(12)} A_2, A_1 = {}^{(12)} A_1;$

III. $A_2 = {}^{(12)} A_1, A_3 = {}^{(12)} A_3;$

IV. $A_3 = {}^{(12)} A_1, A_2 = {}^{(12)} A_2.$

Lema 3.30. *Tripletul* (E_2, E_3, E_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are* *loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 =^{(132)} A_1, A_2 =^{(132)} A_2, A_3 =^{(132)} A_3;$

II. $A_2 =^{(132)} A_1, A_3 =^{(123)} A_1;$

III. $A_3 =^{(132)} A_1, A_2 =^{(123)} A_1.$

Lema 3.31. *Tripletul* (E_3, E_1, E_2) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 =^{(123)} A_1, A_2 =^{(123)} A_2, A_3 =^{(123)} A_3;$

II. $A_2 =^{(123)} A_1, A_3 =^{(132)} A_1;$

III. $A_3 =^{(123)} A_1, A_2 =^{(132)} A_1.$

Lema 3.32. *Tripletul* (E_3, E_2, E_1) *este paratopie a sistemului* Σ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele condiţii:*

I. $A_1 =^{(13)} A_1, A_2 =^{(13)} A_2, A_3 =^{(13)} A_3;$

II. $A_3 =^{(13)} A_2, A_1 =^{(13)} A_1;$

III. $A_2 =^{(13)} A_1, A_3 =^{(13)} A_3;$

IV. $A_3 =^{(13)} A_1, A_2 =^{(13)} A_2.$

Teorema 3.4. *Există exact 18 sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi trei selectori ternari care admit cel puţin o paratopie netrivială, componentele căreia sunt selectorii ternari.*

Corolarul 3.5. *Există exact 153 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi trei selectori ternari care admit cel puţin o paratopie netrivială.*

În *paragraful 3.2* se arată că identităţile implicate de existenţa paratopiilor sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari se reduc la patru tipuri posibile.

Teorema 3.5. *Fiecare dintre cele 67 de identităţi pe care le implică existenţa paratopiilor sistemului* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ *se reduce la unul din următoarele 4 tipuri:*

1. ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, {}^{\delta}A) = E_1,$
2. ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, E_1) = E_2,$
3. ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_3),$
4. ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_2),$

unde A este un quasigrup ternar şi $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S_4$.

În *paragraful 3.3* sunt studiate unele sisteme ortogonale din n quasigrupuri n-are şi selectorii n-ari, $n \geq 2$, care admit cel puţin o paratopie netrivială.

Teorema 3.6. *Fie* $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ *şi* $\theta = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, *unde* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sunt quasigrupuri n-are, definite pe o mulţime nevidă Q şi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sunt selectorii n-ari pe Q. Dacă* $A_2 = {}^{\alpha^{-1}}A_1, A_3 = {}^{\alpha^{-2}}A_1, \ldots, A_n = {}^{\alpha^{-n+1}}A_1$ *şi* (Q, A_1) *verifică identitatea* $A_1(A_1, {}^{\alpha^{-1}}A_1, {}^{\alpha^{-2}}A_1, \ldots, {}^{\alpha^{-n+1}}A_1) = E_2$, *unde* $\alpha = (12 \ldots n)$, *atunci* θ *este o paratopie a sistemului* Σ.

Observăm că, dacă un quasigrup n-ar (Q, A) verifică identitatea din Teorema 3.6, atunci (Q, A) este autoortogonal, cu tipul de autoortogonalitate $(\varepsilon, \alpha^{-1}, \ldots, \alpha^{-n+1})$ [5, 6, 40, 41].

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

Lucrarea se referă la teoria quasigrupurilor binare parastrofic-ortogonale (autoortogonale), problema caracterizării paratopiilor sistemelor ortogonale de quasigrupuri ternare.

Problema principală ştiinţifică soluţionată constă în descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari, care admit cel puţin o paratopie netrivială.

În teză sunt studiate următoarele aspecte ale teoriei π-quasigrupurilor de tipurile T_1 şi T_2: invarianţa identităţilor minimale la izotopie, studiul π-quasigrupurilor izotope unor grupuri (grupuri abeliene), estimări ale ordinului π-quasigrupurilor finite, studiul holomorfului ca extindere a π-quasigrupului.

În lucrarea prezentă este dată o abordare diferită de cea utilizată de Belousov în [3] la studiul existenţei paratopiilor. Această abordare permite descrierea tuturor sistemelor ortogonale din n quasigrupuri n-are şi selectorii n-ari şi a paratopiilor lor, pentru orice $n \geq 2$. Aplicând această metodă au fost determinate toate paratopiile sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari, care admit cel puţin o paratopie netrivială, au fost deduse şi clasificate identităţile implicate de existenţa paratopiilor acestor sisteme. În cazul $n \geq 4$ sunt studiate paratopiile, toate componentele cărora sunt operaţii de quasigrup. Se arată că existenţa acestor paratopii implică autoortogonalitatea quasigrupurilor sistemului ortogonal respectiv.

În cadrul tezei date sunt efectuate cercetări în domeniul teoriei quasigrupurilor parastrofic-ortogonale şi a sistemelor ortogonale de quasigrupuri, iar contribuţia autorului poate fi formulată în următoarele ***concluzii principale***:

1. A fost propusă o abordare diferită de cea utilizată de V. Belousov în caz binar, pentru studiul paratopiilor sistemelor ortogonale de quasigrupuri. Această abordare a făcut posibilă descrierea tuturor sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari (153 de sisteme) care admit cel puţin o paratopie netrivială şi a tuturor paratopiilor acestor sisteme. Unele paratopii implică ortogonalitatea parastrofilor quasigrupurilor sistemului [53, 56, 57, 58].

2. Au fost obținute identităţile pe care le implică existenţa paratopiilor sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari (67 de identităţi), care au fost reduse, cu ajutorul transformărilor de parastrofie, la 4 tipuri posibile [48, 50, 51].

3. Au fost deduse proprietăţi generale ale π-quasigrupurilor de tipul T_1 şi T_2, condiţii necesare şi suficiente ca un π-quasigrup de tipul T_1, respectiv T_2, să fie izotop unui grup (grup abelian), caracterizări ale universalităţii identităţilor minimale de tipurile T_1 şi T_2, ale ordinului π-quasigrupurilor finite de tipul T_1 şi ale grupului substituţiilor interne în π-quasigrupurile finite de tipul T_1 [44, 45, 52, 54, 59-62].

4. S-a demonstrat că grupul multiplicativ la stânga (la dreapta) al unui π-quasigrup de tipul T_1 este izomorf cu un subgrup normal al grupului multiplicativ la stânga (la dreapta) al holomorfului său [55].

Rezultatele autorului, care se referă la tema tezei sunt publicate în [43-62].

Teza propusă spre susţinere conţine soluţionarea completă a problemei descrierii sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari, care admit cel puţin o paratopie netrivială.

Recomandări:

a) Metoda aplicată la deducerea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari care admit cel puţin o paratopie netrivială poate fi utilizată în caz n-ar, pentru orice $n \geq 2$;

b) Identităţile care rezultă din existenţa paratopiilor în caz binar sunt minimale (2 variabile cu 5 intrări), astfel studiul paratopiilor în caz ternar conduce la definirea identităţilor minimale în caz ternar şi pune problema clasificării lor;

c) Unele identităţi ce rezultă din existenţa paratopiilor în caz ternar sunt cunoscute (identitatea Evans) şi implică autoortogonalitatea quasigrupului ternar respectiv. Apare problema studiului quasigrupurilor ternare cu identităţi ce rezultă din existenţa paratopiilor, ortogonalitatea parastrofilor pe care o implică aceste identităţi.

d) În lucrare sunt date condiţii necesare şi suficiente ca un π-quasigrup de tipul T_1 sau T_2 să fie izotop unui grup (grup abelian) şi unele proprietăţi ale acestor grupuri. Rămâne deschisă problema descrierii grupurilor (grupurilor abeliene) izotope π-quasigrupurilor de aceste tipuri.

e) Rezultatele lucrării pot fi utilizate pentru cercetările ulterioare în teoria quasigrupurilor şi în domeniile adiacente ale algebrei, geometriei şi combinatoricii, în teoria codurilor şi în criptografie. De asemenea, rezultatele pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

BIBLIOGRAFIE

1. Белоусов В. Д. Алгебраические сети и квазигруппы. Кишинев, Штиинца, 1971, 165 с.
2. Белоусов В. Д. Парастрофно-ортогональные квазигруппы. Акад. Наук Молд. ССР, Инст. Мат. с Вычисл. Центром, Кишинев, 1983, 51 с.
3. Белоусов В. Д. Системы ортогональных операций. Матем. сборник, 1968, 77(119): I, с. 38–58.
4. Белоусов В. Д., Гварамия А. О квазигруппах Стейна. Сооб. АН Груз. ССР, 1966, X, IV, 3, с. 537-544.
5. Сырбу П. О самоортогональности n-арных операций. Исследования операций и квазигрупп. Кишинев, 1988, с. 92-97.
6. Сырбу П. Об ортогональности и самоортогональности n-арных операций. Мат. Исслед., вып. 95, Кишинев, Штиинца, 1987, с. 121-130.
7. Abel R. J. R., Bennett F. E. Existence of two SOLS and two ISOLS. Discrete Mathematics, 2012, 312, p. 854-867.
8. Abel R.J.R., Bennett F. E. Existence of HSOLSSOMs of type $4^n u^1$. Australasian Journal of Combinatorics, Volume 59(2), 2014, p. 260-281.
9. Belousov V. Parastrophic-orthogonal quasigroups. Quasigroups and related systems, 2005, 13, No. 1, 25–72.
10. Belyavskaya G. B. Successively orthogonal systems of k-ary operations. Quasigroups and Related Systems, 2014, 22, p. 165-178.
11. Belyavskaya G. B. S-systems of n-ary quasigroups. Quasigroups and Related Systems, 2007, 15, p. 251-260.
12. Belyavskaya G. B., Mullen G. L. Orthogonal hypercubes and n-ary operations. Quasigroups and Related Systems, 2005, 13, p. 73-86.

13. Belyavskaya G. B., Popovich T. V. Near-totally conjugate orthogonal quasigroups Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, Number 3(76), 2014, p. 89–96.
14. Bennett F. E. Quasigroups. In: „Handbook of Combinatorial Designs”. Eds. C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, CRC Press, 1996.
15. Bennett F. E. The spectra of a variety of quasigroups and related combinatorial designs. Discrete Mathematics, 1989, 77, p. 29-50.
16. Bennett F. E., Zhang H. Latin Squares with Self-orthogonal conjugates. Discrete Mathematics, 2004, 284, p. 45-55.
17. Bennett F. E., Zhang H. Quasigroups satisfying Stein's third law with a specified number of idempotents. Discrete Mathematics, Volume 312, Issue 24, 28 December 2012, p. 3585-3605.
18. Bennett F. E., Zhu L. Conjugate-orthogonal Latin squares and related structures. In “Contemporary design theory” (Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York), 1992, p.41-96.
19. Bose R. C., Shrikhande S. S., Parker E. T. Further results of the constructions of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler’s conjecture. Canad. J.Math. 12, 1960, 189-203.
20. Brayton R. K., Coppersmith D., Hoffman A. J. Self-orthogonal latin squares of all orders $n \neq 2, 3, 6$. Bulletin of the american mathematical society, 1974, Vol. 80, no 1, p. 116-118.
21. Chen K., Zhang Y., Zhang H. Strongly symmetric self-orthogonal diagonal Latin squares and Yang Hui magic squares. Discrete Math, 2014, 328, p. 79-87.
22. Denes J., Keedwell A. D. Latin squares and their applications: Second edition. Elsevier, 2015, 440 p.
23. Evans T. Latin cubes orthogonal to their transposes - a ternary analogue of Stein quasigroups. Aequat. Math., 1973, 9, N2/3, p. 296–297.
24. Graham G. P., Roberts C. E. Projective Planes and Complete Sets of Orthogonal, Self-Orthogonal Latin Squares. Congressus Numerantium 184(2007), p. 161-172.
25. Joyner D. and Kim Jon-L. Selected unsolved problems in coding theory. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhuser/Springer, New York, 2011.
26. Lin C. D. Construction of orthogonal and nearly orthogonal latin hypercubes. Biometrika, 2009, 96, p. 243-247.
27. Mann H. On orthogonal latin squares. Bull. Amer. Math. Soc., 50(1944), p.249-257.
28. Mendelsohn N. S. Latin Squares orthogonal to their transpose. Journal of combinatorial theory, 1971, 11, p. 187-189
29. Mullen G., Shcherbacov V. On orthogonality of binary operations and squares. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica, 2005, No. 2(48), p.3–42.
30. Mullen G. L., Shcherbacov V. Properties of codes with one check symbol from a quasigroup point of view. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica, 2002, N 3(40), p. 71–86.
31. Mullen G. L., Shcherbacov V. n-T-quasigroup codes with one check symbol and their error detection capabilities. Comment. Math. Univ. Carolinae, 2004, 45, N 2, p.321–340.
32. Nemeth E. Study of Room squares, Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Ontario.

33. Scerbacova A. V., Shcherbacov V. A. On spectrum of medial T_2-quasigroups. Bul. Acad. Ştiinţei Repub. Mold. Mat. 2016, no 2, p. 143-154.
34. Shcherbacov V. A. On parastroph orthogonality of finite binary quasigroups. International Conference on Radicals, Abstracts, July 30-August 5, Kyiv, 2006, p. 66-67.
35. Shcherbacov V. A. Transformations of grupoids which preserve the property of orthogonality. Mathematics Applies in Biology and Biophysics, Abstracts, Iaşi, June, 16-17, 2006, p. 35-36.
36. Shchukin K. K. On isotopies, parastrophies, and orthogonality of quasigroups. Journal of Mathematical Sciences, 2013, Vol. 193, No 4, p. 639-644.
37. Sokhatsky F. M., Fryz I. V. Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups. Comment. Math. Univ. Carolin., 53, 2012, p. 429-445.
38. Sokhatsky F. M., Pirus I. About top-quasigroups. Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova, IMCS-50, Chișinău, August 19-23, 2014, p. 162-165.
39. Stein S. K. On the foundations of quasigroups. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, p. 228-256.
40. Stojakovic Z., Paunic D. Self-orthogonal cyclic n-quasigroups. Aequationes mathematicae, 1986, 30, p. 252-257.
41. Syrbu P. On π-quasigroups isotopic to abelian groups. Bul. Acad. Ştiinţe a Repub. Mold. Mat. 2009, 3(61), p. 109-117.
42. Sade A. Produit direct-singulier de quasigroupes orthogonaux et anti-abeliens. Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. I, 74, 1960, 91-99.

LISTA PUBLICAŢIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI

43. Ceban D. Asupra quasigrupurilor n-are liniare autoortogonale. International Conference of Young Researchers, IX edition. November 11, 2011, ULIM, Chişinău, p. 76.
44. Ceban D. Asupra π-quasigrupurilor de tipul T_2. Materialele Conferinţei ştiinţifice "Integrare prin cercetare şi inovare", Universitatea de Stat din Moldova, 10-11 noiembrie 2014, p. 142-145.
45. Ceban D. Asupra π-T-quasigrupurilor de tipul T_1. Materialele Conferinţei ştiinţifice "Integrare prin cercetare şi inovare", Universitatea de Stat din Moldova, 26-28 septembrie 2013, p. 146-149.
46. Ceban D. Paratopiile unui sistem ortogonal de quasigrupuri ternare. International Conference of Young Researchers, X edition. November 23, 2012, ULIM, Chişinău, p. 104.
47. Ceban D., Syrbu P. Asupra sistemelor ortogonale de operaţii. Conferinţa Interuniversitară „Educaţie prin cercetare – garant al performanţei învăţămîntului superior”, 3-4 mai 2012, Chişinău, p. 86-87.
48. Сырбу П.Н., Чебан Д.К. Паратопии ортогональных систем тернарных квазигрупп. Материалы XII Международного семинара “Дискретная Математика и ее приложения” имени академика О.Б. Лупанова, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, 20-25 июня, 2016, с. 267-270.

49. Ceban D. A method of construction of n-ary self-orthogonal quasigroups. International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE - 2015), July 2-5, 2015, Chişinău, p.20-21.
50. Ceban D. On some identities in ternary quasigroups. Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Științe exacte şi economice”, 2016, nr. 2(92), p. 40-45.
51. Ceban D. On some identities of ternary quasigroups. Abstracts of the 11th Summer School „Algebra, Topology, Analysis”, August 1-14, 2016, Odessa, Ukraine, p.105-107.
52. Ceban D. On π-quasigroups of types T_1 and T_2. Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor „Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători”, Academia de Ştiinţe a Moldovei, 10 martie 2015, p. 16.
53. Ceban D., Syrbu P. On paratopies of orthogonal systems. International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE - 2016), June 23-26, 2016, Chişinău, p.17-18.
54. Ceban D., Syrbu P. On quasigroups with some minimal identities. Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Ştiinţe exacte şi economice”, 2015, nr. 2 (82), p. 47-52.
55. Ceban D., Syrbu P. On the holomorph of π-quasigroups of type T_1. Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Republic of Moldova, August 19-23, 2014, Chişinău, p. 34-37.
56. Syrbu P., Ceban D. On orthogonal systems of ternary quasigroups admitting at least one paratopy. The 24th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM - 2016), September 15-18, 2016, Craiova, România, p. 72.
57. Syrbu P., Ceban D. On orthogonal systems of ternary quasigroups admitting nontrivial paratopies. Quasigroups and related systems. Vol. 25 (2017), No. 1, p.133-150.
58. Syrbu P., Ceban D. On paratopies of orthogonal systems of ternary quasigroups. I. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. No. 1(80), 2016, p. 91-117.
59. Syrbu P., Ceban D. On quasigroups with some minimal identities. Conferinţa Ştiinţifică naţională cu participare internaţională „Învăţămîntul superior din Republica Moldova la 85 de ani”, Universitatea de Stat din Tiraspol, 24-25 septembrie 2015, Chişinău, p. 40-43.
60. Syrbu P., Ceban D. On π-quasigroups of type T_1. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. No. 2(75), 2014, p. 36-43.
61. Syrbu P., Ceban D. π-Quasigroups of type T_1. ICWM 2014, Ewha Womans University, Seoul, Korea, August 12, 2014, p. 38.
62. Syrbu P., Ceban D. π-Quasigroups of type T_1. International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE - 2013), August 18-22, 2013, Chişinău, p. 81-82.

C.Z.U.: 512.548

ADNOTARE

Ceban Dina, „Quasigrupuri autoortogonale: conexiuni cu paratopiile unor sisteme ortogonale”, teză de doctor în științe matematice, Chișinău, 2017

Lucrarea este scrisă în limba română și cuprinde: introducere, trei capitole, concluzii și recomandări, bibliografie din 142 de titluri, 117 pagini de text de bază, o anexă. Rezultatele obținute sunt publicate în 20 de lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: quasigrup, sistem ortogonal, quasigrup autoortogonal, paratopie, identitate minimală, proprietate universală.

Domeniul de studiu: teoria quasigrupurilor binare și n-are.

Scopul și obiectivele lucrării: descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială; această descriere presupune determinarea tuturor sistemelor de tipul dat, caracterizarea paratopiilor acestor sisteme, studiul identităților implicate de paratopii și a quasigrupurilor parastrofic-ortogonale (autoortogonale) de diferită aritate, ce verifică astfel de identități.

Noutatea și originalitatea științifică. În lucrare sunt determinate pentru prima dată toate sistemele ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială și toate paratopiile acestor sisteme; sunt deduse și clasificate identitățile implicate de existența paratopiilor. Descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială, generalizează rezultatul lui V. Belousov despre paratopiile sistemelor ortogonale din două quasigrupuri binare și selectorii binari. În acest scop a fost utilizată o metodă generală ce poate fi aplicată în cazul quasigrupurilor de orice aritate finită. Sunt obținute estimări ale spectrului quasigrupurilor n-are autoortogonale, sunt studiate quasigrupuri binare și ternare cu identități ce implică ortogonalitatea parastrofilor.

Problema științifică importantă soluționată constă în descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare şi selectorii ternari, care admit cel puţin o paratopie netrivială.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele ce țin de descrierea paratopiilor sistemelor ortogonale de quasigrupuri reprezintă un pas important în studiul transformărilor sistemelor ortogonale de operații n-are și a identităților ce implică ortogonalitatea parastrofilor unui quasigrup n-ar.

Implementarea rezultatelor științifice. Sistemele ortogonale de quasigrupuri n-are, $n \geq 2$, sunt utilizate cu succes la construirea MDS-codurilor, în criptografie, la planificarea experimentelor, în combinatorică, în teoria k-rețelelor algebrice ș.a. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

УДК 512.548

АННОТАЦИЯ

Чебан Дина, „Самоортогональные квазигруппы: связи с паратопиями некоторых ортогональных систем”, диссертация на соискание степени доктора математических наук, Кишинэу, 2017

Работа написана на румынском языке и состоит из введения, трех глав, общих выводов и рекомендаций, 142 источников литературы, 117 страниц основного текста, одно приложение. Полученные результаты опубликованы в 20 научных работах.

Ключевые слова: квазигруппа, ортогональная система, самоортогональная квазигруппа, паратопия, минимальное тождество, универсальное свойство

Область исследования: теория бинарных и n-арных квазигрупп.

Цель и задачи диссертации: описание ортогональных систем из трех тернарных квазигрупп и тернарных селекторов, которые допускают по крайней мере одну нетривиальную паратопию; такое описание подразумевает нахождение всех систем данного типа и их паратопий, исследование тождеств которые следуют из существования паратопий и парастрофно-ортогональных (самоортогональных) квазигрупп разной арности, удовлетворяющие таким тождествам.

Научная новизна и оригинальность. В диссертации впервые найдены все ортогональные системы из трех тернарных квазигрупп и тернарные селекторы, которые допускают по крайней мере одну нетривиальную паратопию и описаны все паратопии этих систем; выведены и классифицированы тождества, которые следуют из существования паратопий. Описание ортогональных систем состоящих из трех тернарных квазигрупп и тернарных селекторов, допускающие по крайней мере одну нетривиальную паратопию, обобщает известный результат В. Белоусова о паратопиях ортогональных систем из двух бинарных квазигрупп и бинарных селекторов. В диссертации использован общий метод, который может быть применен для квазигрупп любой арности. Получены уточнения для спектра самоортогональных n-квазигрупп, исследованы бинарные и тернарные квазигруппы, удовлетворяющие тождествам, которые влекут ортогональность парастрофов.

Основная решенная научная задача состоит в описание ортогональных систем, состоящих из трех тернарных квазигрупп и тернарных селекторов, которые допускают по крайней мере одну нетривиальную паратопию

Теоретическое и практическое значение работы. Результаты касающиеся описания паратопий ортогональных систем квазигрупп представляют собой важный шаг в процессе исследования преобразований ортогональных систем n-арных операций и тождеств влекущих ортогональность парастрофов n-арных квазигрупп.

Внедрение научных результатов. Ортогональные системы n-квазигрупп, $n \geq 2$, успешно используются для построения MDS-кодов, в криптографии, при планирование экспериментов, в комбинаторике, в теории алгебраических k-сетей и т.д. Результаты могут быть применены для разработки специальных курсов в системе высшего образования.

C.Z.U: 512.548

ANNOTATION

Ceban Dina, "Self-ortogonal quasigroups: connections with paratopies of some orthogonal systems", Doctor degree in Mathematics, Chișinău, 2017

The language of the Thesis is Romanian. It comprises 117 base pages and has the following structure: Introduction, 3 Chapters, General Conclusions and Recommendations, Bibliography with 142 References and an annex. Research outcomes were reflected in 20 scientific publications.

Keywords: quasigroup, orthogonal system, self-orthogonal quasigroup, paratopy, minimal identity, universal property.

Field of study: theory of binary and n-ary quasigroups.

The purpose and objectives: to describe the orthogonal systems consisting of three ternary quasigroups and ternary selectors, admitting at least one nontrivial paratopy; this description supposes the founding of all such systems, the characterization of paratopies of these systems, the study of the identities implied by paratopies and the parastrophic-orthogonal (self-orthogonal) quasigroups of different arity, satisfying such identities.

Novelty and scientific originality. In the present Thesis, for the first time, there are determined all orthogonal systems consisting of three ternary quasigroups and ternary selectors, admitting at least one nontrivial paratopy and all paratopies of these systems are described; all identities implied by the paratopies are found and classified. The description of orthogonal systems consisting of three ternary quasigroups and ternary selectors, admitting at least one nontrivial paratopy, is a generalization of the V. Belousov result about the paratopies of orthogonal systems consisting of two binary quasigroups and binary selectors. For this purpose a general method was used, which can be applied for any finite arity. Estimations of the spectra of self-orthogonal n-ary quasigroups are obtained, binary and ternary quasigroups with identities which imply the orthogonality of their parastrophes are studied.

The main solved scientific problem consists in describtion of orthogonal systems of three ternary quasigroups and ternary selectors, admitting at least one nontrivial paratopy.

The significance of theoretical and practical values of the work. The results concerning the description of the paratopies of orthogonal systems of quasigroups represent an important step in the study of the transformations of orthogonal systems of n-ary operations and of the identities implying the orthogonality of parastrophes of an n-ary quasigroup.

Implementation of the scientific results. Orthogonal systems of n-quasigroups, $n \geq 2$, are used in the theory of MDS-codes, in criptography, planning experiments, in combinatorics, in the theory of algebraic k-nets etc. The results may be applied as a support for teaching courses in higher education.

CEBAN DINA

QUASIGRUPURI AUTOORTOGONALE: CONEXIUNI CU PARATOPIILE UNOR SISTEME ORTOGONALE

111.03 – LOGICA MATEMATICĂ, ALGEBRA ŞI TEORIA NUMERELOR

Autoreferatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar:	Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset.	Tirajul ......
Coli de tipar:	Comanda nr. ....

Centrul Editorial-poligrafic al USM

str. Al. Mateevici, 60, Chişinău, MD 2009