

**UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ  
DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ**

Cu titlu de manuscris  
C.Z.U.: 512.548

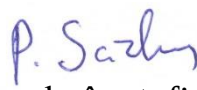
**CEBAN DINA**

**QUASIGRUPURI AUTOORTOGONALE: CONEXIUNI CU  
PARATOPIILE UNOR SISTEME ORTOGONALE**

**111.03 - LOGICĂ MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ȘI TEORIA NUMERELOR**

**Teză de doctor în științe matematice**

Conducător științific:

 Sîrbu Parascovia,  
dr. în șt. fiz.-matem., conf. univ.,  
111.03 - logică matematică,  
algebră și teoria numerelor

Autorul:



**CHIȘINĂU, 2017**

**© Ceban Dina, 2017**

## C U P R I N S

|                                                                                                                                                    |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>ADNOTARE .....</b>                                                                                                                              | <b>4</b>   |
| <b>LISTA ABREVIERILOR.....</b>                                                                                                                     | <b>7</b>   |
| <b>INTRODUCERE .....</b>                                                                                                                           | <b>8</b>   |
| <b>1. ANALIZA SITUAȚIEI ÎN DOMENIUL TEORIEI QUASIGRUPURILOR ORTOGONALE ȘI AUTOORTOGONALE.....</b>                                                  | <b>15</b>  |
| 1.1. Evoluția noțiunii de ortogonalitate.....                                                                                                      | 15         |
| 1.2. Paratopiile sistemelor ortogonale de quasigrupuri binare.....                                                                                 | 21         |
| 1.3. Concluzii la Capitolul 1 .....                                                                                                                | 25         |
| <b>2. QUASIGRUPURI PARASTROFIC-ORTOGONALE ȘI AUTOORTOGONALE .....</b>                                                                              | <b>26</b>  |
| 2.1. $\pi$ -Quasigrupuri de tipul $T_1$ .....                                                                                                      | 26         |
| 2.2. $\pi$ -Quasigrupuri de tipul $T_2$ .....                                                                                                      | 33         |
| 2.3. Holomorful $\pi$ -quasigrupurilor .....                                                                                                       | 37         |
| 2.4. Quasigrupuri $n$ -are autoortogonale .....                                                                                                    | 40         |
| 2.5. Concluzii la capitolul 2 .....                                                                                                                | 43         |
| <b>3. PARATOPIILE SISTEMELOR ORTOGONALE DE QUASIGRUPURI .....</b>                                                                                  | <b>44</b>  |
| 3.1. Paratopiile sistemelor ortogonale de quasigrupuri ternare .....                                                                               | 44         |
| 3.1.1. Paratopiile definite de trei quasigrupuri .....                                                                                             | 45         |
| 3.1.2. Paratopiile definite de două quasigrupuri și un selector .....                                                                              | 48         |
| 3.1.3. Paratopiile definite de un quasigrup și doi selectori .....                                                                                 | 67         |
| 3.1.4. Paratopiile definite de trei selectori.....                                                                                                 | 98         |
| 3.2. Identități în quasigrupuri ternare.....                                                                                                       | 103        |
| 3.3. Unele paratopii ale sistemelor ortogonale de quasigrupuri $n$ -are.....                                                                       | 112        |
| 3.4. Concluzii la Capitolul 3 .....                                                                                                                | 114        |
| <b>CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI .....</b>                                                                                                     | <b>116</b> |
| <b>BIBLIOGRAFIE .....</b>                                                                                                                          | <b>118</b> |
| <b>ANEXA 1. Sistemele ortogonale din trei quasigrupuri ternare și cei trei selectori ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială .....</b> | <b>127</b> |
| <b>DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII .....</b>                                                                                               | <b>135</b> |
| <b>CURRICULUM VITAE .....</b>                                                                                                                      | <b>136</b> |

## ADNOTARE

**Ceban Dina, „Quasigrupuri autoortogonale: conexiuni cu paratopiile unor sisteme ortogonale”, teză de doctor în științe matematice, Chișinău, 2017**

Lucrarea este scrisă în limba română și cuprinde: introducere, trei capitole, concluzii și recomandări, bibliografie din 142 de titluri, 117 pagini de text de bază, o anexă. Rezultatele obținute sunt publicate în 20 de lucrări științifice.

**Cuvinte-cheie:** quasigrup, sistem ortogonal, quasigrup autoortogonal, paratopie, identitate minimală, proprietate universală.

**Domeniul de studiu:** teoria quasigrupurilor binare și  $n$ -are.

**Scopul și obiectivele lucrării.** Scopul tezei constă în descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială. Pentru atingerea scopului vizat sunt fixate următoarele obiective: determinarea tuturor sistemelor de tipul dat; caracterizarea paratopiilor acestor sisteme; studiul identităților implicate de paratopii și a quasigrupurilor parastrofic-ortogonale (autoortogonale) de diferită aritate, ce verifică astfel de identități.

**Noutatea și originalitatea științifică.** În lucrare sunt determinate pentru prima dată toate sistemele ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială și toate paratopiile acestor sisteme; sunt deduse și clasificate identitățile implicate de existența paratopiilor. Descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială, generalizează rezultatul lui V. Belousov despre paratopiile sistemelor ortogonale din două quasigrupuri binare și selectorii binari. În acest scop a fost utilizată o metodă generală ce poate fi aplicată în cazul quasigrupurilor de orice aritate finită. Sunt obținute estimări ale spectrului quasigrupurilor  $n$ -are autoortogonale, sunt studiate quasigrupuri binare și ternare cu identități ce implică ortogonalitatea parastrofilor.

**Problema științifică importantă soluționată** constă în descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială.

**Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării.** Rezultatele ce țin de descrierea paratopiilor sistemelor ortogonale de quasigrupuri reprezintă un pas important în studiul transformărilor sistemelor ortogonale de operații  $n$ -are și a identităților ce implică ortogonalitatea parastrofilor unui quasigrup  $n$ -ar.

**Implementarea rezultatelor științifice.** Sistemele ortogonale de quasigrupuri  $n$ -are,  $n \geq 2$ , sunt utilizate cu succes la construirea MDS-codurilor, în criptografie, la planificarea experimentelor, în combinatorică, în teoria  $k$ -rețelelor algebrice ș.a. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

## АННОТАЦИЯ

**Чебан Дина, „Самоортогональные квазигруппы: связи с паратопиями некоторых ортогональных систем”, диссертация на соискание степени доктора математических наук, Кишинэу, 2017**

Работа написана на румынском языке и состоит из введения, трех глав, общих выводов и рекомендаций, 142 источников литературы, 117 страниц основного текста, одно приложение. Полученные результаты опубликованы в 20 научных работах.

**Ключевые слова:** квазигруппа, ортогональная система, самоортогональная квазигруппа, паратопия, минимальное тождество, универсальное свойство

**Область исследования:** теория бинарных и  $n$ -арных квазигрупп.

**Цель и задачи диссертации.** Цель диссертации состоит в описании ортогональных систем из трех тернарных квазигрупп и тернарных селекторов, которые допускают по крайней мере одну нетривиальную паратопию. Достижение поставленной цели включает решение следующих задач: нахождение всех систем данного типа и их паратопий; исследование тождеств которые следуют из существования паратопий и парастрофно-ортогональных (самоортогональных) квазигрупп разной арности, удовлетворяющие таким тождествам.

**Научная новизна и оригинальность.** В диссертации впервые найдены все ортогональные системы из трех тернарных квазигрупп и тернарные селекторы, которые допускают по крайней мере одну нетривиальную паратопию и описаны все паратопии этих систем; выведены и классифицированы тождества, которые следуют из существования паратопий. Описание ортогональных систем состоящих из трех тернарных квазигрупп и тернарных селекторов, допускающие по крайней мере одну нетривиальную паратопию, обобщает известный результат В. Белоусова о паратопиях ортогональных систем из двух бинарных квазигрупп и бинарных селекторов. В диссертации использован общий метод, который может быть применен для квазигрупп любой арности. Получены уточнения для спектра самоортогональных  $n$ -квазигрупп, исследованы бинарные и тернарные квазигруппы, удовлетворяющие тождествам, которые влекут ортогональность парастрофов.

**Основная решенная научная задача** состоит в описании ортогональных систем, состоящих из трех тернарных квазигрупп и тернарных селекторов, которые допускают по крайней мере одну нетривиальную паратопию

**Теоретическое и практическое значение работы.** Результаты касающиеся описания паратопий ортогональных систем квазигрупп представляют собой важный шаг в процессе исследования преобразований ортогональных систем  $n$ -арных операций и тождеств влекущих ортогональность парастрофов  $n$ -арных квазигрупп.

**Внедрение научных результатов.** Ортогональные системы  $n$ -квазигрупп,  $n \geq 2$ , успешно используются для построения  $MDS$ -кодов, в криптографии, при планировании экспериментов, в комбинаторике, в теории алгебраических  $k$ -сетей и т.д. Результаты могут быть применены для разработки специальных курсов в системе высшего образования.

## ANNOTATION

**Ceban Dina, “Self-ortogonal quasigroups: connections with paratopies of some orthogonal systems”, Doctor degree in Mathematics, Chişinău, 2017**

The language of the Thesis is Romanian. It comprises 117 base pages and has the following structure: Introduction, 3 Chapters, General Conclusions and Recommendations, Bibliography with 142 References and an annex. Research outcomes were reflected in 20 scientific publications.

**Keywords:** quasigroup, orthogonal system, self-orthogonal quasigroup, paratopy, minimal identity, universal property.

**Field of study:** theory of binary and  $n$ -ary quasigroups.

**The purpose and objectives.** The purpose of the Thesis is to describe the orthogonal systems consisting of three ternary quasigroups and ternary selectors, admitting at least one nontrivial paratopy. To achieve this purpose the following objectives are established: the founding of all such systems, the characterization of paratopies of these systems, the study of the identities implied by paratopies and the parastrophic-orthogonal (self-orthogonal) quasigroups of different arity, satisfying such identities.

**Novelty and scientific originality.** In the present Thesis, for the first time, there are determined all orthogonal systems consisting of three ternary quasigroups and ternary selectors, admitting at least one nontrivial paratopy and all paratopies of these systems are described; all identities implied by the paratopies are found and classified. The description of orthogonal systems consisting of three ternary quasigroups and ternary selectors, admitting at least one nontrivial paratopy, is a generalization of the V. Belousov result about the paratopies of orthogonal systems consisting of two binary quasigroups and binary selectors. For this purpose a general method was used, which can be applied for any finite arity. Estimations of the spectra of self-orthogonal  $n$ -ary quasigroups are obtained, binary and ternary quasigroups with identities which imply the orthogonality of their parastrophes are studied.

**The main solved scientific problem** consists in description of orthogonal systems of three ternary quasigroups and ternary selectors, admitting at least one nontrivial paratopy.

**The significance of theoretical and practical values of the work.** The results concerning the description of the paratopies of orthogonal systems of quasigroups represent an important step in the study of the transformations of orthogonal systems of  $n$ -ary operations and of the identities implying the orthogonality of parastrophes of an  $n$ -ary quasigroup.

**Implementation of the scientific results.** Orthogonal systems of  $n$ -quasigroups,  $n \geq 2$ , are used in the theory of MDS-codes, in criptography, planning experiments, in combinatorics, in the theory of algebraic  $k$ -nets etc. The results may be applied as a support for teaching courses in higher education.

## LISTA ABREVIERILOR

$S_n$  – grupul simetric de gradul  $n$

$S_Q$  – grupul simetric pe mulțimea  $Q$

$\mathbb{Z}_n$  – inelul claselor de resturi modulo  $n$

$Aut(Q, \cdot)$  – grupul automorfismelor quasigrupului  $(Q, \cdot)$

$GF(p^k)$  – câmpul Galois de ordinul  $p^k$

$\Lambda_n(Q)$  – mulțimea tuturor operațiilor  $n$ -are definite pe mulțimea  $Q$

$LM(Q, \cdot)$  – grupul multiplicativ la stânga al quasigrupului  $(Q, \cdot)$

$RM(Q, \cdot)$  – grupul multiplicativ la dreapta al quasigrupului  $(Q, \cdot)$

$M(Q, \cdot)$  – grupul multiplicativ al quasigrupului  $(Q, \cdot)$

$I_h$  – grupul substituțiilor interne ale quasigrupului  $(Q, \cdot)$  în raport cu  $h$

$N_l(N_r, N_m)$  – nucleul stâng (respectiv drept, mediu) al quasigrupului  $(Q, \cdot)$

$Hol(Q, \cdot)$  – holomorful quasigrupului  $(Q, \cdot)$

## INTRODUCERE

### Actualitatea și importanța problemei abordate

Apariția și dezvoltarea teoriei operațiilor ortogonale se datorează în mare parte ipotezei lui Euler despre inexistența pătratelor latine ortogonale de orice ordin  $q \equiv 2 \pmod{4}$ , formulată în 1782, care se verifică ușor pentru  $q = 2$  (caz trivial), iar pentru  $q = 6$  a fost confirmată abia în 1901 de către Tarry [141, 142]. Ipoteza lui Euler a fost soluționată definitiv (negativ) în anii 1959-1960 de către Bose, Parker și Shrikhande [59], care au arătat că există pătrate latine ortogonale de orice ordin  $q \neq 2, 6$ .

Pătratele latine reprezintă tablele multiplicative ale quasigrupurilor finite, astfel noțiunea de ortogonalitate a două pătrate latine conduce în mod firesc la noțiunea de ortogonalitate a două operații de quasigrup: două quasigrupuri  $(G, \cdot)$  și  $(G, *)$  se numesc ortogonale dacă sistemul de ecuații  $x \cdot y = a$  și  $x * y = b$  are o singură soluție în  $G$ , pentru fiecare  $a, b \in G$ . Dacă  $G$  este o mulțime finită, atunci această definiție poate fi formulată, echivalent, în felul următor: două quasigrupuri finite  $(G, \cdot)$  și  $(G, *)$  sunt ortogonale dacă sistemul de egalități  $x \cdot y = z \cdot t$ ,  $x * y = z * t$  implică  $x = z$ ,  $y = t$ . Ultima definiție a fost generalizată pentru orice două operații binare definite pe o mulțime infinită [12, 138].

Pentru prima dată un criteriu al ortogonalității quasigrupurilor binare în limbajul identităților a fost formulat de H. Mann în 1944 [96]. Au urmat o serie de rezultate obținute de A. Sade, S. K. Stein, T. Evans și V. Belousov în care erau considerate identități în grupoizi binari (quasigrupuri binare) ce implică ortogonalitatea parastrofilor grupoidului (quasigrupului). S.K.Stein [120] consideră quasigrupurile cu identitatea  $x \cdot xy = yx$ , care sunt ortogonale conjugatei lor, deci sunt autoortogonale.

În lucrările [8, 13] Belousov studiază proprietăți și transformări ale sistemelor ortogonale de quasigrupuri care păstrează ortogonalitatea sistemelor. Stein [120] a generalizat noțiunea de operații ortogonale pentru grupoizi infiniti în felul următor: doi grupoizi  $(G, \cdot)$  și  $(G, *)$ , definiți pe aceeași mulțime  $G$ , se numesc ortogonali dacă funcția  $\sigma: G \times G \rightarrow G \times G$ ,  $\sigma(x, y) = (x \cdot y, x * y)$  este bijectivă. În particular, Stein arată că orice quasigrup este ortogonal unui grupoid, care nu este întotdeauna un quasigrup. Sade [139] definește produsul direct singular și-l utilizează la construcția unor contra-exemple la ipoteza lui Euler.

Este cunoscută relația dintre  $k$ -rețelele algebrice și sistemele ortogonale de quasigrupuri: fiecărei  $k$ -rețele îi corespunde un sistem ortogonal de operații binare și, reciproc, orice sistem



ortogonal de operații binare determină o  $k$ -rețea [7]. Diferite transformări ale  $k$ -rețelei (ale liniilor sau punctelor) modifică sistemul ortogonal de operații, care o coordonatizează, păstrând ortogonalitatea sistemului. Astfel, apare problema descrierii transformărilor sistemelor ortogonale, care păstrează ortogonalitatea lor, în particular, a transformărilor care lasă invariante sistemele ortogonale (numite paratopii). În lucrarea [13] V. Belousov caracterizează un șir de transformări (paratopii, parastrofii) ale sistemelor ortogonale de quasigrupuri binare și arată că există exact nouă sisteme ortogonale, ce constau din două quasigrupuri binare și din selectorii binari, care admit cel puțin o paratopie netrivială. O generalizare în caz ternar a acestui rezultat este expusă în Capitolul 3 al tezei date.

Ortogonalitatea operațiilor  $n$ -are,  $n \geq 2$ , a fost abordată din punct de vedere algebric la mijlocul anilor 70, secolul XX, de către V. Belousov, T. Yakubov, T. Evans, A. Bektenov, Ya. Usan, S. Murathudjaev ș.a. Au fost generalizate în caz  $n$ -ar noțiunile de pereche ortogonală și sistem ortogonal de operații (quasigrupuri).

T. Evans [77, 79] cercetează monoidul perechilor ortogonale de quasigrupuri binare definite pe o mulțime dată  $Q$ , indică metode de construcție a sistemelor ortogonale de quasigrupuri  $n$ -are, pentru orice  $n \geq 2$ , pe o mulțime finită de orice ordin  $q \neq 2, 6$ .

În literatura de specialitate un număr mare de lucrări este dedicat quasigrupurilor care posedă sisteme ortogonale de parastrofi (parastrofi principali). Quasigrupurile  $n$ -are care posedă sisteme ortogonale din  $n$  parastrofi ( $n$  parastrofi principali) se numesc quasigrupuri parastrofic-ortogonale (respectiv, autoortogonale). Noțiunea de pătrat latin autoortogonal este atribuită lui Nemeth, care a numit astfel pătratul latin ortogonal conjugatei sale [105], fiind preluată apoi de Mendelsohn [98-101]. Primii care au publicat rezultate ce țin de autoortogonalitatea pătratelor latine au fost S. K. Stein [120] și A. Sade [139]. R. Brayton, D. Coppersmith și A. Hoffman au demonstrat că există quasigrupuri binare autoortogonale finite de orice ordin  $q \neq 1, 2, 3, 6$  [61].

Problema existenței pătratelor latine ortogonale cel puțin unuia dintre parastrofii săi a fost considerată de către K. Phelps în [110]. El demonstrează că dacă există un pătrat latin de ordinul  $q$  ortogonal  $(2, 3, 1)$ -parastrofului său, atunci putem construi un pătrat latin de același ordin ortogonal  $(3, 1, 2)$ -parastrofului său, și reciproc. Aceeași relație este între  $(3, 2, 1)$ - și  $(1, 3, 2)$ -parastrofii unui pătrat latin. K. Phelps a construit exemple de pătrate latine ortogonale  $(2, 3, 1)$ -parastrofului său de orice ordin  $q \neq 2, 6$ . F. E. Bennett și H. Zhang [52] au studiat ordinul pătratelor latine, fiecare parastrof al cărora este ortogonal conjugatei lui.

Belousov [11, 34], Bennett [45, 49], Bennett și Zhu [53], Evans [77], Lindner și Mendelsohn [92, 93] au studiat identități în quasigrupuri, care implică ortogonalitatea unor parastrofi.

V. Belousov în 1983 a dat o clasificare a identităților de lungime 5 cu 2 variabile (numite de V. Belousov identități minimale), care constă din șapte clase. Reprezentanții acestor clase sunt următorii (tipurile lor sunt date conform [34]):  $x(x \cdot xy) = y$  (de tipul  $T_1 = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon]$ );  $x(y \cdot yx) = y$  (de tipul  $T_2 = [\varepsilon, \varepsilon, l]$ );  $x \cdot xy = yx$  (de tipul  $T_4 = [\varepsilon, \varepsilon, lr]$ );  $xy \cdot x = y \cdot xy$  (de tipul  $T_6 = [\varepsilon, l, lr]$ );  $xy \cdot y = x \cdot xy$  (de tipul  $T_8 = [\varepsilon, rl, lr]$ );  $xy \cdot yx = y$  (de tipul  $T_{10} = [\varepsilon, lr, l]$ );  $yx \cdot xy = y$  (de tipul  $T_{11} = [\varepsilon, lr, rl]$ ), unde  $l = (13), r = (23)$ . Quasigrupurile ce verifică identități din această clasificare au fost studiate de mulți autori, de exemplu, [11, 16, 34, 45, 49, 77, 122]. Independent, Bennett a obținut aceeași clasificare a identităților minimale [49].

În prezent o problemă deschisă este descrierea grupurilor izotope  $\pi$ -quasigrupurilor de diferite tipuri. În [34] se arată că grupurile care sunt izotope quasigrupurilor cu identitatea  $x \cdot yx = yx \cdot y$  sunt metabeliene, iar grupurile care sunt izotope quasigrupurilor cu identitatea  $xy \cdot y = x \cdot xy$  sunt abeliene, de exponentă doi. Studiul quasigrupurilor cu identități minimale (Belousov [34]) este una din problemele abordate în lucrarea dată.

În [78] T. Evans generalizează prima lege a lui Stein în felul următor:

$$A(x, A(x, y, z), A(z, x, y)) = A(y, z, x),$$

și arată că această identitate implică autoortogonalitatea quasigrupului ternar  $(Q, A)$ . Z.Stojakovic și D. Paunic în [121] studiază  $n$ -quasigrupurile autoortogonale ciclice, obțin câteva construcții ale  $n$ -quasigrupurilor autoortogonale ciclice și evaluări ale spectrului lor. P. Sîrbu a studiat ortogonalitatea parastrofilor operațiilor  $n$ -are, a indicat o clasă de identități ce implică autoortogonalitatea operațiilor  $n$ -are și criterii de autoortogonalitate a  $n$ -grupurilor și a  $n$ -quasigrupurilor mediale, a demonstrat că există quasigrupuri finite autoortogonale de orice aritate  $n$  și a dat estimări ale spectrului operațiilor autoortogonale  $n$ -are [23, 24, 123, 23, 18].

G. Belyavskaya în lucrările [35, 36, 38, 41] definește și studiază mai multe generalizări ale noțiunii de ortogonalitate (pătrate latine  $r$ -ortogonale, ortogonalitatea a două operații  $n$ -are pentru  $n > 2$ , sisteme succesiv ortogonale de operații  $n$ -are ș.a.). În lucrarea [38] este dată o generalizare a noțiunii de ortogonalitate pentru operațiile  $n$ -are. Se stabilesc câteva criterii de ortogonalitate a operațiilor  $n$ -are. Metode de construcție pentru diferite tipuri de pătrate latine autoortogonale idempotente incomplete sunt propuse în [29, 47]. Spectrul quasigrupurilor cu legea a III-a Stein este precizat în [48]. În lucrările [39, 40] sunt considerate quasigrupurile binare care au toți cei 6 parastrofi ortogonali doi câte doi (quasigrupuri total parastrofic

ortogonale) sau posedă un sistem ortogonal din 5 parastrofi, dar nu sunt total parastrofic ortogonale (quasigrupuri aproape total parastrofic ortogonale). V.Scerbacov [102, 114, 115, 116] obține condiții necesare și suficiente de ortogonalitate a unui quasigrup finit cu fiecare dintre parastrofii săi, estimări ale spectrului unor  $\pi$ -quasigrupuri mediale [113].

În [37, 42, 43, 44, 71, 110, 117] a fost studiat ordinul quasigrupurilor (pătratelor latine) parastrofic-ortogonale. În [37, 102] sunt stabilite unele quasi-identități în quasigrupurile parastrofic-ortogonale finite.

Rezultatele principale ale tezei sunt publicate în [1-5, 22, 64-70, 123-129].

Pătratele latine ortogonale (quasigrupurile finite ortogonale) au fost și sunt utilizate intens la construirea codurilor detectoare și corectoare de erori, în particular a MDS-codurilor, și în criptografie ([73, 74, 75, 76, 80, 83, 86, 103, 104, 111, 130 ș.a.]). De asemenea, pătratele latine sunt utilizate la planificarea experimentelor prin „analiza variantelor” [74, 75, ș.a.].

**Scopul și obiectivele tezei.** Scopul principal al tezei constă în studiul sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială. Realizarea acestui scop generează următoarele obiective:

- descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială;
- determinarea tuturor sistemelor de tipul dat;
- caracterizarea paratopiilor sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari;
- studiul identităților implicate de paratopii și a quasigrupurilor parastrofic-ortogonale (autoortogonale) de diferită aritate, ce verifică astfel de identități.

**Noutatea științifică a rezultatelor obținute.** În lucrare sunt determinate pentru prima dată toate sistemele ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială și toate paratopiile acestor sisteme; sunt deduse și clasificate identitățile implicate de existența paratopiilor. Descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială, generalizează rezultatul lui V. Belousov despre paratopiile sistemelor ortogonale din două quasigrupuri binare și selectorii binari. În acest scop a fost utilizată o metodă generală ce poate fi aplicată în cazul quasigrupurilor de orice aritate finită. Sunt obținute estimări ale spectrului quasigrupurilor  $n$ -are autoortogonale, sunt studiate quasigrupuri binare și ternare cu identități ce implică ortogonalitatea parastrofilor.

**Importanța teoretică și valoarea aplicativă a lucrării.** Rezultatele ce țin de descrierea paratopiilor sistemelor ortogonale de quasigrupuri reprezintă un pas important în studiul

transformărilor sistemelor ortogonale de operații  $n$ -are și a identităților ce implică ortogonalitatea parastrofilor unui quasigrup  $n$ -ar.

**Aprobarea rezultatelor.** Rezultatele științifice obținute au fost examinate și aprobate la Sesiunea specială a Seminarului „Algebră și Logică matematică”, dedicată memoriei Profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică și Informatică al Academiei de Științe din Moldova, edițiile din anii 2012, 2014, 2015, 2016, 2017; la Seminarul Departamentului Matematică, Universitatea de Stat din Moldova, 2016 și la Seminarul de Științe Matematice P.Osmătescu, Departamentul de Matematică, Universitatea Tehnică a Moldovei, 2017.

Rezultatele principale incluse în teză au fost prezentate la următoarele conferințe științifice:

- The 12<sup>th</sup> International Scientific Seminar „Discrete Mathematics and its Applications”, dedicated to the memory of academician O. B. Lupanov, State University „M. V. Lomonosov”, Moscow, Russia, 2016;
- The 24<sup>th</sup> Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM - 2016), September 15-18, 2016, Craiova, România;
- The 11<sup>th</sup> Summer School „Algebra, Topology, Analysis”, Odessa, Ukraine, 2016;
- International Congress of Women Mathematicians (ICWM), Ewha Womans University, Seoul, Korea, 2014;
- Third Conference of Mathematical Society of Republic of Moldova, Chișinău, 2014;
- International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE), Chișinău, 2013, 2015, 2016;
- Conferința științifică națională cu participare internațională „Învățământul superior din Republica Moldova la 85 de ani”, Universitatea de Stat din Tiraspol, 24-25 septembrie 2015, Chișinău;
- Conferința Științifică Internațională a Doctoranzilor „Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători”, Academia de Științe a Moldovei, 2015, Chișinău;
- International Conference of Young Researchers, X edition, ULIM, Chișinău, 2012;
- Conferința Interuniversitară „Educație prin cercetare – garant al performanței învățământului superior”, Chișinău, 2012;
- Conferința științifică „Integrare prin cercetare și inovare”, Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, 2013, 2014.

**Publicații la tema tezei.** Rezultatele principale ale tezei sunt reflectate în 20 de publicații științifice, inclusiv 5 articole în reviste recenzate de specialitate, 4 articole în culegeri și 11 rezumate la conferințe științifice; 3 articole și 5 rezumate sunt publicate fără coautor.

**Cuvinte-cheie:** quasigrup, sistem ortogonal, quasigrup autoortogonal, paratopie, identitate minimală, proprietate universală

**Domeniul de studiu:** teoria quasigrupurilor binare și  $n$ -are

**Structura tezei.** Teza este scrisă în limba română, cuprinde 137 pagini (inclusiv 117 pagini text de bază) și este compusă din: Introducere, trei capitole, Concluzii generale și recomandări, Bibliografie cu 142 titluri și o anexă.

În **Introducere** este prezentată starea de lucruri în domeniul de cercetare al tezei, contextul apariției problemelor cercetate, scopul tezei, importanța, noutatea și originalitatea rezultatelor tezei, formularea succintă a rezultatelor principale ale tezei, aprobarea rezultatelor tezei.

**Primul capitol** al tezei poartă un caracter introductiv și conține o trecere în revistă a celor mai importante rezultate referitoare la tema tezei și problemele principale soluționate în teză. În acest capitol este expusă succint evoluția teoriei operațiilor ortogonale și autoortogonale, sunt expuse etape ale soluționării definitive a ipotezei lui Euler și generalizarea noțiunii de ortogonalitate în cazul operațiilor arbitrare, binare și  $n$ -are. Sunt prezentate metode de construcție a sistemelor ortogonale de quasigrupuri (pătrate latine). Sunt descrise identități ce implică ortogonalitatea parastrofilor unor quasigrupuri și este dată clasificarea identităților de lungime 5 cu 2 variabile (numite identități minimale) obținută de V. Belousov. Sunt prezentate rezultate referitoare la problema caracterizării  $\pi$ -quasigrupurilor (quasigrupurilor cu identități minimale), în particular, a grupurilor izotope unor  $\pi$ -quasigrupuri.

Problema autoortogonalității operațiilor  $n$ -are este tratată sub următoarele aspecte: criterii de autoortogonalitate, metode de construcție a operațiilor (quasigrupurilor) autoortogonale, identități ce implică autoortogonalitatea și spectrul lor. Sunt definite sistemele ortogonale de operații  $n$ -are și este prezentat rezultatul referitor la caracterizarea tuturor sistemelor ortogonale de două quasigrupuri binare și selectorii binari ce posedă cel puțin o paratopie netrivială, cu o demonstrație diferită de cea a lui V. Belousov. Această abordare permite generalizarea rezultatului lui V. Belousov pentru sistemele ortogonale din  $n$  quasigrupuri  $n$ -are și cei  $n$  selectori  $n$ -ari,  $n \geq 3$ .

În **Capitolul 2** sunt studiate quasigrupurile binare cu identitățile  $x(x \cdot xy) = y$  ( $\pi$ -quasigrupurile de tipul  $T_1 = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon]$ ) și  $x(y \cdot yx) = y$  ( $\pi$ -quasigrupurile de tipul  $T_2 = [\varepsilon, \varepsilon, l]$ ), holomorful  $\pi$ -quasigrupurilor și ordinul quasigrupurilor  $n$ -are autoortogonale. În acest capitol sunt date condiții necesare și suficiente de invarianță a identității minimale de tipul  $T_1$  la izotopia quasigrupurilor și, respectiv, a buclelor (Propozițiile 2.7 și 2.8). Sunt studiate  $\pi$ -quasigrupurile de tipul  $T_1$  și/sau  $T_2$ , izotope unor grupuri (grupuri abeliene), se arată că mulțimea tuturor  $\pi$ -

quasigrupurilor de tipul  $T_2$  izotope unor grupuri abeliene este o subvarietate în varietatea tuturor  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_2$  (Propoziția 2.14, Corolarul 2.8). Se demonstrează că  $\pi$ -quasigrupurile de tipul  $T_2$  sunt admisibile (Propoziția 2.16),  $\pi$ - $T$ -quasigrupurile de tipul  $T_2$  sunt mediale (Corolarul 2.10), iar  $\pi$ -quasigrupurile de ambele tipuri  $T_1$  și  $T_2$  sunt  $RIP$ -quasigrupuri (Corolarul 2.6). Sunt date estimări ale ordinului  $\pi$ -quasigrupurilor finite de tipul  $T_1$  (Propozițiile 2.5 și 2.11, Corolarul 2.1),  $\pi$ - $T$ -quasigrupurilor de tipul  $T_1$  (Propoziția 2.10) și ale grupului substituțiilor interne în  $\pi$ -quasigrupurile finite de tipul  $T_1$  (Propozițiile 2.2 și 2.3).

Este dată o condiție necesară și suficientă ca holomorful unui  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  să fie  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  (Propoziția 2.18). Se demonstrează că grupul multiplicativ la stânga (la dreapta) al unui  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  este izomorf cu un subgrup normal al grupului multiplicativ la stânga (la dreapta) al holomorfului său (Propoziția 2.19). În cazul  $\pi$ -quasigrupurilor de celelalte 6 tipuri ( $T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10}, T_{11}$ ) holomorful acestora este un  $\pi$ -quasigrup de același tip cu ele dacă și numai dacă grupul automorfismelor  $\pi$ -quasigrupului dat este trivial (Propoziția 2.20).

În ultimul paragraf se demonstrează că pentru orice  $n, q \geq 3$ ,  $q \neq 2(2p + 1), p \geq 1$ , există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinal  $q$  (Teorema 2.3).

În **Capitolul 3** sunt studiate paratopiile sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, identitățile pe care le implică aceste paratopii. Se demonstrează că există exact 153 de astfel de sisteme (Teoremele 3.1-3.6) și sunt caracterizate toate paratopiile lor (Teorema 3.1, Lemele 3.1-3.32). În tabelul din ANEXA 1 este prezentată lista celor 153 de sisteme ce admit cel puțin o paratopie netrivială, paratopiile și identitățile implicate de existența paratopiilor. În Teorema 3.5 se demonstrează că fiecare dintre cele 67 de identități (diferite), pe care le implică existența paratopiilor, se reduce la unul din următoarele patru tipuri:

1.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, {}^{\delta}A) = E_1$ ,
2.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, E_1) = E_2$ ,
3.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_3)$ ,
4.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_2)$ ,

unde  $A$  este un quasigrup ternar și  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S_4$ . În paragraful 3.3 (Teorema 3.6) sunt date condiții necesare ca o uplă din  $n$  quasigrupuri  $n$ -are ortogonale să definească o paratopie a unui sistem ortogonal din  $n$  quasigrupuri  $n$ -are și cei  $n$  selectori  $n$ -ari.

## 1. ANALIZA SITUAȚIEI ÎN DOMENIUL TEORIEI QUASIGRUPURILOR ORTOGONALE ȘI AUTOORTOGONALE

### 1.1. Evoluția noțiunii de ortogonalitate

Fie  $Q$  o mulțime finită cu  $n$  elemente,  $n \geq 1$ . Tabelul cu  $n$  linii și  $n$  coloane la intersecția cărora se află elemente din mulțimea  $Q$ , astfel încât elementele nu se repetă nici pe linii, nici pe coloane, se numește *pătrat latin de ordinul  $n$* . Două pătrate latine de ordinul  $n$  se numesc *ortogonale* dacă la suprapunerea lor perechile obținute nu se repetă. Un sistem din  $s$  pătrate latine de ordinul  $n$  se numește *ortogonal* dacă orice două pătrate latine ale sistemului sunt ortogonale. Cu ajutorul grupurilor finite putem construi perechi ortogonale de pătrate latine de orice ordin impar, iar utilizând câmpurile Galois pot fi construite perechi de pătrate latine ortogonale de ordinul  $2^k$ , unde  $k \geq 2$  [74, 75]. L. Euler în încercarea sa (nereușită) de a construi pătrate latine ortogonale de ordinul 6 (problema celor 36 de ofițeri), a formulat în 1872 ipoteza despre inexistența pătratelor latine ortogonale de orice ordin  $q \equiv 2 \pmod{4}$ . Justețea acestei ipoteze pentru  $q = 6$  a fost confirmată de G. Tarry în 1901 [142]. Ipoteza lui Euler a fost soluționată definitiv în anii 1959-1960 de către Bose, Parker și Shrikhande [59], care au demonstrat că există pătrate latine ortogonale de orice ordin  $q \neq 2, 6$ , utilizând, în particular, rezultate din lucrările [54-58, 63, 90, 94, 95, 97, 107, 108, 112, 133, 135].

Procesul de soluționare a ipotezei lui Euler a condus la apariția și dezvoltarea teoriei operațiilor ortogonale. Pătratele latine reprezintă echivalentul combinatoric al quasigrupurilor finite: orice pătrat latin este tabla Cayley a unui quasigrup finit (dacă îi adăugăm bordurile) și, reciproc, tabla Cayley a oricărui quasigrup finit (luată fără borduri) este un pătrat latin. Astfel, noțiunea de ortogonalitate a două pătrate latine conduce în mod firesc la noțiunea de ortogonalitate a două quasigrupuri (finite): două quasigrupuri finite  $(G, \cdot)$  și  $(G, *)$ , definite pe aceeași mulțime  $G$ , se numesc *ortogonale* dacă ecuațiile  $x \cdot y = a$  și  $x * y = b$  au câte o singură soluție în  $G$ , pentru fiecare  $a, b \in G$ . Deoarece  $G$  este o mulțime finită, este suficient să cerem doar existența soluției celor două ecuații, astfel această definiție poate fi formulată (echivalent) în felul următor: două quasigrupuri finite  $(G, \cdot)$  și  $(G, *)$  se numesc *ortogonale*, dacă sistemul de egalități  $x \cdot y = z \cdot t$  și  $x * y = z * t$  implică  $x = z$ ,  $y = t$ . Ultima definiție a fost generalizată în felul următor: două operații binare  $(\cdot)$  și  $(*)$ , definite pe aceeași mulțime finită  $G$ , se numesc *ortogonale* dacă sistemul de egalități  $x \cdot y = z \cdot t$  și  $x * y = z * t$  implică  $x = z$ ,  $y = t$  ([138], [12]). S. K. Stein [120] a generalizat noțiunea de operații ortogonale pentru grupoizi infiniți: doi grupoizi  $(G, \cdot)$  și  $(G, *)$ , definiți pe aceeași mulțime  $G$ , se numesc *ortogonali* dacă funcția

$\sigma: G \times G \rightarrow G \times G, \sigma(x, y) = (x \cdot y, x * y)$  este bijectivă. T. Evans [78] a studiat monoidul perechilor ortogonale de quasigrupuri binare definite pe o mulțime dată  $Q$ .

H. Mann a formulat pentru prima dată un criteriu al ortogonalității quasigrupurilor binare în limbajul identităților [96]. A. Sade, S. K. Stein, T. Evans și V. Belousov au considerat identități în grupoizi binari (quasigrupuri binare) care implică ortogonalitatea parastrofilor grupoidului (quasigrupului). S. K. Stein a studiat quasigrupurile cu identitatea  $x \cdot xy = yx$  (numită în prezent prima lege Stein), observînd că aceste quasigrupuri sunt ortogonale conjugatelor lor (parastrofului lor principal).

Noțiunea de pătrat latin autoortogonal este atribuită lui Nemeth, care a numit astfel pătratul latin ortogonal conjugate sale [106], fiind preluată apoi de Mendelsohn [99, 100]. Primii care au publicat rezultate referitoare la autoortogonalitatea pătratelor latine au fost S. K. Stein [120] și A. Sade [139].

R. Brayton, D. Coppersmith și A. Hoffman au demonstrat că există quasigrupuri binare autoortogonale finite de orice ordin  $q \neq 1, 2, 3, 6$  [60].

Problema existenței pătratelor latine care sunt ortogonale cel puțin unuia dintre parastrofii săi a fost considerate inițial de către K. Phelps în [110], care a arătat că există pătrate latine ortogonale  $(2, 3, 1)$ -parastrofului său de orice ordin  $q \neq 2, 6$ . De asemenea, K. Phelps a obținut un rezultat similar pentru pătrate latine ortogonale  $(3, 2, 1)$ -parastrofului său, însă nu a garantat existența acestor pătrate latine de ordinele  $q = 14$  și  $26$ . În [46] F. Bennett a studiat quasigrupuri autoortogonale semisimetrice. În particular, a observat că nu există quasigrupuri autoortogonale semisimetrice de ordinul 9. Lucrările [50, 51, 134] se referă la pătrate latine diagonale (atât diagonală principală, cât și cea secundară sunt transversale) care sunt ortogonale  $(3, 1, 2)$ - și  $(3, 2, 1)$ -parastrofilor săi, se demonstrează că astfel de pătrate latine există de orice ordin  $q \neq 2, 3, 6$  și posibil  $q \neq 10$ . F. E. Bennett și H. Zhang [52] studiază ordinul pătratelor latine, fiecare parastrof al cărora este ortogonal conjugatei lui, demonstrează că spectrul pătratelor latine cu această proprietate conține toate numere naturale  $q \geq 8$ , cu excepția, posibil, a numerelor 10 și 11. În [72] este studiată existența pătratelor latine diagonale autoortogonale și parastrofic-ortogonale.

În [64] este considerată problema clasificării pătratelor latine idempotente autoortogonale de ordin mic, abstracție făcând de izomorfism, respectiv izotopie. Autorii prezintă tabele cu enumerări ale pătratelor latine autoortogonale, ale claselor de pătrate latine autoortogonale izomorfe, ale claselor de pătrate latine autoortogonale izotope.



În [28] se arată că există pătrate latine autoortogonale de ordinul  $q$ , pentru orice  $q \geq 7$ , cu excepția, posibil, a numerelor  $q \in \{10, 12, 14, 18, 21, 22, 24, 30, 34\}$ . Identități care implică ortogonalitatea unor parastrofi în quasigrupuri sunt considerate într-un șir de lucrări [11, 34, 53, 77, 92].

Fie  $\Lambda_2(Q)$  mulțimea tuturor operațiilor binare de quasigrup definite pe mulțimea nevidă  $Q$ . V. Belousov a demonstrat în [34] că lungimea minimală a identităților netriviiale  $w_1 = w_2$  în  $\Lambda_2(Q)$ , de două variabile libere, este cinci și orice astfel de identitate poate fi reprezentată în forma:

$$A(x, B(x, C(x, y))) = y.$$

Un quasigrup binar  $(Q, A)$  se numește  $\pi$ -quasigrup de tipul  $[\alpha, \beta, \gamma]$ , unde  $\alpha, \beta, \gamma \in S_3$ , dacă verifică identitatea:

$${}^\alpha A(x, {}^\beta A(x, {}^\gamma A(x, y))) = y,$$

unde  ${}^\sigma A$  este  $\sigma$ -parastroful lui  $A$ .

În 1983, V. Belousov a obținut o clasificare a identităților de lungime 5 cu 2 variabile (numite de V. Belousov identități minimale), care constă din șapte clase. Reprezentanții acestor clase sunt următorii (tipurile sunt cele stabilite în lucrarea [34]):  $x(x \cdot xy) = y$ , (de tipul  $T_1 = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon]$ );  $x(y \cdot yx) = y$  (de tipul  $T_2 = [\varepsilon, \varepsilon, l]$ );  $x \cdot xy = yx$  (de tipul  $T_4 = [\varepsilon, \varepsilon, lr]$ , prima lege Stein);  $xy \cdot x = y \cdot xy$  (de tipul  $T_6 = [\varepsilon, l, lr]$ , legea a doua Stein);  $xy \cdot y = x \cdot xy$  (de tipul  $T_8 = [\varepsilon, rl, lr]$ , legea a treia Stein);  $xy \cdot yx = y$  (de tipul  $T_{10} = [\varepsilon, lr, l]$ , prima lege Schroder);  $yx \cdot xy = y$  (de tipul  $T_{11} = [\varepsilon, lr, rl]$ , legea a doua Schroder), unde  $l = (13)$ ,  $r = (23)$ . Numele identităților enumerate mai sus sunt originare din articolul lui Sade [140].

Independent, F. Bennett a obținut aceeași clasificare ([49]). Cu toate acestea, lista celor 7 identități minimale diferă ușor de cea obținută de V. Belousov: identitățile de tipurile  $T_1$  și  $T_6$  au fost înlocuite cu dualele lor, iar identitatea de tipul  $T_2$  a fost înlocuită cu cea de tipul  $T_5$ , care este parastrofic echivalentă cu  $T_2$ .

Quasigrupurile care verifică identitățile din această clasificare au fost studiate de mulți autori, de exemplu, [77, 11, 34, 16, 49, 45, 122]. O problemă deschisă este caracterizarea grupurilor izotope unor  $\pi$ -quasigrupuri. În [34] și [16] sunt studiate  $\pi$ -quasigrupurile izotope grupurilor, obținând în particular, următoarele rezultate:

1. orice grup  $(Q, +)$  izotop unui  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  verifică identitatea

$$2(x + y + x) = 2x + 2y + 2x;$$

2. dacă un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_4$  este izotop unui grup, atunci acest grup este metabelian;

3. dacă un grup este izotop unui  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_6$ , atunci acest grup este metabelian;
4. dacă un grup este izotop unui  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_8$ , atunci acest grup este abelian de exponentă doi.

Rămâne deschisă problema caracterizării grupurilor izotope unui  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_2, T_{10}, T_{11}$ .

Quasigrupurile de tipul  $T_4$ , adică quasigrupurile care verifică identitatea  $x \cdot xy = yx$ , au fost inițial studiate de Stein [120]. Norton și Stein au cercetat quasigrupurile idempotente de tipul  $T_{11}$  [106]. Acești autori au obținut că ordinul quasigrupurilor idempotente de tipul  $T_{11}$  este congruent cu 0 sau 1 (mod 4), însă nu există quasigrupuri idempotente de tipul  $T_{11}$  de ordinul 5. De asemenea, au demonstrat că există quasigrupuri idempotente de tipul  $T_{10}$  de ordinul  $n$  dacă și numai dacă  $n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}^*$ .

F. E. Bennett a studiat spectrul quasigrupurilor cu identități minimale. Spectrul unui quasigrup cu identitatea  $u(x, y) = v(x, y)$  este mulțimea tuturor numerelor naturale  $q$ , astfel încât există quasigrupuri de ordinul  $q$  care verifică identitatea  $u(x, y) = v(x, y)$ . În [45] sunt prezentate următoarele rezultate referitoare la spectrul quasigrupurilor cu identități minimale:

- ordinul  $q$  al  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_1$  (date de identitatea  $x \cdot (x \cdot xy) = y$ ) este:  $q \equiv 0$  sau  $1 \pmod{3}, q \neq 6$ ;
- ordinul  $q$  al  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_2$  (date de identitatea  $x \cdot (y \cdot yx) = y$ ) este:  $q \neq 2, 6$  și posibil  $q \neq 10, 14, 18, 26, 30, 38, 42, 158$ ;
- ordinul  $q$  al  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_4$  (date de identitatea  $x \cdot xy = yx$ ) este:  $q \neq 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12, 14$  și posibil  $q \neq 15, 18, 22, 23, 26, 27, 30, 34, 38, 42, 43, 46, 50, 54, 62, 66, 70, 74, 78, 82, 90, 98, 102, 114, 126$ ;
- ordinul  $q$  al  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_6$  (date de identitatea  $xy \cdot x = y \cdot xy$ ) este:  $q \equiv 1 \pmod{4}$  și posibil  $q \neq 33, 57, 93, 133$ ;
- ordinul  $q$  al  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_{10}$  (date de identitatea  $xy \cdot yx = y$ ) este:  $q \equiv 0$  sau  $1 \pmod{12}$  și posibil  $q \neq 12$ ;
- ordinul  $q$  al  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_8$  (date de identitatea  $xy \cdot y = x \cdot xy$ ) este:  $q \equiv 0$  sau  $1 \pmod{4}, q \neq 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15$  și, posibil,  $q \neq 20, 21, 24, 41, 44, 48, 53, 60, 69, 77, 93, 96, 101, 164$ ;
- ordinul  $q$  al  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_{11}$  (date de identitatea  $yx \cdot xy = y$ ) este:  $q \equiv 0$  sau  $1 \pmod{4}, q \neq 5$ .

În lucrările [39, 40] sunt considerate quasigrupurile binare care au toți cei 6 parastrofi ortogonali doi câte doi (quasigrupuri total parastrofic ortogonale) sau posedă un sistem ortogonal

din 5 parastrofi, dar nu sunt total parastrofic ortogonale (quasigrupuri aproape total parastrofic ortogonale). În [39, 42-44, 61, 71, 81, 82, 110] a fost studiat ordinul quasigrupurilor (pătratelor latine) parastrofic-ortogonale. În [37, 102] sunt stabilite unele quasi-identități ale quasigrupurilor parastrofic-ortogonale finite. V. Scerbacov [102, 114, 115, 116] obține condiții necesare și suficiente de ortogonalitate a unui quasigrup finit cu fiecare dintre parastrofii săi.

În cazul pătratelor latine, după soluționarea ipotezei lui Euler, rămâne deschisă problema determinării numărului maximal  $N(q)$  de pătrate latine de ordin dat  $q$  într-un sistem ortogonal. Se știe că  $N(q) \leq q - 1$  și că egalitatea se atinge în cazul când  $q$  este o putere a unui număr prim [75]. Estimări ale numărului  $N(q)$  sunt obținute într-o serie de lucrări [26, 27, 33, 75, 84, 85, 89, 131, 132, 136, 137].

Sistemele ortogonale de operații binare (quasigrupuri binare) au fost studiate în lucrările [8, 13, 17, 20, 75] ș.a. Ortogonalitatea operațiilor  $n$ -are,  $n > 2$ , a fost abordată din punct de vedere algebric la mijlocul anilor 70 ai secolului trecut, în lucrările lui V. Belousov și T. Yakubov, T. Evans, A. Bektenov, Ya. Usan.

Fie  $Q$  o mulțime nevidă și  $n$  un număr natural. Vom nota consecutivitatea  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  cu  $(x_1^n)$ . Un grupoid  $n$ -ar  $(Q, A)$  se numește *quasigrup  $n$ -ar* dacă în egalitatea  $A(x_1^n) = x_{n+1}$  oricare element din mulțimea  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$  este unic determinat de celelalte  $n$  elemente rămase. Fie  $\Lambda_n(Q)$  mulțimea tuturor operațiilor  $n$ -are definite pe mulțimea  $Q$ . Operațiile  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  din  $\Lambda_n(Q)$  se numesc *ortogonale* dacă pentru orice  $a_1, a_2, \dots, a_n \in Q$  sistemul de ecuații  $\{A_i(x_1^n) = a_i\}_{i=1, \dots, n}$  are soluție unică. În acest caz, notăm  $\perp \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ .

Pentru orice funcție  $\theta: Q^n \rightarrow Q^n$  există și sunt unice  $n$  operații  $n$ -are  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , definite pe  $Q$ , astfel încât  $\theta((x_1^n)) = (A_1(x_1^n), A_2(x_1^n), \dots, A_n(x_1^n))$  pentru orice  $(x_1^n) \in Q^n$ . Mai mult, funcția  $\theta$  este bijectivă dacă și numai dacă operațiile  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt ortogonale [17, 121]. Operațiile  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , definite pe  $Q$ , unde  $E_i(x_1^n) = x_i$ , pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ , se numesc *selectori  $n$ -ari* pe  $Q$ . Observăm că sistemul de operații  $n$ -are  $\{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ , definit pe  $Q$ ,  $s \geq 1$ , se numește *puternic ortogonal* dacă sistemul  $\{A_1, A_2, \dots, A_s, E_1, E_2, \dots, E_n\}$  este ortogonal [17]. O operație  $n$ -ară  $A$  este operație de quasigrup dacă și numai dacă sistemul  $\{A, E_1, E_2, \dots, E_n\}$  este ortogonal, prin urmare într-un sistem puternic ortogonal toate operațiile care nu sunt selectori, sunt operații de quasigrup. Sistemele ortogonale de quasigrupuri  $n$ -are sunt studiate de T. Evans, T. Yakubov, A. Bektenov și S. Murathudjaev ș.a. [6, 79, 118].

T. Evans a descris în [79] metode de construcție a quasigrupurilor  $n$ -are finite ortogonale, utilizând sisteme de quasigrupuri de aritate mai mică. A construit, din  $l$  quasigrupuri  $l$ -are ortogonale și  $m$  quasigrupuri  $m$ -are ortogonale, toate de ordinul  $q$ , un sistem din  $l \cdot m$

quasigrupuri  $k$ -are de ordinul  $q$ , unde  $k = l + m - 1$ , astfel încât sistemul conține  $m \cdot l^{m-1}$  sisteme din  $k$  quasigrupuri  $k$ -are ortogonale.

Metode de construcție a sistemelor ortogonale de hipercuburi  $n$ -are (quasigrupuri  $n$ -are finite) au fost date în lucrările [30-32, 91]. În particular, J. Arkin și E. G. Strauss au demonstrat în [32] că există sisteme ortogonale din  $k$  hipercuburi  $k$ -are de ordinul  $q, q > 2, q \neq 6$ .

În [78] T. Evans generalizează prima lege Stein, obținând identitatea  $A(x, A(x, y, z), A(z, x, y)) = A(y, z, x)$ , care implică autoortogonalitatea quasigrupului ternar  $(Q, A)$ .

Fie  $(Q, A)$  un quasigrup  $n$ -ar și  $\sigma \in S_{n+1}$ , unde  $S_{n+1}$  este grupul simetric de gradul  $n + 1$ . Operația  $n$ -ară  ${}^\sigma A$  definită de echivalența  ${}^\sigma A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n+1)} \Leftrightarrow A(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}$ , pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in Q$ , se numește  $\sigma$ -parastrof (sau, simplu, parastrof) al quasigrupului  $(Q, A)$ . Un  $\sigma$ -parastrof al quasigrupului  $(Q, A)$  se numește parastrof principal dacă  $\sigma(n + 1) = n + 1$ . Pentru orice  $\sigma, \tau \in S_{n+1}$  are loc egalitatea  ${}^\tau({}^\sigma A) = {}^{\sigma\tau}A$  (considerăm înmulțirea la dreapta a funcțiilor). Vom nota transpoziția  $(i, n + 1)$  cu  $\pi_i$ , deci  ${}^{(i, n+1)}A = \pi_i A$  pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Quasigrupul  $n$ -ar  $(Q, A)$  se numește *parastrofic-ortogonal (autoortogonal)* dacă există  $n$  parastrofi (parastrofi principali)  ${}^{\alpha_1}A, {}^{\alpha_2}A, \dots, {}^{\alpha_n}A$  ortogonali ai săi. Dacă quasigrupul  $n$ -ar  $(Q, A)$  posedă  $n$  parastrofi principali  ${}^{\alpha_1}A, {}^{\alpha_2}A, \dots, {}^{\alpha_n}A$  ortogonali, atunci upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  se numește tip de autoortogonalitate al quasigrupului  $(Q, A)$ .

Studiul quasigrupurilor  $n$ -are parastrofic-ortogonale și autoortogonale,  $n > 2$ , începe la mijlocul anilor 80 ai secolului trecut. Z. Stojakovic și D. Paunic în [121] studiază  $n$ -quasigrupurile autoortogonale ciclice, prezintă construcții ale  $n$ -quasigrupurilor autoortogonale ciclice și estimări ale ordinului lor.

Fie  $(Q, +)$  un grup abelian,  $n \geq 2$  și  $\varphi \in \text{Aut}(Q, +)$ , astfel încât  $\varepsilon + \varphi$  este o bijecție, unde  $(\varepsilon + \varphi)(x) = \varepsilon(x) + \varphi(x) = x + \varphi(x)$ , pentru orice  $x \in Q$ . În [121] se demonstrează că quasigrupul  $(Q, A)$ , unde  $A(x_1^n) = \varphi(x_1) - \varphi^2(x_2) + \varphi^3(x_3) - \dots + (-1)^{n+1}\varphi^n(x_n)$ , este autoortogonal cu tipul de autoortogonalitate  $(\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$ ,  $\alpha = (12 \dots n)$ , dacă  $\varphi^{n+1} = -\varepsilon$  pentru  $n$  par sau  $\varphi^{n+1} = \varepsilon$  pentru  $n$  impar.

P. Sîrbu a studiat sistemele ortogonale de  $n$ -operații și ortogonalitatea parastrofilor operațiilor  $n$ -are. A indicat o clasă de identități ce implică autoortogonalitatea operațiilor  $n$ -are, a arătat că există quasigrupuri finite autoortogonale de orice aritate  $n$  și a dat estimări ale spectrului operațiilor autoortogonale  $n$ -are [121, 22, 24, 19], a obținut criterii de autoortogonalitate a  $n$ -grupurilor și a  $n$ -quasigrupurilor mediale [26].

## 1.2. Paratopiile sistemelor ortogonale de quasigrupuri binare

V. Belousov în lucrarea [13], publicată în 1968, a studiat un șir de transformări (paratopii, parastrofii) ale sistemelor ortogonale de quasigrupuri binare.

Dacă  $\Sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_n, E_1, E_2, \dots, E_n\}$  este un sistem ortogonal, atunci vom nota sistemul  $\{A_1\theta, A_2\theta, \dots, A_n\theta, E_1\theta, E_2\theta, \dots, E_n\theta\}$  cu  $\Sigma\theta$ . O funcție bijectivă  $\theta: Q^n \rightarrow Q^n$  se numește paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă  $\Sigma\theta = \Sigma$ .

Fie  $\Sigma = \{F, E, A, B\}$  un sistem ortogonal, unde  $A$  și  $B$  sunt quasigrupuri binare definite pe o mulțime nevidă  $Q$ ,  $F$  și  $E$  sunt selectori binari pe  $Q$ :  $F(x, y) = x, E(x, y) = y, \forall x, y \in Q$ , și fie  $\theta: Q^2 \rightarrow Q^2$ ,  $\theta = (C, D)$ , o funcție, unde  $C$  și  $D$  sunt două operații binare definite pe  $Q$  și  $\theta(x, y) = (C(x, y), D(x, y))$  pentru orice  $x, y \in Q$ . Dacă  $\theta$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$ , adică dacă  $\Sigma\theta = \Sigma$ , atunci  $\Sigma = \Sigma\theta = \{A\theta, B\theta, F\theta, E\theta\} = \{A\theta, B\theta, C, D\}$ , deci  $C, D \in \Sigma$ . Prin urmare, paratopiile sistemului  $\Sigma$  sunt perechi de operații din  $\Sigma$ . Pentru a obține toate sistemele ortogonale de forma  $\Sigma = \{F, E, A, B\}$  care admit cel puțin o paratopie netrivială, vom determina condițiile necesare și suficiente pentru ca o pereche de operații din  $\Sigma$  să definească o paratopie a acestui sistem. Deoarece selectorii binari  $F$  și  $E$  sunt fixați, rămâne de considerat 6 cazuri posibile. V. Belousov a obținut în [13] o descriere a tuturor sistemelor ortogonale de quasigrupuri, formate din două quasigrupuri binare și cei doi selectori binari, care admit cel puțin o paratopie, paratopiile fiind cercetate în forma:  $X' = X^*(A, E)$  sau  $X' = X(A, B)$ .

În continuare este prezentat rezultatul obținut de V. Belousov, într-o formulare nouă și cu o demonstrare ușor diferită de cea din [13]. Această abordare permite generalizarea acestui rezultat pentru sisteme ortogonale analogice de quasigrupuri de orice aritate.

Fie  $\Sigma = \{F, E, A, B\}$  un sistem ortogonal de operații binare, definite pe o mulțime nevidă  $Q$ , unde  $F$  și  $E$  sunt selectorii binari. Condițiile necesare și suficiente ca perechile de operații ale sistemului să definească o paratopie netrivială sunt date în următoarele 6 cazuri posibile:

1.  $\theta = (E, F)$  este paratopie a lui  $\Sigma$  dacă și numai dacă  $B =^s A$ , unde  $s = (12)$ ;
2.  $\theta = (F, A)$  este paratopie a lui  $\Sigma$  dacă și numai dacă  $B =^r A$ , unde  $r = (23)$ , și  $(Q, A)$  verifică identitatea  $A(x, A(x, A(x, y))) = y$ ;
3.  $\theta = (A, F)$  este paratopie a lui  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din condițiile:
  - a.  $B =^{rl} A$ , unde  $l = (13)$ , și  $(Q, A)$  verifică identitatea  $A(A(y, x), A(x, y)) = x$ ,
  - b.  $A =^{lr} B(F, B)$  și  $(Q, B)$  verifică identitatea  ${}^r B({}^r B({}^r B(x, y), y), y) = x$ ;
4.  $\theta = (E, A)$  este paratopie a lui  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din condițiile:
  - a.  $B =^{lr} A$  și  $(Q, A)$  verifică identitatea  $A(A(x, y), x) = A(y, A(x, y))$ ,
  - b.  $A =^{rl} B(B, E)$  și  $(Q, B)$  verifică identitatea  ${}^r B({}^r B({}^r B(x, y), y), y) = x$ ;

5.  $\theta = (A, E)$  este paratopie a lui  $\Sigma$  dacă și numai dacă  $B =^l A$  și  $(Q, A)$  verifică identitatea  $A(A(A(x, y), y), y) = x$ ;

6.  $\theta = (A, B)$  este paratopie a lui  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din condițiile:

a.  $B =^s A$  și  $(Q, A)$  verifică identitatea  $A(A(y, x), A(x, y)) = x$ ,

b.  $B =^{rl} A(F, A)$ .

Într-adevăr, aceste condiții necesare și suficiente pot fi obținute respectiv în felul următor:

1. Fie  $\theta = (E, F)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $F\theta = E$  și  $E\theta = F$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A\theta, B\theta, F, E\}$ , prin urmare  $\{A\theta, B\theta\} = \{A, B\}$ , adică sunt două cazuri posibile.

1.1. Dacă  $A\theta = B$  și  $B\theta = A$ , atunci  $A\theta = B$  implică  $B =^s A$ . Reciproc, dacă  $B =^s A$ , atunci  $B = A(E, F)$ , deci  $B = A\theta$ , care implică  $B\theta = A(E, F)\theta$ , prin urmare  $B\theta = A(F, E) \Rightarrow B\theta = A$ .

1.2. Dacă  $A\theta = A$  și  $B\theta = B$ , atunci  $A =^s A$  și  $B =^s B$ , deci  $A$  și  $B$  sunt quasigrupuri comutative, contradicție, fiindcă  $A$  și  $B$  sunt ortogonale.

2. Fie  $\theta = (F, A)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $F\theta = F$  și  $E\theta = A$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A\theta, B\theta, F, A\}$ , prin urmare  $\{A\theta, B\theta\} = \{E, B\}$ , adică sunt două cazuri posibile.

2.1. Dacă  $A\theta = B$  și  $B\theta = E$ , atunci  $B\theta = E$  implică

$$A =^r B. \quad (1.1)$$

Folosind (1.1) în  $A\theta = B$ , obținem  $A(F, A) =^r A$ , deci

$$A(F, A(F, A)) = E. \quad (1.2)$$

Reciproc, dacă au loc (1.1) și (1.2), atunci (1.1) implică  $B\theta = E$  și (1.2) implică  $A(F, A) =^r A$ .

Folosind (1.1) în ultima egalitate, avem  $A(F, A) = B$ , adică  $A\theta = B$ .

2.2. Dacă  $A\theta = E$  și  $B\theta = B$ , atunci  $B\theta = B$  implică  $B(F, A) = B(F, E)$ , deci  $A = E$ , contradicție, fiindcă  $A$  este operație de quasigrup.

3. Fie  $\theta = (A, F)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $F\theta = A$  și  $E\theta = F$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A\theta, B\theta, F, A\}$ , prin urmare  $\{A\theta, B\theta\} = \{E, B\}$ , adică sunt posibile două cazuri.

3.1. Dacă  $A\theta = B$  și  $B\theta = E$ , atunci din  $B\theta = E$  rezultă  $A =^l B(E, F) =^{sl} B =^{lr} B$ , deci

$$B =^{rl} A. \quad (1.3)$$

Folosind (1.3) în  $A\theta = B$ , avem  $A(A, F) =^{rl} A \Rightarrow^l A(F, A(A, F)) = E \Rightarrow A(E, A(A, F)) = F$ , care implică  $A(y, A(A(x, y), x)) = x$ . Substituind  $x \mapsto y$  și  $y \mapsto x$  în ultima egalitate, obținem

$$A(x, A(A(y, x), y)) = x. \quad (1.4)$$

Reciproc, dacă au loc (1.3) și (1.4), atunci (1.3) implică  $A =^{lr} B =^{sl} B =^l B(E, F)$ , deci  $B(A, F) = E$ , adică  $B\theta = E$ . Din (1.4) rezultă  $A(E(y, x), A(A(y, x), F(y, x))) = F(y, x)$ , adică  $A(E, A(A, F)) = F$ , care implică  $^l A(F, A(A, F)) = E$ , deci  $A(A, F) =^{rl} A$ . Folosind (1.3) în ultima egalitate, obținem  $A(A, F) = B$ , adică  $A\theta = B$ .

3.2. Dacă  $A\theta = E$  și  $B\theta = B$ , atunci  $B\theta = B$  implică  $A =^l B(B, F) =^{sl} B(F, B)$ , so

$$A =^{lr} B(F, B). \quad (1.5)$$

Folosind (1.5) în  $A\theta = E$ , obținem  $^{lr}B(^{lr}B(F, B), B) = E \Rightarrow B(E, ^{lr}B(F, B)) = B$ , care implică  $B(y, ^{lr}B(x, B(x, y))) = B(x, y)$ . Notând  $B(x, y) = z$  în ultima egalitate, avem  $B(^rB(x, z), ^{lr}B(x, z)) = z \Rightarrow B(^rB, ^{lr}B) = E \Rightarrow ^rB(^rB, E) = ^{lr}B$ , deci

$$^rB(^rB(^rB, E), E) = F \quad (1.6)$$

Reciproc, dacă (1.5) și (1.6) au loc, atunci (1.5) implică  $A =^l B(B, F)$ , deci  $B(A, F) = B$ , adică  $B\theta = B$ . Din (1.6) rezultă  $^rB(^rB, E) = ^{lr}B \Rightarrow B(^rB, ^{lr}B) = E$ , care implică  $B(^rB(x, y), ^{lr}B(x, y)) = y$ . Notând  $^rB(x, y) = z$ , ultima egalitate ia forma  $B(z, ^{lr}B(x, B(x, z))) = B(x, z) \Rightarrow B(E, ^{lr}B(F, B)) = B \Rightarrow ^sB(^{lr}B(F, B), E) = B$ , deci  $^{lr}B(^{lr}B(F, B), B) = E$ . Folosind (1.5) în ultima egalitate, obținem  $^{lr}B(A, B) = E$ , care implică  $A =^r B(E, B)$ , prin urmare  $A\theta = ^rB(F, B) = E$ .

4. Fie  $\theta = (E, A)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $F\theta = E$  și  $E\theta = A$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A\theta, B\theta, E, A\}$ , prin urmare  $\{A\theta, B\theta\} = \{F, B\}$ , adică sunt posibile două cazuri.

4.1. Dacă  $A\theta = B$  și  $B\theta = F$ , atunci din  $B\theta = F$  rezultă  $A =^r B(E, F) = ^{rl}B$ , deci

$$B = ^{lr}A. \quad (1.7)$$

Folosind (1.7) în  $A\theta = B$ , obținem  $A(E, A) = ^{lr}A \Rightarrow ^rA(A(E, A), E) = F$ , prin urmare

$$A(A(E, A), F) = E. \quad (1.8)$$

Reciproc, dacă au loc (1.7) și (1.8), atunci din (1.7) rezultă  $A = ^{rl}B = ^rB(E, F)$ , deci  $B(E, A) = F$ , adică  $B\theta = F$ . Egalitatea (1.8) implică  $A(E, A) = ^lA(E, F) = ^{lr}A$ . Folosind (1.7) în ultima egalitate, obținem  $A\theta = B$ .

4.2. Dacă  $A\theta = F$  și  $B\theta = B$ , atunci  $B\theta = B$  implică  $A =^r B(E, B)$ , deci

$$A = ^{rl}B(B, E). \quad (1.9)$$

Folosind (1.9) în  $A\theta = F$ , obținem  $^{rl}B(B, A) = F$ . Folosind încă o dată (1.9) în ultima egalitate, obținem  $^{rl}B(B, ^{rl}B(B, E)) = F$ , deci  $^rB(^rB(E, B), B) = F$ , care implică

$$^rB(^rB(y, B(x, y)), B(x, y)) = x.$$

Notând  $B(x, y) = z$ , ultima egalitate ia forma  $^rB(^rB(y, z), z) = ^lB(y, z)$ , adică  $^rB(^rB, E) = ^lB$ , prin urmare

$$^rB(^rB(^rB, E), E) = F. \quad (1.10)$$

Reciproc, dacă (1.9) și (1.10) au loc, atunci din (1.9) rezultă  $A =^r B(E, B)$ , deci  $B = B(E, B)$ , adică  $B\theta = B$ . Egalitatea (1.10) implică  $^rB(^rB, E) = ^lB \Rightarrow ^rB(^rB(x, y), y) = ^lB(x, y)$ . Notând  $^rB(x, y) = z$ , ultima egalitate ia forma  $^rB(z, B(x, z)) = ^lB(x, B(x, z))$ , care implică

$$^{rl}B(B(x, z), ^{rl}B(B(x, z), E(x, z))) = x,$$

prin urmare  $^{rl}B(B, ^{rl}B(B, E)) = F$ . Folosind (1.9) în ultima egalitate, obținem  $^{rl}B(B, A) =$

$F \Rightarrow A = {}^l B(B, F)$ , deci  $A\theta = {}^l B(B, E) = F$ .

5. Fie  $\theta = (A, E)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $F\theta = A$  și  $E\theta = E$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A\theta, B\theta, A, E\}$ , deci  $\{A\theta, B\theta\} = \{F, B\}$ , adică sunt posibile două cazuri.

5.1. Dacă  $A\theta = B$  și  $B\theta = F$ , atunci  $B\theta = F$  implică  $A = {}^l B$ , prin urmare

$$B = {}^l A. \quad (1.11)$$

Folosind (1.11) în  $A\theta = B$ , obținem  $A(A, E) = {}^l A$ , deci

$$A(A(A, E), E) = F \quad (1.12)$$

Reciproc, dacă (1.11) și (1.12) au loc, atunci (1.11) implică  $A = {}^l B$ , prin urmare  $B\theta = F$ . Din (1.12) rezultă  $A(A\theta, E) = F$ , deci  $A\theta = {}^l A$ . Folosind (1.11) în ultima egalitate, avem  $A\theta = B$ .

5.2. Dacă  $A\theta = F$  și  $B\theta = B$ , atunci  $B\theta = B$  implică  $B(A, E) = B(F, E)$ , deci  $A = F$ , contradicție, deoarece  $A$  este operație de quasigrup.

6. Fie  $\theta = (A, B)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $F\theta = A$  și  $E\theta = B$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A\theta, B\theta, A, B\}$ , prin urmare  $\{A\theta, B\theta\} = \{F, E\}$ , adică sunt posibile două cazuri.

6.1. Dacă  $A\theta = F$  și  $B\theta = E$ , atunci din  $A\theta = F$  rezultă  $B = {}^r A(A, F)$ , deci

$$B = {}^{rl} A(F, A). \quad (1.11)$$

Reciproc, dacă (1.13) are loc, atunci ea implică  $B = {}^r A(A, F)$ , prin urmare  $A\theta = F$ . De asemenea, din (1.13) rezultă  $B\theta = {}^{rl} A(A, F) = {}^r A(F, A)$ , deci  $B\theta = E$ .

6.2. Dacă  $A\theta = E$  și  $B\theta = F$ , atunci  $A\theta = E$  implică  $B = {}^r A(A, E)$ . Folosind ultima egalitate în  $B\theta = F$ , obținem  ${}^r A(E, B) = F$ , deci

$$B = {}^s A. \quad (1.12)$$

Folosind (1.14) în  $A\theta = E$ , obținem

$$A(A, {}^s A) = E. \quad (1.13)$$

Reciproc, dacă (1.14) și (1.15) au loc, atunci folosind (1.14) în (1.15), avem

$$A(A, B) = E, \quad (1.14)$$

adică  $A\theta = E$ . Din (1.14) rezultă  $A(A(x, y), B(x, y)) = E(x, y)$ , prin urmare

$${}^s A({}^s B(y, x), {}^s A(y, x)) = F(y, x).$$

Folosind (1.14) în ultima egalitate, obținem  $B(A, B) = F$ , adică  $B\theta = F$ .

Lucrarea prezentă este dedicată soluționării definitive, în caz ternar, a problemei descrierii sistemelor ortogonale din  $n$  quasigrupuri  $n$ -are și selectorii  $n$ -ari, care admit cel puțin o paratopie netrivială. Se demonstrează că există exact 153 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială, iar existența paratopiilor implică 67 de identități în quasigrupuri ternare (Capitolul 3). Unele dintre cele 67 de identități implică ortogonalitatea parastrofilor, în particular, a parastrofilor principali ai quasigrupului respectiv. Studiului quasigrupurilor binare ce verifică identități minimale (din clasificarea lui V. Belousov), îi este dedicat Capitolul 2.



### 1.3. Concluzii la Capitolul 1

Capitolul 1 conține o trecere în revistă a celor mai importante rezultate ce țin de domeniul de cercetare al tezei, de scopul și obiectivele lucrării date.

Soluționarea problemei caracterizării sistemelor ortogonale din 2 quasigrupuri binare și selectorii binari [13], implicarea de către paratopii a unor identități minimale și clasificarea identităților minimale în caz binar [11, 34], conduce la apariția următoarei **probleme**: descrierea tuturor sistemelor ortogonale din  $n$  quasigrupuri  $n$ -are și selectorii  $n$ -ari și a paratopiilor lor, pentru orice  $n \geq 2$ .

**Scopul lucrării** date constă în descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială. Această descriere presupune realizarea următoarelor obiective:

- descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială;
- determinarea tuturor sistemelor de tipul dat;
- caracterizarea paratopiilor sistemelor ortogonale din 3 quasigrupuri ternare și selectorii ternari;
- studiul identităților implicate de paratopii și a quasigrupurilor parastrofic-ortogonale (autoortogonale) de diferită aritate, ce verifică astfel de identități.

*În baza analizei situației actuale în teoria quasigrupurilor binare și  $n$ -are formulăm următoarele concluzii:*

1. Abordarea nouă pentru soluționarea problemei descrierii paratopiilor sistemelor ortogonale din două quasigrupuri binare și selectorii binari, diferită de cea a lui V. Belousov, prezentată în Capitolul 1, permite soluționarea definitivă a problemei descrierii sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari ce admit cel puțin o paratopie netrivială (v. Capitolul 3).

2. În caz binar toate identitățile, ce rezultă din existența paratopiilor, implică ortogonalitatea unor perechi de parastrofi ai quasigrupului respectiv [13]. Mai mult, aceste identități se regăsesc printre cele 7 identități minimale (de lungime 5, cu 2 variabile) din clasificarea lui Belousov. În [11, 34] este formulată problema cercetării quasigrupurilor binare, ce verifică identități minimale și a grupurilor izotope unor astfel de quasigrupuri. Quasigrupurile cu primele două identități din clasificarea lui Belousov sunt considerate în Capitolul 2 al lucrării date.

3. Unele identități ce rezultă din existența paratopiilor în caz  $n$ -ar, de asemenea implică ortogonalitatea parastrofilor. Printre ele se regăsește și identitatea considerată de Evans [78], ce implică autoortogonalitatea quasigrupului respectiv (Capitolul 3, Observațiile 3.1 și 3.3).

## 2. QUASIGRUPURI PARASTROFIC-ORTOGONALE ȘI AUTOORTOGONALE

Un quasigrup binar  $(Q, A)$  se numește  $\pi$ -quasigrup de tipul  $[\alpha, \beta, \gamma]$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in S_3$ , dacă verifică identitatea:

$${}^{\alpha}A\left(x, {}^{\beta}A\left(x, {}^{\gamma}A(x, y)\right)\right) = y$$

( ${}^{\sigma}A$  este  $\sigma$ -parastroful lui  $A$ ). Identitățile de tipul dat au fost numite de V. Belousov identități minimale (identități de lungimea 5 cu 2 variabile). V. Belousov (1983) și, independent, F. Bennett (1989) au obținut o clasificare a tuturor identităților minimale în quasigrupuri care constă din șapte clase. Notând operația  $A$  cu " $\cdot$ ", reprezentanții acestor clase sunt următorii (tipurile identităților minimale sunt date în corespundere cu lucrarea [35]):  $x(x \cdot xy) = y$  (tipul  $T_1 = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon]$ );  $x(y \cdot yx) = y$  (tipul  $T_2 = [\varepsilon, \varepsilon, l]$ );  $x \cdot xy = yx$  (prima lege Stein, tipul  $T_4 = [\varepsilon, \varepsilon, lr]$ );  $xy \cdot x = y \cdot xy$  (a doua lege Stein, tipul  $T_6 = [\varepsilon, l, lr]$ );  $xy \cdot y = x \cdot xy$  (prima lege Shroder, tipul  $T_8 = [\varepsilon, rl, lr]$ );  $xy \cdot yx = y$  (a treia lege Stein, tipul  $T_{10} = [\varepsilon, lr, l]$ );  $yx \cdot xy = y$  (a doua lege Shroder, tipul  $T_{11} = [\varepsilon, lr, rl]$ ), unde  $l = (13), r = (23)$ . Quasigrupurile care verifică identitățile din această clasificare au fost studiate de mai mulți autori, de exemplu [16, 23, 34, 47, 49, 119], ș.a. O problemă deschisă este descrierea grupurilor izotope  $\pi$ -quasigrupurilor de diferite tipuri [34]. În cazul  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_4, T_6$  și  $T_8$  problema este parțial soluționată în [16, 34].

În lucrarea [16] se demonstrează că grupurile care sunt izotope quasigrupurilor Stein (quasigrupurile care verifică prima lege Stein) sunt metabeliene. În [34], V. Belousov demonstrează că grupurile care sunt izotope  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_6$  sunt metabeliene, iar grupurile care sunt izotope  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_8$  sunt abeliene de exponentă doi.

Problema formulată de Belousov în [34] referitoare la studiul quasigrupurilor cu identități minimale și a grupurilor izotope lor este abordată în Capitolul 2 al tezei, unde sunt cercetate  $\pi$ -quasigrupurile de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ .

### 2.1. $\pi$ -Quasigrupuri de tipul $T_1$

Un quasigrup  $(Q, \cdot)$  se numește  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  dacă verifică identitatea:

$$x(x \cdot xy) = y. \quad (2.1)$$

**Propoziția 2.1.** *Un quasigrup  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  dacă și numai dacă parastroful său  $(Q, \backslash)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ .*

*Demonstrație.* Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ , atunci identitatea (2.1) este echivalentă cu identitatea  $x \setminus (x \setminus (x \setminus y)) = y$ .  $\square$

Observăm că identitatea (2.1) în quasigrupul  $(Q, \cdot)$  este echivalentă cu condiția  $L_x^3 = \varepsilon, \forall x \in Q$ , unde  $L_x: Q \rightarrow Q, L_x(a) = x \cdot a, \forall a \in Q$ , este translația la stânga în  $(Q, \cdot)$  [10]. Notăm cu  $M(Q, \cdot)$  (respectiv,  $LM(Q, \cdot), RM(Q, \cdot)$ ) grupul multiplicativ (respectiv, grupul multiplicativ la stânga, grupul multiplicativ la dreapta) al quasigrupului  $(Q, \cdot)$ .

O substituție  $\alpha \in M(Q, \cdot)$  se numește substituție internă a quasigrupului  $(Q, \cdot)$  în raport cu un element  $h \in Q$  dacă  $\alpha(h) = h$ . Grupul substituțiilor interne ale quasigrupului  $(Q, \cdot)$  în raport cu  $h$  se notează cu  $I_h$  [10, 109].

În Propozițiile 2.2-2.6 sunt date unele estimări ale ordinului  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_1$ .

**Propoziția 2.2.** *Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup finit de tipul  $T_1$  fără unitate la stânga, atunci  $|I_h| \equiv 0 \pmod{3}$ , pentru orice  $h \in Q$ .*

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ ,  $h \in Q$  și fie  $f_h$  unitatea locală la stânga a elementului  $h$ :  $f_h \cdot h = h$ . Atunci  $L_{f_h}(h) = h$ , deci  $L_{f_h} \in I_h$ . Dacă  $(Q, \cdot)$  nu are unitate la stânga, atunci  $L_{f_h} \neq \varepsilon$  și, utilizând egalitatea  $L_{f_h}^3 = \varepsilon$ , obținem  $|I_h| \equiv 0 \pmod{3}$ .  $\square$

**Propoziția 2.3.** *Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  și  $h \in Q$ . Dacă  $|I_h| \equiv 1$  sau  $2 \pmod{3}$ , atunci  $(Q, \cdot)$  are unitate la stânga.*

*Demonstrație.* După cum am observat mai sus,  $L_{f_h} \in I_h$  și  $L_{f_h}^3 = \varepsilon$ , unde  $f_h$  este unitatea locală la stânga a elementului  $h$ . Dacă  $|I_h| \equiv 1$  sau  $2 \pmod{3}$ , atunci ordinul oricărui element din  $I_h$  nu este divizibil cu trei, deci ordinul substituției  $L_{f_h}$  are forma  $2k + 1$  sau  $2k + 2$ . În ambele cazuri obținem  $L_{f_h} = \varepsilon$ , adică  $f_h$  este unitate la stânga în  $(Q, \cdot)$ .  $\square$

**Propoziția 2.4.** *Dacă un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  are unitate la stânga și este izotop unui grup abelian, atunci grupul său multiplicativ la stânga  $LM(Q, \cdot)$  este abelian.*

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ , cu unitatea la stânga  $f$ . Dacă  $(Q, \cdot)$  este izotop unui grup abelian, atunci, conform [14],  $e$ -quasigrupul corespunzător  $(Q, \cdot, \setminus, /)$  verifică identitatea  $x \setminus (y(u \setminus v)) = u \setminus (y(x \setminus v))$ . Pe de altă parte, egalitatea  $x \setminus y = x \cdot xy$  rezultă din (2.1), deci identitatea precedentă este echivalentă cu  $x \cdot x(y(u \cdot uv)) = u \cdot u(y(x \cdot xv))$ , care, pentru  $x = f$ , implică  $y(u \cdot uv) = u(u \cdot yv)$ , adică  $L_y L_u^2 = L_u^2 L_y$ . Deoarece  $L_u^2 = L_u^{-1}$ ,  $\forall u \in Q$ , obținem  $L_y L_u = L_u L_y, \forall y, u \in Q$ .  $\square$

Fie  $(Q, \cdot)$  un quasigrup. Conform [10, 109], nucleul stâng (respectiv, mediu) al quasigrupului  $(Q, \cdot)$  este mulțimea  $N_l = \{a \in Q \mid a \cdot xy = ax \cdot y, \forall x, y \in Q\}$  (respectiv,  $N_m =$

$\{a \in Q \mid x \cdot ay = xa \cdot y, \forall x, y \in Q\}$ ). O substituție  $\lambda: Q \rightarrow Q$  se numește substituție regulară la stânga a quasigrupului  $(Q, \cdot)$  dacă  $\lambda(x \cdot y) = \lambda(x) \cdot y, \forall x, y \in Q$ .

**Propoziția 2.5.** Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ . Sunt adevărate următoarele afirmații:

1. dacă  $(Q, \cdot)$  are unitate la stânga, atunci  $\lambda^3 = \varepsilon$ , pentru orice substituție regulară la stânga  $\lambda$  a lui  $(Q, \cdot)$ ;
2. dacă  $(Q, \cdot)$  este finit și nucleul său stâng  $N_l$  conține cel puțin două elemente, atunci  $|Q| \equiv 0 \pmod{3}$ ;
3. dacă  $(Q, \cdot)$  este o  $\pi$ -bucă finită de tipul  $T_1$  și nucleul său mediu are cel puțin două elemente, atunci  $|Q| \equiv 0 \pmod{3}$ .

*Demonstrație.* 1. Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  cu unitatea la stânga  $f$  și fie  $\lambda$  o substituție regulară la stânga a lui  $(Q, \cdot)$ . Luând  $x \mapsto \lambda(x)$  în (2.1), obținem:  $y = \lambda(x) \cdot (\lambda(x) \cdot (\lambda(x) \cdot y)) = \lambda(x \cdot \lambda(x \cdot \lambda(x \cdot y)))$ ,  $\forall x, y \in Q$ . Acum, pentru  $x = f$ , din ultima egalitate rezultă:  $\lambda^3(y) = y, \forall y \in Q$ , adică  $\lambda^3 = \varepsilon$ .

2. Fie  $|N_l| \geq 2$  și  $a \in N_l$ . Atunci  $a \cdot xy = ax \cdot y, \forall x, y \in Q$ . Folosind identitatea (2.1), avem:  $a \cdot (a \cdot ay) = y \Rightarrow a \cdot (a^2 \cdot y) = y \Rightarrow (a \cdot a^2) \cdot y = y$ , deci  $a \cdot a^2 = f$ , unde  $f$  este unitatea la stânga a lui  $(Q, \cdot)$ . Deoarece  $(N_l, \cdot)$  este grup, obținem  $a^3 = e, \forall a \in N_l$ . Din  $|N_l| \equiv 0 \pmod{3}$  și din faptul că  $|N_l|$  divide  $|Q|$  rezultă că  $|Q| \equiv 0 \pmod{3}$ .

3. Fie  $(Q, \cdot)$  o  $\pi$ -bucă finită de tipul  $T_1$  cu unitatea  $f$ . Dacă nucleul mediu  $N_m$  conține cel puțin două elemente, atunci există  $a \in N_m \setminus \{f\}$  care verifică egalitatea  $x \cdot ay = xa \cdot y, \forall x, y \in Q$ , prin urmare  $y = a(a \cdot ay) = a^2 \cdot ay = a^3 \cdot y, \forall y \in Q \Rightarrow a^3 = f, \forall a \in N_m$ , însă  $N_m$  este grup, deci obținem  $|N_m| \equiv 0 \pmod{3}$  și  $|Q| \equiv 0 \pmod{3}$ .  $\square$

**Corolarul 2.1.** Dacă grupul substituțiilor regulate la stânga al unui  $\pi$ -quasigrup  $(Q, \cdot)$  de tipul  $T_1$  cu unitate la stânga are cel puțin două elemente, atunci  $|Q| \equiv 0 \pmod{3}$ .

*Demonstrație.* În acest caz grupul substituțiilor regulate la stânga va conține cel puțin un element de ordinul trei, deci ordinul grupului este un multiplu al lui trei și atunci  $|Q| \equiv 0 \pmod{3}$ .  $\square$

O bucă  $(Q, \cdot)$  se numește *LPA-bucă* dacă, pentru  $\forall m, n \in \mathbb{Z}$  și  $\forall x, y \in Q$ , este adevărată următoarea egalitate  $x^m \cdot x^n y = x^{m+n} y$ . Se știe că *LPA-buclele* sunt puternic asociative, adică fiecare element al unei *LPA-bucle* generează o subbucă asociativă [88]. De exemplu, bucele Bol la stânga sunt *LPA-bucle*.

**Propoziția 2.6.** O *LPA-bucă*  $(Q, \cdot)$  este  $\pi$ -bucă de tipul  $T_1$  dacă și numai dacă  $x^3 = e, \forall x \in Q$ , unde  $e$  este unitatea buclei  $(Q, \cdot)$ .

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  o LPA-bucă cu unitatea  $e$ . Dacă  $(Q, \cdot)$  este  $\pi$ -bucă de tipul  $T_1$ , atunci  $y = x \cdot (x \cdot xy) = x^3 \cdot y, \forall x, y \in Q$ , deci  $x^3 = e, \forall x \in Q$ . Reciproc, dacă  $x^3 = e, \forall x \in Q$ , atunci  $x \cdot (x \cdot xy) = x^3 \cdot y = e \cdot y = y, \forall x, y \in Q$ , adică  $(Q, \cdot)$  este  $\pi$ -bucă de tipul  $T_1$ .  $\square$

**Corolarul 2.2.** O buclă Bol la stânga  $(Q, \cdot)$  este  $\pi$ -bucă de tipul  $T_1$  dacă și numai dacă  $x^3 = e, \forall x \in Q$ , unde  $e$  este unitatea buclei  $(Q, \cdot)$ .

**Corolarul 2.3.** Un grup  $(Q, \cdot)$  este  $\pi$ -grup de tipul  $T_1$  dacă și numai dacă  $x^3 = e, \forall x \in Q$ , unde  $e$  este unitatea grupului  $(Q, \cdot)$ .

În Propozițiile 2.7 și 2.8 sunt date condițiile necesare și suficiente de invarianță a identității de tipul  $T_1$  la izotopia quasigrupurilor, buclelor.

**Propoziția 2.7.** Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  și fie  $(Q, \circ)$  un izotop cu izotopia  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Atunci  $(Q, \circ)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  dacă și numai dacă, pentru orice  $x, y \in Q$ , are loc următoarea egalitate:

$$\gamma\beta^{-1}(x \cdot xy) = x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot \beta\gamma^{-1}y). \quad (2.2)$$

*Demonstrație.* Izotopul  $(Q, \circ)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  dacă și numai dacă verifică identitatea

$$x \circ (x \circ (x \circ y)) = y. \quad (2.3)$$

Folosind izotopia  $x \circ y = \gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y)$ , identitatea (2.3) ia forma  $\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y)))) = y$ . Luând  $x \rightarrow \alpha^{-1}x$  și  $y \rightarrow \beta^{-1}y$  în ultima identitate, obținem egalitatea  $\gamma^{-1}(x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot y))) = \beta^{-1}y$ , care este echivalentă cu  $x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot y)) = \gamma\beta^{-1}y$ . Deoarece  $(Q, \cdot)$  verifică (2.1), ultima egalitate implică  $\beta\gamma^{-1}(x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot y)) = x \cdot (x \cdot \gamma\beta^{-1}y)$ , deci

$$x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot y) = \gamma\beta^{-1}(x \cdot (x \cdot \gamma\beta^{-1}y)), \quad (2.4)$$

pentru  $\forall x, y \in Q$ . Notând  $x \cdot y = z$  și utilizând (2.1), avem  $y = x \cdot xz$ , deci (2.4) ia forma:

$$x \cdot \beta\gamma^{-1}(z) = \gamma\beta^{-1}(x \cdot (x \cdot \gamma\beta^{-1}(x \cdot xz))),$$

care implică  $\beta\gamma^{-1}(x \cdot \beta\gamma^{-1}(z)) = x \cdot (x \cdot \gamma\beta^{-1}(x \cdot xz))$ , prin urmare  $x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot \beta\gamma^{-1}(z)) = \gamma\beta^{-1}(x \cdot xz)$ , pentru  $\forall x, z \in Q$ .

Reciproc, dacă  $\pi$ -quasigrupul  $(Q, \cdot)$  de tipul  $T_1$  verifică (2.2), atunci, luând  $y \rightarrow \gamma\beta^{-1}y$ , avem  $x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot y) = \gamma\beta^{-1}(x \cdot (x \cdot \gamma\beta^{-1}y))$ , care, pentru  $y = \beta\gamma^{-1}(x \cdot y)$ , implică

$$x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot \beta\gamma^{-1}(x \cdot y)) = \gamma\beta^{-1}(x \cdot (x \cdot (x \cdot y))) = \gamma\beta^{-1}y.$$

Utilizând izotopia  $x \cdot y = \gamma(\alpha^{-1}x \circ \beta^{-1}y)$ , din ultima egalitate obținem:

$$\gamma(\alpha^{-1}x \circ (\alpha^{-1}x \circ (\alpha^{-1}x \circ \beta^{-1}y))) = \gamma\beta^{-1}y,$$

sau, substituind  $x \rightarrow \alpha x, y \rightarrow \beta y$  și folosind faptul că  $\gamma$  este bijectivă, obținem:  $x \circ (x \circ y) = y$ , adică  $(Q, \circ)$  este  $\pi$ -quasigrupul de tipul  $T_1$ .  $\square$

**Corolarul 2.4.** Fie  $(Q, \cdot)$  o  $\pi$ -bucă de tipul  $T_1$ . Dacă izotopul  $(Q, \circ)$ , unde  $(\circ) = (\cdot)^{(\alpha, \beta, \varepsilon)}$ , este  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ , atunci  $\beta^3 = \varepsilon$ .

*Demonstrație.* Dacă  $(Q, \circ)$  este  $\pi$ -bucă de tipul  $T_1$ , atunci  $(Q, \cdot)$  verifică egalitatea (2.2). Luând  $x = e$  în (2.2), unde  $e$  este unitatea buclei  $(Q, \cdot)$ , avem  $\beta(y) = \beta^{-2}(y), \forall y \in Q$ , deci  $\beta^3 = \varepsilon$ .  $\square$

**Corolarul 2.5.** Identitatea (2.1) este invariantă în raport izotopia quasigrupurilor cu a doua și a treia componentă egală.

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  un quasigrup care verifică identitatea (2.1) și fie izotopul  $(\circ) = (\cdot)^{(\alpha, \beta, \beta)}$ . Utilizând egalitatea  $x \cdot y = \beta(\alpha^{-1}x \circ \beta^{-1}y)$ , din (2.1) rezultă  $\beta(\alpha^{-1}x \circ (\alpha^{-1}x \circ (\alpha^{-1}x \circ \beta^{-1}y))) = y, \forall x, y \in Q$ , care, pentru  $x \rightarrow \alpha x$  și  $y \rightarrow \beta y$ , implică  $x \circ (x \circ (x \circ y)) = y, \forall x, y \in Q$ , deci  $(Q, \circ)$  este  $\pi$ -quasigrupul de tipul  $T_1$ .  $\square$

**Propoziția 2.8.** Identitatea (2.1) este universală într-o buclă  $(Q, \cdot)$  dacă și numai dacă  $(Q, \cdot)$  verifică identitatea:

$$x \cdot b(b \cdot x(b(b \cdot xy))) = b \cdot y. \quad (2.5)$$

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  o buclă în care identitatea (2.1) este universală. Atunci  $(Q, \cdot)$  și orice izotop al său verifică (2.1). Fie  $a, b \in Q$  și  $(\circ) = (\cdot)^{(R_a^{-1}, L_b^{-1}, \varepsilon)}$ . Conform Propoziției 2.7, bucla  $(Q, \cdot)$  verifică (2.2):  $L_b(x \cdot xy) = x \cdot L_b^{-1}(x \cdot L_b^{-1}y), \forall x, y \in Q$ . Luând  $y \rightarrow x \cdot y$  și, folosind (2.1), din ultima identitate rezultă

$$L_b(y) = x \cdot L_b^{-1}(x \cdot L_b^{-1}(x \cdot y)), \quad (2.6)$$

$\forall x, y \in Q$ . Deoarece bucla  $(Q, \cdot)$  verifică egalitatea  $L_b^3 = \varepsilon$ , pentru  $\forall b \in Q$ , (2.6) este echivalentă cu  $L_b(y) = x \cdot L_b^2(x \cdot L_b^2(x \cdot y)), \forall x, y \in Q$ . Reciproc, dacă o buclă  $(Q, \cdot)$  verifică identitatea (2.5), atunci, luând  $b = e$ , unde  $e$  este unitatea buclei  $(Q, \cdot)$ , obținem identitatea (2.1), adică  $(Q, \cdot)$  este o  $\pi$ -bucă de tipul  $T_1$ . Deoarece orice izotop a unei buclei este izomorf cu un  $LP$ -izotop, putem considera doar  $LP$ -izotopii buclei  $(Q, \cdot)$ . Fie  $a, b \in Q$  și  $(\circ) = (\cdot)^{(R_a^{-1}, L_b^{-1}, \varepsilon)}$ . Utilizând (2.5) și egalitatea  $L_b^3 = \varepsilon$ , avem  $x \cdot L_b^{-1}(x \cdot L_b^{-1}(x \cdot y)) = b \cdot y$ , deci  $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y)) = b \cdot L_b^{-1}y$ , prin urmare  $x \circ (x \circ (x \circ y)) = y$ , adică  $(Q, \circ)$  este  $\pi$ -bucă de tipul  $T_1$ .  $\square$

**Exemplul 2.1.** Perechea  $(\mathbb{Z}_3^3, \circ)$ , unde  $\mathbb{Z}_3^3$  este câmpul claselor de resturi modulo 3 și operația  $(\circ)$  este definită în modul următor:  $(i, j, k) \circ (p, q, r) = (i + p, j + q, k + r + ijp), \forall (i, j, k), (p, q, r) \in \mathbb{Z}_3^3$ , este o buclă neasociativă în care identitatea (2.1) este universală. Observăm că nucleul stâng al buclei  $(\mathbb{Z}_3^3, \circ)$  este  $N_l = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{2})\}$ .

**Exemplul 2.2.** Bucla  $(Q, *)$ , unde  $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  și operația  $(*)$  este dată de tabla de mai jos, este o  $\pi$ -bucă de tipul  $T_1$ , în care identitatea (2.1) nu este universală.

| $*$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0   | 2 | 0 | 1 | 4 | 6 | 8 | 3 | 5 | 7 |
| 1   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2   | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 | 0 | 7 | 8 | 6 |
| 3   | 4 | 3 | 5 | 6 | 8 | 7 | 1 | 2 | 0 |
| 4   | 8 | 4 | 6 | 0 | 7 | 2 | 5 | 1 | 3 |
| 5   | 7 | 5 | 8 | 1 | 2 | 3 | 0 | 6 | 4 |
| 6   | 5 | 6 | 7 | 2 | 0 | 4 | 8 | 3 | 1 |
| 7   | 1 | 7 | 3 | 8 | 5 | 6 | 4 | 0 | 2 |
| 8   | 6 | 8 | 0 | 7 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 |

$T$ -Quasigrupurile sunt definite și parțial studiate în [87]. Un quasigrup  $(Q, \cdot)$  se numește  $T$ -quasigrup dacă există un grup abelian  $(Q, +)$ , automorfismele lui  $\varphi, \psi \in \text{Aut}(Q, +)$  și un element  $g \in Q$  astfel încât pentru orice  $x, y \in Q$  este adevărată următoarea egalitate:

$$x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y) + g.$$

Upla  $((Q, +), \varphi, \psi, g)$  se numește  $T$ -formă și grupul  $(Q, +)$  se numește  $T$ -grupul  $T$ -quasigrupului  $(Q, \cdot)$ .

În Propoziția 2.9 sunt date condițiile necesare și suficiente ca un  $T$ -quasigrup să fie  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ .

**Propoziția 2.9.** Un  $T$ -quasigrup  $(Q, \cdot)$  cu  $T$ -forma  $((Q, +), \varphi, \psi, g)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  dacă și numai dacă  $\psi^2 + \psi + \varepsilon = \omega$ , unde  $\omega: Q \rightarrow Q, \omega(x) = 0, \forall x \in Q$ ,  $0$  este elementul neutru al grupului  $(Q, +)$ .

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  un  $T$ -quasigrup cu  $T$ -forma  $T = ((Q, +), \varphi, \psi, g)$ . Atunci

$$x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y) + g, \quad (2.7)$$

$\forall x, y \in Q$ . Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ , atunci el verifică identitatea (2.1).

Utilizând (2.7), identitatea (2.1) ia forma:

$$\varphi(x) + \psi\varphi(x) + \psi^2\varphi(x) + \psi^3(y) + \psi^2(g) + \psi(g) + g = y, \quad (2.8)$$

$\forall x, y \in Q$ . Luând  $x = y = 0$  în (2.8), unde  $0$  este elementul neutru al grupului  $(Q, +)$ , obținem:

$$\psi^2(g) + \psi(g) + g = 0. \quad (2.9)$$

De asemenea, luând  $x = 0$  în (2.8), avem  $\psi^3(y) = y, \forall y \in Q$ , adică

$$\psi^3 = \varepsilon, \quad (2.10)$$

unde  $\varepsilon: Q \rightarrow Q, \varepsilon(x) = x, \forall x \in Q$ . Utilizând (2.9) și (2.10), egalitatea (2.8) implică  $\varphi(x) + \psi\varphi(x) + \psi^2\varphi(x) = 0$ , deci  $(\varepsilon + \varphi + \psi^2)\varphi(x) = 0, \forall x \in Q$ . Deoarece  $\varphi$  este bijecție, ultima egalitate implică

$$\psi^2 + \psi + \varepsilon = \omega. \quad (2.11)$$

Reciproc, dacă are loc egalitatea (2.11), atunci  $\psi^3 - \varepsilon = (\psi - \varepsilon)(\psi^2 + \psi + \varepsilon) = \omega$ , deci are loc (2.10). Utilizând (2.10) și (2.10), avem:

$$y = \omega(x) + \psi^3(y) + \omega(g) = (\psi^2 + \psi + \varepsilon)\varphi(x) + \psi^3(y) + \psi^2(g) + \psi(g) + g = x \cdot (x \cdot xy), \forall x, y \in Q,$$

deci  $(Q, \cdot)$  este  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ . □

Următorul exemplu arată că clasa de  $\pi$ - $T$ -quasigrupuri de tipul  $T_1$  nu este vidă.

**Exemplul 2.3.** Quasigrupul  $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ , unde  $x \cdot y = \bar{5}x + \bar{2}y + \bar{3}, \forall x, y \in Q$ , este  $\pi$ - $T$ -quasigrup de tipul  $T_1$  cu  $T$ -forma  $((\mathbb{Z}_7, \cdot), \varphi, \psi, \bar{3})$ , unde  $\varphi(x) = \bar{5}x, \psi(x) = \bar{2}x, \forall x \in \mathbb{Z}_7$ .

**Propoziția 2.10.** Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ - $T$ -quasigrup finit de tipul  $T_1$  și are unitate la stânga, atunci  $|Q| \equiv 0 \pmod{3}$ .

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ - $T$ -quasigrup de tipul  $T_1$  cu  $T$ -forma  $T = ((Q, +), \varphi, \psi, g)$  și unitatea la stânga  $f$ . Atunci,

$$x = f \cdot x = \varphi(f) + \psi(x) + g, \quad (2.12)$$

deci, luând  $x = 0$ , unde  $0$  este elementul neutru al  $T$ -grupului  $(Q, +)$ , obținem  $\varphi(f) = -g$ . Din ultima egalitate și din (2.12) obținem  $\psi = \varepsilon$ , unde  $\varepsilon$  este substituția identică pe  $Q$ . Conform Propoziției 2.9, dacă  $(Q, \cdot)$  este  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ , atunci  $\psi^2 + \psi + \varepsilon = \omega$ , prin urmare  $3\varepsilon = \omega$ , adică  $x + x + x = 0, \forall x \in Q$ , care implică  $|Q| \equiv 0 \pmod{3}$ . □

**Propoziția 2.11.** Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup finit de tipul  $T_1$ , atunci  $|Q| \equiv 0$  sau  $1 \pmod{3}$ .

*Demonstrație.* Fie  $(Q, A)$  un  $\pi$ -quasigrup finit de tipul  $T_1$  și fie  $|Q| = q$ . Quasigrupul  $(Q, A)$  verifică identitatea

$$A(x, A(x, A(x, y))) = y. \quad (2.13)$$

Notând selectorii binari, definiți pe mulțimea  $Q$ , cu  $F$  și  $E$ , adică  $F(x, y) = x, E(x, y) = y, \forall x, y \in Q$ , egalitatea (2.13) implică:  $E = A(F, A(F, A)) = A(F(F, A), A(F, A)) = A(F, A)^2 \Rightarrow E(F, A) = A(F, A)^3 \Rightarrow A(F, E) = A = A(F, A)^3 \Rightarrow (F, E) = (F, A)^3$ , deci

$$(F, A)^3 = \varepsilon_{Q^2}, \quad (2.14)$$

unde  $\varepsilon_{Q^2}$  este substituția identică definită pe  $Q^2$  și

$$(F, A): Q^2 \rightarrow Q^2, (F, A)(x, y) = (F(x, y), A(x, y)) = (x, A(x, y)).$$

Notând  $(F, A) = \alpha$  și folosind (2.14), obținem



$$\alpha^3 = \varepsilon_{Q^2}. \quad (2.15)$$

Deoarece  $(Q, A)$  este un quasigrup,  $F \perp A$ , deci  $\alpha = (F, A)$  este o bijecție. Observăm că pentru  $(i, j) \in Q^2$  avem  $\alpha(i, j) = (i, j) \Leftrightarrow (F, A)(i, j) = (i, j) \Leftrightarrow (i, A(i, j)) = (i, j) \Leftrightarrow A(i, j) = j$  ceea ce este echivalent cu faptul că  $i$  este unitatea locală la stânga a elementului  $j$ . Notând unitatea locală la stânga a elementului  $j$  cu  $f_j$ , obținem mulțimea  $U$  a tuturor elementelor din  $Q^2$  care sunt invariante în raport cu  $\alpha$ :  $U = \{(f_j, j) \mid j = 1, 2, \dots, q\}$ . Deci, exact  $q$  elemente din  $Q^2$  sunt invariante în raport cu  $\alpha = (F, A)$ , adică restul  $q^2 - q$  elemente nu sunt invariante. Acum, folosind (2.15), obținem că  $\alpha$  este un produs de cicluri de lungime 3 pe mulțimea din  $q^2 - q = q(q - 1)$  elemente, adică  $q \equiv 0$  sau  $1 \pmod{3}$ .  $\square$

## 2.2. $\pi$ -Quasigrupuri de tipul $T_2$

Un quasigrup  $(Q, \cdot)$  se numește:  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$  dacă verifică identitatea:

$$x \cdot (y \cdot yx) = y. \quad (2.16)$$

**Propoziția 2.12.** *Un  $\pi$ -quasigrup  $(Q, \cdot)$  de tipul  $T_2$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  dacă și numai dacă  $(Q, \cdot)$  verifică identitatea*

$$yx \cdot x = x. \quad (2.17)$$

*Demonstrație.* Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_2$  și  $T_1$  atunci, luând  $x \rightarrow yx$  în (2.16), obținem  $y = yx \cdot (y \cdot (y \cdot yx)) = yx \cdot x$ ,  $\forall x, y \in Q$ . Reciproc, dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$  și verifică identitatea  $yx \cdot x = y$  atunci, substituind  $x \rightarrow yx$  în (2.16), avem:  $yx \cdot (y \cdot (y \cdot yx)) = y = yx \cdot x \Rightarrow y \cdot (y \cdot yx) = x$ ,  $\forall x, y \in Q$ , adică  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ .  $\square$

**Corolarul 2.6.** Un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_2$  și  $T_1$  este un  $RIP$ -quasigrup.

**Exemplul 2.4.** Quasigrupul  $(Q, \cdot)$ , unde  $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ , dat de translațiile la stânga  $L_1 = (234)$ ,  $L_2 = (124)$ ,  $L_3 = (132)$ ,  $L_4 = (143)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ .

**Observația 2.1.**  $\pi$ -Buclele de tipul  $T_2$  sunt triviale. Într-adevăr, dacă  $(Q, \cdot)$  este o  $\pi$ -bucă de tipul  $T_2$  cu unitatea  $e$ , atunci luând  $x = e$  în (2.16), obținem  $y \cdot y = y$ , deci  $y = e$ , adică  $|Q| = 1$ .

**Observația 2.2.**  $\pi$ -Quasigrupurile de tipurile  $T_1$  și  $T_2$  sunt anticomutative. Într-adevăr, dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_2$  și  $T_1$  și  $x \cdot y = y \cdot x$ , atunci  $x \cdot (y \cdot yx) = y$  și  $x \cdot (x \cdot yx) = y$ , deci  $x \cdot (x \cdot yx) = x \cdot (y \cdot yx)$ , care implică  $x \cdot yx = y \cdot yx$ , prin urmare  $x = y$ .

În Propozițiile 2.13-2.15 sunt date condițiile necesare și suficiente ca un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$  (și de tipul  $T_1$ ) să fie izotop unui grup (grup abelian).

**Propoziția 2.13.** Un  $\pi$ -quasigrup  $(Q, \cdot)$  de tipul  $T_2$  este izotop unui grup abelian dacă și numai dacă verifică identitatea:

$$[y \cdot (v \cdot vu)] \cdot [(y \cdot (v \cdot vu)) \cdot x] = [y \cdot (v \cdot vx)] \cdot [(y \cdot (v \cdot vx)) \cdot u]. \quad (2.18)$$

*Demonstrație.* În [10] este demonstrat că un quasigrup  $(Q, \cdot)$  este izotop unui grup abelian dacă și numai dacă verifică identitatea

$$x \setminus (y \cdot (u \setminus v)) = u \setminus (y \cdot (x \setminus v)), \quad (2.19)$$

unde “ $\setminus$ ” este împărțirea la dreapta în  $(Q, \cdot)$ . Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$ , atunci din (2.16) rezultă:

$$x \setminus y = y \cdot yx, \quad (2.20)$$

$\forall x, y \in Q$ . Folosind (2.20) în (2.19), obținem identitatea (2.18).  $\square$

**Corolarul 2.7.** Dacă un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  verifică (2.18), atunci el este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$ .

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  izotop unui grup abelian. Luând  $u = v = y$  în (2.18) și folosind (2.1), obținem  $y \cdot yx = x \cdot xy$  care implică  $x = y \cdot (y \cdot yx) = y \cdot (x \cdot xy)$ ,  $\forall x, y \in Q$ , adică  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$ .  $\square$

**Corolarul 2.8.** Mulțimea tuturor  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_2$  izotope grupurilor abeliene este o subvarietate în varietatea tuturor  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_2$ .

**Exemplul 2.5.** Quasigrupul  $(Q, \cdot)$ , unde  $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ , dat de translațiile la stânga  $L_1 = (123), L_2 = (243), L_3 = (142), L_4 = (134)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_1$  și  $T_2$  și verifică (2.22), deci  $(Q, \cdot)$  este izotop unui grup abelian.

**Observația 2.3.**  $\pi$ -Quasigrupurile de tipul  $T_1$ , izotope grupurilor abeliene, nu sunt întotdeauna  $\pi$ -quasigrupuri de tipul  $T_2$  după cum arată următorul exemplu.

**Exemplul 2.6.** Quasigrupul  $(Q, \cdot)$ , unde  $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ , dat de translațiile la stânga:  $L_1 = (123), L_2 = (243), L_3 = (134), L_4 = (142)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  și verifică identitatea  $x \setminus (y \cdot (u \setminus v)) = u \setminus (y \cdot (x \setminus v))$ , deci  $(Q, \cdot)$  este izotop unui grup abelian. Este ușor de verificat că  $(Q, \cdot)$  nu este  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$ .

**Propoziția 2.14.** Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ .  $(Q, \cdot)$  este izotop unui grup dacă și numai dacă el verifică identitatea

$$x(y \cdot y(zu \cdot v)) = (x(y \cdot yz) \cdot u)v. \quad (2.21)$$

*Demonstrație.* Este arătat în [20] că un quasigrup  $(Q, \cdot)$  este izotop unui grup dacă și numai dacă el verifică identitatea

$$x(y \setminus ((z/u)v)) = ((x(y \setminus z))/u)v, \quad (2.22)$$

unde “\” și “/” sunt împărțirea la dreapta și împărțirea la stânga în  $(Q, \cdot)$ . Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ , atunci din (2.17) rezultă  $x/y = x \cdot y$ ,  $\forall x, y \in Q$ . Folosind ultima egalitate în (2.21), obținem

$$x(y \setminus ((z \cdot u)v)) = ((x(y \setminus z)) \cdot u)v. \quad (2.23)$$

$(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ , deci  $x \setminus y = x \cdot xy$ . Folosind ultima egalitate în (2.22), obținem (2.21).  $\square$

**Corolarul 2.9.** Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ , izotop unui grup, atunci el verifică identitatea

$$(yz \cdot v)u = (zu \cdot v)(y \cdot y). \quad (2.24)$$

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ , izotop unui grup. Luând  $x = zu \cdot v$  și folosind (2.16) în (2.21), obținem  $y = [(zu \cdot v)(y \cdot yz)]u \cdot v$ . Înmulțind cu  $v$  din dreapta, apoi cu  $u$  din dreapta ultima egalitate și folosind (2.17), obținem  $yv \cdot u = (zu \cdot v)(y \cdot yz)$ . Înlocuind  $y$  cu  $yz$  în ultima egalitate și folosind (2.17), obținem (2.24).  $\square$

**Exemplul 2.7.** Quasigrupul  $(Q, \cdot)$ , unde  $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , dat de translațiile la stânga:

$$\begin{aligned} L_1 &= (123)(567)(89), L_2 = (489)(576), L_3 = (132)(498), L_4 = (154)(279)(368), \\ L_5 &= (147)(296)(385), L_6 = (195)(287)(346), L_7 = (186)(245)(697), \\ L_8 &= (178)(264)(359), L_9 = (169)(258)(374) \end{aligned}$$

este un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_1$  și  $T_2$  și verifică (2.21), deci  $(Q, \cdot)$  este izotop unui grup.  $(Q, \cdot)$  nu verifică (2.18), adică nu este izotop unui grup abelian.

**Propoziția 2.15.** Dacă un  $\pi$ -quasigrup  $(Q, \cdot)$  de tipurile  $T_1$  și  $T_2$  este izotop unui grup abelian  $(Q, +)$ , atunci  $(\cdot) = (+)^{(I, L_0^{(\cdot)}, \varepsilon)}$ , unde  $0$  este elemental neutru al grupului  $(Q, +)$  și  $I$  este inversarea în  $(Q, +)$  ( $I: Q \rightarrow Q$ ,  $I(x) = -x$ ,  $\forall x \in Q$ ).

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ , izotop unui grup abelian  $(Q, +)$ , deci  $(+) = (\cdot)^{(R_a^{(\cdot)-1}, L_b^{(\cdot)-1}, \varepsilon)}$  sau  $x + y = R_a^{(\cdot)-1}(x) \cdot L_b^{(\cdot)-1}(y)$ . Luând  $x = 0$  în ultima egalitate, avem  $y = R_a^{(\cdot)-1}(0) \cdot L_b^{(\cdot)-1}(y)$ . Notând  $R_a^{(\cdot)-1}(0)$  cu  $c$ , ultima egalitate ia forma  $y = c \cdot L_b^{(\cdot)-1}(y) = L_c^{(\cdot)} L_b^{(\cdot)-1}(y)$ , deci  $L_c^{(\cdot)} L_b^{(\cdot)-1} = \varepsilon$  sau

$$b = c = R_a^{(\cdot)-1}(0). \quad (2.25)$$

Izotopia  $(+) = (\cdot)^{(R_a^{(\cdot)-1}, L_b^{(\cdot)-1}, \varepsilon)}$  implică

$$x \cdot y = R_a^{(\cdot)}(x) + L_b^{(\cdot)}(y) = xa + by. \quad (2.26)$$

Deoarece  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ , din Propoziția 2.12 rezultă că este adevărată egalitatea  $yx \cdot x = x$ . Din (2.26) și (2.17), obținem  $R_a^{(\cdot)}(R_a^{(\cdot)}(y) + L_b^{(\cdot)}(x)) + L_b^{(\cdot)}(x) =$

$y$  sau  $R_a^{(\cdot)}(R_a^{(\cdot)}(y) + x) + x = y$ , deci  $R_a^{(\cdot)}(R_a^{(\cdot)}(y) + x) = y - x$ . Luând  $x = y$  în ultima egalitate, avem  $R_a^{(\cdot)}(R_a^{(\cdot)}(x) + x) = 0 \Rightarrow R_a^{(\cdot)}(x) + x = R_a^{(\cdot)-1}(0)$ . Folosind (2.25), obținem

$$R_a^{(\cdot)}(x) = b - x. \quad (2.27)$$

Folosind (2.27) în (2.26), obținem:

$$x \cdot y = b - x + by. \quad (2.28)$$

Luând  $x = 0$  în (2.28), obținem

$$by = -b + 0 \cdot y. \quad (2.29)$$

Din (2.28) și (2.29), avem  $b - x - b + 0 \cdot y = x \cdot y$  sau  $x \cdot y = -x + 0 \cdot y$ . Din ultima egalitate obținem  $(\cdot) = (+)^{(I, L_0^{(\cdot)}, \varepsilon)}$ .  $\square$

**Propoziția 2.16.** Orice  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$  este izotop unui quasigrup idempotent.

*Demonstrație.* Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$  și  $a \in Q$ . Atunci izotopul  $(Q, \circ)$ , dat de izotopia  $T = (\varepsilon, R_a^{(\cdot)}, L_a^{(\cdot)-1})$ , unde  $R_a^{(\cdot)}(x) = x \cdot a$  și  $L_a^{(\cdot)}(x) = a \cdot x, \forall x \in Q$ , este idempotent:  $x \circ x = L_a^{(\cdot)}(x \cdot R_a^{(\cdot)}(x)) = a \cdot (x \cdot xa) = x, \forall x \in Q$ .  $\square$

**Exemplul 2.8.** Quasigrupul  $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ , unde  $x \cdot y = 3x + 3y \pmod{5}, \forall x, y \in \mathbb{Z}_5$ , este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$  idempotent.

**Observația 2.4.**  $\pi$ -Quasigrupurile de tipul  $T_2$  sunt admisibile, deoarece  $x \cdot (y \cdot yx) = y \Rightarrow x \setminus y = y \cdot yx \Rightarrow L_x^{(\cdot)}(y) = y \cdot R_x^{(\cdot)}(y), \forall x, y \in Q$ , unde  $L_x^{(\cdot)}$  este translația la stânga cu  $x$  în  $(Q, \setminus)$  deci  $L_x^{(\cdot)}$  este o substituție completă în  $(Q, \cdot)$ . Se știe [11] că quasigrupurile admisibile sunt izotope quasigrupurilor idempotente.

În Propoziția 2.17 sunt date condițiile necesare și suficiente ca un  $T$ -quasigrup să fie  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$ .

**Propoziția 2.17.** Un  $T$ -quasigrup  $(Q, \cdot)$  cu  $T$ -forma  $((Q, +), \varphi, \psi, g)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$  dacă și numai dacă au loc următoarele condiții: 1)  $\psi^2(g) + \psi(g) + g = 0$ ; 2)  $\varphi = -\psi^3$ ; 3)  $\psi^5 + \psi^4 = -\varepsilon$ , unde  $0$  este elementul neutru al grupului  $(Q, +)$  și  $\varepsilon: Q \rightarrow Q, \varepsilon(x) = x, \forall x \in Q$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $((Q, +), \varphi, \psi, g)$  este o  $T$ -formă al lui  $(Q, \cdot)$ , avem  $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y) + g, \forall x, y \in Q$ , deci identitatea (2.19) implică  $\varphi(x) + \psi(\varphi(y) + \psi(\varphi(y) + \psi(x) + g) + g) + g = y$ , deci

$$\varphi(x) + \psi\varphi(y) + \psi^2\varphi(y) + \psi^3(x) + \psi^2(g) + \psi(g) + g = y, \quad (2.30)$$

$\forall x, y \in Q$ . Luând  $x = y = 0$  în (2.30), avem  $\psi^2(g) + \psi(g) + g = 0$ , deci (2.30) este echivalentă cu

$$\varphi(x) + \psi\varphi(y) + \psi^2\varphi(y) + \psi^3(x) = y, \quad (2.31)$$

$\forall x, y \in Q$ . Acum, luând  $y = 0$  și, apoi  $x = 0$ , în (2.31) obținem  $\varphi + \psi^3 = \omega$  și, respectiv,  $\psi\varphi + \psi^2\varphi = \varepsilon$  sau  $\psi^2 + \psi = \varphi^{-1}$ , unde  $\omega: Q \rightarrow Q, \omega(x) = 0, \forall x \in Q$ .

Reciproc, dacă condițiile 1), 2) și 3) au loc, atunci  $y = \varepsilon(y) + \omega(x) = \psi\varphi(y) + \psi^2\varphi(y) + \varphi(x) + \psi^3(x) + \psi^2(g) + \psi(g) + g = x \cdot (y \cdot yx)$ , deci  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$ .  $\square$

**Corolarul 2.10.**  $\pi$ - $T$ -Quasigrupurile de tipul  $T_2$  sunt quasigrupuri mediale.

*Demonstrație.* Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ - $T$ -quasigrup de tipul  $T_2$ , atunci  $\varphi = -\psi^3$ , deci  $\varphi\psi = -\psi^4 = \psi(-\psi^3) = \psi\varphi$ , adică  $(Q, \cdot)$  este un quasigrup medial.  $\square$

### 2.3. Holomorful $\pi$ -quasigrupurilor

Dacă  $(Q, \cdot)$  este un quasigrup, atunci grupoidul  $(Hol(Q, \cdot), \circ)$ , unde  $Hol(Q, \cdot) = Aut(Q, \cdot) \times Q$  și  $(\alpha, x) \circ (\beta, y) = (\alpha\beta, \beta(x) \cdot y)$  pentru  $\forall (\alpha, x), (\beta, y) \in Hol(Q, \cdot)$  se numește holomorful quasigrupului  $(Q, \cdot)$  [109]. Din definiție rezultă că holomorful unui quasigrup este quasigrup. Mai mult, funcția  $Q \rightarrow Hol(Q, \cdot), x \mapsto (\varepsilon, x)$  este o scufundare a quasigrupului  $(Q, \cdot)$  în holomorful său  $(Hol(Q, \cdot), \circ)$ . Astfel, notând  $Q_1 = \{(\varepsilon, x) | x \in Q\}$ , obținem  $(Q, \cdot) \cong (Q_1, \circ)$ . Dacă quasigrupul  $(Q, \cdot)$  posedă unitate la stânga sau la dreapta, atunci funcția  $Aut(Q, \cdot) \mapsto Hol(Q, \cdot), \alpha \mapsto (\alpha, e)$  este, de asemenea, o scufundare. În particular, dacă  $(Q, \cdot)$  este un grup cu  $Aut(Q, \cdot)$  comutativ, atunci  $(Hol(Q, \cdot), \circ)$  este grup,  $(Q_1, \circ) \triangleright Hol(Q, \cdot)$ , unde  $Q_1 = \{(\varepsilon, x) | x \in Q\}$  și  $Hol(Q, \cdot)/(Q_1, \circ) \cong Aut(Q, \cdot)$ . Acest izomorfism poate fi obținut considerând, morfismul surjectiv  $\xi: Hol(Q, \cdot) \rightarrow Aut(Q, \cdot), \xi(\varphi, x) = \varphi$ , pentru care  $Ker\xi = (Q_1, \circ)$ .

**Propoziția 2.18.** Holomorful unui  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  este  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  dacă și numai dacă sunt verificate condițiile:

$$1) \alpha^3 = \varepsilon, \forall \alpha \in Aut(Q, \cdot);$$

$$2) x \cdot (\alpha^2(x) \cdot (\alpha(x) \cdot y)) = y, \forall \alpha \in Aut(Q, \cdot), \forall x, y \in Q.$$

*Demonstrație.* Dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  și  $(\alpha, x), (\beta, y) \in Hol(Q, \cdot)$ , atunci:

$$\begin{aligned} (\alpha, x) \circ ((\alpha, x) \circ ((\alpha, x) \circ (\beta, y))) &= (\alpha, x) \circ ((\alpha, x) \circ (\alpha\beta, \beta(x) \cdot y)) = (\alpha, x) \circ (\alpha^2\beta, \alpha\beta(x) \cdot \\ &(\beta(x) \cdot y)) = (\alpha^3\beta, \alpha^2\beta(x) \cdot (\alpha\beta(x) \cdot (\beta(x) \cdot y))) = (\beta, y), \text{ deci:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha^3 = \varepsilon \\ \alpha^2\beta(x) \cdot (\alpha\beta(x) \cdot (\beta(x) \cdot y)) = y \end{cases}$$

Substituind  $x \rightarrow \beta^{-1}\alpha(x)$  în a doua egalitate a sistemului și folosind  $\alpha^3 = \varepsilon$ , a doua relație implică  $x \cdot (\alpha^2(x) \cdot (\alpha(x) \cdot y)) = y$  pentru  $\forall \alpha \in Aut(Q, \cdot), \forall x, y \in Q$ .

Reciproc, dacă  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  și  $\forall \alpha \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ ,  $\forall x, y \in Q$  sunt verificate condițiile  $\alpha^3 = \varepsilon$  și  $x \cdot (\alpha^2(x) \cdot (\alpha(x) \cdot y)) = y$ , atunci din a doua egalitate, făcând substituția  $x \rightarrow \alpha^2\beta(x)$  și folosind  $\alpha^3 = \varepsilon$ , obținem  $\alpha^2\beta(x) \cdot (\alpha\beta(x) \cdot (\beta(x) \cdot y)) = y$ , prin urmare  $(\alpha, x) \circ ((\alpha, x) \circ ((\alpha, x) \circ (\beta, y))) = (\beta, y)$ , astfel  $\text{Hol}(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ .  $\square$

**Observația 2.5.** Holomorful unui  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  cu grupul de automorfisme trivial este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ . Această proprietate se utilizează pentru a obține  $\pi$ -quasigrupuri de tipul  $T_1$  cu holomorful din aceeași clasă.

**Exemplul 2.9.** Quasigrupul  $(Q, \cdot)$ , unde  $Q = \{1, 2, 3\}$ , definit de translațiile la stânga  $L_1 = (132)$ ,  $L_2 = (123)$ ,  $L_3 = \varepsilon$ , este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  cu  $\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ , deci holomorful său  $\text{Hol}(Q, \cdot)$  este, de asemenea, un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ .

**Observația 2.6.** 1. Dacă  $L_{(\beta, b)}^{(\circ)}$  și  $R_{(\beta, b)}^{(\circ)}$  sunt translațiile la stânga și, respectiv, la dreapta cu  $(\beta, b)$  în holomorful  $(\text{Hol}(Q, \cdot), \circ)$ , atunci pentru orice  $(\alpha, a) \in \text{Hol}(Q, \cdot)$  avem:

$$L_{(\beta, b)}^{(\circ)-1}(\alpha, a) = (\beta^{-1}\alpha, \beta^{-1}\alpha(b) \setminus a) = L_{(\beta^{-1}, b_1)}^{(\circ)}(\alpha, a),$$

unde  $\alpha(b_1) \cdot a = \beta^{-1}\alpha(b) \setminus a$  și, respectiv,

$$R_{(\beta, b)}^{(\circ)-1}(\alpha, a) = (\alpha\beta^{-1}, \beta^{-1}(a/b)) = R_{(\beta^{-1}, b_2)}^{(\circ)}(\alpha, a),$$

unde  $\alpha(b_2) = \beta^{-1}(a/b)$ .

2. Fie  $(Q, \cdot)$   $\pi$ -quasigrup finit de tipul  $T_1$ . Dacă  $(\text{Hol}(Q, \cdot), \circ)$  este  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ , atunci există un număr natural  $k$  astfel încât  $|\text{Aut}(Q, \cdot)| = 3^k$  și  $|\text{Hol}(Q, \cdot)| \equiv 0 \pmod{3}$ .

**Propoziția 2.19.** Fie  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  și fie  $Q_1 = \{(\varepsilon, x) | x \in Q\}$ . Atunci  $(Q, \cdot) \cong (Q_1, \circ)$  și sunt adevărate următoarele relații:

$$1) LM(Q_1, \circ) \triangleleft LM(\text{Hol}(Q, \cdot), \circ);$$

$$2) RM(Q_1, \circ) \triangleleft RM(\text{Hol}(Q, \cdot), \circ).$$

*Demonstrație.* 1)  $(Q, \cdot) \cong (Q_1, \circ)$  implică  $LM(Q, \cdot) \cong LM(Q_1, \circ)$ . Mai mult,  $LM(Q_1, \circ)$  este subgrup în  $LM(\text{Hol}(Q, \cdot), \circ)$ . Acum, fie  $L_{(\varepsilon, x)}^{(\circ)} \in LM(Q_1, \circ)$  și  $L_{(\beta, b)}^{(\circ)} \in LM(\text{Hol}(Q, \cdot), \circ)$ , atunci:

$$\begin{aligned} L_{(\beta, b)}^{(\circ)} L_{(\varepsilon, x)}^{(\circ)} L_{(\beta, b)}^{(\circ)-1}(\alpha, a) &= L_{(\beta, b)}^{(\circ)} L_{(\varepsilon, x)}^{(\circ)}(\beta^{-1}\alpha, \beta^{-1}\alpha(b) \cdot a) = \\ &= L_{(\beta, b)}^{(\circ)}(\beta^{-1}\alpha, \beta^{-1}\alpha(x) \cdot (\beta^{-1}\alpha(b) \setminus a)) = \\ &= (\alpha, \beta^{-1}\alpha(b) \cdot (\beta^{-1}\alpha(x) \cdot (\beta^{-1}\alpha(b) \setminus a))) = L_{(\varepsilon, c)}^{(\circ)}(\alpha, a) \end{aligned}$$

pentru  $\forall (\alpha, a) \in \text{Hol}(Q, \cdot)$ , unde  $\alpha(c) \cdot a = \beta^{-1}\alpha(b) \cdot (\beta^{-1}\alpha(x) \cdot (\beta^{-1}\alpha(b) \setminus a))$ . Deci,

$$L_{(\beta, b)}^{(\circ)} L_{(\varepsilon, x)}^{(\circ)} L_{(\beta, b)}^{(\circ)-1} \in LM(Q_1, \circ). \quad (2.32)$$

Analog,  $L_{(\beta,b)}^{(\circ)-1} L_{(\varepsilon,x)}^{(\circ)} L_{(\beta,b)}^{(\circ)}(\alpha, a) = L_{(\beta,b)}^{(\circ)-1} L_{(\varepsilon,x)}^{(\circ)}(\beta\alpha, \alpha(b) \cdot a) = L_{(\beta,b)}^{(\circ)-1}(\beta\alpha, \beta\alpha(x) \cdot (\alpha(b) \cdot a)) = (\alpha, \alpha(b) \setminus (\beta\alpha(x) \cdot (\alpha(b) \cdot a))) = L_{(\varepsilon,g)}^{(\circ)}(\alpha, a)$  pentru  $\forall(\alpha, a) \in Hol(Q, \cdot)$ , unde  $\alpha(g) \cdot a = \alpha(b) \setminus (\beta\alpha(x) \cdot (\alpha(b) \cdot a))$ . Deci,

$$L_{(\beta,b)}^{(\circ)-1} L_{(\varepsilon,x)}^{(\circ)} L_{(\beta,b)}^{(\circ)} \in LM(Q_1, \circ). \quad (2.33)$$

Relațiile (2.32) și (2.33) implică  $LM(Q_1, \circ) \triangleleft LM(Hol(Q, \cdot), \circ)$ . Demonstrația relației a doua este similară.  $\square$

### Observația 2.7. Funcția

$$\xi: LM(Hol(Q, \cdot)) \rightarrow Aut(Q, \cdot), \xi \left( L_{(\alpha_1, x_1)}^{\delta_1} L_{(\alpha_2, x_2)}^{\delta_2} \dots L_{(\alpha_n, x_n)}^{\delta_n} \right) = \alpha_1^{\delta_1} \alpha_2^{\delta_2} \dots \alpha_n^{\delta_n},$$

unde  $\delta_i = 1$  sau  $-1$ , pentru orice  $i = 1, 2, \dots, n$ , este un morfism surjectiv cu  $Ker \xi = LM(Q_1, \circ)$ , deci  $LM(Hol(Q, \cdot))/LM(Q_1, \circ) \cong Aut(Q, \cdot)$ .

**Propoziția 2.20.** Dacă  $(Q, \cdot)$  un  $\pi$ -quasigrup de unul din tipurile  $T_2, T_4, T_6, T_{10}, T_8, T_{11}$ , atunci holomorful său  $(H, \circ)$  este un  $\pi$ -quasigrup de același tip ca și  $(Q, \cdot)$  dacă și numai dacă  $Aut(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ , unde  $\varepsilon$  este substituția identică pe  $Q$ .

*Demonstrație.* 1. Holomorful  $(H, \circ)$  al quasigrupului  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$  dacă și numai dacă verifică identitatea:

$$(\alpha, x) \circ [(\beta, y) \circ ((\beta, y) \circ (\alpha, x))] = (\beta, y). \quad (2.34)$$

Folosind definiția operației ” $\circ$ ” în (2.34), avem:

$$(\alpha\beta^2\alpha, \beta^2\alpha(x) \cdot [\beta\alpha(y) \cdot (\alpha(y) \cdot x)]) = (\beta, y),$$

care implică, în particular, egalitatea  $\alpha\beta^2\alpha = \beta, \forall \alpha, \beta \in Aut(Q, \cdot)$ . Luând în ultima egalitate  $\alpha = \varepsilon$ , obținem  $\beta = \varepsilon, \forall \beta \in Aut(Q, \cdot)$ , deci  $Aut(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ . Reciproc, dacă  $Aut(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ , atunci  $(H, \circ) \cong (Q, \cdot)$ , deci  $(H, \circ)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_2$ .

2. Holomorful  $(H, \circ)$  al quasigrupului  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_4$  dacă și numai dacă verifică identitatea:

$$(\alpha, x) \circ [(\alpha, x) \circ (\beta, y)] = (\beta, y) \circ (\alpha, x). \quad (2.35)$$

Folosind definiția operației ” $\circ$ ” în (2.35), avem:  $(\alpha^2\beta, \alpha\beta(x) \cdot (\beta(x) \cdot y)) = (\beta\alpha, \alpha(y) \cdot x)$ , care implică, în particular, egalitatea  $\alpha^2\beta = \beta\alpha, \forall \alpha, \beta \in Aut(Q, \cdot)$ . Luând în ultima egalitate  $\beta = \alpha$ , obținem  $\alpha^3 = \alpha^2, \forall \alpha \in Aut(Q, \cdot), \Rightarrow \alpha = \varepsilon, \forall \alpha \in Aut(Q, \cdot)$ , deci  $Aut(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ . Reciproc, dacă  $Aut(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ , atunci  $(H, \circ) \cong (Q, \cdot)$ , deci  $(H, \circ)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_4$ .

3. Holomorful  $(H, \circ)$  al quasigrupului  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_6$  dacă și numai dacă verifică identitatea:

$$[(\alpha, x) \circ (\beta, y)] \circ (\alpha, x) = (\beta, y) \circ [(\alpha, x) \circ (\beta, y)]. \quad (2.36)$$

Folosind definiția operației ” $\circ$ ” în (2.36), avem:  $(\alpha\beta\alpha, \alpha(\beta(x) \cdot y) \cdot x) = (\beta\alpha\beta, \alpha\beta(y) \cdot (\beta(x) \cdot y))$ , care implică, în particular, egalitatea  $\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta, \forall \alpha, \beta \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ . Luând în ultima egalitate  $\beta = \varepsilon$ , obținem  $\alpha^2 = \alpha, \forall \alpha \in \text{Aut}(Q, \cdot) \Rightarrow \alpha = \varepsilon, \forall \alpha \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ , deci  $\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ .

Reciproc, dacă  $\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ , atunci  $(H, \circ) \cong (Q, \cdot)$ , deci  $(H, \circ)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_6$ .

4. Holomorful  $(H, \circ)$  al quasigrupului  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_{10}$  dacă și numai dacă verifică identitatea:

$$[(\alpha, x) \circ (\beta, y)] \circ [(\beta, y) \circ (\alpha, x)] = (\beta, y). \quad (2.37)$$

Folosind definiția operației ” $\circ$ ” în (2.37), avem:  $(\alpha\beta^2\alpha, \beta\alpha(\beta(x) \cdot y) \cdot (\alpha(y) \cdot x)) = (\beta, y)$ , care implică, în particular, egalitatea  $\alpha\beta^2\alpha = \beta, \forall \alpha, \beta \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ . Luând în ultima egalitate  $\alpha = \varepsilon$ , obținem  $\beta^2 = \beta, \forall \beta \in \text{Aut}(Q, \cdot) \Rightarrow \beta = \varepsilon, \forall \beta \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ , deci  $\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ . Reciproc, dacă  $\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ , atunci  $(H, \circ) \cong (Q, \cdot)$ , deci  $(H, \circ)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_{10}$ .

5. Holomorful  $(H, \circ)$  al quasigrupului  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_8$  dacă și numai dacă verifică identitatea:

$$[(\alpha, x) \circ (\beta, y)] \circ (\beta, y) = (\alpha, x) \circ [(\alpha, x) \circ (\beta, y)]. \quad (2.38)$$

Folosind definiția operației ” $\circ$ ” în (2.38), avem:  $(\alpha\beta^2, \beta(\beta(x) \cdot y) \cdot y) = (\alpha^2\beta, \alpha\beta(x) \cdot (\beta(x) \cdot y))$ , care implică, în particular, egalitatea  $\alpha\beta^2 = \alpha^2\beta, \forall \alpha, \beta \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ . Din ultima egalitate rezultă  $\beta = \alpha, \forall \alpha, \beta \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ , deci  $\beta = \alpha = \varepsilon, \forall \alpha \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ , deci  $\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ . Reciproc, dacă  $\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ , atunci  $(H, \circ) \cong (Q, \cdot)$ , deci  $(H, \circ)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_8$ .

6. Holomorful  $(H, \circ)$  al quasigrupului  $(Q, \cdot)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_{11}$  dacă și numai dacă verifică identitatea:

$$[(\beta, y) \circ (\alpha, x)] \circ [(\alpha, x) \circ (\beta, y)] = (\beta, y). \quad (2.39)$$

Folosind definiția operației ” $\circ$ ” în (2.39), avem:  $(\beta\alpha^2\beta, \alpha\beta(\alpha(y) \cdot x) \cdot (\beta(x) \cdot y)) = (\beta, y)$ , care implică, în particular, egalitatea  $\beta\alpha^2\beta = \beta, \forall \alpha, \beta \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ . Luând în ultima egalitate  $\alpha = \varepsilon$ , obținem  $\beta^2 = \beta, \forall \beta \in \text{Aut}(Q, \cdot) \Rightarrow \beta = \varepsilon, \forall \beta \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ , deci  $\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ . Reciproc, dacă  $\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varepsilon\}$ , atunci  $(H, \circ) \cong (Q, \cdot)$ , deci  $(H, \circ)$  este un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_{11}$ .  $\square$

## 2.4. Quasigrupuri $n$ -are autoortogonale

Quasigrupurile  $n$ -are care posedă sisteme ortogonale din  $n$  parastrofi ( $n$  parastrofi principali) se numesc quasigrupuri parastrofic-ortogonale (respectiv, autoortogonale). Problema descrierii spectrului quasigrupurilor binare finite autoortogonale a fost complet soluționată de R. Brayton, D. Coppersmith și A. Hoffman [60], care au demonstrat că există quasigrupuri binare autoortogonale finite de orice ordin  $q \neq 2, 3, 6$ . În caz  $n$ -ar,  $n \geq 3$ , problema nu este încă integral soluționată, iar ordinului posibil al quasigrupurilor finite parastrofic ortogonale și



autoortogonale este condiționată de găsirea unor metode de construcție a lor. Z. Stojakovic și D. Paunic în [121] au definit și au construit  $n$ -quasigrupuri autoortogonale ciclice, obținând evaluări ale spectrului lor. În [78] T. Evans a generalizat prima lege Stein în caz ternar în felul următor:  $A(x, A(x, y, z), A(z, x, y)) = A(y, z, x)$ , arătând că această identitate implică autoortogonalitatea quasigrupului ternar  $(Q, A)$ . P. Sîrbu a studiat ortogonalitatea parastrofilor operațiilor  $n$ -are, a indicat o clasă de identități ce implică autoortogonalitatea operațiilor  $n$ -are și criterii de autoortogonalitate a  $n$ -grupurilor și a  $n$ -quasigrupurilor mediale, a demonstrat că există quasigrupuri finite autoortogonale de orice aritate  $n$  și a dat estimări ale spectrului operațiilor autoortogonale  $n$ -are [21, 121, 123, 23, 18]. În acest paragraf se demonstrează că pentru orice  $n, q \geq 3$  există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q \neq 2(2p + 1), p \geq 1$ .

**Teorema 2.1 [60].** *Există quasigrupuri binare autoortogonale de orice ordin  $q, q > 3, q \neq 6$ .*

**Teorema 2.2 [25].** *Dacă există quasigrupuri  $n$ -are și  $k$ -are autoortogonale de ordin  $q$ , atunci există și quasigrupuri  $(n \cdot k)$ -are autoortogonale de ordin  $q$ .*

**Lema 2.1.** *Dacă există quasigrupuri autoortogonale  $n$ -are de ordinul  $q_1$  și de ordinul  $q_2$  cu același tip de autoortogonalitate, atunci există quasigrupuri autoortogonale  $n$ -are de ordinul  $q_1 \cdot q_2$  cu același tip de autoortogonalitate.*

*Demonstrație.* Fie  $(Q_1, A)$  un quasigrup  $n$ -ar autoortogonal,  $|Q_1| = q_1$  și fie  $(Q_2, B)$  un quasigrup  $n$ -ar autoortogonal,  $|Q_2| = q_2$ , ambele cu tipul de autoortogonalitate  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Pentru quasigrupul  $n$ -ar  $(Q, C)$ , unde  $Q = Q_1 \times Q_2$ ,  $C((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) = (A(x_1^n), B(y_1^n))$ ,  $\forall x_i \in Q_1, y_i \in Q_2, i = \overline{1, n}$ , definim parastrofii principali:

$${}^{\alpha_i}C((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) = ({}^{\alpha_i}A(x_1^n), {}^{\alpha_i}B(y_1^n)), i = \overline{1, n}.$$

Sistemul  $\{{}^{\alpha_i}C\}_{i=1}^n$  este ortogonal, deoarece sistemele  $\{{}^{\alpha_i}A\}_{i=1}^n$  și  $\{{}^{\alpha_i}B\}_{i=1}^n$  sunt ortogonale. Deci, quasigrupul  $n$ -ar  $(Q, C)$  de ordinul  $q_1 \cdot q_2$  este quasigrup autoortogonal cu tipul de autoortogonalitate  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .  $\square$

**Lema 2.2.** *Pentru orice  $n, q \geq 3$  impare există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q$ .*

*Demonstrație.* Fie  $n, q \geq 3$  impare. Pe mulțimea  $\mathbb{Z}_q$  definim operația  $A$  în modul următor:  $A(x_1^n) = \bar{2}x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Obținem că perechea  $(\mathbb{Z}_q, A)$  este quasigrup  $n$ -ar autoortogonal de ordinul  $q$ , cu tipul de autoortogonalitate  $(\varepsilon, (12), (13), \dots, (1n))$ .  $\square$

**Lema 2.3.** *Pentru orice  $n \geq 3$  impar și pentru orice  $q = 2^k, k \geq 2$ , există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q$ .*

*Demonstrație.* Fie  $n \geq 3$  impar și fie  $q = 2^k, k \geq 2$ . Pe mulțimea  $GF(2^k), k \geq 2$ , pentru  $\alpha \in GF(2^k) \setminus \{0, 1\}$  definim operația  $A$  în modul următor:  $A(x_1^n) = \alpha x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Obținem

că perechea  $(GF(2^k), A)$  este quasigrup  $n$ -ar autoortogonal de ordinul  $q$ , cu tipul de autoortogonalitate  $(\varepsilon, (12), (13), \dots, (1n))$ .  $\square$

**Lema 2.4.** Pentru orice  $n \geq 3$  impar și pentru orice  $q = 2^k(2p + 1), k \geq 2, p \geq 1$ , există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q$ .

*Demonstrație.* Din Lemele 2.2, 2.3 și 2.1 (pentru  $q_1 = 2^k, k \geq 2$  și  $q_1 = 2p + 1, p \geq 1$ ) rezultă că există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q$  pentru  $n$  impar și  $q = 2^k(2p + 1), k \geq 2, p \geq 1$ .  $\square$

**Lema 2.5.** Pentru orice  $n \geq 2^m, m \geq 2$  și pentru orice  $q \neq 2, 3, 6$  există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q$ .

*Demonstrație.* Din Teoremele 2.1 și 2.2 rezultă că există quasigrupuri  $2^m$ -are,  $m \geq 2$ , autoortogonale de ordinul  $q \neq 2, 3, 6$ .  $\square$

**Lema 2.6.** Pentru orice  $n = 2^m(2t + 1), m \geq 2, t \geq 1$ , și pentru orice  $q \neq 2(2p + 1), p \geq 1$ , există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q$ .

*Demonstrație.* Fie  $q \neq 2(2p + 1), p \geq 1$ . Folosind Teorema 2.2 pentru quasigrupurile  $2^m$ -are,  $m \geq 2$ , autoortogonale de ordinul  $q = 2p + 1, p \geq 1$  (Lema 2.5) și quasigrupurile  $(2t + 1)$ -are,  $t \geq 1$ , autoortogonale de ordinul  $q = 2p + 1, p \geq 1$  (Lema 2.2), obținem că există quasigrupuri  $2^m(2t + 1)$ -are,  $m \geq 2, t \geq 1$ , autoortogonale de ordinul  $q = 2p + 1, p \geq 1$ . Din Lemele 2.5, 2.3 și Teorema 2.2 rezultă că există quasigrupuri  $2^m(2t + 1)$ -are,  $m \geq 2, t \geq 1$ , de ordinul  $q = 2^k, k \geq 2$ . Lemele 2.5, 2.4 și Teorema 2.2 implică existența quasigrupurilor  $2^m(2t + 1)$ -are,  $m \geq 2, t \geq 1$ , autoortogonale de ordinul  $q = 2^k(2p + 1), k \geq 2, p \geq 1$ .  $\square$

**Lema 2.7.** Pentru orice  $n = 2(2t + 1), t \geq 1$  și pentru orice  $q \neq 2(2p + 1), p \geq 1$ , există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q$ .

*Demonstrație.* Fie  $q \neq 2(2p + 1), p \geq 1$ . Folosind Teoremele 2.1, 2.2 și Lema 2.2, obținem că există quasigrupuri  $2(2t + 1)$ -are,  $t \geq 1$ , autoortogonale de ordinul  $q = 2p + 1, p \geq 1$ . Din Teoremele 2.1, 2.2 și Lema 2.3 rezultă că există quasigrupuri  $2(2t + 1)$ -are,  $t \geq 1$ , de ordinul  $q = 2^k, k \geq 2$ . Teorema 2.1, Lema 2.4 și Teorema 2.2 implică existența quasigrupurilor  $2(2t + 1)$ -are,  $t \geq 1$ , autoortogonale de ordinul  $q = 2^k(2p + 1), k \geq 2, p \geq 1$ .  $\square$

Din Lemele 2.2-2.7 rezultă

**Teorema 2.3.** Pentru orice  $n, q \geq 3$  există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q \neq 2(2p + 1), p \geq 1$ .

## 2.5. Concluzii la capitolul 2

În Capitolul 2 sunt studiate quasigrupurile cu identități din clasificarea lui Belousov [11, 34], numite  $\pi$ -quasigrupuri. Identitățile minimale implică ortogonalitatea unor perechi de parastrofi ai quasigrupului care le verifică, deci  $\pi$ -quasigrupurile sunt parastrofic-ortogonale. Caracterizarea grupurilor izotope unor quasigrupuri a fost inițiată în [16], unde se demonstrează că grupurile izotope  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_4$  sunt metabeliene. Un rezultat similar este obținut în [11, 34] pentru  $\pi$ -quasigrupurile de tipurile  $T_6$  și  $T_8$ , unde este formulată *problema* caracterizării quasigrupurilor cu identități minimale și a grupurilor izotope lor.

În Capitolul 2 sunt cercetate câteva aspecte referitoare la  $\pi$ -quasigrupuri și la identitățile care le definesc: invarianța identității minimale de tipul  $T_1$  la izotopia quasigrupurilor și, respectiv, a buclelor; condiții necesare și suficiente ca un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  și/sau  $T_2$ , să fie izotop unui grup (grup abelian); holomorful  $\pi$ -quasigrupurilor ș.a.

*În baza cercetărilor efectuate în Capitolul 2 și a rezultatelor obținute putem formula următoarele concluzii:*

1. Au fost deduse proprietăți generale ale  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_1$  și  $T_2$ , condiții necesare și suficiente ca un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ , respectiv  $T_2$ , să fie izotop unui grup (grup abelian), caracterizări ale universalității identităților minimale de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ , ale ordinului  $\pi$ -quasigrupurilor finite de tipul  $T_1$  și ale grupului substituțiilor interne în  $\pi$ -quasigrupurile finite de tipul  $T_1$  [2, 3, 67, 69, 126-129].

2. Se demonstrează că grupul multiplicativ la stânga (la dreapta) al unui  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  este izomorf cu un subgrup normal al grupului multiplicativ la stânga (la dreapta) al holomorfului său [70]; sunt date condiții necesare și suficiente ca holomorful unui  $\pi$ -quasigrup să fie  $\pi$ -quasigrup de același tip [69, 126, 128].

3. Este obținută o estimare a ordinului  $n$ -quasigrupurilor autoortogonale: se demonstrează că, pentru orice  $n, q \geq 3$ ,  $q \neq 2(2p + 1), p \geq 1$ , există quasigrupuri  $n$ -are autoortogonale de ordinul  $q$  [64].

În acest capitol este realizat obiectivul, care se referă la studiul quasigrupurilor binare parastrofic-ortogonale și autoortogonale.

Rezultatele expuse în Capitolul 2 au fost publicate în [2, 3, 64, 67, 69, 70, 127-129].

### 3. PARATOPIILE SISTEMELOR ORTOGONALE DE QUASIGRUPURI

Teoria pătratelor latine ortogonale reprezintă una din direcțiile de cercetare în combinatorică. Pătratul latin este echivalentul combinatoric al quasigrupului finit, astfel teoria quasigrupurilor poate fi utilizată cu succes la studiul sistemelor ortogonale de quasigrupuri (pătrate latine). Este cunoscută relația dintre  $k$ -rețelele algebrice și sistemele ortogonale de quasigrupuri: fiecărei  $k$ -rețele îi corespunde un sistem ortogonal de operații binare și, reciproc, orice sistem ortogonal de operații binare determină o  $k$ -rețea [7]. Diferite transformări ale  $k$ -rețelei (ale liniilor sau punctelor) modifică sistemul ortogonal de operații care o coordonatizează, păstrând ortogonalitatea sistemului. Astfel, apare problema descrierii transformărilor sistemelor ortogonale care păstrează ortogonalitatea lor, în particular, a transformărilor care lasă invariante sistemele ortogonale (numite paratopii). În lucrarea [13] V. Belousov studiază sistemele ortogonale conjugate și cele parastrofice, arată că orice sistem ortogonal de operații este conjugat unui sistem ortogonal de quasigrupuri. În aceeași lucrare Belousov descrie toate sistemele ortogonale de forma  $\Sigma = \{A, B, E, F\}$ , unde  $A$  și  $B$  sunt quasigrupuri binare definite pe o mulțime nevidă  $Q$ , iar  $F$  și  $E$  sunt selectorii binari pe  $Q$  care admit cel puțin o paratopie netrivială. În caz binar, existența paratopiilor implică și ortogonalitatea unor parastrofi ai quasigrupurilor sistemului  $\Sigma$ . În acest capitol sunt descrise sistemele ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială, toate paratopiile unor astfel de sisteme, și sunt obținute identitățile pe care le implică existența paratopiilor. Unele sisteme de acest tip conțin quasigrupuri ternare autoortogonale sau cu rețacți autoortogonali.

#### 3.1. Paratopiile sistemelor ortogonale de quasigrupuri ternare

Fie  $A_1, A_2, A_3$  trei quasigrupuri ternare definite pe o mulțime nevidă  $Q$  și fie  $E_1, E_2, E_3$  selectorii ternari:  $E_i(x_1, x_2, x_3) = x_i, \forall x_1, x_2, x_3 \in Q, i = \overline{1,3}$ . Considerăm sistemul ortogonal  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  și notăm mulțimea  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1\theta, E_2\theta, E_3\theta\}$  cu  $\Sigma\theta$ . Fie  $\theta: Q^3 \rightarrow Q^3$ ,  $\theta = (B_1, B_2, B_3)$ , o funcție, unde  $B_1, B_2, B_3$  sunt operații ternare pe  $Q$  și  $\theta(x_1^3) = (B_1(x_1^3), B_2(x_1^3), B_3(x_1^3))$  pentru orice  $(x_1^3) \in Q^3$ . Dacă  $\theta$  este paratopie a lui  $\Sigma$ , atunci  $\Sigma = \Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1\theta, E_2\theta, E_3\theta\} = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, B_1, B_2, B_3\}$ , deci  $\{B_1, B_2, B_3\} \subset \Sigma$ , adică toate paratopiile sistemului  $\Sigma$  sunt triplete de operații din  $\Sigma$ . Vom studia condițiile necesare și suficiente pentru ca un triplet de operații din  $\Sigma$  să definească o paratopie a lui  $\Sigma$ . Deoarece selectorii ternari  $E_1, E_2, E_3$  sunt fixați, considerăm consecutivitățile care conțin toate distribuțiile posibile ale selectorilor ternari în pozițiile lor. Vom demonstra, analog cazului binar, că un triplet

de operații din  $\Sigma$  definește o paratopie a lui  $\Sigma$  dacă și numai dacă două operații de quasigrup din  $\Sigma$  pot fi exprimate prin a treia operație (folosind parastrofia și/sau superpoziția) și, în majoritatea cazurilor, quasigrupul corespunzător verifică o identitate. Mai mult, unele identități obținute implică autoortogonalitatea quasigrupului ternar respectiv sau al unui retract al său.

### 3.1.1. Paratopiile definite de trei quasigrupuri

În acest paragraf sunt descrise sistemele ortogonale de quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie, componentele căreia sunt trei quasigrupuri ternare. Există un caz posibil pentru ca un triplet cu trei quasigrupuri ternare să fie paratopie a acestui sistem.

**Teorema 3.1.** *Tripletul de quasigrupuri ternare  $(A_1, A_2, A_3)$ , definite pe o mulțime nevidă  $Q$ , este paratopie a sistemului ortogonal  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_2 = {}^{(132)}A_1$ ,  $A_3 = {}^{(123)}A_1$  și  $A_1(A_1, {}^{(132)}A_1, {}^{(123)}A_1) = E_2$ ;
- II.  $A_2 = {}^{(132)}A_1$ ,  $A_3 = {}^{(123)}A_1$  și  $A_1(A_1, {}^{(132)}A_1, {}^{(123)}A_1) = E_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{(12)}A_2$ ,  $A_3 = {}^{\pi_3}A_2({}^{(12)}A_2, A_2, E_1)$  și  $A_3 = {}^{(12)}A_3$ ;
- IV.  $A_2 = {}^{(23)}A_3$ ,  $A_1 = {}^{\pi_1}A_3(E_2, {}^{(23)}A_3, A_3)$  și  $A_1 = {}^{(23)}A_1$ ;
- V.  $A_3 = {}^{(13)}A_1$ ,  $A_2 = {}^{\pi_2}A_1(A_1, E_3, {}^{(13)}A_1)$  și  $A_2 = {}^{(13)}A_2$ ;
- VI.  $A_3 = {}^{\pi_3}A_1(A_1, A_2, E_1) = {}^{\pi_3}A_2(A_1, A_2, E_2)$ .

*Demonstrație.* Fie  $\theta = (A_1, A_2, A_3)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Folosind  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = A_2$  și  $E_3\theta = A_3$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, A_2, A_3\}$ , prin urmare  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, E_2, E_3\}$ , adică sunt șase cazuri posibile.

1. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, E_3, E_1)$ ,  $\theta^3 = (A_2, A_3, A_1)$ ,  $\theta^4 = (E_3, E_1, E_2)$ ,  $\theta^5 = (A_3, A_1, A_2)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1\theta^4 = A_3$ , adică  $A_1(E_3, E_1, E_2) = A_3$ , prin urmare  $A_3 = {}^{(123)}A_1$ . De asemenea  $A_1\theta = E_2$  implică  $A_1\theta^2 = A_2$  și  $A_1(E_2, E_3, E_1) = A_2$ , deci  $A_2 = {}^{(132)}A_1$ . Utilizând egalitățile  $A_3 = {}^{(123)}A_1$  și  $A_2 = {}^{(132)}A_1$ , obținute mai sus, în  $A_1\theta = E_2$ , obținem  $A_1(A_1, {}^{(132)}A_1, {}^{(123)}A_1) = E_2$ , deci condiția I. se verifică.

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci utilizând primele două egalități în a treia, obținem  $A_1\theta = E_2$ , prin urmare  $A_1(A_1(x_1^3), A_2(x_1^3), A_3(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ ,  $\forall x_1, x_2, x_3 \in Q$ , care implică  ${}^{(132)}A_1(A_3(x_1^3), A_1(x_1^3), A_2(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ . Deci, ținând cont de primele egalități din I., obținem  $A_2({}^{(123)}A_1(x_1^3), {}^{(123)}A_2(x_1^3), {}^{(123)}A_3(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ , prin urmare

$$A_2(A_1(x_3, x_1, x_2), A_2(x_3, x_1, x_2), A_3(x_3, x_1, x_2)) = E_3(x_3, x_1, x_2),$$

adică  $A_2\theta = E_3$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1(A_1(x_1^3), A_2(x_1^3), A_3(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ , care implică  $^{(123)}A_1(A_2(x_1^3), A_3(x_1^3), A_1(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ . Aplicând  $A_2 = ^{(132)}A_1$ ,  $A_3 = ^{(123)}A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3(^{(132)}A_1(x_1^3), ^{(132)}A_2(x_1^3), ^{(132)}A_3(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ , prin urmare,  $\forall x_1, x_2, x_3 \in Q$ ,  $A_3(A_1(x_2, x_3, x_1), A_2(x_2, x_3, x_1), A_3(x_2, x_3, x_1)) = E_1(x_2, x_3, x_1)$ , adică  $A_3\theta = E_1$ .

2. Fie  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, E_1, E_2)$ ,  $\theta^3 = (A_3, A_1, A_2)$ ,  $\theta^4 = (E_2, E_3, E_1)$ ,  $\theta^5 = (A_2, A_3, A_1)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_3$ , adică  $A_1(E_3, E_1, E_2) = A_3$ , deci  $A_3 = ^{(123)}A_1$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1\theta^4 = A_2$ , adică  $A_1(E_2, E_3, E_1) = A_2$ , prin urmare  $A_2 = ^{(132)}A_1$ . Folosind  $A_2 = ^{(132)}A_1$  și  $A_3 = ^{(123)}A_1$  în  $A_1\theta = E_3$ , obținem  $A_1(A_1, ^{(132)}A_1, ^{(123)}A_1) = E_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci utilizând primele două egalități în a treia, obținem  $A_1\theta = E_3$ . Egalitatea  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1(A_1(x_1^3), A_2(x_1^3), A_3(x_1^3)) = E_3(x_1^3)$ , care este echivalentă cu  $^{(123)}A_1(A_2(x_1^3), A_3(x_1^3), A_1(x_1^3)) = E_3(x_1^3)$ . Folosind  $A_3 = ^{(123)}A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3(^{(132)}A_1(x_1^3), ^{(132)}A_2(x_1^3), ^{(132)}A_3(x_1^3)) = E_3(x_1^3)$ , prin urmare

$$A_3(A_1(x_2, x_3, x_1), A_2(x_2, x_3, x_1), A_3(x_2, x_3, x_1)) = E_2(x_2, x_3, x_1),$$

$\forall x_1, x_2, x_3 \in Q$ , adică  $A_3\theta = E_2$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1(A_1(x_1^3), A_2(x_1^3), A_3(x_1^3)) = E_3(x_1^3)$ , de unde rezultă  $^{(132)}A_1(A_3(x_1^3), A_1(x_1^3), A_2(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ . Folosind  $A_2 = ^{(132)}A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2(^{(123)}A_1(x_1^3), ^{(123)}A_2(x_1^3), ^{(123)}A_3(x_1^3)) = E_3(x_1^3)$ , prin urmare

$$A_2(A_1(x_3, x_1, x_2), A_2(x_3, x_1, x_2), A_3(x_3, x_1, x_2)) = E_1(x_3, x_1, x_2), \forall x_1, x_2, x_3 \in Q,$$

adică  $A_2\theta = E_1$ .

3. Fie  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, E_1, E_3)$ ,  $\theta^3 = (A_2, A_1, A_3)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_1$ , adică  $A_2(E_2, E_1, E_3) = A_1$ , deci  $A_1 = ^{(12)}A_2$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_1$  și  $A_1 = ^{(12)}A_2$  implică  $A_3 = ^{\pi_3}A_2(^{(12)}A_2, A_2, E_1)$ . Din  $A_2\theta = E_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , adică  $A_3(E_2, E_1, E_3) = A_3$ , prin urmare  $A_3 = ^{(12)}A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile III., atunci utilizând  $A_1 = ^{(12)}A_2$  în  $A_3 = ^{\pi_3}A_2(^{(12)}A_2, A_2, E_1)$ , avem  $A_2\theta = E_1$ , deci  $A_2(A_1(x_1^3), A_2(x_1^3), A_3(x_1^3)) = E_1(x_1^3)$ , și  $^{(12)}A_2(A_2(x_1^3), A_1(x_1^3), A_3(x_1^3)) = E_1(x_1^3)$ . Aplicând  $A_1 = ^{(12)}A_2$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1(^{(12)}A_2(x_2, x_1, x_3), ^{(12)}A_1(x_2, x_1, x_3), ^{(12)}A_3(x_2, x_1, x_3)) = E_2(x_2, x_1, x_3),$$

prin urmare, ținând cont de  $A_1 = ^{(12)}A_2$  și  $A_3 = ^{(12)}A_3$ , avem

$$A_1(A_1(x_2, x_1, x_3), A_2(x_2, x_1, x_3), A_3(x_2, x_1, x_3)) = E_2(x_2, x_1, x_3),$$

$\forall x_1, x_2, x_3 \in Q$ , adică  $A_1\theta = E_2$ . De asemenea, din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_2(A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta) = A_1$ , deci  $A_2(E_2, E_1, A_3\theta) = A_1$ . Utilizând  $A_1 = ^{(12)}A_2$  în ultima egalitate, obținem

$^{(12)}A_1(E_2, E_1, A_3\theta) = A_1$ , prin urmare  $A_1(E_1, E_2, A_3\theta) = A_1$ , care implică  $A_3\theta = E_3$ .

4. Fie  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = E_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_3, E_2)$ ,  $\theta^3 = (A_1, A_3, A_2)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = E_2$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_2$ , de unde obținem  $A_3(E_1, E_3, E_2) = A_2$ , deci  $A_2 = ^{(23)}A_3$ . De asemenea,  $A_3\theta = E_2$  și  $A_2 = ^{(23)}A_3$  implică  $A_1 = ^{\pi_1}A_3(E_2, ^{(23)}A_3, A_3)$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_1$ , adică  $A_1(E_1, E_3, E_2) = A_1$ , deci  $A_1 = ^{(23)}A_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci utilizând prima egalitate în a doua, avem  $A_3\theta = E_2$ . Egalitatea  $A_3\theta = E_2$  implică  $A_3(A_1(x_1^3), A_2(x_1^3), A_3(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ , prin urmare,  $^{(23)}A_3(A_1(x_1^3), A_3(x_1^3), A_2(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ . Folosind  $A_2 = ^{(23)}A_3$  în ultima egalitate, obținem  $A_2(^{(23)}A_1(x_1, x_3, x_2), ^{(23)}A_3(x_1, x_3, x_2), ^{(23)}A_2(x_1, x_3, x_2)) = E_3(x_1, x_3, x_2)$ , prin urmare, ținând cont de  $A_2 = ^{(23)}A_3$  și  $A_1 = ^{(23)}A_1$ , avem  $A_2(A_1(x_1, x_3, x_2), A_2(x_1, x_3, x_2), A_3(x_1, x_3, x_2)) = E_3(x_1, x_3, x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2, x_3 \in Q$ , deci  $A_2\theta = E_3$ . De asemenea, din  $A_3\theta = E_2$  rezultă  $A_3(A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta) = A_2$ , deci  $A_3(A_1\theta, E_3, E_2) = A_1$ . Aplicând  $A_2 = ^{(23)}A_3$  în ultima egalitate, obținem  $^{(23)}A_2(A_1\theta, E_3, E_2) = A_1$ , prin urmare  $A_2(A_1\theta, E_2, E_3) = A_2$ , care implică  $A_1\theta = E_1$ .

5. Fie  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, E_2, E_1)$ ,  $\theta^3 = (A_3, A_2, A_1)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_3$ , adică  $A_1(E_3, E_2, E_1) = A_3$ , deci  $A_3 = ^{(13)}A_1$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_3$  și  $A_3 = ^{(13)}A_1$  implică  $A_2 = ^{\pi_2}A_1(A_1, E_3, ^{(13)}A_1)$ . Din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(E_3, E_2, E_1) = A_2$ , deci  $A_2 = ^{(13)}A_2$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile V., atunci utilizând prima egalitate în a doua, avem  $A_1\theta = E_3$ , adică  $A_1(A_1(x_1^3), A_2(x_1^3), A_3(x_1^3)) = E_3(x_1^3)$ , deci  $^{(13)}A_1(A_3(x_1^3), A_2(x_1^3), A_1(x_1^3)) = E_3(x_1^3)$ . Folosind  $A_3 = ^{(13)}A_1$  în ultima egalitate, obținem

$$A_3(^{(13)}A_3(x_3, x_2, x_1), ^{(13)}A_2(x_3, x_2, x_1), ^{(13)}A_1(x_3, x_2, x_1)) = E_1(x_3, x_2, x_1),$$

$\forall x_1, x_2, x_3 \in Q$ , prin urmare, ținând cont de  $A_2 = ^{(13)}A_2$  și  $A_3 = ^{(13)}A_1$ , avem

$$A_3(A_1(x_3, x_2, x_1), A_2(x_3, x_2, x_1), A_3(x_3, x_2, x_1)) = E_1(x_3, x_2, x_1),$$

adică  $A_3\theta = E_1$ . De asemenea, din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1(A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta) = A_3$ , prin urmare  $A_1(E_3, A_2\theta, E_1) = A_3$ . Aplicând  $A_3 = ^{(13)}A_1$  în ultima egalitate, obținem  $^{(13)}A_3(E_3, A_2\theta, E_1) = A_3$ , prin urmare  $A_3(E_1, A_2\theta, E_3) = A_3$ , care implică  $A_2\theta = E_2$ .

6. Fie  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = E_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_3 = ^{\pi_3}A_1(A_1, A_2, E_1)$ , iar din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_3 = ^{\pi_3}A_2(A_1, A_2, E_2)$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile VI., atunci din  $A_3 = ^{\pi_3}A_1(A_1, A_2, E_1)$  obținem  $A_1\theta = E_1$  și  $A_3 = ^{\pi_3}A_2(A_1, A_2, E_2)$  implică  $A_2\theta = E_2$ . Egalitatea  $A_3 = ^{\pi_3}A_1(A_1, A_2, E_1)$  implică  $A_3\theta = ^{\pi_3}A_1(E_1, E_2, A_1)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . □

**Corolarul 3.1.** *Există exact 6 sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare și trei selectori ternari care admit cel puțin o paratopie, componentele căreia sunt trei quasigrupuri ternare.*

**Observația 3.1.** T. Evans a demonstrat în [78] că dacă un quasigrup ternar  $(Q, A)$  verifică identitatea  $A(A,^{(132)}A,^{(123)}A) = E_i$ , pentru  $i \in \{1, 2, 3\}$ , atunci sistemul de parastrofi principali  $\{A,^{(132)}A,^{(123)}A\}$  este ortogonal, deci  $(Q, A)$  este autoortogonal, cu tipul de autoortogonalitate  $(\varepsilon, (132), (123))$ , unde  $\varepsilon$  este unitatea grupului simetric  $S_4$ .

### 3.1.2. Paratopiile definite de două quasigrupuri și un selector

În acest paragraf sunt descrise sistemele ortogonale de quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie, componentele căreia sunt două quasigrupuri ternare și un selector ternar. Există 9 cazuri posibile pentru ca un triplet cu două quasigrupuri ternare și un selector ternar să fie paratopie a acestui sistem, deoarece fiecare din cei trei selectori ternari poate ocupa una din oricare cele trei poziții ale tripletului.

**Lema 3.1.** *Tripletul  $(E_1, A_1, A_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_2 = ^{(23)}A_1$ ,  $A_3(E_1, A_1, ^{(23)}A_1) = A_3$  și  $A_1(E_1, A_1, ^{(23)}A_1) = E_3$ ;
- II.  $A_2 = ^{\pi_3}A_1(E_1, A_1, E_2)$ ,  $A_3(E_1, A_1, ^{\pi_3}A_1(E_1, A_1, E_2)) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = ^{\pi_2}A_2(E_1, E_2, A_2)$ ,  $A_3 = ^{\pi_3}A_2(E_1, A_2, E_3)$  și  
 $A_2(E_1, E_3, ^{\pi_2}A_2(E_1, E_2, A_2)) = ^{\pi_3}A_2(E_1, A_2, E_3)$ ;
- IV.  $A_2 = ^{\pi_3}A_1(E_1, A_1, E_3)$ ,  $A_3 = ^{\pi_2}A_1(E_1, E_2, A_1)$  și  
 $A_1(E_1, ^{\pi_3}A_1(E_1, A_1, E_3), E_2) = ^{\pi_2}A_1(E_1, E_2, A_1)$ .

*Demonstrație.* Fie upla  $(E_1, A_1, A_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Folosind  $E_1\theta = E_1$ ,  $E_2\theta = A_1$ ,  $E_3\theta = A_2$ , obținem  $\Sigma = \Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, A_2, E_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_2, E_3, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = E_3$ ,  $A_2\theta = E_2$ ,  $A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_3, E_2)$ ,  $\theta^3 = (E_1, A_2, A_1)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_2$ , deci  $A_2 = ^{(23)}A_1$ . Aplicând  $A_2 = ^{(23)}A_1$  în  $A_3\theta = A_3$ , obținem  $A_3(E_1, A_1, ^{(23)}A_1) = A_3$ . Din  $A_1\theta = E_3$  și  $A_2 = ^{(23)}A_1$  rezultă  $A_1(E_1, A_1, ^{(23)}A_1) = E_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci primele două egalități implică

$$A_1(E_1, A_1, A_2) = E_3, \quad (3.1)$$

deci  $A_1\theta = E_3$ . Din  $A_2 = ^{(23)}A_1$  rezultă



$$E_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_3, A_2). \quad (3.2)$$

Egalitatea (3.1) implică  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , prin urmare  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_3, A_2)$ . Aplicând (3.2) în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = E_2$ . Din  $A_2 = {}^{(23)} A_1$  și  $A_3(E_1, A_1, {}^{(23)} A_1) = A_3$  rezultă  $A_3\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_3, A_3)$ ,  $\theta^3 = (E_1, A_2, E_2)$ ,  $\theta^4 = (E_1, A_3, A_1)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_2$ , adică  $A_1(E_1, A_3, A_1) = E_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$ . Analog, din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1\theta^3 = A_3$ , adică  $A_1(E_1, A_2, E_2) = A_3$ . Folosind  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_3)$  și  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1(E_1, {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_3), E_2) = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_3)$  implică  $A_1\theta = E_3$ . Din  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$  rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_1, A_2, E_2) = A_3$ , prin urmare  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_3, E_2) \Rightarrow A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_3, E_2)$ ,  $\theta^3 = (E_1, E_3, A_1)$ ,  $\theta^4 = (E_1, A_2, A_3)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, E_2, A_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_2$  implică  $A_2\theta^4 = E_3$ , adică  $A_2(E_1, A_2, A_3) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3)$ . Analog,  $A_2\theta = E_2$  implică  $A_2\theta^3 = A_3$ , adică  $A_2(E_1, E_3, A_1) = A_3$ . Folosind  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, E_2, A_2)$  și  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2(E_1, E_3, {}^{\pi_2} A_2(E_1, E_2, A_2)) = {}^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3).$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile III., atunci  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, E_2, A_2)$  implică  $A_2\theta = E_2$  și din  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3)$  rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_2(E_1, E_3, A_1) = A_3$ , prin urmare  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_3)$ , care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_2)$ . Aplicând ultima egalitate în  $A_3\theta = A_3$ , obținem

$$A_3(E_1, A_1, {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_2)) = A_3.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci din  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_2)$  rezultă  $A_1\theta = E_2$  și  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , deci  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând prima egalitate din IV. în cea de-a doua, obținem  $A_3\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_3, E_3)$ ,  $\theta^3 = (E_1, E_2, A_2)$ . Din

$A_3\theta = E_2$  rezultă  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_1, E_2, A_2) = A_3(E_1, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_2 = E_3$ , contradicție, fiindcă  $A_2$  este operație de quasigrup.

6. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_2, A_3)$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_1$ , adică  $A_1(E_1, E_2, A_3) = A_1(E_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_3$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Corolarul 3.2.** *Dacă un quasigrup ternar  $(Q, A)$  verifică identitatea*

$$A(E_1(x_1^3), A(x_1^3), {}^{(23)}A(x_1^3)) = E_3(x_1^3), \quad (3.3)$$

atunci, pentru  $\forall a \in Q$ , 1-retractul  $B(x, y) = A(a, x, y)$  este autoortogonal.

*Demonstrație.* Fie  $(Q, A)$  un quasigrup ternar care verifică identitatea (3.3). Substituind  $x_2 \mapsto x_3, x_3 \mapsto x_2$  în (3.3), obținem:

$$A(E_1(x_1, x_3, x_2), A(x_1, x_3, x_2), {}^{(23)}A(x_1, x_3, x_2)) = E_3(x_1, x_3, x_2),$$

care implică  $A(E_1(x_1^3), {}^{(23)}A(x_1^3), A(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ , deci

$${}^{(23)}A(E_1(x_1^3), A(x_1^3), {}^{(23)}A(x_1^3)) = E_2(x_1^3). \quad (3.4)$$

Luând  $x_1 = a$ , unde  $a \in Q$ , în (3.3) și (3.4), și utilizând 1-retractul  $B(x, y) = A(a, x, y)$ , obținem egalitățile  $B(B, {}^{(12)}B) = E$  și  ${}^{(12)}B(B, {}^{(12)}B) = F$ , prin urmare  $B \perp {}^{(12)}B$ , deci  $(Q, B)$  este autoortogonal.  $\square$

**Lema 3.2.** *Tripletul  $(A_1, E_1, A_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_2 = {}^{\pi_3}A_1(A_1, E_1, E_2), A_3 = {}^{\pi_3}A_1(E_2, A_1, E_1);$
- II.  $A_1 = {}^{\pi_2}A_3(E_3, A_3, E_2), A_2 = {}^{\pi_1}A_3(A_3, E_3, E_1)$  și  
 $A_3({}^{\pi_2}A_3(E_3, A_3, E_2), E_1, {}^{\pi_1}A_3(A_3, E_3, E_1)) = A_3;$
- III.  $A_2 = {}^{\pi_3}A_1(A_1, E_1, E_3), A_3 = {}^{\pi_2}A_1(E_2, E_1, A_1)$  și  
 $A_1({}^{\pi_2}A_1(E_2, E_1, A_1), {}^{\pi_3}A_1(A_1, E_1, E_3), E_1) = E_2;$
- IV.  $A_1 = {}^{\pi_3}A_2(A_2, E_3, {}^{\pi_3}A_2(E_2, A_2, E_3)), A_3 = {}^{\pi_3}A_2(E_2, A_2, E_3)$  și  
 $A_2({}^{\pi_3}A_2(A_2, E_3, {}^{\pi_3}A_2(E_2, A_2, E_3)), E_1, A_2) = E_2;$
- V.  $A_1 = {}^{\pi_1}A_2(E_3, E_1, A_2), A_3 = {}^{\pi_2}A_2(E_2, E_3, A_2)$  și  
 $A_2({}^{\pi_2}A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1}A_2(E_3, E_1, A_2), E_3) = A_2.$

*Demonstrație.* Fie upla  $(A_1, E_1, A_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = E_1, E_3\theta = A_2$ , obținem  $\Sigma = \Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, E_1, A_2\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_2, E_3, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_1, A_3), \theta^3 = \varepsilon$ . Egalitatea  $A_1\theta = E_2$ , adică  $A_1(A_1, E_1, A_2) = E_2$ , implică  $A_2 = {}^{\pi_3}A_1(A_1, E_1, E_2)$ . De asemenea, din

$A_1\theta = E_2$ , obținem  $A_1\theta^2 = E_1$ , adică  $A_1(E_2, A_1, A_3) = E_1$ , deci  $A_3 =^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_1)$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile I., atunci  $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_2)$  implică  $A_1(A_1, E_1, A_2) = E_2$ , prin urmare  $A_1\theta = E_2$ . De asemenea, din  $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_2)$  rezultă  $A_2\theta =^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_1)$  deci, folosind  $A_3 =^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ . Din a doua egalitate din I. rezultă  $A_3\theta =^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_1, E_2)$ ,  $\theta^3 = (A_2, E_3, E_1)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , adică  $A_3(E_3, A_1, E_2) = A_3$ , deci  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$ . De asemenea, din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^3 = A_3$ , prin urmare  $A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$ . Aplicând  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$  și  $A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$  în  $A_3\theta = A_3$ , obținem

$$A_3(^{\pi_2}A_3(E_3, A_3, E_2), E_1, ^{\pi_1}A_3(A_3, E_3, E_1)) = A_3.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci aplicând primele două egalități în a treia obținem

$$A_3(A_1, E_1, A_2) = A_3, \quad (3.5)$$

adică  $A_3\theta = A_3$ . Din  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$  rezultă  $A_3(A_2, E_3, E_1) = A_3$ , deci

$$E_3 =^{\pi_2} A_3(A_2, A_3, E_1). \quad (3.6)$$

Deoarece  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$  implică  $A_1\theta =^{\pi_2} A_3(A_2, A_3, E_1)$ , aplicând (3.6) în ultima egalitate obținem  $A_1\theta = E_3$ . Din  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$  rezultă  $A_3(E_3, A_1, E_2) = A_3$ , deci

$$E_2 =^{\pi_3} A_3(E_3, A_1, A_3). \quad (3.7)$$

Din (3.5) rezultă  $A_2 =^{\pi_3} A_3(A_1, E_1, A_3) \Rightarrow A_2\theta =^{\pi_3} A_3(E_3, A_1, A_3)$ . Aplicând (3.7) în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = E_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_1, A_3)$ ,  $\theta^3 = (A_2, E_3, E_2)$ ,  $\theta^4 = (A_3, A_2, E_1)$ ,  $\theta^5 = (E_2, A_3, A_1)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1\theta^5 = E_3\theta^4 \Rightarrow A_1(E_2, A_3, A_1) = E_1$ , deci  $A_3 =^{\pi_2} A_1(E_2, E_1, A_1)$ . Egalitatea  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_3\theta^3$ , deci  $A_1(A_3, A_2, E_1) = E_2$ . Aplicând  $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_3)$  și  $A_3 =^{\pi_2} A_1(E_2, E_1, A_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1(^{\pi_2}A_1(E_2, E_1, A_1), ^{\pi_3}A_1(A_1, E_1, E_3), E_1) = E_2.$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci din  $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_3)$  avem  $A_1(A_1, E_1, A_2) = E_3$ , deci  $A_1\theta = E_3$ . Din  $A_3 =^{\pi_2} A_1(E_2, E_1, A_1)$  rezultă  $A_3\theta =^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Aplicând primele două egalități din III. în a treia, obținem  $A_1(A_3, A_2, E_1) = E_2$ , prin urmare  $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_3, E_2, E_1)$ , deci  $A_2\theta =^{\pi_2} A_1(E_2, E_1, A_1)$ , astfel, utilizând  $A_3 =^{\pi_2} A_1(E_2, E_1, A_1)$ , obținem  $A_2\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, A_1, E_2)$ ,  $\theta^3 = (E_3, A_3, E_1)$ ,  $\theta^4 = (A_2, E_3, A_1)$ ,  $\theta^5 = (E_2, A_2, A_3)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_2\theta^5 = E_2\theta^4$ , adică

$A_2(E_2, A_2, A_3) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_2$  implică  $A_2\theta^4 = E_2\theta^3$ , adică  $A_2(A_2, E_3, A_1) = A_3$ , deci  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_3, A_3)$  și, utilizând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)$ , obținem  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3))$ .

Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)$  și  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3))$  în egalitatea  $A_2\theta = E_2$ , avem  $A_2({}^{\pi_3} A_2(A_2, E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)), E_1, A_2) = E_2$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci utilizând a doua egalitate în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_1, E_1, A_2) = E_2$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Din  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)$  rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2) = E_3$ . Aplicând prima egalitate din IV. în cea de-a doua, obținem  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_3, A_3)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)$ . Utilizând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)$  în ultima egalitate, avem  $A_1\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, A_1, E_3)$ ,  $\theta^3 = (E_2, A_3, A_2)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din egalitatea  $A_2\theta = E_3$  obținem  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2)$ . De asemenea, din  $A_2\theta = E_3$  rezultă  $A_2\theta^3 = E_3\theta^2$ , adică  $A_2(E_2, A_3, A_2) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2)$ . Mai mult,  $A_2\theta = E_3$  implică  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(A_3, A_1, E_3) = A_2$ . Aplicând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2)$  și  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2)$  în ultima egalitate avem  $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2), E_3) = A_2$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = E_3$ , iar cea de-a doua implică  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_3) = E_2$ . Utilizând primele două egalități din V. în a treia, obținem  $A_2(A_3, A_1, E_3) = A_2$ , de unde rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(A_3, A_2, E_3)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2)$ . Utilizând  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_1, E_3)$ ,  $\theta^3 = (E_1, E_2, A_2)$  și  $A_1\theta^3 = E_2\theta^2$ , deci  $A_1(E_1, E_2, A_2) = A_1$ , adică  $A_1(E_1, E_2, A_2) = A_1(E_1, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_2 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_2$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Lema 3.3.** *Tripletul  $(A_1, A_2, E_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  și  
 $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), E_1) = A_3$ ;
- II.  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_2, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_1)$  și  
 $A_1(E_3, A_1, {}^{\pi_2} A_1(E_2, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_1)) = E_1$ ;
- III.  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_3, E_1), A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, A_1)$ ;
- IV.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_2, A_2, E_1), A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, E_2)$  și  
 $A_2({}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, E_2), E_2, {}^{\pi_1} A_2(E_2, A_2, E_1)) = A_2$ ;
- V.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1), A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$  și

$$A_2(A_2, {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1), E_2) = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2).$$

*Demonstrație.* Fie upla  $(A_1, A_2, E_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = A_2, E_3\theta = E_1$ , obținem  $\Sigma = \Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, A_2, E_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_2, E_3, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, E_3, A_1), \theta^3 = (A_2, E_1, E_2), \theta^4 = (E_3, A_1, A_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , deci  $A_3(E_2, E_3, A_1) = A_3$ , de unde obținem  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$ . De asemenea, egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(A_2, E_1, E_2) = A_3$ , prin urmare  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  și  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  în  $A_3\theta = A_3$  obținem  $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), E_1) = A_3$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile I., atunci utilizând primele două egalități în a treia, obținem  $A_3\theta = A_3$ . Din  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  rezultă  $A_3(A_2, E_1, E_2) = A_3$ , deci

$${}^{\pi_3} A_3(A_2, E_1, A_3) = E_2. \quad (3.8)$$

Din  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  avem  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_3(A_2, E_1, A_3)$  și folosind (3.8) în ultima egalitate obținem  $A_1\theta = E_2$ . De asemenea, din  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  rezultă  $A_3(E_2, E_3, A_1) = A_3$ , deci

$${}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, A_1) = E_3. \quad (3.9)$$

Utilizând primele două egalități din I. în cea de-a treia, obținem  $A_3(A_1, A_2, E_1) = A_3$ , prin urmare  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(A_1, A_3, E_1)$ , care implică  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, A_1)$  și, folosind (3.9), obținem  $A_2\theta = E_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_3, A_1), \theta^3 = (A_2, E_3, E_2), \theta^4 = (A_3, E_1, A_2), \theta^5 = (E_3, A_1, A_3), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_2$  implică  $A_1\theta^2 = A_2$ , adică  $A_1(E_2, A_3, A_1) = A_2$ , prin urmare  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_2, A_2, A_1)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$  în ultima egalitate obținem

$$A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_2, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_1).$$

Din  $A_1\theta = E_2$ , de asemenea, obținem  $A_1\theta^5 = E_1$ , adică  $A_1(E_3, A_1, A_3) = E_1$  și, aplicând egalitatea  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_2, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_1)$ , avem

$$A_1(E_3, A_1, {}^{\pi_2} A_1(E_2, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_1)) = E_1.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci din prima egalitate obținem  $A_1\theta = E_2$  și  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_2, A_2, A_1)$ . Utilizând primele două egalități din II. în  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_2, A_2, A_1)$ , obținem  $A_2\theta = A_3$ . Din ultimele două egalități din II., avem  $A_1(E_3, A_1, A_3) = E_1$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_1) \Rightarrow A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_3$ .

3. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_3, A_1), \theta^3 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_3, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1\theta^2 = E_1$ , adică  $A_1(E_3, A_3, A_1) = E_1$ , prin urmare  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, A_1)$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_3$  și

$A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, A_1)$ . Utilizând  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, A_1)$  în  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, A_1)$ , obținem  $A_2\theta = A_3$ . Din  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, A_1)$  rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_2, A_1)$ ,  $\theta^3 = (E_3, A_2, A_3)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_2, A_2, E_1)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_2 \Rightarrow A_2\theta^3 = E_2 \Rightarrow A_2(E_3, A_2, A_3) = E_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, E_2)$ . Din  $A_2\theta = E_2$ , avem  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(A_3, E_2, A_1) = A_2$ . Aplicând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_2, A_2, E_1)$  și  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, E_2)$  în ultima egalitate obținem  $A_2({}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, E_2), E_2, {}^{\pi_1} A_2(E_2, A_2, E_1)) = A_2$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile IV., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = E_2$ , și a doua egalitate implică  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din IV. în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_3, E_2, A_1) = A_2$ , deci  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(A_3, E_2, A_2)$ , de unde avem  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, E_2)$  în ultima egalitate, avem  $A_1\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_3, A_1)$ ,  $\theta^3 = (E_2, E_1, A_3)$ ,  $\theta^4 = (A_2, A_1, E_2)$ ,  $\theta^5 = (E_3, A_3, A_2)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)$ . De asemenea, din  $A_2\theta = E_3$  obținem  $A_2\theta^5 = E_2$ , adică  $A_2(E_3, A_3, A_2) = E_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$ . Egalitatea  $A_2\theta = E_3$  mai implică și  $A_2\theta^4 = A_3$ , adică  $A_2(A_2, A_1, E_2) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)$  și  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2(A_2, {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1), E_2) = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2).$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = E_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din V. în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_2, A_1, E_2) = A_3$ , prin urmare  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(A_2, A_3, E_2)$ , care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, E_2, A_1)$ ,  $\theta^3 = (E_1, A_2, E_3)$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , deci  $A_3(E_1, A_2, E_3) = A_3(E_1, E_2, E_3) \Rightarrow A_2 = E_2$ , contradicție, deoarece  $A_2$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Lema 3.4.** *Tripletul  $(E_2, A_1, A_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_1)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_2)$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$ ,  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$  și  $A_3(E_2, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1), {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)) = A_3$ ;
- III.  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_3)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_2, E_1, A_1)$  și

$$A_1(\pi^3 A_1(E_2, A_1, E_3), \pi^1 A_1(E_2, E_1, A_1), E_2) = E_1;$$

IV.  $A_3 = \pi^3 A_2(A_2, E_1, E_3)$ ,  $A_1 = \pi^3 A_2(E_3, A_2, \pi^3 A_2(A_2, E_1, E_3))$  și

$$A_2(E_2, \pi^3 A_2(E_3, A_2, \pi^3 A_2(A_2, E_1, E_3)), A_2) = E_1;$$

V.  $A_1 = \pi^2 A_2(E_2, E_3, A_2)$ ,  $A_3 = \pi^1 A_2(E_3, E_1, A_2)$  și

$$A_2(\pi^2 A_2(E_2, E_3, A_2), \pi^1 A_2(E_3, E_1, A_2), E_3) = A_2.$$

*Demonstrație.* Fie upla  $(E_2, A_1, A_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_2, E_2\theta = A_1, E_3\theta = A_2$ , obținem  $\Sigma = \Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, A_2, E_2\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, E_3, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_1, A_3)$ ,  $\theta^3 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_2 = \pi^3 A_1(E_2, A_1, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_1$  implică  $A_1\theta^2 = E_2$ , adică  $A_1(A_1, E_1, A_3) = E_2$ , deci  $A_3 = \pi^3 A_1(A_1, E_1, E_2)$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_1$  și  $A_2\theta = \pi^3 A_1(A_1, E_1, E_2)$ , deci utilizând  $A_3 = \pi^3 A_1(A_1, E_1, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ . Din  $A_3 = \pi^3 A_1(A_1, E_1, E_2)$  rezultă  $A_3\theta = \pi^3 A_1(E_1, E_2, A_1)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_3, E_1)$ ,  $\theta^3 = (E_3, A_2, E_2)$ ,  $\theta^4 = (A_2, E_1, A_1)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Deoarece  $A_3\theta = A_3 \Rightarrow A_3\theta^2 = A_3 \Rightarrow A_3(A_1, E_3, E_1) = A_3$ , obținem  $A_1 = \pi^1 A_3(A_3, E_3, E_1)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_3, A_2, E_2) = A_3$ , prin urmare  $A_2 = \pi^2 A_3(E_3, A_3, E_2)$ . Utilizând  $A_1 = \pi^1 A_3(A_3, E_3, E_1)$  și  $A_2 = \pi^2 A_3(E_3, A_3, E_2)$  în  $A_3\theta = A_3$ , avem  $A_3(E_2, \pi^1 A_3(A_3, E_3, E_1), \pi^2 A_3(E_3, A_3, E_2)) = A_3$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile II., atunci, primele două egalități în ultima, obținem

$$A_3(E_2, A_1, A_2) = A_3, \quad (3.10)$$

deci  $A_3\theta = A_3$ . Din  $A_2 = \pi^2 A_3(E_3, A_3, E_2)$  rezultă  $A_3(E_3, A_2, E_2) = A_3$ , adică

$$E_3 = \pi^1 A_3(A_3, A_2, E_2). \quad (3.11)$$

Din  $A_1 = \pi^1 A_3(A_3, E_3, E_1)$  rezultă  $A_1\theta = \pi^1 A_3(A_3, A_2, E_2)$ . Utilizând (3.11) în ultima egalitate obținem  $A_1\theta = E_3$ . Din  $A_1 = \pi^1 A_3(A_3, E_3, E_1)$  obținem  $A_3(A_1, E_3, E_1) = A_3$ , prin urmare

$$E_1 = \pi^3 A_3(A_1, E_3, A_3). \quad (3.12)$$

Egalitatea (3.10) implică  $A_2 = \pi^3 A_3(E_2, A_1, A_3) \Rightarrow A_2\theta = \pi^3 A_3(A_1, E_3, A_3)$ . Aplicând (3.12) în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = E_1$ .

3. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_3, A_3)$ ,  $\theta^3 = (E_3, A_2, E_1)$ ,  $\theta^4 = (A_2, A_3, E_2)$ ,  $\theta^5 = (A_3, E_1, A_1)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_2 = \pi^3 A_1(E_2, A_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1\theta^5 = E_2$ , adică  $A_1(A_3, E_1, A_1) = E_2$ , prin urmare

$A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_2, E_1, A_1)$ . Mai mult, din  $A_1\theta = E_3$  obținem  $A_1\theta^4 = E_1$ , adică  $A_1(A_2, A_3, E_2) = E_1$ . Folosind  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_3)$  și  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_2, E_1, A_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1({}^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_3), {}^{\pi_1} A_1(E_2, E_1, A_1), E_2) = E_1.$$

Reciproc, admitem că au loc egalitățile III., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_3$ , iar a doua implică  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_2, A_3, E_2) = E_1$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_3, E_2)$ , deci  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(E_2, E_1, A_1)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_2, E_1, A_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_3, E_1)$ ,  $\theta^3 = (A_3, E_3, E_2)$ ,  $\theta^4 = (E_3, A_2, A_1)$ ,  $\theta^5 = (A_2, E_1, A_3)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_2\theta^5 = E_3$ , adică  $A_2(A_2, E_1, A_3) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_1$  implică  $A_2\theta^4 = A_3$ , adică  $A_2(E_3, A_2, A_1) = A_3$ , prin urmare  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, A_3)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_1, E_3)$  în ultima egalitate obținem  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_1, E_3))$ , care fiind utilizată în  $A_2\theta = E_1$ , ne dă  $A_2(E_2, {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_1, E_3)), A_2) = E_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci utilizând a doua egalitate în a treia, obținem  $A_2\theta = E_1$ . Prima egalitate din IV. implică  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . De asemenea, utilizând prima egalitate din IV. în a doua, obținem  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, A_2, A_3)$ , care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_1, E_3)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_1, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_3, E_3)$ ,  $\theta^3 = (A_3, E_1, A_2)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_3$  implică  $A_2\theta^3 = E_3$ , deci  $A_2(A_3, E_1, A_2) = E_3$ , prin urmare  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2)$ . Din  $A_2\theta = E_3$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(A_1, A_3, E_3) = A_2$ , care, utilizând  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2)$  și  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2)$ , ia forma  $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2), E_3) = A_2$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = E_3$ , iar din a doua obținem  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din V. în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_1, A_3, E_3) = A_2$ , prin urmare  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, A_3, E_3)$ , care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2)$  și, aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_1, E_3)$ ,  $\theta^3 = (E_1, E_2, A_2)$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1\theta^3 = E_1\theta^2$ , deci  $A_1(E_1, E_2, A_2) = A_1(E_1, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_2 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_2$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Lema 3.5.** *Tripletul  $(A_1, E_2, A_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și*



numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_1), A_3(A_1, E_2, \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_1)) = A_3$ ;
- II.  $A_2 = {}^{(13)}A_1, A_3(A_1, E_2, {}^{(13)}A_1) = A_3$  și  $A_1(A_1, E_2, {}^{(13)}A_1) = E_3$ ;
- III.  $A_2 = \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_3), A_3 = \pi_1 A_1(E_1, E_2, A_1)$  și  
 $A_1(\pi_3 A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_1) = \pi_1 A_1(E_1, E_2, A_1)$ ;
- IV.  $A_1 = \pi_1 A_2(E_1, E_2, A_2), A_3 = \pi_3 A_2(A_2, E_2, E_3)$  și  
 $A_2(E_3, E_2, \pi_1 A_2(E_1, E_2, A_2)) = \pi_3 A_2(A_2, E_2, E_3)$ .

*Demonstrație.* Fie upla  $(A_1, E_2, A_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Folosind  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = E_2, E_3\theta = A_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, A_2, E_2\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, E_3, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_2 = \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_1)$ , deci, aplicând ultima egalitate în  $A_3\theta = A_3$ , obținem

$$A_3(A_1, E_2, \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_1)) = A_3.$$

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_1$  și  $A_2\theta = \pi_3 A_1(E_1, E_2, A_1)$ , deci  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând prima egalitate din I. în cea de-a doua, obținem  $A_3\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_3, E_2)$ ,  $\theta^3 = (A_2, E_2, A_1)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_2$ , adică  $A_1(E_3, E_2, E_1) = A_2$ , deci  $A_2 = {}^{(13)}A_1$ , iar aplicând ultima egalitate în  $A_3\theta = A_3$ , obținem  $A_3(A_1, E_2, {}^{(13)}A_1) = A_3$ . Egalitățile  $A_1\theta = E_3$  și  $A_3(A_1, E_2, {}^{(13)}A_1) = A_3$  implică  $A_1(A_1, E_2, {}^{(13)}A_1) = E_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci primele două dintre ele implică

$$A_1(A_1, E_2, A_2) = E_3, \quad (3.13)$$

deci  $A_1\theta = E_3$ , și din  $A_2 = {}^{(13)}A_1$  rezultă  $A_2 = A_1(E_3, E_2, E_1)$ , prin urmare

$$E_1 = \pi_3 A_1(E_3, E_2, A_2). \quad (3.14)$$

Egalitatea (3.13) implică  $A_2 = \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_2\theta = \pi_3 A_1(E_3, E_2, A_2)$  și, aplicând (3.14), obținem  $A_2\theta = E_1$ . Utilizând prima egalitate din II. în cea de-a doua, obținem  $A_3\theta = A_3$ .

3. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, E_2, A_3)$ ,  $\theta^3 = (A_2, E_2, E_1)$ ,  $\theta^4 = (A_3, E_2, A_1)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_2 = \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_1$ , adică  $A_1(A_3, E_2, A_1) = E_1$ , deci  $A_3 = \pi_1 A_1(E_1, E_2, A_1)$ . Din  $A_1\theta = E_3$ , avem  $A_1\theta^3 = A_3$ , adică  $A_1(A_2, E_2, E_1) = A_3$ . Folosind  $A_2 = \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_3)$  și  $A_3 = \pi_1 A_1(E_1, E_2, A_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1(\pi_3 A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_1) = \pi_1 A_1(E_1, E_2, A_1).$$

Reciproc, admitem că au loc egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_3$ , iar

din cea de-a doua rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din III. în a treia, obținem  $A_1(A_2, E_2, E_1) = A_3$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1(A_3, E_2, E_1)$ , de unde avem  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(E_1, E_2, A_1)$  și, aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , obținem  $A_2\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_2, E_1)$ ,  $\theta^3 = (E_3, E_2, A_1)$ ,  $\theta^4 = (A_2, E_2, A_3)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , care implică  $A_2\theta^4 = E_3$ , adică  $A_2(A_2, E_2, A_3) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_2, E_3)$ . Mai mult,  $A_2\theta = E_1$  implică  $A_2\theta^3 = A_3$ , deci  $A_2(E_3, E_2, A_1) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_1, E_2, A_2)$  și  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_2, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2(E_3, E_2, {}^{\pi_1} A_2(E_1, E_2, A_2)) = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_2, E_3)$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile IV., atunci prima dintre ele implică  $A_2\theta = E_1$ , iar din a doua rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_2(E_3, E_2, A_1) = A_3$ , deci  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_3)$ , care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_2, E_3)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_2, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_2, A_3)$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_1$ , adică  $A_1(E_1, E_2, A_3) = A_1(E_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_3$  este operație de quasigrup.

6. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_2, E_3)$ ,  $\theta^3 = (E_1, E_2, A_2)$ . Din  $A_3\theta = E_1$  rezultă  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_1, E_2, A_2) = A_3(E_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_2 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_2$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Corolarul 3.3.** Dacă un quasigrup ternar  $(Q, A)$  verifică identitatea  $A(A, E_2, {}^{(13)}A) = E_3$  atunci pentru  $\forall a \in Q$  2-retractul său  $B(x, y) = A(x, a, y)$  este autoortogonal.

*Demonstrație.* Fie  $(Q, A)$  un quasigrup ternar care verifică identitatea

$$A(A(x_1^3), E_2(x_1^3), {}^{(13)}A(x_1^3)) = E_3(x_1^3).$$

Substituind  $x_1 \mapsto x_3, x_3 \mapsto x_1$  în ultima egalitate, obținem:

$$A(A(x_3, x_2, x_1), E_2(x_3, x_2, x_1), {}^{(13)}A(x_3, x_2, x_1)) = E_3(x_3, x_2, x_1)$$

care implică  $A({}^{(13)}A(x_1^3), E_2(x_1^3), A(x_1^3)) = E_1(x_1^3)$ , deci

$${}^{(13)}A(A(x_1^3), E_2(x_1^3), {}^{(13)}A(x_1^3)) = E_1(x_1^3).$$

Substituind  $x_2 = a, a \in Q$ , în egalitățile  $A(A(x_1^3), E_2(x_1^3), {}^{(13)}A(x_1^3)) = E_3(x_1^3)$  și  ${}^{(13)}A(A(x_1^3), E_2(x_1^3), {}^{(13)}A(x_1^3)) = E_1(x_1^3)$ , apoi utilizând 2-retractul  $B(x, y) = A(x, a, y)$ , obținem egalitățile  $B(B, {}^{(12)}B) = E$  și  ${}^{(12)}B(B, {}^{(12)}B) = F$ , prin urmare  $B \perp {}^{(12)}B$ , deci  $(Q, B)$  este autoortogonal.  $\square$

**Lema 3.6.** Tripletul  $(A_1, A_2, E_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și

numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = \pi^2 A_1(A_1, E_1, E_2), A_3 = \pi^3 A_1(A_1, E_3, E_1)$  și  
 $A_1(E_1, \pi^3 A_1(A_1, E_3, E_1), \pi^2 A_1(A_1, E_1, E_2)) = A_1$ ;
- II.  $A_1 = \pi^1 A_2(E_1, A_2, E_2), A_3 = \pi^1 A_2(\pi^1 A_2(E_1, A_2, E_2), E_1, A_2)$  și  
 $A_2(A_2, E_3, \pi^1 A_2(\pi^1 A_2(E_1, A_2, E_2), E_1, A_2)) = E_2$ ;
- III.  $A_1 = \pi^1 A_2(E_3, A_2, E_2), A_3 = \pi^1 A_2(E_2, E_3, A_2)$ ;
- IV.  $A_1 = \pi^2 A_3(E_2, A_3, E_1), A_2 = \pi^3 A_3(E_3, E_1, A_3)$  și  
 $A_3(\pi^2 A_3(E_2, A_3, E_1), \pi^3 A_3(E_3, E_1, A_3), E_2) = A_3$ ;
- V.  $A_2 = \pi^2 A_1(A_1, E_3, E_2), A_3 = \pi^1 A_1(E_1, E_3, A_1)$  și  
 $A_1(\pi^2 A_1(A_1, E_3, E_2), A_1, E_1) = \pi^1 A_1(E_1, E_3, A_1)$ .

*Demonstrație.* Fie upla  $(A_1, A_2, E_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = A_2, E_3\theta = E_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, A_2, E_2\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, E_3, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_3, A_2)$ ,  $\theta^3 = (A_1, E_3, A_3)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_2 = \pi^2 A_1(A_1, E_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_1$  implică  $A_2\theta^3 = E_1$ , adică  $A_1(A_1, E_3, A_3) = E_1$ , deci  $A_3 = \pi^3 A_1(A_1, E_3, E_1)$ . Egalitatea  $A_1\theta = E_1$  implică  $A_1\theta^2 = A_1$ , deci  $A_1(E_1, A_3, A_2) = A_1$ . Utilizând  $A_2 = \pi^2 A_1(A_1, E_1, E_2)$  și  $A_3 = \pi^3 A_1(A_1, E_3, E_1)$  în ultima egalitate obținem  $A_1(E_1, \pi^3 A_1(A_1, E_3, E_1), \pi^2 A_1(A_1, E_1, E_2)) = A_1$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile I., atunci din prima dintre ele rezultă  $A_1\theta = E_1$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = \pi^3 A_1(E_1, E_2, A_1)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din I. în a treia, obținem  $A_1(E_1, A_3, A_2) = A_1$ , care implică  $A_2 = \pi^3 A_1(E_1, A_3, A_1)$ , deci  $A_2\theta = \pi^3 A_1(A_1, E_3, E_1)$ . Aplicând  $A_3 = \pi^3 A_1(A_1, E_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_1, A_2)$ ,  $\theta^3 = (E_3, A_1, E_1)$ ,  $\theta^4 = (E_2, A_3, A_1)$ ,  $\theta^5 = (A_2, E_3, A_3)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_1 = \pi^1 A_2(E_1, A_2, E_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_1$  implică  $A_2\theta^2 = A_1$ , deci  $A_2(A_3, E_1, A_2) = A_1$ , de unde rezultă  $A_3 = \pi^1 A_2(A_1, E_1, A_2)$ . Aplicând  $A_1 = \pi^1 A_2(E_1, A_2, E_2)$  în ultima egalitate obținem

$$A_3 = \pi^1 A_2(\pi^1 A_2(E_1, A_2, E_2), E_1, A_2).$$

Egalitatea  $A_2\theta = E_1$ , de asemenea, implică  $A_2\theta^5 = E_2$ , adică  $A_2(A_2, E_3, A_3) = E_2$ . Utilizând  $A_3 = \pi^1 A_2(\pi^1 A_2(E_1, A_2, E_2), E_1, A_2)$  în ultima egalitate obținem

$$A_2(A_2, E_3, \pi^1 A_2(\pi^1 A_2(E_1, A_2, E_2), E_1, A_2)) = E_2.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci din prima egalitate obținem  $A_2\theta = E_1$  și  $A_1\theta = \pi^1 A_2(A_1, E_1, A_2)$ . Utilizând primele două egalități din II. în ultima egalitate obținem  $A_1\theta = A_3$ . Aplicând primele două egalități din II. în a treia, avem  $A_2(A_2, E_3, A_3) = E_2$ , prin

urmare  $A_3 =^{\pi_3} A_2(A_2, E_3, E_2)$ , de unde rezultă  $A_3\theta =^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3$ ,  $A_2\theta = E_3$ ,  $A_3\theta = E_1$  atunci  $\theta^2 = (A_3, E_3, A_2)$ ,  $\theta^3 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_3$  rezultă  $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_3$  implică  $A_2\theta^2 = E_2$ , adică  $A_2(A_3, E_3, A_2) = E_2$ , prin urmare,  $A_3 =^{\pi_1} A_2(E_2, E_3, A_2)$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile III., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = E_3$  și  $A_1\theta =^{\pi_1} A_2(E_2, E_3, A_2)$ . Aplicând  $A_3 =^{\pi_1} A_2(E_2, E_3, A_2)$  în ultima egalitate obținem  $A_1\theta = A_3$ . De asemenea,  $A_3 =^{\pi_1} A_2(E_2, E_3, A_2)$  implică  $A_3\theta =^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ .

4. Dacă  $A_1\theta = E_3$ ,  $A_2\theta = E_1$ ,  $A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, E_1, A_2)$ ,  $\theta^3 = (E_2, A_1, E_1)$ ,  $\theta^4 = (A_2, E_3, A_1)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , adică  $A_3(E_3, E_1, A_2) = A_3$ , deci  $A_2 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ . De asemenea, egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_2, A_1, E_1) = A_3$ , prin urmare,  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$ . Utilizând  $A_2 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$  și  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$  în  $A_3\theta = A_3$  obținem  $A_3(^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1), ^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), E_2) = A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci utilizând primele două egalități în cea de-a treia, obținem

$$A_3(A_1, A_2, E_2) = A_3, \quad (3.15)$$

adică  $A_3\theta = A_3$ . Din a treia egalitate IV. rezultă  $A_3(E_2, A_1, E_1) = A_3$ , deci

$$^{\pi_3} A_3(E_2, A_1, A_3) = E_1. \quad (3.16)$$

Din  $A_2 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$  obținem  $A_2\theta =^{\pi_3} A_3(E_2, A_1, A_3)$  deci, folosind (3.16) în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = E_1$ . De asemenea, din prima egalitate din IV. rezultă  $A_3(E_3, E_1, A_2) = A_3$ , deci

$$^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, A_2) = E_3. \quad (3.17)$$

Din (3.15) obținem  $A_1 =^{\pi_1} A_3(A_3, A_2, E_2)$ , care implică  $A_1\theta =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, A_2)$ . Aplicând (3.17) în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = E_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_3$ ,  $A_2\theta = A_3$ ,  $A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_3, A_2)$ ,  $\theta^3 = (E_2, E_1, A_3)$ ,  $\theta^4 = (A_2, A_1, E_1)$ ,  $\theta^5 = (A_3, E_3, A_1)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_3, E_2)$ . De asemenea, din  $A_1\theta = E_3$  obținem  $A_1\theta^5 = E_1$ , adică  $A_1(A_3, E_3, A_1) = E_1$ , deci  $A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, E_3, A_1)$ . Egalitatea  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1\theta^4 = A_3$ , adică  $A_1(A_2, A_1, E_1) = A_3$ . Utilizând  $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_3, E_2)$  și  $A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, E_3, A_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1(^{\pi_2} A_1(A_1, E_3, E_2), A_1, E_1) =^{\pi_1} A_1(E_1, E_3, A_1).$$

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta =^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din V. în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_2, A_1, E_1) = A_3$ , prin urmare,

$A_2 = {}^{\pi_1} A_1(A_3, A_1, E_1)$ , care implică  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(E_1, E_3, A_1)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_1, E_3, A_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_3, A_2)$ ,  $\theta^3 = (A_1, E_2, E_3)$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , deci  $A_3(A_1, E_2, E_3) = A_3(E_1, E_2, E_3) \Rightarrow A_1 = E_1$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Lema 3.7.** Tripletul  $(E_3, A_1, A_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_1, A_2)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_1)$ ;
- II.  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ ,  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  și  
 $A_3(E_3, {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)$  și  
 $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2), E_3, {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)) = E_1$ ;
- IV.  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_1)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$  și  
 $A_1(E_2, {}^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_1), A_1) = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$ ;
- V.  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_2)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_2, A_1, E_1)$  și  
 $A_1({}^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_2), E_2, {}^{\pi_1} A_1(E_2, A_1, E_1)) = A_1$ .

*Demonstrație.* Fie upla  $(E_3, A_1, A_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_3, E_2\theta = A_1, E_3\theta = A_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, A_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, E_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, A_3, E_1)$ ,  $\theta^3 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, E_1, A_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_1$  implică  $A_2\theta^2 = E_3$ , adică  $A_2(A_2, A_3, E_1) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_1)$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile I., atunci din (3.113) rezultă  $A_2\theta = E_1$ . Mai mult, (3.113) implică  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_1)$ , folosind (3.114) în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ . Din (3.114) rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_3)$ , prin urmare,  $A_3\theta = E_2$ .

2. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$  atunci  $\theta^2 = (A_2, E_1, E_2)$ ,  $\theta^3 = (E_2, E_3, A_1)$ ,  $\theta^4 = (A_1, A_2, E_1)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , adică  $A_3(A_2, E_1, E_2) = A_3$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_2, E_3, A_1) = A_3$ , prin urmare,  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$ . Utilizând  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  și  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  în  $A_3\theta = A_3$ , obținem  $A_3(E_3, {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)) = A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci utilizând primele două dintre ele în cea de-a treia, obținem

$$A_3(E_3, A_1, A_2) = A_3, \quad (3.18)$$

adică  $A_3\theta = A_3$ . Din (3.18) rezultă  $A_3(E_2, E_3, A_1) = A_3$ , deci

$$E_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, A_1). \quad (3.19)$$

Din  $A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  rezultă  $A_2\theta =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, A_1)$ . Aplicând (3.19) în ultima egalitate obținem  $A_2\theta = E_2$ . Prima egalitate din II. implică  $A_3(A_2, E_1, E_2) = A_3$ , deci

$$E_1 =^{\pi_2} A_3(A_2, A_3, E_2). \quad (3.20)$$

Egalitatea (3.18) implică  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, A_2)$ , prin urmare,  $A_1\theta =^{\pi_2} A_3(A_2, A_3, E_2)$ . Utilizând (3.20) în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = E_1$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, A_3, E_2)$ ,  $\theta^3 = (E_2, E_1, A_1)$ ,  $\theta^4 = (A_1, E_3, A_3)$ ,  $\theta^5 = (A_3, A_2, E_1)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_2$  implică  $A_2\theta^5 = E_3$ , adică  $A_2(A_3, A_2, E_1) = E_3$ , prin urmare,  $A_3 =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)$ . Mai mult, din  $A_2\theta = E_2$  avem  $A_2\theta^4 = E_1$ , adică  $A_2(A_1, E_3, A_3) = E_1$ . Utilizând  $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2)$  și  $A_3 =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2(^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_2), E_3, ^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)) = E_1.$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = E_2$ , iar a doua implică  $A_3\theta =^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_1, E_3, A_3) = E_1$ , de unde rezultă  $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_3)$ , deci  $A_1\theta =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)$ . Aplicând  $A_3 =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_1)$  în ultima egalitate obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_1, A_3)$ ,  $\theta^3 = (A_3, E_3, E_2)$ ,  $\theta^4 = (E_2, A_2, A_1)$ ,  $\theta^5 = (A_1, A_3, E_1)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_1$  implică  $A_1\theta^5 = E_2$ , adică  $A_1(A_1, A_3, E_1) = E_2$ , deci  $A_3 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$ . Mai mult,  $A_1\theta = E_1$  implică  $A_1\theta^4 = A_3$ , astfel  $A_1(E_2, A_2, A_1) = A_3$ . Utilizând  $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_1)$  și  $A_3 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1(E_2, ^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_1), A_1) =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1).$$

Reciproc, admitem că au loc egalitățile IV., atunci prima dintre ele implică  $A_1\theta = E_1$ , iar din a doua rezultă  $A_3\theta =^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_1(E_2, A_2, A_1) = A_3$ , care implică  $A_2 =^{\pi_2} A_1(E_2, A_3, A_1)$ , deci  $A_2\theta =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$ . Aplicând  $A_3 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_2, A_3)$ ,  $\theta^3 = (A_3, A_1, E_1)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_2$  implică  $A_1\theta^3 = E_2$ , adică  $A_1(A_3, A_1, E_1) = E_2$ , prin urmare  $A_3 =^{\pi_1} A_1(E_2, A_1, E_1)$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_1$ , deci  $A_1(A_2, E_2, A_3) = A_1$ . Utilizând  $A_2 =^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_2)$  și  $A_3 =^{\pi_1} A_1(E_2, A_1, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(^{\pi_3} A_1(E_3, A_1, E_2), E_2, ^{\pi_1} A_1(E_2, A_1, E_1)) = A_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_2$ , iar din a doua obținem  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din V. în cea de-a treia, avem  $A_1(A_2, E_2, A_3) = A_1$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, A_3)$ , care implică  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(E_2, A_1, E_1)$  și aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_2, A_1, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_2, E_1)$ ,  $\theta^3 = (E_1, A_1, E_3)$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_2\theta^3 = E_1\theta^2$ , deci  $A_2(E_1, A_1, E_3) = A_2(E_1, E_2, E_3)$ , prin urmare,  $A_1 = E_2$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Lema 3.8.** Triplețul  $(A_1, E_3, A_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_2, E_3, A_2)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_2)$ ;
- II.  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)$  și  $A_1(E_1, {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)) = A_1$ ;
- III.  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$ ,  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$  și  $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), E_3, {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)) = A_3$ ;
- IV.  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_2)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$  și  $A_1({}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_2), E_1, A_1) = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$ ;
- V.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_2)$ ,  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)$  și  $A_2(E_3, {}^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_2), {}^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)) = E_2$ .

*Demonstrație.* Fie upla  $(A_1, E_3, A_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = E_3, E_3\theta = A_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, A_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, E_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, A_2, E_2)$ ,  $\theta^3 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_2, E_3, A_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_2$  implică  $A_2\theta^2 = E_3$ , adică  $A_2(A_3, A_2, E_2) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_2)$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = E_2$  și  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ . A doua egalitate din I. implică  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_1$ .

2. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_2, A_3)$ ,  $\theta^3 = (A_1, A_3, E_2)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_1$  implică  $A_1\theta^3 = E_1$ , adică  $A_1(A_1, A_3, E_2) = E_1$ , prin urmare  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)$ . Mai mult, din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_1$ , adică  $A_1(E_1, A_2, A_3) = A_1$ . Utilizând  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1)$  și  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)$  în ultima egalitate, avem  $A_1(E_1, {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)) = A_1$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile II., atunci din prima dintre ele rezultă  $A_1\theta = E_1$ , iar a doua implică  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_1, A_2, A_3) = A_1$ , prin urmare,  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, A_3)$ , de unde rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)$  în ultima egalitate, avem  $A_2\theta = A_3$ .

3. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_2, E_1)$ ,  $\theta^3 = (E_3, E_1, A_1)$ ,  $\theta^4 = (A_2, A_1, E_2)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , adică  $A_3(E_2, A_2, E_1) = A_3$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_3, E_1, A_1) = A_3$ , prin urmare  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ . Utilizând  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$  și  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$  în  $A_3\theta = A_3$ , obținem  $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), E_3, {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)) = A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile III., atunci utilizând primele două dintre ele în a treia, obținem

$$A_3(A_1, E_3, A_2) = A_3, \quad (3.21)$$

deci  $A_3\theta = A_3$ . Din (3.136) rezultă  $A_3(E_3, E_1, A_1) = A_3$ , deci

$$E_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, A_1). \quad (3.22)$$

Din  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$  rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, A_1)$ . Aplicând (3.22) în ultima egalitate obținem  $A_2\theta = E_1$ . Prima egalitate din III. implică  $A_3(E_2, A_1, A_1) = A_3$ , deci

$$E_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, A_2, E_1). \quad (3.23)$$

Egalitatea (3.21) implică  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, A_2)$ , de unde avem  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_3(A_3, A_2, E_1)$ . Aplicând (3.23) în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = E_2$ .

4. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_2, A_3)$ ,  $\theta^3 = (E_3, A_3, E_1)$ ,  $\theta^4 = (A_2, E_1, A_1)$ ,  $\theta^5 = (A_3, A_1, E_2)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_2)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_2$  implică  $A_1\theta^5 = E_1$ , adică  $A_2(A_3, A_1, E_2) = E_3$ , prin urmare  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$ . Mai mult, din  $A_1\theta = E_2$ , obținem  $A_1\theta^4 = A_3$ , adică  $A_1(A_2, E_1, A_1) = A_3$ . Utilizând  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_2)$  și  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1({}^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_2), E_1, A_1) = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2).$$

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile IV., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_2$ , iar a doua implică  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_1(A_2, E_1, A_1) = A_3$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1(A_3, E_1, A_1)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$  în ultima egalitate obținem  $A_1\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, A_2, E_1)$ ,  $\theta^3 = (E_2, E_1, A_1)$ ,  $\theta^4 = (E_3, A_1, A_3)$ ,  $\theta^5 = (A_2, A_3, E_2)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_2)$ . De



asemenea,  $A_2\theta = E_1$  implică  $A_2\theta^5 = E_3$ , deci  $A_2(A_2, A_3, E_2) = E_3$ , deci  $A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_2\theta^4 = E_2$ , adică  $A_2(E_3, A_1, A_3) = E_2$ . Utilizând  $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_2)$  și  $A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2(E_3, {}^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_2), {}^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)) = E_2.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile V., atunci prima dintre ele implică  $A_2\theta = E_1$ , iar din a doua rezultă  $A_3\theta =^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din V. în cea de-a treia, obținem  $A_2(E_3, A_1, A_3) = E_2$ , care implică  $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, E_2, A_3)$ , deci  $A_1\theta =^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)$ . Aplicând  $A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_2, E_2)$ ,  $\theta^3 = (A_1, E_2, E_3)$ . Din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_2\theta^3 = E_2\theta^2$ , deci  $A_2(A_1, E_2, E_3) = A_2(E_1, E_2, E_3)$ , prin urmare,  $A_1 = E_1$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Lema 3.9.** *Tripletul  $(A_1, A_2, E_3)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_3), A_3(A_1, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = A_3$ ;
- II.  $A_2 =^{(12)} A_1, A_3(A_1, {}^{(12)} A_1, E_3) = A_3$  și  $A_1(A_1, {}^{(12)} A_1, E_3) = E_2$ ;
- III.  $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3), A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$  și  
 $A_1({}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3), E_1, E_3) = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$ ;
- IV.  $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_3), A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$  și  
 $A_2(E_2, {}^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_3), E_3) = {}^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$ .

*Demonstrație.* Fie upla  $(A_1, A_2, E_3)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = A_2, E_3\theta = E_3$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, A_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, E_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_3)$ . Aplicând ultima egalitate în  $A_3\theta = A_3$ , obținem

$$A_3(A_1, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = A_3.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_1$  și  $A_2\theta =^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând prima egalitate din I. în cea de-a doua, obținem  $A_3\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, E_1, E_3)$ ,  $\theta^3 = (A_2, A_1, E_3)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_2$ , deci  $A_2 =^{(12)} A_1$ . Aplicând ultima egalitate în  $A_3\theta = A_3$ , obținem  $A_3(A_1, {}^{(12)} A_1, E_3) = A_3$ . Egalitatea  $A_1\theta = E_2$  și  $A_2 =^{(12)} A_1$  implică

$$A_1(A_1, {}^{(12)} A_1, E_3) = E_2.$$

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile II., atunci prima și a treia egalitate implică

$$A_1(A_1, A_2, E_3) = E_2, \quad (3.24)$$

deci  $A_1\theta = E_2$ . Din  $A_2 =^{(12)} A_1$  rezultă

$$E_1 =^{\pi_2} A_1(E_2, A_2, E_3). \quad (3.25)$$

Egalitatea (3.24) implică  $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta =^{\pi_2} A_1(E_2, A_2, E_3)$ . Aplicând (3.25) în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = E_1$ . Din primele două egalități din II. rezultă  $A_3\theta = A_3$ .

3. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_3, E_3)$ ,  $\theta^3 = (A_2, E_1, E_3)$ ,  $\theta^4 = (A_3, A_1, E_3)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_2$  implică  $A_1\theta^4 = E_1$ , adică  $A_1(A_3, A_1, E_3) = E_1$ , deci  $A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$ . Mai mult,  $A_1\theta = E_2$  implică  $A_1\theta^3 = A_3$ , deci  $A_1(A_2, E_1, E_3) = A_3$ . Utilizând  $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3)$  și  $A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1(^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3), E_1, E_3) =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3).$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta =^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_2, E_1, E_3) = A_3$ , deci  $A_2 =^{\pi_1} A_1(A_3, E_1, E_3)$ , care implică  $A_2\theta =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$ . Aplicând  $A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_1, E_3)$ ,  $\theta^3 = (E_2, A_1, E_3)$ ,  $\theta^4 = (A_2, A_3, E_3)$ ,  $\theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_3)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_1$  implică  $A_2\theta^4 = E_2$ , adică  $A_2(A_2, A_3, E_3) = E_2$ , deci  $A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$ . Mai mult,  $A_2\theta = E_1$  implică  $A_2\theta^3 = A_3$ , adică  $A_2(E_2, A_1, E_3) = A_3$ . Utilizând  $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_3)$  și  $A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2(E_2, ^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_3), E_3) =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3).$$

Reciproc, admitem că au loc egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = E_1$ , iar din a doua rezultă  $A_3\theta =^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_2(E_2, A_1, E_3) = A_3$ , prin urmare  $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_2, A_3, E_3)$ , care implică  $A_1\theta =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$ . Aplicând  $A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$  în ultima egalitate, avem  $A_1\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_3, E_3)$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_1$ , adică  $A_1(E_1, A_3, E_3) = A_1(E_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3 = E_2$ , contradicție, deoarece  $A_3$  este operație de quasigrup.

6. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_2, E_3)$ . Din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(A_3, E_2, E_3) = A_2(E_1, E_2, E_3)$ , so  $A_3 = E_1$ , contradicție, deoarece  $A_3$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Corolarul 3.4.** Dacă un quasigrup ternar  $(Q, A)$  verifică identitatea  $A(A, {}^{(12)}A, E_3) = E_2$ , atunci pentru  $\forall a \in Q$ , 3-retractul  $B(x, y) = A(x, y, a)$  este autoortogonal.

*Demonstrație.* Fie  $(Q, A)$  un quasigrup ternar care verifică identitatea  $A(A(x_1^3), {}^{(12)}A(x_1^3), E_3(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$ . Substituind  $x_1 \mapsto x_2, x_2 \mapsto x_1$  în ultima egalitate, obținem:

$$A(A(x_2, x_1, x_3), {}^{(12)}A(x_2, x_1, x_3), E_3(x_2, x_1, x_3)) = E_2(x_2, x_1, x_3)$$

care implică  $A({}^{(12)}A(x_1^3), A(x_1^3), E_3(x_1^3)) = E_1(x_1^3)$ , deci

$${}^{(12)}A(A(x_1^3), {}^{(12)}A(x_1^3), E_3(x_1^3)) = E_1(x_1^3).$$

Substituind  $x_3 = a$ , unde  $a \in Q$ , în egalitățile  $A(A(x_1^3), {}^{(12)}A(x_1^3), E_3(x_1^3)) = E_2(x_1^3)$  și  ${}^{(12)}A(A(x_1^3), {}^{(12)}A(x_1^3), E_3(x_1^3)) = E_1(x_1^3)$ , apoi utilizând 3-retractul  $B(x, y) = A(x, y, a)$ , obținem egalitățile  $B(B, {}^{(12)}B) = E$  și  ${}^{(12)}B(B, {}^{(12)}B) = F$ , prin urmare,  $B \perp {}^{(12)}B$ , deci  $(Q, B)$  este autoortogonal.  $\square$

Din Lemele 3.1-3.9 rezultă

**Teorema 3.2.** Există exact 42 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare și trei selectori ternari care admit cel puțin o paratopie, componentele căreia sunt două quasigrupuri ternare și un selector ternar.

### 3.1.3. Paratopiile definite de un quasigrup și doi selectori

În acest paragraf sunt descrise sistemele ortogonale de quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie, componentele căreia sunt un quasigrup ternar și doi selectori ternari. Există 18 cazuri posibile pentru ca un triplet cu un quasigrup ternar și doi selectori ternari să fie paratopie a acestui sistem, deoarece fiecare doi selectori ternari poate ocupa oricare două poziții ale tripletului.

**Lema 3.10.** Tripletul  $(E_1, E_2, A_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(E_1, E_2, A_1), A_3 = {}^{\pi_3} A_1$  și  $A_1(E_1, E_2, A_1(E_1, E_2, A_1)) = {}^{\pi_3} A_1$ ;
- II.  $A_3 = A_1(E_1, E_2, A_1), A_2 = {}^{\pi_3} A_1$  și  $A_1(E_1, E_2, A_1(E_1, E_2, A_1)) = {}^{\pi_3} A_1$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_3) = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_2, A_2)$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_1, E_2, A_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_1, E_2\theta = E_2, E_3\theta = A_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1, E_2, A_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_3, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_2, A_2), \theta^3 = (E_1, E_2, A_3)$ ,

$\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_1, E_2, A_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^3 = E_3$ , adică  $A_1(E_1, E_2, A_3) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_3$ , adică  $A_1(E_1, E_2, A_2) = A_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_1, E_2, A_1)$  și  $A_3 = {}^{\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_1, E_2, A_1(E_1, E_2, A_1)) = {}^{\pi_3} A_1$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din a doua rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din I. în a treia, obținem  $A_1(E_1, E_2, A_2) = A_3$ , prin urmare,  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_3)$ , care implică  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_3\theta = A_3$ , adică  $A_3(E_1, E_2, A_1) = A_3$ , implică  $A_1 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $A_2\theta = A_2$ , adică  $A_2(E_1, E_2, A_1) = A_2$ , implică  $A_1 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_2, A_3), \theta^3 = (E_1, E_2, A_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(E_1, E_2, A_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^3 = E_3$ , adică  $A_1(E_1, E_2, A_2) = E_3$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_2$ , adică  $A_1(E_1, E_2, A_3) = A_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(E_1, E_2, A_1)$  și  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_1, E_2, A_1(E_1, E_2, A_1)) = {}^{\pi_3} A_1$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile II., atunci prima dintre ele implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , prin urmare,  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_1, E_2, A_3) = A_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_2)$ , care implică  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_2\theta = A_2$ , adică  $A_2(E_1, E_2, A_1) = A_2$ , implică  $A_1 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.

6. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_3)$ . Din  $A_3\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_2, A_2)$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile III., atunci a doua egalitate implică  $A_3\theta = A_2$ . Din prima egalitate din III. rezultă  $A_2\theta = A_3$  și  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_1\theta = E_3$ .  $\square$

**Lema 3.11.** *Tripletul  $(E_2, E_1, A_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_2 = A_1(E_2, E_1, A_1), A_3 = {}^{(12)\pi_3} A_1$  și  $A_1(E_1, E_2, A_1(E_2, E_1, A_1)) = {}^{(12)\pi_3} A_1$ ;
- II.  $A_3 = A_1(E_2, E_1, A_1), A_2 = {}^{(12)\pi_3} A_1$  și  $A_1(E_1, E_2, A_1(E_2, E_1, A_1)) = {}^{(12)\pi_3} A_1$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2) = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_1, A_3)$ ;

IV.  $A_2(E_2, E_1, A_1) = A_3$  și  $A_1 = {}^{(12)\pi_3} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_2, E_1, A_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_2, E_2\theta = E_1, E_3\theta = A_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_2, E_1, A_1\}$ , deci sunt șase cazuri posibile:

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_2, A_2), \theta^3 = (E_2, E_1, A_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_2, E_1, A_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^3 = E_3$ , adică  $A_1(E_2, E_1, A_3) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{(12)\pi_3} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^2 = A_3$ , adică  $A_1(E_1, E_2, A_2) = A_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_2, E_1, A_1)$  și  $A_3 = {}^{(12)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate obținem

$$A_1(E_1, E_2, A_1(E_2, E_1, A_1)) = {}^{(12)\pi_3} A_1.$$

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din I. în cea de-a treia obținem  $A_1(E_1, E_2, A_2) = A_3$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_3)$ , prin urmare,  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_2, E_1, E_3)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(12)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_2, A_2)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , adică  $A_3(E_1, E_2, A_2) = A_3$ , deci  $A_2 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_2$  este operație de quasigrup.

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_2, A_3)$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(E_1, E_2, A_3) = A_2$ , so  $A_3 = E_3$ , contradicție, deoarece  $A_3$  este operație de quasigrup.

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_2, A_3), \theta^3 = (E_2, E_1, A_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(E_2, E_1, A_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^3 = E_3$ , adică  $A_1(E_2, E_1, A_2) = E_3$ , deci  $A_2 = {}^{(12)\pi_3} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^2 = A_2$ , adică  $A_1(E_1, E_2, A_3) = A_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(E_2, E_1, A_1)$  și  $A_2 = {}^{(12)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate obținem

$$A_1(E_1, E_2, A_1(E_2, E_1, A_1)) = {}^{(12)\pi_3} A_1.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , prin urmare,  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din II. în a treia, obținem  $A_1(E_1, E_2, A_3) = A_2$ , care implică  $A_3 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_2, E_1, E_3)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(12)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_1, A_3)$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima dintre ele implică  $A_2\theta = A_2$ , iar din a doua rezultă  $A_3\theta = A_3$ . De asemenea, din a doua egalitate din III. rezultă  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_2, A_3)$ , deci  $A_1\theta = E_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1 = {}^{(12)\pi_3} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_2(E_2, E_1, A_1)$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = A_3$ . De asemenea, din a doua egalitate din IV. rezultă  $A_3\theta = A_2(E_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = A_2$ .  $\square$

**Lema 3.12.** Tripletul  $(E_1, A_1, E_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_2), A_3 = {}^{(23)\pi_3} A_1$  și  $A_1(E_1, {}^{(23)\pi_3} A_1, A_1(E_1, A_1, E_2)) = E_3$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2), A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$  și  $A_3(E_1, {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2), A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$  și  $A_2(E_1, {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)) = A_2$ ;
- IV.  $A_2 = {}^{(23)\pi_3} A_1, A_3 = A_1(E_1, A_1, E_2)$  și  $A_1(E_1, {}^{(23)\pi_3} A_1, A_1(E_1, A_1, E_2)) = E_3$ ;
- V.  $A_1 = {}^{(23)\pi_2} A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2) = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_1, A_1, E_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_1, E_2\theta = A_1, E_3\theta = E_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_3, A_2, A_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_3, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_2, A_1), \theta^3 = (E_1, A_3, A_2), \theta^4 = (E_1, E_3, A_3), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^4 = E_2$ , adică  $A_1(E_1, E_3, A_3) = E_2$ , deci  $A_3 = {}^{(23)\pi_3} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^3 = E_3$ , adică  $A_1(E_1, A_3, A_2) = E_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_2)$  și  $A_3 = {}^{(23)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_1, {}^{(23)\pi_3} A_1, A_1(E_1, A_1, E_2)) = E_3$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din I. în a treia, obținem  $A_1(E_1, A_3, A_2) = E_3$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_3, E_3)$ , prin urmare  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_3, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(23)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_2, A_1), \theta^3 = (E_1, E_3, A_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$ . De asemenea, din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^3 = A_3$ , deci  $A_3(E_1, E_3, A_2) = A_3$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$ . Mai mult,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^2 = A_3$ , deci  $A_3(E_1, A_2, A_1) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$  și  $A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_3(E_1, {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)) = A_3.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci prima dintre ele implică  $A_3\theta = A_3$ , iar a doua

implică  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_2, A_3)$ , deci  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_3(E_1, A_2, A_1) = A_3$ , care implică  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, A_2, A_3)$ , prin urmare  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_3, A_1), \theta^3 = (E_1, E_3, A_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$ . De asemenea, din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(E_1, E_3, A_3) = A_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$ . Mai mult,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_3(E_1, A_3, A_1) = A_2$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$  și  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2(E_1, {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)) = A_2.$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din III. în a treia, obținem  $A_2(E_1, A_3, A_1) = A_2$ , care implică  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, A_3, A_2)$ , prin urmare  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_3, A_1), \theta^3 = (E_1, A_2, A_3), \theta^4 = (E_1, E_3, A_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(E_1, A_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_2$ , adică  $A_1(E_1, E_3, A_2) = E_2$ , deci  $A_2 = {}^{(23)\pi_3} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^3 = E_3$ , adică  $A_1(E_1, A_2, A_3) = E_3$ . Utilizând  $A_3 = A_1(E_1, A_1, E_2)$  și  $A_2 = {}^{(23)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_1, {}^{(23)\pi_3} A_1, A_1(E_1, A_1, E_2)) = E_3$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , prin urmare,  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_1, A_2, A_3) = E_3$ , care implică  $A_3 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_3, E_2)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(23)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1 = {}^{(23)\pi_1} A_1$ . Egalitatea  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile V., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_3$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar cea de-a treia implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, E_3, A_1), \theta^3 = \varepsilon$ . Observăm că  $A_2 = A_2\theta^3 = A_3\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este un sistem ortogonal.  $\square$

**Lema 3.13.** *Tripletul  $(E_2, A_1, E_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

I.  $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_3, A_2 = A_3(E_3, E_1, A_3)$  și

$$^{(132)\pi_2} A_3(E_2, ^{(132)\pi_2} A_3, E_1) = A_3(E_3, E_1, A_3);$$

$$\text{II. } A_1 = ^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1), A_2 = ^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3) \text{ și}$$

$$^{\pi_2} A_3(^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), A_3, ^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)) = E_3;$$

$$\text{III. } A_1 = ^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1), A_3 = ^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2) \text{ și}$$

$$^{\pi_2} A_2(^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2), A_2, ^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)) = E_3;$$

$$\text{IV. } A_1 = ^{(132)\pi_2} A_2, A_3 = A_2(E_3, E_1, A_2) \text{ și } A_2(A_2, E_3, A_2(E_3, E_1, A_2)) = ^{(132)\pi_2} A_2;$$

$$\text{V. } A_1 = ^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1) = ^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1) \text{ și } A_1 = ^{(132)\pi_2} A_1;$$

$$\text{VI. } A_1 = ^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), A_3 = A_2(E_3, E_1, ^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2)) \text{ și } A_1 = ^{(132)\pi_2} A_1.$$

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_2, A_1, E_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_2, E_2\theta = A_1, E_3\theta = E_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_2, A_1, E_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_3, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_2, E_2), \theta^3 = (A_2, A_3, A_1), \theta^4 = (A_3, E_3, A_2), \theta^5 = (E_3, E_1, A_3), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = E_3$  rezultă  $A_1 = ^{(132)\pi_2} A_3$ . Egalitatea  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_2\theta^6 = A_3\theta^5$ , deci  $A_2 = A_3(E_3, E_1, A_3)$ . Utilizând  $A_1 = ^{(132)\pi_2} A_3$  și  $A_2 = A_3(E_3, E_1, A_3)$  în  $A_1\theta = A_2$ , obținem  $^{(132)\pi_2} A_3(E_2, ^{(132)\pi_2} A_3, E_1) = A_3(E_3, E_1, A_3)$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_3\theta = E_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = A_3$ . Utilizând primele două egalități din I. în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_2, A_1, E_1) = A_2$ , care implică  $A_1\theta = A_2$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_2, E_2), \theta^3 = (A_2, E_3, A_1), \theta^4 = (E_3, E_1, A_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = ^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^4 = A_3$ , adică  $A_3(E_3, E_1, A_2) = A_3$ , deci  $A_2 = ^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ . Egalitatea  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^2 = E_3$ . Aplicând  $A_1 = ^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $^{\pi_2} A_3(A_2, A_3, A_1) = E_3$ . Utilizând  $A_1 = ^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$  și  $A_2 = ^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$  în ultima egalitate, avem  $^{\pi_2} A_3(^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), A_3, ^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)) = E_3$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile II., atunci din prima egalitate rezultă  $A_3\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = ^{\pi_3} A_3(E_1, E_2, A_3)$ , deci  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $^{\pi_2} A_3(A_2, A_3, A_1) = E_3$ , care implică  $A_1 = ^{\pi_3} A_3(A_2, E_3, A_3)$ , deci  $A_1\theta = ^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ . Aplicând  $A_2 = ^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_3, E_2), \theta^3 = (A_3, E_3, A_1), \theta^4 = (E_3, E_1, A_3), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = ^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^4 = A_2$ , adică  $A_2(E_3, E_1, A_3) = A_2$ , deci  $A_3 = ^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2)$ . Egalitatea  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^2 = E_3$ , aplicând  $A_1 = ^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $^{\pi_2} A_2(A_3, A_2, A_1) = E_3$ . Utilizând  $A_1 = ^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$  și  $A_3 = ^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2)$ , avem



$$\pi_2 A_2(\pi_3 A_2(E_3, E_1, A_2), A_2, \pi_2 A_2(E_2, A_2, E_1)) = E_3.$$

Reciproc, admitem că au loc egalitățile III., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = \pi_3 A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din III. în a treia, obținem  $\pi_2 A_2(A_3, A_2, A_1) = E_3$ , care implică  $A_1 = \pi_3 A_2(A_3, E_3, A_2)$ , deci  $A_1\theta = \pi_3 A_2(E_3, E_1, A_2)$ . Aplicând  $A_3 = \pi_3 A_2(E_3, E_1, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_3, E_2), \theta^3 = (A_3, A_2, A_1), \theta^4 = (A_2, E_3, A_3), \theta^5 = (E_3, E_1, A_2), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_3$  rezultă  $A_1 = {}^{(132)}\pi_2 A_2$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_3\theta^6 = A_2\theta^5$ , deci  $A_3 = A_2(E_3, E_1, A_2)$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_1\theta^6 = A_2\theta^4$ , adică  $A_1 = A_2(A_2, E_3, A_3)$ . Utilizând  $A_1 = {}^{(132)}\pi_2 A_2$  și  $A_3 = A_2(E_3, E_1, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2(A_2, E_3, A_2(E_3, E_1, A_2)) = {}^{(132)}\pi_2 A_2$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile IV., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = E_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = A_2$ . Utilizând primele două egalități din IV. în cea de-a treia, obținem  $A_1 = A_2(A_2, E_3, A_3)$ , care implică  $A_1\theta = A_2(E_3, E_1, A_2)$  și aplicând  $A_3 = A_2(E_3, E_1, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{(132)}\pi_2 A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = \pi_2 A_2(E_2, A_2, E_1)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = \pi_2 A_3(E_2, A_3, E_1)$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1 = E_3$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_3, E_2), \theta^3 = (E_3, E_1, A_1), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1 = {}^{(132)}\pi_2 A_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(A_1, E_3, E_2) = A_2$ , deci  $A_1 = \pi_1 A_2(A_2, E_3, E_2)$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_3\theta^4 = A_2\theta^3$ , deci  $A_3 = A_2(E_3, E_1, A_1)$ . Aplicând  $A_1 = \pi_1 A_2(A_2, E_3, E_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_3 = A_2(E_3, E_1, \pi_1 A_2(A_2, E_3, E_2)).$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile VI., atunci prima dintre ele implică  $A_1\theta = E_3$ , deci,  $\theta^2 = (A_1, E_3, E_2), \theta^3 = (E_3, E_1, A_1)$  și  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din a doua egalitate din VI. rezultă  $A_2(A_1, E_3, E_2) = A_2$ , deci  $A_2\theta^2 = A_2$  care implică

$$A_2\theta^3 = A_2\theta. \quad (3.26)$$

Aplicând a doua egalitate din VI. în cea de-a treia, obținem  $A_3 = A_2(E_3, E_1, A_1)$ , deci

$$A_3 = A_2\theta^3. \quad (3.27)$$

Din (3.27) și (3.26) rezultă  $A_2\theta = A_3$  și (3.27) implică  $A_3\theta = A_2$ . □

**Lema 3.14.** Tripletul  $(A_1, E_1, E_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una

din următoarele condiții:

- I.  $A_3 = {}^{(132)\pi_1} A_1, A_2 = A_1(A_1, E_1, E_2)$  și  $A_1(E_3, {}^{(132)\pi_1} A_1, A_1(A_1, E_1, E_2)) = E_2$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  și  
 $A_3(E_3, {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2), A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$  și  
 $A_2(E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)) = A_2$ ;
- IV.  $A_2 = {}^{(132)\pi_3} A_1, A_3 = A_1(A_1, E_1, E_2)$  și  
 $A_1(E_3, {}^{(132)\pi_3} A_1, A_1(A_1, E_1, E_2)) = E_2$ ;
- V.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2) = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  și  $A_1 = {}^{(123)\pi_1} A_1$ ;
- VI.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1), A_3 = A_2({}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1), E_1, E_2)$  și  $A_1 = {}^{(123)\pi_1} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(A_1, E_1, E_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = E_1, E_3\theta = E_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, E_1, E_2\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_3, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, A_1, E_1), \theta^3 = (A_3, A_2, A_1), \theta^4 = (E_3, A_3, A_2), \theta^5 = (E_2, E_3, A_3), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(A_1, E_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^5 = E_1$ , adică  $A_1(E_2, E_3, A_3) = E_1$ , deci  $A_3 = {}^{(132)\pi_3} A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_2$  obținem  $A_1\theta^4 = E_2$ , adică  $A_1(E_3, A_3, A_2) = E_2$ . Utilizând  $A_2 = A_1(A_1, E_1, E_2)$  și  $A_3 = {}^{(132)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, avem  $A_1(E_3, {}^{(132)\pi_3} A_1, A_1(A_1, E_1, E_2)) = E_2$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci prima dintre ele implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din I. în a treia, obținem  $A_1(E_3, A_3, A_2) = E_2$ , prin urmare  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_3, A_3, E_2)$ , care implică  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_2, E_3, E_1)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(132)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, avem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, A_1, E_1), \theta^3 = (E_3, A_2, A_1), \theta^4 = (E_2, E_3, A_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^4 = A_3$ , adică  $A_3(E_2, E_3, A_2) = A_3$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^3 = A_3$ , deci  $A_3(E_3, A_2, A_1) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  și  $A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  în ultima egalitate, avem  $A_3(E_3, {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)) = A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_2, A_3)$ , deci  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_3(E_3, A_2, A_1) = A_3$ , deci  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, A_2, A_3)$ , care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, A_1, E_1), \theta^3 = (E_3, A_3, A_1), \theta^4 = (E_2, E_3, A_3), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^4 = A_2$ , adică  $A_2(E_2, E_3, A_3) = A_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$ . Din  $A_2\theta = A_2$

rezultă  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(E_3, A_3, A_1) = A_2$ . Utilizând  $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)$  și  $A_3 =^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$  în ultima egalitate, avem  $A_2(E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)) = A_2$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$ , din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta =^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din III. în a treia egalitate, obținem  $A_2(E_3, A_3, A_1) = A_2$ , deci  $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_3, A_3, A_2)$ , care implică  $A_1\theta =^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$ . Aplicând  $A_3 =^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3$ ,  $A_2\theta = E_3$ ,  $A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, A_1, E_1)$ ,  $\theta^3 = (A_2, A_3, A_1)$ ,  $\theta^4 = (E_3, A_2, A_3)$ ,  $\theta^5 = (E_2, E_3, A_2)$ ,  $\theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(A_1, E_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^5 = E_1$ , adică  $A_1(E_2, E_3, A_2) = E_1$ , deci  $A_2 =^{(132)\pi_3} A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_3$  obținem  $A_1\theta^4 = E_2$ , deci  $A_1(E_3, A_2, A_3) = E_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(A_1, E_1, E_2)$  și  $A_2 =^{(132)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, avem  $A_1(E_3, {}^{(132)\pi_3} A_1, A_1(A_1, E_1, E_2)) = E_2$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta =^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , deci  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_1(E_3, A_2, A_3) = E_2$ , prin urmare,  $A_3 =^{\pi_3} A_1(E_3, A_2, E_2)$ , care implică  $A_3\theta =^{\pi_3} A_1(E_2, E_3, E_1)$ . Aplicând  $A_2 =^{(132)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, avem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_3$ ,  $A_2\theta = A_2$ ,  $A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = E_3$  implică  $A_1 =^{(123)\pi_1} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)$  și  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_1 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile V., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_3$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_3$ ,  $A_2\theta = A_3$ ,  $A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_1, E_1)$ ,  $\theta^3 = (E_2, E_3, A_1)$ ,  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1 =^{(123)\pi_1} A_1$ . Egalitatea  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(E_3, A_1, E_1) = A_2$ , prin urmare,  $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1)$ . Folosind ultima egalitate în  $A_2\theta = A_3$ , obținem

$$A_3 = A_2({}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1), E_1, E_2).$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile VI., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_3$ . Utilizând a doua egalitate VI. în cea de-a treia, obținem  $A_2\theta = A_3$ . Din  $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1)$  rezultă

$$A_2(E_3, A_1, E_1) = A_2. \quad (3.28)$$

A doua și a treia egalitate din VI. implică  $A_3\theta = A_2(E_3, A_1, E_1)$ . Aplicând (3.28) în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ . □

**Lema 3.15.** Tripletul  $(A_1, E_2, E_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_1), A_3 = {}^{(13)\pi_3} A_1$  și  $A_1({}^{(13)\pi_3} A_1, E_2, A_1(A_1, E_2, E_1)) = E_1$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1), A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3)$  și  $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3), E_2, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1), A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2)$  și  $A_2({}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2), E_2, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)) = A_2$ ;
- IV.  $A_1 = {}^{(13)\pi_1} A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1) = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)$ ;
- V.  $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_1), A_2 = {}^{(13)\pi_3} A_1$  și  $A_1({}^{(13)\pi_3} A_1, E_2, A_1(A_1, E_2, E_1)) = E_3$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(A_1, E_2, E_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = E_2, E_3\theta = E_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, E_2, E_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_3, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_2, A_1), \theta^3 = (A_3, E_2, A_2), \theta^4 = (E_3, E_2, A_3), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^4 = E_1$ , adică  $A_1(E_3, E_2, A_3) = E_1$ , deci  $A_3 = {}^{(13)\pi_3} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^3 = E_3$ , adică  $A_1(A_3, E_2, A_2) = E_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_1)$  și  $A_3 = {}^{(13)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1({}^{(13)\pi_3} A_1, E_2, A_1(A_1, E_2, E_1)) = E_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , prin urmare,  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din I. în a treia, obținem  $A_1(A_3, E_2, A_2) = E_3$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(A_3, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_3, E_2, E_1)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(13)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_2, A_1), \theta^3 = (E_3, E_2, A_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_3, E_2, A_2) = A_3$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3)$ . Mai mult, din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , adică  $A_3(A_2, E_2, A_1) = A_3$ . Aplicând  $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_1)$  și  $A_3 = {}^{(13)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3), E_2, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)) = A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci din prima egalitate rezultă  $A_3\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_2, A_3)$ , deci  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_3(A_2, E_2, A_1) = A_3$ , care implică  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(A_2, E_2, A_3)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_2, A_1), \theta^3 = (E_3, E_2, A_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(E_3, E_2, A_3) = A_2$ , de unde rezultă  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2)$ . Mai mult, din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , prin urmare  $A_2(A_3, E_2, A_1) = A_2$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)$  și

$A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2({}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2), E_2, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)) = A_2.$$

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile III., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_2)$ , deci  $A_3\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_3, E_2, A_1) = A_2$ , care implică  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(A_3, E_2, A_2)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_2, A_1), \theta^3 = (A_2, E_2, A_3), \theta^4 = (E_3, E_2, A_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_1$ , adică  $A_1(E_3, E_2, A_2) = E_1$ , deci  $A_2 = {}^{(13)\pi_3} A_1$ . Egalitatea  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^3 = E_3$ , adică  $A_1(A_2, E_2, A_3) = E_3$ . Utilizând  $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_1)$  și  $A_2 = {}^{(13)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1({}^{(13)\pi_3} A_1, E_2, A_1(A_1, E_2, E_1)) = E_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_1, E_2, A_1)$ , deci  $A_2\theta = E_3$ . Utilizând primele două egalități din IV. în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_2, E_2, A_3) = E_3$ , care implică  $A_3 = {}^{\pi_3} A_1(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_3, E_2, E_1)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(13)\pi_3} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1 = {}^{(13)\pi_1} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_2, E_2, E_1)$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_3$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, E_2, A_1), \theta^3 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_2\theta^3 = A_3\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , deci  $A_2 = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.  $\square$

**Lema 3.16.** Tripletul  $(E_1, E_3, A_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(E_1, E_3, A_1), A_3 = {}^{(23)\pi_2} A_1$  și  $A_1(E_1, A_1(E_1, E_3, A_1), {}^{(23)\pi_2} A_1) = E_2$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$  și  $A_3(E_1, {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$  și  $A_2(E_1, {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)) = A_2$ ;
- IV.  $A_3 = A_1(E_1, E_3, A_1), A_2 = {}^{(23)\pi_2} A_1$  și  $A_1(E_1, A_1(E_1, E_3, A_1), {}^{(23)\pi_2} A_1) = E_2$ ;
- V.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2) = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$  și  $A_1 = {}^{(23)\pi_3} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_1, E_3, A_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_1, E_2\theta = E_3, E_3\theta = A_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1, E_3, A_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_2, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_1, A_2), \theta^3 = (E_1, A_2, A_3), \theta^4 = (E_1, A_3, E_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_1, E_3, A_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^4 = E_3$ , adică  $A_1(E_1, A_3, E_2) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{(23)}\pi_2 A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_1\theta^3 = E_2$ , adică  $A_1(E_1, A_2, A_3) = E_2$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_1, E_3, A_1)$  și  $A_3 = {}^{(23)}\pi_2 A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_1, A_1(E_1, E_3, A_1), {}^{(23)}\pi_2 A_1) = E_2$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din I în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_1, A_2, A_3) = E_2$ , prin urmare,  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_3)$ , care implică  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_3, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(23)}\pi_2 A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_1, A_2), \theta^3 = (E_1, A_2, E_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_1, A_2, E_2) = A_3$ , prin urmare,  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$ . Mai mult,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^2 = A_3$ , deci  $A_3(E_1, A_1, A_2) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$  și  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_3(E_1, {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)) = A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din II. în a treia, obținem  $A_3(E_1, A_1, A_2) = A_3$ , prin urmare,  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, A_2)$ , care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_1, A_3), \theta^3 = (E_1, A_3, E_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(E_1, A_3, E_2) = A_2$ , prin urmare,  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$ . Mai mult,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^2 = A_2$ , deci  $A_2(E_1, A_1, A_3) = A_2$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$  și  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2(E_1, {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)) = A_2$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile III., atunci prima dintre ele implică  $A_2\theta = A_2$ , iar din a doua rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_2(E_1, A_1, A_3) = A_2$ , prin urmare,  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_2, A_3)$ , care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_1, A_3), \theta^3 = (E_1, A_3, A_2),$

$\theta^4 = (E_1, A_2, E_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(E_1, E_3, A_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_3$ , adică  $A_1(E_1, A_2, E_2) = E_3$ , deci  $A_2 = {}^{(23)\pi_2} A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_1\theta^3 = E_2$ , adică  $A_1(E_1, A_3, A_2) = E_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(E_1, E_3, A_1)$  și  $A_2 = {}^{(23)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_1, A_1(E_1, E_3, A_1), {}^{(23)\pi_2} A_1) = E_2$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_1(E_1, A_3, A_2) = E_2$ , prin urmare,  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_2)$ , care implică  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_3, E_2)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(23)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = E_2$  implică  $A_1 = {}^{(23)\pi_3} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$ , iar din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile V., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_2$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar din a treia egalitate rezultă  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_1, E_2), \theta^3 = \varepsilon$ . Observăm că  $A_2 = A_2\theta^3 = A_3\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.

□

**Lema 3.17.** *Tripletul  $(E_3, E_1, A_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_1 = {}^{(123)\pi_3} A_3, A_2 = A_3(E_2, A_3, E_1)$  și  
 $A_3(A_3, A_3(E_2, A_3, E_1), E_2) = {}^{(123)\pi_3} A_3$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$  și  
 $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1), {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), E_2) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2), A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$  și  
 $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1), {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2), E_2) = A_2$ ;
- IV.  $A_1 = {}^{(123)\pi_3} A_2, A_3 = A_2(E_2, A_2, E_1)$  și  
 $A_2(A_2, A_2(E_2, A_2, E_1), E_2) = {}^{(123)\pi_3} A_2$ ;
- V.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2) = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$  și  $A_1 = {}^{(132)\pi_3} A_1$ ;
- VI.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), A_3 = A_2(E_2, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), E_1)$  și  $A_1 = {}^{(123)\pi_3} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_3, E_1, A_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_3, E_2\theta = E_1, E_3\theta = A_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_3, E_1, A_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_2, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_3, A_2), \theta^3 = (A_2, A_1, A_3), \theta^4 = (A_3, A_2, E_2), \theta^5 = (E_2, A_3, E_1), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{(123)\pi_3} A_3$ . Egalitatea

$A_2\theta = A_3$  implică  $A_2\theta^6 = A_3\theta^5$ , deci  $A_2 = A_3(E_2, A_3, E_1)$ . De asemenea  $A_3\theta = E_2$  implică  $A_3\theta^4 = A_1$ , adică  $A_3(A_3, A_2, E_2) = A_1$ . Utilizând  $A_1 = {}^{(123)}\pi_3 A_3$  și  $A_2 = A_3(E_2, A_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_3(A_3, A_3(E_2, A_3, E_1), E_2) = {}^{(123)}\pi_3 A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_3\theta = E_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = A_3$ . Utilizând primele două egalități din I. în cea de-a treia, obținem  $A_3(A_3, A_2, E_2) = A_1$  care implică  $A_1\theta = A_3(E_2, A_3, E_1)$ . Aplicând  $A_2 = A_3(E_2, A_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_3, A_2), \theta^3 = (A_2, A_1, E_2), \theta^4 = (E_2, A_2, E_1), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^4 = A_3$ , adică  $A_3(E_2, A_2, E_1) = A_3$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$ . Mai mult,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(A_2, A_1, E_2) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$  și  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_3({}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1), {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), E_2) = A_3.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_3(A_2, A_1, E_2) = A_3$ , care implică  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(A_2, A_3, E_2)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_3, A_3), \theta^3 = (A_3, A_1, E_2), \theta^4 = (E_2, A_3, E_1), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^4 = A_2$ , adică  $A_2(E_2, A_3, E_1) = A_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$ . Mai mult,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(A_3, A_1, E_2) = A_2$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2)$  și  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1), {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_3), E_2) = A_2.$$

Reciproc, admitem că au loc egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din III. în a treia, obținem  $A_2(A_3, A_1, E_2) = A_2$  care implică  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(A_3, A_2, E_2)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_3, A_3), \theta^3 = (A_3, A_1, A_2), \theta^4 = (A_2, A_3, E_2), \theta^5 = (E_2, A_2, E_1), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{(123)}\pi_3 A_2$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_3\theta^6 = A_2\theta^5$ , deci  $A_3 = A_2(E_2, A_2, E_1)$ . De asemenea,  $A_2\theta = E_2$  implică  $A_2\theta^4 = A_1$ , adică  $A_2(A_2, A_3, E_2) = A_1$ . Utilizând  $A_1 = {}^{(123)}\pi_3 A_2$  și  $A_3 = A_2(E_2, A_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2(A_2, A_2(E_2, A_2, E_1), E_2) = {}^{(123)}\pi_3 A_2$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = E_2$ , iar



din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = A_2$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_2(A_2, A_3, E_2) = A_1$  care implică  $A_1\theta = A_2(E_2, A_2, E_1)$ . Aplicând  $A_3 = A_2(E_2, A_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{(123)}\pi_3 A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$ .

Reciproc, fie ca au loc egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1 = E_2$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_3, E_2), \theta^3 = (E_2, A_1, E_1), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{(123)}\pi_3 A_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(A_1, E_3, E_2) = A_2$ , deci  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2)$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_3\theta^4 = A_2\theta^3$ , deci  $A_3 = A_2(E_2, A_1, E_1)$ . Aplicând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_3 = A_2(E_2, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), E_1).$$

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile VI., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_2$ , prin urmare,  $\theta^2 = (A_1, E_3, E_2), \theta^3 = (E_2, A_1, E_1)$  și  $\theta^4 = \varepsilon$ . A doua egalitate din VI. implică  $A_2(A_1, E_3, E_1) = A_2$ , deci  $A_2\theta^2 = A_2$ , de unde rezultă

$$A_2\theta^3 = A_2\theta. \quad (3.29)$$

Aplicând a doua egalitate din VI. în cea de-a treia, obținem  $A_3 = A_2(E_2, A_1, E_1)$ , deci

$$A_3 = A_2\theta^3. \quad (3.30)$$

Din (3.29) și (3.30) rezultă  $A_2\theta = A_3$ , (3.30) implică  $A_3\theta = A_2$ . □

**Lema 3.18.** Tripletul  $(E_1, A_1, E_3)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_3), A_3 = {}^{\pi_2} A_1$  și  $A_1(E_1, A_1(E_1, A_1, E_3)) = {}^{\pi_2} A_1$ ;
- II.  $A_3 = A_1(E_1, A_1, E_3), A_2 = {}^{\pi_2} A_1$  și  $A_1(E_1, A_1(E_1, A_1, E_3)) = {}^{\pi_2} A_1$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_3, E_3) = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_2, E_3)$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_1, A_1, E_3)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_1, E_2\theta = A_1, E_3\theta = E_3$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1, A_1, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_2, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_2, E_3), \theta^3 = (E_1, A_3, E_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^3 = E_2$ , adică  $A_1(E_1, A_3, E_3) = E_2$ , prin urmare  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^2 = A_3$ , adică  $A_1(E_1, A_2, E_3) = A_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_3)$  și  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_1, A_1(E_1, A_1, E_3), E_3) = {}^{\pi_2} A_1$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din

a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din I. în a treia, obținem  $A_1(E_1, A_2, E_3) = A_3$  care implică  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_3, E_3)$ , deci  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_1 = E_2$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_2$ , atunci din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = E_2$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_3, E_3), \theta^3 = (E_1, A_2, E_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(E_1, A_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^3 = E_2$ , adică  $A_1(E_1, A_2, E_3) = E_2$ , prin urmare,  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^2 = A_2$ , adică  $A_1(E_1, A_3, E_3) = A_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(E_1, A_1, E_3)$  și  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_1, A_1(E_1, A_1, E_3), E_3) = {}^{\pi_2} A_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din IV. în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_1, A_3, E_3) = A_2$  care implică  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_3, E_3)$ , deci  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_1 = E_2$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.

6. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_3, E_3)$ . Din  $A_3\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_2, E_3)$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile VI., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_3$ , din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = A_2$  și  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_3)$ , deci  $A_1\theta = E_2$ .  $\square$

**Lema 3.19.** Tripletul  $(E_3, A_1, E_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_3 = {}^{(13)\pi_2} A_1, A_2 = A_1(E_3, A_1, E_1), A_1(E_1, A_1(E_3, A_1, E_1), E_3) = {}^{(13)\pi_2} A_1$ ;
- II.  $A_3 = A_1(E_3, A_1, E_1), A_2 = {}^{(13)\pi_2} A_1, A_1(E_1, A_1(E_3, A_1, E_1), E_3) = {}^{(13)\pi_2} A_1$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1) = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_1)$ ;
- IV.  $A_1(E_3, A_1, E_1) = E_2, A_3 = A_2(E_3, A_1, E_1)$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_3, A_1, E_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_3, E_2\theta = A_1, E_3\theta = E_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_3, A_1, E_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_2, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_2, E_3), \theta^3 = (E_3, A_3, E_1), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_3, A_1, E_1)$ . De asemenea  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^3 = E_2$ ,

adică  $A_1(E_3, A_3, E_1) = E_2$ , deci  $A_3 = {}^{(13)\pi_2} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^2 = A_3$ , adică  $A_1(E_1, A_2, E_3) = A_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_3, A_1, E_1)$  și  $A_3 = {}^{(13)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate obținem

$$A_1(E_1, A_1(E_3, A_1, E_1), E_3) = {}^{(13)\pi_2} A_1.$$

Reciproc, admite că au loc egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele egalități din I. în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_1, A_2, E_3) = A_3$  care implică  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_3, E_3)$ , prin urmare,  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_2, E_1)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(13)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_2, E_3)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , adică  $A_3(E_1, A_2, E_3) = A_3(E_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_2 = E_2$ , contradicție, deoarece  $A_2$  este operație de quasigrup.

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_3, E_3)$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(E_1, A_3, E_3) = A_2(E_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3 = E_2$ , contradicție, deoarece  $A_3$  este operație de quasigrup.

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_1, A_3, E_3), \theta^3 = (E_3, A_2, E_1), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(E_3, A_1, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^3 = E_2$ , adică  $A_1(E_3, A_2, E_1) = E_3$ , deci  $A_2 = {}^{(13)\pi_2} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^2 = A_2$ , adică  $A_1(E_1, A_3, E_3) = A_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(E_3, A_1, E_1)$  și  $A_2 = {}^{(13)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate obținem

$$A_1(E_1, A_1(E_3, A_1, E_1), E_3) = {}^{(13)\pi_2} A_1.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_1, A_3, E_3) = A_2$  care implică  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_2, E_3)$ , prin urmare,  $A_3\theta = {}^{\pi_3} A_1(E_3, E_2, E_1)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(13)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1)$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_1)$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ . De asemenea, din a doua egalitate din III. rezultă  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_3)$ , deci  $A_1\theta = E_2$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{(13)\pi_3} A_1$ , iar  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_3 = A_2(E_3, A_1, E_1)$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = A_3$ . De asemenea, din a doua egalitate din IV. rezultă  $A_3\theta = A_2(E_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = A_2$ . □

**Lema 3.20.** Tripletul  $(A_1, E_1, E_3)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(A_1, E_1, E_3), A_3 = {}^{(12)\pi_2} A_1$  și  $A_1({}^{(12)\pi_2} A_1, A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = E_2$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3), A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$  și  
 $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3), E_3) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3), A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3)$  și  
 $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3), E_3) = A_2$ ;
- IV.  $A_3 = A_1(A_1, E_1, E_3), A_2 = {}^{(12)\pi_2} A_1$  și  $A_1({}^{(12)\pi_2} A_1, A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = E_2$ ;
- V.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3) = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$  și  $A_1 = {}^{(12)\pi_1} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(A_1, E_1, E_3)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = E_1, E_3\theta = E_3$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, \}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_2, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, A_1, E_3), \theta^3 = (A_3, A_2, E_3), \theta^4 = (E_2, A_3, E_3), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(A_1, E_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^4 = E_1$ , adică  $A_1(E_2, A_3, E_3) = A_1$ , prin urmare  $A_3 = {}^{(12)\pi_2} A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_1\theta^3 = E_2$ , deci  $A_1(A_3, A_2, E_3) = E_2$ . Utilizând  $A_2 = A_1(A_1, E_1, E_3)$  și  $A_3 = {}^{(12)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1({}^{(12)\pi_2} A_1, A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = E_2$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din I. în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_3, A_2, E_3) = E_2$  care implică  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(A_3, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta = {}^{(12)\pi_2} A_1$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(12)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, A_1, E_3), \theta^3 = (E_2, A_2, E_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_2, A_2, E_3) = A_3$ , prin urmare  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$ . Mai mult,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^2 = A_3$ , deci  $A_3(A_2, A_1, E_3) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$  și  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3), E_3) = A_3$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din II. în a treia, obținem  $A_3(A_2, A_1, E_3) = A_3$  care implică  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(A_2, A_3, E_3)$ , prin urmare  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$  în ultima egalitate, avem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, A_1, E_3), \theta^3 = (E_2, A_3, E_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(E_2, A_3, E_3) = A_2$ , prin urmare  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3)$ . Mai mult,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^2 = A_2$ , deci  $A_2(A_3, A_1, E_3) = A_2$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3)$  și  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3)$

în ultima egalitate, obținem  $A_2(\pi_2 A_2(E_2, A_2, E_3), \pi_1 A_2(A_2, E_1, E_3), E_3) = A_2$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = \pi_2 A_2(E_1, A_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_3, A_1, E_3) = A_2$ , care implică  $A_1 = \pi_2 A_2(A_3, A_2, E_3)$ , prin urmare,  $A_1\theta = \pi_2 A_2(E_2, A_2, E_3)$ . Aplicând  $A_3 = \pi_2 A_2(E_2, A_2, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, A_1, E_3), \theta^3 = (A_2, A_3, E_3), \theta^4 = (E_2, A_2, E_3), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(A_1, E_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_1$ , adică  $A_1(E_2, A_2, E_3) = A_1$ , prin urmare  $A_2 = {}^{(12)}\pi_2 A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_1\theta^3 = E_2$ , deci  $A_1(A_2, A_3, E_3) = E_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(A_1, E_1, E_3)$  și  $A_2 = {}^{(12)}\pi_2 A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1({}^{(12)}\pi_2 A_1, A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = E_2$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = \pi_2 A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând primele egalități din IV. în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_2, A_3, E_3) = E_2$  care implică  $A_3 = \pi_2 A_1(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = {}^{(12)}\pi_2 A_1$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(12)}\pi_2 A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = E_2$  implică  $A_1 = {}^{(12)}\pi_1 A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = \pi_1 A_2(A_2, E_1, E_3)$ . Mai mult,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_1 = \pi_1 A_3(A_3, E_1, E_3)$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile V., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_2$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_1, E_3), \theta^3 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_2\theta^3 = A_3\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.  $\square$

**Lema 3.21.** Tripletul  $(A_1, E_3, E_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(A_1, E_3, E_1), A_3 = {}^{(123)}\pi_2 A_1$  și  $A_1(E_2, A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{(123)}\pi_2 A_1) = E_3$ ;
- II.  $A_1 = \pi_1 A_3(A_3, E_3, E_1), A_2 = \pi_2 A_3(E_3, A_3, E_2)$  și  $A_3(E_2, \pi_1 A_3(A_3, E_3, E_1), \pi_2 A_3(E_3, A_3, E_2)) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = \pi_1 A_2(A_2, E_3, E_1), A_3 = \pi_2 A_2(E_3, A_2, E_2)$  și  $A_2(E_2, \pi_1 A_2(A_2, E_3, E_1), \pi_2 A_2(E_3, A_2, E_2)) = A_2$ ;
- IV.  $A_2 = {}^{(123)}\pi_2 A_1, A_3 = A_1(A_1, E_3, E_1)$  și  $A_1(E_2, A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{(123)}\pi_2 A_1) = E_3$ ;
- V.  $A_1 = \pi_1 A_2(A_2, E_3, E_1) = \pi_1 A_3(A_3, E_3, E_1)$  și  $A_1 = {}^{(132)}\pi_1 A_1$ ;
- VI.  $A_1 = \pi_3 A_2(E_2, E_1, A_2), A_3 = A_2(E_3, \pi_3 A_2(E_2, E_1, A_2), E_2)$  și  $A_1 = {}^{(132)}\pi_1 A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(A_1, E_3, E_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = E_3, E_3\theta = E_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, E_3, E_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_2, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_1, A_1), \theta^3 = (A_3, A_1, A_2), \theta^4 = (E_2, A_2, A_3), \theta^5 = (E_3, A_3, E_2), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(A_1, E_3, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^5 = E_1$ , adică  $A_1(E_3, A_3, E_2) = E_1$ , deci  $A_3 = {}^{(123)\pi_2} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^4 = E_3$ , adică  $A_1(E_2, A_2, A_3) = E_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(A_1, E_3, E_1)$  și  $A_3 = {}^{(123)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_2, A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{(123)\pi_2} A_1) = E_3$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , prin urmare,  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din I. în cea de-a treia, obținem  $A_1(E_2, A_2, A_3) = E_3$  care implică  $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(E_2, E_3, A_3)$ , deci  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(123)\pi_2} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_1, A_1), \theta^3 = (E_2, A_1, A_2), \theta^4 = (E_3, A_2, E_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^4 = A_3$ , adică  $A_3(E_3, A_2, E_2) = A_3$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$ . Mai mult, din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(E_2, A_1, A_2) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$  și  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_3(E_2, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1), {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)) = A_3.$$

Reciproc, admitem că au loc egalitățile II., atunci din prima egalitate rezultă  $A_3\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din II. în a treia, obținem  $A_3(E_2, A_1, A_2) = A_3$  care implică  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, A_2)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_1, A_1), \theta^3 = (E_2, A_1, A_3), \theta^4 = (E_3, A_3, E_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^4 = A_2$ , adică  $A_2(E_3, A_3, E_2) = A_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)$ . Mai mult, din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(E_2, A_1, A_3) = A_2$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)$  și  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2(E_2, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1), {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)) = A_2.$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a doua implică  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din III. în a treia, obținem  $A_2(E_2, A_1, A_3) = A_2$  care implică  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, A_3)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_2, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_1, A_1), \theta^3 = (A_2, A_1, A_3),$

$\theta^4 = (E_2, A_3, A_2), \theta^5 = (E_3, A_2, E_2), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(A_1, E_3, E_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^5 = E_1$ , adică  $A_1(E_3, A_2, E_2) = E_1$ , deci  $A_2 = {}^{(123)}\pi_2 A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_3$ , adică  $A_1(E_2, A_3, A_2) = E_3$ . Utilizând  $A_3 = A_1(A_1, E_3, E_1)$  și  $A_2 = {}^{(123)}\pi_2 A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(E_2, A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{(123)}\pi_2 A_1) = E_3$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile IV., atunci din prima dintre ele rezultă  $A_1\theta = A_3$ , iar a doua implică  $A_2\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_1, A_1, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_2$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_1(E_2, A_3, A_2) = E_3$  care implică  $A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_2, E_3, A_2)$ , deci  $A_3\theta = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, E_2)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(123)}\pi_2 A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1 = {}^{(132)}\pi_1 A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_2, E_3, E_1)$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_2$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_3, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, E_1, A_1), \theta^3 = (E_3, A_1, E_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_3$  rezultă  $A_1 = {}^{(132)}\pi_1 A_1$ . Egalitățile  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(E_2, E_1, A_1) = A_2$ , deci  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2)$ . Din  $A_3\theta = A_2$  rezultă  $A_3\theta^4 = A_2\theta^3$ , deci  $A_3 = A_2(E_3, A_1, E_2)$ . Aplicând  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_3 = A_2(E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), E_2)$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile VI., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = E_2$ , care implică  $\theta^2 = (E_2, E_1, A_1), \theta^3 = (E_3, A_1, E_2)$  și  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din a doua egalitate din VI. rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , deci

$$A_2\theta^3 = A_2\theta. \quad (3.31)$$

Aplicând a doua egalitate din VI. în cea de-a treia, obținem  $A_3 = A_2(E_3, A_1, E_2)$ , prin urmare,

$$A_3 = A_2\theta^3. \quad (3.32)$$

Din (3.31) și (3.32) rezultă  $A_2\theta = A_3$ , iar (3.32) implică  $A_3\theta = A_2$ . □

**Lema 3.22.** Tripletul  $(E_2, E_3, A_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(E_2, E_3, A_1), A_3 = {}^{(123)}\pi_1 A_1$  și  $A_1(A_1(E_2, E_3, A_1), {}^{(123)}\pi_1 A_1, E_1) = E_2$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  și  
 $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), E_1) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2), A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)$  și  
 $A_2({}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2), E_1) = A_2$ ;
- IV.  $A_3 = A_1(E_2, E_3, A_1), A_2 = {}^{(123)}\pi_1 A_1$  și  $A_1(A_1(E_2, E_3, A_1), {}^{(123)}\pi_1 A_1, E_1) = E_2$ ;

V.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2) = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  și  $A_1 = {}^{(132)\pi_3} A_1$ ;

VI.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1), A_3 = A_2(E_2, E_3, {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1))$  și  $A_1 = {}^{(132)\pi_3} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_2, E_3, A_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_2, E_2\theta = E_3, E_3\theta = A_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_2, E_3, A_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_1, A_2), \theta^3 = (A_1, A_2, A_3), \theta^4 = (A_2, A_3, E_1), \theta^5 = (A_3, E_1, E_2), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_2, E_3, A_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^5 = E_3$ , adică  $A_1(A_3, E_1, E_2) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{(123)\pi_1} A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_1\theta^4 = E_2$ , deci  $A_1(A_2, A_3, E_1) = E_2$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_2, E_3, A_1)$  și  $A_3 = {}^{(123)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(A_1(E_2, E_3, A_1), {}^{(123)\pi_1} A_1, E_1) = E_2$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din I. în a treia, obținem  $A_1(A_2, A_3, E_1) = E_2$  care implică  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1(E_2, A_3, E_1)$ , prin urmare,  $A_2\theta = {}^{(132)\pi_1} A_1$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(123)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_1, A_2), \theta^3 = (A_1, A_2, E_1), \theta^4 = (A_2, E_1, E_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^4 = A_3$ , adică  $A_3(A_2, E_1, E_2) = A_3$ , prin urmare,  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ . Mai mult,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , deci  $A_3(A_1, A_2, E_1) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$  și  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_3({}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), E_1) = A_3.$$

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_3(A_1, A_2, E_1) = A_3$ , prin urmare  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, A_2, E_1)$ , care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_1, A_3), \theta^3 = (A_1, A_3, E_1), \theta^4 = (A_3, E_1, E_2), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^4 = A_2$ , adică  $A_2(A_3, E_1, E_2) = A_2$ , prin urmare,  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)$ . Mai mult,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^3 = A_2$ , deci  $A_2(A_1, A_3, E_1) = A_2$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$  și  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2({}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2), E_1) = A_2.$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_1, A_3, E_1) = A_2$ , prin urmare,



$A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, A_3, E_1)$  care implică  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_1, A_3), \theta^3 = (A_1, A_3, A_2), \theta^4 = (A_3, A_2, E_1), \theta^5 = (A_2, E_1, E_2), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(E_2, E_3, A_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^5 = E_3$ , adică  $A_1(A_2, E_1, E_2) = E_3$ , deci  $A_2 = {}^{(123)\pi_1} A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_1\theta^4 = E_2$ , adică  $A_1(A_3, A_2, E_1) = E_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(E_2, E_3, A_1)$  și  $A_2 = {}^{(123)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1(A_1(E_2, E_3, A_1), {}^{(123)\pi_1} A_1, E_1) = E_2.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din IV în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_3, A_2, E_1) = E_2$ , care implică  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_2, A_2, E_1)$ , prin urmare  $A_3\theta = {}^{(123)\pi_1} A_1$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(123)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = E_1$  implică  $A_1 = {}^{(132)\pi_3} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile V., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_1$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, A_1, E_1), \theta^3 = (A_1, E_1, E_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1 = {}^{(132)\pi_3} A_1$ . Egalitatea  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(E_3, A_1, E_1) = A_2$ , deci  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1)$ . Aplicând  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1)$  în  $A_2\theta = A_3$ , obținem  $A_3 = A_2(E_2, E_3, {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1))$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile VI., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_1$ . Aplicând a doua egalitate din VI. în a treia, obținem  $A_2\theta = A_3$ . Din  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1)$  rezultă

$$A_2(E_3, A_1, E_1) = A_2. \quad (3.33)$$

Utilizând, din nou, a doua egalitate din VI. în a treia, obținem  $A_3 = A_2(E_2, E_3, A_1)$ , care implică  $A_3\theta = A_2(E_3, A_1, E_1)$ . Aplicând (3.33) în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .  $\square$

**Lema 3.23.** *Tripletul  $(E_3, E_2, A_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_2 = A_1(E_3, E_2, A_1), A_3 = {}^{(123)\pi_1} A_1$  și  
 $A_1(A_1(E_3, E_2, A_1), E_2, {}^{(123)\pi_1} A_1) = E_1$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3), A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)$  și  
 $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3), E_2, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2), A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)$  și

$$A_2(\pi_3 A_2(E_3, E_2, A_2), E_2, \pi_1 A_2(A_2, E_2, E_1)) = A_2;$$

$$\text{IV. } A_1 = {}^{(123)}\pi_3 A_2, A_3 = A_2(A_2, E_2, E_1) \text{ și}$$

$$A_2(A_2(A_2, E_2, E_1), E_2, A_2) = {}^{(123)}\pi_3 A_2;$$

$$\text{V. } A_1(E_3, E_2, A_1) = E_1, A_1 = \pi_3 A_2(E_3, E_2, A_2) = \pi_3 A_3(E_3, E_2, A_3).$$

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_3, E_2, A_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_3, E_2\theta = E_2, E_3\theta = A_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_3, E_2, A_1\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_2, A_2), \theta^3 = (A_2, E_2, A_3), \theta^4 = (A_3, E_2, E_1), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_3, E_2, A_1)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^4 = E_3$ , adică  $A_1(A_3, E_2, E_1) = E_3$ , deci  $A_3 = {}^{(123)}\pi_1 A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_1\theta^3 = E_1$ , deci  $A_1(A_2, E_2, A_3) = E_1$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_3, E_2, A_1)$  și  $A_3 = {}^{(123)}\pi_1 A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(A_1(E_3, E_2, A_1), E_2, {}^{(123)}\pi_1 A_1) = E_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = \pi_1 A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din I. în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_2, E_2, A_3) = E_1$ , care implică  $A_2 = \pi_1 A_1(E_1, E_2, A_3)$ , deci  $A_2\theta = {}^{(123)}\pi_1 A_1$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(123)}\pi_1 A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_2, A_2), \theta^3 = (A_2, E_2, E_1), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = \pi_3 A_3(E_3, E_2, A_3)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(A_2, E_2, E_1) = A_3$ , deci  $A_2 = \pi_1 A_3(A_3, E_2, E_1)$ . Mai mult, din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , deci  $A_3(A_1, E_2, A_2) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = \pi_3 A_3(E_3, E_2, A_3)$  și  $A_2 = \pi_1 A_3(A_3, E_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_3(\pi_3 A_3(E_3, E_2, A_3), E_2, \pi_1 A_3(A_3, E_2, E_1)) = A_3$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile II., atunci din prima egalitate rezultă  $A_3\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta = \pi_1 A_3(A_3, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_3(A_1, E_2, A_2) = A_3$ , care implică  $A_1 = \pi_1 A_3(A_3, E_2, A_2)$ , deci  $A_1\theta = \pi_1 A_3(A_3, E_2, E_1)$ . Aplicând  $A_2 = \pi_1 A_3(A_3, E_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_2, A_3), \theta^3 = (A_3, E_2, E_1), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = \pi_3 A_2(E_3, E_2, A_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(A_3, E_2, E_1) = A_2$ , deci  $A_3 = \pi_1 A_2(A_2, E_2, E_1)$ . Mai mult, din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , deci  $A_2(A_1, E_2, A_3) = A_2$ . Utilizând  $A_1 = \pi_3 A_2(E_3, E_2, A_2)$  și  $A_3 = \pi_1 A_2(A_2, E_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2(\pi_3 A_2(E_3, E_2, A_2), E_2, \pi_1 A_2(A_2, E_2, E_1)) = A_2$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = \pi_1 A_2(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_1, E_2, A_3) = A_2$ , care implică

$A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, A_3)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)$ . Utilizând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_2, A_3), \theta^3 = (A_3, E_2, A_2), \theta^4 = (A_2, E_2, E_1), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = E_1$  rezultă  $A_1 = {}^{(123)\pi_3} A_2$ . Din  $A_3\theta = A_2$  rezultă  $A_3\theta^5 = A_2\theta^4$ , adică  $A_3 = A_2(A_2, E_2, E_1)$ . Egalitatea  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^5 = A_2\theta^3$ , adică  $A_1 = A_2(A_3, E_2, A_2)$ . Utilizând  $A_1 = {}^{(123)\pi_3} A_2$  și  $A_3 = A_2(A_2, E_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2(A_2(A_2, E_2, E_1), E_2, A_2) = {}^{(123)\pi_3} A_2.$$

Reciproc, admitem că au loc egalitățile IV., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = E_1$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = A_2(E_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = A_2$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_2(A_3, E_2, A_2) = A_1$ , care implică  $A_1\theta = A_2(A_2, E_2, E_1)$ . Aplicând  $A_3 = A_2(A_2, E_2, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_2, E_1), \theta^3 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3)$ . Egalitatea  $A_1\theta = E_1$  implică  $A_1(E_3, E_2, A_1) = E_1$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , a doua egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ , iar din a treia egalitate rezultă  $A_1\theta = A_1$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_2, E_1), \theta^3 = \varepsilon$ . Observăm că  $A_2 = A_2\theta^3 = A_3\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.

□

**Lema 3.24.** Tripletul  $(E_2, A_1, E_3)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(E_2, A_1, E_3), A_3 = {}^{(12)\pi_1} A_1$  și  $A_1(A_1(E_2, A_1, E_3), {}^{(12)\pi_1} A_1, E_3) = E_1$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3), A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$  și  $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3), E_3) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_2, A_2, E_3), A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3)$  și  $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3), E_3) = A_2$ ;
- IV.  $A_3 = A_1(E_2, A_1, E_3), A_2 = {}^{(12)\pi_1} A_1$  și  $A_1(A_1(E_2, A_1, E_3), {}^{(12)\pi_1} A_1, E_3) = E_1$ ;
- V.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3) = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$  și  $A_1 = {}^{(12)\pi_2} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_2, A_1, E_3)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_2, E_2\theta = A_1, E_3\theta = E_3$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_2, A_1, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_2, E_3), \theta^3 = (A_2, A_3, E_3), \theta^4 = (A_3, E_1, E_3), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_2, A_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$

implică  $A_1\theta^4 = E_2$ , adică  $A_1(A_3, E_1, E_3) = E_2$ , deci  $A_3 = {}^{(12)\pi_1} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^3 = E_1$ , adică  $A_1(A_2, A_3, E_3) = E_1$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_2, A_1, E_3)$  și  $A_3 = {}^{(12)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(A_1(E_2, A_1, E_3), {}^{(12)\pi_1} A_1, E_3) = E_1$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din I. în a treia, obținem  $A_1(A_2, A_3, E_3) = E_1$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_3, E_3)$ , deci  $A_2\theta = {}^{(12)\pi_1} A_1$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(12)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_2, E_3), \theta^3 = (A_2, E_1, E_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(A_2, E_1, E_3) = A_3$ , deci  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$ . Mai mult,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^2 = A_3$ , deci  $A_3(A_1, A_2, E_3) = A_3$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$  și  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3), E_3) = A_3$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_2\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_3(A_1, A_2, E_3) = A_3$ , care implică  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, A_2, E_3)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_3, E_3), \theta^3 = (A_3, E_1, E_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(A_3, E_1, E_3) = A_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3)$ . Mai mult,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^2 = A_2$ , deci  $A_2(A_1, A_3, E_3) = A_2$ . Utilizând  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3)$  și  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3), E_3) = A_2$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din III. în a treia, avem  $A_2(A_1, A_3, E_3) = A_2$ , care implică  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, A_3, E_3)$ , deci  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, A_3, E_3), \theta^3 = (A_3, A_2, E_3), \theta^4 = (A_2, E_1, E_3), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(E_2, A_1, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_2$ , adică  $A_1(A_2, E_1, E_3) = E_2$ , deci  $A_2 = {}^{(12)\pi_1} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^3 = E_1$ , adică  $A_1(A_3, A_2, E_3) = E_1$ . Utilizând  $A_3 = A_1(E_2, A_1, E_3)$  și  $A_2 = {}^{(12)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(A_1(E_2, A_1, E_3), {}^{(12)\pi_1} A_1, E_3) = E_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a

doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , prin urmare  $A_2\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_1(A_3, A_2, E_3) = E_1$ , care implică  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(E_1, A_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = {}^{(12)\pi_1} A_1$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(12)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_1, E_3), \theta^3 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1 = {}^{(12)\pi_2} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3)$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile V., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_1$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_1, E_1, E_3), \theta^3 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_2 = A_2\theta^3 = A_3\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.  $\square$

**Lema 3.25.** *Tripletul  $(E_3, A_1, E_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_3 = {}^{(132)\pi_1} A_1, A_2 = A_1(E_3, A_1, E_2)$  și  $A_1(A_1(E_3, A_1, E_2), E_1, {}^{(132)\pi_1} A_1) = E_3$ ;
- II.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2), A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$  și  
 $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2), E_1, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)) = A_3$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2), A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)$  și  
 $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2), E_1, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)) = A_2$ ;
- IV.  $A_2 = {}^{(132)\pi_1} A_1, A_3 = A_1(E_3, A_1, E_2)$  și  $A_1(A_1(E_3, A_1, E_2), E_1, {}^{(132)\pi_1} A_1) = E_3$ ;
- V.  $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2) = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$  și  $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_1$ ;
- VI.  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), A_3 = A_2({}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), E_3, E_1)$  și  $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_3, A_1, E_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_3, E_2\theta = A_1, E_3\theta = E_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_3, A_1, E_2\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_2, A_1), \theta^3 = (A_1, A_3, A_2), \theta^4 = (A_2, E_1, A_3), \theta^5 = (A_3, E_3, E_1), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(E_3, A_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^5 = E_2$ , adică  $A_1(A_3, E_3, E_1) = E_2$ , deci  $A_3 = {}^{(132)\pi_1} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^4 = E_3$ , adică  $A_1(A_2, E_1, A_3) = E_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(E_3, A_1, E_2)$  și  $A_3 = {}^{(132)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(A_1(E_3, A_1, E_2), E_1, {}^{(132)\pi_1} A_1) = E_3$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile I., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din I. în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_2, E_1, A_3) = E_3$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1(E_3, E_1, A_3)$ , deci  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(E_2, E_3, E_1)$ . Utilizând  $A_3 = {}^{(132)\pi_1} A_1$  în ultima

egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_2, A_1), \theta^3 = (A_1, E_1, A_2), \theta^4 = (A_2, E_3, E_1), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$ . De asemenea,  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3\theta^4 = A_3$ , adică  $A_3(A_2, E_3, E_1) = A_3$ , deci  $A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$ . Mai mult, din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3(A_1, E_1, A_2) = A_3$ . Utilizând  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$  și  $A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_3(\pi_2 A_3(E_3, A_3, E_2), E_1, \pi_1 A_3(A_3, E_3, E_1)) = A_3.$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci din prima egalitate rezultă  $A_3\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta =^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din II. în cea de-a treia, obținem  $A_3(A_1, E_1, A_2) = A_3$ , care implică  $A_1 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, A_2)$ , deci  $A_1\theta =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$ . Aplicând  $A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_3, A_1), \theta^3 = (A_1, E_1, A_3), \theta^4 = (A_3, E_3, E_1), \theta^5 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)$ . De asemenea,  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2\theta^4 = A_2$ , adică  $A_2(A_3, E_3, E_1) = A_2$ , deci  $A_3 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)$ . Mai mult, din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2\theta^3 = A_2$ , adică  $A_2(A_1, E_1, A_3) = A_2$ . Utilizând  $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)$  și  $A_3 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_2(\pi_2 A_2(E_3, A_2, E_2), E_1, \pi_1 A_2(A_2, E_3, E_1)) = A_2.$$

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci din prima egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a doua egalitate implică  $A_3\theta =^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din III. în cea de-a treia, obținem  $A_2(A_1, E_1, A_3) = A_2$ , care implică  $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, A_3)$ , deci  $A_1\theta =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)$ . Aplicând  $A_3 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)$  în ultima egalitate, obținem  $A_1\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, A_3, A_1), \theta^3 = (A_1, A_2, A_3), \theta^4 = (A_3, E_1, A_2), \theta^5 = (A_2, E_3, E_1), \theta^6 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(E_3, A_1, E_2)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^5 = E_2$ , adică  $A_1(A_2, E_3, E_1) = E_2$ , deci  $A_2 =^{(132)\pi_1} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^4 = E_3$ , adică  $A_1(A_3, E_1, A_2) = E_3$ . Utilizând  $A_3 = A_1(E_3, A_1, E_2)$  și  $A_2 =^{(132)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(A_1(E_3, A_1, E_2), E_1, ^{(132)\pi_1} A_1) = E_3$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile IV., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1\theta = A_3$ , iar a doua egalitate implică  $A_2\theta =^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din IV. în a treia, obținem  $A_1(A_3, E_1, A_2) = E_3$ , care implică  $A_3 =^{\pi_1} A_1(E_3, E_1, A_2)$ , deci  $A_3\theta =^{\pi_1} A_1(E_2, E_3, E_1)$ . Aplicând  $A_2 =^{(132)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1 =^{(132)\pi_1} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile V., atunci din prima egalitate rezultă  $A_1 = E_1$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, E_1, A_1), \theta^3 = (A_1, E_3, E_1), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1(E_3, A_1, E_2) = E_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(E_2, E_1, A_1) = A_2$ , deci  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2)$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_3\theta^4 = A_2\theta^3$ , deci  $A_3 = A_2(A_1, E_3, E_1)$ . Aplicând  $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2)$  în ultima egalitate, obținem

$$A_3 = A_2({}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), E_3, E_1).$$

Reciproc, fie că au loc egalitățile VI., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_1$ , prin urmare,  $\theta^2 = (E_2, E_1, A_1), \theta^3 = (A_1, E_3, E_1)$  și  $\theta^4 = \varepsilon$ . Din a doua egalitate din VI. rezultă  $A_2(E_2, E_1, A_1) = A_2$ , deci  $A_2\theta^2 = A_2$ , care implică

$$A_2\theta^3 = A_2\theta. \quad (3.34)$$

Aplicând a doua egalitate din VI. în cea de-a treia, obținem  $A_3 = A_2(A_1, E_3, E_1)$ , deci

$$A_3 = A_2\theta^3. \quad (3.35)$$

Din (3.34) și (3.35) rezultă  $A_2\theta = A_3$  și (3.35) implică  $A_3\theta = A_2$ .  $\square$

**Lema 3.26.** Tripletul  $(A_1, E_2, E_3)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_3), A_3 = {}^{\pi_1} A_1$  și  $A_1(A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_1$ ;
- II.  $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_3), A_2 = {}^{\pi_1} A_1$  și  $A_1(A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_1$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_3, E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_3(A_2, E_2, E_3)$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(A_1, E_2, E_3)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = E_2, E_3\theta = E_3$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, E_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_2, E_3), \theta^3 = (A_3, E_2, E_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^3 = E_1$ , adică  $A_1(A_3, E_2, E_3) = E_1$ , astfel  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^2 = A_3$ , deci  $A_1(A_2, E_2, E_3) = A_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_3)$  și  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem

$$A_1(A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_1.$$

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din I. în a treia, obținem  $A_1(A_2, E_2, E_3) = A_3$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1(A_3, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1$ . Aplicând  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_2, E_3), \theta^3 = (A_2, E_2, E_3), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_3)$ . De asemenea,  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^3 = E_1$ ,

adică  $A_1(A_2, E_2, E_3) = E_1$ , prin urmare  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1$ . Mai mult, din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_2$ , deci  $A_1(A_3, E_2, E_3) = A_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_3)$  și  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta = E_1$ . Utilizând primele două egalități din II. în a treia, obținem  $A_1(A_3, E_2, E_3) = A_2$ , care implică  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1$ . Aplicând  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_3, E_2, E_3)$ . Din  $A_3\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_2, E_2, E_3)$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = A_2$ . De asemenea,  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_3, E_2, E_3)$  implică  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_1\theta = E_1$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_1 = E_1$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_1 = E_1$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.

6. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_1 = E_1$ , contradicție, deoarece  $A_1$  este operație de quasigrup.  $\square$

**Lema 3.27.** Tripletul  $(A_1, E_3, E_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_3 = {}^{(23)\pi_1} A_1, A_2 = A_1(A_1, E_3, E_2)$  și  $A_1(A_1(A_1, E_3, E_2), E_2, E_3) = {}^{(23)\pi_1} A_1$ ;
- II.  $A_3 = A_1(A_1, E_3, E_2), A_2 = {}^{(23)\pi_1} A_1$  și  $A_1(A_1(A_1, E_3, E_2), E_2, E_3) = {}^{(23)\pi_1} A_1$ ;
- III.  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2) = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_2)$ ;
- IV.  $A_3 = A_2(A_1, E_3, E_2)$  și  $A_1(A_1, E_3, E_2) = E_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(A_1, E_3, E_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = A_1, E_2\theta = E_3, E_3\theta = E_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, A_1, E_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{E_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_2, E_3), \theta^3 = (A_3, E_3, E_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = A_1(A_1, E_3, E_2)$ . De asemenea, din  $A_1\theta = A_2$  rezultă  $A_1\theta^3 = E_1$ , adică  $A_1(A_3, E_3, E_2) = E_1$ , deci  $A_3 = {}^{(23)\pi_1} A_1$ . Mai mult,  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_1\theta^2 = A_3$ , deci  $A_1(A_2, E_2, E_3) = A_3$ . Utilizând  $A_2 = A_1(A_1, E_3, E_2)$  și  $A_3 = {}^{(23)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(A_1(A_1, E_3, E_2), E_2, E_3) = {}^{(23)\pi_1} A_1$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din



a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3) = E_1$ . Utilizând primele două egalități din I. în cea de-a treia, obținem  $A_1(A_2, E_2, E_3) = A_3$ , care implică  $A_2 = {}^{\pi_1} A_1(A_3, E_2, E_3)$ , deci  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(E_1, E_3, E_2)$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(23)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (A_2, E_2, E_3)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3\theta^2 = A_3$ , adică  $A_3(A_2, E_2, E_3) = A_3$ , deci  $A_2 = E_1$ , contradicție, deoarece  $A_2$  este operație de quasigrup.

3. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_2, E_3)$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2(A_3, E_2, E_3) = A_2$ , deci  $A_3 = E_1$ , contradicție, deoarece  $A_3$  este operație de quasigrup.

4. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = E_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (A_3, E_2, E_3), \theta^3 = (A_2, E_3, E_2), \theta^4 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = A_1(A_1, E_3, E_2)$ . De asemenea, din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_1\theta^3 = E_1$ , adică  $A_1(A_2, E_3, E_2) = E_1$ , prin urmare  $A_2 = {}^{(23)\pi_1} A_1$ . Egalitatea  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_1\theta^2 = A_2$ , deci  $A_1(A_3, E_2, E_3) = A_2$ . Utilizând  $A_3 = A_1(A_1, E_3, E_2)$  și  $A_2 = {}^{(23)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_1(A_1(A_1, E_3, E_2), E_2, E_3) = {}^{(23)\pi_1} A_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = {}^{\pi_1} A_1(A_1, E_2, E_3) = E_1$ . Utilizând primele două egalități din II. în a treia, avem  $A_1(A_3, E_2, E_3) = A_2$ , deci  $A_3 = {}^{\pi_1} A_1(A_2, E_2, E_3)$ , astfel  $A_3\theta = {}^{\pi_1} A_1(E_1, E_3, E_2)$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(23)\pi_1} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

5. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2)$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_2)$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$  și  $A_1\theta = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_3)$ , deci  $A_1\theta = E_1$ . Din a doua egalitate din III. rezultă  $A_3\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = E_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Din  $A_1\theta = E_1$  rezultă  $A_1 = {}^{(23)\pi_1} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_3, E_3, E_2)$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile din IV., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = E_1$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$ . □

Lemele 3.10-3.27 implică

**Teorema 3.3.** *Există exact 87 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare și trei selectori ternari care admit cel puțin o paratopie, componentele căreia sunt un quasigrup ternar și doi selectori ternari.*

### 3.1.4. Paratopiile definite de trei selectori

Observăm că tripletul  $(E_1, E_2, E_3)$  este paratopie a oricărui sistem ortogonal  $\Sigma$ . În Lemele 3.28-3.32 sunt descrise toate sistemele ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială, componentele căreia sunt selectorii ternari.

**Lema 3.28.** *Tripletul  $(E_1, E_3, E_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_1 = {}^{(23)}A_1, A_2 = {}^{(23)}A_2, A_3 = {}^{(23)}A_3$ ;
- II.  $A_3 = {}^{(23)}A_2, A_1 = {}^{(23)}A_1$ ;
- III.  $A_2 = {}^{(23)}A_1, A_3 = {}^{(23)}A_3$ ;
- IV.  $A_3 = {}^{(23)}A_1, A_2 = {}^{(23)}A_2$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_1, E_3, E_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_1, E_2\theta = E_3, E_3\theta = E_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1, E_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{A_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = A_1$  implică  $A_1 = {}^{(23)}A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = {}^{(23)}A_2$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3 = {}^{(23)}A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_1$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $A_1\theta = A_1$  implică  $A_1 = {}^{(23)}A_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = {}^{(23)}A_2$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_1$ . Din a doua egalitate din II. rezultă  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_2 = {}^{(23)}A_1$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = {}^{(23)}A_3$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ . Din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = A_3$  și  $A_2\theta = A_1$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_1$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_2$  și  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_1 = A_1\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_1$ , atunci  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2 = {}^{(23)}A_2$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = {}^{(23)}A_1$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$  și  $A_3\theta = A_1$ . Din a doua egalitate din IV. rezultă  $A_1\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$

implică  $A_1 = A_1\theta^2 = A_3\theta = A_2$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.  $\square$

**Lema 3.29.** *Tripletul  $(E_2, E_1, E_3)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_1 =^{(12)} A_1, A_2 =^{(12)} A_2, A_3 =^{(12)} A_3$ ;
- II.  $A_3 =^{(12)} A_2, A_1 =^{(12)} A_1$ ;
- III.  $A_2 =^{(12)} A_1, A_3 =^{(12)} A_3$ ;
- IV.  $A_3 =^{(12)} A_1, A_2 =^{(12)} A_2$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_2, E_1, E_3)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_2, E_2\theta = E_1, E_3\theta = E_3$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1, E_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{A_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci atunci  $A_1\theta = A_1$  implică  $A_1 =^{(12)} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2 =^{(12)} A_2$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3 =^{(12)} A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci prima dintre ele implică  $A_1\theta = A_1$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $A_1\theta = A_1$  implică  $A_1 =^{(12)} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_3 =^{(12)} A_2$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_1$ . Din a doua egalitate din II. rezultă  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_2 =^{(12)} A_1$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3 =^{(12)} A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$  și  $A_2\theta = A_1$ . Din a doua egalitate din III. rezultă  $A_3\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_1$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_2$  și  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_1 = A_1\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_1$ , atunci  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2 =^{(12)} A_2$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 =^{(12)} A_1$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile IV., atunci prima dintre ele implică  $A_2\theta = A_2$  și  $A_3\theta = A_1$ . Din a doua egalitate rezultă  $A_1\theta = A_3$ .

6. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_1 = A_1\theta^2 = A_3\theta = A_2$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.  $\square$

**Lema 3.30.** Tripletul  $(E_2, E_3, E_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- I.  $A_1 =^{(132)} A_1, A_2 =^{(132)} A_2, A_3 =^{(132)} A_3$ ;
- II.  $A_2 =^{(132)} A_1, A_3 =^{(123)} A_1$ ;
- III.  $A_3 =^{(132)} A_1, A_2 =^{(123)} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_2, E_3, E_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_2, E_2\theta = E_3, E_3\theta = E_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1, E_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{A_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci atunci  $A_1\theta = A_1$  implică  $A_1 =^{(132)} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2 =^{(132)} A_2$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3 =^{(132)} A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_1$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, E_1, E_2), \theta^3 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_2 = A_2\theta^3 = A_3\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.

3. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, E_1, E_2), \theta^3 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_2$  și  $A_2\theta = A_1$  implică  $A_1 = A_1\theta^3 = A_2\theta^2 = A_1\theta = A_2$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.

4. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_1$ , atunci  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_2 =^{(132)} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_3 =^{(132)} A_2$ . Aplicând  $A_2 =^{(132)} A_1$  în ultima egalitate, avem  $A_3 =^{(123)} A_1$ .

Reciproc, admitem că sunt adevărate egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = A_1$ . De asemenea,  $A_2 =^{(132)} A_1$  implică  $A_2\theta =^{(123)} A_1$ . Aplicând  $A_3 =^{(123)} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_3 =^{(132)} A_1$ . Din  $A_3\theta = A_2$  rezultă  $A_2 =^{(132)} A_3$ . Aplicând  $A_3 =^{(132)} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2 =^{(123)} A_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_1$ . De asemenea,  $A_3 =^{(132)} A_1$  implică  $A_3\theta =^{(123)} A_1$ . Aplicând  $A_2 =^{(123)} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

6. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_3, E_1, E_2), \theta^3 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_1$  implică  $A_1 = A_1\theta^3 = A_3\theta^2 = A_1\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri. □

**Lema 3.31.** *Tripletul  $(E_3, E_1, E_2)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_1 = {}^{(123)} A_1, A_2 = {}^{(123)} A_2, A_3 = {}^{(123)} A_3$ ;
- II.  $A_2 = {}^{(123)} A_1, A_3 = {}^{(132)} A_1$ ;
- III.  $A_3 = {}^{(123)} A_1, A_2 = {}^{(132)} A_1$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_3, E_1, E_2)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_3, E_2\theta = E_1, E_3\theta = E_2$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1, E_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{A_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci atunci  $A_1\theta = A_1$  implică  $A_1 = {}^{(123)} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = {}^{(123)} A_2$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3 = {}^{(123)} A_3$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_1$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, E_3, E_1), \theta^3 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_2 = A_2\theta^3 = A_3\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.

3. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, E_3, E_1), \theta^3 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_2$  și  $A_2\theta = A_1$  implică  $A_1 = A_1\theta^3 = A_2\theta^2 = A_1\theta = A_2$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.

4. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_1$ , atunci  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_2 = {}^{(123)} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_3 = {}^{(123)} A_2$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(123)} A_1$  în ultima egalitate, avem  $A_3 = {}^{(132)} A_1$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$ , iar din a doua rezultă  $A_3\theta = A_1$ . De asemenea,  $A_2 = {}^{(123)} A_1$  implică  $A_2\theta = {}^{(132)} A_1$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(132)} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_2\theta = A_3$ .

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $A_1\theta = A_3$  implică  $A_3 = {}^{(123)} A_1$ . Din  $A_3\theta = A_2$  rezultă  $A_2 = {}^{(132)} A_3$ . Aplicând  $A_3 = {}^{(123)} A_1$  în ultima egalitate, avem  $A_2 = {}^{(132)} A_1$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile III., atunci prima dintre ele implică  $A_1\theta = A_3$ , iar din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_1$ . De asemenea,  $A_3 = {}^{(123)} A_1$  implică  $A_3\theta = {}^{(132)} A_1$ . Aplicând  $A_2 = {}^{(132)} A_1$  în ultima egalitate, obținem  $A_3\theta = A_2$ .

6. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, E_3, E_1), \theta^3 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_1$  implică  $A_1 = A_1\theta^3 = A_3\theta^2 = A_1\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri. □

**Lema 3.32.** *Tripletul  $(E_3, E_2, E_1)$  este paratopie a sistemului  $\Sigma$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:*

- I.  $A_1 =^{(13)} A_1, A_2 =^{(13)} A_2, A_3 =^{(13)} A_3$ ;
- II.  $A_3 =^{(13)} A_2, A_1 =^{(13)} A_1$ ;
- III.  $A_2 =^{(13)} A_1, A_3 =^{(13)} A_3$ ;
- IV.  $A_3 =^{(13)} A_1, A_2 =^{(13)} A_2$ .

*Demonstrație.* Fie tripletul  $(E_3, E_2, E_1)$  o paratopie a sistemului  $\Sigma$ . Deoarece  $E_1\theta = E_3, E_2\theta = E_2, E_3\theta = E_1$ , obținem  $\Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1, E_2, E_3\}$ , adică  $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta\} = \{A_1, A_2, A_3\}$ .

1. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = A_1$  implică  $A_1 =^{(13)} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_2$  rezultă  $A_2 =^{(13)} A_2$ . Egalitatea  $A_3\theta = A_3$  implică  $A_3 =^{(13)} A_3$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile I., atunci prima dintre ele implică  $A_1\theta = A_1$ , din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_2$ , iar a treia egalitate implică  $A_3\theta = A_3$ .

2. Dacă  $A_1\theta = A_1, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_2$ , atunci  $A_1\theta = A_1$  implică  $A_1 =^{(13)} A_1$ . Din  $A_2\theta = A_3$  rezultă  $A_3 =^{(13)} A_2$ .

Reciproc, fie că sunt adevărate egalitățile II., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_1$ . Din a doua egalitate rezultă  $A_2\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$ .

3. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_3$ , atunci  $A_1\theta = A_2$  implică  $A_2 =^{(13)} A_1$ . Din  $A_3\theta = A_3$  rezultă  $A_3 =^{(13)} A_3$ .

Reciproc, fie că au loc egalitățile III., atunci prima egalitate implică  $A_1\theta = A_2$  și  $A_2\theta = A_1$ . Din a doua egalitate rezultă  $A_3\theta = A_3$ .

4. Dacă  $A_1\theta = A_2, A_2\theta = A_3, A_3\theta = A_1$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_2$  și  $A_2\theta = A_3$  implică  $A_1 = A_1\theta^2 = A_2\theta = A_3$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri.

5. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_2, A_3\theta = A_1$ , atunci  $A_2\theta = A_2$  implică  $A_2 =^{(13)} A_2$ . Din  $A_1\theta = A_3$  rezultă  $A_3 =^{(13)} A_1$ .

Reciproc, admitem că au loc egalitățile IV., atunci prima egalitate implică  $A_2\theta = A_2$ . Din a doua egalitate rezultă  $A_1\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_1$ .

6. Dacă  $A_1\theta = A_3, A_2\theta = A_1, A_3\theta = A_2$ , atunci  $\theta^2 = \varepsilon$ . Egalitățile  $A_1\theta = A_3$  și  $A_3\theta = A_2$  implică  $A_1 = A_1\theta^2 = A_3\theta = A_2$ , contradicție, deoarece  $\Sigma$  este sistem ortogonal de quasigrupuri. □

Din Lemele 3.28-3.32 rezultă

**Teorema 3.4.** *Există exact 18 sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare și trei selectori ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială, componentele căreia sunt selectorii ternari.*

Teoremele 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 implică

**Corolarul 3.5.** *Există exact 153 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare și trei selectori ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială.*

**Observația 3.2.** În Lemele 3.1-3.33 sunt descrise toate sistemele care admit cel puțin o paratopie netrivială. Condițiile necesare și suficiente pentru ca sistemul  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  format din quasigrupurile ternare  $A_1, A_2, A_3$  și selectorii ternari  $E_1, E_2, E_3$  să admită cel puțin o paratopie netrivială sunt formulate concis în ANEXA 1.

### 3.2. Identități în quasigrupuri ternare

În acest paragraf vom arăta că cele 67 de identități din ANEXA 1 se reduc la unul din 4 tipuri.

Conform Teoremei 3.1 și Lemelor 3.1-3.32, existența paratopiilor sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari implică anumite identități. Distincte două câte două sunt exact 67 de identități (lista lor este prezentată în ANEXA 1).

**Teorema 3.5.** *Fiecare dintre cele 67 de identități pe care le implică existența paratopiilor sistemului  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  se reduce la unul din următoarele 4 tipuri:*

1.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, {}^{\delta}A) = E_1,$
2.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, E_1) = E_2,$
3.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_3),$
4.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_2),$

unde  $A$  este un quasigrup ternar și  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S_4$ .

*Demonstrație.* 1.  $A(A, {}^{(132)}A, {}^{(123)}A) = E_2 \Leftrightarrow A({}^{(12)}A(x_2, x_1, x_3), {}^{(23)}A(x_2, x_1, x_3), {}^{(13)}A(x_2, x_1, x_3)) = E_1(x_2, x_1, x_3)$ , adică  $A({}^{(12)}A, {}^{(23)}A, {}^{(13)}A) = E_1$ , deci identitate are forma 1.

2.  $A(A, {}^{(132)}A, {}^{(123)}A) = E_3 \Leftrightarrow A({}^{(13)}A(x_3, x_2, x_1), {}^{(12)}A(x_3, x_2, x_1), {}^{(23)}A(x_3, x_2, x_1)) = E_1(x_3, x_2, x_1)$ , adică  $A({}^{(13)}A, {}^{(12)}A, {}^{(23)}A) = E_1$ , deci identitate are forma 1.

3.  $A(E_1, A, {}^{(23)}A) = E_3 \Leftrightarrow A(E_1(x_1, x_3, x_2), {}^{(23)}A(x_1, x_3, x_2), A(x_1, x_3, x_2)) = E_2(x_1, x_3, x_2)$ , adică  ${}^{(13)}A(A, {}^{(23)}A, E_1) = E_2$ , deci identitatea are forma 2.

4. Făcând în  $A(E_1, E_3, {}^{\pi_2}A(E_1, E_2, A)) = {}^{\pi_3}A(E_1, A, E_3)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_1, x_3, {}^{\pi_2}A(x_1, {}^{\pi_2}A(x_1, y, x_3), y)) = {}^{\pi_3}A(x_1, y, x_3)$ , deci  ${}^{\pi_3}A(x_1, x_3, {}^{\pi_3}A(x_1, y, x_3)) =$

- $\pi_2 A(x_1, \pi_2 A(x_1, y, x_3), y)$ , prin urmare  $^{(12)}\pi_2 A(\pi_2 A, E_1, E_2) = ^{(132)}\pi_3 A(\pi_3 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea are forma 3.
5. Făcând în  $A(E_1, \pi_3 A(E_1, A, E_3), E_2) = \pi_2 A(E_1, E_2, A)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_1, \pi_3 A(x_1, y, \pi_3 A(x_1, x_2, y)), x_2) = \pi_2 A(x_1, x_2, y)$ , astfel  $A(x_1, \pi_2 A(x_1, x_2, y), x_2) = \pi_3 A(x_1, y, \pi_3 A(x_1, x_2, y))$ , adică  $^{(12)}\pi_2 A(\pi_2 A, E_1, E_2) = ^{(123)}\pi_3 A(\pi_3 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea are forma 3.
6. Făcând în  $A(\pi_2 A(E_3, A, E_2), E_1, \pi_1 A(A, E_3, E_1)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(x_3, y, \pi_2 A(x_1, y, x_3)), x_1, \pi_1 A(y, x_3, x_1)) = y$ , deci  $\pi_1 A(y, x_1, \pi_1 A(y, x_3, x_1)) = \pi_2 A(x_3, y, \pi_2 A(x_1, y, x_3))$ , adică  $^{(123)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_3) = ^{(13)}\pi_2 A(^{(132)}\pi_3 A, E_1, E_2)$ , astfel identitatea are forma 3.
7. Făcând în  $A(\pi_2 A(E_2, E_1, A), \pi_3 A(A, E_1, E_3), E_1) = E_2$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(x_2, x_1, y), \pi_3 A(y, x_1, \pi_3 A(x_1, x_2, y)), x_1) = x_2$ , deci  $\pi_2 A(\pi_2 A(x_2, x_1, y), x_2, x_1) = \pi_3 A(y, x_1, \pi_3 A(x_1, x_2, y))$ , adică  $^{(23)}\pi_2 A(^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_2) = ^{(13)}\pi_3 A(\pi_3 A, E_1, E_3)$ , prin urmare identitatea are forma 3.
8. Făcând în  $A(\pi_3 A(A, E_3, \pi_3 A(E_2, A, E_3)), E_1, A) = E_2$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(y, x_3, \pi_3 A(x_2, y, x_3)), \pi_1 A(y, x_2, x_3), y) = x_2$ , astfel  $\pi_1 A(x_2, \pi_1 A(y, x_2, x_3), y) = \pi_3 A(y, x_3, \pi_3 A(x_2, y, x_3))$ , adică  $^{(132)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_2) = ^{(123)}\pi_3 A(^{(12)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
9. Făcând în  $A(\pi_2 A(E_2, E_3, A), \pi_1 A(E_3, E_1, A), E_3) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), x_3, y), \pi_1 A(x_3, x_1, y), x_3) = y$ , deci  $\pi_1 A(y, \pi_1 A(x_3, x_1, y), x_3) = \pi_2 A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), x_3, y)$ , adică  $^{(12)}\pi_1 A(^{(132)}\pi_1 A, E_1, E_2) = ^{(23)}\pi_2 A(^{(132)}\pi_2 A, E_1, E_2)$ , prin urmare identitatea se reduce la forma 4.
10. Făcând în  $A(\pi_3 A(E_2, E_3, A), \pi_1 A(A, E_1, E_2), E_1) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(x_2, \pi_3 A(x_1, x_2, y), y), \pi_1 A(y, x_1, x_2), x_1) = y$ , deci  $\pi_1 A(y, \pi_1 A(y, x_1, x_2), x_1) = \pi_3 A(x_2, \pi_3 A(x_1, x_2, y), y)$ , adică  $^{(12)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_2) = ^{(132)}\pi_3 A(^{(123)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , astfel identitatea se reduce la forma 3.
11. Făcând în  $A(E_3, A, \pi_2 A(E_2, \pi_2 A(A, E_2, E_1), A)) = E_1$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), y, \pi_2 A(x_2, \pi_2 A(y, x_2, x_1), y)) = x_1$ , deci  $\pi_3 A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), y, x_1) =$



- $\pi_2 A(x_2, \pi_2 A(y, x_2, x_1), y)$ , adică  $\pi_3 A({}^{(123)}\pi_1 A, E_1, E_2) = {}^{(132)}\pi_2 A({}^{(23)}\pi_2 A, E_1, E_3)$ , prin urmare identitatea se reduce la forma 3.
12. Făcând în  $A(\pi_3 A(E_3, A, E_2), E_2, \pi_1 A(E_2, A, E_1)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(x_3, y, x_2), x_2, \pi_1 A(x_2, y, \pi_1 A(y, x_2, x_3))) = y$ , deci  $\pi_3 A(\pi_3 A(x_3, y, x_2), x_2, y) = \pi_1 A(x_2, y, \pi_1 A(y, x_2, x_3))$ , adică  ${}^{(23)}\pi_3 A({}^{(132)}\pi_3 A, E_1, E_2) = {}^{(13)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_2)$ , prin urmare identitatea se reduce la forma 4.
13. Făcând în  $A(A, \pi_1 A(E_3, A, E_1), E_2) = \pi_2 A(E_3, E_2, A)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(y, \pi_1 A(x_3, y, \pi_1 A(y, x_2, x_3)), x_2) = \pi_2 A(x_3, x_2, y)$ , astfel  $\pi_2 A(y, \pi_2 A(x_3, x_2, y), x_2) = \pi_1 A(x_3, y, \pi_1 A(y, x_2, x_3))$ , adică  ${}^{(12)}\pi_2 A({}^{(13)}\pi_2 A, E_1, E_2) = {}^{(13)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
14. Făcând în  $A(E_2, \pi_1 A(A, E_3, E_1), \pi_2 A(E_3, A, E_2)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_2, \pi_1 A(y, x_3, \pi_1 A(y, x_2, x_3)), \pi_2 A(x_3, y, x_2)) = y$ , deci  $\pi_2 A(x_2, y, \pi_2 A(x_3, y, x_2)) = \pi_1 A(y, x_3, \pi_1 A(y, x_2, x_3))$ , adică  ${}^{(13)}\pi_2 A({}^{(132)}\pi_2 A, E_1, E_2) = {}^{(123)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_3)$ , astfel identitatea se reduce la forma 3.
15. Făcând în  $A(\pi_3 A(E_2, A, E_3), \pi_1 A(E_2, E_1, A), E_2) = E_1$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(x_2, y, \pi_3 A(x_1, x_2, y)), \pi_1 A(x_2, x_1, y), x_2) = x_1$ , deci  $\pi_1 A(x_1, \pi_1 A(x_2, x_1, y), x_2) = \pi_3 A(x_2, y, \pi_3 A(x_1, x_2, y))$ , adică  ${}^{(132)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_2) = {}^{(123)}\pi_3 A({}^{(12)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , prin urmare identitatea se reduce la forma 3.
16. Făcând în  $A(E_2, \pi_3 A(E_3, A, \pi_3 A(A, E_1, E_3)), A) = E_1$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), \pi_3 A(x_3, y, \pi_3 A(y, x_1, x_3)), y) = x_1$ , deci  $\pi_2 A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), x_1, y) = \pi_3 A(x_3, y, \pi_3 A(y, x_1, x_3))$ , adică  ${}^{(23)}\pi_2 A({}^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_2) = {}^{(13)}\pi_3 A(\pi_3 A, E_1, E_3)$ , astfel identitatea se reduce la forma 3.
17. Făcând în  $A(\pi_2 A(E_2, E_3, A), \pi_1 A(E_3, E_1, A), E_3) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(x_2, x_3, y), \pi_1 A(x_3, \pi_1 A(y, x_2, x_3), y), x_3) = y$ , astfel  $\pi_2 A(\pi_2 A(x_2, x_3, y), y, x_3) = \pi_1 A(x_3, \pi_1 A(y, x_2, x_3), y)$ , adică  $\pi_2 A({}^{(123)}\pi_2 A, E_1, E_2) = {}^{(132)}\pi_1 A({}^{(23)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
18. Identitatea  $A(A, E_2, {}^{(13)}A) = E_3 \Leftrightarrow A({}^{(123)}A(x_2, x_3, x_1), E_1(x_2, x_3, x_1), {}^{(23)}A(x_2, x_3, x_1)) = E_2(x_2, x_3, x_1)$ , adică  ${}^{(23)}A({}^{(123)}A, {}^{(23)}A, E_1) = E_2$ , deci identitatea se reduce la forma 2.

19. Făcând în  $A(\pi_3 A(A, E_2, E_3), E_2, E_1) = \pi_1 A(E_1, E_2, A)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(y, x_2, \pi_3 A(x_1, x_2, y)), x_2, x_1) = \pi_1 A(x_1, x_2, y)$ , deci  $\pi_1 A(\pi_1 A(x_1, x_2, y), x_2, x_1) = \pi_3 A(y, x_2, \pi_3 A(x_1, x_2, y))$ , adică  $\pi_1 A(^{(12)}\pi_1 A, E_1, E_2) = ^{(13)}\pi_3 A(^{(12)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , astfel identitatea se reduce la forma 3.
20. Făcând în  $A(E_3, E_2, \pi_1 A(E_1, E_2, A) = \pi_3 A(A, E_2, E_3)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_3, x_2, \pi_1 A(\pi_1 A(y, x_2, x_3), x_2, y)) = \pi_3 A(y, x_2, x_3)$ , astfel  $\pi_3 A(x_3, x_2, \pi_3 A(y, x_2, x_3)) = \pi_1 A(\pi_1 A(y, x_2, x_3), x_2, y)$ , adică  $^{(13)}\pi_3 A(^{(12)}\pi_3 A, E_1, E_3) = \pi_1 A(^{(12)}\pi_1 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
21. Făcând în  $A(E_1, \pi_3 A(A, E_3, E_1), \pi_2 A(A, E_1, E_2)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_1, \pi_3 A(y, \pi_3 A(x_1, x_2, y), x_1), \pi_2 A(y, x_1, x_2)) = y$ , deci  $\pi_2 A(x_1, y, \pi_2 A(y, x_1, x_2)) = \pi_3 A(y, \pi_3 A(x_1, x_2, y), x_1)$ , adică  $^{(123)}\pi_2 A(^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_2) = ^{(132)}\pi_3 A(^{(23)}\pi_3 A, E_1, E_2)$ , prin urmare identitatea se reduce la forma 4.
22. Făcând în  $A(A, E_3, \pi_1 A(\pi_1 A(E_1, A, E_2), E_1, A))) = E_2$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(y, \pi_3 A(x_1, x_2, y), \pi_1 A(\pi_1 A(x_1, y, x_2), x_1, y))) = x_2$ , deci  $A(y, \pi_3 A(x_1, x_2, y), x_2) = \pi_1 A(\pi_1 A(x_1, y, x_2), x_1, y)$ , adică  $^{(12)}\pi_3 A(^{(123)}\pi_3 A, E_1, E_3) = ^{(23)}\pi_1 A(^{(12)}\pi_1 A, E_1, E_2)$ , prin urmare identitatea se reduce la forma 3.
23. Făcând în  $A(\pi_2 A(E_2, A, E_1), \pi_3 A(E_3, E_1, A), E_2) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(x_2, y, x_1), \pi_3 A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), x_1, y), x_2) = y$ , astfel  $\pi_2 A(\pi_2 A(x_2, y, x_1), y, x_2) = \pi_3 A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), x_1, y)$ , adică  $\pi_2 A(^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_2) = ^{(23)}\pi_3 A(^{(13)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
24. Făcând în  $A(\pi_2 A(A, E_3, E_2), A, E_1) = \pi_1 A(E_1, E_3, A)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(y, x_3, \pi_2 A(x_1, y, x_3)), y, x_1) = \pi_1 A(x_1, x_3, y)$ , deci  $\pi_1 A(\pi_1 A(x_1, x_3, y), y, x_1) = \pi_2 A(y, x_3, \pi_2 A(x_1, y, x_3))$ , adică  $\pi_1 A(^{(123)}\pi_1 A, E_1, E_2) = ^{(123)}\pi_2 A(^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_3)$ , astfel identitatea se reduce la forma 3.
25. Făcând în  $A(E_3, \pi_3 A(E_2, E_3, A), \pi_1 A(A, E_1, E_2)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_3, \pi_3 A(x_2, x_3, y), \pi_1 A(y, \pi_1 A(y, x_2, x_3), x_2)) = y$ , astfel  $\pi_3 A(x_3, \pi_3 A(x_2, x_3, y), y) = \pi_1 A(y, \pi_1 A(y, x_2, x_3), x_2)$ , adică  $^{(132)}\pi_3 A(^{(123)}\pi_3 A, E_1, E_3) = ^{(12)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
26. Făcând în  $A(\pi_2 A(E_3, E_2, A), E_3, \pi_1 A(E_3, A, E_1)) = E_1$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(x_3, \pi_2 A(x_1, y, x_3), y), x_3, \pi_1 A(x_3, y, x_1)) = x_1$ , deci  $\pi_1 A(x_1, x_3, \pi_1 A(x_3, y, x_1)) =$

- $\pi_2 A(x_3, \pi_2 A(x_1, y, x_3), y)$ , adică  $^{(13)}\pi_1 A(^{\pi_1} A, E_1, E_3) = ^{(12)}\pi_2 A(^{(13)}\pi_2 A, E_1, E_2)$ , prin urmare identitatea se reduce la forma 3.
27. Făcând în  $A(E_2, \pi_3 A(E_3, A, E_1), A) = \pi_2 A(A, E_2, E_1)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_2, \pi_3 A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), y, x_1), y) = \pi_2 A(y, x_2, x_1)$ , deci  $\pi_2 A(x_2, \pi_2 A(y, x_2, x_1), y) = \pi_3 A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), y, x_1)$ , adică  $^{(132)}\pi_2 A(^{\pi_2} A, E_1, E_2) = \pi_3 A(^{(13)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , astfel identitatea se reduce la forma 3.
28. Făcând în  $A(\pi_3 A(E_3, A, E_2), E_2, \pi_1 A(E_2, A, E_1)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), y, x_2), x_2, \pi_1 A(x_2, y, x_1)) = y$ , astfel  $\pi_1 A(y, x_2, \pi_1 A(x_2, y, x_1)) = \pi_3 A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), y, x_2)$ , adică  $^{(13)}\pi_1 A(^{\pi_1} A, E_1, E_2) = ^{(23)}\pi_3 A(^{(132)}\pi_3 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
29. Făcând în  $A(E_1, \pi_3 A(A, E_3, E_1), \pi_2 A(A, E_1, E_2)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_1, \pi_3 A(y, \pi_3 A(x_1, x_2, y), x_1), \pi_2 A(y, x_1, x_2)) = y$ , deci  $\pi_2 A(x_1, y, \pi_2 A(y, x_1, x_2)) = \pi_3 A(y, \pi_3 A(x_1, x_2, y), x_1)$ , adică  $^{(13)}\pi_2 A(^{\pi_2} A, E_1, E_2) = ^{(12)}\pi_3 A(^{(123)}\pi_3 A, E_1, E_2)$ , astfel identitatea se reduce la forma 4.
30. Făcând în  $A(\pi_3 A(E_3, E_1, A), E_3, \pi_2 A(E_2, A, E_1)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(x_3, x_1, y), x_3, \pi_2 A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), y, x_1)) = y$ , astfel  $\pi_3 A(\pi_3 A(x_3, x_1, y), x_3, y) = \pi_2 A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), y, x_1)$ , adică  $^{(23)}\pi_3 A(^{\pi_3} A, E_1, E_3) = \pi_2 A(^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
31. Făcând în  $A(\pi_3 A(A, E_3, E_2), E_1, A) = \pi_1 A(E_1, A, E_2)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(y, \pi_3 A(x_1, x_2, y), x_2), x_1, y) = \pi_1 A(x_1, y, x_2)$ , astfel  $\pi_1 A(\pi_1 A(x_1, y, x_2), x_1, y) = \pi_3 A(y, \pi_3 A(x_1, x_2, y), x_2)$ , adică  $^{(23)}\pi_1 A(^{(12)}\pi_1 A, E_1, E_2) = ^{(12)}\pi_3 A(^{(123)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
32. Făcând în  $A(E_3, \pi_1 A(E_1, E_3, A), \pi_2 A(A, E_3, E_2)) = E_2$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_3, \pi_1 A(\pi_1 A(y, x_2, x_3), x_3, y), \pi_2 A(y, x_3, x_2)) = x_2$ , deci  $\pi_2 A(x_3, x_2, \pi_2 A(y, x_3, x_2)) = \pi_1 A(\pi_1 A(y, x_2, x_3), x_3, y)$ , adică  $^{(123)}\pi_2 A(^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_3) = \pi_1 A(^{(123)}\pi_1 A, E_1, E_2)$ , astfel identitatea se reduce la forma 3.
33. Identitatea  $A(A, ^{(13)} A, E_3) = E_2$  este echivalentă cu  $A(^{(13)} A, A, E_1) = E_2$ , deci identitatea se reduce la forma 2.
34. Făcând în  $A(\pi_2 A(A, E_2, E_3), E_1, E_3) = \pi_1 A(E_1, A, E_3)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(y, \pi_2 A(x_1, y, x_3), x_3), x_1, x_3) = \pi_1 A(x_1, y, x_3)$ , astfel  $\pi_1 A(\pi_1 A(x_1, y, x_3), x_1, x_3) =$

- $\pi_2 A(y, \pi_2 A(x_1, y, x_3), x_3)$ , adică  $^{(23)}\pi_1 A(^{(13)}\pi_1 A, E_1, E_3) = ^{(132)}\pi_2 A(^{(13)}\pi_2 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
35. Făcând în  $A(E_2, \pi_1 A(E_1, A, E_3), E_3) = \pi_2 A(A, E_2, E_3)$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_2, \pi_1 A(\pi_1 A(y, x_2, x_3), y, x_3), x_3) = \pi_2 A(y, x_2, x_3)$ , deci  $\pi_2 A(x_2, \pi_2 A(y, x_2, x_3), x_3) = \pi_1 A(\pi_1 A(y, x_2, x_3), y, x_3)$ , adică  $^{(132)}\pi_2 A(^{(13)}\pi_2 A, E_1, E_2) = ^{(23)}\pi_1 A(^{(13)}\pi_1 A, E_1, E_3)$ , prin urmare identitatea se reduce la forma 3.
36. Identitatea  $A(E_1, E_2, A(E_1, E_2, A)) = \pi_3 A$  este echivalentă cu  $\pi_3 A(E_1, E_2, \pi_3 A) = A(E_1, E_2, A)$ , adică  $\pi_3 A(\pi_3 A, E_1, E_2) = A(A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
37. Identitatea  $A(E_1, E_2, A(E_2, E_1, A)) = ^{(12)}\pi_3 A$  este echivalentă cu  $\pi_3 A(E_1, E_2, ^{(12)}\pi_3 A) = A(E_2, E_1, A)$ , adică  $^{(123)}\pi_3 A(^{(12)}\pi_3 A, E_1, E_2) = ^{(13)}A(A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
38. Identitatea  $A(E_1, ^{(23)}\pi_3 A, A(E_1, A, E_2)) = E_3$  este echivalentă cu  $\pi_3 A(E_1, ^{(23)}\pi_3 A, E_3) = A(E_1, A, E_2)$ , adică  $\pi_3 A(^{(23)}\pi_3 A, E_1, E_3) = A(A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
39. Făcând în  $A(E_1, \pi_3 A(E_1, E_3, A), \pi_2 A(E_1, A, E_2)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_1, \pi_3 A(x_1, x_3, y), \pi_2 A(x_1, y, \pi_2 A(x_1, y, x_3))) = y$ , astfel  $\pi_3 A(x_1, \pi_3 A(x_1, x_3, y), y) = \pi_2 A(x_1, y, \pi_2 A(x_1, y, x_3))$ , adică  $^{(12)}\pi_3 A(^{(23)}\pi_3 A, E_1, E_2) = ^{(123)}\pi_2 A(\pi_2 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
40. Identitatea  $^{(132)}\pi_2 A(E_2, ^{(132)}\pi_2 A, E_1) = A(E_3, E_1, A)$  ia forma  $\pi_2 A(^{(23)}\pi_2 A, E_1, E_2) = A(^{(13)}A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
41. Făcând în  $\pi_2 A(\pi_3 A(E_3, E_1, A), A, \pi_2 A(E_2, A, E_1)) = E_3$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $(\pi_3 A(x_3, x_1, y), x_3, \pi_2 A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), y, x_1)) = y \Leftrightarrow \pi_3 A(\pi_2 A(x_3, x_1, y), x_3, y) = \pi_2 A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), y, x_1)$ , adică  $^{(23)}\pi_3 A(^{(13)}\pi_3 A, E_1, E_3) = \pi_2 A(^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
42. Făcând în  $A(A, E_3, A(E_3, E_1, A)) = ^{(132)}\pi_2 A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(y, x_3, A(x_3, x_1, y)) = ^{(132)}\pi_2 A(x_1, \pi_2 A(x_1, y, x_3), x_3)$ , astfel  $^{(13)}A(A(x_3, x_1, y), x_3, y) = \pi_2 A(^{(123)}\pi_2 A(x_3, x_1, y), x_3, x_1)$ , adică  $^{(13)}A(A, E_1, E_3) = \pi_2 A(^{(123)}\pi_2 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.

43. Identitatea  $A(E_3, {}^{(132)}\pi_1 A, A(A, E_1, E_2)) = E_2$  este echivalentă cu  $\pi_3 A(E_3, {}^{(132)}\pi_1 A, E_2) = A(A, E_1, E_2)$ , adică  ${}^{(132)}\pi_3 A({}^{(13)}\pi_1 A, E_1, E_3) = {}^{(23)}A({}^{(12)}A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
44. Făcând în  $A(E_3, \pi_3 A(E_2, E_3, A), \pi_1 A(A, E_1, E_2)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_3, \pi_3 A(x_2, x_3, y), \pi_1 A(y, \pi_1 A(y, x_2, x_3), x_2)) = y$ , deci  $\pi_3 A(x_3, \pi_3 A(x_2, x_3, y), y) = \pi_1 A(y, \pi_1 A(y, x_2, x_3), x_2)$ , adică  ${}^{(132)}\pi_3 A({}^{(13)}\pi_3 A, E_1, E_2) = {}^{(12)}\pi_1 A({}^{(23)}\pi_1 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
45. Identitatea  $A({}^{(13)}\pi_3 A, E_2, A(A, E_2, E_1)) = E_1$  este echivalentă cu  $\pi_3 A({}^{(123)}\pi_3 A, E_1, E_3) = A({}^{(12)}A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
46. Făcând în  $A(\pi_3 A(E_3, E_2, A), E_2, \pi_1 A(A, E_2, E_1)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(x_3, x_2, y), x_2, \pi_1 A(y, x_2, \pi_1 A(y, x_2, x_3))) = y$ , deci  $\pi_3 A(\pi_3 A(x_3, x_2, y), x_2, y) = \pi_1 A(y, x_2, \pi_1 A(y, x_2, x_3))$ , adică  ${}^{(23)}\pi_3 A({}^{(13)}\pi_3 A, E_1, E_2) = {}^{(123)}\pi_1 A({}^{(12)}\pi_1 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
47. Identitatea  $A(E_1, A(E_1, E_3, A), {}^{(23)}\pi_2 A) = E_2$  este echivalentă cu  $\pi_2 A(E_1, E_2, {}^{(23)}\pi_2 A) = A(E_1, E_3, A)$ , adică  $\pi_2 A({}^{(23)}\pi_2 A, E_1, E_2) = A(A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
48. Făcând în  $A(E_1, \pi_3 A(E_1, E_3, A), \pi_2 A(E_1, A, E_2)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_1, \pi_3 A(x_1, x_3, y), \pi_2 A(x_1, y, \pi_2 A(x_1, y, x_3))) = y$ , astfel  $\pi_3 A(x_1, \pi_3 A(x_1, x_3, y), y) = \pi_2 A(x_1, y, \pi_2 A(x_1, y, x_3))$ , adică  ${}^{(12)}\pi_3 A({}^{(23)}\pi_3 A, E_1, E_2) = {}^{(123)}\pi_2 A({}^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
49. Făcând în  $A(A, A(E_2, A, E_1), E_2) = {}^{(123)}\pi_3 A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(y, A(x_2, y, x_1), x_2) = {}^{(123)}\pi_3 A(x_1, x_2, \pi_3 A(x_1, x_2, y))$ , adică  ${}^{(132)}A({}^{(23)}A, E_1, E_3) = {}^{(12)}\pi_3 A({}^{(12)}\pi_3 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
50. Făcând în  $A(\pi_2 A(E_2, A, E_1), \pi_3 A(E_3, E_1, A), E_2) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(x_2, y, x_1), \pi_3 A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), x_1, y), x_2) = y$ , deci  $\pi_2 A(\pi_2 A(x_2, y, x_1), y, x_2) = \pi_3 A(\pi_3 A(x_1, x_2, y), x_1, y)$ , adică  $\pi_2 A({}^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_2) = {}^{(23)}\pi_3 A({}^{(13)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
51. Identitatea  $A(E_1, A(E_1, A, E_3), E_3) = \pi_2 A$  este echivalentă cu  $\pi_2 A(E_1, \pi_2 A, E_3) = A(E_1, A, E_3)$ , adică  $\pi_2 A({}^{(23)}\pi_2 A, E_1, E_2) = A({}^{(23)}A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.

52. Identitatea  $A(E_1, A(E_3, A, E_1), E_3) = {}^{(13)}\pi_2 A$  este echivalentă cu  $\pi_2 A(E_1, {}^{(13)}\pi_2 A, E_3) = A(E_3, A, E_1)$ , adică  ${}^{(12)}\pi_2 A({}^{(132)}\pi_2 A, E_1, E_2) = {}^{(132)}A({}^{(23)}A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
53. Făcând în  $A(\pi_2 A(E_2, A, E_3), \pi_1 A(A, E_1, E_3), E_3) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_2 A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), y, x_3), \pi_1 A(y, x_1, x_3), x_3) = y$ , deci  $\pi_1 A(y, \pi_1 A(y, x_1, x_3), x_3) = \pi_2 A(\pi_2 A(x_1, y, x_3), y, x_3)$ , adică  ${}^{(12)}\pi_1 A({}^{(23)}\pi_1 A, E_1, E_2) = \pi_2 A({}^{(132)}\pi_2 A, E_1, E_2)$ , astfel identitatea se reduce la forma 4.
54. Identitatea  $A({}^{(12)}\pi_2 A, A(A, E_1, E_3), E_3) = E_2$  este echivalentă cu  $\pi_2 A({}^{(12)}\pi_2 A, E_2, E_3) = A(A, E_1, E_3)$ , adică  $\pi_2 A({}^{(132)}\pi_2 A, E_1, E_2) = A({}^{(13)}A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
55. Identitatea  $A(E_2, A(A, E_3, E_1), {}^{(123)}\pi_2 A) = E_3$  este echivalentă cu  $\pi_2 A(E_2, E_3, {}^{(123)}\pi_2 A) = A(A, E_3, E_1)$ , adică  ${}^{(13)}\pi_2 A({}^{(12)}\pi_2 A, E_1, E_2) = A({}^{(13)}A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
56. Făcând în  $A(E_2, \pi_1 A(A, E_3, E_1), \pi_2 A(E_3, A, E_2)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(x_2, \pi_1 A(y, x_3, \pi_1 A(y, x_2, x_3)), \pi_2 A(x_3, y, x_2)) = y$ , astfel  $\pi_2 A(x_2, y, \pi_2 A(x_3, y, x_2)) = \pi_1 A(y, x_3, \pi_1 A(y, x_2, x_3))$ , adică  ${}^{(13)}\pi_2 A({}^{(132)}\pi_2 A, E_1, E_2) = {}^{(123)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
57. Făcând în  $A(\pi_3 A(E_2, E_3, A), \pi_1 A(A, E_1, E_2), E_1) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi_3 A(x_2, \pi_3 A(x_1, x_2, y), y), \pi_1 A(y, x_1, x_2), x_1) = y$ , deci  $\pi_1 A(y, \pi_1 A(y, x_1, x_2), x_1) = \pi_3 A(x_2, \pi_3 A(x_1, x_2, y), y)$ , adică  ${}^{(12)}\pi_1 A(\pi_1 A, E_1, E_2) = {}^{(132)}\pi_3 A({}^{(123)}\pi_3 A, E_1, E_3)$ , prin urmare identitatea se reduce la forma 3.
58. Identitatea  $A(A(E_2, E_3, A), {}^{(123)}\pi_1 A, E_1) = E_2$  este echivalentă cu  $\pi_1 A(E_2, {}^{(123)}\pi_1 A, E_1) = A(E_2, E_3, A)$ , adică  ${}^{(12)}\pi_1 A({}^{(23)}\pi_1 A, E_1, E_2) = A({}^{(12)}A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
59. Identitatea  $A(A(E_3, E_2, A), E_2, {}^{(123)}\pi_1 A) = E_1$  este echivalentă cu  $\pi_1 A(E_1, E_2, {}^{(123)}\pi_1 A) = A(E_3, E_2, A)$ , adică  $\pi_1 A({}^{(23)}\pi_1 A, E_1, E_2) = A({}^{(12)}A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.

60. Făcând în  $A(\pi^3 A(E_3, E_2, A), E_2, \pi^1 A(A, E_2, E_1)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi^3 A(\pi^3 A(x_1, x_2, y), x_2, y), x_2, \pi^1 A(y, x_2, x_1)) = y$ , astfel  $\pi^1 A(y, x_2, \pi^1 A(y, x_2, x_1)) = \pi^3 A(\pi^3 A(x_1, x_2, y), x_2, y)$ , adică  $^{(123)}\pi^1 A(\pi^1 A, E_1, E_2) = ^{(23)}\pi^3 A(^{(13)}\pi^3 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
61. Substituind  $A(x_1, x_2, x_3) = y$  în  $A(A(A, E_2, E_1), E_2, A) = ^{(123)}\pi^3 A$ , obținem  $A(A(y, x_2, x_1), x_2, y) = ^{(123)}\pi^3 A(x_1, x_2, \pi^3 A(x_1, x_2, y))$ , prin urmare  $A(^{(12)}A, E_1, E_2) = ^{(23)}\pi^3 A(^{(132)}\pi^3 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea 61 se reduce la forma 3.
62. Identitatea  $A(A(E_2, A, E_3), ^{(12)}\pi^1 A, E_3) = E_1$  este echivalentă cu  $\pi^1 A(E_1, ^{(12)}\pi^1 A, E_3) = A(E_2, A, E_3)$ , adică  $\pi^1 A(^{(123)}\pi^1 A, E_1, E_3) = A(^{(13)}A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
63. Făcând în  $A(\pi^2 A(E_2, A, E_3), \pi^1 A(A, E_1, E_3), E_3) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi^2 A(\pi^2 A(x_1, y, x_3), y, x_3), \pi^1 A(y, x_1, x_3), x_3) = y$ , deci  $\pi^1 A(y, \pi^1 A(y, x_1, x_3), x_3) = \pi^2 A(\pi^2 A(x_1, y, x_3), y, x_3)$ , adică  $^{(12)}\pi^1 A(^{(23)}\pi^1 A, E_1, E_2) = \pi^2 A(^{(132)}\pi^2 A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
64. Identitatea  $A(A(E_3, A, E_2), E_1, ^{(132)}\pi^1 A) = E_3$  este echivalentă cu  $\pi^1 A(E_3, E_1, ^{(132)}\pi^1 A) = A(E_3, A, E_2)$ , adică  $^{(123)}\pi^1 A(^{(23)}\pi^1 A, E_1, E_3) = ^{(12)}A(^{(13)}A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
65. Făcând în  $A(\pi^2 A(E_3, A, E_2), E_1, \pi^1 A(A, E_3, E_1)) = A$  substituția  $A(x_1, x_2, x_3) = y$ , obținem  $A(\pi^2 A(x_3, y, \pi^2 A(x_1, y, x_3)), x_1, \pi^1 A(y, x_3, x_1)) = y$ , astfel  $\pi^1 A(y, x_1, \pi^1 A(y, x_3, x_1)) = \pi^2 A(x_3, y, \pi^2 A(x_1, y, x_3))$ , adică  $^{(123)}\pi^1 A(^{(23)}\pi^1 A, E_1, E_2) = ^{(13)}\pi^2 A(^{(12)}\pi^2 A, E_1, E_3)$ , deci identitatea se reduce la forma 3.
66. Identitatea  $A(A(A, E_2, E_3), E_2, E_3) = \pi^1 A$  este echivalentă cu  $A(\pi^1 A, E_2, E_3) = A(A, E_2, E_3)$ , adică  $\pi^1 A(^{(132)}\pi^1 A, E_1, E_2) = A(^{(132)}A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4.
67. Identitatea  $A(A(A, E_3, E_2), E_2, E_3) = ^{(23)}\pi^1 A$  este echivalentă cu  $\pi^1 A(^{(23)}\pi^1 A, E_2, E_3) = A(A, E_3, E_2)$ , adică  $\pi^1 A(^{(13)}\pi^1 A, E_1, E_2) = ^{(23)}A(^{(132)}A, E_1, E_2)$ , deci identitatea se reduce la forma 4. □

### 3.3. Unele paratopii ale sistemelor ortogonale de quasigrupuri $n$ -are

**Teorema 3.6.** Fie  $\Sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_n, E_1, E_2, \dots, E_n\}$  și  $\theta = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ , unde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt quasigrupuri  $n$ -are, definite pe o mulțime nevidă  $Q$  și  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sunt selectorii  $n$ -ari pe  $Q$ . Dacă  $A_2 = \alpha^{-1} A_1, A_3 = \alpha^{-2} A_1, \dots, A_n = \alpha^{-n+1} A_1$  și  $(Q, A_1)$  verifică identitatea  $A_1(A_1, \alpha^{-1} A_1, \alpha^{-2} A_1, \dots, \alpha^{-n+1} A_1) = E_2$ , unde  $\alpha = (12 \dots n)$ , atunci  $\theta$  este o paratopie a sistemului  $\Sigma$ .

*Demonstrație.* Fie  $\Sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_n, E_1, E_2, \dots, E_n\}$  un sistem ortogonal și fie  $\theta = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ , unde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt quasigrupuri  $n$ -are, definite pe o mulțime nevidă  $Q$  și  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sunt selectorii  $n$ -ari pe  $Q$ . Dacă  $A_1\theta = E_2, A_2\theta = E_3, \dots, A_{n-1}\theta = E_n, A_n\theta = E_1$ , atunci  $\theta^2 = (E_2, \dots, E_n, E_1)$ ,  $\theta^3 = (A_2, \dots, A_n, A_1)$ ,  $\theta^4 = (E_3, \dots, E_n, E_1, E_2)$ , ...,  $\theta^{2n-1} = (A_n, A_1, \dots, A_{n-1})$ ,  $\theta^{2n} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ , deci ordinul funcției  $\theta$  este  $2n$ . Din  $A_1\theta = E_2$  rezultă  $A_1\theta^2 = A_2$ , adică  $A_2 = A_1(E_2, \dots, E_n, E_1)$ , prin urmare  $A_2 = \alpha^{-1} A_1$ , unde  $\alpha = (12 \dots n)$ . De asemenea,  $A_1\theta = E_2$  implică  $A_1\theta^4 = E_2\theta^3 = A_3$ , adică  $A_3 = A_1(E_3, \dots, E_n, E_1, E_2)$ , așadar  $A_3 = \alpha^{-2} A_1$ . Analog, obținem, pentru orice  $i = \overline{2, n}$ ,

$$A_i = \alpha^{-i+1} A_1. \quad (3.36)$$

Utilizând egalitățile (3.33) în  $A_1\theta = E_2$ , avem

$$A_1(A_1, \alpha^{-1} A_1, \alpha^{-2} A_1, \dots, \alpha^{-n+1} A_1) = E_2. \quad (3.37)$$

Reciproc, dacă (3.37) și (3.36) au loc, pentru orice  $i = \overline{2, n}$ , atunci

$$A_1(A_1, A_2, \dots, A_n) = E_2, \quad (3.38)$$

deci  $A_1\theta = E_2$ . Mai mult, pentru orice  $i = \overline{2, n}$ , folosind parastrofia, egalitatea (3.38) implică

$$\alpha^{-i+1} A_1(A_{\alpha^{-i+1}(1)}, A_{\alpha^{-i+1}(2)}, \dots, A_{\alpha^{-i+1}(n)}) = E_2. \quad (3.39)$$

Acum, conform (3.36) avem:  $A_{\alpha^{-i+1}(k)} = A_{i+k-1} = \alpha^{-i-k+2} A_1 = \alpha^{-i+1} (\alpha^{-k+1} A_1) = \alpha^{-i+1} A_k$ ,  $\forall k = \overline{1, n}$ . Din egalitățile  $A_{\alpha^{-i+1}(k)} = \alpha^{-i+1} A_k, \forall k = \overline{1, n}$ , și (3.39), obținem  $A_i(\alpha^{-i+1} A_1, \alpha^{-i+1} A_2, \dots, \alpha^{-i+1} A_n) = E_2$ . Folosind transformarea parastrofică, ultima egalitate ia forma:

$$A_i(A_1(x_{\alpha^{i-1}(1)}^{\alpha^{i-1}(n)}), A_2(x_{\alpha^{i-1}(1)}^{\alpha^{i-1}(n)}), \dots, A_n(x_{\alpha^{i-1}(1)}^{\alpha^{i-1}(n)})) = x_2,$$

deci, notând  $x_{\alpha^{i-1}(k)}$  cu  $x_k, \forall k = \overline{1, n}$ , avem  $A_i(A_1(x_1^n), A_2(x_1^n), \dots, A_n(x_1^n)) = x_{i+1}$ , care implică  $A_i\theta = E_{i+1}, i = \overline{2, n}$ . □



**Observația 3.3.** Dacă quasigrupul  $n$ -ar  $(Q, A)$  verifică identitatea  $A(A, \alpha^{-1}A, \alpha^{-2}A, \dots, \alpha^{-n+1}A) = E_2$ , unde  $\alpha = (12\dots n)$ , atunci  $(Q, A)$  este quasigrup autoortogonal, cu tipul de autoortogonalitate  $(\varepsilon, \alpha^{-1}, \dots, \alpha^{-n+1})$ .

Într-adevăr, fie  $(Q, A)$  un quasigrup  $n$ -ar ce verifică identitatea  $A(A, \alpha^{-1}A, \alpha^{-2}A, \dots, \alpha^{-n+1}A) = E_2$ , adică  $A(A(x_1^n), \alpha^{-1}A(x_1^n), \alpha^{-2}A(x_1^n), \dots, \alpha^{-n+1}A(x_1^n)) = x_2$ . Folosind transformarea parastrofică, ultima egalitate ia forma

$$A(A(x_1^n), A(x_2, \dots, x_n, x_1), A(x_3, \dots, x_n, x_1, x_2), \dots, A(x_n, x_1, \dots, x_{n-1})) = x_2. \quad (3.40)$$

Substituim  $x_i \rightarrow x_{\alpha(i)}$  în (3.40) și obținem

$$A(A(x_2, \dots, x_n, x_1), A(x_3, \dots, x_n, x_1, x_2), A(x_n, x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, A(x_1, \dots, x_n)) = x_3.$$

Însă ultima egalitate implică

$$\beta_1 A(A(x_1^n), A(x_2, \dots, x_n, x_1), A(x_3, \dots, x_n, x_1, x_2), \dots, A(x_n, x_1, \dots, x_{n-1})) = x_3, \quad (3.41)$$

unde  $\beta_1 \in S_{n+1}$ . Analog, obținem

$$\beta_i A(A(x_1^n), A(x_2, \dots, x_n, x_1), A(x_3, \dots, x_n, x_1, x_2), \dots, A(x_n, x_1, \dots, x_{n-1})) = x_{i+2}, \quad (3.42)$$

unde  $\beta_i \in S_{n+1}$ ,  $i = 2, n-2$  și

$$\beta_{n-1} A(A(x_1^n), A(x_2, \dots, x_n, x_1), A(x_3, \dots, x_n, x_1, x_2), \dots, A(x_n, x_1, \dots, x_{n-1})) = x_1, \quad (3.43)$$

unde  $\beta_{n-1} \in S_{n+1}$ .

Din egalitățile (3.41)-(3.43), avem  $\varepsilon = (\beta_{n-1}A, A, \beta_1A, \dots, \beta_{n-2}A)(A, \alpha^{-1}A, \alpha^{-2}A, \dots, \alpha^{-n+1}A)$ ,

deci  $\theta = (A, \alpha^{-1}A, \alpha^{-2}A, \dots, \alpha^{-n+1}A)$  este o bijecție, prin urmare sistemul de parastrofi principali  $\{A, \alpha^{-1}A, \alpha^{-2}A, \dots, \alpha^{-n+1}A\}$  este ortogonal, adică  $(Q, A)$  este quasigrup autoortogonal, cu tipul de autoortogonalitate  $(\varepsilon, \alpha^{-1}, \dots, \alpha^{-n+1})$ . □

### 3.4. Concluzii la Capitolul 3

În [13] V. Belousov a arătat că există exact nouă sisteme ortogonale din două quasigrupuri binare și selectorii binari, care admit cel puțin o paratopie netrivială. În aceeași lucrare sunt determinate trei identități pe care la implică existența paratopiilor acestor sisteme. Identitățile care apar în acest mod se regăsesc printre cele 7 identități minimale din clasificarea lui Belousov, iar quasigrupurile care verifică astfel de identități sunt parastrofic-ortogonale.

În lucrare este prezentată o nouă abordare, diferită de cea a lui V. Belousov [13], pentru soluționarea problemei descrierii sistemelor ortogonale din două quasigrupuri binare și selectorii binari, care admit cel puțin o paratopie netrivială. Această abordare oferă posibilitatea soluționării problemei date în caz  $n$ -ar.

*Ținând cont de studiul efectuat în Capitolul 3 deducem următoarele concluzii:*

1. Este soluționată complet *problema* descrierii sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială. Se demonstrează că există exact 153 de sisteme ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială, sunt caracterizate aceste sisteme și paratopiile lor (sistemele sunt prezentate în ANEXA 1) [68, 123, 124, 125].

2. Se arată că existența paratopiilor unui sistem ortogonal  $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$  din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari implică 67 de identități, care se reduc la unul din următoarele 4 tipuri:

1.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, {}^{\delta}A) = E_1,$
2.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, E_1) = E_2,$
3.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_3),$
4.  ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_2),$

unde  $A$  este un quasigrup ternar și  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S_4$  [22, 65, 66]. În particular, printre identitățile de tipul 1. se regăsește o identitate studiată de Evans în [78], care implică autoortogonalitatea quasigrupului ce o verifică.

3. Din existența paratopiilor, toate componentele căreia sunt quasigrupuri, rezultă faptul că operațiile din componența lor sunt parastrofe între ele și autoortogonale.

4. Abordarea propusă în teză, este utilizată la studiul sistemelor ortogonale din  $n$  quasigrupuri  $n$ -are și selectorii  $n$ -ari, care admit cel puțin o paratopie, componentele căreia sunt cele  $n$  quasigrupuri  $n$ -are. În particular, se demonstrează că quasigrupurile acestor sisteme sunt parastrofe între ele și autoortogonale [66].

În acest capitol au fost realizate obiectivele care se referă la: descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială; determinarea tuturor sistemelor de tipul dat; caracterizarea paratopiilor sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari și la studiul identităților implicate de paratopii în caz ternar.

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în [22, 65, 66, 68, 123, 124, 125].

## CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Lucrarea se referă la teoria quasigrupurilor binare parastrofic-ortogonale (autoortogonale), problema caracterizării paratopiilor sistemelor ortogonale de quasigrupuri ternare.

**Problema principală științifică soluționată** constă în descrierea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială.

În teză sunt studiate următoarele aspecte ale teoriei  $\pi$ -quasigrupurilor de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ : invarianța identităților minimale la izotopie, studiul  $\pi$ -quasigrupurilor izotope unor grupuri (grupuri abeliene), estimări ale ordinului  $\pi$ -quasigrupurilor finite, studiul holomorfului ca extindere a  $\pi$ -quasigrupului.

În lucrarea prezentă este dată o abordare diferită de cea utilizată de Belousov în [12] la studiul existenței paratopiilor. Această abordare permite descrierea tuturor sistemelor ortogonale din  $n$  quasigrupuri  $n$ -are și selectorii  $n$ -ari și a paratopiilor lor, pentru orice  $n \geq 2$ . Aplicând această metodă au fost determinate toate paratopiile sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială, au fost deduse și clasificate identitățile implicate de existența paratopiilor acestor sisteme. În cazul  $n \geq 4$  sunt studiate paratopiile, toate componentele cărora sunt operații de quasigrup. Se arată că existența acestor paratopii implică autoortogonalitatea quasigrupurilor sistemului ortogonal respectiv.

În cadrul tezei date sunt efectuate cercetări în domeniul teoriei quasigrupurilor parastrofic-ortogonale și a sistemelor ortogonale de quasigrupuri, iar contribuția autorului poate fi formulată în următoarele **concluzii principale**:

1. A fost propusă o abordare diferită de cea utilizată de V. Belousov în caz binar, pentru studiul paratopiilor sistemelor ortogonale de quasigrupuri. Această abordare a făcut posibilă descrierea tuturor sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari (153 de sisteme) care admit cel puțin o paratopie netrivială și a tuturor paratopiilor acestor sisteme. Unele paratopii implică ortogonalitatea parastrofilor quasigrupurilor sistemului [68, 123, 124, 125].

2. Au fost obținute identitățile pe care le implică existența paratopiilor sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari (67 de identități), care au fost reduse, cu ajutorul transformărilor de parastrofie, la 4 tipuri posibile [22, 65, 66].

3. Au fost deduse proprietăți generale ale  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_1$  și  $T_2$ , condiții necesare și suficiente ca un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$ , respectiv  $T_2$ , să fie izotop unui grup (grup abelian), caracterizări ale universalității identităților minimale de tipurile  $T_1$  și  $T_2$ , ale ordinului  $\pi$ -quasigrupurilor finite de tipul  $T_1$  și ale grupului substituțiilor interne în  $\pi$ -quasigrupurile finite de tipul  $T_1$  [2, 3, 67, 69, 126, 127, 128, 129].

4. S-a demonstrat că grupul multiplicativ la stânga (la dreapta) al unui  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  este izomorf cu un subgrup normal al grupului multiplicativ la stânga (la dreapta) al holomorfului său [70].

Rezultatele autorului, care se referă la tema tezei sunt publicate în [1-5, 22, 64-70, 123-129].

Teza propusă spre susținere conține soluționarea completă a problemei descrierii sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari, care admit cel puțin o paratopie netrivială.

#### **Recomandări:**

a) Metoda aplicată la deducerea sistemelor ortogonale din trei quasigrupuri ternare și selectorii ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială poate fi utilizată în caz  $n$ -ar, pentru orice  $n \geq 2$ ;

b) Identitățile care rezultă din existența paratopiilor în caz binar sunt minimale (2 variabile cu 5 intrări), astfel studiul paratopiilor în caz ternar conduce la definirea identităților minimale în caz ternar și pune problema clasificării lor;

c) Unele identități ce rezultă din existența paratopiilor în caz ternar sunt cunoscute (identitatea Evans) și implică autoortogonalitatea quasigrupului ternar respectiv. Apare problema studiului quasigrupurilor ternare cu identități ce rezultă din existența paratopiilor, ortogonalitatea parastrofilor pe care o implică aceste identități.

d) În lucrare sunt date condiții necesare și suficiente ca un  $\pi$ -quasigrup de tipul  $T_1$  sau  $T_2$  să fie izotop unui grup (grup abelian) și unele proprietăți ale acestor grupuri. Rămâne deschisă problema descrierii grupurilor (grupurilor abeliene) izotope  $\pi$ -quasigrupurilor de aceste tipuri.

e) Rezultatele lucrării pot fi utilizate pentru cercetările ulterioare în teoria quasigrupurilor și în domeniile adiacente ale algebrei, geometriei și combinatoricii, în teoria codurilor și în criptografie. De asemenea, rezultatele pot fi utilizate în calitate de suport pentru cursuri universitare de specialitate.

## BIBLIOGRAFIE

1. Ceban D. Asupra quasigrupurilor  $n$ -are liniare autoortogonale. International Conference of Young Researchers, IX edition. November 11, 2011, ULIM, Chişinău, p. 76.
2. Ceban D. Asupra  $\pi$ -quasigrupurilor de tipul  $T_2$ . Materialele Conferinţei ştiinţifice "Integrare prin cercetare şi inovare", Universitatea de Stat din Moldova, 10-11 noiembrie 2014, p. 142-145.
3. Ceban D. Asupra  $\pi$ - $T$ -quasigrupurilor de tipul  $T_1$ . Materialele Conferinţei ştiinţifice "Integrare prin cercetare şi inovare", Universitatea de Stat din Moldova, 26-28 septembrie 2013, p. 146-149.
4. Ceban D. Paratopiile unui sistem ortogonal de quasigrupuri ternare. International Conference of Young Researchers, X edition. November 23, 2012, ULIM, Chişinău, p. 104.
5. Ceban D., Syrbu P. Asupra sistemelor ortogonale de operaţii. Conferinţa Interuniversitară „Educaţie prin cercetare – garant al performanţei învăţământului superior”, 3-4 mai 2012, Chişinău, p. 86-87.
6. Бектенов А. С., Якубов Т. Системы ортогональных  $n$ -арных операций. Известия АНМССР, Сер. физ.-тех. и мат. наук, 1974, N3, с. 7-14.
7. Белоусов В. Д. Алгебраические сети и квазигруппы. Кишинев, Штиинца, 1971, 165 с.
8. Белоусов В. Д. Замкнутые системы взаимно ортогональных квазигрупп. Усп. Мат. Наук. 17(1962), No. 6(108), с. 202-203.
9. Белоусов В. Д. О группе, ассоциированной квазигруппе. Мат. Исслед, 1969, 4, No. 3, с. 21–39.
10. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. Москва, Наука, 1967, 224 с.
11. Белоусов В. Д. Парастрофно-ортогональные квазигруппы. АН МССР, Кишинев, 1983, 51 с.
12. Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами. УМН, 1965, 20: 1(121), с. 75-146.
13. Белоусов В. Д. Системы ортогональных операций. Матем. сб., 1968, 77(119): I, с. 38–58.
14. Белоусов В. Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах. Матем. сб., 1966, 70(112), No. 1, с. 55-97.
15. Белоусов В. Д.  $n$ -Арные квазигруппы. Кишинев, Штиинца, 1972, .....с.
16. Белоусов В. Д., Гварамия А. Об квазигруппах Стейна. Сооб. Груз. ССР, 1966, 44, с. 537-544.

17. Белоусов В. Д., Якубов Т. Об ортогональных  $n$ -арных операциях. Вопросы кибернетики, 1975, Вып.16, с. 3–17.
18. Белявская Г. Б., Сырбу П. О классе самоортогональных  $n$ -группоидах. Известия АН МССР, 1989(2), с. 25-30.
19. Белявская Г. Б., Табаров А. Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп. Дискрет. матем., 1992, в. 4, по. 2, с. 142-147.
20. Кузнецов А. В., Кузнецов Е. А. О двупорожденных дважды однородных квазигруппах. В сб. "Квазигруппы и латинские квадраты", вып. 71, Кишинёв, "Штиинца", 1983, с. 34-53.
21. Сырбу П. Квазигруппы с тождеством самоортогональности и их спектр. Мат. Исслед. 1991, 20, с. 80-91.
22. Сырбу П. Н., Чебан Д. К. Паратопии ортогональных систем тернарных квазигрупп. XII Международный научный семинар "Дискретная математика и ее приложения" имени академика О. Б. Лупанова, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, 2016, с. 267-270.
23. Сырбу П. О самоортогональности  $n$ -арных операций. Кишинев, 1988, с. 92-97.
24. Сырбу П. Об ортогональности и самоортогональности  $n$ -арных операций. Мат. Исслед, вып.. 95, Кишинев, Штиинца, 1987, с. 121-130.
25. Сырбу П. Самоортогональные  $n$ -группы. Мат. Исслед. 1990 (113), с. 99-106.
26. Abel R. J. R. Four MOOLS of orders 20, 30, 38 and 44. Journal of Combinatorial theory, Series A, 1993, 64, p. 144-148.
27. Abel R. J. R. Four mutually orthogonal Latin Squares of orders 28 and 52. Journal of Combinatorial theory, Series A, 1991, 58, p. 306-309.
28. Abel R. J. R., Bennett F. E. Existence of two SOLS and two ISOLS. Discrete Mathematics, 2012, 312, p. 854-867.
29. Abel R.J.R., Bennett F. E. Existence of HSOLSSOMs of type  $4^nu^1$ . Australasian Journal of Combinatorics, Volume 59(2), 2014, p. 260-281.
30. Arkin J. A solution to the classical problem of finding systems of three mutually orthogonal issues in a cube formed by three superimposed  $10 \times 10 \times 10$  cubes. Fibonacci Quarterly, 1973, 11(5), p. 480-484.
31. Arkin J., Strauss E. G. Latin  $k$ -cubes. Fibonacci Quarterly, 1974, 12(3), p. 288-291.
32. Arkin J., Strauss E. G. Orthogonal latin systems. Fibonacci Quarterly, 1981, 19(4), p. 289-292.

33. Bedford D. Construction of orthogonal latin squares using left neofields. *Discrete Mathematics*, 1993, 115, p. 17-38.
34. Belousov V. D. Parastrophic-orthogonal quasigroups. *Quasigroups and related systems*, 2005, 13, No. 1, 25–72.
35. Belyavskaya G. B. Successively orthogonal systems of  $k$ -ary operations. *Quasigroups and Related Systems*, 2014, 22, p. 165-178.
36. Belyavskaya G. B.  $S$ -systems of  $n$ -ary quasigroups. *Quasigroups and Related Systems*, 2007, 15, p. 251-260.
37. Belyavskaya G. B., Diordiev A. D. On some quasi-identities in finite quasigroups. *Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, Matematica*, 2005, No. 3(49), 19–32.
38. Belyavskaya G. B., Mullen G. L. Orthogonal hypercubes and  $n$ -ary operations. *Quasigroups and Related Systems*, 2005, 13, p. 73-86.
39. Belyavskaya G. B., Popovich T. V. Near-totally conjugate orthogonal quasigroups *Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica*, Number 3(76), 2014, p. 89–96.
40. Belyavskaya G. B., Popovich T. V. Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs. *Journal of Mathematical Sciences*, 2012, 185, No. 2, 184–191.
41. Belyavskaya G. B.  $r$ -Orthogonal Latin squares, in: J. Dénes and A. D. Keedwell (Editors), *Latin Squares: New Developments*, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1992.
42. Bennet F. E. Latin squares with pairwise orthogonal conjugates. *Discrete Mathematics*, 1981, 36, 117–137.
43. Bennet F. E. On conjugate orthogonal idempotent Latin squares. *Ars. Combinatorica*, 1985, 19, 37–50.
44. Bennet F. E., Mendelsohn N. S. Conjugate orthogonal Latin square graphs. *Congressus Numerantium*, 1979, 23, 179–192.
45. Bennett F. E. Quasigroups. In: „*Handbook of Combinatorial Designs*”. Eds. C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, CRC Press, 1996.
46. Bennett F. E. Self-orthogonal semisymmetric quasigroups. *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, 1982, 33, p. 117-119.
47. Bennett F. E., Zhang H. Holey Schroder designs of type  $4^nu^1$ . *Australasian Journal of Combinatorics*, Volume 54, 2012, p. 231–260.



48. Bennett F. E., Zhang H. Quasigroups satisfying Stein's third law with a specified number of idempotents. *Discrete Mathematics*, Volume 312, Issue 24, 28 December 2012, p. 3585-3605.
49. Bennett F. E. The spectra of a variety of quasigroups and related combinatorial designs. *Discrete Mathematics*, 1989, 77, p. 29-50.
50. Bennett F. E., Du B., Zhang H. Existence of  $(3, 1, 2)$ - conjugate orthogonal diagonal latin squares. John Wiley & sons, Inc. *J. Combin. Designs*, 2001, 9, p. 297-308.
51. Bennett F. E., Du B., Zhang H. Existence of Conjugate Orthogonal Diagonal Latin Squares. John Wiley & sons, Inc. *J. Combin. Designs*, 1997, 5, p. 449-461.
52. Bennett F. E., Zhang H. Latin Squares with Self-orthogonal conjugates. *Discrete Mathematics*, 2004, 284, p. 45-55.
53. Bennett F. E., Zhu L. Conjugate-orthogonal Latin squares and related structures. In "Contemporary design theory" (Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York), 1992, p.41-96.
54. Bose R. C. A note on the resolvability of balanced incomplete block designs, *Sankhya*, 6, 1942, 105-110.
55. Bose R. C. On the construction of balanced incomplete block designs, *Ann. Eugen. London*, 9, 1939, 353-399.
56. Bose R. C., Connor W. S. Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs, *Ann. Math. Stat.*, 23, 1952, 367-383.
57. Bose R. C., Shrikhande S. S. On the falsity of Ruler's conjecture about the non-existence of two orthogonal Latin squares of order  $4t + 2$ , *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 45, 1959, 734-737.
58. Bose R. C., Shrikhande S. S., Bhattacharya K. On the construction of group divisible incomplete block designs, *Ann. Math. Stat.*, 24, 1953, 167-195.
59. Bose R. C., Shrikhande S. S., Parker E. T. Further results of the constructions of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture. *Canad. J.Math.* 12, 1960, 189-203.
60. Brayton R. K., Coppersmith D., Hoffman A. J. Self-orthogonal latin squares of all orders  $n \neq 2, 3, 6$ . *Bulletin of the american mathematical society*, 1974, Vol. 80, no 1, p. 116-118.
61. Brower A. E. Four MOLS of order 10 with a hole of order 2. *J. Statist. Planning and Inf.*, 1984, 10, p. 203-205.
62. Burger A. P., Kidd M. P., van Vuuren J. H. Enumeration of self-orthogonal Latin Squares, 2010.

63. Bush K. A. Orthogonal arrays of index unity, *Ann. Math. Stat.*, 28, 1952, 426-434.
64. Ceban D. A method of construction of  $n$ -ary self-orthogonal quasigroups. *International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE - 2015)*, July 2-5, 2015, Chişinău, p.20-21.
65. Ceban D. On some identities of ternary quasigroups. *Abstracts of the 11<sup>th</sup> Summer School „Algebra, Topology, Analysis”*, August 1-14, 2016, Odessa, Ukraine, p.105-107.
66. Ceban D. On some identities in ternary quasigroups. *Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Ştiinţe exacte şi economice”*, 2016, nr. 2(92), p. 40-45.
67. Ceban D. On  $\pi$ -quasigroups of types  $T_1$  and  $T_2$ . *Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor „Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători”*, Academia de Ştiinţe a Moldovei, 10 martie 2015, p. 16.
68. Ceban D., Syrbu P. On paratopies of orthogonal systems. *International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE - 2016)*, June 23-26, 2016, Chişinău, p.17-18.
69. Ceban D., Syrbu P. On quasigroups with some minimal identities. *Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Ştiinţe exacte şi economice”*, 2015, nr. 2 (82), p. 47-52.
70. Ceban D., Syrbu P. On the holomorph of  $\pi$ -quasigroups of type  $T_1$ . *Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Republic of Moldova*, August 19-23, 2014, Chişinău, p. 34-37.
71. Chaffer R. A., Lieberman D. J., Smith D. D. The number of orthogonal conjugates of a quasigroup. *Congressus Numerantium*, 1982, 169–180.
72. Chen K., Zhang Y., Zhang H. Strongly symmetric self-orthogonal diagonal Latin squares and Yang Hui magic squares. *Discrete Math*, 2014, 328, p. 79-87.
73. Cupona G., Usan J., Stojakovic Z. On finite multiquasigroups. *Publ. Inst. Math.*, 1981, 29 (43), p. 53-59.
74. Denes J., Keedwell A. D. *Latin squares and their applications*. Academic Press, New York, 1974, 547 p.
75. Denes J., Keedwell A. D. *Latin squares and their applications: Second edition*. Elsevier, 2015, 440 p.
76. Denes J., Keedwell A. D. *Latin squares: new developments in the Theory and Applications*. *Annals of Discrete Mathematics*, 1991, 46, 453 p.
77. Evans T. Algebraic structures associated with Latin squares and orthogonal arrays. *Proc. Conf. Algebraic Aspects of Combinatorics, Congressus Numerantium*, 1975, 13, 31–52.

78. Evans T. Latin cubes orthogonal to their transposes - a ternary analogue of Stein quasigroups. *Aequat. Math.*, 1973, 9, N2/3, p. 296–297.
79. Evans T. The construction of orthogonal  $k$ -skeins and latin  $k$ -cubes. *Aequat. Math.*, 1976, 14, N3, p. 485-491.
80. Golomb S. W., Posner E. C. Rook domains, latin squares, affine planes, and error-distributing codes. *IEEE Trans. Information theory*. IT-10, 1964, p. 196-208.
81. Graham G. P., Roberts C. E. Complete Sets of Orthogonal, Self-Orthogonal Latin Squares. *Ars Combinatoria*. 64(2002): p. 193-198.
82. Graham G. P., Roberts C. E. Projective Planes and Complete Sets of Orthogonal, Self-Orthogonal Latin Squares. *Congressus Numerantium* 184(2007), p. 161-172.
83. Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes. *Bell System Tech. J.* 29, 1950, p. 147-160.
84. Hanani H. On the number of orthogonal latin squares. *J. Combin. Theory* 8, 1970, p. 247-271.
85. Hedayat A., Parker E. T., Federer W. T. The existence and construction of two families of designs for two successive experiments. *Biometrika*, 1970, 57, p. 351-355.
86. Joyner D. and Kim Jon-L. Selected unsolved problems in coding theory. *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhuser/Springer, New York, 2011.
87. Kepka T., Nemec P.  $T$ -quasigroups, I. *Acta Univ. Carolinae. Math. Phys.*, 1971, 1(12), p. 31-39.
88. Kinyon M. K., Phillips J. D. Commutants of Bol loops of odd order. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2004, 132, p. 617-619.
89. Laywine C. F., Mullen G. L., Whittle G.  $d$ -Dimensional hypercubes and the Euler and Macneish conjectures. *Monatsh. Math.*, 1995, 119, p. 223-238.
90. Levi F. W. Finite geometrical systems. University of Calcutta, 1942.
91. Lin C. D. Construction of orthogonal and nearly orthogonal latin hypercubes. *Biometrika*, 2009, 96, p. 243-247.
92. Lindner C. C., Mendelsohn N. S. Construction of perpendicular Steiner quasigroups. *Aequationes Math.* 9, 1973, p. 150-156.
93. Lindner C. C., Steedly D. On the number of conjugates of a quasigroup. *Algebra Univ.*, 1975, 5, p. 191–196.
94. MacNeish H. F. Euler squares. *Annals of Mathematics, Second Series*, 1922, Vol. 23, no. 3, p. 221-227.
95. MacNeish H. F. Ruler squares, *Ann. Math.*, 28, 1922, p. 221-227.

96. Mann H. B. On orthogonal latin squares. Bull. Amer. Math. Soc., 50(1944), p. 249-257.
97. Mann H. B. The construction of orthogonal Latin squares, Ann. Math. Stat., 13, 1942, p. 418-423.
98. Mendelsohn N. S. A natural generalization of Steiner triples systems. Computers in Number Theory (Proc. Sci. Res. Council Atlas Sympos. No. 2, Oxford, 1969), Academic Press, London, 1971, p. 323-338.
99. Mendelsohn N. S. Combinatorial designs as models of universal algebras. In "Recent Progress in Combinatorics". Proc. Third Waterloo Conf. on Combinatorics, 1968, Academic Press, New York, p.123-132.
100. Mendelsohn N. S. Latin Squares orthogonal to their transpose. Journal of combinatorial theory, 1971, 11, p. 187-189.
101. Mendelsohn N. S. Orthogonal Steiner systems. Aequationes mathematicae, 1970, 5, p. 268-272.
102. Mullen G., Shcherbacov V. On orthogonality of binary operations and squares. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, Matematica, 2005, No. 2(48), p.3–42.
103. Mullen G.L., Shcherbacov V.  $n$ - $T$ -quasigroup codes with one check symbol and their error detection capabilities. Comment. Math. Univ. Carolinae, 2004, 45, N 2, p.321–340.
104. Mullen G.L., Shcherbacov V. Properties of codes with one check symbol from a quasigroup point of view. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, Matematica, 2002, N 3(40), p. 71–86.
105. Nemeth E. Study of Room squares, Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Ontario.
106. Norton D. A., Stein S. K. Cycles in algebraic systems. Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, p. 999-1004.
107. Parker E. T. Construction of some sets of pairwise orthogonal Latin squares, Amer. Math. Soc. Notices 5, 1958, p. 815 (abstract).
108. Parker E. T. Orthogonal Latin squares, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45, 1959, p. 859-862.
109. Pflugfelder H. O. Quasigroups and loops: introduction. Sigma Series in Pure Math. 1990.
110. Phelps K. T. Conjugate orthogonal quasigroups. Journal of combinatorial theory, Series A, 1978, 25, p. 117-127.
111. Preece D.A., Pearce S.C. and Kerr J.R. Orthogonal designs for three-dimensional experiments. Biometrika, 1973, 60, p. 349-358.
112. Rao C. R. Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays, J.Roy. Stat. Soc. Suppl., 9, 1947, p. 128-139.

113. Scerbacova A. V., Shcherbacov V. A. On spectrum of medial  $T_2$ -quasigroups. Bul. Acad. Științei Repub. Mold. Mat. 2016, no2, p. 143-154.
114. Shcherbacov V. A. About orthogonality of a quasigroup and its parastrophes. International Conference on Radicals (ICOR-2003), Program and Abstracts (Chișinău), August 2003, p. 47-48.
115. Shcherbacov V. A. On parastroph orthogonality of finite binary quasigroups. International Conference on Radicals, Abstracts, July 30-August 5, Kyiv, 2006, p. 66-67.
116. Shcherbacov V. A. Transformations of grupoids which preserve the property of orthogonality. Mathematics Applies in Biology and Biophysics, Abstracts, Iași, June, 16-17, 2006, p. 35-36.
117. Shchukin K. K. On isotopies, parastrophies, and orthogonality of quasigroups. Journal of Mathematical Sciences, 2013, Vol. 193, No 4, p. 639-644.
118. Sokhatsky F. M., Fryz I. V. Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups. Comment. Math. Univ. Carolin., 53, 2012, p. 429-445.
119. Sokhatsky F. M., Pirus I. About top-quasigroups. Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova, IMCS-50, Chișinău, August 19-23, 2014, p. 162-165.
120. Stein S. K. On the foundations of quasigroups. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, p. 228-256.
121. Stojakovic Z., Paunic D. Self-orthogonal cyclic  $n$ -quasigroups. Aequationes mathematicae, 1986, 30, p. 252-257.
122. Syrbu P. On  $\pi$ -quasigroups isotopic to abelian groups. Bul. Acad. Științe a Repub. Mold. Mat. 2009, 3(61), p. 109-117.
123. Syrbu P., Ceban D. On orthogonal systems of ternary quasigroups admitting at least one paratopy. The 24<sup>th</sup> Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM - 2016), September 15-18, 2016, Craiova, România, p. 72.
124. Syrbu P., Ceban D. On orthogonal systems of ternary quasigroups admitting nontrivial paratopies. Quasigroups and related systems. Vol. 25 (2017), No. 1, p.133-150.
125. Syrbu P., Ceban D. On paratopies of orthogonal systems of ternary quasigroups. I. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica. No. 1(80), 2016, p. 91-117.
126. Syrbu P., Ceban D. On quasigroups with some minimal identities. Conferința științifică națională cu participare internațională „Învățământul superior din Republica Moldova la 85 de ani”, Universitatea de Stat din Tiraspol, 24-25 septembrie 2015, Chișinău, p. 40-43.

127. Syrbu P., Ceban D. On  $\pi$ -quasigroups of type  $T_1$ . Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica. No. 2(75), 2014, p. 36-43.
128. Syrbu P., Ceban D.  $\pi$ -Quasigroups of type  $T_1$ . ICWM 2014, Ewha Womans University, Seoul, Korea, August 12, 2014, p. 38.
129. Syrbu P., Ceban D.  $\pi$ -Quasigroups of type  $T_1$ . International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE - 2013), August 18-22, 2013, Chișinău, p. 81-82.
130. Usan J. Orthogonal systems of  $n$ -ary operations and codes. Mat. Vestnik, 1978, 2(15) (30), p. 91-93.
131. Wilson R.M. Concerning the number of mutually orthogonal latin squares. Discrete Math. 9, 1974, p. 181-198.
132. Wojtas M. Five mutually orthogonal Latin squares of order 24 and 40. Discrete Mathematics, 1995, 140, p. 291-294.
133. Yates F. Incomplete randomised blocks, Ann. Eugen. London, 7, 1936, 121-140.
134. Zhu L. Orthogonal diagonal latin squares of order fourteen. J. Austral. Math. Soc. Series A, 1984, 36, p. 1-3.
135. Euler L. Recherches sur une nouvelle espèce des quarres magiques, Verh. zeeuwsch Genoot. Weten. Vliss., 9, 1782, 85-239.
136. Guerin R. Existence et proprietes des carres latins orthogonaux I. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 15, 1966, p. 113-213.
137. Guerin R. Existence et proprietes des carres latins orthogonaux II. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 15, 1966, p. 215-293.
138. Sade A. Groupoides orthogonaux. Publ. Math. Debrecen, 1958, 5, p. 229-240.
139. Sade A. Produit direct-singulier de quasigroupes orthogonaux et anti-abeliens. Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. I, 74, 1960, p. 91-99.
140. Sade A. Quasigroupes obeissant a certaines lois. Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul. Ser. 22, 1957, p. 151-184.
141. Tarry G. Le problème de 36 officiers. Compte Rendu de l'Assoc. Français Avanc. Sci. Naturel 1, 1900, p. 122-123.
142. Tarry G. Le problème de 36 officiers. Compte Rendu de l'Assoc. Français Avanc. Sci. Naturel 2, 1901, p.170-203.

**ANEXA 1. Sistemele ortogonale din trei quasigrupuri ternare și cei trei selectori ternari care admit cel puțin o paratopie netrivială**

| Paratopia $\theta$         | Sistemul ortogonal $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ care admite paratopia $\theta$        | Identitățile implicate de existența paratopiei $\theta$                        |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\theta = (A_1, A_2, A_3)$ | $A_2 = {}^{(132)} A_1, A_3 = {}^{(123)} A_1$                                                         | $A_1(A_1, {}^{(132)} A_1, {}^{(123)} A_1) = E_2$                               |
|                            | $A_2 = {}^{(132)} A_1, A_3 = {}^{(123)} A_1$                                                         | $A_1(A_1, {}^{(132)} A_1, {}^{(123)} A_1) = E_3$                               |
|                            | $A_1 = {}^{(12)} A_2, A_3 = {}^{\pi_3} A_2({}^{(12)} A_2, A_2, E_1)$                                 | $A_3 = {}^{(12)} A_3$                                                          |
|                            | $A_2 = {}^{(23)} A_3, A_1 = {}^{\pi_1} A_3(E_2, {}^{(23)} A_3, A_3)$                                 | $A_1 = {}^{(23)} A_1$                                                          |
|                            | $A_3 = {}^{(13)} A_1, A_2 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_3, {}^{(13)} A_1)$                                 | $A_2 = {}^{(13)} A_2$                                                          |
|                            | $A_3 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, A_2, E_1) = {}^{\pi_3} A_2(A_1, A_2, E_2)$                                | -                                                                              |
| $\theta = (E_1, A_1, A_2)$ | $A_2 = {}^{(23)} A_1, A_3(E_1, A_1, {}^{(23)} A_1) = A_3$                                            | $A_1(E_1, A_1, {}^{(23)} A_1) = E_3$                                           |
|                            | $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_2), A_3(E_1, A_1, {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_2)) = A_3$            | -                                                                              |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, E_2, A_2), A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3)$                           | $A_2(E_1, E_3, {}^{\pi_2} A_2(E_1, E_2, A_2)) = {}^{\pi_3} A_2(E_1, A_2, E_3)$ |
|                            | $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_3), A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$                           | $A_1(E_1, {}^{\pi_3} A_1(E_1, A_1, E_3), E_2) = {}^{\pi_2} A_1(E_1, E_2, A_1)$ |
| $\theta = (A_1, E_1, A_2)$ | $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_2), A_3 = {}^{\pi_3} A_1(E_2, A_1, E_1)$                           | -                                                                              |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2), A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$                           | $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2), E_1, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)) = A_3$ |
|                            | $A_2 = {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_3), A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_2, E_1, A_1)$                           | $A_1({}^{\pi_2} A_1(E_2, E_1, A_1), {}^{\pi_3} A_1(A_1, E_1, E_3), E_1) = E_2$ |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(A_2, E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)), A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)$ | $A_2({}^{\pi_3} A_2(A_2, E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, A_2, E_3)), E_1, A_2) = E_2$ |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2), A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2)$                           | $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(E_3, E_1, A_2), E_3) = A_2$ |
| $\theta = (A_1, A_2, E_1)$ | $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$                           | $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), E_1) = A_3$ |
|                            | $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_2, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_1)$ | $A_1(E_3, A_1, {}^{\pi_2} A_1(E_2, {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_1), A_1)) = E_1$ |
|                            | $A_2 = {}^{\pi_2} A_1(A_1, E_3, E_1), A_3 = {}^{\pi_2} A_1(E_3, E_1, A_1)$                           | -                                                                              |

|                            |                                                                                       |                                                                       |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
|                            | $A_1 = \pi_1 A_2(E_2, A_2, E_1), A_3 = \pi_3 A_2(E_3, A_2, E_2)$                      | $A_2(\pi_3 A_2(E_3, A_2, E_2), E_2, \pi_1 A_2(E_2, A_2, E_1)) = A_2$  |
|                            | $A_1 = \pi_1 A_2(E_3, A_2, E_1), A_3 = \pi_2 A_2(E_3, E_2, A_2)$                      | $A_2(A_2, \pi_1 A_2(E_3, A_2, E_1), E_2) = \pi_2 A_2(E_3, E_2, A_2)$  |
| $\theta = (E_2, A_1, A_2)$ | $A_2 = \pi_3 A_1(E_2, A_1, E_1), A_3 = \pi_3 A_1(A_1, E_1, E_2)$                      | -                                                                     |
|                            | $A_1 = \pi_1 A_3(A_3, E_3, E_1), A_2 = \pi_2 A_3(E_3, A_3, E_2)$                      | $A_3(E_2, \pi_1 A_3(A_3, E_3, E_1), \pi_2 A_3(E_3, A_3, E_2)) = A_3$  |
|                            | $A_2 = \pi_3 A_1(E_2, A_1, E_3), A_3 = \pi_1 A_1(E_2, E_1, A_1)$                      | $A_1(\pi_3 A_1(E_2, A_1, E_3), \pi_1 A_1(E_2, E_1, A_1), E_2) = E_1$  |
|                            | $A_3 = \pi_3 A_2(A_2, E_1, E_3), A_1 = \pi_3 A_2(E_3, A_2, \pi_3 A_2(A_2, E_1, E_3))$ | $A_2(E_2, \pi_3 A_2(E_3, A_2, \pi_3 A_2(A_2, E_1, E_3)), A_2) = E_1$  |
|                            | $A_1 = \pi_2 A_2(E_2, E_3, A_2), A_3 = \pi_1 A_2(E_3, E_1, A_2)$                      | $A_2(\pi_2 A_2(E_2, E_3, A_2), \pi_1 A_2(E_3, E_1, A_2), E_3) = A_2$  |
| $\theta = (A_1, E_2, A_2)$ | $A_2 = \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_1), A_3(A_1, E_2, \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_1)) = A_3$       | -                                                                     |
|                            | $A_2 = {}^{(13)} A_1, A_3(A_1, E_2, {}^{(13)} A_1) = A_3$                             | $A_1(A_1, E_2, {}^{(13)} A_1) = E_3$                                  |
|                            | $A_2 = \pi_3 A_1(A_1, E_2, E_3), A_3 = \pi_1 A_1(E_1, E_2, A_1)$                      | $A_1(\pi_3 A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_1) = \pi_1 A_1(E_1, E_2, A_1)$  |
|                            | $A_1 = \pi_1 A_2(E_1, E_2, A_2), A_3 = \pi_3 A_2(A_2, E_2, E_3)$                      | $A_2(E_3, E_2, \pi_1 A_2(E_1, E_2, A_2)) = \pi_3 A_2(A_2, E_2, E_3)$  |
| $\theta(A_1, A_2, E_2)$    | $A_2 = \pi_2 A_1(A_1, E_1, E_2), A_3 = \pi_3 A_1(A_1, E_3, E_1)$                      | $A_1(E_1, \pi_3 A_1(A_1, E_3, E_1), \pi_2 A_1(A_1, E_1, E_2)) = A_1$  |
|                            | $A_1 = \pi_1 A_2(E_1, A_2, E_2), A_3 = \pi_1 A_2(\pi_1 A_2(E_1, A_2, E_2), E_1, A_2)$ | $A_2(A_2, E_3, \pi_1 A_2(\pi_1 A_2(E_1, A_2, E_2), E_1, A_2))) = E_2$ |
|                            | $A_1 = \pi_1 A_2(E_3, A_2, E_2), A_3 = \pi_1 A_2(E_2, E_3, A_2)$                      | -                                                                     |
|                            | $A_1 = \pi_2 A_3(E_2, A_3, E_1), A_2 = \pi_3 A_3(E_3, E_1, A_3)$                      | $A_3(\pi_2 A_3(E_2, A_3, E_1), \pi_3 A_3(E_3, E_1, A_3), E_2) = A_3$  |
|                            | $A_2 = \pi_2 A_1(A_1, E_3, E_2), A_3 = \pi_1 A_1(E_1, E_3, A_1)$                      | $A_1(\pi_2 A_1(A_1, E_3, E_2), A_1, E_1) = \pi_1 A_1(E_1, E_3, A_1)$  |
| $\theta = (E_3, A_1, A_2)$ | $A_1 = \pi_2 A_2(E_3, E_1, A_2), A_3 = \pi_2 A_2(A_2, E_3, E_1)$                      | -                                                                     |
|                            | $A_2 = \pi_1 A_3(A_3, E_1, E_2), A_1 = \pi_3 A_3(E_2, E_3, A_3)$                      | $A_3(E_3, \pi_3 A_3(E_2, E_3, A_3), \pi_1 A_3(A_3, E_1, E_2)) = A_3$  |
|                            | $A_1 = \pi_2 A_2(E_3, E_2, A_2), A_3 = \pi_1 A_2(E_3, A_2, E_1)$                      | $A_2(\pi_2 A_2(E_3, E_2, A_2), E_3, \pi_1 A_2(E_3, A_2, E_1)) = E_1$  |
|                            | $A_2 = \pi_3 A_1(E_3, A_1, E_1), A_3 = \pi_2 A_1(A_1, E_2, E_1)$                      | $A_1(E_2, \pi_3 A_1(E_3, A_1, E_1), A_1) = \pi_2 A_1(A_1, E_2, E_1)$  |
|                            | $A_2 = \pi_3 A_1(E_3, A_1, E_2), A_3 = \pi_1 A_1(E_2, A_1, E_1)$                      | $A_1(\pi_3 A_1(E_3, A_1, E_2), E_2, \pi_1 A_1(E_2, A_1, E_1)) = A_1$  |



|                            |                                                                                      |                                                                            |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\theta = (A_1, E_3, A_2)$ | $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_2, E_3, A_2), A_3 =^{\pi_1} A_2(E_3, A_2, E_2)$                 | -                                                                          |
|                            | $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1), A_3 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)$                 | $A_1(E_1, ^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_1), ^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_2)) = A_1$ |
|                            | $A_2 =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1), A_1 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$                 | $A_3(^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), E_3, ^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)) = A_3$ |
|                            | $A_2 =^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_2), A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$                 | $A_1(^{\pi_3} A_1(A_1, E_3, E_2), E_1, A_1) =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_2)$  |
|                            | $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_2), A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)$                 | $A_2(E_3, ^{\pi_1} A_2(E_1, E_3, A_2), ^{\pi_2} A_2(A_2, E_3, E_2)) = E_2$ |
| $\theta = (A_1, A_2, E_3)$ | $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_3), A_3(A_1, ^{\pi_2} A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = A_3$ | -                                                                          |
|                            | $A_2 =^{(12)} A_1, A_3(A_1, ^{(12)} A_1, E_3) = A_3$                                 | $A_1(A_1, ^{(12)} A_1, E_3) = E_2$                                         |
|                            | $A_2 =^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3), A_3 =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$                 | $A_1(^{\pi_2} A_1(A_1, E_2, E_3), E_1, E_3) =^{\pi_1} A_1(E_1, A_1, E_3)$  |
|                            | $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_3), A_3 =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$                 | $A_2(E_2, ^{\pi_1} A_2(E_1, A_2, E_3), E_3) =^{\pi_2} A_2(A_2, E_2, E_3)$  |
| $\theta = (E_1, E_2, A_1)$ | $A_2 = A_1(E_1, E_2, A_1), A_3 =^{\pi_3} A_1$                                        | $A_1(E_1, E_2, A_1(E_1, E_2, A_1)) =^{\pi_3} A_1$                          |
|                            | $A_3 = A_1(E_1, E_2, A_1), A_2 =^{\pi_3} A_1$                                        | $A_1(E_1, E_2, A_1(E_1, E_2, A_1)) =^{\pi_3} A_1$                          |
|                            | $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_1, E_2, A_3) =^{\pi_3} A_3(E_1, E_2, A_2)$                      | -                                                                          |
| $\theta = (E_2, E_1, A_1)$ | $A_2 = A_1(E_2, E_1, A_1), A_3 =^{(12)\pi_3} A_1$                                    | $A_1(E_1, E_2, A_1(E_2, E_1, A_1)) =^{(12)\pi_3} A_1$                      |
|                            | $A_3 = A_1(E_2, E_1, A_1), A_2 =^{(12)\pi_3} A_1$                                    | $A_1(E_1, E_2, A_1(E_2, E_1, A_1)) =^{(12)\pi_3} A_1$                      |
|                            | $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2) =^{\pi_3} A_3(E_2, E_1, A_3);$                     | -                                                                          |
|                            | $A_2(E_2, E_1, A_1) = A_3$                                                           | $A_1 =^{(12)\pi_3} A_1$                                                    |
| $\theta = (E_1, A_1, E_2)$ | $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_2), A_3 =^{(23)\pi_3} A_1$                                    | $A_1(E_1, ^{(23)\pi_3} A_1, A_1(E_1, A_1, E_2)) = E_3$                     |
|                            | $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2), A_2 =^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$                 | $A_3(E_1, ^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), ^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)) = A_3$ |
|                            | $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2), A_3 =^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2)$                 | $A_2(E_1, ^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), ^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)) = A_2$ |
|                            | $A_2 =^{(23)\pi_3} A_1, A_3 = A_1(E_1, A_1, E_2)$                                    | $A_1(E_1, ^{(23)\pi_3} A_1, A_1(E_1, A_1, E_2)) = E_3$                     |
|                            | $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2) =^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$                      | $A_1 =^{(23)\pi_2} A_1$                                                    |

|                            |                                                                                           |                                                                                           |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\theta = (E_2, A_1, E_1)$ | $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_3, A_2 = A_3(E_3, E_1, A_3)$                                     | ${}^{(132)\pi_2} A_3(E_2, {}^{(132)\pi_2} A_3, E_1) = A_3(E_3, E_1, A_3)$                 |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1), A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$                | ${}^{\pi_2} A_3({}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), A_3, {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)) = E_3$ |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1), A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2)$                | ${}^{\pi_2} A_2({}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2), A_2, {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)) = E_3$ |
|                            | $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_2, A_3 = A_2(E_3, E_1, A_2)$                                     | $A_2(A_2, E_3, A_2(E_3, E_1, A_2)) = {}^{(132)\pi_2} A_2$                                 |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1) = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$                     | $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_1$                                                               |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), A_3 = A_2(E_3, E_1, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2))$ | $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_1$                                                               |
| $\theta = (A_1, E_1, E_2)$ | $A_3 = {}^{(132)\pi_1} A_1, A_2 = A_1(A_1, E_1, E_2)$                                     | $A_1(E_3, {}^{(132)\pi_1} A_1, A_1(A_1, E_1, E_2)) = E_2$                                 |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$                | $A_3(E_3, {}^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)) = A_3$            |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2), A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2)$                | $A_2(E_3, {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)) = A_2$            |
|                            | $A_2 = {}^{(132)\pi_3} A_1, A_3 = A_1(A_1, E_1, E_2)$                                     | $A_1(E_3, {}^{(132)\pi_3} A_1, A_1(A_1, E_1, E_2)) = E_2$                                 |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2) = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$                     | $A_1 = {}^{(123)\pi_1} A_1$                                                               |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1), A_3 = A_2({}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1), E_1, E_2)$ | $A_1 = {}^{(123)\pi_1} A_1$                                                               |
| $\theta = (A_1, E_2, E_1)$ | $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_1), A_3 = {}^{(13)\pi_3} A_1$                                      | $A_1({}^{(13)\pi_3} A_1, E_2, A_1(A_1, E_2, E_1)) = E_1$                                  |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1), A_2 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3)$                | $A_3({}^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3), E_2, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)) = A_3$            |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1), A_3 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2)$                | $A_2({}^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2), E_2, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)) = A_2$            |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1) = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)$                     | $A_1 = {}^{(13)\pi_1} A_1$                                                                |
|                            | $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_1), A_2 = {}^{(13)\pi_3} A_1$                                      | $A_1({}^{(13)\pi_3} A_1, E_2, A_1(A_1, E_2, E_1)) = E_3$                                  |
| $\theta = (E_1, E_3, A_1)$ | $A_2 = A_1(E_1, E_3, A_1), A_3 = {}^{(23)\pi_2} A_1$                                      | $A_1(E_1, A_1(E_1, E_3, A_1), {}^{(23)\pi_2} A_1) = E_2$                                  |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)$                | $A_3(E_1, {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3), {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_3, E_2)) = A_3$            |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)$                | $A_2(E_1, {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2), {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_2, E_2)) = A_2$            |

|                            |                                                                                           |                                                                                |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
|                            | $A_3 = A_1(E_1, E_3, A_1), A_2 = {}^{(23)\pi_2} A_1$                                      | $A_1(E_1, A_1(E_1, E_3, A_1), {}^{(23)\pi_2} A_1) = E_2$                       |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_1, E_3, A_2) = {}^{\pi_3} A_3(E_1, E_3, A_3)$                     | $A_1 = {}^{(23)\pi_3} A_1$                                                     |
| $\theta = (E_3, E_1, A_1)$ | $A_1 = {}^{(123)\pi_3} A_3, A_2 = A_3(E_2, A_3, E_1)$                                     | $A_3(A_3, A_3(E_2, A_3, E_1), E_2) = {}^{(123)\pi_3} A_3$                      |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1)$                | $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_1), {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3), E_2) = A_3$ |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2), A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1)$                | $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_1), {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2), E_2) = A_2$ |
|                            | $A_1 = {}^{(123)\pi_3} A_2, A_3 = A_2(E_2, A_2, E_1)$                                     | $A_2(A_2, A_2(E_2, A_2, E_1), E_2) = {}^{(123)\pi_3} A_2$                      |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_3, E_1, A_2) = {}^{\pi_3} A_3(E_3, E_1, A_3)$                     | $A_1 = {}^{(132)\pi_3} A_1$                                                    |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), A_3 = A_2(E_2, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2), E_1)$ | $A_1 = {}^{(123)\pi_3} A_1$                                                    |
| $\theta = (E_1, A_1, E_3)$ | $A_2 = A_1(E_1, A_1, E_3), A_3 = {}^{\pi_2} A_1$                                          | $A_1(E_1, A_1(E_1, A_1, E_3)) = {}^{\pi_2} A_1$                                |
|                            | $A_3 = A_1(E_1, A_1, E_3), A_2 = {}^{\pi_2} A_1$                                          | $A_1(E_1, A_1(E_1, A_1, E_3)) = {}^{\pi_2} A_1$                                |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_1, A_3, E_3) = {}^{\pi_2} A_3(E_1, A_2, E_3)$                     | -                                                                              |
| $\theta = (E_3, A_1, E_1)$ | $A_3 = {}^{(13)\pi_2} A_1, A_2 = A_1(E_3, A_1, E_1)$                                      | $A_1(E_1, A_1(E_3, A_1, E_1), E_3) = {}^{(13)\pi_2} A_1$                       |
|                            | $A_3 = A_1(E_3, A_1, E_1), A_2 = {}^{(13)\pi_2} A_1$                                      | $A_1(E_1, A_1(E_3, A_1, E_1), E_3) = {}^{(13)\pi_2} A_1$                       |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1) = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_1);$                    | -                                                                              |
|                            | $A_3 = A_2(E_3, A_1, E_1)$                                                                | $A_1(E_3, A_1, E_1) = E_2$                                                     |
| $\theta = (A_1, E_1, E_3)$ | $A_2 = A_1(A_1, E_1, E_3), A_3 = {}^{(12)\pi_2} A_1$                                      | $A_1({}^{(12)\pi_2} A_1, A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = E_2$                       |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3), A_2 = {}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$                | $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3), {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3), E_3) = A_3$ |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3), A_3 = {}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3)$                | $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3), {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3), E_3) = A_2$ |
|                            | $A_3 = A_1(A_1, E_1, E_3), A_2 = {}^{(12)\pi_2} A_1$                                      | $A_1({}^{(12)\pi_2} A_1, A_1(A_1, E_1, E_3), E_3) = E_2$                       |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3) = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$                     | $A_1 = {}^{(12)\pi_1} A_1$                                                     |
| $\theta = (A_1, E_3, E_1)$ | $A_2 = A_1(A_1, E_3, E_1), A_3 = {}^{(123)\pi_2} A_1$                                     | $A_1(E_2, A_1(A_1, E_3, E_1), {}^{(123)\pi_2} A_1) = E_3;$                     |

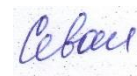
|                            |                                                                                      |                                                                             |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
|                            | $A_1 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1), A_2 =^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$                 | $A_3(E_2, ^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1), ^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)) = A_3;$ |
|                            | $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1), A_3 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)$                 | $A_2(E_2, ^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1), ^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2)) = A_2;$ |
|                            | $A_2 =^{(123)\pi_2} A_1, A_3 = A_1(A_1, E_3, E_1)$                                   | $A_1(E_2, A_1(A_1, E_3, E_1), ^{(123)\pi_2} A_1) = E_3;$                    |
|                            | $A_1 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1) =^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$                      | $A_1 =^{(132)\pi_1} A_1;$                                                   |
|                            | $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), A_3 = A_2(E_3, ^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), E_2)$ | $A_1 =^{(132)\pi_1} A_1.$                                                   |
| $\theta = (E_2, E_3, A_1)$ | $A_2 = A_1(E_2, E_3, A_1), A_3 =^{(123)\pi_1} A_1$                                   | $A_1(A_1(E_2, E_3, A_1), ^{(123)\pi_1} A_1, E_1) = E_2;$                    |
|                            | $A_1 =^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2)$                 | $A_3(^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3), ^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_2), E_1) = A_3;$ |
|                            | $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2), A_3 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2)$                 | $A_2(^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2), ^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_2), E_1) = A_2;$ |
|                            | $A_3 = A_1(E_2, E_3, A_1), A_2 =^{(123)\pi_1} A_1$                                   | $A_1(A_1(E_2, E_3, A_1), ^{(123)\pi_1} A_1, E_1) = E_2;$                    |
|                            | $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_2, E_3, A_2) =^{\pi_3} A_3(E_2, E_3, A_3)$                      | $A_1 =^{(132)\pi_3} A_1;$                                                   |
|                            | $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1), A_3 = A_2(E_2, E_3, ^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_1))$ | $A_1 =^{(132)\pi_3} A_1.$                                                   |
| $\theta = (E_3, E_2, A_1)$ | $A_2 = A_1(E_3, E_2, A_1), A_3 =^{(123)\pi_1} A_1$                                   | $A_1(A_1(E_3, E_2, A_1), E_2, ^{(123)\pi_1} A_1) = E_1;$                    |
|                            | $A_1 =^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3), A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)$                 | $A_3(^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3), E_2, ^{\pi_1} A_3(A_3, E_2, E_1)) = A_3;$ |
|                            | $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2), A_3 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)$                 | $A_2(^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2), E_2, ^{\pi_1} A_2(A_2, E_2, E_1)) = A_2;$ |
|                            | $A_1 =^{(123)\pi_3} A_2, A_3 = A_2(A_2, E_2, E_1)$                                   | $A_2(A_2(A_2, E_2, E_1), E_2, A_2) =^{(123)\pi_3} A_2;$                     |
|                            | $A_1 =^{\pi_3} A_2(E_3, E_2, A_2) =^{\pi_3} A_3(E_3, E_2, A_3).$                     | $A_1(E_3, E_2, A_1) = E_1$                                                  |
| $\theta = (E_2, A_1, E_3)$ | $A_2 = A_1(E_2, A_1, E_3), A_3 =^{(12)\pi_1} A_1$                                    | $A_1(A_1(E_2, A_1, E_3), ^{(12)\pi_1} A_1, E_3) = E_1;$                     |
|                            | $A_1 =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3), A_2 =^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3)$                 | $A_3(^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3), ^{\pi_1} A_3(A_3, E_1, E_3), E_3) = A_3;$ |
|                            | $A_1 =^{\pi_1} A_2(E_2, A_2, E_3), A_3 =^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3)$                 | $A_2(^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3), ^{\pi_1} A_2(A_2, E_1, E_3), E_3) = A_2;$ |
|                            | $A_3 = A_1(E_2, A_1, E_3), A_2 =^{(12)\pi_1} A_1$                                    | $A_1(A_1(E_2, A_1, E_3), ^{(12)\pi_1} A_1, E_3) = E_1;$                     |
|                            | $A_1 =^{\pi_2} A_2(E_2, A_2, E_3) =^{\pi_2} A_3(E_2, A_3, E_3)$                      | $A_1 =^{(12)\pi_2} A_1.$                                                    |

|                            |                                                                                           |                                                                                 |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $\theta = (E_3, A_1, E_2)$ | $A_3 = {}^{(132)\pi_1} A_1, A_2 = A_1(E_3, A_1, E_2)$                                     | $A_1(A_1(E_3, A_1, E_2), E_1, {}^{(132)\pi_1} A_1) = E_3;$                      |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2), A_2 = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)$                | $A_3({}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2), E_1, {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_1)) = A_3;$ |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2), A_3 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)$                | $A_2({}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2), E_1, {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_1)) = A_2;$ |
|                            | $A_2 = {}^{(132)\pi_1} A_1, A_3 = A_1(E_3, A_1, E_2)$                                     | $A_1(A_1(E_3, A_1, E_2), E_1, {}^{(132)\pi_1} A_1) = E_3;$                      |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_2} A_2(E_3, A_2, E_2) = {}^{\pi_2} A_3(E_3, A_3, E_2)$                     | $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_1;$                                                    |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), A_3 = A_2({}^{\pi_3} A_2(E_2, E_1, A_2), E_3, E_1)$ | $A_1 = {}^{(132)\pi_2} A_1.$                                                    |
| $\theta = (A_1, E_2, E_3)$ | $A_2 = A_1(A_1, E_2, E_3), A_3 = {}^{\pi_1} A_1$                                          | $A_1(A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_1;$                           |
|                            | $A_3 = A_1(A_1, E_2, E_3), A_2 = {}^{\pi_1} A_1$                                          | $A_1(A_1(A_1, E_2, E_3), E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_1;$                           |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_3, E_2, E_3) = {}^{\pi_1} A_3(A_2, E_2, E_3).$                    | -                                                                               |
| $\theta = (A_1, E_3, E_2)$ | $A_3 = {}^{(23)\pi_1} A_1, A_2 = A_1(A_1, E_3, E_2)$                                      | $A_1(A_1(A_1, E_3, E_2), E_2, E_3) = {}^{(23)\pi_1} A_1$                        |
|                            | $A_3 = A_1(A_1, E_3, E_2), A_2 = {}^{(23)\pi_1} A_1$                                      | $A_1(A_1(A_1, E_3, E_2), E_2, E_3) = {}^{(23)\pi_1} A_1$                        |
|                            | $A_1 = {}^{\pi_1} A_2(A_2, E_3, E_2) = {}^{\pi_1} A_3(A_3, E_3, E_2);$                    | -                                                                               |
|                            | $A_3 = A_2(A_1, E_3, E_2)$                                                                | $A_1(A_1, E_3, E_2) = E_1.$                                                     |
| $\theta = (E_1, E_3, E_2)$ | $A_1 = {}^{(23)} A_1, A_2 = {}^{(23)} A_2, A_3 = {}^{(23)} A_3;$                          |                                                                                 |
|                            | $A_3 = {}^{(23)} A_2, A_1 = {}^{(23)} A_1;$                                               |                                                                                 |
|                            | $A_2 = {}^{(23)} A_1, A_3 = {}^{(23)} A_3;$                                               |                                                                                 |
|                            | $A_3 = {}^{(23)} A_1, A_2 = {}^{(23)} A_2.$                                               |                                                                                 |
| $\theta = (E_2, E_1, E_3)$ | $A_1 = {}^{(12)} A_1, A_2 = {}^{(12)} A_2, A_3 = {}^{(12)} A_3;$                          |                                                                                 |
|                            | $A_3 = {}^{(12)} A_2, A_1 = {}^{(12)} A_1;$                                               |                                                                                 |
|                            | $A_2 = {}^{(12)} A_1, A_3 = {}^{(12)} A_3;$                                               |                                                                                 |
|                            | $A_3 = {}^{(12)} A_1, A_2 = {}^{(12)} A_2.$                                               |                                                                                 |

|                            |                                                            |  |
|----------------------------|------------------------------------------------------------|--|
| $\theta = (E_2, E_3, E_1)$ | $A_1 =^{(132)} A_1, A_2 =^{(132)} A_2, A_3 =^{(132)} A_3;$ |  |
|                            | $A_2 =^{(132)} A_1, A_3 =^{(123)} A_1;$                    |  |
|                            | $A_3 =^{(132)} A_1, A_2 =^{(123)} A_1.$                    |  |
| $\theta = (E_3, E_1, E_2)$ | $A_1 =^{(123)} A_1, A_2 =^{(123)} A_2, A_3 =^{(123)} A_3;$ |  |
|                            | $A_2 =^{(123)} A_1, A_3 =^{(132)} A_1;$                    |  |
|                            | $A_3 =^{(123)} A_1, A_2 =^{(132)} A_1.$                    |  |
| $\theta = (E_3, E_2, E_1)$ | $A_1 =^{(13)} A_1, A_2 =^{(13)} A_2, A_3 =^{(13)} A_3$     |  |
|                            | $A_3 =^{(13)} A_2, A_1 =^{(13)} A_1;$                      |  |
|                            | $A_2 =^{(13)} A_1, A_3 =^{(13)} A_3;$                      |  |
|                            | $A_3 =^{(13)} A_1, A_2 =^{(13)} A_2.$                      |  |

## **DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII**

Subsemnatul, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.



## CURRICULUM VITAE

**Numele de familie:** Ceban

**Prenumele:** Dina

**Data și locul nașterii:** 01.09.1988, s.Ermoclia,  
r. Ștefan-Vodă, Republica Moldova



### **Studii:**

2012-2015: Studii doctorale, Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, specialitatea: 111.03 - Logică matematică, algebră și teoria numerelor; 2010-2012: Masterat la Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, specialitatea: structuri matematice fundamentale; 2007-2010: Licența la Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, specialitatea: matematica

### **Stagii de cercetare în străinătate:**

DAAD Project “Center of Excellence for Applications of Mathematics”, România, Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 01.11-30.11.2014

### **Domeniul de interes științific:**

Algebra: Teoria quasigrupurilor binare și  $n$ -are, ortogonalitatea operațiilor  $n$ -are, aplicări ale teoriei quasigrupurilor în teoria codurilor etc.

### **Participări în proiecte științifice naționale și internaționale:**

- Proiectului „Structuri algebrice, geometrice și sisteme de evoluție”, 15.817.02.26F, 2015-2017, funcția în cadrul proiectului: cercetător stagiar;
- Proiectul „Studii fundamentale ale structurilor algebrice, geometrice și de evoluție cu aplicații în cristalofizică și control”, 11.817.08.41F, 2011-2014, funcția în cadrul proiectului: inginer, cat.II.

### **Participare la foruri științifice (naționale și internaționale):**

1. The 12<sup>th</sup> International Scientific Seminar „Discrete Mathematics and its Applications”, dedicated to the memory of academician O. B. Lupanov, State University „M.V.Lomonosov”, Moscow, Russia, 2016;
2. The 24<sup>th</sup> Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM - 2016), September 15-18, 2016, Craiova, România;
3. The 11<sup>th</sup> Summer School „Algebra, Topology, Analysis”, Odessa, Ukraine, 2016;
4. International Congress of Women Mathematicians (ICWM), Ewha Womans University, Seoul, Korea, 2014;
5. Third Conference of Mathematical Society of Republic of Moldova, Chișinău, 2014;
6. International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE), Chișinău, 2013, 2015, 2016;



7. Conferința științifică națională cu participare internațională „Învățământul superior din Republica Moldova la 85 de ani”, Universitatea de Stat din Tiraspol, 24-25 septembrie 2015, Chișinău;
8. Conferința Științifică Internațională a Doctoranzilor „Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători”, Academia de Științe a Moldovei, 2015, Chișinău;
9. International Conference of Young Researchers, X edition, ULIM, Chișinău, 2012;
10. Conferința Interuniversitară „Educație prin cercetare – garant al performanței învățământului superior”, Chișinău, 2012;
11. Conferința științifică „Integrare prin cercetare și inovare”, Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, 2013, 2014.
12. Sesiunea specială a Seminarului „Algebră și Logică matematică”, dedicată memoriei Profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică și Informatică al Academiei de Științe din Moldova, edițiile din anii 2012, 2014-2017.

#### **Lucrări științifice publicate:**

*Articole în reviste cotate SCOPUS sau de categoria B:*

1. Syrbu P., Ceban D. On paratopies of orthogonal systems of ternary quasigroups. I. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica. No. 1(80), 2016, p. 91-117.
2. Ceban D. On some identities in ternary quasigroups. Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Științe exacte și economice”, 2016, nr. 2(92), p. 40-45.
3. Ceban D., Syrbu P. On quasigroups with some minimal identities. Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Științe exacte și economice”, 2015, nr. 2 (82), p. 47-52.
4. Syrbu P., Ceban D. On  $\pi$ -quasigroups of type  $T_1$ . Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica. No. 2(75), 2014, p. 36-43.
5. Syrbu P., Ceban D. On orthogonal systems of ternary quasigroups admitting nontrivial paratopies. Quasigroups and related systems. Vol. 25 (2017), No. 1, p.133-150.

*Alte publicații:* 4 articole în culegeri, 6 teze la conferințe internaționale, 5 teze la conferințe naționale

**Premii:** Bursa nominală „Valentin Belousov” a Guvernului, 2015

**Cunoașterea limbilor:** română – limba maternă; engleză – B1; rusă – B1

**Date de contact de serviciu:** MD-2009, Chișinău, str. A. Mateevici, 60, Universitatea de Stat din Moldova; tel. (373–22) 577631; email: cebandina@mail.ru