MINISTERUL EDUCAŢIEI, CULTURII ŞI CERCETĂRII
AL REPUBLICII MOLDOVA

UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL

Cu titlu de manuscris
CZU 517.925

NEAGU NATALIA

ALGEBRE LIE ŞI INVARIANŢI LA SISTEME DIFERENŢIALE CU PROIECŢII PE UNELE MODELE MATEMATICE

111.02 - ECUAŢII DIFERENŢIALE

Teză de doctor în ştiinţe matematice

Conducători ştiinţifici: **Popa Mihail,**
doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar
Cozma Dumitru,
doctor habilitat în matematică, conferenţiar universitar

Autorul:

CHIŞINĂU, 2017

CUPRINS

ADNOTARE

la teza "Algebre Lie şi invarianţi la sisteme diferenţiale cu proiecţii pe unele modele matematice", prezentată de către Neagu Natalia pentru obţinerea gradului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 111.02 - ecuaţii diferenţiale.

Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Tiraspol (Chişinău) în anul 2017. Lucrarea este scrisă în limba română şi cuprinde: introducere, 4 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie (73 titluri), 125 pagini de bază. La tema tezei sunt publicate 14 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte–cheie: sistem diferenţial polinomial, sistem diferenţial ternar de tip Darboux (Lyapunov-Darboux), stabilitatea mişcării neperturbate, algebră Lie, invariant, comitant.

Domeniul de studiu al tezei: teoria calitativă a sistemelor dinamice, integrabilitatea sistemelor diferenţiale polinomiale, stabilitatea mişcării neperturbate.

Scopul şi obiectivele lucrării: determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale; examinarea cazurilor necritice şi critice pentru sistemele menţionate; integrabilitatea sistemelor diferenţiale ternare de tip Darboux şi de tip Lyapunov-Darboux.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică constă în aceea, că pentru prima dată au fost utilizate metodele algebrelor Lie şi a teoriei invarianţilor şi comitanţilor algebrici în studiul stabilităţii mişcării neperturbate, descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în abordarea prin intermediul algebrelor Lie şi algebrelor invarianţilor a unor sisteme diferenţiale, ceea ce a contribuit la obţinerea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, în vederea aplicării lor ulterioare la modele matematice concrete.

Semnificaţia teoretică. Rezultatele obţinute în teză sunt noi şi reprezintă un început de dezvoltare a unei noi abordări asupra utilizării algebrelor Lie şi teoriei invarianţilor algebrici în studiul stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, integrabilităţii sistemelor ternare pe unele varietăţi invariante.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele tezei pot fi folosite în dezvoltarea de mai departe a teoriei stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale multidimensionale cu neliniarităţi polinomiale cu ajutorul algebrelor Lie şi teoriei invarianţilor; pot fi utilizate în studiul modelelor matematice ce sunt date de ecuaţii diferenţiale care descriu diverse procese din fizică, medicină, biologie, chimie, economie ş.a.; pot servi drept suport pentru tezele de masterat şi la elaborarea cursurilor opţionale universitare şi post-universitare.

АННОТАЦИЯ

диссертации "Алгебры Ли и инварианты для дифференциальных систем с проекциями на некоторые математические модели", представленной Нягу Натальей на соискание ученой степени доктора математических наук по специальности 111.02 - дифференциальные уравнения. Диссертация выполнена в Тираспольском Государственном Университете (Кишинэу) в 2017 году на румынском языке и состоит из введения, четырех глав, общих выводов и рекомендаций, библиографии (73 работа), 125 страниц основного текста. Основные полученные результаты опубликованы в 14 научных работах.

Ключевые слова: полиномиальная дифференциальная система, трехмерная дифференциальная система вида Дарбу (Ляпунова-Дарбу), устойчивость невозмущенного движения, алгебра Ли, инвариант, комитант.

Область исследования: качественная теория динамических систем, интегрируемость полиномиальных дифференциальных систем, устойчивость невозмущенного движении.

Цель и задачи диссертации: нахождение центроаффинно-инвариантных условии устойчивости невозмущенного движения описанные двумерными и трехмерными дифференциальными системами с полиномиальными частями; исследование критических и некритических случаев для данных систем; интегрируемость трехмерных дифференциальных систем вида Дарбу и вида Ляпунова-Дарбу.

Новизна и научная оригинальность. Впервые были использованы методы алгебр Ли, теории алгебраических инвариантов и комитантов при исследовании устойчивости невозмущенного движения описанного двумерными и трехмерными дифференциальными системами с полиномиальными частями.

Главная решенная научная задача состоит в изучении посредством алгебр Ли и алгебр инвариантов некоторых дифференциальных систем, что способствует нахождению центроаффинно-инвариантных условий устойчивости невозмущенного движения, описанного двумерными и трехмерными дифференциальными системами с полиномиальными частями, что позволит их дальнейшее применение к конкретным математическим моделям.

Теоретическое и практическое значение работы. В диссертации получены новые результаты, которые являются началом нового подхода в использовании алгебр Ли и теории алгебраических инвариантов и комитантов при исследовании устойчивости невозмущенного движения описанного двумерными и трехмерными дифференциальными системами с полиномиальными частями, интегрируемости трехмерных дифференциальных систем на некоторых инвариантных многообразиях.

Реализация научных результатов. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории устойчивости невозмущенного движения с помощью алгебр Ли и теории инвариантов, описанного многомерными дифференциальными системами с полиномиальными частями; при исследовании некоторых математических моделей, описывающих процессы в физике, медицине, биологии, химии, экономике и т.д; могут служить материалом для разработки тем магистерских работ и спецкурсов для студентов.

ANNOTATION

of the thesis "Lie algebras and invariants for differential systems with projections on some mathematical models", presented by Neagu Natalia for obtaining the Doctor degree in Mathematics, specialty 111.02 - differential equations. The thesis was elaborated at Tiraspol State University (Chişinău) and presented for defense in 2017. The language of the thesis is Romanian. It comprises 125 pages and has the following structure: Introduction, 4 Chapters, General Conclusions and Recommendations, Bibliography with 73 References. Research outcomes were reflected in 14 scientific works.

Keywords: polynomial differential system, ternary differential system of Darboux (Lyapunov-Darboux) type, stability of unperturbed motion, Lie algebra, invariant, comitant.

Field of study of the thesis: qualitative theory of dynamical systems, integrability of polynomial differential systems, stability of unperturbed motion.

The purpose and objectives of the thesis are: to determinate the centro-affine invariant conditions of stability of unperturbed motion described by two-dimensional and ternary differential systems with polynomial nonlinearities; to investigate the critical and noncritical cases for such systems; to study the integrability of ternary differential systems of Darboux type and of Lyapunov-Darboux type.

Novelty and scientific originality. For the first time there were used the methods of Lie algebras and of theory of algebraic invariants and comitants in study of stability of unperturbed motion described by two-dimensional and ternary differential systems with polynomial nonlinearities.

The main scientific problem solved consists in approaching of some differential systems by Lie algebras and algebras of invariants, which contributed to obtain the centro-affine invariant conditions of stability of unperturbed motion described by two-dimensional and ternary differential systems with polynomial nonlinearities. This made possible to apply the obtained results in future investigation of concrete mathematical models.

The significance of theoretical and practical values of the work. The results obtained in thesis are new and represent a new approach on the use of Lie algebras and theory of algebraic invariants and comitants in study of stability of unperturbed motion described by two-dimensional and ternary differential systems with polynomial nonlinearities, the integrability of ternary differential systems on some invariant varieties.

Implementation of the scientific results. The obtained results can: be used in further investigation of the theory of stability of unperturbed motion described by multi-dimensional differential systems with polynomial nonlinearities using Lie algebras and the theory of invariants; be used in the study of some mathematical models describing processes from physics, medicine, biology, chemistry, economy, etc; serve as support for Master thesis and for teaching courses at the university level.

INTRODUCERE

Teza de faţă ţine de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale, algebrele Lie, teoria invarianţilor şi teoria stabilităţii mişcării descrise de sistemele diferenţiale.

Actualitatea şi importanţa problemei abordate.

În prima jumătate a secolului XIX ecuaţiile diferenţiale au ajuns să ocupe un loc destul de important în studiul unor procese din ştiinţele naturii. Noile idei şi metode atât din analiza matematică, geometrie, cât şi din algebră, au avut o influenţă covârşitoare în dezvoltarea teoriei ecuaţiilor diferenţiale.

În a doua jumătate a secolului al XIX-lea, în lucrările clasice ale lui Sophus Lie (1842-1899), au fost puse bazele teoriei grupurilor şi algebrelor Lie, fără de care astăzi este de neimaginat matematica modernă, ba chiar şi fizica. Rezultatele acestei teorii au fost expuse în lucrările clasice ale lui S. Lie [1], G. Birkhoff [7], N.G. Cebotarev [2], L.P. Eeisenhart [5], L. S. Pontreaghin [3], N. Jacobson [4], L.V. Ovsyannikov [8], N.H. Ibragimov [11], P.J. Olver [9], W.I. Fushchich [10], N. Bourbaki [6] ş.a.

Metoda grupurilor şi algebrelor Lie a fost elaborată datorită problemelor apărute în legătură cu integrabilitatea ecuaţiilor diferenţiale. Însă, nu după mult timp de la elaborarea acestei teorii, s-a constatat că ea poate fi folosită doar la unele clase înguste de ecuaţii diferenţiale. Problema principală, care a apărut în legătură cu această teorie, era construcţia grupurilor şi algebrelor Lie, ce sunt admise de ecuaţiile diferenţiale examinate, i.e. adică acele grupuri, în raport cu care ecuaţiile date rămân invariante, adică nu-şi schimbă forma. De aceea, utilizarea teoriei lui Lie la ecuaţiile diferenţiale de la sfârşitul secolului XIX, începutul secolului XX, era destul de pasivă. Această teorie şi-a găsit un loc destoinic în algebră [2–6].

Însă, odată cu apariţia lucrării [7], care a arătat eficacitatea utilizării teoriei lui Lie în ecuaţiile diferenţiale din hidrodinamică, această teorie a reînviat. După aceasta au apărut un şir de lucrări, care au dezvoltat mai departe această direcţie de cercetare. Printre multiplele lucrări putem menţiona monografiile [8–11].

Dar, cu regret, teoria lui Lie mai mult este aplicată la ecuaţiile diferenţiale în derivate parţiale. Ecuaţiile diferenţiale ordinare de ordinul întâi au rămas cumva în afara acestei teorii. Pricina constă în aceea, că chiar de la bun început Sophus Lie a arătat că, la general vorbind, aceste ecuaţii admit o algebră Lie infinitdimensională, iar construcţia ei nu este mai simplă, decât integrabilitatea acestor ecuaţii. Şi dacă, totuşi, această algebră Lie poate fi construită, nu se ştia cum poate fi ea folosită la studiul acestor ecuaţii.

De aceea pentru ecuaţiile diferenţiale ordinare de ordinul întâi a fost fondată de Henri Poincaré (1854-1912) şi Alexandr Lyapunov (1857-1918), concomitent, teoria calitativă a acestor ecuaţii, i.e. teoria care ne permite să studiem comportamentul soluţiilor ecuaţiilor menţionate fără a le determina în mod explicit.

Începând cu anii 60 ai secolului trecut, în cadrul teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale ordinare, în lucrările academicianului C.S. Sibirschi (1928-1990) şi a elevilor săi [12,14,16], au fost puse bazele metodei teoriei invarianţilor algebrici pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi de formă normală cu membrii drepţi polinomiali.

Invarianţii se defineau ca nişte polinoame de la coeficienţii membrilor drepţi ale acestor ecuaţii, care nu-şi schimbă forma la transformarea sistemelor date de ecuaţii cu ajutorul diferitor grupuri clasice de transformări.

La acea etapă, metoda invarianţilor algebrici a ecuaţiilor diferenţiale nu utiliza teoria lui Lie şi se mărginea doar la unele referinţe bibliografice.

Îndeosebi, în cercetările şcolii academicianului C.S. Sibirschi se utilizau grupurile de transformări centroafine, de rotaţie, ortogonale şi afine, cu ajutorul invarianţilor cărora se obţineau rezultate importante în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale menţionate mai sus [13].

Metoda academicianului C.S. Sibirschi este dezvoltată şi în prezent în lucrările cercetătorilor din Republica Moldova: N. Vulpe [14, 15], M. Popa [16], A. Şubă [17–19], V. Baltag [20], Iu. Calin [21], D. Cozma [22, 23] ş.a. precum şi a cercetătorilor din alte ţări: H. Zoladek (Polonia) [24], J. Llibre, J. Artés (Spania) [25], D. Schlomiuk (Canada) [26], D. Boularas (Franţa) [27], L.A. Cherkas (Belarus) [28], A.P. Sadovskii (Belarus) [29], V. Romanovski (Slovenia) [30], D.S. Shafer (SUA) [31], M. Han (China) [32] ş.a.

Metoda invarianţilor algebrici a permis rezolvarea mai multor probleme din teoria calitativă a sistemelor diferenţiale polinomiale, ce ţin de problema centrului şi a focarului, problema clasificării diferitor singularităţi finite pentru unele clase de sisteme diferenţiale, problema clasificării topologice a diferitor familii de sisteme diferenţiale şi multe altele.

O nouă viziune asupra studiului sistemelor diferenţiale polinomiale, a fost iniţiată în anii 2000 de prof. M. Popa împreună cu elevii săi (P. Macari, A. Braicov, S. Port, E. Staruş (Naidenova), E. Bâcova, N. Gherştega, O. Diaconescu, V. Orlov, V. Pricop). A fost propusă cercetarea acestor sisteme diferenţiale prin atragerea la ele a teoriei algebrelor Lie, a operatorilor de reprezentare a grupurilor liniare în spaţiul variabilelor de fază şi al coeficienţilor sistemelor date, precum şi a algebrelor Sibirschi a invarianţilor şi comitanţilor sistemelor menţionate [33].

Este important de subliniat că majoritatea lucrărilor prof. M. Popa şi a elevilor săi erau consacrate sistemelor diferenţiale polinomiale bidimensionale şi ţineau de construcţia algebrelor Lie finitdimensionale ale operatorilor de reprezentare în spaţiul variabilelor de fază şi al coeficienţilor admise de sistemele diferenţiale polinomiale precum şi de clasificarea dimensiunii orbitelor pentru aceste sisteme, construcţia integralelor invariante pe varietăţile invariante şi a seriilor Hilbert ale algebrelor Sibirschi ale invarianţilor şi comitanţilor ale sistemelor menţionate ş.a.

În lucrările de doctorat [34] şi [35] au fost cercetate sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi pătratice şi cubice. Problemele examinate ţineau îndeosebi de clasificarea dimensiunii orbitelor după modulul grupului centroafin, construcţia integralelor invariante ş.a.

Vom menţiona că până în prezent nu au fost întâlnite lucrări pentru sistemele diferenţiale ternare, ce ar trata problemele de stabilitate ale mişcării neperturbate cu ajutorul algebrelor Lie şi a invarianţilor algebrici.

Problema integrabilităţii pentru o familie de sisteme diferenţiale polinomiale tridimensionale s-a studiat în lucrarea [36]. Au fost detreminate condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a două integrale prime analitice independente.

În lucrarea [37] au fost considerate sistemele diferenţiale tridimensionale cu neliniarităţi pătratice şi cu punct singular în originea de coordonate, având două rădăcini caracteristice pur imaginare, iar a treia rădăcină diferită de zero. Pentru toate valorile fixate ale rădăcinii caracetristice reale, au fost determinate sistemele diferenţiale ce au punct singular de tip centru în originea de coordonate pe o varietate centrică locală.

Problema centrului a fost studiată pentru trei familii de sisteme diferenţiale tridimensionale cu neliniarităţi pătratice ce depind de patru parametri în lucrarea [38]. Au fost obţinute condiţiile necesare şi suficiente de existenţă a punctului singular de tip centru pe o varietate centrică locală. În lucrarea [39] au fost obţinute integralele prime de tip Darboux, formate din suprafeţe algebrice, pentru o familie de sisteme diferenţiale tridimensionale cu neliniarităţi pătratice de tip Lotka-Volterra.

Problema ciclicităţii punctului singular de tip centru, în sistemele diferenţiale tridimensionale cu neliniarităţi pătratice, a fost studiată în lucrarea [40]. S-a arătat că există sisteme diferenţiale tridimensionale cu neliniarităţi pătratice cu 10 cicluri limită care pot fi bifurcate dintr-un singur punct singular de tip centru.

Modelul diferenţial tridimensional de tip Moon–Rand, care are în originea de coordonate un punct singular cu două rădăcini caracteristice pur imaginare şi una reală negativă, a fost studiat în lucrarea [41]. Pentru acest sistem se rezolvă problema centrului, se determină numărul de cicluri limită care pot fi bifurcate din punctul singular de tip centru, se studiază stabilitatea fluxului în vecinătatea originii.

În lucrarea de doctorat [42] au fost studiate sistemele diferenţiale polinomiale omogene tridimensionale pe sfera bidimensională $\mathbb{S}^2$. Pentru aceste sisteme au fost determinate curbele algebrice invariante pe $\mathbb{S}^2$, numite cercuri invariante şi a fost stabilit numărul lor maximal. La fel, a fost efectuată clasificarea globală a portretelor de fază pentru sistemele diferenţiale polinomiale omogene de gradul doi pe sfera bidimensională $\mathbb{S}^2$. În teza de doctorat [43] a fost studiată problema centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale tridimensionale pe o varietate centrică locală bidimensională, care trece prin originea de coordonate.

Este cunoscut că până în present teoria calitativă a sistemelor diferenţiale ternare este slab dezvoltată, ceea ce face ca cercetările sistemelor diferenţiale multidimensionale să fie destul de actuale. Acest lucru este motivat încă de aceea, că sistemele menţionate se întâlnesc destul de des în problemele practice din teoria oscilaţiilor neliniare, mecanica corpurilor solide, fizica atmosferei, siguranţa energetică, medicină, dirijarea optimală şi alte domenii.

Scopul şi obiectivele lucrării. Scopul principal al lucrării constă în determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale.

Realizarea acestui scop a fost însoţit de următoarele obiective:

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale polinomiale plane în cazul necritic;

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale bidimensionale critice cu neliniarităţi pătratice, neliniarităţi cubice şi neliniarităţi de gradul patru;

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare polinomiale în cazul necritic;

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării periodice neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Lyapunov-Darboux;

– determinarea tuturor integralelor generale pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux pe varietăţile descrise de o integrală particulară invariantă a acestui sistem;

– determinarea condiţiilor de stabilitate pentru unele clase de sisteme diferenţiale ternare generalizate de tip Lyapunov-Darboux cu neliniarităţi pătratice.

Metodologia cercetării ştiinţifice. În lucrare au fost aplicate metode ale teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, metode ale algebrelor Lie şi a teoriei comitanţilor şi invarianţilor algebrici, metode ale teoriei stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sisteme de ecuaţii diferenţiale, metode algebrice de calcul computaţional.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. Până în prezent, stabilitatea mişcării neperturbate descrisă de sistemele diferenţiale a fost examinată folosind metodele clasice expuse, de exemplu, în [44–47]. În această lucrare cercetările ştiinţifice efectuate se bazează pe metodele din lucrările de mai sus, metodele teoriei algebrelor Lie şi a metodei invarianţilor algebrici în studiul stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale polinomiale atât plane cât şi ternare.

În lucrare au fost obţinute următoarele rezultate:

– au fost evidenţiate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale polinomiale plane în cazul necritic;

– au fost determinate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale bidimensionale critice cu neliniarităţi pătratice, neliniarităţi cubice şi neliniarităţi de gradul patru;

– au fost evidenţiate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare polinomiale în cazul necritic;

– au fost determinate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării periodice neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Lyapunov-Darboux;

– au fost construite toate integralele generale pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux pe varietăţile descrise de o integrală particulară invariantă a acestui sistem;

– au fost obţinute condiţiile de stabilitate pentru unele clase de sisteme diferenţiale ternare generalizate de tip Lyapunov-Darboux şi integralele polinomial-exponenţiale pentru unele modele matematice din medicină.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în abordarea prin intermediul algebrelor Lie şi algebrelor invarianţilor a unor sisteme diferenţiale, ceea ce a contribuit la obţinerea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, în vederea aplicării lor ulterioare la modele matematice concrete.

Semnificaţia teoretică. Rezultatele obţinute în teză sunt noi şi reprezintă un început de dezvoltare a unei noi abordări asupra utilizării algebrelor Lie şi teoriei invarianţilor algebrici în studiul stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, integrabilităţii sistemelor ternare pe unele varietăţi invariante.

Valoarea aplicativă a lucrării. Rezultatele tezei pot fi folosite: în dezvoltarea teoriei stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale multidimensionale cu neliniarităţi polinomiale cu ajutorul algebrelor Lie şi teoriei invarianţilor, în studiul unor modele matematice guvernate de sisteme de ecuaţii diferenţiale care descriu diverse procese din fizică, medicină, biologie, chimie, economie ş.a., în calitate de suport pentru elaborarea cursurilor opţionale universitare şi post-universitare.

Un lucru caracteristic rezultatelor din această lucrare este că specialiştii din alte domenii, care nu sunt iniţiaţi în teoria stabilităţii mişcării, pot folosi aceste rezulate având doar cunoştinţe elementare în acest domeniu.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere:

– condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale plane şi ternare în cazul necritic;

– condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale bidimensionale critice cu neliniarităţi pătratice, neliniarităţi cubice şi neliniarităţi de gradul patru;

– condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării periodice neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar ce neliniarităţi pătratice de tip Lyapunov-Darboux;

– integralele generale pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux pe varietăţile descrise de o integrală particulară invariantă a acestui sistem;

– condiţiile de stabilitate a sistemelor diferenţiale ternare generalizate de tip Lyapunov-Darboux şi integralele polinomial-exponenţiale cu condiţii invariante pentru unele modele matematice descrise de ecuaţii diferenţiale ternare.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele obţinute în teză pot fi aplicate:

– în investigaţiile ulterioare a stabilităţii mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale plane cu neliniarităţi complete de până la gradele trei şi patru;

– în studiul unor modele matematice, ce descriu unele procese ce ţin de dinamica răspândirii tuberculozei în societate sau a unor procese SIV;

– drept suport pentru teze de masterat şi pot constitui conţinutul unor cursuri opţionale pentru studenţii şi masteranzii de la specialităţile matematice, fizice şi cu profil tehnic.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele principale ale lucrării au fost prezentate şi aprobate la diverse conferinţe şi seminare ştiinţifice: Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, August 19–23, 2014, Chişinău; The 23^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2015), September 17-20, 2015, Suceava; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", ediţia a IV-a, 10 martie, 2015, Chişinău; International Conference "Mathematics and Information Tehnologies: Research and Education" (MITRE 2015), July 2-5, 2015, Chişinău; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", ediţia a V-a, 25 mai, 2016, Chişinău; International Conference "Mathematics and Information Tehnologies: Research and Education" (MITRE 2016), June 24–26, 2016, Chişinău; The International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application", September 28-30, 2016, Chernivtsi, Ukraine; Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", ediţia a VI-a, 15 iunie, 2017, Chişinău; The 25^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2017), September 14-17, 2017, Iaşi; The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova (dedicated to the centenary of V. Andrunachievici 1917-1997), June 28-July 2, 2017, Chişinău; Seminarul "Ecuaţii Diferenţiale" din cadrul Facultăţii Matematică şi Mecanică, Universitatea de Stat din Belarus, Minsk, 2015; Seminarul ştiinţific "Ecuaţii Diferenţiale şi Algebre" din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol (2014-2017); Seminarul "Algebra şi Logica Matematică", 92 de ani de la naştere a profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică şi Informatică al ASM, 2017; Seminarul de Ştiinţe Matematice "P. Osmătescu", Universitatea Tehnică a Moldovei, 2017.

Publicaţii la tema tezei. Rezultatele principale ale tezei au fost publicate în 14 lucrări: 4 articole în reviste ştiinţifice din 3 ţari (Moldova, România, Ucraina) [48–51], 4 articole în culegeri ştiinţifice de lucrări ale conferinţelor internaţionale şi naţionale [52–55], 6 teze şi comunicări la manifestări ştiinţifice internaţionale [56–61]; 3 articole şi 1 teză sunt publicate fără coautori.

Cuvinte–cheie: sistem diferenţial polinomial, sistem diferenţial ternar de tip Darboux (Lyapunov-Darboux), stabilitatea mişcării neperturbate, algebră Lie, invariant, comitant.

Teza este dedicată cercetărilor în următoarele domenii ştiinţifice: teoria calitativă a sistemelor dinamice, integrabilitatea sistemelor diferenţiale polinomiale, stabilitatea mişcării neperturbate.

Volumul şi structura tezei. Teza de doctor este scrisă în limba romàna şi constă din introducere, patru capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie (73 titluri), 125 pagini de bază, adnotarea în limbele română, rusă şi engleză.

Sumarul compartimentelor tezei:

În primul capitol, format din cinci secţiuni, sunt enunţate rezultatele clasice şi recente ce ţin de teoria calitativă, teoria algebrelor Lie şi metoda invarianţilor algebrici a ecuaţiilor diferenţiale. Se face o analiză comparativă a situaţiei existente în domeniu, ce formează problemele de cercetare şi direcţiile de soluţionare ale lor.

În capitolul 2, format din şapte secţiuni, au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale plane cu neliniarităţi polinomiale de orice grad în cazul necritic. În clasa sistemelor diferenţiale bidimensionale cu neliniarităţi de până la gradul patru inclusiv au fost determinate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate în cazul critic.

În capitolul 3, format din treisprezece secţiuni, au fost determinate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi polinomiale în cazul necritic. Au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux în cazul critic, când ecuaţia caracteristică a părţii liniare a sistemului dat posedă o rădăcină nulă sau două rădăcini pur imaginare. Au fost construite algebrele Lie pentru sistemele diferenţiale ternare de tip Darboux cu neliniarităţi pătratice şi integralele generale pentru toate sistemele de acest tip, ce se află pe varietăţile invariante determinate de o integrală particulară a sistemului general de tip Darboux cu neliniarităţi pătratice.

În capitolul 4, format din şase secţiuni, au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante, când un sistem cu neliniarităţi pătratice posedă în părţile pătratice un factor comun. Aşa sisteme au fost numite sisteme diferenţiale generalizate de tip Darboux.

Au fost examinate unele cazuri de stabilitate a mişcării neperturbate pentru aceste sisteme, când partea liniară posedă forma Lyapunov şi sunt aproape de tipul unor modele matematice din medicină. Au fost construite integralele prime polinomial-exponenţiale cu condiţii invariante pentru unele modele matematice descrise de sisteme diferenţiale ternare.

1. METODE ŞI ABORDĂRI PRACTICE LA SISTEMELE DIFERENŢIALE POLINOMIALE

În acest compartiment sunt descrise rezultatele clasice şi recente ale teoriei calitative şi a stabilităţii mişcării, ce au ca suport sistemele de ecuaţii diferenţiale. Se face o analiză comparativă a situaţiei în domeniile de studiu, se formulează metodele de cercetare şi se indică direcţia în care aceste metode se folosesc.

1.1. Integrabilitatea sistemelor diferenţiale autonome

Teoria ecuaţiilor diferenţiale în faza iniţială s-a elaborat ca un studiu a diferitor tipuri concrete de ecuaţii diferenţiale. Eforturile principale au fost concentrate asupra metodelor particulare de integrabilitate, i.e. asupra construcţiei soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale în formă explicită. Un progres esenţial a intervenit în prima jumătate a secolului XIX la integrabilitatea ecuaţiilor diferenţiale prin cuadraturi. Dar, cu regret, în perioada menţionată a fost descoperit doar un număr destul de mic de ecuaţii diferenţiale ordinare, ce se integrează în cuadraturi. În această perioadă a apărut ideea teoriei grupurilor, care prin eforturile lui Niels H. Abel (1802-1829) şi Évariste Galois (1811-1832) au adus la rezolvarea ecuaţiilor din algebră în radicali, ce era considerat un rezultat remarcabil. Mai târziu a apărut părerea, că ar fi bine să fie pusă problema integrabilităţii prin cuadraturi a ecuaţiilor diferenţiale, folosind ideea din algebră. În aşa fel, în teoria ecuaţiilor diferenţiale, au fost introduse de Sophus Lie (1842-1899) grupurile continui de transformări, care au fost folosite la ecuaţii diferenţiale într-un şir de lucrări, începând cu anul 1873.

Sophus Lie a arătat, că dacă ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi, admite un grup continuu de transformări, i.e. transformările acestui grup nu schimbă forma ecuaţiei diferenţiale, atunci această ecuaţie se integrează în cuadraturi. Au fost examinate un şir de tipuri de ecuaţii diferenţiale cu transformările date. Însă, deoarece soluţiile explicite obţinute de S. Lie există doar pentru unele clase înguste de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi, elaborarea unei teorii generale în această direcţie a devenit imposibilă.

Dar această teorie, a lui Sophus Lie, şi-a găsit aplicaţii de amploare în ecuaţiile diferenţiale în derivate parţiale din hidrodinamică. Se poate afirma, că teoria lui Sophus Lie a fost reînviată prin lucrările lui Garrett Birkhoff (1911-1996) din hidrodinamică, care apoi au fost şi dezvoltate de L. Ovseannikov, Peter J. Olver, N. Ibraghimov ş.a.

Un alt eveniment important în istoria ecuaţiilor diferenţiale de la sfârşitul secolului XIX, începutul secolului XX, este considerat elaborarea teoriei calitative, i.e. studiul soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale fără a le avea în mod explicit.

Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale a fost concomitent elaborată de H. Poincaré (1854-1912) şi A. M. Lyapunov (1857-1918).

Începând cu anul 1994, în lucrările profesorului M. Popa şi a elevilor săi (P. Macari, A. Braicov, S. Port, E. Staruş (Naideonova), E. Bâcova, N. Gherştega, O. Diaconescu, V. Orlov, V. Pricop), bazându-se pe metoda teoriei invarianţilor algebrici a ecuaţiilor diferenţiale, fondată şi dezvoltată la Chişinău de academicianul C. Sibirski (1928-1990) şi elevii săi (N. Vulpe, M. Popa, Iu. Calin, V. Baltag, ş.a.) şi adaptarea teoriei lui Lie la sistemele de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi polinomiale, a fost examinată construcţia integralelor invariante şi varietăţile pe care ele pot exista, precum şi diverse probleme ale teoriei calitative. În aşa fel, au fost îmbinate unele metode ale teoriei calitative, ale teoriei invarianţilor algebrici şi ale teoriei lui Lie, ce permit să fie studiate clase mai largi de sisteme diferenţiale ordinare de ordinul întâi, cât şi probleme importante pentru aceste sisteme.

1.2. Stabilitatea după Lyapunov a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale polinomiale

Pe la mijlocul secolului al XIX-lea, în ştiinţă şi tehnică, au apărut probleme, care cereau o formulare generală a stabilităţii, nu numai a stării de *echilibru*, dar şi a *mişcării*.

În 1882 a fost publicată teza de doctorat [44] a lui A. M. Lyapunov (1857-1918) "Problema generală a stabilităţii mişcării", care în 1907 a fost tradusă în limba franceză şi publicată în Franţa cu anumite completări, iar în 1956, după varianta franceză, această lucrare a fost editată în rusă în culegerea de opere a acestui mare savant. Această lucrare conţine multe idei fructuoase şi rezultate de mare importanţă, încât toată istoria teoriei stabilităţii mişcării se divizează în perioada de până la Lyapunov şi după el.

În primul rând A. M. Lyapunov a dat o definiţie strictă a stabilităţii mişcării, care a fost într-atât de reuşită încât a fost luată ca bază de toţi cercetătorii.

La general vorbind, stabilitatea după Lyapunov ar putea fi definită aşa:

Fie că avem un sistem de ecuaţii diferenţiale n-dimensional ordinar de ordinul întâi scris sub formă normală, i.e. rezolvat în raport cu derivata. Considerăm o soluţie concretă, ce constituie o mişcare a sistemului şi care necesită un studiu la stabilitate. Aşa mişcare se numeşte *neperturbată*. Este clar că această soluţie este caracterizată de nişte condiţii iniţiale.

Dacă schimbăm aceste condiţii iniţiale dându-le nişte creşteri infinit mici, atunci mişcarea (soluţia) ce corespunde noilor condiţii iniţiale o vom numi *mişcare perturbată.*

În dependenţă cum se schimbă distanţa dintre punctele mişcării neperturbate şi celei perturbate, ce corespund aceluiaşi moment de timp avem trei tipuri de mişcări: *stabilă* (când distanţa dintre punctele menţionate mai sus nu întrece un număr dinainte dat pentru care există o vecinătate a condiţiei iniţiale a mişcării neperturbate de unde pornesc mişcările perturbate), *asimptotic stabilă* (mişcarea este stabilă, însă distanţa dintre punctele menţionate mai sus, tinde spre zero, atunci când timpul tinde spre infinit) şi *instabilă* (când nu se îndeplinesc condiţiile stabilităţii).

O definiţie mai exactă va fi adusă în capitolul următor.

Teoria stabilităţii pe larg se foloseşte în fizică, tehnică, astronomie, chimie, seismologie, biologie şi multe alte domenii ale aplicaţiilor practice. Cele mai des întâlnite modele matematice din aceste domenii se descriu de ecuaţii diferenţiale sau sisteme de ecuaţii diferenţiale.

În domeniul stabilităţii mişcării au fost scrise nenumărate lucrări. Literatura ştinţifică mondială despre stabilitatea mişcării conţine mii de publicaţii, printre care sute de monografii şi manuale a multor autori. Această literatură este bogată atât prin dezvoltarea teoriei cât şi prin aplicaţiile acestei teorii în practică.

În această lucrare ne vom axa pe dezvoltatrea teoriei stabilităţii mişcării.

Deoarece multe din modelele matematice, din domeniile enunţate mai sus se încadrează în sistemele diferenţiale polinomiale autonome, pentru care în şcoala de ecuaţii diferenţiale de la Chişinău s-au elaborat metodele teoriei invarianţilor şi dezvoltată teoria algebrelor Lie şi algebrelor graduate Sibirschi ale invarianţilor algebrici, a fost interesant de văzut ce putem obţine nou pentru teoria stabilităţii mişcării după Lyapunov cu aceste viziuni.

Una din metodele de cercetare a stabilităţii mişcării descrise de modelele matematice în formă de ecuaţii diferenţiale sau sisteme de ecuaţii diferenţiale, destul de frecvent folosită până la Lyapunov şi după el, este reducerea acestor ecuaţii la nişte ecuaţii mai simple. Unul din procedeele folosite în aceste cercetări este neglijarea unor termeni din aceste ecuaţii, care după părerea cercetătorului nu influenţează asupra stabilităţii mişcării. Cu alte cuvinte, ecuaţia diferenţială sau sistemul de ecuaţii diferenţiale se aproximează cu alte ecuaţii care se dau mai uşor cercetării.

Aşa ecuaţii sau sisteme de ecuaţii poartă denumirea de *ecuaţii de primă aproximaţie.* Există ecuaţii de *a doua aproximaţie* ş.a.m.d.

Referitor la acest fenomen, a existat o discuţie interesantă între A.M. Lyapunov şi elevul său apropiat V. A. Steklov (numele căruia îl poartă astăzi Institutul de Matematică al Academiei de Ştiinţe Ruse din Moscova), adusă în cartea [62]. La pag. 196–197 găsim că în această discuţie Steklov Vladimir Andreevici s-a exprimat despre metoda de studiu a stabilităţii mişcării după ecuaţiile de primă aproximaţie cam aşa:

– Aici se procedează analogic unui erou straniu dintr-un banc, care scăpând o monetă jos într-o stadelă întunecată, a alergat repede s-o caute la intersecţia apropiată a străzilor sub un felinar, unde era mai multă lumină.

La această comparaţie Lyapunov a răspuns surâzând:

– Cu eroul nostim din banc aţi spus-o bine. Numai că prima aproximaţie este până când unicul mijloc de cercetare a stabilităţii construcţiilor reale. La aceasta trebuie de spus că la majoritatea problemelor practice concluziile după prima aproximaţie concordă, fie până când doar calitativ, cu rezultatele experimentelor.

Se cunosc două metode a lui Lyapunov de studiu a stabilităţii mişcării guvernate de ecuaţii diferenţiale:

1. Metoda, ce ţine de studiul stabilităţii după rădăcinile ecuaţiei caracteristice a sistemului de primă aproximaţie, ce poartă denumirea de prima metodă a lui Lyapunov.

2. Metoda a doua a lui Lyapunov, ce ţine de construcţia unor funcţii cu anumite proprietăţi, numite funcţii Lyapunov, cu ajutorul cărora se studiază stabilitatea mişcării neperturbate. Această metodă este primit să se numească metoda directă a lui Lyapunov.

În lucrarea de faţă ne vom axa pe prima metodă a lui Lyaponov de studiu a stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sisteme diferenţiale ce au ca proiecţii unele sisteme diferenţiale din medicină.

A.M. Lyapunov a clasificat sistemele în:

– critice (acele sisteme diferenţiale la care printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice a părţii liniare se conţin rădăcini cu partea reală nulă);

– necritice (acele sisteme diferenţiale la care toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice a părţii liniare au părţile reale diferite de zero).

Stabilitatea mişcării neperturbate a sistemelor necritice se studiază cu ajutorul sistemelor de primă aproximaţie (sisteme diferenţiale liniare), iar pentru sistemele critice se cere participarea şi a termenilor ce conţin variabilele de fază de un grad mai mare ca unu, adică coeficienţii nelinearităţilor.

Din punct de vedere matematic, cazurile critice pot fi considerate ca excepţionale, dar din punct de vedere mecanic sunt extrem de importante, deoarece se întâlnesc destul de des în problemele practice (de exemplu, problema stabilităţii la rotaţie după inerţie a unui corp solid în jurul unui punct nemişcat, problema stabilităţii mişcării de rotaţie a unui proiectil cu traiectoria împuşcăturii razante, ş.a.). Un şir de exemple cu aplicaţii în practică a teoriei stabilităţii mişcării sunt aduse în [45–47].

1.3. Algebre Lie şi invarianţi în studiul integrabilităţii şi stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sisteme diferenţiale polinomiale

În lucrarea de faţă se studiază stabilitatea mişcării neperturbate în cazurile *necritice* şi *critice* ale sistemelor diferenţiale polinomiale perturbate.

În cazul necritic sunt obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate sau instabilitate a mişcării neperturbate pentru orice sistem de ecuaţii diferenţiale cu nelinearităţi polinomiale. Aceste condiţii depind doar de coeficienţii părţii liniare a sistemului.

Însă, cazul critic este cu mult mai complicat. Aici pe lângă coeficienţii părţii liniare se implică şi coeficienţii părţilor neliniare. În această situaţie A. M. Lyapunov [44] şi urmaşii săi (vezi, de exemplu, [47]) au propus să fie examinate *2 subcazuri*:

– când ecuaţia caracteristică a părţii liniare conţine o rădăcină nulă, iar celelalte rădăcini au părţile reale negative;

– când ecuaţia caracteristică a părţii liniare conţine două rădăcini pur imaginare, iar celelalte rădăcini au părţile reale negative.

Sunt şi alte cazuri, care în această lucrare nu vor fi examinate.

În primul subcaz, considerat în [44], este arătat că sistemul de primă aproximaţie a sistemului examinat conţine o integrală primă liniară, care fiind utilizată într-o transformare centroafină (liniar nedegenerată) aduce sistemul la forma critică, unde în prima ecuaţie dispare partea liniară. Pentru aşa sistem, în [44], este demonstrată teorema constructivă cu ajutorul căreea se pot obţine condiţiile polinomiale de la coeficienţii sistemului critic, ce ne rezolvă completamente problema stabilităţii mişcării neperturbate în acest subcaz.

Însă aşa rezultat nu-i satisface pe utilizatorii din alte domenii, care nu sunt familiarizaţi cu teoria stabilităţii mişcării neperturbate. De aceea, în lucrarea de faţă a fost rezolvată această problemă cu ajutorul invarianţilor şi comitanţilor centroafini, care nu cere de la utilizator cunoaşterea procedeelor din teoria stabilităţii mişcării. Având orice sistem de ecuaţii diferenţiale cu neliniarităţi polinomiale de tipul dat (nu neapărat forma lui critică) imediat putem verifica condiţiile, ce garantează stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate descrise de sistemul menţionat.

În primul subcaz, au fost rezolvate problemele stabilităţii mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale bidimensionale perturbate cu neliniarităţi pătratice, cubice şi de gradul patru. Toate condiţiile au fost exprimate prin comitanţi şi invarianţi centroafini. La fel au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare perturbate de tip Darboux şi generalizat de tip Darboux.

În al doilea subcaz, un rol important îl are integrabilitatea sistemului de ecuaţii diferenţiale examinat, în special integrala de tip Lyapunov. În teza de doctorat, al doilea subcaz este studiat pentru sistemele ternare de tip Darboux. Aici se utilizează teorema lui Lie despre factorul integrant, ce a fost demonstrată în [34], care pe larg foloseşte algebrele Lie admise de aceste sisteme.

Studiul problemelor de stabilitate a mişcării neperturbate cu ajutorul algebrelor Lie, comitanţilor şi invarianţilor centroafini ai sistemelor diferenţiale, caracterizează o nouă abordare asupra stabilităţii mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale cu neliniarităţi polinomiale perturbate.

1.4. Proiecţia unor sisteme diferenţiale pe modelul matematic al tuberculozei

Vom menţiona că sistemele de ecuaţii diferenţiale autonome de ordinul întâi sunt modele matematice ale multor procese din viaţa cotidiană.

De ce ne-am axat pe modelele matematice, ce vizează tuberculoza (TB) şi SIV-ul?

În primul rând, aceste modele matematice sunt descrise de sisteme diferenţiale ternare cu neliniarităţi pătratice, ce se conţin în sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi pătratice generalizate de tip Darboux, care sunt obiectele de studiu în această lucrare. Problemelor TB, în lume, sunt consacrate nenumărate lucrări, atât în medicină cât şi în matematică. De exemplu, printre lucrările consacrate problemei dinamicii TB, în medicină şi matematică, poate fi menţionată [63].

În Institutul de Matematică şi Informatică al AŞM au fost efectuate cercetări în domeniul TB în cadrul unui proiect [65], fără a examina stabilitatea mişcării neperturbate guvernate de sistemul menţionat mai sus. În această lucrare s-a examinat integrabilitatea polinomial-exponenţială, precum şi stabilitatea mişcării neperturbate în cazul critic pentru sistemul diferenţial ce vizează dinamica răspândirii TB în societate.

1.5. Concluzii la capitolul 1

În primul capitol a fost descrisă importanţa studiului stabilităţii mişcării neperturbate exprimată printr-un sistem de ecuaţii diferenţiale cu nelinearităţi polinomiale perturbate şi metodele clasice de studiu ale acestor mişcări [44, 47].

S-a menţionat că la cercetările stabilităţii mişcării neperturbate s-au folosit metodele invarianţilor algebrici [12, 14] şi metodele algebrelor Lie [16], care până acum nu au fost întâlnite în alte lucrări. Aceasta face ca utilizatorii acestor rezultate să folosească mai uşor condiţiile de stabilitate a mişcării neperturbate, care nu cer modificarea sistemului de ecuaţii diferenţiale examinat, cum se făcea până la aceste cercetări.

Realizarea prezentei teze a pretins atingerea următorului scop: obţinerea condiţiilor invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale cu neliniarităţi polinomiale cât şi obţinerea integralelor prime pentru sistemele diferenţiale ternare, ce au proiecţii pe unele modele matematice din medicină.

În conformitate cu scopul enunţat, au fost stabilite următoarele obiective ale cercetării sistemelor diferenţiale perturbate:

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate în cazul necritic, pentru orice sistem ternar cu neliniarităţi polinomiale;

– obţinerea condiţiilor centroafin-invariante pentru stabilitatea mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale în cazul critic (o rădăcină caracteristică egală cu zero) cu neliniarităţi polinomiale de gradul doi, trei şi patru;

– construcţia condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi pătratice în cazul critic (o rădăcină caracteristică egală cu zero), când aceste sisteme au forma Darboux;

– determinarea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi pătratice în cazul critic (două rădăcini caracteristice sunt pur imaginare), când aceste sisteme au forma Darboux;

– determinarea algebrelor Lie şi integrabilitatea sistemelor ternare cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux, când rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale;

– obţinerea integralelor prime cu condiţii invariante pentru unele modele matematice a dinamicii TB.

2. CONDIŢII INVARIANTE DE STABILITATE A MIŞCĂRII NEPERTURBATE DESCRISE DE SISTEMELE DIFERENŢIALE PLANE

2.1. Noţiunea de mişcare neperturbată şi ecuaţiile diferenţiale a mişcării perturbate

Urmând [45] considerăm y^j $(j = \overline{1,n})$ nişte variabile reale, ce caracterizează o stare a unui sistem mecanic sau dinamic. Aceste variabile pot fi nişte coordonate, viteze, puncte, tensiuni, temperaturi ş.a., ori funcţii de la aceste mărimi. Se presupune că procesul de schimbare a acestor variabile este descris de următorul sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{dy^j}{dt} = Y^j(y^1, y^2, \ldots, y^n) \ \ (j = \overline{1,n}), \tag{2.1}$$

unde Y^j sunt nişte funcţii cunoscute de la variabilele $y^1, y^2, \ldots, y^n$, ce satisfac condiţiile de existenţă şi unicitate a soluţiei sistemului (2.1).

O oarecare mişcare concretă a sistemului, ce este predestinată studiului la stabilitate, o vom numi *mişcare neperturbată.*

Mişcării neperturbate a sistemului, îi corespunde o soluţie concretă particulară

$$y^1 = f^1(t), \ y^2 = f^2(t), \ldots, y^n = f^n(t) \tag{2.2}$$

a sistemului (2.1), ce satisface condiţiilor iniţiale:

$$pentru\ t = t_0 : \ y^1 = f^1(t_0), \ y^2 = f^2(t_0), \ldots, y^n = f^n(t_0). \tag{2.3}$$

Să schimbăm condiţiile iniţiale (2.3), dându-le valorilor iniţiale a variabilelor $y^1, y^2, \ldots, y^n$ nişte creşteri destul de mici după modul $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$:

$$\begin{gathered} pentru\ t = t_0 : \ y^1 = f^1(t_0) + \varepsilon^1, \ y^2 = f^2(t_0) + \varepsilon^2, \ldots, \\ y^n = f^n(t_0) + \varepsilon^n. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Mişcarea sistemului, ce corespunde condiţiilor iniţiale (2.4) schimbate, o vom numi *mişcare perturbată*, iar $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ – perturbări.

Notând valorile variabilelor y^j în mişcarea perturbată cu $y^j(t)$, iar în mişcarea neperturbată cu $f^j(t)$, vom considera diferenţa dintre ele

$$x^j = y^j(t) - f^j(t) \ (j = \overline{1,n}). \tag{2.5}$$

Variabilele x^j se numesc *devieri* sau *variaţiile* mărimilor y^j.

Consecutivitatea de devieri $x^1, x^2, \ldots, x^n$, în spaţiul n-dimensional a variabilelor $x^1, x^2, \ldots, x^n$, definesc punctul M numit *punct de reflecţie.* La mişcarea perturbată, când schimbăm mărimile $x^1, x^2, \ldots, x^n$, punctul de reflecţie descrie o traiectorie γ. Mişcării neperturbate (2.3) îi corespunde punctul nemişcat $x^j = 0$ – originea de coordonate.

Pentru determinarea ecuaţiilor mişcării perturbate, din egalitatea (2.5), vom scrie

$$y^j(t) = f^j(t) + x^j(t).$$

Substituim valorile pentru $y^j(t)$ în ecuaţiile diferenţiale a mişcării (2.1). Obţinem

$$\frac{df^j}{dt} + \frac{dx^j}{dt} = Y^j(f^1 + x^1, f^2 + x^2, ..., f^n + x^n).$$

Dacă vom descompune membrii părţilor drepte în serie Taylor după puterile lui x^j avem

$$\frac{df^j}{dt} + \frac{dx^j}{dt} = Y^j(f^1, f^2, ..., f^n) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}\right)_0 x^k + \bar{X}^j,$$

unde $\bar{X}^j$ este mulţimea termenilor, ce conţin variaţiile x^j la puterea mai mare ca unu.

Vom lua în consideraţie că pentru sistemul (2.1) avem

$$\frac{df^j}{dt} = Y^j(f^1, f^2, ..., f^n).$$

Atunci în baza acestui fapt avem

$$\frac{dx^j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a^j_k x^k + \bar{X}^j \quad (j = \overline{1, n}), \tag{2.6}$$

unde $a^j_k = (\frac{\partial Y^j}{\partial x^k})_0$.

Ecuaţiile (2.6) se numesc *ecuaţiile diferenţiale a mişcării perturbate.* Dacă în aceste ecuaţii vom omite $\bar{X}^j$, atunci ecuaţiile

$$\frac{dx^j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a^j_k x^k \quad (j = \overline{1, n})$$

se numesc *ecuaţiile de primă aproximaţie.*

Vom examina sistemul diferenţial cu neliniarităţi polinomiale a mişcării perturbate (vezi, de exemplu, [12] sau [14]) de forma

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{l} a^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_{m_i}} \quad (j, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_i} = \overline{1, n}; l < \infty), \tag{2.7}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}}$ este simetric după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală, iar cu $\Gamma = \{m_1, m_2, \ldots, m_l\}$ $(m_i \geq 2)$ notăm o mulţime finită de numere naturale diferite. Coeficienţii sistemului (2.7) şi variabilele de fază iau valori din câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$.

Un rol important, în studiul sistemelor diferenţiale cu neliniarităţi polinomiale (2.7), îl joacă sistemul de primă aproximaţie ([44], [45]) a sistemului (2.7)

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha \quad (j, \alpha = \overline{1, n}). \tag{2.8}$$

După cum rezultă din [45], mişcării neperturbate a sistemului perturbat (2.7), îi corespund valorile nule ale variabilelor $x^j(t)$ $(j = \overline{1, n})$. Ca urmare a acestui fapt, avem următoarea definiţie a stabilităţii după Lyapunov [45]:

Definiţia stabilităţii după Lyapunov. *Dacă pentru orice număr pozitiv ε, oricât de mic ar fi el, se poate de găsit aşa un număr pozitiv δ, încât pentru orice perturbare $x^j(t_0)$, ce satisface condiţiei*

$$\sum_{j=1}^{n} (x^j(t_0))^2 \leq \delta, \tag{2.9}$$

şi pentru orice $t \geq t_0$ se va satisface condiţia

$$\sum_{j=1}^{n} (x^j(t))^2 < \varepsilon$$

atunci mişcarea neperturbată $x^j = 0$ $(j = \overline{1, n})$ se va numi stabilă, iar în caz contrar – instabilă.

Dacă mişcarea neperturbată este stabilă şi dacă numărul δ poate fi luat într-atât de mic, încât pentru toate mişcările perturbate, ce satisfac inegalităţii (2.9), se va îndeplini condiţia

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{j=1}^{n} (x^j(t))^2 = 0, \tag{2.10}$$

atunci mişcarea neperturbată se numeşte *asimptotic stabilă.*

Să observăm că pentru stabilitatea asimptotică, condiţia (2.10) nu este de ajuns. Aici mai trebuie să avem condiţia, că mişcarea dată să fie stabilă. Geometric, aceasta înseamnă, că în cazul stabilităţii asimptotice este necesar ca punctul de reflecţie să se apropie nemărginit de originea de coordonate, fără să părăsească sfera ε.

Să vedem cum cele spuse mai sus, faţă de spaţiul devierilor $x^1, x^2, \ldots, x^n$, se va expune pentru variabilele de fază iniţiale $y^1, y^2, \ldots, y^n$ ale sistemului (2.1). Menţionăm că consecutivitatea valorilor $y^1, y^2, \ldots, y^n$ definesc, în acest spaţiu, un oarecare punct N.

Fie că la mişcarea neperturbată (2.2) punctul N descrie traiectoria I, iar la mişcarea perturbată – traiectoria II. Vezi Figura 2.1

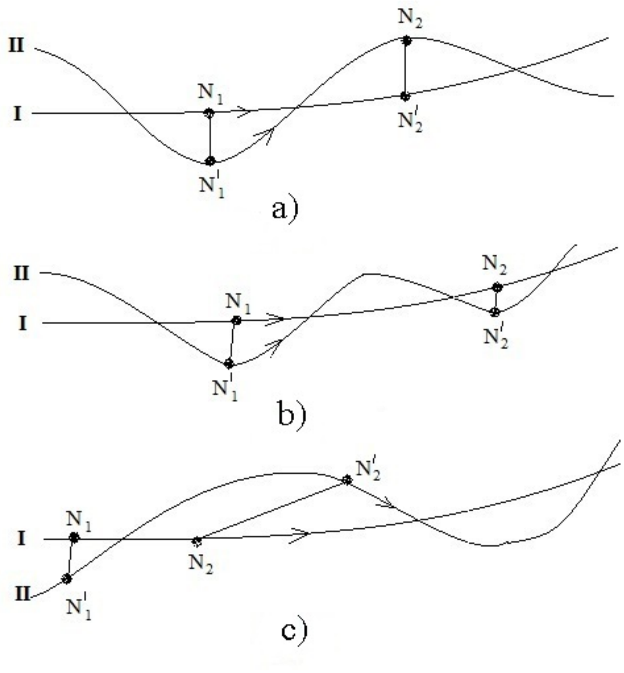

Fig. 2.1. Reprezentarea geometrică a mişcării neperturbate

a) stabile; b) asimptotic stabile; c) instabile

Să considerăm, pe aceste traiectorii, două puncte arbitrare N şi N', ce corespund unuia şi acelaşi moment de timp t. Atunci pătratul distanţei r, între aceste două puncte este

$$r^2 = \sum_{j=1}^{n} (y^j - f^j)^2 = \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2.$$

În cazul mişcării **stabile** traiectoria II este aproape de traiectoria I (r întotdeauna este mai mic ca ε) (Fig. 2.1a), iar în cazul **stabilităţii asimptotice** traiectoria II tinde nemărginit către traiectoria I (Fig. 2.1b).

Situarea apropiată a traiectoriilor I şi II este o condiţie necesară pentru stabilitate, dar, bineînţeles, nu şi suficientă. Într-adevăr, distanţa dintre punctele N şi N', ce corespund unuia şi acelaşi moment de timp poate creşte nu numai pentru traiectoriile, ce se îndepărtează, dar şi pentru traiectoriile destul de aproape (Fig. 2.1c).

Ne vom concentra atenţia la particularităţile stabilităţii mişcării după Lyapunov:

În primul rând, vom presupune că perturbările se vor aplica numai asupra condiţiilor iniţiale. Cu alte cuvinte, mişcarea perturbată are loc pentru acele forţe (izvorul energiei), pentru care se manifestă şi mişcarea neperturbată.

În al doilea rând, stabilitatea se examinează pe un interval infinit de timp.

În al treilea rând perturbările se consideră mici.

Făcând abstracţie de aceste restricţii, definiţia lui Lyapunov despre stabilitatea mişcării este destul de efectivă şi rodnică în aplicaţii.

2.2. Stabilitatea după prima aproximaţie şi condiţiile invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale în plan

Din [45] avem următoarele rezultate:

Teorema lui Lyapunov despre stabilitate a mişcării după prima aproximaţie. Dacă părţile reale ale tuturor rădăcinilor ecuaţiei caracteristice de primă aproximaţie, a sistemului (2.7), sunt negative, atunci mişcarea neperturbată este asimptotic stabilă indiferent de membrii drepţi ai acestui sistem de grad mai mare ca unu, în raport cu variabilele de fază.

Teorema lui Lyapunov despre instabilitatea după prima aproximaţie. Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice, a sistemului (2.7), se va găsi cel puţin o rădăcină cu partea reală pozitivă, atunci mişcarea neperturbată este instabilă indiferent de membrii drepţi ai acestui sistem de grad mai mare ca unu, în raport cu variabilele de fază.

Urmând [45] vom examina ecuaţia

$$a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\rho + a_n = 0, \tag{2.11}$$

considerând că $a_0 > 0$. Dacă $a_0 \neq 0$ acest lucru întotdeauna îl putem obţine.

Construim din coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, a ecuaţiei (2.11), următoarea matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Această matrice se construieşte în felul următor: în prima linie se află coeficienţii ecuaţiei (2.11) cu indici impari, începînd cu a_1. Elementele următoarelor linii, în mod consecutiv, se formează din elementele liniei premărgătoare cu micşorarea indicilor cu o unitate. Dacă în conformitate cu această regulă indicile coeficientului a_k, i.e. k întrece gradul n al ecuaţiei (2.11), sau poate fi negativ, atunci a_k se înlocuieşte cu zero. În rezultatul unei astfel de construcţii, pe diagonala principală trebuie să se afle coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$, iar în ultima coloană toate elementele, în afară de ultimul, vor fi egale cu zero.

Vom construi din matricea (2.12) minorii principali diagonali

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = a_n\Delta_{n-1}. \tag{2.13}$$

Teorema lui Hurwitz [45]. Pentru ca toate rădăcinile ecuaţiei algebrice (2.11), cu coeficienţi reali şi coeficientul pozitiv de pe lângă gradul cel mai mare a lui ρ, să aibă partea reală negativă, este necesar şi suficient, ca minorii diagonali principali (2.13) să fie pozitivi

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_n > 0. \tag{2.14}$$

Remarca 2.1. *[45]. Dacă pentru $a_0 > 0$ cel puţin unul din coeficienţii $a_1, a_2, \dots, a_n$, a ecuaţiei* (2.11) *este negativ, atunci printre rădăcinile $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, ale acestei ecuaţii, se conţin de acelea, la care părţile reale sunt pozitive.*

Vom examina două exemple

Exemplul 2.1. Ecuaţia (2.11) are forma

$$\rho^2 + a_1\rho + a_2 = 0. \tag{2.15}$$

Matricea (2.12) are forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix},$$

iar condiţiile lui Hurwitz sunt

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = a_1a_2 > 0.$$

De aici rezultă, pentru ca rădăcinile ecuaţiei (2.15) să aibă părţile reale mai mici ca zero este necesar şi suficient să se satisfacă inegalităţile

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0. \tag{2.16}$$

Conform Remarcei 2.1, dacă cel puţin unul din coeficienţii $a_1,\ a_2$, a ecuaţiei (2.15), este negativ, atunci printre rădăcinile acestei ecuaţii se conţin de acelea, la care părţile reale sunt pozitive.

Exemplul 2.2. Ecuaţia (2.11) are forma

$$\rho^3 + a_1\rho^2 + a_2\rho + a_3 = 0. \tag{2.17}$$

Matricea (2.12) are forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix},$$

iar condiţiile lui Hurwitz sunt

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0. \tag{2.18}$$

Conform Remarcei 2.1, dacă cel puţin unul din coeficienţii a_1, a_2, a_3, a ecuaţiei (2.17) este negativ, atunci printre rădăcinile ρ_1, ρ_2, ρ_3, ale acestei ecuaţii, se conţin de acelea, la care părţile reale sunt pozitive.

Vom examina sistemul diferenţial bidimensional de forma (2.7) cu neliniarităţi polinomiale a mişcării perturbate

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{l} a^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_{m_i}} \quad (j, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_i} = 1, 2; l < \infty), \tag{2.19}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}}$ este simetric după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală, iar $\Gamma = \{m_1, m_2, \ldots, m_l\}$ $(m_i \geq 2)$ este o mulţime finită de numere naturale diferite. Coeficienţii şi variabilele sistemului (2.19) iau valori din câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$.

Ecuaţiile de primă aproximaţie a sistemului (2.19) vor fi

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha \quad (j, \alpha = 1, 2). \tag{2.20}$$

Vom examina cazul necritic.

Lema 2.1. *Ecuaţia caracteristică a sistemului* (2.20) *este*

$$\varrho^2 + L_{1,2}\varrho + L_{2,2} = 0, \tag{2.21}$$

unde coeficienţii acestei ecuaţii sunt invarianţi centroafini [12] şi au forma

$$L_{1,2} = -I_1, \quad L_{2,2} = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2), \tag{2.22}$$

iar

$$I_1 = a^\alpha_\alpha, \quad I_2 = a^\alpha_\beta a^\beta_\alpha. \tag{2.23}$$

Cu ajutorul teoremelor lui Lyapunov despre stabilitatea mişcării neperturbate după semnul rădăcinilor ecuaţiei caracteristice, a sistemului diferenţial de primă aproximaţie (2.20) şi a teoremei lui Hurwitz aplicată la Exemplul 2.1 şi utilizarea Lemei 2.1 avem

Teorema 2.1. *Dacă invarianţii centroafini* (2.22)*, ai sistemului* (2.19)*, satisfac inegalităţilor* $L_{1,2} > 0,\ L_{2,2} > 0$, *atunci mişcarea neperturbată* $x^1 = x^2 = 0$ *pentru sistemul dat, este asimptotic stabilă.*

Teorema 2.2. *Dacă printre expresiile centroafin-invariante* (2.22) *a sistemului* (2.19) *se va găsi cel puţin una din ele mai mare ca zero, atunci mişcarea neperturbată* $x^1 = x^2 = 0$ *a acestui sistem, va fi instabilă.*

2.3. Forma canonică a sistemului critic de tip Lyapunov

Definiţia 2.1. *În conformitate cu I.G. Malkin [47], vom spune că sistemul* (2.7) *este critic de tip Lyapunov, dacă ecuaţia caracteristică a sistemului dat are o rădăcină nulă, iar celelalte rădăcini ale acestei ecuaţii au părţile reale negative.*

Remarca 2.2. *Deoarece în continuare vom examina sistemele critice de tip Lyapunov după primul subcaz (vezi §1.3), ne vom mărgini doar la denumirea "sisteme critice" sau "sisteme critice de tip Lyapunov".*

Lema 2.2. *Ecuaţia caracteristică a sistemului* (2.20) *şi prin urmare a sistemului* (2.19) *are o rădăcină nulă, iar cealaltă reală negativă dacă şi numai dacă se realizează condiţiile invariante*

$$I_1^2 - I_2 = 0, \quad I_1 < 0 \tag{2.24}$$

unde I_1 *şi* I_2 *sunt din* (2.23).

Demonstraţia Lemei 2.2 rezultă din aceea, că ecuaţia caracteristică a sistemului (2.20) şi prin urmare (2.19), are forma (2.21)–(2.22).

Lema 2.3. *Dacă pentru sistemul* (2.20) *(sau* (2.19)*) se satisfac condiţiile invariante* (2.24), *atunci sistemul* (2.20), *printr-o transformare centroafină poate fi adus la forma*

$$\frac{dx^1}{dt} = 0, \quad \frac{dx^2}{dt} = a^2_\alpha x^\alpha \quad (\alpha = \overline{1,2}), \tag{2.25}$$

şi, prin urmare, (2.19) *se va scrie*

$$\begin{gathered} \frac{dx^1}{dt} = \sum_{i=1}^{l} a^1_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_{m_i}}, \\ \frac{dx^2}{dt} = a^2_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{l} a^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_{m_i}} \ (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_i} = \overline{1,2};\ l < \infty). \end{gathered} \tag{2.26}$$

Demonstraţie. Presupunem satisfăcute condiţiile (2.24). Atunci, conform celor menţionate în [44], în acest caz, sistemul diferenţial de primă aproximaţie (2.20) are o integrală primă liniară cu coeficienţi constanţi.

Vom scrie această integrală sub forma

$$F \equiv Ax^1 + Bx^2 = C \ \ (A^2 + B^2 \neq 0), \tag{2.27}$$

unde A şi B sunt coeficienţii nedeterminaţi. Atunci avem

$$a^1_\alpha x^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^1} + a^2_\alpha x^\alpha \frac{\partial F}{\partial x^2} = 0,$$

de unde obţinem

$$a^1_1 A + a^2_1 B = 0, \ \ a^1_2 A + a^2_2 B = 0. \tag{2.28}$$

De aici găsim, pentru ca sistemul (2.28) să aibă o soluţie nenulă $A^2 + B^2 \neq 0$ este necesar şi suficient ca determinantul lui să fie egal cu zero

$$a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1 \equiv \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2) = 0. \tag{2.29}$$

Condiţia (2.29) coincide cu prima egalitate din (2.24). Prin urmare, în condiţiile egalităţii (2.24), sistemul (2.20), are o integrală primă liniară (2.27).

Considerăm substituţia

$$\bar{x}^1 = Ax^1 + Bx^2, \ \ \bar{x}^2 = x^2 \ \ (A \neq 0) \tag{2.30}$$

sau

$$\bar{x}^1 = Ax^1 + Bx^2, \ \ \bar{x}^2 = x^1 \ \ (B \neq 0). \tag{2.31}$$

În cazul (2.30), pentru prima ecuaţie din sistemul (2.20) avem

$$\frac{d\bar{x}^1}{dt} = A\frac{dx^1}{dt} + B\frac{dx^2}{dt},$$

de unde obţinem

$$\frac{d\bar{x}^1}{dt} = (a^1_1 A + a^2_1 B)x^1 + (a^1_2 A + a^2_2 B)x^2.$$

În virtutea egalităţilor (2.28) obţinem prima ecuaţie din (2.25). Deoarece transformarea centroafină nu schimbă forma părţilor pătratice a sistemului (2.19), atunci rezultă că prima ecuaţie din acest sistem va avea forma (2.26). A doua ecuaţie din (2.25) şi (2.26), îşi păstrează forma.

În mod analog se examinează şi cazul (2.31). Lema 2.3 este demonstrată.

Remarca 2.3. *Sistemul* (2.26) *îl vom numi forma canonică a sistemului critic de tip Lyapunov* (2.19), *unde prima ecuaţie din* (2.26) *o vom numi critică, iar a doua necritică.*

În continuare, vom avea nevoie de următoarea ecuaţie:

$$a^2_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{l} a^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_{m_i}} = 0 \ \ (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_i} = \overline{1,2};\ l < \infty). \tag{2.32}$$

Atunci teorema lui Lyapunov din [44] (§32) pentru cazul examinat, se va scrie sub următoarea formă:

Teorema 2.3. *Fie că ecuaţia caracteristică a sistemului diferenţial cu neliniarităţi polinomiale posedă o rădăcină nulă, iar celelelte au părţile reale negative. Presupunând că sistemul diferenţial al mişcării perturbate* (2.19) *este adus la forma* (2.26), *considerăm ecuaţia* (2.32), *din care determinăm mărimea x^2 ca funcţie olomorfă de la variabila x^1, ce se anulează pentru $x^1 = 0$ (aşa o determinare întotdeauna este posibilă şi este unică). După aceasta, mărimile determinate, le vom introduce în polinomul $\sum_{i=1}^{l} a^1_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_{m_i}}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_i} = 1, 2;\ l < \infty)$. Şi dacă în urma acestor substituţii rezultatul obţinut nu este identic zero, atunci îl dezvoltăm în serie după puterile crescânde a lui x^1.*

Atunci, dacă cea mai mică putere a lui x^1, în această dezvoltare va fi pară, obţimem că mişcarea neperturbată este instabilă. Dacă, însă, această putere este impară, atunci totul va depinde de semnul coeficientului, ce corespunde acestei puteri a lui x^1. Mişcarea neperturbată va fi instabilă, când acest coeficient este pozitiv şi stabilă, când acest coeficient este negativ. În ultimul caz, orice mişcare perturbată, ce corespunde perturbărilor destul de mici se va apropia asimptotic de cea neperturbată.

În sfârşit, dacă rezultatul substituţiilor examinate va fi identic zero, atunci va exista o serie continuă de mişcări stabilizate (staţionare) la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată, incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate.

Remarca 2.4. *Teoreme analogice cu Teorema 2.3 au loc pentru orice sistem* (2.7) *de dimensiune $n \geq 3$. În Capitolele 3-4 acest lucru va fi ilustrat pe exemplul sistemului ternar cu neliniarităţi pătratice.*

2.4. Condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru sistemul critic cu neliniarităţi pătratice

Vom examina sistemul diferenţial cu neliniarităţi pătratice

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (j, \alpha, \beta = 1, 2), \tag{2.33}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha\beta}$ este simetric după indicii de jos după care aici se efectuează convoluţia totală.

În [16] este arătat că mulţimea comitanţilor şi invarianţilor unimodulari ai sistemului (2.19) constituie nişte algebre graduate, care în [33] au fost numite algebrele Sibirschi. Aceste algebre, pentru sistemul (2.33), au fost notate în [16] cu $S_{1,2}$ – algebra Sibirschi a comitanţilor şi $SI_{1,2}$ – algebra Sibirschi a invarianţilor sistemului (2.33).

La fel în [16] s-a arătat că mulţimea generatorilor acestor algebre (care este finită) este constituită din bazele polinomiale ale comitanţilor şi invarianţilor centroafini omogeni.

Reeşind din aceasta şi utilizând bazele polinomiale ale comitanţilor şi invarianţilor centroafini ai sistemului (2.33), aduse în [12], putem scrie algebrele Sibirschi sub forma

$$S_{1,2} =< I_1, I_2, \ldots, I_{16}, K_1, K_2, \ldots, K_{20} | f_1, f_2, \ldots, f_{27} >$$

şi

$$SI_{1,2} =< I_1, I_2, \ldots, I_{16} | f_1, f_2, \ldots, f_9 >,$$

unde I_r şi K_s sunt invarianţii şi comitanţii acestor algebre, iar f_j sunt relaţiile de definiţie (sizigiile) ale lor.

În continuare vom avea nevoie de următorii generatori ai algebrelor Sibirschi a sistemului (2.33), pentru care formele lor tensoriale din [12] se vor scrie

$$\begin{gathered} I_1 = a^\alpha_\alpha, \;\; I_2 = a^\alpha_\beta a^\beta_\alpha, \;\; I_5 = a^\alpha_p a^\beta_{\gamma q} a^\gamma_{\alpha\beta} \varepsilon^{pq}, \;\; K_1 = a^\alpha_{\alpha\beta} x^\beta, \;\; K_2 = a^p_\alpha x^\alpha x^q \varepsilon_{pq}, \\ K_3 = a^\alpha_\beta a^\beta_{\alpha\gamma} x^\gamma, \;\; K_4 = a^\alpha_\gamma a^\beta_{\alpha\beta} x^\gamma, \;\; K_5 = a^p_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta x^q \varepsilon_{pq}, \;\; K_7 = a^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta_{\alpha\delta} x^\gamma x^\delta, \\ K_8 = a^\alpha_\gamma a^\beta_\delta a^\gamma_{\alpha\beta} x^\delta, \;\; K_{11} = a^p_\alpha a^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma x^q \varepsilon_{pq}, \;\; K_{12} = a^\alpha_\beta a^\beta_{\alpha\gamma} a^\gamma_{\delta\mu} x^\delta x^\mu, \\ K_{13} = a^\alpha_\gamma a^\beta_{\alpha\beta} a^\gamma_{\delta\mu} x^\delta x^\mu, \end{gathered} \tag{2.34}$$

unde $\varepsilon^{pq}(\varepsilon_{pq})$ este bivectorul unitate cu coordonatele $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$ $(\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1)$.

Presupunem că sistemul (2.33) este critic de tip Lyapunov. Atunci, conform Lemei 2.3, acest sistem poate fi adus la forma canonică (2.26)

$$\frac{dx^1}{dt} = a^1_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta, \;\; \frac{dx^2}{dt} = a^2_\alpha x^\alpha + a^2_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{2.35}$$

În conformitate cu Teorema 2.3 vom examina ecuaţia (2.32) obţinută din ecuaţia necritică (2.35), care în formă desfăşurată se va scrie

$$a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_{11}^2(x^1)^2 + 2a_{12}^2x^1x^2 + a_{22}^2(x^2)^2 = 0. \tag{2.36}$$

În acest caz, conform (2.22)–(2.23) şi inegalităţii din (2.24) avem

$$I_1 = a_2^2 < 0. \tag{2.37}$$

Atunci din (2.36) putem scrie

$$x^2 = -\frac{a_1^2}{a_2^2}x^1 - \frac{a_{11}^2}{a_2^2}(x^1)^2 - \frac{2a_{12}^2}{a_2^2}x^1x^2 - \frac{a_{22}^2}{a_2^2}(x^2)^2. \tag{2.38}$$

Conform Teoremei 2.3 vom căuta x^2 ca funcţie olomorfă de la x^1. Atunci putem scrie

$$x^2 = -\frac{a_1^2}{a_2^2}x^1 + B_2(x^1)^2 + B_3(x^1)^3 + B_4(x^1)^4 + \cdots \tag{2.39}$$

Înlocuind (2.39) în (2.38) obţinem

$$-\frac{a_1^2}{a_2^2}x^1 + B_2(x^1)^2 + B_3(x^1)^3 + \cdots = -\frac{a_1^2}{a_2^2}x^1 - \frac{a_{11}^2}{a_2^2}(x^1)^2 - \frac{2a_{12}^2}{a_2^2}x^1[-\frac{a_1^2}{a_2^2}x^1 + B_2(x^1)^2 +$$
$$+B_3(x^1)^3 + B_4(x^1)^4 + \cdots] - \frac{a_{22}^2}{a_2^2}[-\frac{a_1^2}{a_2^2}x^1 + B_2(x^1)^2 + B_3(x^1)^3 + B_4(x^1)^4 + \cdots]^2.$$

De aici avem

$$B_2(x^1)^2 + B_3(x^1)^3 + B_4(x^1)^4 + \cdots = [-\frac{a_{11}^2}{a_2^2} + \frac{2a_1^2a_{12}^2}{(a_2^2)^2} - \frac{(a_1^2)^2a_{22}^2}{(a_2^2)^3}](x^1)^2 +$$
$$+[-\frac{2a_{12}^2}{a_2^2}B_2 + \frac{2a_1^2a_{22}^2}{(a_2^2)^2}B_2](x^1)^3 + [-\frac{2a_{12}^2}{a_2^2}B_3 - \frac{a_{22}^2}{a_2^2}B_2^2 + 2\frac{a_1^2a_{22}^2}{(a_2^2)^2}B_3](x^1)^4 + \cdots$$

Obţinem

$$\begin{gathered} B_2 = \frac{1}{(a_2^2)^3}[-(a_2^2)^2a_{11}^2 + 2a_1^2a_2^2a_{12}^2 - (a_1^2)^2a_{22}^2],\ B_3 = \frac{2}{(a_2^2)^2}(-a_2^2a_{12}^2 + a_1^2a_{22}^2)B_2, \\ B_4 = \frac{1}{(a_2^2)^2}[-a_2^2a_{22}^2B_2^2 + 2(a_1^2a_{22}^2 - a_2^2a_{12}^2)B_3], \ldots \end{gathered} \tag{2.40}$$

Substituind (2.39) în partea dreaptă a ecuaţiei diferenţiale critice (2.35) avem

$$a_{11}^1(x^1)^2 + 2a_{12}^1x^1x^2 + a_{22}^1(x^2)^2 = A_2(x^1)^2 + A_3(x^1)^3 + A_4(x^1)^4 + \cdots,$$

sau în formă desfăşurată

$$a_{11}^1(x^1)^2 + 2a_{12}^1x^1[-\frac{a_1^2}{a_2^2}x^1 + B_2(x^1)^2 + B_3(x^1)^3 + B_4(x^1)^4 + \cdots] +$$

$$+a_{22}^1[-\frac{a_1^2}{a_2^2}x^1 + B_2(x^1)^2 + B_3(x^1)^3 + B_4(x^1)^4 + \cdots]^2 = A_2(x^1)^2 + A_3(x^1)^3 + A_4(x^1)^4 + \cdots$$

De aici obţinem

$$A_2 = \frac{1}{(a_2^2)^2}[(a_2^2)^2 a_{11}^1 - 2a_1^2 a_2^2 a_{12}^1 + (a_1^2)^2 a_{22}^1],$$
$$A_3 = \frac{2}{a_2^2}(a_2^2 a_{12}^1 - a_1^2 a_{22}^1)B_2, \; A_4 = \frac{2}{a_2^2}(a_2^2 a_{12}^1 - a_1^2 a_{22}^1)B_3 + a_{22}^1 B_2^2, \; \dots \tag{2.41}$$

Conform Teoremei 2.3, pentru a determina stabilitatea mişcării neperturbate descrisă de sistemul (2.35), este necesar de cercetat expresiile (2.41).

În continuare vom introduce următoarele notaţii:

$$P = (a_2^2)^2 a_{11}^1 - 2a_1^2 a_2^2 a_{12}^1 + (a_1^2)^2 a_{22}^1, \;\; Q = (a_2^2)^2 a_{11}^2 - 2a_1^2 a_2^2 a_{12}^2 + (a_1^2)^2 a_{22}^2,$$
$$R = (a_2^2)^2 a_{11}^1 - (a_1^2)^2 a_{22}^1, \;\; S = a_1^2 a_{22}^1 - a_2^2 a_{12}^1 \tag{2.42}$$

şi vom ţine cont că din (2.37) rezultă $a_2^2 < 0$.

De aici observăm că stabilitatea mişcării neperturbate poate avea loc doar atunci când A_2=0 din (2.41), i.e. $P = 0$ din (2.42).

Dacă $B_2 = 0$ din (2.40), atunci avem $Q = 0$ din (2.42). Aceasta induce că toţi $B_3, B_4, \dots$ sunt egali cu zero. De aici rezultă că toţi coeficienţii $A_3, A_4, \dots$ sunt zero şi prin urmare stabilitatea mişcării neperturbate va avea loc.

Presupunem că $B_2 \neq 0$ şi fie $S \neq 0$ din (2.42), atunci stabilitatea mişcării neperturbate se va determina de semnul lui A_3 din (2.41).

Dacă $S = 0$ din (2.42), atunci $A_3 = 0$, iar coeficientul A_4 din (2.41), nu va fi zero, dacă $a_{22}^1 \neq 0$. De aceea stabilitatea va fi posibilă doar în cazul când $a_{22}^1 = 0$. Să observăm că în (2.42), din $S = P = 0$ obţinem $R = 0$. De aceea când $a_{22}^1 = 0$, din ultimile egalităţi (2.42), obţinem $a_{11}^1 = a_{12}^1 = 0$.

Pentru formularea rezultatului despre stabilitatea mişcării neperturbate determinate de sistemul mişcării perturbate (2.35), vom avea în vedere inegalitatea (2.37). Am obţinut

Lema 2.4. *Stabilitatea mişcării neperturbate, descrisă de sistemul* (2.35) *cu condiţiile* (2.24), *include toate cazurile posibile în următoarele şase:*

I. $P \neq 0$, atunci mişcarea neperturbată este instabilă;

II. $P = 0, QS > 0$, atunci mişcarea neperturbată este instabilă;

III. $P = 0, QS < 0$, atunci mişcarea neperturbată este stabilă;

IV. $R = S = 0, \;\; a_{22}^1 Q \neq 0$, atunci mişcarea neperturbată este instabilă;

V. $P = Q = 0$, atunci mişcarea neperturbată este stabilă;

VI. $a_{11}^1 = a_{12}^1 = a_{22}^1 = 0$, atunci mişcarea neperturbată este stabilă.

Conform Teoremei 2.3, în ultimile două cazuri mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice *mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. În cazul III, mai mult ca atât, mişcarea neperturbată, este şi asimplotic stabilă [47]. Expresiile P, Q, R, S sunt din* (2.42).

În continuare vom avea nevoie de următoarele expresii formate din invarianţii şi comitanţii sistemului (2.33) aduşi în (2.34):

$$\begin{gathered}E_1 = I_1^2 K_1 - I_1(K_3 + K_4) + K_8,\\ E_2 = I_1^3(K_1^2 - K_7) + 2I_1^2(K_1K_4 - 2K_1K_3 - K_{13}) + 2I_1(I_5K_2 + 2K_3^2 - K_4^2) +\\ +4K_8(K_4 - K_3) + 2I_2K_{12}, \quad E_3 = I_2K_1 + I_1(K_4 - K_3) - K_8,\\ E_4 = I_1(K_{11} - K_1K_2) + K_2(K_4 - K_3), \quad E_5 = K_{11} - I_1K_5.\end{gathered} \tag{2.43}$$

Lema 2.5. *În cazul egalităţii invariante din* (2.24)*, sistemul* (2.33)*, printr-o transformare centroafină, poate fi adus la forma*

$$\frac{dx^1}{dt} = 0, \quad \frac{dx^2}{dt} = a_\alpha^2 x^\alpha + a_{\alpha\beta}^2 x^\alpha x^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{2.44}$$

dacă şi numai dacă satisface condiţia

$$E_5 \equiv 0, \tag{2.45}$$

unde E_5 este din (2.43).

Demonstraţie. Egalitatea (2.24), pentru sistemul (2.33), ne permite să scriem

$$\frac{a_1^1}{a_1^2} = \frac{a_2^1}{a_2^2} = r. \tag{2.46}$$

Notăm minorii matricei coeficienţilor membrilor drepţi ai sistemului (2.33) prin Δ_{ij}, unde i şi j reprezintă numărul coloanelor acestei matrici, pe care sunt construiţi minorii daţi. Atunci

$$E_5 = \Delta_{13}(x^1)^3 + (\Delta_{23} + 2\Delta_{14})(x^1)^2x^2 + (\Delta_{15} + 2\Delta_{24})x^1(x^2)^2 + \Delta_{25}(x^2)^3.$$

Cu ajutorul acestor expresii şi a condiţiilor (2.45)–(2.46) avem

$$\frac{a_{11}^1}{a_{11}^2} = \frac{a_{12}^1}{a_{12}^2} = \frac{a_{22}^1}{a_{22}^2} = r. \tag{2.47}$$

Luând în consideraţie (2.46)–(2.47) transformarea centroafină $\bar{x}^1 = x^1 - rx^2$, $\bar{x}^2 = x^2$ aduce sistemul (2.33) la forma (2.43). Lema 2.5 este demonstrată.

Teorema 2.4. *Dacă pentru sistemul diferenţial a mişcării perturbate* (2.33) *se satisfac condiţiile invariante* (2.24)*, atunci stabilitatea mişcării neperturbate descrisă de sistemul de mai sus, include toate cazurille posibile în următoarele şase:*

I. $E_1 \not\equiv 0$*, atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $E_1 \equiv 0,\ \ E_2 > 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

III. $E_1 \equiv 0,\ \ E_2 < 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IV. $E_3 \equiv 0,\ \ E_4E_5 \not\equiv 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

V. $E_4 \equiv 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VI. $E_5 \equiv 0,$ *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimile două cazuri mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. În cazul III, mai mult ca atât, mişcarea neperturbată, este şi asimptotic stabilă. Expresiile E_i $(i = \overline{1,5})$ *sunt din* (2.43).

Demonstraţie. Să observăm că expresiile (2.43), pentru sistemul (2.35), cu condiţia (2.37), se exprimă prin (2.42) în felul următor:

$$\begin{gathered} E_1 = Px^1, \ \ E_2 = 4S[Q(x^1)^2 - Px^1x^2], \\ E_3 = Rx^1 - 2a_2^2Sx^2, \ \ E_4 = -Q(x^1)^3 + P(x^1)^2x^2. \end{gathered} \tag{2.48}$$

De aici, dacă vom pune $E_3 \equiv 0$, atunci cu ajutorul polinoamelor R, S din (2.42), obţinem pentru E_5 din (2.43), expresia $E_5 = -a_2^2a_{22}^1(\frac{a_1^2}{a_2^2}x^1 + x^2)^3$. Utilizând ultima afirmaţie, expresiile (2.44) şi împreună cu Lemele 2.4 şi 2.5, obţinem cazurile I-VI din teorema examinată. Vom menţiona că comitantul E_2 din (2.43) implicat în cazurile II şi III ale Teoremei 2.4 este par în raport cu x^1 şi x^2 şi are ponderea [12] egală cu zero. Aceasta ne asigură că orice transformare centroafină nu-i poate schimba semnul. Teorema 2.4 este demonstrată.

Remarca 2.5. *Din Teorema 2.4 se obţin condiţiile pentru exemplul 2 a lui Lyapunov [44] (§32), punând* $a_1^1 = a_2^1 = 0,\ a_1^2 = k,\ a_2^2 = -1,\ a_{11}^1 = a,\ a_{12}^1 = \frac{1}{2}b,\ a_{22}^1 = c,\ a_{11}^2 = l,$ $a_{12}^2 = \frac{1}{2}m,\ a_{22}^2 = n$ şi $x^1 = x,\ x^2 = y$. *Această Teoremă 2.4 ne exprimă o generalizare invariantă a condiţiilor de stabilitate sau instabilitate a mişcării neperturbate descrisă de sistemul general* (2.33)*, ce conţine un caz particular, exemplul 2 a lui Lyapunov [44] (§32).*

2.5. Sistemul critic de tip Lyapunov cu neliniarităţi cubice

Vom examina sistemul diferenţial al mişcării perturbate cu neliniarităţi polinomiale de forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3, \\ \frac{dy}{dt} &= ex + fy + tx^3 + 3ux^2y + 3vxy^2 + wy^3, \end{aligned} \tag{2.49}$$

unde $c, d, e, f, p, q, r, s, t, u, v, w$ sunt coeficienţi reali arbitrari.

Similar cazului precedent, când ecuaţia caracteristică a sistemului (2.49) posedă o rădăcină nulă, iar cealaltă este negativă, i.e. se satisfac condiţiile (2.24), atunci acest sistem poate fi adus printr-o transformare centroafină la forma sa critică

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3, \\ \frac{dy}{dt} &= ex + fy + tx^3 + 3ux^2y + 3vxy^2 + wy^3. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Conform (2.32) scriem ecuaţia

$$ex + fy + tx^3 + 3ux^2y + 3vxy^2 + wy^3 = 0. \tag{2.51}$$

Deoarece conform (2.23)–(2.24) pentru sistemul (2.50) avem $I_1 = f < 0$, atunci din ultima relaţie, îl exprimăm pe y sub forma

$$y = -\frac{e}{f}x - \frac{t}{f}x^3 - 3\frac{u}{f}x^2y - 3\frac{v}{f}xy^2 - \frac{w}{f}y^3. \tag{2.52}$$

Vom căuta y ca o funcţie olomorfă de x. Atunci putem scrie

$$y = -\frac{e}{f}x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + \cdots \tag{2.53}$$

Înlocuind (2.53) în (2.52) şi egalând, în relaţia primită, expresiile de pe lângă aceleaşi puteri a lui x avem

$$\begin{gathered} B_i = 0 \ (i = 2n, \forall n \in \mathbb{N}),\ B_3 = -\frac{t}{f} + 3\frac{eu}{f^2} - 3\frac{e^2v}{f^3} + \frac{e^3w}{f^4}, \\ B_5 = -3(\frac{u}{f} - 2\frac{ev}{f^2} + \frac{e^2w}{f^3})B_3,\ B_7 = -3[(\frac{v}{f} - \frac{ew}{f^2})B_3 - 3(\frac{u}{f} - 2\frac{ev}{f^2} + \frac{e^2w}{f^3})^2]B_3, \\ B_9 = -[\frac{w}{f}B_3^3 + 6(\frac{v}{f} - \frac{ew}{f^2})B_3B_5 + 3(\frac{u}{f} - 2\frac{ev}{f^2} + \frac{e^2w}{f^3})B_7],\ \ldots \end{gathered} \tag{2.54}$$

Introducând (2.53) în partea dreaptă a ecuaţiei diferenţiale critice (2.50) obţinem

$$px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3 =$$

$$= A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + A_{11}x^{11} + \cdots$$

De aici, luând în consideraţie (2.53) şi (2.54) avem

$$\begin{gathered} A_i = 0 \ (i = 2n, \forall n \in \mathbb{N}), \ A_3 = p - 3\frac{eq}{f} + 3\frac{e^2r}{f^2} - \frac{e^3s}{f^3}, \\ A_5 = 3(q - 2\frac{er}{f} + \frac{e^2s}{f^2})B_3, \ A_7 = 3[(r - \frac{es}{f})B_3^2 + (q - 2\frac{er}{f} + \frac{e^2s}{f^2})B_5], \\ A_9 = sB_3^3 + 6(r - \frac{es}{f})B_3B_5 + 3(q - 2\frac{er}{f} + \frac{e^2s}{f^2})B_7, \\ A_{11} = 3[sB_3^2B_5 + 2(r - \frac{es}{f})B_3B_7 + (r - \frac{es}{f})B_5^2 + (q - 2\frac{er}{f} + \frac{e^2s}{f^2})B_9], \ \ldots \end{gathered} \tag{2.55}$$

Vom introduce notaţiile

$$\begin{gathered} T = f^3p - 3ef^2q + 3e^2fr - e^3s, \quad U = -f^3t + 3ef^2u - 3e^2fv + e^3w, \\ V = f^2q - 2efr + e^2s, \quad W = fr - es. \end{gathered} \tag{2.56}$$

Atunci, din (2.54)–(2.55), ţinând cont de aceste notaţii obţinem

$$\begin{gathered} A_3 = \frac{1}{f^3}T, \ \ B_3 = \frac{1}{f^4}U, \ \ A_5 = \frac{3}{f^2}VB_3, \ \ A_7 = 3(\frac{1}{f}WB_3^2 + \frac{1}{f^2}VB_5), \\ A_9 = sB_3^3 + \frac{6}{f}WB_3B_5 + \frac{3}{f^2}VB_7, \ \ldots \end{gathered} \tag{2.57}$$

Utilizând Teorema 2.3 şi expresiile (2.56)–(2.57), având în vedere că $I_1 = f < 0$, obţinem

Lema 2.6. *Stabilitatea mişcării neperturbate descrisă de sistemul mişcării perturbate* (2.50), *este descrisă de următoarele zece cazuri posibile:*

I. $T < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $T > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

III. $T = 0$, $UV > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

IV. $T = 0$, $UV < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

V. $T = V = 0$, $U \neq 0$, $W < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VI. $T = V = 0$, $U \neq 0$, $W > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VII. $T = V = W = 0$, $sU > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VIII. $T = V = W = 0$, $sU < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IX. $T = U = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

X. $p = q = r = s = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimile două cazuri, conform Teoremei 2.3, mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, în cazurile II, IV, VI, VIII această mişcare neperturbată este şi asimptotic stabilă [47]. Expresiile T, U, V, W *sunt din* (2.56).

Demonstraţie. Dacă $A_3 > 0$, atunci din (2.57) avem $\frac{T}{f^3} > 0$. Luând în consideraţie că $f < 0$, rezultă că $T < 0$. Conform Teoremei 2.3 avem realizarea cazului I. Cazul II se analizează în mod similar.

Presupunem că în (2.56) avem $U \neq 0$. Atunci după cum rezultă din (2.57) obţinem $B_3 \neq 0$.

Dacă $A_3 = 0$, i.e. $T = 0$, atunci stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate se determină conform (2.57) de semnul expresiei UV. Atunci utilizând Teorema 2.3 obţinem cazurile III şi IV.

Dacă $T = A_5 = 0$, i.e. $V = 0$, atunci stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate se determină conform (2.57) de semnul expresiei $\frac{U^2W}{f^9}$. Luând în consideraţie că $f < 0$ conform Teoremei 2.3 avem cazurile V şi VI.

Dacă $A_3 = A_5 = A_7 = 0$ $(T = V = W = 0)$, atunci stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate se determină de semnul expresiei A_9, i.e. $\frac{sU}{f^{12}}$. De aici, conform Teoremei 2.3, avem cazurile VII şi VIII. Dacă $T = U = 0$, atunci rezultă că toţi A_k $(k \geq 3)$ sunt zero. Conform Teoremei 2.3 avem cazul IX. Dacă $U \neq 0$ şi $T = V = W = s = 0$, atunci din (2.56) obţinem cazul X. Lema 2.6 este demonstrată.

Reeşind din bazele polinomiale ale comitanţilor şi invarianţilor centroafini ai sistemului (2.49), aduse în [67], putem scrie algebrele Sibirschi cu generatorii

$$S_{1,3} = \{J_1, J_2, \ldots, J_{20}, K_1, K_2, \ldots, K_{13}, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{14}\}, \quad SI_{1,3} = \{J_1, J_2, \ldots, J_{20}\},$$

unde J_i, K_j şi Q_k sunt invarianţii şi comitanţii acestor algebre. Generatorii relaţiilor de definiţie (sizigiilor) nu sunt cunoscute.

Pentru sistemul (2.49) avem notaţiile

$$\begin{aligned} &x^1 = x,\ a_1^1 = c,\ a_2^1 = d,\ a_{111}^1 = p,\ a_{112}^1 = q,\ a_{122}^1 = r,\ a_{222}^1 = s,\\ &x^2 = y,\ a_1^2 = e,\ a_2^2 = f,\ a_{111}^2 = t,\ a_{112}^2 = u,\ a_{122}^2 = v,\ a_{222}^2 = w. \end{aligned} \tag{2.58}$$

În continuare vom avea nevoie de următorii generatori ai algebrelor Sibirschi $S_{1,3}$ şi $SI_{1,3}$, care în formă tensorială se vor scrie

$$\begin{gathered} J_1 \equiv I_1 = a_\alpha^\alpha,\ \ J_2 \equiv I_2 = a_\beta^\alpha a_\alpha^\beta,\ \ J_3 = a_\pi^\alpha a_{k\alpha\beta}^\beta \varepsilon^{\pi k},\ \ J_6 = a_\pi^\alpha a_\gamma^\beta a_{k\alpha\beta}^\gamma \varepsilon^{\pi k},\\ K_1 = a_\beta^\alpha x^\beta x^\gamma \varepsilon_{\alpha\gamma},\ \ K_2 = a_{\alpha\beta\gamma}^\alpha x^\beta x^\gamma,\ \ K_3 = a_{\alpha\beta\gamma}^\pi x^\alpha x^\beta x^\gamma x^k \varepsilon_{\pi k},\\ Q_1 = a_\alpha^\pi a_{\beta\gamma\delta}^k x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta \varepsilon_{\pi k},\ \ Q_2 = a_\beta^\alpha a_{\alpha\gamma\delta}^\beta x^\gamma x^\delta,\\ Q_3 = a_\gamma^\alpha a_{\alpha\beta\delta}^\beta x^\gamma x^\delta,\ \ Q_4 = a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta a_{\alpha\beta\eta}^\gamma x^\delta x^\eta. \end{gathered} \tag{2.59}$$

Cu ajutorul acestor generatori vom forma următoarele expresii invariante:

$$\begin{gathered} F_1 = K_1(J_6 - J_1J_3) + J_1[J_1^2K_2 - J_1(Q_2+Q_3)+Q_4], \quad F_2 = J_6 - J_1J_3, \\ F_3 = K_1[J_3K_1 - J_1(J_1K_2 + 2Q_2 - Q_3) + Q_4] + J_1^2(J_1K_3 + Q_1), \\ F_4 = J_1K_2 - Q_2, \quad F_5 = Q_1. \end{gathered} \tag{2.60}$$

Lema 2.7. *În cazul egalităţii invariante din* (2.24), *sistemul* (2.49), *printr-o transformare centroafină, poate fi adus la forma*

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = ex + fy + tx^3 + 3ux^2y + 3vxy^2 + wy^3,$$

dacă şi numai dacă se satisface condiţia $F_5 \equiv 0$, *unde* F_5 *este din* (2.60).

Demonstraţia Lemei 2.7 este similară demonstraţiei Lemei 2.6. Aici se utilizează faptul că F_5 din (2.60), pentru sistemul (2.49), are expresia

$$\begin{gathered} F_5 = \Delta_{13}(x^1)^4 + (\Delta_{23} + 3\Delta_{14})(x^1)^3x^2 + 3(\Delta_{15} + \Delta_{24})(x^1)^2(x^2)^2 + \\ +(\Delta_{16} + 3\Delta_{25})x^1(x^2)^3 + \Delta_{26}(x^2)^4, \end{gathered}$$

unde Δ_{ij} sunt minorii matricei coeficienţilor membrilor drepţi ai sistemului (2.49), construiţi pe coloanele i şi j ale acestei matrici.

Teorema 2.5. *Dacă pentru sistemul diferenţial al mişcării perturbate*

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma \quad (j, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$$

se satisfac condiţiile $J_1^2 - J_2 = 0$, $J_1 < 0$, *atunci stabilitatea mişcării neperturbate, descrisă de sistemul menţionat mai sus, include toate cazurile posibile în următoarele zece:*

I. $F_1 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $F_1 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

III. $F_1 \equiv 0$, $F_2F_3 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

IV. $F_1 \equiv 0$, $F_2F_3 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

V. $F_1 \equiv 0$, $F_2 = 0$, $F_3 \not\equiv 0$, $F_4 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VI. $F_1 \equiv 0$, $F_2 = 0$, $F_3 \not\equiv 0$, $F_4 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VII. $F_1 \equiv 0$, $F_2 = 0$, $F_4 \equiv 0$, $F_3F_5 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VIII. $F_1 \equiv 0$, $F_2 = 0$, $F_4 \equiv 0$, $F_3F_5 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IX. $F_3 \equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

X. $F_5 \equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimile două cazuri mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate *mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, în cazurile $II, IV, VI, VIII$ această mişcare neperturbată este şi asimptotic stabilă. Expresiile F_i $(i = \overline{1,5})$ sunt din* (2.60).

Demonstraţie. Să observăm că primele trei expresii din (2.60), pentru sistemul critic (2.50), cu notaţiile (2.58), au următoarele expresii:

$$F_1 = Tx^2, \quad F_2 = V, \quad F_3 = Ux^4 + Tx^3y. \tag{2.61}$$

De aici, dacă vom pune $F_1 \equiv 0,\ F_2 = 0$, atunci cu ajutorul polinoamelor T, V, W, din (2.56), pentru expresia F_4 din (2.60), vom obţine $F_4 = W(\frac{e}{f}x + y)^2$. Utilizând expresiile (2.61) şi ultima afirmaţie împreună cu Lemele 2.6 şi 2.7, obţinem cazurile I-X din teorema examinată. Vom menţiona că comitanţii F_1, F_2F_3, F_4, F_3F_5, din (2.60), implicaţi în cazurile I-VIII ale Teoremei 2.5, sunt de grad par în raport cu x şi y şi au ponderele [12] respectiv egale cu $0, 0, 0, -2$. Aceasta ne asigură că orice transformare centroafină nu le poate schimba semnul. Teorema 2.5 este demonstrată.

2.6. Sistemul critic de tip Lyapunov cu neliniarităţi de gradul patru

Vom examina sistemul diferenţial al mişcării perturbate cu neliniarităţi polinomiale, de forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + gx^4 + 4hx^3y + 6kx^2y^2 + 4lxy^3 + my^4, \\ \frac{dy}{dt} &= ex + fy + nx^4 + 4px^3y + 6qx^2y^2 + 4rxy^3 + sy^4, \end{aligned} \tag{2.62}$$

unde $c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, p, q, r, s$ sunt coeficienţi reali arbitrari.

Similar cazurilor precedente, când ecuaţia caracteristică a sistemului (2.62) posedă o rădăcină nulă, iar cealaltă este negativă, i.e. se satisfac condiţiile (2.24), atunci acest sistem poate fi adus, printr-o transformare centroafină, la forma sa critică

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= gx^4 + 4hx^3y + 6kx^2y^2 + 4lxy^3 + my^4, \\ \frac{dy}{dt} &= ex + fy + nx^4 + 4px^3y + 6qx^2y^2 + 4rxy^3 + sy^4. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Conform Teoremei 2.3 analizăm ecuaţia

$$ex + fy + nx^4 + 4px^3y + 6qx^2y^2 + 4rxy^3 + sy^4 = 0. \tag{2.64}$$

Deoarece pentru sistemul (2.62) din (2.23)–(2.24) avem $I_1 = f < 0$, atunci din ultima relaţie, îl exprimăm pe y sub forma

$$y = -\frac{e}{f}x - \frac{n}{f}x^4 - 4\frac{p}{f}x^3y - 6\frac{q}{f}x^2y^2 - 4\frac{r}{f}xy^3 - \frac{s}{f}y^4. \tag{2.65}$$

Vom căuta y ca o funcţie olomorfă de x. Atunci putem scrie

$$
\begin{gathered}
y=-\frac{e}{f}x+B_2x^2+B_3x^3+B_4x^4+B_5x^5+B_6x^6+B_7x^7+B_8x^8+B_9x^9+\\
+B_{10}x^{10}+B_{11}x^{11}+B_{12}x^{12}+B_{13}x^{13}+B_{14}x^{14}+B_{15}x^{15}+B_{16}x^{16}+\cdots
\end{gathered}
\tag{2.66}
$$

Înlocuind (2.66) în (2.65) şi egalând în relaţia primită expresiile de pe lângă aceleaşi puteri ale lui x avem

$$
\begin{gathered}
B_i=0\ (i=2,3,5,6,8,9,\ldots),\ \ B_4=-(\frac{n}{f}-4\frac{ep}{f^2}+6\frac{e^2q}{f^3}-4\frac{e^3r}{f^4}+\frac{e^4s}{f^5}),\\
B_7=-4(\frac{p}{f}-3\frac{eq}{f^2}+3\frac{e^2r}{f^3}-\frac{e^3s}{f^4})B_4,\\
B_{10}=-2[3(\frac{q}{f}-2\frac{er}{f^2}+\frac{e^2s}{f^3})B_4^2+2(\frac{p}{f}-3\frac{eq}{f^2}+3\frac{e^2r}{f^3}-\frac{e^3s}{f^4})B_7],\\
B_{13}=-4[(\frac{r}{f}-\frac{es}{f^2})B_4^3+3(\frac{q}{f}-2\frac{er}{f^2}+\frac{e^2s}{f^3})B_4B_7+(\frac{p}{f}-3\frac{eq}{f^2}+3\frac{e^2r}{f^3}-\frac{e^3s}{f^4})B_{10}],\\
B_{16}=-[\frac{s}{f}B_4^4+12(\frac{r}{f}-\frac{es}{f^2})B_4^2B_7+6(\frac{q}{f}-2\frac{er}{f^2}+\frac{e^2s}{f^3})(2B_4B_{10}+B_7^2)+\\
+4(\frac{p}{f}-3\frac{eq}{f^2}+3\frac{e^2r}{f^3}-\frac{e^3s}{f^4})B_{13}],\ \ldots
\end{gathered}
\tag{2.67}
$$

Introducând (2.66) în partea dreaptă a ecuaţiei diferenţiale critice din (2.63) obţinem

$$
\begin{gathered}
gx^4+4hx^3y+6kx^2y^2+4lxy^3+my^4=A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5+A_6x^6+\\
+A_7x^7+A_8x^8+A_9x^9+A_{10}x^{10}+A_{11}x^{11}+A_{12}x^{12}+A_{13}x^{13}+A_{14}x^{14}+A_{15}x^{15}+A_{16}x^{16}+\cdots
\end{gathered}
$$

De aici, luând în consideraţie (2.66) şi (2.67) avem

$$
\begin{gathered}
A_i=0\ (i=2,3,5,6,8,9,\ldots),\ \ A_4=g-4\frac{eh}{f}+6\frac{e^2k}{f^2}-4\frac{e^3l}{f^3}+\frac{e^4m}{f^4},\\
A_7=4(h-3\frac{ek}{f}+3\frac{e^2l}{f^2}-\frac{e^3m}{f^3})B_4,\\
A_{10}=2[3(k-2\frac{el}{f}+\frac{e^2m}{f^2})B_4^2+2(h-3\frac{ek}{f}+3\frac{e^2l}{f^2}-\frac{e^3m}{f^3})B_7],\\
A_{13}=4[(l-\frac{em}{f})B_4^3+3(k-2\frac{el}{f}+\frac{e^2m}{f^2})B_4B_7+(h-3\frac{ek}{f}+3\frac{e^2l}{f^2}-\frac{e^3m}{f^3})B_{10}],\\
A_{16}=mB_4^4+12(l-\frac{em}{f})B_4^2B_7+6(k-2\frac{el}{f}+\frac{e^2m}{f^2})(2B_4B_{10}+B_7^2)+\\
+4(h-3\frac{ek}{f}+3\frac{e^2l}{f^2}-\frac{e^3m}{f^3})B_{13},\ \ldots
\end{gathered}
\tag{2.68}
$$

Vom introduce notaţiile

$$
\begin{gathered}
A=f^4g-4ef^3h+6e^2f^2k-4e^3fl+e^4m,\\
B=-f^4n+4ef^3p-6e^2f^2q+4e^3fr-e^4s,\\
C=f^3h-3ef^2k+3e^2fl-e^3m,\ \ D=f^2k-2efl+e^2m,\ \ E=fl-em.
\end{gathered}
\tag{2.69}
$$

Atunci din (2.67)–(2.68), ţinând cont de aceste notaţii obţinem

$$A_4 = \frac{1}{f^4}A, \quad B_4 = \frac{1}{f^5}B, \quad A_7 = \frac{4}{f^8}BC, \quad A_{10} = 2(\frac{3}{f^{12}}B^2D + \frac{2}{f^3}CB_7),$$
$$A_{13} = 4(\frac{1}{f^{16}}B^3E + \frac{3}{f^2}DB_4B_7 + \frac{1}{f^3}CB_{10}), \tag{2.70}$$
$$A_{16} = mB_4^4 + \frac{12}{f}EB_4^2B_7 + \frac{6}{f^2}D(2B_4B_{10} + B_7^2) + \frac{4}{f^3}CB_{13}, \ \ldots$$

Utilizând Teorema 2.3, expresiile (2.69) şi având în vedere că $I_1 = f < 0$, obţinem

Lema 2.8. *Stabilitatea mişcării neperturbate, descrisă de sistemul mişcării perturbate* (2.63), *include toate cazurile posibile în următoarele nouă:*

I. $A \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $A = 0, \ BC > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

III. $A = 0, \ BC < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IV. $A = C = 0, \ BD \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

V. $A = C = D = 0, \ BE > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VI. $A = C = D = 0, \ BE < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VII. $A = C = D = E = 0, \ mB \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VIII. $A = B = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IX. $g = h = k = l = m = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimile două cazuri, conform Teoremei 2.3, mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, în cazurile III, VI această mişcare neperturbată este şi asimptotic stabilă [47]. Expresiile A, B, C, D, E *sunt din* (2.69).

Demonstraţie. Dacă $A_4 \neq 0$, atunci din (2.70) avem $A \neq 0$ (luând în consideraţie că $I_1 = f < 0$). Conform Teoremei 2.3 obţinem realizarea cazului I.

Presupunem în (2.69) că $B \neq 0$. Atunci după cum rezultă din (2.70) avem $B_4 \neq 0$.

Dacă $A_4 = 0$, i.e. $A = 0$, atunci stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate se determină conform (2.70) de semnul expresiei A_7, sau ce este acelaşi lucru, semnul produsului BC. Utilizând Teorema 2.3 obţinem cazurile II şi III.

Dacă $A = A_7 = 0$, i.e. $C = 0$, atunci din (2.70) avem $A_{10} = \frac{6}{f^{12}}B^2D$. Dacă $D \neq 0$, atunci obţinem cazul IV (vezi Teorema 2.3).

Presupunem $A = C = D = 0$. Atunci din (2.70) rezultă că $A_{13} \neq 0$ când $BE \neq 0$. Deci stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate se determină de semnul expresiei BE. Utilizând Teorema 2.3 obţinem cazurile V şi VI.

Dacă $A_4 = A_7 = A_{10} = A_{13} = 0$ (cu $B \neq 0$), atunci avem $A = C = D = E = 0$. Dacă $A_{16} \neq 0$, atunci din (2.70) obţinem cazul VII. Dacă $A = B = 0$, atunci rezultă că toţi A_k ($k \geq 4$) sunt zero. Atunci conform Teoremei 2.3 avem cazul VIII. Dacă $A = C = D = E = 0$ şi $m = 0$ din (2.69), cu $f < 0$ avem cazul IX. Lema 2.8 este demonstrată.

În [21] este arătat, dacă φ şi ψ sunt comitanţi omogeni de gradul ρ_1 şi ρ_2, respectiv de la variabilele de fază x şi y a unui sistem diferenţial bidimensional polinomial, atunci transvectantul

$$(\varphi, \psi)^{(j)} = \frac{(\rho_1 - j)(\rho_2 - j)}{\rho_1 ! \rho_2 !} \sum_{i=0}^{j} (-1)^j \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^{j-i} \partial y^i} \frac{\partial^j \psi}{\partial x^i \partial y^{j-i}} \tag{2.71}$$

tot este un comitant al acestui sistem. În lucrările lui Iu. Calin, vezi de exemplu [21], se arată cu ajutorul transvectantului (2.71), pentru sistemul dat, pot fi construiţi toţi generatorii algebrelor Sibirschi a comitanţilor şi invarianţilor oricărui sistem de tipul (2.19).

Notăm omogenităţile din membrii drepţi ai sistemului (2.62) în felul următor:

$$\begin{aligned} &P_1(x,y) = cx + dy, \quad P_4(x,y) = gx^4 + 4hx^3y + 6kx^2y^2 + 4lxy^3 + my^4, \\ &Q_1(x,y) = ex + fy, \quad Q_4(x,y) = nx^4 + 4px^3y + 6qx^2y^2 + 4rxy^3 + sy^4. \end{aligned} \tag{2.72}$$

În conformitate cu [68], scriem următorii comitanţi ai sistemului (2.62)

$$R_i = P_i(x,y)y - Q_i(x,y)x, \quad S_i = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial P_i(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_i(x,y)}{\partial y}\right), \quad (i = 1, 4). \tag{2.73}$$

În continuare vom avea nevoie de următorii comitanţi şi invarianţi din [68], ai sistemului (2.62), construiţi cu ajutorul operaţiilor (2.71) şi (2.73):

$$\begin{gathered} I_1 = S_1, \;\; I_2 = (R_1, R_1)^{(2)}, \;\; K_1 = R_4, \;\; K_2 = S_4, \;\; Q_1 = R_1, \;\; Q_2 = S_1, \\ Q_3 = (R_4, R_1)^{(2)}, \;\; Q_4 = (R_4, R_1)^{(1)}, \;\; Q_5 = (S_4, S_1)^{(2)}, \;\; Q_6 = (S_4, R_1)^{(1)}, \\ Q_{19} = [\![R_4, R_1)^{(2)}, R_1)^{(2)}, \;\; Q_{20} = [\![R_4, R_1)^{(2)}, R_1)^{(1)}, \\ Q_{21} = [\![S_4, R_1)^{(2)}, R_1)^{(1)}, \;\; Q_{43} = [\![R_4, R_1)^{(2)}, R_1)^{(2)}, R_1)^{(1)}, \end{gathered} \tag{2.74}$$

unde semnul "$[\![$" înlocuieşte toate parantezele rotunde ale transvectanţilor, ce sunt necesare să fie scrise în stânga. Considerăm următoarele expresii, formate din comitanţii şi invarianţii din (2.74) pentru sistemul (2.62), ce se vor scrie sub următoarea formă, cu notaţiile:

$$\begin{gathered} H_1 = Q_1[Q_2(15Q_{19} - 8Q_{21}) - 10Q_{43} + 12I_1^2Q_5] + Q_2^2[Q_2(4K_2Q_2 + 5Q_3 - 8Q_6) - 10Q_{20}], \\ H_2 = 5Q_2^3(K_1Q_2 - 2Q_4) + 2Q_1^2(5Q_{19} + 4Q_{21} - 6Q_2Q_5) - 4Q_1Q_2[Q_2(K_2Q_2 - 5Q_3 - 2Q_6) + \\ + 5Q_{20}], \;\; H_3 = Q_2(5Q_{19} - 6Q_{21} + 3Q_2Q_5) - 10Q_{43}, \;\; H_4 = 5I_1Q_5 + 10Q_{19} - 2Q_{21}, \\ H_5 = Q_1, \;\; H_6 = 5I_1K_2 + 10Q_3 - 6Q_6, \;\; H_7 = 8K_2Q_1 - 5K_1Q_2 - 10Q_4. \end{gathered} \tag{2.75}$$

Lema 2.9. *În cazul egalităţii invariante din* (2.24), *sistemul* (2.62), *printr-o transformare centroafină, poate fi adus la forma*

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = ex + fy + nx^4 + 4px^3y + 6qx^2y^2 + 4rxy^3 + sy^4,$$

dacă şi numai dacă se satisface condiţia $H_7 \equiv 0$, *unde* H_7 *este din* (2.75).

Demonstraţia Lemei 2.9 este similară demonstraţiei Lemei 2.6. Aici se utilizează faptul că H_7 din (2.75), pentru sistemul (2.62), are forma

$$H_7 = 10[\Delta_{13}(x^1)^5 + (\Delta_{23} + 4\Delta_{14})(x^1)^4x^2 + 2(2\Delta_{24} + 3\Delta_{15})(x^1)^3(x^2)^2 +$$
$$+ 2(2\Delta_{16} + 3\Delta_{25})(x^1)^2(x^2)^3 + (\Delta_{17} + 4\Delta_{26})x^1(x^2)^4 + \Delta_{27}(x^2)^5],$$

unde Δ_{ij} sunt minorii matricei coeficienţilor membrilor drepţi ai sistemului (2.62), constriţi pe coloanele i şi j ale acestei matrici.

Teorema 2.6. *Dacă pentru sistemul diferenţial al mişcărilor perturbate* (2.62), *se satisfac condiţiile* (2.24), *atunci stabilitatea mişcării neperturbate a sistemului menţionat mai sus, include toate cazurile posibile în următoatele nouă:*

I. $H_1 \not\equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $H_1 \equiv 0,\ H_2H_3 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

III. $H_1 \equiv 0,\ H_2H_3 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IV. $H_1 \equiv H_3 \equiv 0,\ H_2H_4 \not\equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

V. $H_1 \equiv H_3 \equiv H_4 \equiv 0,\ H_2H_5H_6 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VI. $H_1 \equiv H_3 \equiv H_4 \equiv 0,\ H_2H_5H_6 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VII. $H_1 \equiv H_3 \equiv H_4 \equiv H_6 \equiv 0,\ H_2H_7 \not\equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

VIII. $H_2 \equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

IX. $H_7 \equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimile două cazuri, mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, în cazurile III şi VI această mişcare neperturbată este şi asimptotic stabilă [47]. H_i $(i = \overline{1,7})$ *sunt din* (2.75).

Demonstraţie. Să observăm că primele trei expresii din (2.75), pentru sistemul critic (2.63), se exprimă

$$H_1 = 10Ax^3,\ H_2 = 10Bx^5 + 10Ax^4y,\ H_3 = 10Cx. \tag{2.76}$$

În continuare vom utiliza Lema 2.8. Atunci cu ajutorul (2.76), cazul I este evident. Dacă vom pune $H_1 = 0$, atunci din (2.76) obţinem, cu ajutorul Lemei 2.8, cazurile II şi III. În produsul H_2H_3 avem gradul par în raport cu x şi ponderea [14] egală cu 0. De aceea expresia H_2H_3, la orice transformare centroafină, nu-şi schimbă semnul. Cazul IV din Lema 2.8, cu ajutorul expresiilor (2.76), va da egalităţile din cazul IV al Teoremei 2.6. În acest caz avem

$$H_2 = 10Bx^5,\ H_4 = 10D(\frac{e}{f}x + y), \tag{2.77}$$

unde $f = I_1 < 0$. De aceea şi inegalitatea din cazul IV al Teoremei 2.6 se satisface.

Vom examina cazurile V–VI din Teorema 2.6. Deoarece pentru ele avem, din Lema 2.8, $A = C = D = 0$, atunci din (2.76) şi cele de mai sus obţinem egalităţile invariante ale cazurilor examinate. Cu ajutorul acestor egalităţi şi a expresiilor din (2.75) avem

$$H_2 = 10Bx^5,\quad H_5 = -fx(\frac{e}{f}x + y),\quad H_6 = 10E(\frac{e}{f}x + y)^3. \tag{2.78}$$

Atunci obţinem $H_2H_5H_6 = -100fBEx^6(\frac{e}{f}x + y)^4$. Acest produs este par în raport cu variabilele x şi y şi are ponderea -2. Deci, reflectă cazurile V-VI din Teorema 2.6.

Utilizând cazul VII al Lemei 2.8, egalităţile din cazul VII al Teoremei 2.6 se obţin cu ajutorul expresiilor (2.76)–(2.78). Atunci avem

$$H_7 = -10fm(\frac{e}{f}x + y)^4.$$

Cu ajutorul acestei expresii şi a lui H_2 din (2.76), obţinem inegalitatea H_2H_7 din cazul VII al Teoremei 2.6. Cazul VIII al Teoremei 2.6 rezultă din (2.76) utilizând cazul VIII al Lemei 2.8 cu expresiile (2.69)–(2.70). Cazul IX al Teoremei 2.6 rezultă din cazul IX al Lemei 2.8 şi afirmaţia Lemei 2.9. Teorema 2.6 este demonstrată.

2.7. Concluzii la capitolul 2

În capitolul doi au fost supuse cercetării stabilitatea mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale plane. Utilizând teoremele lui Lyapunov, despre stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate în cazul necritic, au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate pentru orice sistem diferenţial cu neliniarităţi polinomiale de orice grad. În cazul critic (când o rădăcină a părţii liniare a ecuaţiei caracteristice este egală cu zero, iar cealaltă este negativă) pentru sistemele plane cu neliniarităţi polinomiale până la gradul patru inclusiv, au fost determinate condiţiile centroafin-invariante pentru toate cazurile posibile de stabilitate sau instabilitate a mişcării neperturbate descrise de aceste sisteme.

Până în prezent, aşa o tratare a stabilităţii mişcării neperturbate cu ajutorul invarianţilor şi comitanţilor algebrelor Sibirschi, nu a fost întâlnită pentru sistemele diferenţiale menţionate mai sus. Deşi aceste sisteme se examinează minuţios din punct de vedere a existenţei dreptelor invariante, a problemei ciclurilor limită, etc.

Ţinând cont de rezultatele obţinute în capitolul doi, deducem următoarele concluzii:

1. Pentru sistemele plane cu neliniarităţi polinomiale de orice grad, au fost obţinute, în cazul necritic, condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de aceste sisteme.

2. Pentru sistemul plan critic cu neliniarităţi pătratice, au fost obţinute toate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate, ce se includ în şase cazuri. Aceste rezultate sunt o generalizare a condiţiilor de stabilitate a mişcării neperturbate pentru un caz particular, descris de un sistem de ecuaţii diferenţiale din exemplul 2 a disertaţiei lui Lyapunov A.M. din [44] (§32).

3. Pentru sistemul plan critic cu neliniarităţi cubice, au fost obţinute toate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate, ce se includ în zece cazuri.

4. Pentru sistemul plan critic cu neliniarităţi de gradul patru, au fost obţinute toate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate, ce se includ în nouă cazuri.

Rezultatele expuse în acest capitol au fost publicate în [51, 52, 54, 56].

3. INVARIANŢI ŞI COMITANŢI ÎN DETERMINAREA STABILITĂŢII MIŞCĂRII NEPERTURBATE ŞI A INTEGRABILITĂŢII SISTEMELOR DIFERENŢIALE TERNARE

3.1. Polinoame centroafin-invariante pentru sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi polinomiale

În această secţiune vom examina sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi polinomiale a mişcării perturbate (vezi, de exemplu, [34] sau [35]) de forma

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{l} a^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} ... x^{\alpha_{m_i}} \quad (j, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m_i} = \overline{1,3}; l < \infty), \tag{3.1}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m_i}}$ este simetric după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală, iar $\Gamma = \{m_1, m_2, ..., m_l\}$ ($m_i \geq 2$) este o mulţime finită de numere naturale diferite.

Împreună cu sistemul (3.1) vom considera grupul centroafin $GL(3, \mathbb{R})$, dat de transformările q:

$$\bar{x}^j = q^j_\alpha x^\alpha \quad (\Delta = det(q^j_\alpha) \neq 0) \quad (j, \alpha = \overline{1,3}). \tag{3.2}$$

Coeficienţii şi variabilele din (3.1) şi (3.2) iau valori din câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$.

Vectorul variabilelor de fază $x = (x^1, x^2, x^3)$ a sistemului (3.1), ce se schimbă după formulele (3.2), în teoria invarianţilor [70] este primit să se numească **contravariant**. Iar vectorul $u = (u_1, u_2, u_3)$, ce se schimbă după formulele $u_r = p^j_r u_j$ $(r, j = \overline{1,3})$, unde $p^r_j q^j_s = \delta^r_s$ este simbolul lui Kroniker, este primit să se numească **covariant**. Orice alt vector $y = (y^1, y^2, y^3)$, ce se transformă după formulele (3.2) se numeşte **cogradient** cu vectorul x.

Să observăm că transformarea (3.2) păstrează forma sistemului (3.1)

$$\frac{d\bar{x}^j}{dt} = \bar{a}^j_\alpha \bar{x}^\alpha + \sum_{i=1}^{l} \bar{a}^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m_i}} \bar{x}^{\alpha_1} \bar{x}^{\alpha_2} \dots \bar{x}^{\alpha_{m_i}} \quad (j, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_i} = \overline{1,3}; l < \infty), \tag{3.3}$$

unde coordonatele vectorului $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ sunt determinate de relaţiile (3.2), iar coeficienţii membrilor drepţi sunt nişte funcţii liniare de la coeficienţii sistemului (3.1) şi raţionale de la parametrii q^j_α ai transformării (3.2).

Vom nota nulţimea coeficienţilor sistemului (3.1) prin a, iar a sistemului (3.3) prin $\bar{a}$.

Definiţia 3.1. *Urmând [70], vom spune că polinomul $\varkappa(x, u, a)$ de la coeficienţii sistemului (3.1) şi coordonatele vectorilor x şi u se numeşte* ***comitant mixt*** *al sistemului (3.1) în raport cu grupul $GL(3, \mathbb{R})$, dacă are loc identitatea*

$$\varkappa(\bar{x}, \bar{u}, \bar{a}) = \Delta^{-g} \varkappa(x, u, a)$$

pentru toţi q din $GL(3,\mathbb{R})$, orice coordonate a vectorilor x şi u, precum şi orice coeficienţi ai sistemului (3.1).

Mărimea g este un număr întreg numit **ponderea comitantului**.

Dacă comitantul mixt $\varkappa$ nu depinde de coordonatele vectorului u, atunci urmând [34], îl vom numi pur şi simplu **comitant**, iar dacă nu depinde de coordonatele vectorului x îl vom numi, conform [70], **contravariant**. Dacă $\varkappa$ nu depinde nici de x, nici de u, atunci îl vom numi **invariant** al sistemului (3.1) în raport cu grupul $GL(3,\mathbb{R})$.

În [34] este arătat că expresiile

$$\begin{gathered}\varkappa_1 = x^\alpha u_\alpha, \quad \varkappa_2 = a^\alpha_\beta x^\beta u_\alpha, \quad \varkappa_3 = a^\alpha_\gamma a^\beta_\alpha x^\gamma u_\beta,\\ \theta_1 = a^\alpha_\alpha, \quad \theta_2 = a^\alpha_\beta a^\beta_\alpha, \quad \theta_3 = a^\alpha_\gamma a^\beta_\alpha a^\gamma_\beta, \quad \delta_4 = a^\alpha_\gamma a^\beta_p a^\gamma_q u_\alpha u_\beta u_r \varepsilon^{pqr}\end{gathered} \tag{3.4}$$

de la coordonatele vectorilor x şi u, precum şi a tensorului a^j_α, formează o baza funcţională a comitanţilor micşti ai sistemului diferenţial neliniar (3.1), unde ε^{pqr} este trivectorul unitate cu coordonatele $\varepsilon^{123} = -\varepsilon^{132} = \varepsilon^{312} = -\varepsilon^{321} = \varepsilon^{231} = -\varepsilon^{213} = 1$ şi $\varepsilon^{pqr} = 0 \ \ (p,q,r = \overline{1,3})$ pentru celelalte cazuri.

Un rol important în studiul sistemelor ternare cu neliniarităţi polinomiale (3.1) îl joacă comitantul

$$\begin{gathered}\sigma_1 = a^\alpha_\mu a^\beta_\delta a^\gamma_\alpha x^\delta x^\mu x^\nu \varepsilon_{\beta\gamma\nu}\\ (\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{132} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{321} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = 1 \text{ şi } \varepsilon_{\beta\gamma\nu} = 0 \ \ (\beta,\gamma,\nu = \overline{1,3}))\end{gathered} \tag{3.5}$$

din [34], care este o integrală particulară a sistemului

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha \quad (j,\alpha = \overline{1,3}) \tag{3.6}$$

de primă aproximaţie ([44], [45]) pentru sistemul (3.1).

3.2. Condiţiile invariante de stabilitate a mişcării neperturbate a sistemelor diferenţiale ternare cu neliniarităţi polinomiale (cazul necritic)

Vom examina sistemul diferenţial ternar (3.6). Ecuaţia caracteristică a sistemului (3.6) are forma

$$\varrho^3 + L_{1,3}\varrho^2 + L_{2,3}\varrho + L_{3,3} = 0, \tag{3.7}$$

unde coeficienţii acestei ecuaţii se exprimă prin invarianţii centroafini (3.4) şi au forma

$$L_{1,3} = -\theta_1, \quad L_{2,3} = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1^2), \ \ L_{3,3} = -\frac{1}{6}(\theta_1^3 - 3\theta_1\theta_2 + 2\theta_3). \tag{3.8}$$

Cu ajutorul teoremelor lui Lyapunov despre stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate şi teorema lui Hurwitz aplicată la Exemplul 2.2 (vezi §2.2) obţinem, că sunt adevărate următoarele teoreme:

Teorema 3.1. *Dacă invarianţii centroafini din* (3.7) – (3.8) *ai sistemului* (3.1) *satisfac inegalităţilor*

$$L_{1,3} > 0, \quad L_{2,3} > 0, \quad L_{1,3}L_{2,3} - L_{3,3} > 0, \tag{3.9}$$

atunci mişcarea neperturbată $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, *pentru sistemul dat, este asimptotic stabilă.*

Teorema 3.2. *Dacă printre expresiile centroafin-invariante* (3.8) *a sistemului* (3.1) *se va găsi cel puţin una din ele mai mare ca zero, atunci mişcarea neperturbată* $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, *a acestui sistem, va fi instabilă.*

3.3. Despre semnificaţia comitantului σ_1 pentru rădăcinile ecuaţiei caracteristice a sistemului diferenţial ternar cu neliniarităţi polinomiale

Examinăm sistemul ternar (3.1). Sistemul de ecuaţii de primă aproximaţie pentru acest sistem are forma (3.6).

Din [34] se cunoaşte următorul rezultat:

Lema 3.1. *Fie în* (3.5) $\sigma_1 \equiv 0$. *Efectuând transformarea centroafină*

$$\bar{x}^1 = x^2, \quad \bar{x}^2 = x^1 + \frac{a_2^3}{a_1^3}x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3$$

în sistemul (3.6) *sau* (3.1), *când* $a_1^3 \neq 0$ *(partea neliniară a sistemului* (3.1) *îşi păstrează forma), atunci coeficienţii sistemului* (3.6) *sau a părţii liniare a sistemului* (3.1) *satisfac uneia din următoarele condiţii:*

$$a_2^1 = a_3^1 = a_1^2 = a_3^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_3^3 = a_2^2; \tag{3.10}$$

$$a_2^1 = a_3^1 = a_1^2 = a_3^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_3^3 = a_1^1; \tag{3.11}$$

$$a_2^1 = a_3^1 = a_1^2 = a_3^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_2^2 = a_1^1; \tag{3.12}$$

$$a_2^1 = a_3^1 = a_1^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_3^2 \neq 0; \;\; a_3^3 = a_1^1; \tag{3.13}$$

$$a_2^1 = a_3^1 = a_1^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_2^2 = a_1^1; \;\; a_3^2 \neq 0; \tag{3.14}$$

$$a_2^1 = a_1^2 = a_3^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_3^1 \neq 0; \;\; a_3^3 = a_2^2; \tag{3.15}$$

$$a_2^1 = a_1^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_3^1 \neq 0; \;\; a_2^2 = a_1^1; \tag{3.16}$$

$$a_1^2 = a_3^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_2^1 \neq 0; \;\; a_3^3 = a_2^2; \tag{3.17}$$

$$a_1^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_2^1 \neq 0; \;\; a_3^2 = \frac{a_3^1(a_2^2 - a_1^1)}{a_2^1}; \;\; a_3^3 = a_1^1; \tag{3.18}$$

$$a_1^3 = a_2^3 = 0; \;\; a_1^2 \neq 0; \;\; a_2^1 = \frac{(a_1^1 - a_3^3)(a_2^2 - a_3^3)}{a_1^2}; \;\; a_3^1 = \frac{a_3^2(a_1^1 - a_3^3)}{a_1^2}; \tag{3.19}$$

$$a_1^2 = a_1^3 = 0; \;\; a_2^3 \neq 0; \;\; a_3^1 = \frac{a_2^1(a_3^3 - a_1^1)}{a_2^3}; \;\; a_3^2 = \frac{(a_1^1 - a_2^2)(a_1^1 - a_3^3)}{a_2^3}. \tag{3.20}$$

Lema 3.2. *Dacă pentru partea liniară a sistemului ternar* (3.1), *cât şi pentru sistemul de primă aproximaţie* (3.6) *avem* $\sigma_1 \equiv 0$, *atunci rădăcinile ecuaţiei caracteristice* (3.7) *ale acestor sisteme sunt reale şi corespund cazurilor* (3.10)–(3.20) *conform tabelului de mai jos*

Tabelul 3.1. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice, cazurilor (3.10) – (3.20)

Cazurile (3.10) – (3.20)	**Rădăcinile ecuaţiei caracteristice** (3.7)
(3.10)	$\varrho_1 = a_1^1; \quad \varrho_{2,3} = a_2^2;$
(3.11)	$\varrho_{1,2} = a_1^1; \quad \varrho_3 = a_2^2;$
(3.12)	$\varrho_{1,2} = a_1^1; \quad \varrho_3 = a_3^3;$
(3.13)	$\varrho_{1,2} = a_1^1; \quad \varrho_3 = a_2^2;$
(3.14)	$\varrho_{1,2} = a_1^1; \quad \varrho_3 = a_3^3;$
(3.15)	$\varrho_1 = a_1^1; \quad \varrho_{2,3} = a_2^2;$
(3.16)	$\varrho_{1,2} = a_1^1; \quad \varrho_3 = a_3^3;$
(3.17)	$\varrho_1 = a_1^1; \quad \varrho_{2,3} = a_2^2;$
(3.18)	$\varrho_{1,2} = a_1^1; \quad \varrho_3 = a_2^2;$
(3.19)	$\varrho_{1,2} = a_3^3; \quad \varrho_3 = a_1^1 + a_2^2 - a_3^3;$
(3.20)	$\varrho_{1,2} = a_1^1; \quad \varrho_3 = -a_1^1 + a_2^2 + a_3^3.$

Remarca 3.1. *Din Lema 3.2 rezultă că ecuaţia caracteristică* (3.1) *poate avea rădăcini imaginare dacă şi numai dacă* σ_1 *din* (3.5) *nu este identic zero.*

3.4. Teorema despre factorul integrant Lie pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi polinomiale

Vom examina sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice, ce se obţine din (3.1) pentru $l = 2$ şi are forma

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \equiv P^j(x) \quad (j, \alpha, \beta = \overline{1,3}), \tag{3.21}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha\beta}$ este simetric după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală, iar $x = (x^1, x^2, x^3)$ este vectorul variabilelor de fază. Expresiile $a^j_\alpha x^\alpha$ formează partea liniară a sistemului (3.21), iar $a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$ – partea pătratică a acestui sistem.

Se cunoaşte că $F(x) = C$ este *integrală primă* a sistemului (3.21) dacă şi numai dacă $\Lambda(F) = 0$, unde

$$\Lambda = P^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (j = \overline{1,3}), \tag{3.22}$$

iar după j se efectuează convoluţia totală.

Sistemul (3.21) posedă două integrale prime funcţional-independente, care formează *integrala generală* a acestui sistem.

Presupunem că sistemul (3.21) admite [69] o algebră Lie comutativă bidimensională de operatori

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\alpha = 1, 2;\ j = \overline{1,3}), \tag{3.23}$$

unde $\xi^i_\alpha(x)$ $(j = \overline{1,3})$ sunt polinoame de la coordonatele vectorului $x = (x^1, x^2, x^3)$. Aceasta înseamnă că coordonatele operatorilor (3.23) satisfac ecuaţiilor determinante

$$\begin{aligned}(\xi^1_\alpha)_{x^1}P^1 + (\xi^1_\alpha)_{x^2}P^2 + (\xi^1_\alpha)_{x^3}P^3 &= \xi^1_\alpha P^1_{x^1} + \xi^2_\alpha P^1_{x^2} + \xi^3_\alpha P^1_{x^3},\\ (\xi^2_\alpha)_{x^1}P^1 + (\xi^2_\alpha)_{x^2}P^2 + (\xi^2_\alpha)_{x^3}P^3 &= \xi^1_\alpha P^2_{x^1} + \xi^2_\alpha P^2_{x^2} + \xi^3_\alpha P^2_{x^3},\\ (\xi^3_\alpha)_{x^1}P^1 + (\xi^3_\alpha)_{x^2}P^2 + (\xi^3_\alpha)_{x^3}P^3 &= \xi^1_\alpha P^3_{x^1} + \xi^2_\alpha P^3_{x^2} + \xi^3_\alpha P^3_{x^3}\ \ (\alpha = 1, 2).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Notăm determinantul coordonatelor operatorilor (3.22)–(3.23) cu

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi^1_1 & \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \xi^3_2 \\ P^1 & P^2 & P^3 \end{vmatrix}. \tag{3.25}$$

Din [69] rezultă că pentru sistemul (3.21) are loc

Teorema 3.3. *Dacă sistemul diferenţial ternar* (3.21) *admite o algebră Lie comutativă bidimensională cu operatorii* (3.23), *atunci funcţia* $\mu = \Delta^{-1}$, *unde* $\Delta \neq 0$ *are forma* (3.25), *este factorul integrant Lie pentru ecuaţiile lui Pfaff*

$$(\xi^3_\alpha P^2 - \xi^2_\alpha P^3)dx^1 + (\xi^1_\alpha P^3 - \xi^3_\alpha P^1)dx^2 + (\xi^2_\alpha P^1 - \xi^1_\alpha P^2)dx^3 = 0 \ \ (\alpha = 1, 2), \tag{3.26}$$

care definesc integrala generală a sistemului (3.21).

Examinăm comitantul sistemului (3.21) din [34] în raport cu grupul centroafin, ce depinde de doi vectori cogradienţi $x = (x^1, x^2, x^3)$ şi $y = (y^1, y^2, y^3)$, forma tensorială a căruia este

$$\eta = a^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma x^\delta y^\mu \varepsilon_{\alpha\delta\mu}. \tag{3.27}$$

În [34] este arătat că are loc

Teorema 3.4. *Fie în* (3.27) $\eta \equiv 0$. *Atunci sistemul* (3.21) *are forma*

$$\frac{dx^j}{dt} = \alpha^j_\alpha x^\alpha + 2x^j(gx^1 + hx^2 + kx^3) \equiv P^j(x) \ \ (j = \overline{1,3}) \tag{3.28}$$

şi îl vom numi sistemul diferenţial ternar de tip Darboux.

În [34] este demonstrată

Teorema 3.5. *Sistemul* (3.28) *posedă* $GL(3,\mathbb{R})$*-integrala particulară invariantă de forma* (3.5), *unde* σ_1 *este comitantul centroafin al sistemului* (3.21) *în raport cu grupul centroafin* $GL(3,\mathbb{R})$.

Remarca 3.2. *Dacă comitantul mixt*

$$\varkappa_2 = a^\alpha_\beta x^\beta u_\alpha \tag{3.29}$$

din [71] a sistemului (3.28) *în raport cu grupul centroafin, ce depinde de coordonatele vectorului contravariant* $x = (x^1, x^2, x^3)$ *şi a vectorului covariant* $u = (u_1, u_2, u_3)$, *nu este identic zero, atunci cel puţin un coeficient al părţii liniare a sistemului* (3.28) *este diferit de zero. În caz contrar din* $\varkappa_2 \equiv 0$ *rezultă* $a^j_\alpha = 0$ $(j, \alpha = \overline{1,3})$, *iar sistemul* (3.28) *se reduce la un sistem pătratic omogen trivial.*

Remarca 3.3. *Dacă comitantul mixt*

$$q_1 = a^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma u_\alpha \tag{3.30}$$

din [34] a sistemului (3.21) *în raport cu grupul centroafin, ce depinde de coordonatele vectorului contravariant* $x = (x^1, x^2, x^3)$ *şi a vectorului covariant* $u = (u_1, u_2, u_3)$, *nu este identic zero, atunci cel puţin un coeficient al părţii pătratice a sistemului* (3.21) *şi prin urmare a sistemului* (3.28) *este diferit de zero. În caz contrar din* $q_1 \equiv 0$ *rezultă* $a^j_{\alpha\beta} = 0$ $(j, \alpha, \beta = \overline{1,3})$, *iar sistemul* (3.21) *şi, prin urmare, sistemul* (3.28) *se reduce la un sistem liniar.*

3.5. Forma Lyapunov a sistemului diferenţial critic ternar cu neliniarităţi pătratice

Reamintim că definiţia sistemului diferenţial critic este dată în §2.3.

Lema 3.3. *Sistemul* (3.21) *este critic dacă şi numai dacă se satisfac condiţiile centroafin invariante*

$$L_{1,3} > 0, \quad L_{2,3} > 0, \quad L_{3,3} = 0, \tag{3.31}$$

unde $L_{i,3}$ $(i = \overline{1,3})$ *sunt din* (3.8).

Demonstraţie. Ecuaţia caracteristică a sistemului (3.21)

$$\begin{vmatrix} a^1_1 - \varrho & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 - \varrho & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

are forma (3.7), unde $L_{i,3}$ $(i = \overline{1,3})$ sunt din (3.8).

Pentru ca (3.7) să posede cel puţin o rădăcină nulă este necesar şi suficient să aibă loc ultima egalitate din (3.31). Atunci ecuaţia (3.7) se va scrie sub forma

$$\varrho^2 + L_{1,3}\varrho + L_{2,3} = 0.$$

Pentru ca această ecuaţie să aibă toate rădăcinile cu părţile reale negative, comform Teoremei lui Hurwitz (vezi exemplul 2.1), este necesar şi suficient să se satisfacă primele două inegalităţi din (3.31). Lema 3.3 este demonstrată.

Urmând A. M. Lyapunov [44] avem

Lema 3.4. *În cazul condiţiilor* (3.31) *sistemul* (3.21), *printr-o transformare centroafină, poate fi adus la forma critică Lyapunov*

$$\begin{gathered}\frac{dx^1}{dt} = a^1_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta,\\ \frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \quad (j = 2,3; \alpha,\beta = \overline{1,3}),\end{gathered} \tag{3.32}$$

unde prima ecuaţie se numeşte ***critică****, iar celelalte două* ***necritice****.*

Demonstraţie. Vom arăta că sistemul de primă aproximaţie (3.6), pentru sistemul (3.21), în condiţiile (3.31), admite o integrală primă liniară (acest lucru este arătat în [44], pentru orice sistem diferenţial multidimensional cu neliniarităţi analitice).

Vom examina această integrală sub forma

$$Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 = C_1 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \tag{3.33}$$

unde A, B, C sunt nişte constante necunoscute, iar C_1 este o constantă arbitrară. Atunci avem

$$a^1_\alpha A x^\alpha + a^2_\alpha B x^\alpha + a^3_\alpha C x^\alpha = 0,$$

de unde, egalând expresiile de pe lângă x^1, x^2, x^3, obţinem

$$\begin{aligned}a^1_1 A + a^2_1 B + a^3_1 C = 0,\\ a^1_2 A + a^2_2 B + a^3_2 C = 0,\\ a^1_3 A + a^2_3 B + a^3_3 C = 0.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Pentru ca acest sistem să admită o soluţie netrivială $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ este necesar şi suficient ca

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 \end{vmatrix} \equiv L_{3,3} = 0,$$

unde $L_{3,3}$ este din (3.8). Această condiţie se conţine în (3.31). Prin urmare, în această situaţie, o integrală de forma (3.33) întotdeauna există pentru sistemul (3.21).

Presupunem că în (3.33) are loc condiţia $A \neq 0$. Atunci, considerând substituţia centroafină

$$\bar{x}^1 = Ax^1 + Bx^2 + Cx^3, \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3 \tag{3.35}$$

avem

$$\frac{d\bar{x}^1}{dt} = A\frac{dx^1}{dt} + B\frac{dx^2}{dt} + C\frac{dx^3}{dt}, \quad \frac{d\bar{x}^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt}, \quad \frac{d\bar{x}^3}{dt} = \frac{dx^3}{dt}$$

sau în virtutea sistemului (3.6), pentru prima egalitate obţinem

$$\frac{d\bar{x}^1}{dt} = (a_1^1A + a_1^2B + a_1^3C)x^1 + (a_2^1A + a_2^2B + a_2^3C)x^2 + (a_3^1A + a_3^2B + a_3^3C)x^3.$$

Luând în consideraţie (3.34), găsim $\frac{d\bar{x}^1}{dt} = 0$, iar celelalte ecuaţii din sistemul (3.6) îşi păstrează forma. Efectuând substituţia (3.35) cu condiţiile (3.31) în (3.21), în mod analog obţinem (3.32), deoarece această substituţie nu schimbă forma părţilor pătratice din sistemul (3.21).

Uşor se poate verifica că în cazul $B \neq 0$ substituţia

$$\bar{x}^1 = Ax^1 + Bx^2 + Cx^3, \quad \bar{x}^2 = x^1, \quad \bar{x}^3 = x^3,$$

în sistemul (3.2), îl aduce la forma (3.32), iar pentru $C \neq 0$ substituţia

$$\bar{x}^1 = Ax^1 + Bx^2 + Cx^3, \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^1$$

asupra sistemului (3.21) are acelaşi efect. Lema 3.4 este demonstrată.

3.6. Sistemul critic ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Lyapunov-Darboux şi condiţiile invariante de stabilitate a mişcării neperturbate

Deoarece la transformarea centroafină nu se schimbă identitatea $\eta \equiv 0$ (vezi (3.27)), atunci conform Lemei 3.4, sistemul (3.28), în cazul condiţiilor (3.31), poate fi adus la următoarea formă critică:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= 2x^1(gx^1 + hx^2 + kx^3), \\ \frac{dx^j}{dt} &= a_\alpha^j x^\alpha + 2x^j(gx^1 + hx^2 + kx^3) \ \ (j = 2,3; \alpha = \overline{1,3}). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Acest sistem îl vom numi *critic de tip Lyapunov-Darboux.*

Pentru simplitate vom introduce următoarele notaţii:

$$x = x^1, \ \ y = x^2, \ \ z = x^3, \ \ a_1^2 = p, \ \ a_2^2 = q, \ \ a_3^2 = r, \ \ a_1^3 = s, \ \ a_2^3 = m, \ \ a_3^3 = n. \tag{3.37}$$

Atunci sistemul (3.36) va primi forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x(gx+hy+kz),\\ \frac{dy}{dt} &= px+qy+rz+2y(gx+hy+kz),\\ \frac{dz}{dt} &= sx+my+nz+2z(gx+hy+kz).\end{aligned} \tag{3.38}$$

unde $g, h, k, m, n, p, q, r, s$ sunt coeficienţi reali arbitrari.

Analizăm ecuaţiile necritice

$$\begin{aligned} px+qy+rz+2y(gx+hy+kz) &= 0,\\ sx+my+nz+2z(gx+hy+kz) &= 0.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Deoarece în sistemul (3.38), conform condiţiilor (3.31), avem $L_{2,3} = nq - mr > 0$, atunci putem presupune, fără a pierde din generalitate, că $nq \neq 0$.

Din prima relaţie (3.39), îl exprimăm pe y, iar din a doua pe z. Obţinem

$$\begin{aligned} y &= -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q}z - \frac{2}{q}y(gx+hy+kz),\\ z &= -\frac{s}{n}x - \frac{m}{n}y - \frac{2}{n}z(gx+hy+kz).\end{aligned} \tag{3.40}$$

Vom căuta pe y şi z ca funcţii olomorfe de x. Atunci putem scrie

$$\begin{aligned} y(x) &= A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots,\\ z(x) &= B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + \cdots\end{aligned} \tag{3.41}$$

Întroducând (3.41) în (3.40), obţinem

$$\begin{gathered} A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q}(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 +\\ + B_4x^4 + B_5x^5 + \cdots) - \frac{2}{q}(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots)[gx +\\ + h(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots) +\\ + k(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + \cdots)],\\ B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + \cdots = -\frac{s}{n}x - \frac{m}{n}(A_1x +\\ + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots) - \frac{2}{n}(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 +\\ + B_5x^5 + \cdots)gx + h(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots) +\\ + k(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + \cdots)].\end{gathered}$$

De aici avem

$$A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots = -\frac{p + rB_1}{q}x -$$
$$-\frac{2gA_1 + rB_2 + 2hA_1^2 + 2kA_1B_1}{q}x^2 - \frac{2gA_2 + rB_3 + 4hA_1A_2 + 2kA_1B_2 + 2kA_2B_1}{q}x^3 -$$
$$-\frac{2gA_3 + rB_4 + 4hA_1A_3 + 2kA_1B_3 + 2hA_2^2 + 2kA_2B_2 + 2kA_3B_1}{q}x^4 -$$
$$-\frac{2gA_4 + rB_5 + 4hA_1A_4 + 2kA_1B_4 + 4hA_2A_3 + 2kA_2B_3 + 2kA_3B_2 + 2kA_4B_1}{q}x^5 + \cdots,$$
$$B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + \cdots = -\frac{mA_1 + s}{n}x -$$
$$-\frac{mA_2 + 2gB_1 + 2hA_1B_1 + 2kB_1^2}{n}x^2 - \frac{mA_3 + 2gB_2 + 2hA_1B_2 + 2hA_2B_1 + 4kB_1B_2}{n}x^3 -$$
$$-\frac{mA_4 + 2gB_3 + 2hA_1B_3 + 2hA_2B_2 + 2hA_3B_1 + 2kB_2^2 + 4kB_1B_3}{n}x^4 -$$
$$-\frac{mA_5 + 2gB_4 + 2hA_1B_4 + 2hA_2B_3 + 2hA_3B_2 + 2hA_4B_1 + 4kB_2B_3 + 4kB_1B_4}{n}x^5 + \cdots$$

Obţinem

$$A_1 = \frac{rs - np}{nq - mr}, \quad B_1 = \frac{mp - qs}{nq - mr};$$
$$A_2 = -\frac{2}{nq - mr}(gnA_1 - grB_1 + hnA_1^2 + (kn - hr)A_1B_1 - krB_1^2),$$
$$B_2 = -\frac{2}{nq - mr}(-gmA_1 + gqB_1 - hmA_1^2 + (hq - km)A_1B_1 + kqB_1^2),$$
$$A_3 = -\frac{2}{nq - mr}(gnA_2 - grB_2 + 2hnA_1A_2 + (kn - hr)(A_1B_2 + A_2B_1) - 2krB_1B_2),$$
$$B_3 = -\frac{2}{nq - mr}(-gmA_2 + gqB_2 - 2hmA_1A_2 + (hq - km)(A_1B_2 + A_2B_1) + 2kqB_1B_2),$$
$$A_4 = -\frac{2}{nq - mr}[gnA_3 - grB_3 + 2hnA_1A_3 + hnA_2^2 + (kn - hr)(A_1B_3 + A_2B_2 + A_3B_1) -$$
$$-kr(2B_1B_3 + B_2^2)],$$
$$B_4 = -\frac{2}{nq - mr}[-gmA_3 + gqB_3 - 2hmA_1A_3 - hmA_2^2 +$$
$$+(hq - km)(A_1B_3 + A_2B_2 + A_3B_1) + kq(2B_1B_3 + B_2^2)],$$
$$A_5 = -\frac{2}{nq - mr}[gnA_4 - grB_4 + 2hn(A_1A_4 + A_2A_3) +$$
$$+(kn - hr)(A_1B_4 + A_2B_3 + A_3B_2 + A_4B_1) - 2kr(B_1B_4 + B_2B_3)], \tag{3.42}$$
$$B_5 = -\frac{2}{nq - mr}[-gmA_4 + gqB_4 - 2hm(A_1A_4 + A_2A_3) +$$
$$+(hq - km)(A_1B_4 + A_2B_3 + A_3B_2 + A_4B_1) + 2kq(B_1B_4 + B_2B_3)], \ldots$$

Remarca 3.4. *Pentru sistemul* (3.38) *avem*

$$L_{2,3} = nq - mr,$$

care, conform condiţiei (3.31), *este mai mare ca zero.*

Introducând (3.41) în partea dreaptă a ecuaţiei diferenţiale critice (3.38), avem

$$2x(gx + hy + kz) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots ,$$

sau în formă desfăşurată

$$2x[gx+h(A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5+\cdots)+k(B_1x+B_2x^2+B_3x^3+B_4x^4+B_5x^5+\cdots)] =$$

$$= C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots$$

De aici obţinem

$$\begin{gathered} C_1 = 0, \;\; C_2 = 2(g + hA_1 + kB_1), \;\; C_3 = 2(hA_2 + kB_2), \;\; C_4 = 2(hA_3 + kB_3), \\ C_5 = 2(hA_4 + kB_4), \ldots \end{gathered} \tag{3.43}$$

Conform Teoremei 2.3, pentru cazul ternar, obţinem că are loc

Lema 3.5. *Stabilitatea mişcării neperturbate cu condiţiile* $L_{i,3} > 0$ $(i = \overline{1,2})$ *din* (3.8), *descrisă de sistemul mişcării perturbate de tip critic Lyapunov-Darboux* (3.38), *include toate cazurile posibile în următoarele două:*

I. $g(nq - mr) + h(rs - np) + k(mp - qs) \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $g(nq - mr) + h(rs - np) + k(mp - qs) = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimul caz, există o serie continuă de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate.

Demonstraţie. Examinăm şirul (3.43). Conform Teoremei 2.3 avem că dacă $C_2 \neq 0$, atunci mişcarea neperturbată generată de sistemul (3.38) este instabilă. Introducând în C_2 pe A_1 şi B_1 din (3.42), obţinem

$$C_2 = \frac{2}{nq - mr}[g(nq - mr) + h(rs - np) + k(mp - qs)].$$

Conform Remarcei 3.4, din $C_2 \neq 0$, rezultă cazul I al Lemei 3.5.

Presupunem $C_2 = 0$. Atunci din (3.43) avem

$$g = -hA_1 - kB_1.$$

Introducând această expresie în A_2 şi B_2, din (3.42) obţinem

$$A_2 = B_2 = 0.$$

Utilizând aceste egalităţi în (3.42) obţinem

$$A_k = B_k = 0 \ \ (k \geq 2).$$

Prin urmare, din (3.43), avem $C_k = 0 \ \ (k \geq 2)$. Atunci, conform Teoremei 2.3, obţinem cazul II din Lema dată. Lema 3.5 este demonstrată.

În continuare vom avea nevoie de următorii comitanţi ai sistemului (3.21):

$$p_1 = a^{\alpha}_{\alpha\beta}x^{\beta}, \ \ p_8 = a^{\alpha}_{\beta}a^{\beta}_{\alpha\gamma}x^{\gamma}, \ \ p_9 = a^{\alpha}_{\gamma}a^{\beta}_{\beta\alpha}x^{\gamma}, \ \ p_{10} = a^{\alpha}_{\gamma}a^{\beta}_{\alpha}a^{\gamma}_{\beta\delta}x^{\delta}, \tag{3.44}$$

unde $p_1, p_8 - p_{10}$ sunt din [34].

Calculând comitanţii (3.44) şi invarianţii θ_1 şi θ_2, din (3.4), pentru sistemul (3.25) cu notaţiile (3.37) obţinem

$$3\theta_2 p_1 - 4\theta_1 p_8 + 3\theta_1 p_9 - 8p_{10} = -8[g(nq - mr) + h(rs - np) + k(mp - qs)]x.$$

Cu ajutorul Lemei 3.5 şi a expresiei invariante de mai sus obţinem

Teorema 3.6. *Dacă pentru sistemul diferenţial ternar* (3.21) *a mişcării perturbate se satisfac condiţiile invariante* (3.31) *şi* $\eta \equiv 0$ *din* (3.27) *(adică sistemul este critic de tip Lyapunov-Darboux), atunci stabilitatea mişcării neperturbate descrisă de acest sistem, include toate cazurile posibile în următoarele două:*

I. $3\theta_2 p_1 - 4\theta_1 p_8 + 3\theta_1 p_9 - 8p_{10} \not\equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $3\theta_2 p_1 - 4\theta_1 p_8 + 3\theta_1 p_9 - 8p_{10} \equiv 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimul caz, există o serie continuă de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Expresiile θ_1, θ_2 *sunt din* (3.4), *iar* $p_1, p_8 - p_{10}$ *din* (3.44).

3.7. Forma Lyapunov a sistemului diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice

Examinăm sistemul (3.21). Conform [34] are loc

Lema 3.6. *Dacă în* (3.5) *avem* $\sigma_1 \not\equiv 0$, *atunci sistemul* (3.21), *printr-o transformare centroafină poate fi adus la forma*

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 + a^1_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}, \\ \dot{x}^2 &= x^3 + a^2_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}, \\ \dot{x}^3 &= -L_{3,3}x^1 - L_{2,3}x^2 - L_{1,3}x^3 + a^3_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

unde $L_{i,3}$ $(i = \overline{1,3})$ *sunt din* (3.8).

Demonstraţie. Considerăm substituţia

$$\overline{x}^1 = \varkappa_1, \quad \overline{x}^2 = \varkappa_2, \quad \overline{x}^3 = \varkappa_3, \tag{3.46}$$

unde $\varkappa_i$ $(i = \overline{1,3})$ sunt din (3.4). Din (3.46) obţinem

$$Det(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1^{\alpha_1} u_{\alpha_1} & a_2^{\alpha_1} u_{\alpha_1} & a_3^{\alpha_1} u_{\alpha_1} \\ a_1^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\beta} & a_2^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\beta} & a_3^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\beta} \end{vmatrix} = \delta_4,$$

unde δ_4 este din (3.4), iar

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{\delta_4}[(a_2^{\alpha_1} a_3^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\alpha_1} u_{\beta} - a_3^{\alpha_1} a_2^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\alpha_1} u_{\beta})\bar{x}^1 + \\ &+(a_2^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\beta} u_3 - a_3^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\beta} u_2)\bar{x}^2 + (a_3^{\alpha_1} u_{\alpha_1} u_2 - a_2^{\alpha_1} u_{\alpha_1} u_3)\bar{x}^3], \\ x^2 &= \frac{1}{\delta_4}[(a_3^{\alpha_1} a_1^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\alpha_1} u_{\beta} - a_1^{\alpha_1} a_3^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\alpha_1} u_{\beta})\bar{x}^1 + \\ &+(a_3^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\beta} u_1 - a_1^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\beta} u_3)\bar{x}^2 + (a_1^{\alpha_1} u_{\alpha_1} u_3 - a_3^{\alpha_1} u_{\alpha_1} u_1)\bar{x}^3], \\ x^3 &= \frac{1}{\delta_4}[(a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\alpha_1} u_{\beta} - a_2^{\alpha_1} a_1^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\alpha_1} u_{\beta})\bar{x}^1 + \\ &+(a_1^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\beta} u_2 - a_2^{\alpha} a_{\alpha}^{\beta} u_{\beta} u_1)\bar{x}^2 + (a_2^{\alpha_1} u_{\alpha_1} u_1 - a_1^{\alpha_1} u_{\alpha_1} u_2)\bar{x}^3]. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Introducând substituţiile (3.46)–(3.47) în sistemul (3.21) şi luând în consideraţie din [35] că $\delta_4 \not\equiv 0 \Leftrightarrow \sigma_1 \not\equiv 0$, obţinem sistemul (3.45), în care s-au păstrat notaţiile iniţiale ale variabilelor şi coeficienţilor părţilor pătratice. Lema 3.6 este demonstrată.

Lema 3.7. *Ecuaţia caracteristică* (3.7) *a sistemului* (3.45) *cu* $\sigma_1 \not\equiv 0$ *are rădăcini pur imaginare dacă şi numai dacă acest sistem are forma*

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 + a_{\alpha\beta}^1 x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^2 &= x^3 + a_{\alpha\beta}^2 x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^3 &= -L_{1,3} L_{2,3} x^1 - L_{2,3} x^2 - L_{1,3} x^3 + a_{\alpha\beta}^3 x^\alpha x^\beta \quad (L_{2,3} > 0), \end{aligned} \tag{3.48}$$

unde $L_{i,3}$ $(i = \overline{1,3})$ *au forma* (3.8).

Demonstraţie. Conform Remarcei 3.1 este necesar de examinat doar cazul când $\sigma_1 \not\equiv 0$.

Necesitatea. Presupunem că ecuaţia caracteristică (3.7) posedă rădăcini pur imaginare $\varrho_1 = \alpha i, \varrho_2 = -\alpha i$ ($\alpha \neq 0$ - real), iar a treia rădăcină, evident, este reală $\varrho_3 = \beta$. Cu ajutorul teoremei lui $Vi\grave{e}te$ pentru rădăcinile ecuaţiei caracteristice (3.7), putem scrie

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = -L_{1,3}, \quad \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3 = L_{2,3}, \quad \varrho_1\varrho_2\varrho_3 = -L_{3,3}.$$

Atunci conform presupunerii de mai sus, asupra rădăcinilor ecuaţiei caracteristice (3.7) şi a ultimilor egalităţi, obţinem

$$\beta = -L_{1,3}, \quad \alpha^2 = L_{2,3}, \quad L_{3,3} = L_{1,3}L_{2,3}.$$

de unde, datorită faptului că $\alpha \neq 0$ este real, avem $L_{2,3} > 0$. Introducând ultimile condiţii în sistemul (3.45), obţinem (3.48). Necesitatea este demonstrată.

Suficienţa. Presupunem că sistemul (3.45) are forma (3.48), atunci ecuaţia caracteristică (3.7) se va scrie sub forma $(\varrho^2 + L_{2,3})(\varrho + L_{1,3}) = 0$, de unde avem, pentru $L_{2,3} > 0$, două rădăcini pur imaginare şi o rădăcină reală. Suficienţa este demonstrată. Lema 3.7 este demonstrată.

Lema 3.8. *Sistemul* (3.48) *cu* $\sigma_1 \not\equiv 0$ *din* (3.5), *printr-o transformare centroafină, poate fi adus la forma Lyapunov [44] (§ 33) a părţii liniare a primelor două ecuaţii*

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -\lambda x^2 + a^1_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^2 &= \lambda x^1 + a^2_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^3 &= x^2 - L_{1,3}x^3 + a^3_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \end{aligned} \tag{3.49}$$

unde $L_{1,3}, L_{2,3}$ *sunt din* (3.8), *iar* $\lambda^2 = L_{2,3}$ $(L_{2,3} > 0)$.

Demonstraţie. Vom examina forma Lyapunov a părţii liniare a sistemului diferenţial ternar (3.49). Conform [44] (§ 33), partea liniară a acestui sistem trebuie să aibă forma

$$\dot{X}^1 = -\lambda X^2 + \cdots, \quad \dot{X}^2 = \lambda X^1 + \cdots, \quad \dot{X}^3 = aX^1 + bX^2 + cX^3 + \cdots, \tag{3.50}$$

unde prin trei puncte se înţelege partea pătratică a sistemului dat. Coeficienţii λ, a, b, c sunt expresii de la $L_{i,3}$ $(i = \overline{1,3})$, iar noile variabile X^1, X^2, X^3 au forma

$$X^1 = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \;\; X^2 = \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3, \;\; X^3 = \gamma_1 x^1 + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3, \tag{3.51}$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.52}$$

Să observăm că substituţia (3.51), în aceste condiţii, formează o transformare centroafină. Introducând transformările (3.51)–(3.52) în partea liniară a formei Lyapunov (3.50) şi comparând cu sistemul (3.48), obţinem un sistem din 9 ecuaţii algebrice cu 12 necunoscute.

Rezolvând acest sistem avem

$$X^1 = -L^2_{1,3}\lambda x^1 + \lambda x^3, \quad X^2 = L_{1,3}L_{2,3}x^1 + (L^2_{1,3} + L_{2,3})x^2 + L_{1,3}x^3, \quad X^3 = 2L_{2,3}x^1 + L_{1,3}x^2 + x^3,$$

unde $\lambda^2 = L_{2,3}$, iar

$$\Delta = -2L_{2,3}\lambda(L_{1,3}^2 + L_{2,3}) \neq 0 \ \ (L_{2,3} > 0).$$

Această transformare aduce partea liniară a sistemului (3.48) la forma Lyapunov

$$\dot{X}^1 = -\lambda X^2 + \cdots, \quad \dot{X}^2 = \lambda X^1 + \cdots, \quad \dot{X}^3 = X^2 - L_{1,3}X^3 + \cdots,$$

pentru care păstrând notaţiile iniţiale ale variabilelor şi coeficienţilor părţii pătratice, forma căreea nu se schimbă la aceste transformări, obţinem (3.49). Lema 3.8 este demonstrată.

3.8. Condiţii invariante de stabilitate a mişcării periodice neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Lyapunov-Darboux

În continuare vom avea nevoie de următoarele $GL(3,\mathbb{R})$-polinoame invariante din [34, 73] pentru sistemul (3.21) cu notaţiile

$$\eta = a^{\alpha}_{\beta\gamma}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}y^{\mu}\varepsilon_{\alpha\delta\mu},\ P_1 \equiv p_1 = a^{\alpha}_{\alpha\beta}x^{\beta},\ P_2 \equiv p_8 = a^{\alpha}_{\beta}a^{\beta}_{\alpha\gamma}x^{\gamma},\ P_3 \equiv p_{10} = a^{\alpha}_{\gamma}a^{\beta}_{\alpha}a^{\gamma}_{\beta\delta}x^{\delta}, \quad (3.53)$$

unde η este un comitant de la doi vectori cogradienţi $x = (x^1, x^2, x^3)$ şi $y = (y^1, y^2, y^3)$ liniar independenţi din (3.27), iar p_1, p_8 şi p_{10} sunt din (3.44).

Uşor se poate verifica

Lema 3.9. *[35]. Dacă pentru sistemul* (3.21) *avem* $\eta \equiv 0$ *din* (3.53)*, atunci părţile pătratice ale acestui sistem posedă un factor liniar comun.*

Sistemele diferenţiale (3.21), cu proprietatea enunţată în Lema 3.9, le vom numi *de tip Darboux* [35]. Însă, dacă partea liniară a sistemului (3.21) are forma Lyapunov, iar partea pătratică - Darboux, atunci aşa sisteme le vom numi *Lyapunov-Darboux.*

În [35] a fost arătat că are loc

Teorema 3.7. *Dacă* $\eta \equiv 0$*, atunci sistemul* (3.21) *posedă* $GL(3,\mathbb{R})$*-factorul integrant invariant* $\mu^{-1} = \sigma_1\varphi$ *cu* σ_1 *din* (3.5) *şi*

$$\varphi = -2L_{3,3} + 3L_{2,3}P_1 + 4L_{1,3}P_2 + 4P_3 \quad (3.54)$$

sunt $GL(3,\mathbb{R})$*-integrale particulare invariante ale acestui sistem cu* $L_{i,3}$ $(i = \overline{1,3})$ *din* (3.8) *şi* P_i $(i = \overline{1,3})$ *din* (3.53).

Lema 3.10. *Sistemul* (3.21) *poate fi adus, printr-o transformare centroafină, la forma Lyapunov-Darboux*

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= -\lambda x^2 + 2x^1(a^1_{11}x^1 + a^1_{12}x^2 + a^1_{13}x^3) \equiv P^1,\\ \frac{dx^2}{dt} &= \lambda x^1 + 2x^2(a^1_{11}x^1 + a^1_{12}x^2 + a^1_{13}x^3) \equiv P^2,\\ \frac{dx^3}{dt} &= x^2 - L_{1,3}x^3 + 2x^3(a^1_{11}x^1 + a^1_{12}x^2 + a^1_{13}x^3) \equiv P^3,\end{aligned} \quad (3.55)$$

dacă şi numai dacă au loc condiţiile centroafin invariante

$$\sigma_1 \not\equiv 0, \quad \eta \equiv 0, \quad L_{1,3}L_{2,3} = L_{3,3}, \tag{3.56}$$

unde $\lambda^2 = L_{2,3}$ $(L_{2,3} > 0)$, *iar* σ_1 *din* (3.5), $L_{i,3}$ $(i = \overline{1,3})$ *din* (3.8) *şi* η *din* (3.53).

Demonstraţia Lemei 3.10 rezultă din Lemele 3.7 – 3.9.

Vom determina algebra Lie a operatorilor admisă de sistemul (3.55) (vezi (3.24)). Presupunând că coordonatele operatorului $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = \overline{1,3})$ au forma $\xi^i = A^i_\beta x^\beta + A^i_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma$ $(\beta, \gamma = \overline{1,3})$, ce satisfac ecuaţiile determinante

$$\begin{aligned}
(\xi^1)_{x^1}P^1 + (\xi^1)_{x^2}P^2 + (\xi^1)_{x^3}P^3 &= \xi^1 P^1_{x^1} + \xi^2 P^1_{x^2} + \xi^3 P^1_{x^3},\\
(\xi^2)_{x^1}P^1 + (\xi^2)_{x^2}P^2 + (\xi^2)_{x^3}P^3 &= \xi^1 P^2_{x^1} + \xi^2 P^2_{x^2} + \xi^3 P^2_{x^3},\\
(\xi^3)_{x^1}P^1 + (\xi^3)_{x^2}P^2 + (\xi^3)_{x^3}P^3 &= \xi^1 P^3_{x^1} + \xi^2 P^3_{x^2} + \xi^3 P^3_{x^3}
\end{aligned}$$

şi rezolvând acest sistem pentru sistemul diferenţial (3.55), obţinem operatorii

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{\lambda L_{1,3}x^1 - \lambda^2 x^2 + 2[(-k - hL_{1,3} + g\lambda)(x^1)^2 + (gL_{1,3} + h\lambda)x^1x^2]\}\frac{\partial}{\partial x^1} +\\
&+\{\lambda^2 x^1 + \lambda L_{1,3}x^2 + 2(-k - hL_{1,3} + g\lambda)x^1x^2 + 2(gL_{1,3} + h\lambda)(x^2)^2\}\frac{\partial}{\partial x^2} +\\
&+\{\lambda x^2 + 2(-k - hL_{1,3} + g\lambda)x^1x^3 + 2(gL_{1,3} + h\lambda)x^2x^3\}\frac{\partial}{\partial x^3},\\
X_2 &= [\lambda^2 x^1 + \lambda L_{1,3}x^2 + 2(-gL_{1,3} - h\lambda)(x^1)^2 + 2(g\lambda - k - hL_{1,3})x^1x^2]\frac{\partial}{\partial x^1} +\\
&+[\lambda L_{1,3}x^1 + \lambda^2 x^2 + 2(-gL_{1,3} - h\lambda)x^1x^2 + 2(g\lambda - k - hL_{1,3})(x^2)^2]\frac{\partial}{\partial x^2} +\\
&+[-\lambda x^1 + 2(-gL_{1,3} - h\lambda)x^1x^3 - 2(k + hL_{1,3} - g\lambda)x^2x^3]\frac{\partial}{\partial x^3},\\
X_3 &= \{-\lambda L_{1,3} + 2[(k + hL_{1,3})x^1 - gL_{1,3}x^2 + k\lambda x^3]\}(x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3}).
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Cu ajutorul comutatorilor $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i$ se poate verifica că aceşti operatori formează o algebră Lie tridimensională comutativă.

În conformitate cu Teorema 3.3, utilizând operatorii $X_\alpha = \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(\alpha = 1,2;\ i = \overline{1,3})$ şi făcând abstracţie de o constantă, obţinem factorul integrant Lie de forma

$$\mu^{-1} = \begin{vmatrix} \xi^1_1 & \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \xi^3_2 \\ P^1 & P^2 & P^3 \end{vmatrix} \Rightarrow \mu^{-1} = [\lambda L_{1,3} - 2((k + hL_{1,3})x^1 - gL_{1,3}x^2 + k\lambda x^3)]\sigma_1. \tag{3.58}$$

Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 despre factorul integrant, obţinem

Teorema 3.8. *Pentru sistemul* (3.55) *una din integralele prime are forma*

$$F_1 \equiv \frac{f_1}{f_2^2} = C_1, \tag{3.59}$$

unde

$$\begin{aligned} f_1 &= (x^1)^2 + (x^2)^2, \\ f_2 &= -\lambda L_{1,3} + 2(k + hL_{1,3})x^1 - 2gL_{1,3}x^2 + 2\lambda k x^3. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Corolarul 3.1. *Pentru sistemul* (3.55) *avem*

$$\varphi = 12\lambda f_2, \tag{3.61}$$

unde φ *are forma* (3.54).

Corolarul 3.2. *Integrala primă* (3.59) *pentru* $f_2 \not\equiv 0$ $(\varphi \not\equiv 0)$ *poate fi scrisă ca o integrală olomorfă de forma*

$$\widetilde{F_1} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + F(x^1, x^2, x^3), \tag{3.62}$$

unde $F(x^1, x^2, x^3)$ *conţine termeni de grad mai mare ca doi în raport cu variabilele* x^1, x^2, x^3.

Cu ajutorul Lemei 3.10, Teoremei 3.7, Colorarului 3.1 şi 3.2 am stabilit condiţiile centro-afin-invariante de existenţă a integralei olomorfe (3.62) pentru sistemul (3.21). Luând în consideraţie această afirmaţie şi Teorema lui Lyapunov [44] (§ 40, p. 160) despre determinarea stabilităţii mişcării neperturbate cu ajutorul integralei olomorfe de tipul (3.62) obţinem

Teorema 3.9. *Fie* $L_{1,3} > 0$ *din* (3.8), *iar pentru sistemul* (3.21) *se satisfac condiţiile centroafin-invariante* (3.56) *şi comitantul* φ *din* (3.54) *nu este identic zero. Atunci sistemul dat admite o soluţie periodică, ce va conţine o constantă arbitrară şi variind această constantă vom obţine un şir continuu de mişcări periodice, ce va definitiva în sine mişcarea examinată neperturbată. Această ultimă mişcare va fi stabilă şi oricare mişcare perturbată destul de apropiată de cea neperturbată se va apropia asimptotic de către una din mişcările periodice.*

Dacă în sistemul (3.55) vom presupune $L_{1,3} = 0$, atunci acest sistem admite operatorii

$$\begin{aligned} X_1 &= (2hx^1x^2 + 2(k - g\lambda)x^1x^3 - \lambda x^2)\frac{\partial}{\partial x^1} + (2h(x^2)^2 + 2(k - g\lambda)x^2x^3 + \lambda x^1)\frac{\partial}{\partial x^2} + \\ &\quad + (2hx^2x^3 + 2(k - g\lambda)(x^3)^2 + x^2)\frac{\partial}{\partial x^3}, \\ X_2 &= [2(k - g\lambda)x^1x^2 - 2h\lambda^2x^1x^3 - \lambda^2x^1]\frac{\partial}{\partial x^1} + [2(k - g\lambda)(x^2)^2 - 2h\lambda^2x^2x^3 - \lambda^2x^2]\frac{\partial}{\partial x^2} + \\ &\quad + [2(k - g\lambda)x^2x^3 - 2h\lambda^2(x^3)^2 + \lambda x^1]\frac{\partial}{\partial x^3}, \\ X_3 &= (x^1 + \lambda x^3)(x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3}), \end{aligned} \tag{3.63}$$

ce formează o algebră Lie comutativă.

Utilizând primii doi operatori şi făcând abstracţie de o constantă, în mod analog cazului precedent, obţinem factorul integrant Lie

$$\mu^{-1} = ((x^1)^2 + (x^2)^2)(x^1 + \lambda x^3)^2. \tag{3.64}$$

Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 despre factorul integrant, obţinem

Teorema 3.10. *Sistemul* (3.55) *pentru* $L_{1,3} = 0$ *posedă integrala generală compusă din următoarele două integrale prime*

$$\begin{gathered} F_1 \equiv \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{(x^1 + \lambda x^3)^2} = C_1, \\ F_2 \equiv \frac{\lambda^2 + 2kx^1 + 2(\lambda g - k)x^2 + 2\lambda(k + \lambda h)x^3}{x^1 + \lambda x^3} + 2k\, arctg \frac{x^2}{x^1} = C_2. \end{gathered} \tag{3.65}$$

Remarca 3.5. *Algebra Lie* (3.63), *factorul integrant Lie* (3.64), *integrala primă* F_1 *din* (3.65) *a sistemului* (3.55), *făcând abstracţie de o constantă, se obţin respectiv din algebra Lie* (3.57), *factorul integrant* (3.58), *integrala primă* (3.59) – (3.60) *a sistemului* (3.55), *înlocuind valoarea* $L_{1,3} = 0$ *în ele.*

3.9. Factorul integrant Lie şi integrala generală pentru sistemul (3.28) cu $\sigma_1 \equiv 0$ şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$, în cazurile (3.10) – (3.12)

Teorema 3.11. *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.10) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29)–(3.30), *atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$F_1 \equiv yz^{-1} = C_1, \quad F_2 \equiv x^{a_2^2} y^{-a_1^1} \Phi^{a_1^1 - a_2^2} = C_2, \tag{3.66}$$

unde

$$\Phi = a_1^1 a_2^2 + 2[a_2^2 gx + a_1^1(hy + kz)]. \tag{3.67}$$

Demonstraţie. Presupunem că coordonatele operatorului (3.23) au forma

$$\xi_\alpha^i = A_{\alpha\beta}^i x^\beta + A_{\alpha\beta\gamma}^i x^\beta x^\gamma \ \ (\alpha \geq 1;\ \beta, \gamma = \overline{1,3}), \tag{3.68}$$

ce satisfac ecuaţiile determinante (3.24). În urma rezolvării sistemului (3.24), pentru sistemul diferenţial (3.28) cu condiţiile $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$, din (3.29) – (3.30) şi expresiile de tipul (3.68) obţinem operatorii $(x = x^1, y = x^2, z = x^3)$

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= (a_1^1 + 2gx)x\frac{\partial}{\partial x} + 2gxy\frac{\partial}{\partial y} + 2gxz\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_2 &= 2hxy\frac{\partial}{\partial x} + (a_2^2 + 2hy)y\frac{\partial}{\partial y} + 2hyz\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_3 &= 2hxz\frac{\partial}{\partial x} + (a_2^2 + 2hy)z\frac{\partial}{\partial y} + 2hz^2\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_4 &= 2kxy\frac{\partial}{\partial x} + 2ky^2\frac{\partial}{\partial y} + (a_2^2 + 2kz)y\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_5 &= 2kxz\frac{\partial}{\partial x} + 2kyz\frac{\partial}{\partial y} + (a_2^2 + 2kz)z\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3.69}
$$

Aceşti operatori formează o algebră Lie L_5 cu ecuaţiile de structură

$$
\begin{gathered}
[Y_1, Y_i] = 0\ (i = \overline{2,5}),\ [Y_2, Y_3] = -a_2^2 Y_3,\ [Y_2, Y_4] = a_2^2 Y_4,\ \ [Y_2, Y_5] = 0,\\
[Y_3, Y_4] = a_2^2(Y_5 - Y_2),\ \ [Y_3, Y_5] = -a_2^2 Y_3,\ \ [Y_4, Y_5] = a_2^2 Y_4.
\end{gathered} \tag{3.70}
$$

Cu ajutorul operatorilor Y_1 şi Y_2, ce formează în conformitate cu (3.69) şi (3.70) o algebră Lie bidimensională comutativă, obţinem în acest caz, din (3.25), făcând abstracţie de o constantă, factorul integrant Lie de forma $\mu^{-1} = xyz\Phi$, unde Φ este din (3.67).

Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 obţinem integralele prime funcţional independente (3.66) – (3.67) a sistemului (3.28). Condiţiile (3.10) şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ din (3.29) – (3.30) ne asigură că în acest sistem nu toţi coeficienţii sunt egali cu zero. Teorema 3.11 este demonstrată.

Teorema 3.12. *Fie coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.11) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30). *Atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$
F_1 \equiv xz^{-1} = C_1;\ \ F_2 \equiv x^{-a_2^2} y^{a_1^1} \Phi^{a_2^2 - a_1^1} = C_2, \tag{3.71}
$$

unde

$$
\Phi = a_1^1 a_2^2 + 2[a_2^2(gx + kz) + a_1^1 hy]. \tag{3.72}
$$

Demonstraţie. Efectuând substituţiile $\bar{x}^1 = x^2, \bar{x}^2 = x^1, \bar{x}^3 = x^3$ în sistemul (3.28) cu condiţiile (3.11) obţinem sistemul (3.28) cu condiţiile (3.10), pentru care în Teorema 3.11 este determinată integrala generală. Utilizând acest rezultat şi notaţiile respective obţinem, pentru sistemul (3.28) cu condiţiile (3.11), integralele (3.71) – (3.72). Teorema 3.12 este demonstrată.

Teorema 3.13. *Fie coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.12) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30). *Atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$
F_1 \equiv x^{-1}y = C_1;\ \ F_2 \equiv y^{-a_3^3} z^{a_1^1} \Phi^{a_3^3 - a_1^1} = C_2, \tag{3.73}
$$

unde

$$\Phi = a_1^1 a_3^3 + 2[a_3^3(gx+hy) + a_1^1 kz]. \tag{3.74}$$

Demonstraţia Teoremei 3.13 se efectuează în mod similar Teoremei 3.12 efectuând substituţiile $\bar{x}^1 = x^3, \bar{x}^2 = x^2, \bar{x}^3 = x^1$ în sistemul (3.28) cu condiţiile (3.10).

3.10. Factorul integrant Lie şi integrala generală pentru sistemul (3.28) cu $\sigma_1 \equiv 0$ şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$, în cazurile (3.13) – (3.15)

Teorema 3.14. *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.13) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30), *atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$F_1 \equiv xz^{-1} = C_1; \quad F_2 \equiv x^{-a_2^2}[(a_1^1 - a_2^2)y - a_3^2 z]^{a_1^1} \Phi^{a_2^2 - a_1^1} = C_2, \tag{3.75}$$

unde

$$\Phi = a_1^1 a_2^2 + 2[a_2^2 gx + a_1^1 hy + (a_2^2 k - a_3^2 h)z]. \tag{3.76}$$

Demonstraţie. Presupunând că coordonatele operatorului (3.23) au forma (3.68), şi rezolvând sistemul (3.24) pentru sistemul diferenţial (3.28), obţinem operatorii ($x = x^1, y = x^2, z = x^3$)

$$\begin{gathered}
Y_1 = (a_1^1 + 2gx)x\frac{\partial}{\partial x} + 2gxy\frac{\partial}{\partial y} + 2gxz\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_2 = (a_1^1 + 2gx)z\frac{\partial}{\partial x} + 2gyz\frac{\partial}{\partial y} + 2gz^2\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_3 = 2[a_3^2 h + (a_1^1 - a_2^2)k]x^2\frac{\partial}{\partial x} + [a_1^1 a_3^2 + 2(a_3^2 h + (a_1^1 - a_2^2)k)y]x\frac{\partial}{\partial y} +\\
+[(a_1^1 - a_2^2)(a_1^1 + 2kz) + 2a_3^2 hz]x\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_4 = 2[a_3^2 h + (a_1^1 - a_2^2)k]xz\frac{\partial}{\partial x} + [a_3^2(a_1^1 + 2hy) + 2(a_1^1 - a_2^2)ky]z\frac{\partial}{\partial y} +\\
+[(a_1^1 - a_2^2)(a_1^1 + 2kz) + 2a_3^2 hz]z\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_5 = 2[a_1^1 hy - (a_3^2 h - a_2^2 k)z]x\frac{\partial}{\partial x} + \{a_1^1 a_2^2 + 2[a_1^1 hy - (a_3^2 h - a_2^2 k)z]\}y\frac{\partial}{\partial y} +\\
+[a_1^1 a_2^2 + 2(a_1^1 hy - (a_3^2 h - a_2^2 k)z)]z\frac{\partial}{\partial z}.
\end{gathered} \tag{3.77}$$

Aceşti operatori formează o algebră Lie L_5 cu ecuaţiile de structură

$$\begin{gathered}
[Y_1, Y_2] = -a_1^1 Y_2, \quad [Y_1, Y_3] = a_1^1 Y_3, \quad [Y_1, Y_4] = [Y_1, Y_5] = [Y_4, Y_5] = 0,\\
[Y_2, Y_3] = a_1^1[(a_2^2 - a_1^1)Y_1 + Y_4], \quad [Y_2, Y_4] = a_1^1(a_2^2 - a_1^1)Y_2,\\
[Y_2, Y_5] = -a_1^1 a_2^2 Y_2, \quad [Y_3, Y_4] = a_1^1(a_1^1 - a_2^2)Y_3, \quad [Y_3, Y_5] = a_1^1 a_2^2 Y_3.
\end{gathered} \tag{3.78}$$

Cu ajutorul operatorilor Y_1 şi Y_4, ce formează în conformitate cu (3.77) şi (3.78) o algebră Lie bidimensională comutativă, obţinem în acest caz din (3.25), făcând abstracţie de o constantă, factorul integrant $\mu^{-1} = xz[(a_1^1 - a_2^2)y - a_3^2 z]\Phi$, unde Φ este din (3.76).

Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 obţinem integralele prime funcţional independente (3.75) – (3.76) a sistemului (3.28). Condiţiile (3.13) şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ din (3.29) – (3.30) ne asigură că în acest sistem nu toţi coeficienţii sunt egali cu zero. Teorema 3.14 este demonstrată.

Teorema 3.15. *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.14) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30), *atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$\begin{gathered} F_1 \equiv [(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]x^{-1} = C_1; \\ F_2 \equiv z^{a_1^1}[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]^{-a_3^3}\Phi^{a_3^3 - a_1^1} = C_2, \end{gathered} \tag{3.79}$$

unde

$$\Phi = a_1^1 a_3^3 + 2[a_3^3(gx + hy) + (a_1^1 k - a_3^2 h)z]. \tag{3.80}$$

Demonstraţie. Presupunând că coordonatele operatorului (3.23) au forma (3.68), şi rezolvând sistemul (3.24) pentru sistemul diferenţial (3.28), obţinem operatorii ($x = x^1, y = x^2, z = x^3$)

$$\begin{gathered} Y_1 = (a_1^1 + 2gx)x\frac{\partial}{\partial x} + 2gxy\frac{\partial}{\partial y} + 2gxz\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_2 = (a_1^1 + 2gx)[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]\frac{\partial}{\partial x} + 2g[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]y\frac{\partial}{\partial y} + \\ +2g[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]z\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_3 = 2hx^2\frac{\partial}{\partial x} + (a_1^1 + 2hy)x\frac{\partial}{\partial y} + 2hxz\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_4 = 2h[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]x\frac{\partial}{\partial x} + (a_1^1 + 2hy)[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]\frac{\partial}{\partial y} + \\ +2h[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]z\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_5 = 2[a_3^3 hy + (a_1^1 k - a_3^2 h)z]x\frac{\partial}{\partial x} + \{a_1^1 a_3^3 + 2[a_3^3 hy + (a_1^1 k - a_3^2 h)z]\}y\frac{\partial}{\partial y} + \\ +[a_1^1 a_3^3 + 2(a_3^3 hy + (a_1^1 k - a_3^2 h)z)]z\frac{\partial}{\partial z}. \end{gathered} \tag{3.81}$$

Aceşti operatori formează o algebră Lie L_5 cu ecuaţiile de structură

$$\begin{gathered} [Y_1, Y_2] = -a_1^1 Y_2, \;\; [Y_1, Y_3] = a_1^1 Y_3, \;\; [Y_1, Y_4] = [Y_1, Y_5] = [Y_4, Y_5] = 0, \\ [Y_2, Y_3] = a_1^1[(a_3^3 - a_1^1)Y_1 + Y_4], \;\; [Y_2, Y_4] = a_1^1(a_3^3 - a_1^1)Y_2, \\ [Y_2, Y_5] = -a_1^1 a_3^3 Y_2, \;\; [Y_3, Y_4] = a_1^1(a_1^1 - a_3^3)Y_3, \;\; [Y_3, Y_5] = a_1^1 a_3^3 Y_3. \end{gathered} \tag{3.82}$$

Cu ajutorul operatorilor Y_1 şi Y_5, ce formează în conformitate cu (3.81) şi (3.82) o algebră Lie bidimensională comutativă, obţinem în acest caz din (3.25), făcând abstracţie de o constantă, factorul integrant $\mu^{-1} = xz[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]\Phi$, unde Φ este din (3.80).

Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 obţinem integralele prime funcţional independente (3.79) – (3.80) a sistemului (3.28). Condiţiile (3.14) şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ din (3.29) – (3.30), ne asigură că în acest sistem nu toţi coeficienţii sunt egali cu zero. Teorema 3.15 este demonstrată.

Teorema 3.16. *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.15) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30), *atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv yz^{-1} = C_1; \\ F_2 &\equiv y^{-a_1^1}[(a_2^2 - a_1^1)x - a_3^1 z]^{a_2^2}\Phi^{a_1^1 - a_2^2} = C_2, \end{aligned} \tag{3.83}$$

unde

$$\Phi = a_1^1 a_2^2 + 2[a_2^2 gx + a_1^1 hy + (a_1^1 k - a_3^1 g)z]. \tag{3.84}$$

Demonstraţie. Efectuând substituţiile $\bar{x}^1 = x^2, \bar{x}^2 = x^1, \bar{x}^3 = x^3$ în sistemul (3.28) cu condiţiile (3.15) obţinem sistemul (3.28) cu condiţiile (3.13), pentru care în Teorema 3.14 este determinată integrala generală. Utilizând acest rezultat şi notaţiile respective obţinem pentru sistemul (3.28), cu condiţiile (3.15), integralele (3.83) – (3.84). Teorema 3.16 este demonstrată.

3.11. Factorul integrant Lie şi integrala generală pentru sistemul (3.28) cu $\sigma_1 \equiv 0$ şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$, în cazurile (3.16) – (3.18)

Teorema 3.17. *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.16) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30), *atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv (-a_3^2 x + a_3^1 y)[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]^{-1} = C_1; \\ F_2 &\equiv z^{-a_1^1}[(a_1^1 - a_3^3)y + a_3^2 z]^{a_3^3}\Phi^{a_1^1 - a_3^3} = C_2, \end{aligned} \tag{3.85}$$

unde

$$\Phi = a_1^1 a_3^3 + 2[a_3^3(gx + hy) + (a_1^1 k - a_3^1 g - a_3^2 h)z]. \tag{3.86}$$

Demonstraţie. Presupunând că coordonatele operatorului (3.23) au forma (3.68), şi rezolvând sistemul (3.24) pentru sistemul diferenţial (3.28), obţinem operatorii ($x = x^1, y = x^2, z = x^3$)

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= (a_1^1+2gx)(a_3^2x-a_3^1y)\frac{\partial}{\partial x}+2g(a_3^2x-a_3^1y)y\frac{\partial}{\partial y}+2g(a_3^2x-a_3^1y)z\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_2 &= (a_1^1+2gx)[(a_1^1-a_3^3)y+a_3^2z]\frac{\partial}{\partial x}+2g[(a_1^1-a_3^3)y+a_3^2z]y\frac{\partial}{\partial y}+\\
&\quad +2g[(a_1^1-a_3^3)y+a_3^2z]z\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_3 &= \{a_3^3[a_1^1a_3^1+2(a_3^1g+a_3^2h)x]y+Wxz\}\frac{\partial}{\partial x}+\\
&\quad +\{a_3^3[a_1^1a_3^2+2(a_3^1g+a_3^2h)y]+Wz\}y\frac{\partial}{\partial y}+\\
&\quad +\{a_3^3[a_1^1a_3^2+2(a_3^1g+a_3^2h)y]+Wz\}z\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_4 &= \{a_3^3[2(a_3^2)^2hx^2+(a_3^1)^2(a_1^1+2gx)y]+a_3^1Wxz\}\frac{\partial}{\partial x}+\\
&\quad +\{a_3^3[(a_3^2)^2(a_1^1+2hy)x+2(a_3^1)^2gy^2]+a_3^1Wyz\}\frac{\partial}{\partial y}+\\
&\quad +\{a_3^3[a_3^1(a_1^1a_3^2+2a_3^1gy)+2(a_3^2)^2hx]+a_3^1Wz\}z\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_5 &= \{a_3^3[2a_1^1a_3^2kxz-a_3^1[(a_1^1-a_3^3)(a_1^1+2gx)y+2a_3^2gxz]]-a_1^1Wxz\}\frac{\partial}{\partial x}+\\
&\quad +\{a_3^3[a_1^1a_3^2(a_3^2+2ky)z-2a_3^1[(a_1^1-a_3^3)gy+a_3^2gz]y]-a_1^1Wyz\}\frac{\partial}{\partial y}+\\
&\quad +\{a_3^3[a_3^3(a_1^1a_3^2+2a_3^1gy)-a_1^1a_3^2(a_1^1-2kz)-2a_3^1g(a_1^1y+a_3^2z)]-a_1^1Wz\}z\frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

unde $W=2a_3^2(a_1^1k-a_3^2h-a_3^1g)$.

Aceşti operatori formează o algebră Lie L_5 cu ecuaţiile de structură

$$
\begin{aligned}
&[Y_3,Y_5]=a_3^1(a_3^3)^2[Y_1,Y_2]=-a_3^3[Y_1,Y_5]=a_3^1a_3^3[Y_2,Y_3]=-a_1^1a_3^1a_3^2(a_3^3)^2Y_2,\\
&[Y_1,Y_3]=[Y_2,Y_5]=0,\ \ [Y_3,Y_4]=-a_3^3[Y_1,Y_4]=-a_1^1a_3^2a_3^3[a_3^1(a_3^3Y_1-Y_3)+Y_4],\\
&[Y_4,Y_5]=a_3^1a_3^3[Y_2,Y_4]=a_1^1a_3^1a_3^2a_3^3[a_3^3(a_3^3-a_1^1)Y_1-a_3^1a_3^3Y_2+(a_1^1-a_3^3)Y_3+Y_5].
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

Cu ajutorul operatorilor Y_1 şi Y_3, ce formează în conformitate cu (3.87) şi (3.88) o algebră Lie bidimensională comutativă, obţinem în acest caz din (3.25), făcând abstracţie de o constantă, factorul integrant $\mu^{-1}=(-a_3^2x+a_3^1y)z[(a_1^1-a_3^3)y+a_3^2z]\Phi$, unde Φ este din (3.86). Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 obţinem integralele prime funcţional independente (3.85) – (3.86) a sistemului (3.28). Condiţiile (3.16) şi $\varkappa_2q_1\not\equiv 0$ din (3.29) – (3.30) ne asigură că în acest sistem nu toţi coeficienţii sunt egali cu zero. Teorema 3.17 este demonstrată.

Teorema 3.18. *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.17) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30), *atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$\begin{gathered} F_1 \equiv yz^{-1} = C_1; \\ F_2 \equiv z^{a_1^1}[(a_1^1 - a_2^2)x + a_2^1 y + a_3^1 z]^{-a_2^2}\Phi^{a_2^2 - a_1^1} = C_2, \end{gathered} \tag{3.89}$$

unde

$$\Phi = a_2^2(a_1^1 + 2gx) + 2[(a_1^1 h - a_2^1 g)y + (a_1^1 k - a_3^1 g)z]. \tag{3.90}$$

Demonstraţie. Presupunând că coordonatele operatorului (3.23) au forma (3.68), şi rezolvând sistemul (3.24) pentru sistemul diferenţial (3.28), obţinem operatorii ($x = x^1, y = x^2, z = x^3$)

$$\begin{gathered} Y_1 = \{a_2^1 a_2^2 + 2[a_2^1 g + (a_2^2 - a_1^1)h]x\}y\frac{\partial}{\partial x} + [2a_2^1 gy + (a_2^2 + 2hy)(a_2^2 - a_1^1)]y\frac{\partial}{\partial y} + \\ +2[a_2^1 g + (a_2^2 - a_1^1)h]yz\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_2 = [a_2^1 a_2^2 + 2(a_2^1 g + (a_2^2 - a_1^1)h)x]z\frac{\partial}{\partial x} + [2a_2^1 gy + (a_2^2 + 2hy)(a_2^2 - a_1^1)]z\frac{\partial}{\partial y} + \\ +2[a_2^1 g + (a_2^2 - a_1^1)h]z^2\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_3 = 2(a_2^1 k - a_3^1 h)xy\frac{\partial}{\partial x} + [-a_3^1 a_2^2 + 2(a_2^1 k - a_3^1 h)y]y\frac{\partial}{\partial y} + \\ +[a_2^1 a_2^2 + 2(a_2^1 k - a_3^1 h)z]y\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_4 = 2(a_2^1 k - a_3^1 h)xz\frac{\partial}{\partial x} + [-a_3^1 a_2^2 + 2(a_2^1 k - a_3^1 h)y]z\frac{\partial}{\partial y} + \\ +[a_2^1 a_2^2 + 2(a_2^1 k - a_3^1 h)z]z\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_5 = [a_2^1 a_2^2(a_1^1 + 2gx) + 2(a_2^1 y + a_3^1 z)(a_1^1 h - a_2^1 g)]x\frac{\partial}{\partial x} + \\ +\{[a_2^1 a_2^2(a_1^1 + 2gx) + 2(a_2^1 y + a_3^1 z)(a_1^1 h - a_2^1 g)]y + a_1^1 a_3^1 a_2^2 z\}\frac{\partial}{\partial y} + \\ +2[a_2^1 a_2^2 gx + (a_2^1 y + a_3^1 z)(a_1^1 h - a_2^1 g)]z\frac{\partial}{\partial z}. \end{gathered} \tag{3.91}$$

Aceşti operatori formează o algebră Lie L_5 cu ecuaţiile de structură

$$\begin{gathered} [Y_1, Y_2] = a_2^2(a_1^1 - a_2^2)Y_2 \quad [Y_1, Y_3] = a_2^2[a_3^1 Y_1 + (a_2^2 - a_1^1)Y_3], \\ a_1^1 a_2^1[Y_1, Y_4] = -a_2^1[Y_1, Y_5] = -a_1^1 a_3^1[Y_2, Y_4] = a_3^1[Y_2, Y_5] = a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_2^2 Y_2, \\ [Y_2, Y_3] = -a_2^2[a_2^1 Y_1 + (a_1^1 - a_2^2)Y_4], \\ a_1^1[Y_3, Y_4] = -[Y_3, Y_5] = a_1^1 a_2^2(a_2^1 Y_3 + a_3^1 Y_4), \quad [Y_4, Y_5] = 0. \end{gathered} \tag{3.92}$$

Cu ajutorul operatorilor Y_4 şi Y_5, ce formează în conformitate cu (3.91) şi (3.92) o algebră Lie bidimensională comutativă, obţinem în acest caz din (3.25), făcând abstracţie de o constantă, factorul integrant $\mu^{-1} = z(a_2^1 y + a_3^1 z)[(a_1^1 - a_2^2)x + a_2^1 y + a_3^1 z]\Phi$, unde Φ este din (3.90).

Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 obţinem integralele prime funcţional independente (3.89) – (3.90) a sistemului (3.28). Condiţiile (3.17) şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ din (3.29) – (3.30) ne asigură că în acest sistem nu toţi coeficienţii sunt egali cu zero. Teorema 3.18 este demonstrată.

Teorema 3.19. *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.18) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30), *atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$\begin{gathered} F_1 \equiv z[(a_1^1 - a_2^2)x + a_2^1 y + a_3^1 z]^{-1} = C_1; \\ F_2 \equiv (a_2^1 y + a_3^1 z)^{a_1^1}[(a_1^1 - a_2^2)x + a_2^1 y + a_3^1 z]^{-a_2^2}\Phi^{a_2^2 - a_1^1} = C_2, \end{gathered} \tag{3.93}$$

unde

$$\Phi = a_1^1 a_2^1 a_2^2 + 2\{a_2^1[a_2^2 g x + (a_1^1 h - a_2^1 g)y + (a_2^2 k - a_3^1 g)z] + a_3^1(a_1^1 - a_2^2)hz\}. \tag{3.94}$$

Demonstraţie. Presupunând că coordonatele operatorului (3.23) au forma (3.68), şi rezolvând sistemul (3.24) pentru sistemul diferenţial (3.28), obţinem operatorii ($x = x^1, y = x^2, z = x^3$)

$$\begin{gathered} Y_1 = (a_1^1 + 2gx)[(a_1^1 - a_2^2)x + a_2^1 y]\frac{\partial}{\partial x} + 2g[(a_1^1 - a_2^2)x + a_2^1 y]y\frac{\partial}{\partial y} + \\ +2g[(a_1^1 - a_2^2)x + a_2^1 y]z\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_2 = (a_1^1 + 2gx)z\frac{\partial}{\partial x} + 2gyz\frac{\partial}{\partial y} + 2gz^2\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_3 = 2(a_2^1 k - a_3^1 h)xz\frac{\partial}{\partial x} + [-a_1^1 a_3^1 + 2(a_2^1 k - a_3^1 h)y]z\frac{\partial}{\partial y} + \\ +[a_1^1 a_2^1 + 2(a_2^1 k - a_3^1 h)z]z\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_4 = \{a_1^1 a_2^1 a_2^2 + 2[a_2^1 a_2^2 g x + (a_1^1 h - a_2^1 g)(a_2^1 y + a_3^1 z)]\}x\frac{\partial}{\partial x} + \\ +[a_1^1 a_2^2(a_2^1 y + a_3^1 z) + 2[a_2^1 a_2^2 g x + (a_1^1 h - a_2^1 g)(a_2^1 y + a_3^1 z)]y]\frac{\partial}{\partial y} + \\ +2[a_2^1 a_2^2 g x + (a_1^1 h - a_2^1 g)(a_2^1 y + a_3^1 z)]z\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_5 = (a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_2^2 + W)x\frac{\partial}{\partial x} + [a_1^1 a_3^1 a_2^2(a_2^2 - a_1^1)x + Wy + a_1^1(a_3^1)^2 a_2^2 z]\frac{\partial}{\partial y} + \\ +[a_1^1 a_2^1 a_2^2((a_1^1 - a_2^2)x + a_2^1 y) + Wz]\frac{\partial}{\partial z}, \end{gathered} \tag{3.95}$$

unde $W = 2a_2^1 a_3^1 g(a_2^2 x - a_2^1 y - a_3^1 z) - 2a_3^1 h[(a_2^2 x - a_2^1 y)(a_1^1 - a_2^2) - a_1^1 a_3^1 z] - 2a_2^1 a_2^2 k((a_2^2 - a_1^1)x - a_2^1 y)$.

Aceşti operatori formează o algebră Lie L_5 cu ecuaţiile de structură

$$\begin{gathered}
[Y_1,Y_2]=a_1^1(a_2^2-a_1^1)Y_2,\quad [Y_2,Y_5]=a_1^1a_2^2[-a_2^1Y_1+a_2^1a_3^1Y_2+(a_1^1-a_2^2)Y_3],\\
a_2^2[Y_1,Y_3]=-[Y_1,Y_4]=-a_3^1a_2^2[Y_2,Y_3]=a_3^1[Y_2,Y_4]=a_1^1a_2^1a_3^1a_2^2Y_2,\\
[Y_1,Y_5]=a_1^1[a_2^1a_3^1a_2^2Y_1-a_2^1(a_3^1)^2a_2^2Y_2-a_3^1(a_1^1-a_2^2)Y_4+(a_1^1-a_2^2)Y_5],\\
[Y_3,Y_4]=0,\quad a_2^2[Y_3,Y_5]=-[Y_4,Y_5]=a_1^1a_2^1a_2^2[-a_3^1a_2^2Y_3+a_3^1Y_4-Y_5].
\end{gathered}\tag{3.96}$$

Cu ajutorul operatorilor Y_3 şi Y_4, ce formează în conformitate cu (3.95) şi (3.96) o algebră Lie bidimensională comutativă, obţinem în acest caz din (3.25), făcând abstracţie de o constantă, factorul integrant $\mu^{-1}=z(a_2^1y+a_3^1z)[(a_1^1-a_2^2)x+a_2^1y+a_3^1z]\Phi$, unde Φ este din (3.94).

Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 obţinem integralele prime funcţional independente (3.93) – (3.94) a sistemului (3.28). Condiţiile (3.18) şi $\varkappa_2 q_1\not\equiv 0$ din (3.29) – (3.30) ne asigură că în acest sistem nu toţi coeficienţii sunt egali cu zero. Teorema 3.19 este demonstrată.

3.12. Factorul integrant Lie şi integrala generală pentru sistemul (3.28) cu $\sigma_1\equiv 0$ şi $\varkappa_2 q_1\not\equiv 0$, în cazurile (3.19) – (3.20)

Teorema 3.20. *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.19) *cu* $\varkappa_2 q_1\not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30)*, atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x=x^1, y=x^2, z=x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$\begin{gathered}
F_1\equiv z[-a_1^2x+(a_1^1-a_3^3)y-a_3^2z]^{-1}=C_1;\\
F_2\equiv z^{-(a_1^1+a_2^2-a_3^3)}[-a_1^2x-(a_2^2-a_3^3)y-a_3^2z]^{a_3^3}\Phi^{a_1^1+a_2^2-2a_3^3}=C_2,
\end{gathered}\tag{3.97}$$

unde

$$\begin{gathered}
\Phi=a_1^2a_3^3(a_1^1+a_2^2-a_3^3)+2\{a_1^2(a_2^2g-a_1^2h)x+[a_3^3g(a_1^1+a_2^2-a_3^3)-\\
-a_1^1(a_2^2g-a_1^2h)]y+[-a_3^2(g(a_1^1-a_3^3)+a_1^2h)+a_1^2k(a_1^1+a_2^2-a_3^3)]z\}.
\end{gathered}\tag{3.98}$$

Demonstraţie. Presupunând că coordonatele operatorului (3.23) au forma (3.68), şi rezolvând sistemul (3.24) pentru sistemul diferenţial (3.28), obţinem operatorii ($x=x^1, y=x^2, z=x^3$)

$$\begin{gathered}
Y_1=[-2Wx-a_3^3(a_2^2-a_3^3)]z\frac{\partial}{\partial x}+[a_1^2a_3^3-2Wy]z\frac{\partial}{\partial y}-2Wz^2\frac{\partial}{\partial z},\\
Y_2=(Vx-a_3^2a_3^3)z\frac{\partial}{\partial x}+Vyz\frac{\partial}{\partial y}+(a_1^2a_3^3+Vz)z\frac{\partial}{\partial z},
\end{gathered}$$

$$Y_3 = [a_1^2a_3^3Tx + 2a_1^2Ux^2 + 2(a_3^3gT - a_1^1U)xy + a_3^2(a_3^3T + 2Ux)z]\frac{\partial}{\partial x}+$$
$$+[a_1^2a_3^3T + 2a_1^2Ux + 2(a_3^3gT - a_1^1U)y + 2a_3^2Uz]y\frac{\partial}{\partial y}+$$
$$+2[a_1^2Ux + (a_3^3gT - a_1^1U)y + a_3^2Uz]z\frac{\partial}{\partial z},$$
$$Y_4 = \{a_1^2a_3^3(a_3^3gT - a_1^1U)x + a_3^3(-a_1^1a_2^2 + a_3^3T)Uy+$$
$$+2a_3^3[a_3^3g^2T - (a_1^1g + a_1^2h)U]xy - a_3^2a_3^3WTz - 2a_3^2WUxz\}\frac{\partial}{\partial x}+$$
$$+[-(a_1^2)^2a_3^3Ux + a_1^2a_3^3(a_3^3gT - a_2^2U)y + 2a_3^3[a_3^3g^2T - (a_1^1g + a_1^2h)U]y^2-$$
$$-2a_3^2UWyz]\frac{\partial}{\partial y} + \{2a_3^3[a_3^3g^2T - (a_1^1g + a_1^2h)U]yz - 2a_3^2UWz^2\}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.99}$$
$$Y_5 = \{a_3^3[-a_1^2a_3^2[(a_1^1 - a_3^3)g + a_1^2h] + (a_1^2)^2kT]x-$$
$$-a_3^2a_3^3(a_1^1 - a_3^3)Uy + a_3^3[(a_1^1 - a_3^3)g + a_1^2h]Vxy - a_3^2a_3^3(a_3^2g - a_1^2k)Tz+$$
$$+a_3^2UVxz\}\frac{\partial}{\partial x} + \{-a_1^2a_3^3(a_3^2g - a_1^2k)Ty + a_3^3[(a_1^1 - a_3^3)g+$$
$$+a_1^2h]Vy^2 + a_3^2UVyz\}\frac{\partial}{\partial y} + \{-(a_1^2)^2a_3^3Ux + a_1^2a_3^3(a_1^1 - a_3^3)Uy+$$
$$a_3^3[(a_1^1 - a_3^3)g + a_1^2h]Vyz + a_3^2UVz^2\}\frac{\partial}{\partial z},$$

unde

$$W = (a_2^2 - a_3^3)g - a_1^2h, V = -2(a_3^2g - a_1^2k),$$
$$T = a_1^1 + a_2^2 - a_3^3, U = a_2^2g - a_1^2h. \tag{3.100}$$

Aceşti operatori formează o algebră Lie L_5 cu ecuaţiile de structură

$$[Y_1, Y_2] = -a_1^2a_3^3Y_1, \quad [Y_1, Y_3] = a_1^2a_3^3TY_1,$$
$$[Y_1, Y_4] = a_1^2(a_3^3)^2[(a_1^1 - a_3^3)g + a_1^2h]Y_1,$$
$$[Y_1, Y_5] = -a_1^2a_3^3[-\frac{TV}{2}Y_1 - (T - a_3^3)UY_2 + WY_3 + Y_4],$$
$$[Y_2, Y_3] = 0, \quad [Y_2, Y_4] = a_1^2a_3^2a_3^3UY_1,$$
$$[Y_2, Y_5] = a_1^2a_3^3(a_3^2UY_2 + \frac{V}{2}Y_3 - Y_5), \tag{3.101}$$
$$[Y_3, Y_4] = -a_1^2a_3^2a_3^3TUY_1,$$
$$[Y_3, Y_5] = a_1^2a_3^3(-a_3^2TUY_2 - \frac{TV}{2}Y_3 + TY_5),$$
$$[Y_4, Y_5] = a_1^2a_3^3\{\frac{a_3^2TUV}{2}Y_1 + a_3^2TUWY_2 + [a_3^2a_3^3g^2T - a_3^2U^2-$$
$$-a_1^2a_3^3k[(a_1^1 - a_3^3)g + a_1^2h]]Y_3 - a_3^2UY_4 + a_3^3[(a_1^1 - a_3^3)g + a_1^2h]Y_5\},$$

unde T, U, V sunt din (3.100).

Cu ajutorul operatorilor Y_2 şi Y_3, ce formează în conformitate cu (3.99) şi (3.101) o algebră Lie bidimensională comutativă, obţinem în acest caz din (3.25), făcând abstracţie de o constantă, factorul integrant $\mu^{-1} = z(-a_1^2x + (a_1^1 - a_3^3)y - a_3^2z)(-a_1^2x - (a_2^2 - a_3^3)y - a_3^2z)\Phi$, unde Φ este din (3.98).

Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 obţinem integralele prime funcţional independente (3.97) – (3.98) a sistemului (3.28). Condiţiile (3.19) şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$, din (3.29) – (3.30), ne asigură că în acest sistem nu toţi coeficienţii sunt egali cu zero. Teorema 3.20 este demonstrată.

Teorema 3.21. *Dacă coeficienţii părţii liniare a sistemului Darboux* (3.28) *satisfac condiţiilor* (3.20) *cu* $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$ *din* (3.29) – (3.30), *atunci integrala generală a acestui sistem cu notaţiile* $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ *constă din următoarele două integrale prime:*

$$F_1 \equiv (a_2^3x - a_2^1z)[a_2^3y + (a_1^1 - a_2^2)z]^{-1} = C_1;$$
$$F_2 \equiv (a_2^3x - a_2^1z)^{a_1^1-a_2^2-a_3^3}[a_2^3y - (a_1^1 - a_3^3)z]^{a_1^1}\Phi^{-2a_1^1+a_2^2+a_3^3} = C_2, \tag{3.102}$$

unde

$$\begin{gathered}\Phi = a_2^3(a_1^1 - a_2^2 - a_3^3)(a_1^1 + 2gx) + 2a_2^3(a_2^1g - a_3^3h + a_2^3k)y+\\ +2[-a_2^1(a_1^1 - a_3^3)g + a_1^1(a_1^1 - a_2^2 - a_3^3)h+\\ +a_2^2(a_3^3h - a_2^3k)]z.\end{gathered} \tag{3.103}$$

Demonstraţie. Presupunând că coordonatele operatorului (3.23) au forma (3.68), şi rezolvând sistemul (3.24) pentru sistemul diferenţial (3.28), obţinem operatorii ($x = x^1, y = x^2, z = x^3$)

$$\begin{gathered}Y_1 = (a_1^1 + 2gx)(a_2^3x - a_2^1z)\frac{\partial}{\partial x} + 2g(a_2^3x - a_2^1z)y\frac{\partial}{\partial y} + 2g(a_2^3x - a_2^1z)z\frac{\partial}{\partial z},\\ Y_2 = (a_1^1 + 2gx)(a_2^3y + (a_1^1 - a_2^2)z)\frac{\partial}{\partial x} + 2g(a_2^3y + (a_1^1 - a_2^2)z)y\frac{\partial}{\partial y}+\\ +2g(a_2^3y + (a_1^1 - a_2^2)z)z\frac{\partial}{\partial z},\\ Y_3 = (2a_2^3Wxy + a_1^1a_2^1Tz - 2(a_2^2W - a_1^1hT)xz)\frac{\partial}{\partial x}+\\ +[a_1^1a_2^3T + 2a_2^3Wy - 2(a_2^2W - a_1^1hT)z]y\frac{\partial}{\partial y} + [a_1^1a_2^3T+\\ +2a_2^3Wy - 2(a_2^2W - a_1^1hT)z]z\frac{\partial}{\partial z},\end{gathered}$$

$$Y_4 = \{-2a_2^3(a_1^1hT + a_3^3(a_3^3h - a_2^3k) - a_2^1(a_1^1 - a_2^2)g)xy+$$
$$+a_1^1a_2^1(a_1^1 - a_2^2)Tz + 2(a_1^1 - a_2^2)[(a_1^1 - a_3^3)(a_3^3h - a_2^3k) - a_2^1a_2^2g]xz\}\frac{\partial}{\partial x}+$$
$$+\{-a_1^1a_2^3(a_2^2 - a_3^3)Ty - 2a_2^3[a_1^1hT + a_3^3(a_3^3h - a_2^3k)-$$
$$-a_2^1g(a_1^1 - a_2^2)]y^2 - a_1^1(a_1^1 - a_2^2)(a_1^1 - a_3^3)Tz + 2(a_1^1 - a_2^2)[(a_3^3h-$$
$$-a_2^3k)(a_1^1 - a_3^3) - a_2^1a_2^2g]yz\}\frac{\partial}{\partial y} + \{-a_1^1(a_2^3)^2Ty - 2a_2^3[a_1^1hT+$$
$$+a_3^3(a_3^3h - a_2^3k) - a_2^1g(a_1^1 - a_2^2)]yz + 2(a_1^1 - a_2^2)[(a_3^3h - a_2^3k)(a_1^1 - a_3^3)-$$
$$-a_2^1a_2^2g]z^2\}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.104}$$
$$Y_5 = \{-a_1^1a_2^3[(a_1^1 - a_3^3)h + a_2^3k]Tx + 2a_2^1a_2^3gWxy+$$
$$+a_1^1a_2^1[a_2^1g + (a_1^1 - a_3^3)h + a_2^3k]Tz - 2a_2^1g(a_2^2W - a_1^1hT)xz\}\frac{\partial}{\partial x}+$$
$$+[a_1^1a_2^3(a_1^1 - a_3^3)gTx + a_1^1a_2^1a_2^3gTy + 2a_2^1a_2^3gWy^2-$$
$$-a_1^1a_2^1(a_1^1 - a_3^3)gTz - 2a_2^1g(a_2^2W - a_1^1hT)yz]\frac{\partial}{\partial y}+$$
$$+[a_1^1(a_2^3)^2gTx + 2a_2^1a_2^3gWyz - 2a_2^1g(a_2^2W - a_1^1hT)z^2]\frac{\partial}{\partial z},$$
unde
$$W = a_2^1g - a_3^3h + a_2^3k, \;\; T = a_1^1 - a_2^2 - a_3^3. \tag{3.105}$$
Aceşti operatori formează o algebră Lie L_5 cu ecuaţiile de structură
$$a_2^1T[Y_1, Y_2] = [Y_1, Y_4] = a_2^1[Y_2, Y_3] = -T[Y_3, Y_4] = -a_1^1a_2^1a_2^3TY_2,$$
$$[Y_1, Y_3] = 0, \;\; [Y_1, Y_5] = a_1^1a_2^3[(a_2^1g + (a_1^1 - a_3^3)h + a_2^3k)TY_1 - a_2^1gY_3 + Y_5,$$
$$[Y_2, Y_5] = a_1^1a_2^3[-(2a_1^1 - a_2^2 - a_3^3)gTY_1 - [a_2^1g + (a_1^1 - a_3^3)h + a_2^3k]TY_2+$$
$$+(a_1^1 - a_2^2)gY_3 - gY_4], \;\; [Y_2, Y_4] = a_1^1a_2^3(a_1^1 - a_3^3)TY_2, \tag{3.106}$$
$$[Y_3, Y_5] = a_1^1a_2^3T\{-[a_2^1g + (a_1^1 - a_3^3)h + a_2^3k]TY_1 + a_2^1gY_3 - Y_5\},$$
$$[Y_4, Y_5] = -a_1^1a_2^3T\{[a_2^1g(a_1^1 - a_2^2) - [(a_1^1 - a_3^3)h + a_2^3k](a_1^1 - a_3^3)]TY_1+$$
$$+a_2^1(a_2^1g + (a_1^1 - a_3^3)h + a_2^3k)TY_2 + a_2^1(a_2^2 - a_3^3)gY_3 + a_2^1gY_4 - (a_1^1 - a_3^3)Y_5\}.$$
Cu ajutorul operatorilor Y_1 şi Y_3, ce formează în conformitate cu (3.104) şi (3.105) o algebră Lie bidimensională comutativă, obţinem în acest caz din (3.25), făcând abstracţie de o constantă, factorul integrant $\mu^{-1} = (a_2^3x - a_2^1z)[a_2^3y + (a_1^1 - a_2^2)z][a_2^3y - (a_1^1 - a_3^3)z]\Phi$, unde Φ este din (3.103).

Cu ajutorul acestei expresii şi a Teoremei 3.3 obţinem integralele prime funcţional independente (3.102) – (3.103) a sistemului (3.28). Condiţiile (3.20) şi $\varkappa_2 q_1 \not\equiv 0$, din (3.29) – (3.30), ne asigură că în acest sistem nu toţi coeficienţii sunt egali cu zero. Teorema 3.21 este demonstrată.

3.13. Concluzii la capitolul 3

În capitolul trei au fost supuse cercetării sistemele ternare cu neliniarităţi polinomiale şi un caz special, când sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice posedă forma de tip Darboux. Folosind teoremele lui Lyapunov despre stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate, au fost determinate condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate pentru orice sistem diferenţial ternar cu neliniarităţi polinomiale, când părţile reale a rădăcinilor ecuaţiei caracteristice sunt diferite de zero.

A fost studiat sistemul diferenţial ternar de tip Darboux (3.28) cu neliniarităţi pătratice la stabilitatea mişcării neperturbate, în cazul unei rădăcini nule (cazul critic) şi a două rădăcini pur imaginare a ecuaţiei caracteristice, precum şi integrabilitatea acestui sistem în cazul rădăcinilor reale a acestei ecuaţii, când σ_1, din (3.5), este identic zero. Unele cazuri de integrabilitate a sistemului de tip Darboux (3.47) cu $\sigma_1 \not\equiv 0$, din (3.5), au fost examinate în [34], fără a studia stabilitatea mişcării neperturbate descrise de aceste sisteme.

Vom menţiona că aşa o tratare a stabilităţii mişcării neperturbate cu ajutorul algebrelor Lie, invarianţilor şi comitanţilor, pentru sistemele diferenţiale ternare, nu a mai fost întâlnită până în prezent. Deoarece aceste sisteme conţin în ele unele modele matematice, ce descriu diverse procese din viaţa cotidiană, pentru utilizatorii efectului de stabilitate a mişcării este mult mai uşor să utilizeze aceste condiţii, fără a intra în amănuntele teoriei stabilităţii mişcării.

Ţinând cont de rezultatele obţinute în capitolul trei, deducem următoarele concluzii:

1. Pentru sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi polinomiale a fost continuat studiul invarianţilor şi comitanţilor micşti, început în [34] cu aplicaţii la problemele de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de aceste sisteme.

2. Pentru sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi polinomiale de orice grad, în cazul necritic (când ecuaţia caracteristică a părţii liniare posedă rădăcini cu partea reală nenulă), au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de aceste sisteme.

3. Au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate în cazul critic, când ecuaţia caracteristică a sistemului diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux posedă o rădăcină nulă (cazul critic), precum şi cazul a două rădăcini pur imaginare. În ultimul caz a fost construită integrala Lyapunov, iar când rădăcina reală este nulă, a fost construită integrala generală.

4. Au fost construite algebrele Lie pentru sistemele diferenţiale ternare de tip Darboux cu neliniarităţi pătratice, pentru toate cazurile posibile descrise de identitatea cu zero a integralei invariante $\sigma_1 \equiv 0$ din (3.5). Cu ajutorul algebrelor Lie menţionate, au fost obţinute integralele generale pentru toate sistemele Darboux, ce se află pe varietatea $\sigma_1 \equiv 0$.

Rezultatele expuse, în acest capitol, au fost publicate în [50], [49, 57].

4. PROBLEME DE INTEGRABILITATE ŞI STABILITATE PENTRU SISTEMUL TERNAR GENERALIZAT DE TIP LYAPUNOV–DARBOUX

4.1. Forma canonică a sistemului generalizat ternar de tip Darboux

Vom examina sistemul diferenţial cu neliniarităţi pătratice de forma

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (j, \alpha, \beta = \overline{1,3}), \tag{4.1}$$

unde tensorul $a^j_{\alpha\beta}$ este simetric după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală. Coeficienţii şi variabilele acestui sistem iau valori din câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$.

Studiul sistemului general (4.1) nu este deloc simplu. De aceea vom determina o *varietate $GL(3,\mathbb{R})$–invariantă, pe care proiecţia sistemului* (4.1) *ar fi mai simplă* şi totodată ar fi mai aproape de unele sisteme, ce se întâlnesc în practică, de exemplu, sistemul ternar Darboux [34], sistemul Lorentz [72], sistemul dinamicii răspândirii tuberculozei [63, 65] şi sistemul SIV [66]. Să observăm că în aceste 4 sisteme de ecuaţii în partea pătratică a ecuaţiei fiecărui sistem se repetă unul şi acelaşi factor liniar comun. De aceea şi apare problema construirii condiţiilor $GL(3,\mathbb{R})$–invariante, când părţile pătratice ale ecuaţiilor din (4.1) au unul şi acelaşi factor liniar comun cu coeficienţi reali.

Considerăm matricea părţilor pătratice a sistemului (4.1) în următoarea formă:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & a^1_{13} & a^1_{22} & a^1_{23} & a^1_{33} \\ a^2_{11} & a^2_{12} & a^2_{13} & a^2_{22} & a^2_{23} & a^2_{33} \\ a^3_{11} & a^3_{12} & a^3_{13} & a^3_{22} & a^3_{23} & a^3_{33} \end{pmatrix}.$$

Notăm prin Δ_{ijk} minorul de ordinul trei al matricei A, ce este construit pe coloanele diferite *i, j, k* ale ei, unde $1 \le i, j, k \le 6$. Obţinem 20 de minori diferiţi ai acestei matrici ce au următoarele expresii:

$$\Delta_{125} = -a^1_{23}a^2_{12}a^3_{11} + a^1_{12}a^2_{23}a^3_{11} + a^1_{23}a^2_{11}a^3_{12} - a^1_{11}a^2_{23}a^3_{12} - a^1_{12}a^2_{11}a^3_{23} + a^1_{11}a^2_{12}a^3_{23};$$

$$\Delta_{126} = -a^1_{33}a^2_{12}a^3_{11} + a^1_{12}a^2_{33}a^3_{11} + a^1_{33}a^2_{11}a^3_{12} - a^1_{11}a^2_{33}a^3_{12} - a^1_{12}a^2_{11}a^3_{33} + a^1_{11}a^2_{12}a^3_{33};$$

$$\Delta_{134} = -a^1_{22}a^2_{13}a^3_{11} + a^1_{13}a^2_{22}a^3_{11} + a^1_{22}a^2_{11}a^3_{13} - a^1_{11}a^2_{22}a^3_{13} - a^1_{13}a^2_{11}a^3_{22} + a^1_{11}a^2_{13}a^3_{22};$$

$$\Delta_{135} = -a^1_{23}a^2_{13}a^3_{11} + a^1_{13}a^2_{23}a^3_{11} + a^1_{23}a^2_{11}a^3_{13} - a^1_{11}a^2_{23}a^3_{13} - a^1_{13}a^2_{11}a^3_{23} + a^1_{11}a^2_{13}a^3_{23};$$

$$\Delta_{136} = -a^1_{33}a^2_{13}a^3_{11} + a^1_{13}a^2_{33}a^3_{11} + a^1_{33}a^2_{11}a^3_{13} - a^1_{11}a^2_{33}a^3_{13} - a^1_{13}a^2_{11}a^3_{33} + a^1_{11}a^2_{13}a^3_{33};$$

$$\Delta_{145} = -a^1_{23}a^2_{22}a^3_{11} + a^1_{22}a^2_{23}a^3_{11} + a^1_{23}a^2_{11}a^3_{22} - a^1_{11}a^2_{23}a^3_{22} - a^1_{22}a^2_{11}a^3_{23} + a^1_{11}a^2_{22}a^3_{23};$$

$$\Delta_{146} = -a^1_{33}a^2_{22}a^3_{11} + a^1_{22}a^2_{33}a^3_{11} + a^1_{33}a^2_{11}a^3_{22} - a^1_{11}a^2_{33}a^3_{22} - a^1_{22}a^2_{11}a^3_{33} + a^1_{11}a^2_{22}a^3_{33};$$

$$\Delta_{156} = -a^1_{33}a^2_{23}a^3_{11} + a^1_{23}a^2_{33}a^3_{11} + a^1_{33}a^2_{11}a^3_{23} - a^1_{11}a^2_{33}a^3_{23} - a^1_{23}a^2_{11}a^3_{33} + a^1_{11}a^2_{23}a^3_{33};$$

$$\Delta_{234} = -a^1_{22}a^2_{13}a^3_{12} + a^1_{13}a^2_{22}a^3_{12} + a^1_{22}a^2_{12}a^3_{13} - a^1_{12}a^2_{22}a^3_{13} - a^1_{13}a^2_{12}a^3_{22} + a^1_{12}a^2_{13}a^3_{22};$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{235} &= -a^1_{23}a^2_{13}a^3_{12} + a^1_{13}a^2_{23}a^3_{12} + a^1_{23}a^2_{12}a^3_{13} - a^1_{12}a^2_{23}a^3_{13} - a^1_{13}a^2_{12}a^3_{23} + a^1_{12}a^2_{13}a^3_{23};\\
\Delta_{236} &= -a^1_{33}a^2_{13}a^3_{12} + a^1_{13}a^2_{33}a^3_{12} + a^1_{33}a^2_{12}a^3_{13} - a^1_{12}a^2_{33}a^3_{13} - a^1_{13}a^2_{12}a^3_{33} + a^1_{12}a^2_{13}a^3_{33};\\
\Delta_{245} &= -a^1_{23}a^2_{22}a^3_{12} + a^1_{22}a^2_{23}a^3_{12} + a^1_{23}a^2_{12}a^3_{22} - a^1_{12}a^2_{23}a^3_{22} - a^1_{22}a^2_{12}a^3_{23} + a^1_{12}a^2_{22}a^3_{23};\\
\Delta_{246} &= -a^1_{33}a^2_{22}a^3_{12} + a^1_{22}a^2_{33}a^3_{12} + a^1_{33}a^2_{12}a^3_{22} - a^1_{12}a^2_{33}a^3_{22} - a^1_{22}a^2_{12}a^3_{33} + a^1_{12}a^2_{22}a^3_{33};\\
\Delta_{256} &= -a^1_{33}a^2_{23}a^3_{12} + a^1_{23}a^2_{33}a^3_{12} + a^1_{33}a^2_{12}a^3_{23} - a^1_{12}a^2_{33}a^3_{23} - a^1_{23}a^2_{12}a^3_{33} + a^1_{12}a^2_{23}a^3_{33};\\
\Delta_{345} &= -a^1_{23}a^2_{22}a^3_{13} + a^1_{22}a^2_{23}a^3_{13} + a^1_{23}a^2_{13}a^3_{22} - a^1_{13}a^2_{23}a^3_{22} - a^1_{22}a^2_{13}a^3_{23} + a^1_{13}a^2_{22}a^3_{23};\\
\Delta_{346} &= -a^1_{33}a^2_{22}a^3_{13} + a^1_{22}a^2_{33}a^3_{13} + a^1_{33}a^2_{13}a^3_{22} - a^1_{13}a^2_{33}a^3_{22} - a^1_{22}a^2_{13}a^3_{33} + a^1_{13}a^2_{22}a^3_{33};\\
\Delta_{356} &= -a^1_{33}a^2_{23}a^3_{13} + a^1_{23}a^2_{33}a^3_{13} + a^1_{33}a^2_{13}a^3_{23} - a^1_{13}a^2_{33}a^3_{23} - a^1_{23}a^2_{13}a^3_{33} + a^1_{13}a^2_{23}a^3_{33};\\
\Delta_{456} &= -a^1_{33}a^2_{23}a^3_{22} + a^1_{23}a^2_{33}a^3_{22} + a^1_{33}a^2_{22}a^3_{23} - a^1_{22}a^2_{33}a^3_{23} - a^1_{23}a^2_{22}a^3_{33} + a^1_{22}a^2_{23}a^3_{33}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

În [34] s-a arătat că comitantul $p_5 = a^\alpha_{\delta p}a^\beta_{nq}a^\gamma_{\lambda r}x^\delta x^\eta x^\lambda \varepsilon^{pqr}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ poate fi scris cu ajutorul minorilor (4.2) în felul următor:

$$\begin{aligned}
f \equiv \frac{1}{6}p_5 &= \Delta_{123}(x^1)^3 + (\Delta_{125} - \Delta_{134})(x^1)^2x^2 + (\Delta_{126} - \Delta_{135})(x^1)^2x^3 +\\
&+(\Delta_{145} - \Delta_{234})x^1(x^2)^2 + (\Delta_{146} - 2\Delta_{235})x^1x^2x^3 + (\Delta_{156} - \Delta_{236})x^1(x^3)^2 +\\
&+\Delta_{245}(x^2)^3 + (\Delta_{246} + \Delta_{345})(x^2)^2x^3 + (\Delta_{256} + \Delta_{346})x^2(x^3)^2 + \Delta_{356}(x^3)^3,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

unde în p_5 trivectorii unitate au coordonatele $\varepsilon^{123} = -\varepsilon^{132} = \varepsilon^{312} = -\varepsilon^{321} = \varepsilon^{231} = -\varepsilon^{213} = 1$ şi $\varepsilon^{pqr} = 0$ ($\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{132} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{321} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = 1$ şi $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$).

Observăm că în f din (4.3), lipsesc minorii $\Delta_{124}, \Delta_{136}, \Delta_{145}$.

Se poate verifica cu ajutorul contravarianţilor din [34]

$$\begin{aligned}
r_2 = a^\alpha_{mp}a^\beta_{nq}a^\gamma_{lr}u_\alpha u_\beta u_\gamma \varepsilon^{mnl}\varepsilon^{pqr}, \; r_3 = a^\alpha_{mp}a^\beta_{nq}a^\gamma_{l\gamma}u_\alpha u_\beta u_r \varepsilon^{mnl}\varepsilon^{pqr},\\
r_5 = a^\alpha_{mp}a^\beta_{n\gamma}a^\gamma_{\beta q}u_\alpha u_l u_r \varepsilon^{mnl}\varepsilon^{pqr}, \;\; r_6 = a^\alpha_{mp}a^\beta_{n\beta}a^\gamma_{\gamma q}u_\alpha u_l u_r \varepsilon^{mnl}\varepsilon^{pqr},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

că expresia

$$\begin{aligned}
F &= \Delta_{456}(u_1)^3 + (\Delta_{346} - 2\Delta_{256})(u_1)^2u_2 + (\Delta_{156} + 2\Delta_{236})u_1(u_2)^2 - \Delta_{136}(u_2)^3 +\\
&+(\Delta_{246} - 2\Delta_{345})(u_1)^2u_3 + (-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})u_1u_2u_3 + (\Delta_{126} + 2\Delta_{135})(u_2)^2u_3 +\\
&+(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})u_1(u_3)^2 + (-\Delta_{134} - 2\Delta_{125})u_2(u_3)^2 + \Delta_{124}(u_3)^3,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

conţine minorii $\Delta_{124}, \Delta_{136}, \Delta_{145}$, unde $6F = 3(r_3 - r_5 + r_6) - r_2$.

Urmând [73] putem constata că expresiile (4.3) şi (4.5) sunt analogul comitantului f şi contravariantului F calculaţi de Hermite pentru trei forme ternare pătratice diferite.

Considerăm forma ternară cubică

$$\varphi = a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3), \tag{4.6}$$

unde coeficienţii $a_{\alpha\beta\gamma}$ sunt simetrici după indicii de jos, după care aici se efectuează convoluţia totală.

Fie expresia (4.6) dată sub forma simbolică a lui Aronhold [70], care se va scrie

$$\varphi = (ax)^3 = (bx)^3 = (cx)^3 = (dx)^3 = \cdots, \tag{4.7}$$

unde

$$a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3), d = (d_1, d_2, d_3) \tag{4.8}$$

sunt vectorii ideali paraleli [70]. De exemplu, înscrierea (ax) înseamnă $(ax) = a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3$. Celelalte notaţii $(bx), (cx), (dx)$ se scriu în mod similar.

Din [70], cu ajutorul înscrierii (4.7), examinăm expresia

$$S\varphi = \frac{1}{24}[abc][abd][acd][bcd]. \tag{4.9}$$

Utilizând (4.8), egalitatea (4.9) se va scrie în felul următor:

$$\begin{aligned} S\varphi = \frac{1}{24} &\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{24}&(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3)\cdot \\ &\cdot(a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3)\cdot \\ &\cdot(a_1c_2d_3 + a_2c_3d_1 + a_3c_1d_2 - a_3c_2d_1 - a_1c_3d_2 - a_2c_1d_3)\cdot \\ &\cdot(b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_3c_2d_1 - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Comparând înscrierile formei φ din (4.6) şi (4.7) obţinem relaţiile

$$\begin{gathered} a_1^3 = b_1^3 = c_1^3 = d_1^3 = a_{111}; \\ a_1^2a_2 = b_1^2b_2 = c_1^2c_2 = d_1^2d_2 = a_{112}; \\ a_1a_2^2 = b_1b_2^2 = c_1c_2^2 = d_1d_2^2 = a_{122}; \\ a_2^3 = b_2^3 = c_2^3 = d_2^3 = a_{222}; \\ a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 = c_1c_2c_3 = d_1d_2d_3 = a_{123}; \\ a_1^2a_3 = b_1^2b_3 = c_1^2c_3 = d_1^2d_3 = a_{113}; \\ a_1a_3^2 = b_1b_3^2 = c_1c_3^2 = d_1d_3^2 = a_{133}; \\ a_2^2a_3 = b_2^2b_3 = c_2^2c_3 = d_2^2d_3 = a_{223}; \\ a_2a_3^2 = b_2b_3^2 = c_2c_3^2 = d_2d_3^2 = a_{233}; \\ a_3^3 = b_3^3 = c_3^3 = d_3^3 = a_{333}. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Substituind egalităţile (4.11) în (4.10) avem

$$\begin{gathered}
S\varphi=(a_{123})^4-2a_{122}(a_{123})^2a_{133}+(a_{122})^2(a_{133})^2+a_{113}a_{123}a_{133}a_{222}-\\
-a_{112}(a_{133})^2a_{222}-2a_{113}(a_{123})^2a_{223}-a_{113}a_{122}a_{133}a_{223}+3a_{112}a_{123}a_{133}a_{223}+\\
+(a_{113})^2(a_{223})^2-a_{111}a_{133}(a_{223})^2+3a_{113}a_{122}a_{123}a_{233}-2a_{112}(a_{123})^2a_{233}-\\
-a_{112}a_{122}a_{133}a_{233}-(a_{113})^2a_{222}a_{233}+a_{111}a_{133}a_{222}a_{233}-a_{112}a_{113}a_{223}a_{233}+\\
+a_{111}a_{123}a_{223}a_{233}+(a_{112})^2(a_{233})^2-a_{111}a_{122}(a_{233})^2-a_{113}(a_{122})^2a_{333}+\\
+a_{112}a_{122}a_{123}a_{333}+a_{112}a_{113}a_{222}a_{333}-a_{111}a_{123}a_{222}a_{333}-(a_{112})^2a_{223}a_{333}+\\
+a_{111}a_{122}a_{223}a_{333},
\end{gathered}\tag{4.12}$$

unde $a_{\alpha\beta\gamma}$ sunt coeficienţii formei (4.6).

Cu ajutorul expresiei (4.12) vom calcula Sf şi SF, unde f şi F sunt respectiv comitantul şi contravariantul de tip Hermite pentru sistemul (4.1), obţinuţi în (4.3) şi (4.5).

Comparând (4.3) şi (4.6), pentru f avem

$$\begin{gathered}
a_{111}=\Delta_{123},\ \ a_{112}=\frac{1}{3}(\Delta_{125}-\Delta_{134}),\ \ a_{122}=\frac{1}{3}(\Delta_{145}-\Delta_{234}),\ \ a_{222}=\Delta_{245},\\
a_{123}=\frac{1}{6}(\Delta_{146}-2\Delta_{235}),\ \ a_{113}=\frac{1}{3}(\Delta_{126}-\Delta_{135}),\ \ a_{133}=\frac{1}{3}(\Delta_{156}-\Delta_{236}),\\
a_{223}=\frac{1}{3}(\Delta_{246}+\Delta_{345}),\ \ a_{233}=\frac{1}{3}(\Delta_{256}+\Delta_{346}),\ \ a_{333}=\Delta_{356}.
\end{gathered}\tag{4.13}$$

Introducând expresiile (4.13) în (4.12) obţinem

$$\begin{gathered}
1296Sf=(\Delta_{146}-2\Delta_{235})^4-8(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{146}-2\Delta_{235})^2(\Delta_{156}-\Delta_{236})+\\
+16(\Delta_{145}-\Delta_{234})^2(\Delta_{156}-\Delta_{236})^2+24(\Delta_{126}-\Delta_{135})(\Delta_{146}-2\Delta_{235})(\Delta_{156}-\Delta_{236})\Delta_{245}-\\
-48(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{156}-\Delta_{236})^2\Delta_{245}-8(\Delta_{126}-\Delta_{135})(\Delta_{146}-2\Delta_{235})^2(\Delta_{246}+\Delta_{345})-\\
-16(\Delta_{126}-\Delta_{135})(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{156}-\Delta_{236})(\Delta_{246}+\Delta_{345})+\\
+24(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{146}-2\Delta_{235})(\Delta_{156}-\Delta_{236})(\Delta_{246}+\Delta_{345})+\\
+16(\Delta_{126}-\Delta_{135})^2(\Delta_{246}+\Delta_{345})^2-48\Delta_{123}(\Delta_{156}-\Delta_{236})(\Delta_{246}+\Delta_{345})^2+\\
+24(\Delta_{126}-\Delta_{135})(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{146}-2\Delta_{235})(\Delta_{256}+\Delta_{346})-\\
-8(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{146}-2\Delta_{235})^2(\Delta_{256}+\Delta_{346})-\\
-16(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{156}-\Delta_{236})(\Delta_{256}+\Delta_{346})-\\
-48(\Delta_{126}-\Delta_{135})^2\Delta_{245}(\Delta_{256}+\Delta_{346})+144\Delta_{123}(\Delta_{156}-\Delta_{236})\Delta_{245}(\Delta_{256}+\Delta_{346})-\\
-16(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{126}-\Delta_{135})(\Delta_{246}+\Delta_{345})(\Delta_{256}+\Delta_{346})+\\
+24\Delta_{123}(\Delta_{146}-2\Delta_{235})(\Delta_{246}+\Delta_{345})(\Delta_{256}+\Delta_{346})+16(\Delta_{125}-\Delta_{134})^2(\Delta_{256}+\Delta_{346})^2-
\end{gathered}$$

$$-48\Delta_{123}(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{256}+\Delta_{346})^2-48(\Delta_{126}-\Delta_{135})(\Delta_{145}-\Delta_{234})^2\Delta_{356}+$$
$$+24(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{146}-2\Delta_{235})\Delta_{356}+$$
$$+144(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{126}-\Delta_{135})\Delta_{245}\Delta_{356}-216\Delta_{123}(\Delta_{146}-2\Delta_{235})\Delta_{245}\Delta_{356}- \tag{4.14}$$
$$-48(\Delta_{125}-\Delta_{134})^2(\Delta_{246}+\Delta_{345})\Delta_{356}+144\Delta_{123}(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{246}+\Delta_{345})\Delta_{356}.$$

Comparând (4.5) cu (4.6), pentru F avem

$$a_{111}=\Delta_{456},\ \ a_{112}=\frac{1}{3}(\Delta_{346}-2\Delta_{256}),\ \ a_{122}=\frac{1}{3}(\Delta_{156}+2\Delta_{236}),\ \ a_{222}=-\Delta_{136},$$
$$a_{123}=\frac{1}{6}(-\Delta_{146}-4\Delta_{235}),\ \ a_{113}=\frac{1}{3}(\Delta_{246}-2\Delta_{345}),\ \ a_{133}=\frac{1}{3}(\Delta_{145}+2\Delta_{234}), \tag{4.15}$$
$$a_{223}=\frac{1}{3}(\Delta_{126}+2\Delta_{135}),\ \ a_{233}=\frac{1}{3}(-\Delta_{134}-2\Delta_{125}),\ \ a_{333}=\Delta_{124}.$$

Introducând expresiile (4.15) în (4.12) obţinem

$$1296SF=(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})^4-8(\Delta_{145}+2\Delta_{234})(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})^2(\Delta_{156}+2\Delta_{236})-$$
$$-24\Delta_{136}(\Delta_{145}+2\Delta_{234})(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})(\Delta_{246}-2\Delta_{345})-$$
$$-8(\Delta_{126}+2\Delta_{135})(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})^2(\Delta_{246}-2\Delta_{345})-$$
$$-16(\Delta_{126}+2\Delta_{135})(\Delta_{145}+2\Delta_{234})(\Delta_{156}+2\Delta_{236})(\Delta_{246}-2\Delta_{345})+$$
$$+24(-2\Delta_{125}-\Delta_{134})(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})(\Delta_{156}+2\Delta_{236})(\Delta_{246}-2\Delta_{345})-$$
$$-48\Delta_{124}(\Delta_{156}+2\Delta_{236})^2(\Delta_{246}-2\Delta_{345})+16(\Delta_{126}+2\Delta_{135})^2(\Delta_{246}-2\Delta_{345})^2+$$
$$+48(-2\Delta_{125}-\Delta_{134})\Delta_{136}(\Delta_{246}-2\Delta_{345})^2+16(\Delta_{145}+2\Delta_{234})^2(\Delta_{156}+2\Delta_{236})^2+$$
$$+48\Delta_{136}(\Delta_{145}+2\Delta_{234})^2(-2\Delta_{256}+\Delta_{346})+$$
$$+24(\Delta_{126}+2\Delta_{135})(\Delta_{145}+2\Delta_{234})(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})(-2\Delta_{256}+\Delta_{346})-$$
$$-8(-2\Delta_{125}-\Delta_{134})(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})^2(-2\Delta_{256}+\Delta_{346})-$$
$$-16(-2\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{145}+2\Delta_{234})(\Delta_{156}+2\Delta_{236})(-2\Delta_{256}+\Delta_{346})+ \tag{4.16}$$
$$+24\Delta_{124}(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})(\Delta_{156}+2\Delta_{236})(-2\Delta_{256}+\Delta_{346})-$$
$$-16(-2\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{126}+2\Delta_{135})(\Delta_{246}-2\Delta_{345})(-2\Delta_{256}+\Delta_{346})-$$
$$-144\Delta_{124}\Delta_{136}(\Delta_{246}-2\Delta_{345})(-2\Delta_{256}+\Delta_{346})+$$
$$+16(-2\Delta_{125}-\Delta_{134})^2(-2\Delta_{256}+\Delta_{346})^2-$$
$$-48\Delta_{124}(\Delta_{126}+2\Delta_{135})(-2\Delta_{256}+\Delta_{346})^2-48(\Delta_{126}+2\Delta_{135})^2(\Delta_{145}+2\Delta_{234})\Delta_{456}-$$
$$-144(-2\Delta_{125}-\Delta_{134})\Delta_{136}(\Delta_{145}+2\Delta_{234})\Delta_{456}+$$
$$+24(-2\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{126}+2\Delta_{135})(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})\Delta_{456}+$$
$$+216\Delta_{124}\Delta_{136}(-\Delta_{146}-4\Delta_{235})\Delta_{456}-48(-2\Delta_{125}-\Delta_{134})^2(\Delta_{156}+2\Delta_{236})\Delta_{456}+$$
$$+144\Delta_{124}(\Delta_{126}+2\Delta_{135})(\Delta_{156}+2\Delta_{236})\Delta_{456}.$$

În baza formulei $R = SF - 16Sf$ din [73], despre rezultantul a trei forme pătratice ternare, cu ajutorul lui (4.14) şi (4.16) obţinem că rezultantul R a părţilor pătratice din membrii drepţi ai sistemului (4.1) are forma

$$
\begin{gathered}
1296R = (-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})^4 - 8(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})(-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})^2(\Delta_{156} + 2\Delta_{236}) - \\
-24\Delta_{136}(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})(-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})(\Delta_{246} - 2\Delta_{345}) + \\
+16(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})^2(\Delta_{156} + 2\Delta_{236})^2 - 8(\Delta_{126} + 2\Delta_{135})(-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})^2(\Delta_{246} - 2\Delta_{345}) - \\
-16(\Delta_{126} + 2\Delta_{135})(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})(\Delta_{156} + 2\Delta_{236})(\Delta_{246} - 2\Delta_{345}) + \\
+24(-2\Delta_{125} - \Delta_{134})(-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})(\Delta_{156} + 2\Delta_{236})(\Delta_{246} - 2\Delta_{345}) - \\
-48\Delta_{124}(\Delta_{156} + 2\Delta_{236})^2(\Delta_{246} - 2\Delta_{345}) + 16(\Delta_{126} + 2\Delta_{135})^2(\Delta_{246} - 2\Delta_{345})^2 + \\
+48(-2\Delta_{125} - \Delta_{134})\Delta_{136}(\Delta_{246} - 2\Delta_{345})^2 + 48\Delta_{136}(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})^2(-2\Delta_{256} + \Delta_{346}) + \\
+24(\Delta_{126} + 2\Delta_{135})(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})(-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})(-2\Delta_{256} + \Delta_{346}) - \\
-8(-2\Delta_{125} - \Delta_{134})(-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})^2(-2\Delta_{256} + \Delta_{346}) - \\
-16(-2\Delta_{125} - \Delta_{134})(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})(\Delta_{156} + 2\Delta_{236})(-2\Delta_{256} + \Delta_{346}) + \\
+24\Delta_{124}(-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})(\Delta_{156} + 2\Delta_{236})(-2\Delta_{256} + \Delta_{346}) - \\
-16(-2\Delta_{125} - \Delta_{134})(\Delta_{126} + 2\Delta_{135})(\Delta_{246} - 2\Delta_{345})(-2\Delta_{256} + \Delta_{346}) - \\
-144\Delta_{124}\Delta_{136}(\Delta_{246} - 2\Delta_{345})(-2\Delta_{256} + \Delta_{346}) + 16(-2\Delta_{125} - \Delta_{134})^2(-2\Delta_{256} + \Delta_{346})^2 - \\
-48\Delta_{124}(\Delta_{126} + 2\Delta_{135})(-2\Delta_{256} + \Delta_{346})^2 - 48(\Delta_{126} + 2\Delta_{135})^2(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})\Delta_{456} - \\
-144(-2\Delta_{125} - \Delta_{134})\Delta_{136}(\Delta_{145} + 2\Delta_{234})\Delta_{456} + 216\Delta_{124}\Delta_{136}(-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})\Delta_{456} + \\
+24(-2\Delta_{125} - \Delta_{134})(\Delta_{126} + 2\Delta_{135})(-\Delta_{146} - 4\Delta_{235})\Delta_{456} - \\
-48(-2\Delta_{125} - \Delta_{134})^2(\Delta_{156} + 2\Delta_{236})\Delta_{456} + 144\Delta_{124}(\Delta_{126} + 2\Delta_{135})(\Delta_{156} + 2\Delta_{236})\Delta_{456} - \\
-16((\Delta_{146} - 2\Delta_{235})^4 - 8(\Delta_{145} - \Delta_{234})(\Delta_{146} - 2\Delta_{235})^2(\Delta_{156} - \Delta_{236}) + \\
+16(\Delta_{145} - \Delta_{234})^2(\Delta_{156} - \Delta_{236})^2 + 24(\Delta_{126} - \Delta_{135})(\Delta_{146} - 2\Delta_{235})(\Delta_{156} - \Delta_{236})\Delta_{245} - \\
-48(\Delta_{125} - \Delta_{134})(\Delta_{156} - \Delta_{236})^2\Delta_{245} - 8(\Delta_{126} - \Delta_{135})(\Delta_{146} - 2\Delta_{235})^2(\Delta_{246} + \Delta_{345}) - \\
-16(\Delta_{126} - \Delta_{135})(\Delta_{145} - \Delta_{234})(\Delta_{156} - \Delta_{236})(\Delta_{246} + \Delta_{345}) + \\
+24(\Delta_{125} - \Delta_{134})(\Delta_{146} - 2\Delta_{235})(\Delta_{156} - \Delta_{236})(\Delta_{246} + \Delta_{345}) + \\
+16(\Delta_{126} - \Delta_{135})^2(\Delta_{246} + \Delta_{345})^2 - 48\Delta_{123}(\Delta_{156} - \Delta_{236})(\Delta_{246} + \Delta_{345})^2 + \\
+24(\Delta_{126} - \Delta_{135})(\Delta_{145} - \Delta_{234})(\Delta_{146} - 2\Delta_{235})(\Delta_{256} + \Delta_{346}) - \\
-8(\Delta_{125} - \Delta_{134})(\Delta_{146} - 2\Delta_{235})^2(\Delta_{256} + \Delta_{346}) - \\
-16(\Delta_{125} - \Delta_{134})(\Delta_{145} - \Delta_{234})(\Delta_{156} - \Delta_{236})(\Delta_{256} + \Delta_{346}) - \\
-48(\Delta_{126} - \Delta_{135})^2\Delta_{245}(\Delta_{256} + \Delta_{346}) + 144\Delta_{123}(\Delta_{156} - \Delta_{236})\Delta_{245}(\Delta_{256} + \Delta_{346}) -
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
-16(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{126}-\Delta_{135})(\Delta_{246}+\Delta_{345})(\Delta_{256}+\Delta_{346})+\\
+24\Delta_{123}(\Delta_{146}-2\Delta_{235})(\Delta_{246}+\Delta_{345})(\Delta_{256}+\Delta_{346})-\\
-48\Delta_{123}(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{256}+\Delta_{346})^2-48(\Delta_{126}-\Delta_{135})(\Delta_{145}-\Delta_{234})^2\Delta_{356}+\\
+24(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{146}-2\Delta_{235})\Delta_{356}+\\
+16(\Delta_{125}-\Delta_{134})^2(\Delta_{256}+\Delta_{346})^2+144(\Delta_{125}-\Delta_{134})(\Delta_{126}-\Delta_{135})\Delta_{245}\Delta_{356}-\\
-216\Delta_{123}(\Delta_{146}-2\Delta_{235})\Delta_{245}\Delta_{356}-48(\Delta_{125}-\Delta_{134})^2(\Delta_{246}+\Delta_{345})\Delta_{356}+\\
+144\Delta_{123}(\Delta_{145}-\Delta_{234})(\Delta_{246}+\Delta_{345})\Delta_{356}).
\end{gathered}
\tag{4.17}
$$

În aşa fel urmând [73] a fost demonstrată

Teorema 4.1. *Pentru ca părţile pătratice din membrii drepţi ai sistemului* (4.1) *să conţină un factor liniar comun este necesar şi suficient ca rezultantul R din* (4.17) *să fie egal cu zero.*

Presupunem că părţile pătratice din membrii drepţi ai sistemului (4.1) au forma

$$
P_2=a^1_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta,\ \ Q_2=a^2_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta,\ \ R_2=a^3_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta\ \ (\alpha,\beta=1,2,3),
\tag{4.18}
$$

şi se descompun într-un produs de doi factori liniari, dintre care unul este comun. Putem considera în calitate de aşa factor expresia (px), i.e.

$$
P_2=(px)(qx),\ \ Q_2=(px)(sx),\ \ R_2=(px)(nx),
\tag{4.19}
$$

unde

$$
p=(p_1,p_2,p_3),\ \ q=(q_1,q_2,q_3),\ \ s=(s_1,s_2,s_3),\ \ n=(n_1,n_2,n_3)
\tag{4.20}
$$

sunt vectorii adevăraţi [70].

În formă desfăşurată, din (4.18) – (4.20) obţinem

$$
\begin{gathered}
P_2=p_1q_1(x^1)^2+(p_1q_2+p_2q_1)x^1x^2+(p_1q_3+p_3q_1)x^1x^3+p_2q_2(x^2)^2+\\
+(p_2q_3+p_3q_2)x^2x^3+p_3q_3(x^3)^2,\\
Q_2=p_1s_1(x^1)^2+(p_1s_2+p_2s_1)x^1x^2+(p_1s_3+p_3s_1)x^1x^3+p_2s_2(x^2)^2+\\
+(p_2s_3+p_3s_2)x^2x^3+p_3s_3(x^3)^2,\\
R_2=p_1n_1(x^1)^2+(p_1n_2+p_2n_1)x^1x^2+(p_1n_3+p_3n_1)x^1x^3+p_2n_2(x^2)^2+\\
+(p_2n_3+p_3n_2)x^2x^3+p_3n_3(x^3)^2.
\end{gathered}
\tag{4.21}
$$

Comparând expresiile obţinute în (4.21) cu cele din (4.18), găsim respectiv

$$
a^1_{11}=p_1q_1,\ \ a^1_{12}=\frac{1}{2}(p_1q_2+p_2q_1),\ \ a^1_{13}=\frac{1}{2}(p_1q_3+p_3q_1),\ \ a^1_{22}=p_2q_2,\ \ a^1_{23}=\frac{1}{2}(p_2q_3+p_3q_2),
$$

$$
a^1_{33}=p_3q_3,\ \ a^2_{11}=p_1s_1,\ \ a^2_{12}=\frac{1}{2}(p_1s_2+p_2s_1),\ \ a^2_{13}=\frac{1}{2}(p_1s_3+p_3s_1),\ \ a^2_{22}=p_2s_2,
$$

$$a^2_{23} = \frac{1}{2}(p_2 s_3 + p_3 s_2),\ \ a^2_{33} = p_3 s_3,\ \ a^3_{11} = p_1 n_1,\ \ a^3_{12} = \frac{1}{2}(p_1 n_2 + p_2 n_1),$$

$$a^3_{13} = \frac{1}{2}(p_1 n_3 + p_3 n_1),\ \ a^3_{22} = p_2 n_2,\ \ a^3_{23} = \frac{1}{2}(p_2 n_3 + p_3 n_2),\ \ a^3_{33} = p_3 n_3.$$

Substituind aceste expresii în (4.2), apoi în (4.17), după calculele efectuate obţinem $R = 0$. Să observăm, că dacă (px) este factor comun doar în două expresii din (4.19), atunci parcurgând calea de mai sus obţinem din (4.17) că $R \neq 0$.

Nota 4.1. *În conformitate cu notaţiile* (4.18)*, rezultantul părţilor pătratice* (4.17) *a membrilor drepţi ai sistemului* (4.1) *îl vom scrie astfel*

$$R = Rez(P_2, Q_2, R_2). \tag{4.22}$$

Fie

$$\psi = a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{4.23}$$

o formă ternară pătratică, unde coeficienţii $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ sunt simetrici după indicii de jos după care aici se efectuează convoluţia totală.

Este cunoscut din [70] că determinantul acestei forme este

$$det(\varphi) = |a_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{4.24}$$

Remarca 4.1. *[70]. Dacă determinantul* (4.24) *a formei ternare pătratice* (4.23) *este egal cu zero, atunci această formă se descompune într-un produs de doi factori liniari cu coeficienţi imaginari sau reali.*

Nota 4.2. *În conformitate cu notaţiile* (4.18)*, determinanţii părţilor pătratice* (4.24) *a membrilor drepţi ai sistemului* (4.1) *îi vom scrie în felul următor:*

$$D_1 = det(P_2),\ \ D_2 = det(Q_2),\ \ D_3 = det(R_2). \tag{4.25}$$

Uşor se poate verifica

Propoziţia 4.1. *Dacă forma ternară* (4.23) *se descompune în doi factori liniari cu coeficienţi imaginari, atunci coeficienţii numerici de pe lângă aceleaşi variabile în ambii factori sunt conjugaţi.*

Lema 4.1. *Rezultantul R din* (4.17) *sau* (4.22) *a părţilor pătratice din membrii drepţi ai sistemului* (4.1) *este un invariant centroafin (în raport cu grupul $GL(3, \mathbb{R})$) al acestui sistem.*

Demonstraţie. Să observăm că rezultantul (4.17) satisface egalităţile

$$D_1^{(2)}(R) = D_2^{(2)}(R) = D_3^{(2)}(R) = -4R, D_i^{(2)} = 0 \quad (i = \overline{4,9}),$$

unde $D_j^{(2)}(j = \overline{1,9})$ sunt operatorii Lie de reprezentare a grupului $GL(3,\mathbb{R})$ în spaţiul coeficienţilor părţilor pătratice a sistemului (4.1) din [34].

Conform Teoremei 6.1 din [34], egalităţile de mai sus ne demonsrează că R este un invariant al grupului $GL(3,\mathbb{R})$. Lema 4.1 este demonstrată.

Teorema 4.2. *Fie $fF \not\equiv 0$ pentru f din* (4.3) *şi F din* (4.5). *Atunci pentru ca în părţile pătratice* (4.18) *a membrilor drepţi ai sistemului* (4.1) *să existe un factor comun cu coeficienţi reali este necesar şi suficient să se satisfacă următoarele condiţii invariante (în raport cu grupul centroafin $GL(3,\mathbb{R})$):*

$$r_2\Big|_{\substack{u_2=0\\u_3=0}} = r_2\Big|_{\substack{u_1=0\\u_3=0}} = r_2\Big|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = 0, \tag{4.26}$$

$$R = Rez(P_2, Q_2, R_2) = 0, \tag{4.27}$$

unde $r_2 = D_1(u_1)^3 + D_2(u_2)^3 + D_3(u_3)^3 + \cdots$ este din (4.4) *cu D_i $(i = 1,2,3)$ din* (4.25), *iar R din* (4.17) *cu P_2, Q_2 şi R_2 din* (4.18).

Demonstraţie. Observăm că egaltăţile (4.26) ne garantează egalitatea determinanţilor (4.25) cu zero, ceea ce induce, conform Remarcei 4.1, la reprezentarea părţilor pătratice P_2, Q_2, R_2 din (4.18) în formă de produs de factori liniari. Deoarece condiţiile (4.26) se conţin în contravariantul r_2 din (4.4), rezultă că ele sunt invariante.

Condiţia (4.27) ne garantează că P_2, Q_2 şi R_2 din (4.18) au un factor comun. Conform Lemei 4.1, această condiţie este invariantă.

Vom arăta că acest factor comun conţine coeficienţi reali. Dacă presupunem contrariul, atunci conform Propoziţiei 4.1 în cazul factorului liniar cu coeficienţi imaginari celălalt factor are coeficienţi conjugaţi. Şi prin urare, din (4.19), rezultă că cel puţin două polinoame sunt proporţionale. Aceasta implică ca toţi minorii (4.2) ai matricei A să fie egali cu zero şi, prin urmare, suntem în contrazicere cu $fF \not\equiv 0$. Teorema 4.2 este demonstrată.

Corolarul 4.1. *În condiţiile Teoremei 4.2, sistemul* (4.1) *printr-o transformare centroafină, poate fi adus la forma*

$$\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= a_\alpha^1 x^\alpha + x^1(q_1x^1 + q_2x^2 + q_3x^3),\\
\dot{x}^2 &= a_\alpha^2 x^\alpha + x^1(s_1x^1 + s_2x^2 + s_3x^3),\\
\dot{x}^3 &= a_\alpha^3 x^\alpha + x^1(n_1x^1 + n_2x^2 + n_3x^3).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Demonstraţie. În condiţiile Teoremei 4.2, sistemul (4.1) va avea forma

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= a^1_\alpha x^\alpha + (px)(qx),\\
\dot{x}^2 &= a^2_\alpha x^\alpha + (px)(rx),\\
\dot{x}^3 &= a^3_\alpha x^\alpha + (px)(nx).
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Deoarece în acest sistem cel puţin doi dintre factori $(qx), (rx), (nx)$ nu sunt proporţionali între ei şi în acelaşi timp cu (px), atunci efectuând substituţia, de exemplu

$$\overline{x}^1 = (px), \;\; \overline{x}^2 = (rx), \;\; \overline{x}^3 = (nx)$$

în sistemul (4.29) obţinem sistemul (4.28), în care pentru $\overline{x}^1, \overline{x}^2$, şi $\overline{x}^3$ s-au păstrat notaţiile iniţiale. Corolarul 4.1 este demonstrat.

Remarca 4.2. *Reeşind din forma sistemului* (4.1) *şi* (4.28) *ultimul poate fi scris în felul următor:*

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= a^1_\alpha x^\alpha + x^1(a^1_{11}x^1 + 2a^1_{12}x^2 + 2a^1_{13}x^3) \equiv P,\\
\dot{x}^2 &= a^2_\alpha x^\alpha + x^1(a^2_{11}x^1 + 2a^2_{12}x^2 + 2a^2_{13}x^3) \equiv Q,\\
\dot{x}^3 &= a^3_\alpha x^\alpha + x^1(a^3_{11}x^1 + 2a^3_{12}x^2 + 2a^3_{13}x^3) \equiv R.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Acest sistem îl vom numi *forma canonică a sistemului diferenţial ternar generalizat de tip Darboux cu neliniarităţi pătratice.*

4.2. Algebra Lie admisă de sistemul generalizat ternar de tip Darboux

Pentru simplitate, la determinarea algebrei Lie admisă de sistemul (4.30), vom introduce notaţiile $x^1 = x, \; x^2 = y, \; x^3 = z.$

Considerăm ecuaţiile determinante (3.24) pentru sistemul (4.30)

$$
\begin{aligned}
\xi^1_x P + \xi^1_y Q + \xi^1_z R &= \xi^1 P_x + \xi^2 P_y + \xi^3 P_z + D(P),\\
\xi^2_x P + \xi^2_y Q + \xi^2_z R &= \xi^1 Q_x + \xi^2 Q_y + \xi^3 Q_z + D(Q),\\
\xi^3_x P + \xi^3_y Q + \xi^3_z R &= \xi^1 R_x + \xi^2 R_y + \xi^3 R_z + D(R),
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

unde

$$
\begin{gathered}
D = \eta^1\frac{\partial}{\partial a^1_1} + \eta^2\frac{\partial}{\partial a^1_2} + \eta^3\frac{\partial}{\partial a^1_3} + \eta^4\frac{\partial}{\partial a^1_{11}} + \eta^5\frac{\partial}{\partial a^1_{12}} + \eta^6\frac{\partial}{\partial a^1_{13}} + \eta^7\frac{\partial}{\partial a^2_1} + \eta^8\frac{\partial}{\partial a^2_2} +\\
+\eta^9\frac{\partial}{\partial a^2_3} + \eta^{10}\frac{\partial}{\partial a^2_{11}} + \eta^{11}\frac{\partial}{\partial a^2_{12}} + \eta^{12}\frac{\partial}{\partial a^2_{13}} + \eta^{13}\frac{\partial}{\partial a^3_1} + \eta^{14}\frac{\partial}{\partial a^3_2} + \eta^{15}\frac{\partial}{\partial a^3_3} + \eta^{16}\frac{\partial}{\partial a^3_{11}} +\\
+\eta^{17}\frac{\partial}{\partial a^3_{12}} + \eta^{18}\frac{\partial}{\partial a^3_{13}},
\end{gathered}
\tag{4.32}
$$

P, Q, R sunt din (4.30) şi η^j $(j = \overline{1,18})$ sunt funcţii de la parametrii $a^1_1, a^1_2, a^1_3, a^2_1, a^2_2, a^2_3,$ $a^3_1, a^3_2, a^3_3, a^1_{11}, a^1_{12}, a^1_{13}, a^2_{11}, a^2_{12}, a^2_{13}, a^3_{11}, a^3_{12}, a^3_{13}$.

Vom considera

$$\xi^i = A^i x + B^i y + C^i z, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.33}$$

unde A^i, B^i, C^i sunt parametrii nedeterminaţi.

Scriem operatorul

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z} + D, \tag{4.34}$$

unde ξ^1, ξ^2, ξ^3 sunt din (4.33), iar D din (4.32).

Rezolvând sistemul ecuaţiilor determinante (4.31) cu operatorii (4.32), (4.34) cu coordonatele (4.33) obţinem 7 operatori liniari independenţi

$$\begin{gathered}
X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + a^1_2\frac{\partial}{\partial a^1_2} + a^1_3\frac{\partial}{\partial a^1_3} - a^1_{11}\frac{\partial}{\partial a^1_{11}} - a^2_1\frac{\partial}{\partial a^2_1} - 2a^2_{11}\frac{\partial}{\partial a^2_{11}} - a^2_{12}\frac{\partial}{\partial a^2_{12}} - a^2_{13}\frac{\partial}{\partial a^2_{13}} - \\
- a^3_1\frac{\partial}{\partial a^3_1} - 2a^3_{11}\frac{\partial}{\partial a^3_{11}} - a^3_{12}\frac{\partial}{\partial a^3_{12}} - a^3_{13}\frac{\partial}{\partial a^3_{13}}, \\
X_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - a^1_2\frac{\partial}{\partial a^1_2} - a^1_{12}\frac{\partial}{\partial a^1_{12}} + a^2_1\frac{\partial}{\partial a^2_1} + a^2_3\frac{\partial}{\partial a^2_3} + a^2_{11}\frac{\partial}{\partial a^2_{11}} + a^2_{13}\frac{\partial}{\partial a^2_{13}} - \\
- a^3_2\frac{\partial}{\partial a^3_2} - a^3_{12}\frac{\partial}{\partial a^3_{12}}, \\
X_3 = z\frac{\partial}{\partial z} - a^1_3\frac{\partial}{\partial a^1_3} - a^1_{13}\frac{\partial}{\partial a^1_{13}} - a^2_3\frac{\partial}{\partial a^2_3} - a^2_{13}\frac{\partial}{\partial a^2_{13}} + a^3_1\frac{\partial}{\partial a^3_1} + a^3_2\frac{\partial}{\partial a^3_2} + \\
+ a^3_{11}\frac{\partial}{\partial a^3_{11}} + a^3_{12}\frac{\partial}{\partial a^3_{12}}, \\
X_4 = x\frac{\partial}{\partial y} - a^1_2\frac{\partial}{\partial a^1_1} - 2a^1_{12}\frac{\partial}{\partial a^1_{11}} + (a^1_1 - a^2_2)\frac{\partial}{\partial a^2_1} + a^1_2\frac{\partial}{\partial a^2_2} + a^1_3\frac{\partial}{\partial a^2_3} + \\
+ (a^1_{11} - 2a^2_{12})\frac{\partial}{\partial a^2_{11}} + a^1_{12}\frac{\partial}{\partial a^2_{12}} + a^1_{13}\frac{\partial}{\partial a^2_{13}} - a^3_2\frac{\partial}{\partial a^3_1} - 2a^3_{12}\frac{\partial}{\partial a^3_{11}}, \\
X_5 = z\frac{\partial}{\partial y} - a^1_2\frac{\partial}{\partial a^1_3} - a^1_{12}\frac{\partial}{\partial a^1_{13}} + a^3_1\frac{\partial}{\partial a^2_1} + a^3_2\frac{\partial}{\partial a^2_2} + (-a^2_2 + a^3_3)\frac{\partial}{\partial a^2_3} + a^3_{11}\frac{\partial}{\partial a^2_{11}} + \\
+ a^3_{12}\frac{\partial}{\partial a^2_{12}} + (-a^2_{12} + a^3_{13})\frac{\partial}{\partial a^2_{13}} - a^3_2\frac{\partial}{\partial a^3_3} - a^3_{12}\frac{\partial}{\partial a^3_{13}}, \\
X_6 = x\frac{\partial}{\partial z} - a^1_3\frac{\partial}{\partial a^1_1} - 2a^1_{13}\frac{\partial}{\partial a^1_{11}} - a^2_3\frac{\partial}{\partial a^2_1} - 2a^2_{13}\frac{\partial}{\partial a^2_{11}} + (a^1_1 - a^3_3)\frac{\partial}{\partial a^3_1} + a^1_2\frac{\partial}{\partial a^3_2} + \\
+ a^1_3\frac{\partial}{\partial a^3_3} + (a^1_{11} - 2a^3_{13})\frac{\partial}{\partial a^3_{11}} + a^1_{12}\frac{\partial}{\partial a^3_{12}} + a^1_{13}\frac{\partial}{\partial a^3_{13}}, \\
X_7 = y\frac{\partial}{\partial z} - a^1_3\frac{\partial}{\partial a^1_2} - a^1_{13}\frac{\partial}{\partial a^1_{12}} - a^2_3\frac{\partial}{\partial a^2_2} - a^2_{13}\frac{\partial}{\partial a^2_{12}} + a^2_1\frac{\partial}{\partial a^3_1} + (a^2_2 - a^3_3)\frac{\partial}{\partial a^3_2} + \\
+ a^2_3\frac{\partial}{\partial a^3_3} + a^2_{11}\frac{\partial}{\partial a^3_{11}} + (a^2_{12} - a^3_{13})\frac{\partial}{\partial a^3_{12}} + a^2_{13}\frac{\partial}{\partial a^3_{13}}.
\end{gathered} \tag{4.35}$$

Tab. 4.1: Tabelul comutatorilor operatorilor $X_1, \dots, X_7$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	0	0	X_4	0	X_6	0
X_2	0	0	0	$-X_4$	$-X_5$	0	X_7
X_3	0	0	0	0	X_5	$-X_6$	$-X_7$
X_4	$-X_4$	X_4	0	0	0	0	X_6
X_5	0	X_5	$-X_5$	0	0	$-X_4$	$X_3 - X_2$
X_6	$-X_6$	0	X_6	0	X_4	0	0
X_7	0	$-X_7$	X_7	$-X_6$	$X_2 - X_3$	0	0

Obţinem o algebră Lie L_7 de dimensiunea şapte. Această algebră se descompune într-o sumă directă $L_7 = L_6 \oplus Z$, unde $Z = \{X_1 + X_2 + X_3\}$ este centrul algebrei menţionate.

Introducem notaţiile

$$Y_1 = X_2, \quad Y_2 = X_3, \quad Y_3 = X_4, \quad Y_4 = X_5, \quad Y_5 = X_6, \quad Y_6 = X_7, \quad Y_7 = X_1 + X_2 + X_3.$$

Algebra Lie $L_7 < X_1, \dots, X_7 >$ cu Tabelul 4.1 al comutatorilor este izomorfă algebrei Lie $L_7 < Y_1, \dots, Y_7 >$ cu următorul tabel al comutatorilor

Tabelul 4.2: Tabelul comutatorilor operatorilor $Y_1, \dots, Y_7$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
Y_1	0	0	$-Y_3$	$-Y_4$	0	Y_6	0
Y_2	0	0	0	Y_4	$-Y_5$	$-Y_6$	0
Y_3	Y_3	0	0	0	0	Y_5	0
Y_4	Y_4	$-Y_4$	0	0	$-Y_3$	$Y_2 - Y_1$	0
Y_5	0	Y_5	0	Y_3	0	0	0
Y_6	$-Y_6$	Y_6	$-Y_5$	$Y_1 - Y_2$	0	0	0
Y_7	0	0	0	0	0	0	0

şi cu constantele de structură

$$\begin{gathered} C^3_{13} = -1, \quad C^4_{14} = -1, \quad C^6_{16} = 1, \quad C^4_{24} = 1, \quad C^5_{25} = -1, \quad C^6_{26} = -1, \quad C^5_{36} = 1, \\ C^3_{45} = -1, \quad C^2_{46} = 1, \quad C^1_{46} = -1. \end{gathered} \tag{4.36}$$

Din Tabelul 4.2 avem $L_7 < Y_1, \dots, Y_7 >= L_6 < Y_1, \dots, Y_6 > \oplus \{Y_7\}$.

Vom examina algebra $L_6 = \{Y_1, \ldots, Y_6\}$. Determinăm forma lui Killing

$$K < X, Y >= tr((ad(X))(ad(Y))), \tag{4.37}$$

unde pentru $X, Y \in L_6$ avem

$$(ad(X)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -x^6 & 0 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & x^6 & 0 & -x^4 \\ -x^3 & 0 & x^1 & -x^5 & x^4 & 0 \\ -x^4 & x^4 & 0 & x^1 - x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -x^5 & x^6 & 0 & x^2 & -x^3 \\ x^6 & -x^6 & 0 & 0 & 0 & -x^1 + x^2 \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

$$(ad(Y)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y^6 & 0 & y^4 \\ 0 & 0 & 0 & y^6 & 0 & -y^4 \\ -y^3 & 0 & y^1 & -y^5 & y^4 & 0 \\ -y^4 & y^4 & 0 & y^1 - x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -y^5 & y^6 & 0 & y^2 & -y^3 \\ y^6 & -y^6 & 0 & 0 & 0 & -y^1 + y^2 \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Folosind constantele de structură (4.36), cu ajutorul matricilor (4.38) şi (4.39) şi egalităţii (4.37) obţinem forma lui Killing

$$K < X, Y >= 5x^6y^4 + 5x^4y^6 + 3x^1y^1 + 3x^2y^2 - 2x^1y^2 - 2x^2y^1,$$

pentru care avem $detK < X, Y >= 0$.

Găsim comutanţii

$$L_6^{(1)} = [L_6, L_6] = \{Y_1 - Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\},$$

$$L_6^{(2)} = [L_6^{(1)}, L_6^{(1)}] = \{Y_1 - Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\} = L_6^{(1)}.$$

Deci, lanţul comutanţilor algebrei L_6 se stabilizează pe idealul $L_6^{(1)}$. Atunci putem scrie

$$L_6 \supset L_6^{(1)} = L_6^{(2)} = \ldots$$

Prin urmare L_6 nu este rezolubilă.

4.3. Integralele polinomial-exponenţiale de grad nu mai mare ca doi pentru forma canonică a sistemului generalizat ternar de tip Lyapunov-Darboux

Considerăm sistemul

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + x(g_1x + 2h_1y + 2k_1z), \\ \dot{y} &= \lambda x + x(g_2x + 2h_2y + 2k_2z), \\ \dot{z} &= y + nz + x(g_3x + 2h_3y + 2k_3z), \end{aligned} \tag{4.40}$$

unde $\sigma_1 \not\equiv 0$ din (3.5), $\lambda^2 = L_{2,3} > 0$, $n \equiv -L_{1,3} \neq 0$, iar $L_{2,3}$ şi $L_{1,3}$ sunt din (3.8).

Să observăm că pentru acest sistem se satisfac condiţiile Lemei 3.7 şi (4.27).

Atunci pentru $\sigma_1 \not\equiv 0$ din (3.5), sistemul (4.40) îl vom numi *forma canonică a sistemului diferenţial generalizat de tip Lyapunov-Darboux*, ce corespunde sistemului ternar (4.1).

Menţionăm că acest sistem în unele condiţii are ca proiecţii sistemul de tip Darboux [34], sistemul Lorentz [72], sistemul dinamicii răspândirii tuberculozei [63,65] şi sistemul SIV [66].

Urmând [72] vom examina integrala primă polinomial-exponenţială a sistemului (4.40) de forma $F = F_2(x,y,z)e^{\mu t}$, unde

$$F_2(x,y,z) \equiv a + b_1x + b_2y + b_3z + c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + 2c_4xy + 2c_5xz + 2c_6yz.$$

În virtutea sistemului (4.40) putem scrie

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv$$

$$\equiv [a\mu + (b_2\lambda + b_1\mu)x + (b_3 - b_1\lambda + b_2\mu)y + b_3(n+\mu)z +$$

$$+(b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3 + 2c_4\lambda + c_1\mu)x^2 + 2(c_5 + b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3 - c_1\lambda + c_2\lambda + c_4\mu)xy +$$

$$+2(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + c_5n + c_6\lambda + c_5\mu)xz + (2c_6 - 2c_4\lambda + c_2\mu)y^2 + 2(c_3 + c_6n - c_5\lambda + c_6\mu)yz +$$

$$+c_3(2n+\mu)z^2 + 2(c_1g_1 + c_4g_2 + c_5g_3)x^3 + 2(c_4g_1 + c_2g_2 + c_6g_3 + 2c_1h_1 + 2c_4h_2 + 2c_5h_3)x^2y +$$

$$+2(c_5g_1 + c_6g_2 + c_3g_3 + 2c_1k_1 + 2c_4k_2 + 2c_5k_3)x^2z + 4(c_4h_1 + c_2h_2 + c_6h_3)xy^2 +$$

$$+4(c_5h_1 + c_6h_2 + c_3h_3 + c_4k_1 + c_2k_2 + c_6k_3)xyz + 4(c_5k_1 + c_6k_2 + c_3k_3)xz^2]e^{\mu t}.$$

Pentru ca F să fie integrală primă este necesar şi suficient să se realizeze relaţia $\frac{dF}{dt} \equiv 0$. Astfel obţinem un sistem din 16 ecuaţii algebrice cu 20 necunoscute $(a, \mu, b_i, c_j, g_i, h_i, k_i, i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,6})$

$$a\mu = 0;\ \ b_2\lambda + b_1\mu = 0;\ \ b_3 - b_1\lambda + b_2\mu = 0;\ \ b_3(n+\mu) = 0;$$

$$b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3 + 2c_4\lambda + c_1\mu = 0;$$

$$c_5 + b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3 - c_1\lambda + c_2\lambda + c_4\mu = 0;$$

$$b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + c_5n + c_6\lambda + c_5\mu = 0;\ \ 2c_6 - 2c_4\lambda + c_2\mu = 0;$$

$$c_3+c_6n-c_5\lambda+c_6\mu=0;\;\; c_3(2n+\mu)=0;\;\; c_1g_1+c_4g_2+c_5g_3=0;$$
$$c_4g_1+c_2g_2+c_6g_3+2c_1h_1+2c_4h_2+2c_5h_3=0;$$
$$c_5g_1+c_6g_2+c_3g_3+2c_1k_1+2c_4k_2+2c_5k_3=0; \tag{4.41}$$
$$c_4h_1+c_2h_2+c_6h_3=0;\;\; c_5h_1+c_6h_2+c_3h_3+c_4k_1+c_2k_2+c_6k_3=0;$$
$$c_5k_1+c_6k_2+c_3k_3=0.$$

Notăm cu $v=(-\lambda,\lambda,1,n,g_1,h_1,k_1,g_2,h_2,k_2,g_3,h_3,k_3)$ vectorul coeficienţilor sistemului (4.40). Rezolvând sistemul (4.41) obţinem

Teorema 4.3. *Integralele prime polinomial-exponenţiale de gradul nu mai mare ca doi a sistemului Lyaponuv-Darboux* (4.40)*, date de vectorul* v*, au următoarele expresii:*

(1) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,0,h_1,0,-2h_1,0,0,g_3,h_3,k_3)$*;*

$$F=a+c_2x^2+c_2y^2;$$

(2) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,-2(h_2+k_3),h_1,\frac{1}{2\lambda}(-k_3(n^2+2\lambda^2)+h_1n\lambda-2h_2\lambda^2),0,h_2,0,$ $\frac{4}{k_3(n^2+2\lambda^2)-h_1n\lambda+2h_2\lambda^2}k_3\lambda(h_2+k_3),-\frac{2}{k_3(n^2+2\lambda^2)-h_1n\lambda+2h_2\lambda^2}k_3(h_2n+h_1\lambda),k_3)$*;*

$$F=-\frac{1}{\lambda^2(k_3(n^2+2\lambda^2)-\lambda(h_1n-2h_2\lambda))}(-y\lambda^2h_1(h_1n-2h_2\lambda)(y+nz)+$$
$$+y\lambda(2\lambda(k_3+h_2)(h_1n-2h_2\lambda)+k_3^2n^2)(x+z\lambda)+(k_3(k_3n^2y-n^2\lambda-2\lambda^3)+$$
$$+\lambda^2(h_1n-2h_2\lambda))(ny+n^2z+x\lambda+z\lambda^2)+2h_2k_3y\lambda n(nx-y\lambda)))e^{-nt};$$

(3) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,-\frac{1}{\lambda}(g_3(n^2+\lambda^2)+2h_2\lambda),h_1,-\frac{1}{\lambda}(h_2+k_3)(n^2+\lambda^2),0,h_2,0,g_3,$ $-\frac{1}{n^2+\lambda^2}(2h_2n+h_1\lambda),k_3)$*;*

$$F=\frac{1}{\lambda^2}(2h_2y+\lambda)(ny+n^2z+x\lambda+z\lambda^2)e^{-nt};$$

(4) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,0,0,0,-\frac{1}{n\lambda}(-h_2n^2+(g_3\lambda-h_3n)(n^2+\lambda^2)),h_2,-\frac{k_3}{n}(n^2+\lambda^2),g_3,h_3,k_3)$*;*

$$F=\frac{1}{\lambda^2}(h_2nx^2+h_3x^2(n^2+\lambda^2)+ny\lambda+n^2z\lambda+x\lambda^2+z\lambda^3)e^{-nt};$$

(5) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,-2(h_2+k_3),\frac{1}{2n\lambda(n^2+\lambda^2)}(k_3(n^4+5n^2\lambda^2+4\lambda^4)+k_1\lambda(3n^2+4\lambda^2)+$ $4h_2\lambda^2(n^2+\lambda^2)),k_1,-\frac{n}{\lambda(n^2+\lambda^2)}((h_2+k_3)(n^2+\lambda^2)+k_1\lambda),h_2,0,\frac{1}{2k_1\lambda^2(n^2+\lambda^2)^2}(k_1^2n^2\lambda^2+h_2k_1(n^4\lambda+$ $n^2\lambda^3)+k_3(h_2+k_3)(-n^6-6n^4\lambda^2-9n^2\lambda^4-4\lambda^6)),\frac{1}{2k_1n\lambda(n^2+\lambda^2)}(-h_2k_1n^2\lambda+k_3((k_3+h_2)(n^4+$ $5n^2\lambda^2+4\lambda^4)+k_1k_3(3n^2\lambda+4\lambda^3))),k_3)$*;*

$$F=-\frac{1}{2k_1n\lambda^3(n^2+\lambda^2)}((h_2k_3+k_3^2)((n^2+2\lambda^2)(n^4x^2-4xy\lambda n^3+4n^2y^2\lambda^2)+n^2x^2\lambda^4-$$
$$-4nxy\lambda^5+4y^2\lambda^6)+k_1(n^2+\lambda^2)(2k_3(n^2x^2\lambda+2y^2\lambda n^2-2nxy\lambda^2+4y^2\lambda^3+$$
$$+2n^3yz\lambda+2yz\lambda^3n)-2(nx\lambda^3+z\lambda^4n+n^3z\lambda^2+n^2y\lambda^2)+h_2(n^2x^2\lambda-$$
$$-4nxy\lambda^2+4y^2\lambda^3))+k_1^2\lambda^2(n^2x^2+4(y^2+nyz)(n^2+\lambda^2)))e^{-nt};$$

(6) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,-2(h_2+k_3),\frac{1}{g_3n\lambda}(g_3k_3(n^2+2\lambda^2)-4k_3\lambda(h_2+k_3)+2g_3h_2\lambda^2),$ $-\frac{2}{g_3}k_3(h_2+k_3),0,h_2,0,g_3,\frac{1}{2n\lambda}(-g_3(n^2+2\lambda^2)+4k_3\lambda),k_3);$

$$F=-\frac{1}{g_3n\lambda^2}(-4y\lambda k_3(h_2+k_3)(y+nz)+g_3^2y(nx-y\lambda)(n^2+\lambda^2)+g_3(-n\lambda(ny+x\lambda)-$$
$$-nz\lambda(n^2+\lambda^2)+2h_2y\lambda(-nx+y\lambda)+2k_3((n^2+\lambda^2)(y^2+nyz)-y\lambda(nx-y\lambda))))e^{-nt};$$

(7) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,-2h_2,\frac{2}{n}h_2\lambda,0,g_2,h_2,\ 0,-\frac{n}{(n^2+\lambda^2)(2h_2(n^2+2\lambda^2)+g_2n\lambda)}(g_2h_2n^2+g_2^2n\lambda+$ $(4h_2h_3\lambda-g_2h_3n)(n^2+\lambda^2)),h_3,0);$

$$F=\frac{1}{n\lambda(2h_2(n^2+2\lambda^2)+g_2n\lambda)}((g_2h_2nx^2-4h_2^2y^2\lambda+4h_2^2nxy+2h_2n^2y+2h_2nx\lambda)(n^2+2\lambda^2)+$$
$$+(g_2h_3n^2x^2-4h_2h_3ny^2\lambda+g_2n^2z\lambda+4h_2h_3n^2xy)(n^2+\lambda^2)+2h_2n^5z+g_2n^2\lambda(ny+x\lambda)+$$
$$+2h_2nz\lambda^2(3n^2+2\lambda^2))e^{-nt};$$

(8) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,g_1,h_1,k_1,\ \frac{1}{n}(-g_3(n^2+\lambda^2)-g_1\lambda),\frac{1}{n}(-h_3(n^2+\lambda^2)-h_1\lambda),\frac{1}{n}(-k_3(n^2+$ $\lambda^2)-k_1\lambda),g_3,h_3,k_3);$

$$F=\frac{1}{\lambda}(ny+n^2z+x\lambda+z\lambda^2)e^{-nt};$$

(9) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,-\frac{1}{\lambda}(g_2n+g_3(n^2+\lambda^2)),-\frac{1}{\lambda}(h_2n+h_3(n^2+\lambda^2),k_1,g_2,h_2,-\frac{1}{n}(k_1\lambda+$ $k_3(n^2+\lambda^2)),g_3,h_3,k_3);$

$$F=\frac{1}{\lambda}(ny+n^2z+x\lambda+z\lambda^2)e^{-nt};$$

(10) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,\frac{2}{n}g_2\lambda,\frac{2}{n}h_2\lambda,0,g_2,h_2,0,-\frac{1}{n\lambda(n^2+\lambda^2)}((h_2n+g_2\lambda)(n^2+2\lambda^2)+h_3n^2(n^2+$ $\lambda^2)),h_3,0);$

$$F=-\frac{1}{n\lambda^2(n^2+4\lambda^2)}((n^2x^2-4nxy\lambda+4y^2\lambda^2)(h_2(n^2+2\lambda^2)+h_3n(n^2+\lambda^2))-$$
$$-(n^2y\lambda+nx\lambda^2)(n^2+4\lambda^2)-n^5z\lambda-5n^3z\lambda^3-4nz\lambda^5)e^{-nt};$$

(11) $v=(-\lambda,\lambda,1,n,\frac{2}{n}g_2\lambda,\frac{2}{n}h_2\lambda,k_1,g_2,h_2,\frac{k_1n}{2\lambda},g_3,\frac{1}{n^2(n^2+\lambda^2)}(-h_2n^3-g_2n^2\lambda-g_3n^3\lambda-$ $2h_2n\lambda^2-2g_2\lambda^3-g_3n\lambda^3),-\frac{k_1}{2\lambda(n^2+\lambda^2)}(n^2+2\lambda^2));$

$$F=\frac{1}{n^2\lambda(n^2+4\lambda^2)}((x^2n^2-4nxy\lambda+4y^2\lambda^2)(g_2(n^2+2\lambda^2)+g_3n(n^2+\lambda^2))+$$
$$+(n^3y+x\lambda n^2)(n^2+4\lambda^2)(n^2+4\lambda^2)+n^6z+5n^4z\lambda^2+4n^2z\lambda^4)e^{-nt}.$$

4.4. Integrale prime polinomial-exponenţiale pentru sistemul dinamicii răspândirii tuberculozei

Dinamica răspândirii epidemiei tuberculozei [63, 64], reprezintă un model matematic, în care, întreaga populaţie este divizată în:

– populaţia sensibilă (S);

– populaţia purtătoare de infecţie latentă (L);

– populaţia cu tuberculoză activă (T).

Această dinamică este defininită de următorul sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \tau - \mu S - \beta ST \equiv P, \\ \frac{dL}{dt} &= -\delta L - \mu L + (1-p)\beta ST \equiv Q, \\ \frac{dT}{dt} &= \delta L - (\mu+\nu)T + p\beta ST \equiv R. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Descrierea succintă a variabilelor şi a parametrilor sistemului (4.42) este dată în Tabelul 4.3:

Tabelul 4.3. Variabilele şi parametrii sistemului (4.42)

Mărimea	**Descrierea**
$S(t)$	numărul persoanelor sensibile la momentul t
$L(t)$	numărul persoanelor infectate la momentul t
$T(t)$	numărul persoanelor infecţioase la momentul t
$\lambda(t)$	forţa infecţiei pe cap de locuitor la momentul t
τ	aflux de tineri
μ	medie a mortalităţii din cauze nu legate de TB
p	probabilitate de progresie rapidă a bolii
δ	constantă a vitezei de reactivare a infecţiei TB
ν	mortalitatea suplimentară cauzată de TB activă
β	coeficient de transfer a infecţiei TB

Considerăm ecuaţiile determinante [34] ale sistemului (4.42).

$$\begin{aligned} \xi^1_S P + \xi^1_L Q + \xi^1_T R &= \xi^1 P_S + \xi^2 P_L + \xi^3 P_T + D(P), \\ \xi^2_S P + \xi^2_L Q + \xi^2_T R &= \xi^1 Q_S + \xi^2 Q_L + \xi^3 Q_T + D(Q), \\ \xi^3_S P + \xi^3_L Q + \xi^3_T R &= \xi^1 R_S + \xi^2 R_L + \xi^3 R_T + D(R), \end{aligned} \tag{4.43}$$

unde

$$D = \eta^1 \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial \mu} + \eta^4 \frac{\partial}{\partial \delta} + \eta^5 \frac{\partial}{\partial \nu} + \eta^6 \frac{\partial}{\partial p} \tag{4.44}$$

iar P, Q, R din (4.42) şi η^j $(j=\overline{1,9})$) – funcţiile de la parametrii $\tau, \beta, \mu, \delta, \nu, p$. Vom scrie

$$\xi^i = A^i + A^i_\alpha + A^i_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta, \quad (i, \alpha, \beta = \overline{1,3}) \tag{4.45}$$

unde $A^i, A^i_\alpha, A^i_{\alpha\beta}$ sunt parametrii nedeterminaţi, şi

$$x^1 = L, \quad x^2 = S, \quad x^3 = T. \tag{4.46}$$

Căutăm integrala primă, de forma

$$I_q(S, L, T, t) = P_q(S, L, T) e^{\lambda t} \ (q \le 2), \tag{4.47}$$

unde

$$P_q(S, L, T) = a + bS + cL + dT + eS^2 + fL^2 + gT^2 + 2hSL + 2kST + 2lLT. \tag{4.48}$$

Egalităţile (4.43) trebuie să se realizeze pentru orice valori L, S, T. Astfel, obţinem următoarele 57 de ecuaţii:

$$A^3_{11}\beta = 0, \quad A^3_{12}\beta = 0, \quad A^2_{11}\beta = 0, \quad (2A^1_{11} - A^1_{12} - A^2_{12} - A^3_{13} + A^1_{12}p - A^1_{13}p)\beta = 0,$$

$$(A^1_{12} - 2A^1_{22} - A^2_{22} - A^3_{23} + 2A^1_{22}p - A^1_{23}p)\beta = 0, \quad A^2_{13}\beta = 0, \quad A^2_{33}\beta = 0,$$

$$A^3_{22}(-1+p)\beta = 0, \quad -A^1_{12}\delta + A^1_{13}\delta - A^1_{12}\mu + A^2_{11}\mu = 0, \quad A^3_{22}\beta = 0,$$

$$(A^1_{13} - A^1_{23} - A^2_{23} - A^3_{33} + A^1_{23}p - 2A^1_{33}p)\beta = 0, \quad A^2\beta - A^1_3\mu + A^2_3\mu - A^1_3\nu + A^1_{13}\tau = 0,$$

$$A^3_1\beta - 2A^1_{22}\delta + A^1_{23}\delta - 2A^1_{11}\mu - 2A^1_{22}\mu + A^2_{12}\mu = 0, \quad A^3_2\beta - A^1_{12}\mu + A^2_{22}\mu = 0,$$

$$A^2_1\beta - A^1_{23}\delta + 2A^1_{33}\delta - A^1_{13}\mu - A^1_{23}\mu + A^2_{13}\mu - A^1_{13}\nu = 0,$$

$$-A^1_1\beta + A^1_2\beta + A^2_2\beta + A^3_3\beta - A^1_2p\beta + A^1_3p\beta + \eta^2 - A^1_{13}\mu - A^1_{23}\mu + A^2_{23}\mu - A^1_{23}\nu = 0,$$

$$2A^2_3\beta - 2A^1_{33}\mu + A^2_{33}\mu - 2A^1_{33}\nu = 0, \quad -A^1_2\delta + A^1_3\delta - A^1_2\mu + A^2_1\mu + 2A^1_{11}\tau = 0,$$

$$A^3\beta + \eta^3 - A^1_1\mu + A^2_2\mu + A^1_{12}\tau = 0, \quad (2A^2_{11} + A^3_{13} - A^2_{13}p - A^3_{13}p)\beta = 0,$$

$$-\eta^1 + A^2\mu + A^1_1\tau = 0, \quad (A^2_{12} - A^2_{22} + A^3_{23} + A^2_{22}p - A^2_{23}p - A^3_{23}p)\beta = 0,$$

$$(A^2_{13} + A^3_{33} - 2A^2_{33}p - A^3_{33}p)\beta = 0, \quad A^1_{11}\delta - A^2_{12}\delta + A^2_{13}\delta + A^1_{11}\mu - A^2_{12}\mu = 0,$$

$$-A^3_1\beta + A^3_1p\beta + A^1_{12}\delta - 2A^2_{22}\delta + A^2_{23}\delta + A^1_{12}\mu - 2A^2_{11}\mu - 2A^2_{22}\mu = 0, \quad A^2_{11}(-1+p)\beta = 0,$$

$$-A^2_1\beta + A^2_1p\beta + A^1_{13}\delta - A^2_{23}\delta + 2A^2_{33}\delta + A^1_{13}\mu - A^2_{13}\mu - A^2_{23}\mu - A^2_{13}\nu = 0,$$

$$-A^2_1\beta - A^3_3\beta + A^2_3p\beta + A^3_3p\beta + A^1_{23}\delta - \eta^2 + p\eta^2 + \beta\eta^6 + A^1_{23}\mu - A^2_{13}\mu - A^2_{23}\mu - A^2_{23}\nu = 0,$$

$$-A^2_3\beta + A^2_3p\beta + A^1_{33}\delta + A^1_{33}\mu - 2A^2_{33}\mu - 2A^2_{33}\nu = 0, \quad A^3_{12}(-1+p)\beta = 0,$$

$$-A^3_2\beta + A^3_2p\beta + A^1_{22}\delta + A^1_{22}\mu - A^2_{12}\mu = 0, \quad A^2_{33}(-1+p)\beta = 0, \quad A^3_{11}(-1+p)\beta = 0,$$

$$A_1^1\delta - A_2^2\delta + A_3^2\delta + \eta^3 + \eta^4 + A_1^1\mu - A_2^2\mu + 2A_{11}^2\tau = 0, \quad A_{12}^3 p\beta = 0, A_{22}^3 p\beta = 0,$$

$$A^1\delta + A^1\mu + A_1^2\tau = 0, \quad (2A_{11}^3 - A_{12}^3 + A_{12}^2 p + A_{12}^3 p)\beta = 0, \quad -A_{11}^3 p\beta = 0,$$

$$(A_{12}^3 - 2A_{22}^3 + A_{22}^2 p + 2A_{22}^3 p)\beta = 0, \quad (A_{13}^3 - A_{23}^3 + A_{23}^2 p + A_{23}^3 p - A_{33}^3 p)\beta = 0,$$

$$-A_1^3\beta + A_2^3\beta - A_2^2 p\beta - A_2^3 p\beta - A_{23}^1\delta - p\eta^2 - \beta\eta^6 - A_{13}^3\mu = 0,$$

$$-A_1^2 p\beta - A_{13}^1\delta - A_{23}^3\delta + 2A_{33}^3\delta - A_{23}^3\mu = 0, \quad A_{33}^2 p\beta = 0, \quad A_{11}^2 p\beta = 0,$$

$$-A_{11}^1\delta - A_{12}^3\delta + A_{13}^3\delta + A_{11}^3\mu - A_{12}^3\mu + A_{11}^3\nu = 0, \quad A_{13}^2 p\beta = 0,$$

$$-A_1^3 p\beta - A_{12}^1\delta - 2A_{22}^3\delta + A_{23}^3\delta - 2A_{11}^3\mu + A_{12}^3\mu - 2A_{22}^3\mu + A_{12}^3\nu = 0,$$

$$-A^2\beta + A^2 p\beta + A_3^1\delta + A_3^1\mu - A_3^2\mu - A_3^2\nu + A_{13}^2\tau = 0, \quad A_{13}^2(-1+p)\beta = 0,$$

$$-A^3\beta + A^3 p\beta + A_2^1\delta + A_2^1\mu - A_1^2\mu + A_{12}^2\tau = 0, \quad -A^2 p\beta - A_3^1\delta + \eta^3 + \eta^5 + A_{13}^3\tau = 0,$$

$$-A_3^2 p\beta - A_{33}^1\delta - A_{33}^3\mu - A_{33}^3\nu = 0, \quad -A_2^3 p\beta - A_{22}^1\delta - A_{12}^3\mu + A_{22}^3\mu + A_{22}^3\nu = 0,$$

$$-A^3 p\beta - A_2^1\delta - A_1^3\mu + A3_2\mu + A3_2\nu + A_{12}^3\tau = 0, \quad -A^1\delta + A^3\mu + A^3\nu + A_1^3\tau = 0,$$

$$-A_1^1\delta - A_2^3\delta + A_3^3\delta - \eta^4 + A_1^3\mu - A_2^3\mu + A_1^3\nu + 2A_{11}^3\tau = 0. \tag{4.49}$$

În continuare, toţi parametrii sistemului (4.42) îi vom presupune diferiţi de zero, deoarece noi avem derivatele după parametrii din operatorul D din (4.44).

În condiţia când parametrii sistemului (4.42) sunt diferiţi de zero, soluţia sistemului (4.49) este

$$A_{11}^3 = A_{12}^3 = A_{22}^3 = A_{11}^2 = A_{13}^2 = A_{33}^2 = A_{13}^3 = A_{33}^3 = A_{22}^2 = A_{12}^2 = A_2^3 = A_{11}^1 = A_{33}^1 =$$

$$= A_3^2 = A_{22}^1 = A_{12}^1 = A_{13}^1 = A^3 = A_3^1 = A^2 = 0,$$

$$A_{23}^3 = \frac{A_1^3 p\beta}{\delta}, \quad A_1^2 = \frac{A_{23}^1\delta + A_{23}^1\mu}{\beta}, \quad A_1^3 = -\frac{A_{23}^1\delta}{\beta}, \quad A^1 = -\frac{A_{23}^1\tau}{\beta},$$

$$A_{23}^2 = -A_{23}^1 + A_{23}^1 p, \quad A_2^1 = \frac{A_{23}^1\mu}{\beta}, \quad \eta^3 = -\eta^5, \quad \eta^6 = \frac{-A_2^2 p\beta - p\eta^2}{\beta}, \tag{4.50}$$

$$\eta^5 = -A^1 1\mu + A_2^2\mu, \quad \eta^4 = -A_1 1\delta + A_2^2\delta - 2A_1^1\mu + 2A_2^2\mu,$$

$$\eta^2 = A_1^1\beta - A_2^2\beta - A_3^3\beta + A_{23}^1\mu + A_{23}^1\nu, \quad \eta^1 = A_1^1\tau,$$

$$A_1^1 = \frac{(A_2^2\beta - A_2^2 p\beta + A_3^3 p\beta - A_{23}^1 p\mu - A_{23}^1 p\nu}{\beta}, \quad A_2^2 = \frac{A_3^3\beta - A_{23}^1\mu - A_{23}^1\nu}{\beta}.$$

Considerăm operatorul

$$X = \xi^1\frac{\partial}{\partial S} + \xi^1\frac{\partial}{\partial L} + \xi^3\frac{\partial}{\partial T}, \tag{4.51}$$

unde ξ^1, ξ^1, ξ^3 sunt din (4.45), iar D din (4.44).

În condiţiile (4.50) şi luând în consideraţie (4.46), obţinem

$$X = A_3^3(S\frac{\partial}{\partial S} + L\frac{\partial}{\partial L} + T\frac{\partial}{\partial T} - \beta\frac{\partial}{\partial \beta} + \tau\frac{\partial}{\partial \tau}) + A_{23}^1((-\frac{\tau}{\beta} - \frac{\nu}{\beta}S + ST)\frac{\partial}{\partial S} + \\ + [\frac{\delta - \nu}{\beta}L + (p-1)ST]\frac{\partial}{\partial L} - (\frac{\delta}{\beta}L + pST)\frac{\partial}{\partial T} + (\mu + \nu)\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\tau}{\beta}(\mu + \nu)\frac{\partial}{\partial \tau}), \quad (4.52)$$

Din (4.52) obţinem 2 operatori liniari independenţi.

Teorema 4.4. *Sistemul (4.42) admite o algebră Lie bidimensionaală necomutativă de operatori, ce au forma:*

$$X_1 = S\frac{\partial}{\partial S} + L\frac{\partial}{\partial L} + T\frac{\partial}{\partial T} + D_1,$$

$$X_2 = (-\frac{\tau}{\beta} - \frac{\nu}{\beta}S + ST)\frac{\partial}{\partial S} + [\frac{\delta - \nu}{\beta}L + (p-1)ST]\frac{\partial}{\partial L} - (\frac{\delta}{\beta}L + pST)\frac{\partial}{\partial T} + D_2, \quad (4.53)$$

unde

$$D_1 = -\beta\frac{\partial}{\partial \beta} + \tau\frac{\partial}{\partial \tau}; \qquad D_2 = (\mu + \nu)\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\tau}{\beta}(\mu + \nu)\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (4.54)$$

ecuaţia de structură a căreia este $[X_1, X_2] = X_2$.

Analizăm matricea formată din termenii expresiilor (4.54). Rangul acestei matrici este 1, iar sistemul (4.42) are $n-1$ invarianţi, unde n - numărul de parametri ai sistemului (4.42). Deci avem 5 invarianţi. Se observă că expresiile

$$U_1 = \beta\tau, \quad U_2 = \mu, \quad U_3 = \nu, \quad U_4 = \delta, \quad U_5 = p, \quad (4.55)$$

sunt invarianţi ai sistemului (4.42), iar

$$D_1(U_i) = D_2(U_i) = 0, \ \ (i = \overline{1,5}).$$

În continuare presupunem că U_i $(i = \overline{1,4})$ din (4.55), sunt diferiţi de zero. Aceasta ne garantează existenţa părţii pătratice ST şi a termeului liber τ, iar condiţia $\mu\nu\delta \neq 0$ rezultă din sensul lor medical.

Determinăm coordonatele vectorului $(\tau, \beta, \mu, \delta, \nu, p)$, ce conţine parametrii sistemului (4.42), când invarianţii U_i $(i = \overline{1,4})$ din (4.55) sunt diferiţi de zero, iar integrala primă are forma (4.47).

Coeficienţii polinomului (4.48) şi parametrul λ sunt reali şi necunoscuţi. Cu ajutorul expresiilor (4.47)–(4.48), din identitatea

$$\frac{dI_q}{dt} = \frac{\partial I_q}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{\partial I_q}{\partial L} \cdot \frac{dL}{dt} + \frac{\partial I_q}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{\partial I_q}{\partial t} \equiv 0; \ (q \leq 2),$$

în virtutea sistemului (4.42), obţinem următorul sistem de ecuaţii polinomiale

$$\begin{gathered}\lambda a+\tau b=0,\ 2\tau e+(\lambda-\mu)b=0,\ 2\tau h-\mu c+\delta(d-c)+\lambda c=0,\\ 2\tau k+(\lambda-\mu-\nu)d=0,\ (\lambda-2\mu)e=0,\ -2\mu f+2\delta(l-f)+\lambda f=0,\\ (\lambda-2\mu-2\nu)g=0,\ 2\mu h+\delta(h-k)-\lambda h=0,\ (2\mu+\nu)l-\delta(g-l)-\lambda l=0,\\ \beta(-b+c-cp+dp)+2(\lambda-2\mu-\nu)k=0,\ \beta(e-h+hp-kp)=0,\\ \beta(k-l-gp+lp)=0,\ \beta(f-h-fp+lp)=0.\end{gathered} \tag{4.56}$$

Rezolvând sistemul (4.56), obţinem

Teorema 4.5. *Dacă invarianţii* U_1 *şi* U_2 *din* (4.55), *în raport cu grupul continuu de transformări determinat de operatorii* (4.53)–(4.54) *sunt diferiţi de zero, atunci acest sistem, cu vectorul* $(\tau,\beta,\mu,\delta,\nu,p)$ *perametrilor ce-i conţine, posedă următoarele integrale prime de forma* (4.47)–(4.48) *conform Tabelului 4.4.*

Tabelul 4.4. Integralele prime ale sistemului (4.42) când $q=2$

$(\boldsymbol{\tau,\beta,\mu,\delta,\nu,p})$	**Integralele prime**
$(\tau,\beta,\mu,p\nu,\nu,p)$	$I_1^{(1)}=(L+\frac{p-1}{p}T)e^{t(\mu+\nu)}$
$(\tau,\beta,\mu,\delta,\nu,1)$	$I_1^{(2)}=Le^{t(\delta+\mu)}$
$(\tau,\beta,\mu,-\mu,\nu,1)$	$I_2^{(1)}=a+L(c+fL)$
$(\tau,\beta,\mu,-p\mu,-\mu,p)$	$I_2^{(2)}=a+(L+\frac{p-1}{p}T)(c+f(L+\frac{p-1}{p}T))$
$(\tau,\frac{\mu(\nu^2-\mu^2)}{\nu\tau},\mu,-\nu,\nu,0)$	$I_2^{(3)}=((\nu^2-\mu^2)((L+S)^2+2T(L+S))/(2\mu\tau)+$ $+(L+S+T)+T\nu/\mu-S\nu^2/\mu^2-$ $-\tau/(2\mu)+\nu^2\tau/(2\mu^3))e^{2t\mu}$

În continuare, vom examina integrala prima când $q=3$

$$I_q(S,L,T,t)=P_q(S,L,T)e^{\lambda t}, \tag{4.57}$$

unde

$$\begin{gathered}P_q(S,L,T)=a+bS+cL+dT+eS^2+fL^2+gT^2+2hSL+2kST+2lLT+\\ +mS^3+3nS^2L+3oS^2T+3qSL^2+3rSLT+3sST^2+\\ +uL^3+3vL^2T+3wLT^2+zT^3.\end{gathered} \tag{4.58}$$

Coeficienţii polinomului (4.58) şi parametrul λ sunt reali şi sunt necunoscuţi. Datorită expresiei

$$\frac{dI_q}{dt}=\frac{\partial I_q}{\partial S}\cdot\frac{dS}{dt}+\frac{\partial I_q}{\partial L}\cdot\frac{dL}{dt}+\frac{\partial I_q}{\partial T}\cdot\frac{dT}{dt}+\frac{\partial I_q}{\partial t}\equiv 0\ \ (q=3),$$

şi în virtutea sistemului (4.42), obţinem următorul sistem de ecuaţii polinomiale:

$$
\begin{gathered}
\lambda a+\tau b=0, \quad (\lambda-\mu)b+2\tau e=0, \quad (-\delta+\lambda-\mu)c+\delta d+2\tau h=0,\\
(\lambda-\mu-\nu)d+2k\tau=0, \quad (\lambda-2\mu)e+3\tau m=0,\\
(-2\delta+\lambda-2\mu)f+2\delta l+3\tau q=0, \quad (\lambda-3\mu)m=0,\\
(\lambda-2\mu-2\nu)g+3\tau s=0, \quad (\delta-\lambda+2\mu)h-\delta k-3\tau n=0,\\
-\beta b+(1-p)\beta c+\beta dp+2(\lambda-2\mu-\nu)k+6\tau o=0,\\
\delta g+2(\lambda-\delta-2\mu-\nu)l+3\tau r=0, \quad (-3\delta+\lambda-3\mu)u+3\delta v=0,\\
(\lambda-3\mu-3\nu)z=0, \quad (\delta-\lambda+3\mu)n-\delta o=0, \qquad (4.59)\\
2\beta(-e+(1-p)h+kp)+3(\lambda-3\mu-\nu)o=0, \quad (2\delta-\lambda+3\mu)q-r\delta=0,\\
2\beta((1-p)f-h+lp)+3((\lambda-3\mu-\nu-\delta)r+2\delta s)=0,\\
2(-k+(1-p)l+gp)\beta+3(\lambda-3\mu-2\nu)s=0,\\
(2\delta-\lambda+3\mu+\nu)v-2\delta w=0, \quad (\delta-\lambda+3\mu+2\nu)w-\delta z=0,\\
m-n+pn-po=0, \quad 2n-2q+2pq-pr=0, \quad 2o-r+pr-2ps=0,\\
q-u+pu-pv=0, \quad r-2v+2pv-2pw=0, \quad s-w+pw-pz=0.
\end{gathered}
$$

Rezolvând sistemul (4.59), obţinem următoarele integrale:

Tabelul 4.5. Integralele prime ale sistemului (4.42) când $q=3$

$(\boldsymbol{\tau,\beta,\mu,\delta,\nu,p})$	**Integralele prime**
$(\tau,\beta,\mu,-\mu,\nu,1)$	$I_3^{(1)}=L(c+fL+L^2u)$
$(\tau,\beta,\mu,\delta,\nu,1)$	$I_3^{(2)}=\frac{1}{p^3}(ap^3+cp^2(Lp-T+pT)+$ $+f(Lp-T+pT)^2+u(Lp-T+pT)^3.$

4.5. Seria Lyapunov de determinare a stabilităţii mişcării neperturbate pentru sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice în cazul critic

Vom examina sistemul diferenţial ternar (3.21), pe care îl vom scrie în formă desfăşurată, în felul următor:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=gx+hy+kz+a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2a_4xy+2a_5xz+2a_6yz,\\
\frac{dy}{dt}&=px+qy+rz+b_1x^2+b_2y^2+b_3z^2+2b_4xy+2b_5xz+2b_6yz, \qquad (4.60)\\
\frac{dz}{dt}&=sx+my+nz+c_1x^2+c_2y^2+c_3z^2+2c_4xy+2c_5xz+2c_6yz,
\end{aligned}
$$

unde $g,h,k,m,n,p,q,r,s,a_i,b_i,c_i(i=\overline{1,6})$ sunt coeficienţi reali arbitrari.

Conform Lemei 3.4, sistemul (4.60), printr-o transformare centroafină, poate fi adus la un sistem diferenţial critic de forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5xz + 2a_6yz,\\ \frac{dy}{dt} &= px + qy + rz + b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 + 2b_4xy + 2b_5xz + 2b_6yz,\\ \frac{dz}{dt} &= sx + my + nz + c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + 2c_4xy + 2c_5xz + 2c_6yz.\end{aligned} \tag{4.61}$$

Analizăm ecuaţiile necritice (vezi Remarca 2.4 şi Teorema 2.3)

$$\begin{aligned}&px + qy + rz + b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 + 2b_4xy + 2b_5xz + 2b_6yz = 0,\\ &sx + my + nz + c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + 2c_4xy + 2c_5xz + 2c_6yz = 0.\end{aligned} \tag{4.62}$$

Din prima ecuaţie, a ultimei relaţii, îl exprimăm pe y, iar din a doua pe z

$$\begin{aligned}y &= -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q}z - \frac{b_1}{q}x^2 - \frac{b_2}{q}y^2 - \frac{b_3}{q}z^2 - 2\frac{b_4}{q}xy - 2\frac{b_5}{q}xz - 2\frac{b_6}{q}yz,\\ z &= -\frac{s}{n}x - \frac{m}{n}y - \frac{c_1}{n}x^2 - \frac{c_2}{n}y^2 - \frac{c_3}{n}z^2 - 2\frac{c_4}{n}xy - 2\frac{c_5}{n}xz - 2\frac{c_6}{n}yz.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Vom căuta pe y şi z ca funcţii olomorfe de x. Atunci putem scrie

$$\begin{aligned}y(x) &= A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 +\\ &\quad + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots,\\ z(x) &= B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 +\\ &\quad + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots\end{aligned} \tag{4.64}$$

Substituind (4.64) în (4.63), obţinem

$$\begin{aligned}&A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots =\\ &= -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q}(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 +\\ &+ B_{10}x^{10} + \cdots) - \frac{b_1}{q}x^2 - \frac{b_2}{q}(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 +\\ &+ A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots)^2 - \frac{b_3}{q}(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 +\\ &+ B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots)^2 - 2\frac{b_4}{q}x(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 +\\ &+ A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots) - 2\frac{b_5}{q}x(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 +\\ &+ B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots) - 2\frac{b_6}{q}(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 +\\ &+ A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots)(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 +\\ &+ B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots),\end{aligned}$$

$$B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots =$$
$$= -\frac{s}{n}x - \frac{m}{n}(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 +$$
$$+A_{10}x^{10} + \cdots) - \frac{c_1}{n}x^2 - \frac{c_2}{n}(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 +$$
$$+A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots)^2 - \frac{c_3}{n}(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 +$$
$$+B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots)^2 - 2\frac{c_4}{n}x(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 +$$
$$+A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots) - 2\frac{c_5}{n}x(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4$$
$$+ + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots) - 2\frac{c_6}{n}(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 +$$
$$+A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots)(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 +$$
$$+B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots).$$

De aici obţinem

$$A_1 = \frac{rs - np}{nq - mr}, \quad B_1 = \frac{mp - qs}{nq - mr};$$
$$A_2 = -\frac{1}{nq - mr}[b_1n - c_1r + 2(b_4n - c_4r)A_1 + 2(b_5n - c_5r)B_1 + (b_2n - c_2r)A_1^2 +$$
$$+2(b_6n - c_6r)A_1B_1 + (b_3n - c_3r)B_1^2],$$
$$B_2 = -\frac{1}{nq - mr}[-b_1m + c_1q - 2(b_4m - c_4q)A_1 - 2(b_5m - c_5q)B_1 - (b_2m - c_2q)A_1^2 -$$
$$-2(b_6m - c_6q)A_1B_1 - (b_3m - c_3q)B_1^2],$$
$$A_3 = -\frac{2}{nq - mr}[(b_4n - c_4r)A_2 + (b_5n - c_5r)B_2 + (b_2n - c_2r)A_1A_2 +$$
$$+(b_6n - c_6r)(A_1B_2 + A_2B_1) + (b_3n - c_3r)B_1B_2],$$
$$B_3 = -\frac{2}{nq - mr}[(-b_4m + c_4q)A_2 + (-b_5m + c_5q)B_2 + (-b_2m + c_2q)A_1A_2 +$$
$$+(-b_6m + c_6q)(A_1B_2 + A_2B_1) + (-b_3m + c_3q)B_1B_2],$$
$$A_4 = -\frac{1}{nq - mr}[2(b_4n - c_4r)A_3 + 2(b_5n - c_5r)B_3 + (b_2n - c_2r)(2A_1A_3 + A_2^2) +$$
$$+2(b_6n - c_6r)(A_1B_3 + A_2B_2 + A_3B_1) + (b_3n - c_3r)(2B_1B_3 + B_2^2)],$$
$$B_4 = -\frac{1}{nq - mr}[-2(b_4m - c_4q)A_3 - 2(b_5m - c_5q)B_3 - (b_2m - c_2q)(2A_1A_3 + A_2^2) -$$
$$-2(b_6m - c_6q)(A_1B_3 + A_2B_2 + A_3B_1) - (b_3m - c_3q)(2B_1B_3 + B_2^2)],$$
$$A_5 = -\frac{2}{nq - mr}[(b_4n - c_4r)A_4 + (b_5n - c_5r)B_4 + (b_2n - c_2r)(A_1A_4 + A_2A_3) +$$
$$+(b_6n - c_6r)(A_1B_4 + A_2B_3 + A_3B_2 + A_4B_1) + (b_3n - c_3r)(B_1B_4 + B_2B_3)],$$
$$B_5 = -\frac{2}{nq - mr}[(-b_4m + c_4q)A_4 + (-b_5m + c_5q)B_4 + (-b_2m + c_2q)(A_1A_4 + A_2A_3) +$$
$$+(-b_6m + c_6q)(A_1B_4 + A_2B_3 + A_3B_2 + A_4B_1) + (-b_3m + c_3q)(B_1B_4 + B_2B_3)],$$

$$A_6 = -\frac{1}{nq - mr}[2(b_4n - c_4r)A_5 + 2(b_5n - c_5r)B_5 + (b_2n - c_2r)(2A_1A_5 + 2A_2A_4+$$
$$+A_3^2) + (b_3n - c_3r)(2B_1B_5 + 2B_2B_4 + B_3^2) + 2(b_6n - c_6r)(A_5B_1 + A_4B_2 + A_3B_3+$$
$$+A_2B_4 + A_1B_5)],$$
$$B_6 = -\frac{1}{nq - mr}[-2(b_4m - c_4q)A_5 - 2(b_5m - c_5q)B_5 - (b_2m - c_2q)(2A_1A_5 + 2A_2A_4+$$
$$+A_3^2) - (b_3m - c_3q)(2B_2B_4 + 2B_1B_5 + B_3^2) - 2(b_6m - c_6q)(A_5B_1 + A_4B_2 + A_3B_3+$$
$$+A_2B_4 + A_1B_5)],$$
$$A_7 = -\frac{2}{nq - mr}[(b_4n - c_4r)A_6 + (b_5n - c_5r)B_6 + (b_2n - c_2r)(A_1A_6 + A_2A_5 + A_3A_4)+$$
$$+(b_3n - c_3r)(B_1B_6 + B_2B_5 + B_3B_4)+$$
$$+(b_6n - c_6r)(A_1B_6 + A_6B_1 + A_5B_2 + A_4B_3 + A_3B_4 + A_2B_5)],$$
$$B_7 = -\frac{2}{nq - mr}[(-b_4m + c_4q)A_6 + (-b_5m + c_5q)B_6 + (-b_2m + c_2q)(A_1A_6 + A_2A_5+$$
$$+A_3A_4) + (-b_3m + c_3q)(B_1B_6 + B_2B_5 + B_3B_4)+$$
$$+(-b_6m + c_6q)(A_1B_6 + A_6B_1 + A_5B_2 + A_4B_3 + A_3B_4 + A_2B_5)],$$
$$A_8 = -\frac{1}{nq - mr}[2(b_4n - c_4r)A_7 + 2(b_5n - c_5r)B_7 + (b_2n - c_2r)(2A_1A_7 + 2A_2A_6 + 2A_3A_5+$$
$$+A_4^2) + (b_3n - c_3r)(2B_1B_7 + 2B_2B_6 + 2B_3B_5 + B_4^2)+$$
$$+2(b_6n - c_6r)(A_1B_7 + A_2B_6 + A_3B_5 + A_4B_4 + A_5B_3 + A_6B_2 + A_7B_1)],$$
$$B_8 = -\frac{1}{nq - mr}[-2(b_4m - c_4q)A_7 - 2(b_5m - c_5q)B_7 - (b_2m - c_2q)(2A_1A_7 + 2A_3A_5+$$
$$+2A_2A_6 + A_4^2) - (b_3m - c_3q)(2B_1B_7 + 2B_3B_5 + 2B_2B_6 + B_4^2)-$$
$$-2(b_6m - c_6q)(A_1B_7 + A_2B_6 + A_3B_5 + A_4B_4 + A_5B_3 + A_6B_2 + A_7B_1)],$$
$$A_9 = -\frac{2}{nq - mr}[(b_4n - c_4r)A_8 + (b_5n - c_5r)B_8 + (b_2n - c_2r)(A_1A_8 + A_2A_7 + A_3A_6+$$
$$+A_4A_5) + (b_3n - c_3r)(B_1B_8 + B_2B_7 + B_3B_6 + B_4B_5)+$$
$$+(b_6n - c_6r)(A_1B_8 + A_2B_7 + A_3B_6 + A_4B_5 + A_5B_4 + A_6B_3 + A_7B_2 + A_8B_1)],$$
$$B_9 = -\frac{2}{nq - mr}[(-b_4m + c4q)A_8 + (-b_5m + c5q)B_8 + (-b_2m + c_2q)(A_1A_8 + A_2A_7+$$
$$+A_3A_6 + A_4A_5) + (-b_3m + c_3q)(B_1B_8 + B_2B_7 + B_3B_6 + B_4B_5)+$$
$$+(-b_6m + c_6q)(A_1B_8 + A_2B_7 + A_3B_6 + A_4B_5 + A_5B_4 + A_6B_3 + A_7B_2 + A_8B_1)],$$
$$A_{10} = -\frac{1}{nq - mr}[+2A_9(B_4n - c4r) + 2B_9(b_5n - c5r) + (b_2n - c_2r)(2A_1A_9+$$
$$+2A_2A_8 + 2A_3A_7 + 2A_4A_6 + A_5^2) + (b_3n - c_3r)(2B_1B_9 + 2B_2B_8 + 2B_3B_7+$$
$$+2B_4B_6 + B_5^2) + 2(b_6n - c_6r)(A_1B_9 + A_2B_8 + A_3B_7 + A_4B_6 + A_5B_5 + A_6B_4+$$
$$+A_7B_3 + A_8B_2 + A_9B_1)],$$

$$B_{10} = -\frac{1}{nq - mr}[-2(b_4m - c4q)A_9 - 2(b_5m - c5q)B_9 - 2(b_2m - c_2q)(A_1A_9 +$$
$$+2A_4A_6 + 2A_3A_7 + 2A_2A_8 + A_5^2) - (b_3m - c_3q)(2B_1B_9 + 2B_2B_8 + 2B_3B_7 + \tag{4.65}$$
$$+2B_4B_6 + B_5^2) - 2(b_6m - c_6q)(A_1B_9 + A_2B_8 + A_3B_7 + A_4B_6 + A_5B_5 + A_6B_4 +$$
$$+A_7B_3 + A_8B_2 + A_9B_1)], \ldots$$

Introducând (4.64) în partea dreaptă a ecuaţiei diferenţiale critice (4.61) avem

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5xz + 2a_6yz =$$

$$= C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + C_7x^7 + C_8x^8 + C_9x^9 + C_{10}x^{10} + \cdots,$$

sau în formă desfăşurată

$$a_1x^2 + a_2(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots)^2 +$$
$$+a_3(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots)^2 +$$
$$+2a_4x(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots) +$$
$$+2a_5x(B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots) +$$
$$+2a_6(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + A_7x^7 + A_8x^8 + A_9x^9 + A_{10}x^{10} + \cdots)(B_1x + B_2x^2 +$$
$$+B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + B_8x^8 + B_9x^9 + B_{10}x^{10} + \cdots) =$$
$$= C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + C_7x^7 + C_8x^8 + C_9x^9 + C_{10}x^{10} + \cdots$$

De aici obţinem conform Remarcei 2.4 şi Teoremei 2.3 că are loc

Lema 4.2. *Stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate a sistemului* (4.61) *depinde de semnul următoarelor expresii:*

$$C_1 = 0, \quad C_2 = a_1 + 2a_4A_1 + 2a_5B_1 + a_2A_1^2 + 2a_6A_1B_1 + a_3B_1^2,$$
$$C_3 = 2(a_4A_2 + a_5B_2 + a_2A_1A_2 + a_6A_2B_1 + a_6A_1B_2 + a_3B_1B_2),$$
$$C_4 = 2a_4A_3 + 2a_5B_3 + 2a_2A_1A_3 + 2a_6A_1B_3 + a_2A_2^2 + 2a_6A_2B_2 + 2a_6A_3B_1 +$$
$$+2a_3B_1B_3 + a_3B_2^2,$$
$$C_5 = 2(a_4A_4 + a_5B_4 + a_2A_1A_4 + a_6A_1B_4 + a_2A_2A_3 + a_6A_2B_3 + a_6A_3B_2 +$$
$$+a_6A_4B_1 + a_3B_1B_4 + a_3B_2B_3),$$
$$C_6 = 2a_4A_5 + 2a_5B_5 + 2a_2A_1A_5 + 2a_6A_1B_5 + 2a_2A_2A_4 + 2a_6A_2B_4 + a_2A_3^2 +$$
$$+2a_6A_3B_3 + 2a_6A_4B_2 + 2a_6A_5B_1 + 2a_3B_1B_5 + 2a_3B_2B_4 + a_3B_3^2,$$
$$C_7 = 2(a_4A_6 + a_5B_6 + a_2A_1A_6 + a_6A_1B_6 + a_2A_2A_5 + a_6A_2B_5 + a_2A_3A_4 +$$
$$+a_6A_3B_4 + a_6A_4B_3 + a_6A_5B_2 + a_6A_6B_1 + a_3B_1B_6 + a_3B_2B_5 + a_3B_3B_4),$$

$$
\begin{gathered}
C_8 = 2a_4A_7 + 2a_5B_7 + 2a_2A_1A_7 + 2a_6A_1B_7 + 2a_2A_2A_6 + 2a_6A_2B_6+ \\
+2a_2A_3A_5 + 2a_6A_3B_5 + a_2A_4^2 + 2a_6A_4B_4 + 2a_6A_5B_3 + 2a_6A_6B_2 + 2a_6A_7B_1+ \\
+2a_3B_1B_7 + 2a_3B_2B_6 + 2a_3B_3B_5 + a_3B_4^2, \\
C_9 = 2(a_4A_8 + a_5B_8 + a_2A_1A_8 + a_6A_1B_8 + a_2A_2A_7 + a_6A_2B_7 + a_2A_3A_6+ \\
+a_6A_3B_6 + a_2A_4A_5 + a_6A_4B_5 + a_6A_5B_4 + a_6A_6B_3 + a_6A_7B_2 + a_6A_8B_1+ \\
+a_3B_1B_8 + a_3B_2B_7 + a_3B_3B_6 + a_3B_4B_5), \\
C_{10} = 2a_4A_9 + 2a_5B_9 + 2a_2A_1A_9 + 2a_6A_1B_9 + 2a_2A_2A_8 + 2a_6A_2B_8 + 2a_2A_3A_7+ \\
+2a_6A_3B_7 + 2a_2A_4A_6 + 2a_6A_4B_6 + a_2A_5^2 + 2a_6A_5B_5 + 2a_6A_6B_4 + 2a_6A_7B_3+ \\
+2a_6A_8B_2 + 2a_6A_9B_1 + 2a_3B_1B_9 + 2a_3B_2B_8 + 2a_3B_3B_7 + 2a_3B_4B_6 + a_3B_5^2, \ldots,
\end{gathered} \tag{4.66}
$$

unde A_i şi B_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sunt din (4.65), iar $nq - mr > 0$ conform Remarcei 3.4.

Urmând exemplul unu din [44] (§32), care în ecuaţia critică are 2 parametri, vom examina câteva cazuri de sisteme ternare de forma canonică critică Lyapunov:

Exemplul 4.1. (Sistemul dinamicii răspândirii tuberculozei) Vom examina sistemul dinamicii răspândirii tuberculozei [65] (4.42), care prin transformarea centroafină

$$
x = \tau - \mu S; \quad y = L; \quad z = T, \tag{4.67}
$$

şi $\mu \neq 0$, în conformitate cu sensul medical al acestei variabile, aduce sistemul (4.42) la forma

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ax + bz + 2gxz; \\
\frac{dy}{dt} &= cy + dz + 2hxz; \\
\frac{dz}{dt} &= ey + fz + 2kxz.
\end{aligned} \tag{4.68}
$$

unde

$$
\begin{gathered}
a = -\mu \neq 0,\ b = \beta\tau,\ c = -\delta - \mu, d = \frac{(1-p)\beta\tau}{\mu},\ e = \delta,\ f = \frac{p\beta\tau}{\mu} - \mu - \mu_T, \\
g = -\frac{\beta}{2},\ h = -\frac{(1-p)\beta}{2\mu},\ k = -\frac{p\beta}{2\mu}.
\end{gathered} \tag{4.69}
$$

Ecuaţia caracteristică a sistemului (4.68) este

$$
\rho^3 + (-a - c - f)\rho^2 + (ac + af + cf - de)\rho - a(cf - de) = 0. \tag{4.70}
$$

Pentru ca ecuaţia (4.70) să posede o rădăcină nulă, şi luând în consideraţie sensul medical al variabilelor $(a \neq 0)$, avem $cf - de = 0$.

Cu ajutorul transformării centroafine

$$
\bar{x} = -ey + cz; \quad \bar{y} = y; \quad \bar{z} = x + z \ (\Delta \equiv c \neq 0) \tag{4.71}
$$

şi $cf - de = 0$ sau $f = \frac{de}{c}$, sistemul (4.68) se aduce la forma critică de tip Lyapunov

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2(ck-eh)}{c^2}(-x^2 - 2exy + cxz - e^2y^2 + ceyz); \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{c}x + (c + \frac{de}{c})y + \frac{2h}{c^2}(-x^2 - 2exy + cxz - e^2y^2 + ceyz); \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{-a+f+b}{c}x + \frac{(-a+c+f+b)e}{c}y + az + \\ &+ \frac{2(g+k)}{c^2}(-x^2 - 2exy + cxz - e^2y^2 + ceyz), \end{aligned} \tag{4.72}$$

cu

$$-a - c - f > 0, \quad a(c+f) > 0 \tag{4.73}$$

conform teoremei lui Hurwitz.

Conform Lemei 4.2 avem

$$\begin{gathered} C_1 = 0, \;\; C_2 = \frac{2}{c^2}(-1 + cB_1 - eA_1)(1 + eA_1)(-eh + ck), \\ C_3 = \frac{2}{c^2}[cB_2 - 2eA_2 + ce(A_2B_1 + A_1B_2) - 2e^2A_1A_2](-eh + ck), \\ C_4 = \frac{2}{c^2}[cB_3 - 2eA_3 + ce(A_3B_1 + A_2B_2 + A_1B_3) - e^2(A_2^2 + 2A_1A_3)](-eh + ck), \\ C_5 = \frac{2}{c^2}[cB_4 - 2eA_4 + ce(A_4B_1 + A_3B_2 + A_2B_3 + A_1B_4) - \\ -2e^2(A_2A_3 + A_1A_4)](-eh + ck), \\ C_6 = \frac{2}{c^2}[cB_5 - 2eA_5 + ce(A_5B_1 + A_4B_2 + A_3B_3 + A_2B_4 + A_1B_5) - \\ -e^2(A_3^2 + 2A_2A_4 + 2A_1A_5)](-eh + ck), \\ C_7 = \frac{2}{c^2}[cB_6 - 2eA_6 + ce(A_6B_1 + A_5B_2 + A_4B_3 + A_3B_4 + A_2B_5 + A_1B_6) - \\ -2e^2(A_3A_4 + A_2A_5 + A_1A_6)](-eh + ck), \\ C_8 = \frac{2}{c^2}[cB_7 - 2eA_7 + ce(A_7B_1 + A_6B_2 + A_5B_3 + A_4B_4 + A_3B_5 + \\ +A_2B_6 + A_1B_7) - e^2(A_4^2 + 2A_3A_5 + 2A_2A_6 + 2A_1A_7)](-eh + ck), \\ C_9 = \frac{2}{c^2}[cB_8 - 2eA_8 + ce(A_8B_1 + A_7B_2 + A_6B_3 + A_5B_4 + A_4B_5 + \\ +A_3B_6 + A_2B_7 + A_1B_8) - 2e^2(A_4A_5 + A_3A_6 + A_2A_7 + A_1A_8)](-eh + ck), \\ C_{10} = \frac{2}{c^2}[cB_9 - 2eA_9 + ce(A_9B_1 + A_8B_2 + A_7B_3 + A_6B_4 + A_5B_5 + A_4B_6 + \\ +A_3B_7 + A_2B_8 + A_1B_9) - e^2(A_5^2 + 2A_4A_6 + 2A_3A_7 + \\ +2A_2A_8 + 2A_1A_9)](-eh + ck), \ldots, \end{gathered} \tag{4.74}$$

unde

$$A_1 = -\frac{d}{c^2+de}, \quad B_1 = \frac{(a-b)c}{a(c^2+de)};$$

$$A_2 = -\frac{2}{c(c^2+de)}[(-1+cB_1-eA_1)(1+eA_1)h],$$

$$B_2 = -\frac{2}{ac^3(c^2+de)}(-1+cB_1-eA_1)(1+eA_1)(c^3g+$$

$$+cdeg+aceh-bceh-c^2eh-de^2h+c^3k+cdek),$$

$$A_3 = -\frac{2}{c(c^2+de)}(cB_2-2eA_2+ce(A_2B_1+A_1B_2)-2e^2A_1A_2)h,$$

$$B_3 = -\frac{2}{ac^3(c^2+de)}(cB_2-2eA_2+ce(A_2B_1+A_1B_2)-$$

$$-2e^2A_1A_2)(c^3g+cdeg+aceh-bceh-c^2eh-de^2h+c^3k+cdek),$$

$$A_4 = -\frac{2}{c(c^2+de)}[cB_3-2eA_3+ce(A_3B_1+A_2B_2+A_1B_3)-e^2(A_2^2+2A_1A_3)]h,$$

$$B_4 = -\frac{2}{ac^3(c^2+de)}[cB_3-2eA_3+ce(A_3B_1+A_2B_2+A_1B_3)-$$

$$-e^2(A_2^2+2A_1A_3)](c^3g+cdeg+aceh-bceh-c^2eh-de^2h+c^3k+cdek),$$

$$A_5 = -\frac{2}{c(c^2+de)}[cB_4-2eA_4+ce(A_4B_1+A_3B_2+A_2B_3+A_1B_4)-$$

$$-2e^2(A_2A_3+A_1A_4)]h,$$

$$B_5 = -\frac{2}{ac^3(c^2+de)}[cB_4-2eA_4+ce(A_4B_1+A_3B_2+A_2B_3+A_1B_4)-$$

$$-2e^2(A_2A_3+A_1A_4)](c^3g+cdeg+aceh-bceh-c^2eh-de^2h+c^3k+cdek),$$

$$A_6 = -\frac{2}{c(c^2+de)}[cB_5-2eA_5+ce(A_5B_1+A_4B_2+A_3B_3+A_2B_4+A_1B_5)-$$

$$-e^2(A_3^2+2A_2A_4+2A_1A_5)]h,$$

$$B_6 = -\frac{2}{ac^3(c^2+de)}[cB_5-2eA_5+ce(A_5B_1+A_4B_2+A_3B_3+A_2B_4+A_1B_5)-$$

$$-e^2(A_3^2+2A_2A_4+2A_1A_5)](c^3g+cdeg+aceh-bceh-c^2eh-de^2h+c^3k+cdek),$$

$$A_7 = -\frac{2}{c(c^2+de)}[cB_6-2eA_6+ce(A_6B_1+A_5B_2+A_4B_3+A_3B_4+A_2B_5+A_1B_6)-$$

$$-2e^2(A_3A_4+A_2A_5+A_1A_6)]h,$$

$$B_7 = -\frac{2}{ac^3(c^2+de)}[cB_6-2eA_6+ce(A_6B_1+A_5B_2+A_4B_3+A_3B_4+A_2B_5+A_1B_6)-$$

$$-2e^2(A_3A_4+A_2A_5+A_1A_6)](c^3g+cdeg+aceh-bceh-c^2eh-de^2h+c^3k+cdek),$$

$$A_8 = -\frac{2}{c(c^2+de)}[cB_7-2eA_7+ce(A_7B_1+A_6B_2+A_5B_3+A_4B_4+A_3B_5+A_2B_6+A_1B_7)-$$

$$-e^2(A_4^2+2A_3A_5+2A_2A_6+2A_1A_7)]h,$$

$$B_8 = -\frac{2}{ac^3(c^2+de)}[cB_7 - 2eA_7 + ce(A_7B_1 + A_6B_2 + A_5B_3 + A_4B_4 + A_3B_5+$$

$$+A_2B_6 + A_1B_7) - e^2(A_4^2 + 2A_3A_5 + 2A_2A_6 + 2A_1A_7)](c^3g+$$

$$+cdeg + aceh - bceh - c^2eh - de^2h + c^3k + cdek),$$

$$A_9 = -\frac{2}{c(c^2+de)}[cB_8 - 2eA_8 + ce(A_8B_1 + A_7B_2 + A_6B_3 + A_5B_4 + A_4B_5+$$

$$+A_3B_6 + A_2B_7 + A_1B_8) - 2e^2(A_4A_5 + A_3A_6 + A_2A_7 + A_1A_8)]h,$$

$$B_9 = -\frac{2}{ac^3(c^2+de)}[cB_8 - 2eA_8 + ce(A_8B_1 + A_7B_2 + A_6B_3 + A_5B_4 + A_4B_5+$$

$$+A_3B_6 + A_2B_7 + A_1B_8) - 2e^2(A_4A_5 + A_3A_6 + A_2A_7 + A_1A_8)](c^3g+$$

$$+cdeg + aceh - bceh - c^2eh - de^2h + c^3k + cdek),$$

$$A_{10} = -\frac{2}{c(c^2+de)}[cB_9 - 2eA_9 + ce(A_9B_1 + A_8B_2 + A_7B_3 + A_6B_4 + A_5B_5+$$

$$+A_4B_6 + A_3B_7 + A_2B_8 + A_1B_9) - e^2(A_5^2 + 2A_4A_6 + 2A_3A_7 + 2A_2A_8 + 2A_1A_9)]h,$$

$$B_{10} = -\frac{2}{ac^3(c^2+de)}[cB_9 - 2eA_9 + ce(A_9B_1 + A_8B_2 + A_7B_3 + A_6B_4 + A_5B_5+ \qquad (4.75)$$

$$+A_4B_6 + A_3B_7 + A_2B_8 + A_1B_9) - e^2(A_5^2 + 2A_4A_6 + 2A_3A_7 + 2A_2A_8+$$

$$+2A_1A_9)](c^3g + cdeg + aceh - bceh - c^2eh - de^2h + c^3k + cdek), \ldots$$

Luând în consideraţie sensul medical al parametrilor sistemului (4.68) – (4.69), menţionăm că numitorii în (4.74) şi (4.75) sunt diferiţi de zero.

Obţinem

Remarca 4.3. *Dacă $a + c + f < 0$ şi $a(c + f) > 0$, atunci stabilitatea mişcării neperturbate guvernată de sistemul* (4.72) *include toate cazurile posibile în următoarele două:*

I. $(-1 + cB_1 - eA_1)(1 + eA_1)(-eh + ck) \neq 0$, atunci mişcarea neperturbată este instabilă;

II. $(-1 + cB_1 - eA_1)(1 + eA_1)(-eh + ck) = 0$, atunci mişcarea neperturbată este stabilă.

În ultimul caz, mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, această mişcare este şi asimptotic stabilă [47].

În demonstraţia Remarcei 4.3 se utilizează Teorema 2.3 în caz ternar. Se analizează coeficienţii seriei C_i din (4.74). Dacă $C_2 \neq 0$, atunci obţinem cazul I al remarcei respective.

Dacă $-eh + ck = 0$, atunci toţi $C_i = 0$ $(\forall i)$, iar dacă $(-1 + cB_1 - eA_1)(1 + eA_1) = 0$, atunci $A_i = B_i = 0$ $(i \geq 2)$ din (4.75), ceea ce induce de asemenea că toţi $C_i = 0$ $(i \geq 3)$.

Exemplul 4.2. Vom examina sistemul diferenţial ternar, cu 3 parametri în ecuaţia critică, de forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (ax+by+cz)(-x+y+z),\\ \frac{dy}{dt} &= x-y+(x-y+2z)(-x+y+z),\\ \frac{dz}{dt} &= x-z+(x+2y-z)(-x+y+z),\end{aligned} \tag{4.76}$$

unde a, b, c sunt coeficienţi reali arbitrari.

Ecuaţia caracteristică a părţii liniare este

$$\rho^3+2\rho^2+\rho=0, \tag{4.77}$$

unde

$$\rho_1=0, \quad \rho_2=\rho_3=-1. \tag{4.78}$$

Conform Lemei 4.2 avem

$$\begin{gathered} C_1=0, \quad C_2=a+b+c,\\ C_3=4a+6b+6c=2[2a+3(b+c)],\\ C_4=20a+38b+38c=2[10a+19(b+c)],\\ C_5=116a+254b+254c=2[58a+127(b+c)],\\ C_6=740a+1774b+1774c=2[370a+887(b+c)],\\ C_7=5028a+12822b+12822c=2[2514a+6411(b+c)],\\ C_8=35700a+95190b+95190c=2[17850a+47595(b+c)],\\ C_9=261780a+721870b+721870c=2[130890a+360935(b+c)],\\ C_{10}=1967300a+5569118b+5569118c=2[982650a+2784559(b+c)],\ldots, \end{gathered} \tag{4.79}$$

unde

$$\begin{gathered} A_1=B_1=1; \quad A_2=B_2=2, \quad A_3=B_3=10, \quad A_4=B_4=58, \quad A_5=B_5=370,\\ A_6=B_6=2514, \quad A_7=B_7=17850, \quad A_8=B_8=130890, \quad A_9=B_9=983650,\\ A_{10}=B_{10}=7536418,\ldots \end{gathered} \tag{4.80}$$

Deoarece ecuaţia caracteristică (4.77), a sistemului (4.76), are rădăcinile (4.78), atunci conform Teoremei 2.3, în caz ternar, obţinem

Remarca 4.4. *Stabilitatea mişcării neperturbate guvernată de sistemul* (4.76) *include toate cazurile posibile în următoarele patru:*

I. $a+b+c\neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $a>0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

III. $a < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

IV. $b + c = -a = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimul caz, mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, această mişcare este şi asimptotic stabilă [47].

Conform Teoremei 2.3 se analizează coeficienţii seriei C_i din (4.79). Dacă $C_2 \neq 0$, atunci obţinem cazul I al remarcei respective.

Dacă $C_2 = 0$, atunci $b + c = -a$. Înlocuim în C_3 obţinem $C_3 = -2a$, în dependenţă de semnul acestei expresii obţinem cazul II şi III.

Dacă $C_3 = 0$, atunci $b + c = -a = 0$. În acest caz, toţi $C_i = 0$ $(i \geq 4)$.

Exemplul 4.3. Vom examina sistemul diferenţial ternar, cu 6 parametri în ecuaţia critică, de forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5xz + 2a_6yz, \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + (x - y + 2z)(-x + y + z), \\ \frac{dz}{dt} &= x - z + (x + 2y - z)(-x + y + z), \end{aligned} \tag{4.81}$$

unde a_i $(i = \overline{1,6})$ sunt coeficienţi reali arbitrari.

Introducem notaţiile

$$\begin{gathered} L_1 = a_2 + a_3 + 2a_6; \quad L_2 = -a_1 - 2(a_4 + a_5); \quad L_3 = -a_1 - (a_4 + a_5); \\ L_4 = -(a_4 + a_5). \end{gathered} \tag{4.82}$$

Conform Lemei 4.2 avem

$$\begin{gathered} C_1 = 0, \quad C_2 = a_1 + (a_2 + a_3 + 2a_6) + 2(a_4 + a_5), \\ C_3 = 4[(a_2 + a_3 + 2a_6) + (a_4 + a_5))], \\ C_4 = 4[6(a_2 + a_3 + 2a_6) + 5(a_4 + a_5)], \\ C_5 = 4[39(a_2 + a_3 + 2a_6) + 29(a_4 + a_5)], \\ C_6 = 4[268(a_2 + a_3 + 2a_6) + 185(a_4 + a_5)], \\ C_7 = 12[639(a_2 + a_3 + 2a_6) + 419(a_4 + a_5)], \\ C_8 = 60[942(a_2 + a_3 + 2a_6) + 595(a_4 + a_5)], \\ C_9 = 20[21319(a_2 + a_3 + 2a_6) + 13089(a_4 + a_5)], \\ C_{10} = 4[819096(a_2 + a_3 + 2a_6) + 491825(a_4 + a_5)], \ldots, \end{gathered} \tag{4.83}$$

unde

$$A_1 = B_1 = 1; \quad A_2 = B_2 = 2, \quad A_3 = B_3 = 10, \quad A_4 = B_4 = 58, \quad A_5 = B_5 = 370,$$
$$A_6 = B_6 = 2514, \quad A_7 = B_7 = 17850, \quad A_8 = B_8 = 130890, \quad A_9 = B_9 = 983650, \tag{4.84}$$
$$A_{10} = B_{10} = 7536418, \ldots$$

Deoarece ecuaţia caracteristică (4.77), a sistemului (4.81), are rădăcinile (4.78), atunci conform Teoremei 2.3, în caz ternar, obţinem

Remarca 4.5. *Stabilitatea mişcării neperturbate guvernată de sistemul* (4.81) *include toate cazurile posibile în următoarele cinci:*

I. $L_1 \neq L_2$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $L_1 = L_2,\ L_3 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

III. $L_1 = L_2,\ L_3 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

IV. $L_1 = L_2,\ L_3 = 0,\ L_4 \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

V. $a_2 + a_3 + 2a_6 = a_1 = 0,\ a_4 = -a_5$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimul caz, mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, această mişcare este şi asimptotic stabilă [47]. Expresiile L_i $(i = \overline{1,4})$ *sunt din* (4.82).

Conform Teoremei 2.3 se analizează coeficienţii seriei C_i din (4.83). Dacă $C_2 \neq 0$, atunci $L_1 - L_2 \neq 0$, cazul I al remarcei respective.

Dacă $C_2 = 0$, atunci $L_1 = L_2$, iar

$$C_3 = 4[L_1 + (a_4 + a_5)] = 4[L_2 + (a_4 + a_5)] = 4[-a_1 - (a_4 + a_5)] = 4L_3.$$

În dependenţă de semnul acestei expresii obţinem cazul II şi III.

Dacă $C_2 = C_3 = 0$, atunci $L_1 = L_2$ şi $L_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -(a_4 + a_5)$, iar

$$C_4 = 4[6L_1 + 5(a_4 + a_5)] = 4[6L_2 + 5(a_4 + a_5)] = 4[-6a_1 - 7(a_4 + a_5)] = 4[-(a_4 + a_5)] = 4L_4.$$

Fie $L_4 \neq 0$, în acest caz, obţinem cazul IV.

Dacă $C_2 = C_3 = C_4 = 0$, atunci $L_1 = L_2, L_3 = L_4 = 0$ sau $a_2 + a_3 + 2a_6 = a_1 = 0$, $a_4 = -a_5$. În acest caz, toţi $C_i = 0$ $(i \geq 5)$.

Exemplul 4.4. Vom examina sistemul diferenţial ternar, cu 6 parametri în ecuaţia critică, dintre care trei formează factorul comun al părţii pătratice, de forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (a_1x + b_1y + c_1z)(ax + by + cz), \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + (x - y + 2z)(ax + by + cz), \\ \frac{dz}{dt} &= x - z + (x + 2y - z)(ax + by + cz), \end{aligned} \tag{4.85}$$

unde a, b, c, a_1, b_1, c_1 sunt coeficienţi reali arbitrari.

Introducem notaţiile

$$\begin{gathered} M_1 = a + b + c; \quad M_2 = a_1 + b_1 + c_1; \quad M_3 = -aa_1 + (b + c)(b_1 + c_1); \\ M_4 = (b + c)(b_1 + c_1). \end{gathered} \tag{4.86}$$

Conform Lemei 4.2 avem

$$\begin{gathered} C_1 = 0, \quad C_2 = M_1M_2, \quad C_3 = (M_1M_2 + M_3)A_2, \\ C_4 = M_4A_2^2 + (M_1M_2 + M_3)A_3, \quad C_5 = 2M_4A_2A_3 + (M_1M_2 + M_3)A_4, \\ C_6 = M_4(2A_2A_4 + A_3^2) + (M_1M_2 + M_3)A_5, \\ C_7 = 2M_4(A_2A_5 + A_3A_4) + (M_1M_2 + M_3)A_6, \\ C_8 = M_4(2A_2A_6 + 2A_3A_5 + A_4^2) + (M_1M_2 + M_3)A_7, \\ C_9 = 2M_4(A_2A_7 + A_3A_6 + A_4A_5) + (M_1M_2 + M_3)A_8, \\ C_{10} = M_4(2A_2A_8 + 2A_3A_7 + 2A_4A_6 + A_5^2) + (M_1M_2 + M_3)A_9, \ldots, \end{gathered} \tag{4.87}$$

unde

$$\begin{gathered} A_1 = B_1 = 1; \quad A_2 = B_2 = 2(a + b + c), \\ A_3 = B_3 = (a + 3b + 3c)A_2, \quad A_4 = B_4 = (b + c)A_2^2 + (a + 3b + 3c)A_3, \\ A_5 = B_5 = 2(b + c)A_2A_3 + (a + 3b + 3c)A_4, \\ A_6 = B_6 = (b + c)(2A_2A_4 + A_3^2) + (a + 3b + 3c)A_5, \\ A_7 = B_7 = 2(b + c)(A_2A_5 + A_3A_4) + (a + 3b + 3c)A_6, \\ A_8 = B_8 = (b + c)(2A_2A_6 + 2A_3A_5 + A_4^2) + (a + 3b + 3c)A_7, \\ A_9 = B_9 = 2(b + c)(A_2A_7 + A_3A_6 + A_4A_5) + (a + 3b + 3c)A_8, \\ A_{10} = B_{10} = (b + c)(2A_2A_8 + 2A_3A_7 + 2A_4A_6 + A_5^2) + (a + 3b + 3c)A_9, \ldots \end{gathered} \tag{4.88}$$

Deoarece ecuaţia caracteristică (4.77), a sistemului (4.85), are rădăcinile (4.78), atunci conform Teoremei 2.3, în caz ternar, obţinem

Remarca 4.6. *Stabilitatea mişcării neperturbate guvernată de sistemul* (4.85) *include toate cazurile posibile în următoarele şase:*

I. $M_1M_2 \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

II. $M_2 = 0,\ M_1M_3 < 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

III. $M_2 = 0,\ M_1M_3 > 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

IV. $M_1M_4 \neq 0$, *atunci mişcarea neperturbată este instabilă;*

V. $M_4 = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă;*

VI. $M_1 = 0$, *atunci mişcarea neperturbată este stabilă.*

În ultimul caz, mişcarea neperturbată aparţine unei serii continui de mişcări stabilizate (staţionare), la care aparţine şi mişcarea neperturbată examinată şi atunci toate mişcările acestei serii, destul de apropiate de cea neperturbată incluzând-o şi pe ultima, vor fi stabile. În acest caz, pentru perturbări destul de mici orice mişcare perturbată se va apropia asimptotic către una din mişcările stabilizate (staţionare) a seriei menţionate. Mai mult ca atât, această mişcare este şi asimptotic stabilă [47]. Expresiile M_i $(i = \overline{1,4})$ *sunt din* (4.86).

Conform Toremei 2.3 se analizează coeficienţii seriei C_i din (4.87). Presupunem $M_1 \neq 0$. Dacă $C_2 \neq 0$, atunci $M_1M_2 \neq 0$, cazul I al remarcei respective.

Dacă $C_2 = 0$, atunci $M_2 = 0$, iar $C_3 = (M_1M_2 + M_3)A_2 = 2M_1M_3$. În dependenţă de semnul acestei expresii obţinem cazul II şi III.

Dacă $C_2 = C_3 = 0$, atunci $M_2 = M_3 = 0$, iar $C_4 = M_4A_2^2 + (M_1M_2 + M_3)A_3 = 4M_1^2M_4$. Dacă $M_1M_4 \neq 0$ obţinem cazul IV.

Dacă $C_2 = C_3 = C_4 = 0$, atunci $M_2 = M_3 = M_4 = 0$, iar toţi $C_i = 0$ $(i \geq 5)$, cazul V.

Dacă $M_1 = 0$, atunci toţi $C_i = 0$ $(\forall i)$, cazul VI al remarcei date.

4.6. Concluzii la capitolul 4

În capitolul patru au fost studiate condiţiile centroafin-invariante când sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice conţine în părţile pătratice un factor comun. Aşa sisteme le vom numi generalizate de tip Darboux, deoarece sistemul clasic de tip Darboux este un caz particular al acestuia. În afară de aceasta unele modele matematice din medicină, biologie ş.a. domenii sunt prezentate ca sisteme diferenţiale ternare, ce conţin un factor comun în partea pătratică.

A fost studiată o formă canonică a sistemului diferenţial ternar generalizat de tip Darboux cu neliniarităţi pătratice. Pentru acest sistem a fost determinată algebra Lie admisă de el şi studiată rezolubilitatea ei. În această formă canonică a fost evidenţiată forma canonică a sistemului generalizat de tip Lyapunov-Darboux, pentru care au fost determinate integralele prime polinomial-exponenţiale.

A fost evidenţiată algebra Lie admisă de sistemul diferenţial ternar, care reprezintă modelul matematic al dinamicii răspândirii tuberculozei în societate. Au fost studiaţi invarianţii acestui sistem generaţi de algebra Lie menţionată şi evidenţiate integralele polinomial-exponenţiale până la gradul trei.

Au fost examinate unele exemple de sisteme de ecuaţii diferenţiale ternare cu neliniarităţi polinomiale de tip generalizat Darboux, ce cuprind unele exemple din teza lui A.M. Lyapunov şi studiată stabilitatea mişcării neperturbate proprie acestor sisteme.

Ţinând cont de rezultatele obţinute în capitolul patru, deducem următoarele concluzii:

1. Pentru sistemul diferenţial cu neliniarităţi pătratice au fost construite condiţiile centroafin-invariante când părţile pătratice conţin un factor comun, i.e. când sistemul menţionat are forma generalizată Darboux.

2. A fost construită algebra Lie a operatorilor admisă de o formă canonică a sistemului generalizat de tip Darboux cu reprezentări în spaţiul parametrilor acestui sistem şi arătată că această algebră nu este rezolubilă.

3. Pentru forma canonică a sistemului generalizat ternar de tip Lyapunov-Darboux au fost construite toate integralele prime polinomial-exponenţiale până la gradul trei.

4. A fost construită algebra Lie admisă de sistemul diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice, corespunzător dinamicii răspândirii tuberculozei în societate şi obţinută baza funcţională a invarianţilor acestui sistem în raport cu algebra dată.

5. Au fost construite integralele prime polinomial-exponenţiale până la gradul trei pentru sistemul diferenţial corespunzător dinamicii răspândirii tuberculozei în societate cu condiţii invariante.

6. Au fost construite polinoamele de la coeficienţii sistemului diferenţial cu neliniarităţi pătratice în cazul critic, semnul cărora determină stabilitatea sau instabilitatea mişcării neperturbate descrisă de acest sistem.

7. Pornind de la exemplul 1 din teza de doctor a lui A. M. Lyapunov [44] (§32) ce constă dintr-un sistem diferenţial ternar cu neliniarităţi pătratice în cazul critic, au fost construite mai multe exemple de sisteme diferenţiale de tip generalizat Darboux, pentru care au fost determinate condiţiile de stabilitate sau instabilitate a mişcării neperturbate, descrise de aceste sisteme.

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

În lucrare, din punct de vedere a teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, a fost studiată stabilitatea mişcării neperturbate, descrise de sisteme diferenţiale plane şi ternare cu membrii drepţi polinoame. Pentru prima dată în aceste cercetări au fost folosite teoria algebrelor Lie şi metoda invarianţilor algebrici a ecuaţiilor difernţiale, fondată la Chişinău de academicianul Constantin Sibirschi.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în abordarea prin intermediul algebrelor Lie şi algebrelor invarianţilor a unor sisteme diferenţiale, ceea ce a contribuit la obţinerea condiţiilor centroafin-invariante de stabilitate a mişcării neperturbate descrise de sistemele diferenţiale bidimensionale şi ternare cu neliniarităţi polinomiale, în vederea aplicării lor ulterioare la modele matematice concrete. Rezultatele cercetărilor elaborate ne permit de a efectua următoarele concluzii şi recomandări:

Concluzii generale:

1. În teza de faţă, pentru prima dată s-a formulat şi s-a rezolvat problema determinării condiţiilor centroafin-invarinte de stabilitate a mişcării neperturbate în clasa sistemelor diferenţiale plane cu neliniarităţi de până la gradul patru, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al acestor sisteme ([51, 52, 54, 56]);

2. Au fost obţinute condiţiile centroafin-invariante de stabilitate a mişcării periodice neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare cu neliniarităţi pătratice de tip Darboux şi construite integralele generale şi algebrele Lie pentru toate sistemele de acest tip ce se află pe varietăţile invariante, descrise de o integrală particulară învariantă proprie acestui sistem ([49, 50, 55, 57, 60]);

3. A fost construită o formă canonică a sitemului ternar generalizat de tip Lyapunov-Darboux şi obţinute integralele polinomial exponenţiale pentru acest sistem. Au fost construite exemple de sisteme ternare generalizate de tip Lyapunov-Darboux în cazul critic şi obţinute condiţiile de stabilitate a mişcării neperturbate. Unele din sistemele studiate au ca proiecţii modele matematice din medicină ([48, 53, 58, 59, 61]).

Recomandări:

Rezultatele obţinute şi metodele elaborate pot fi folosite:

– la studierea stabilitaţii mişcarii neperturbate în cazul critic pentru sistemele diferenţiale plane cu neliniarităţi polinomiale complete până la gradul trei sau patru inclusiv;

– la studierea stabilităţii mişcării neperturbate pentru sistemele diferenţiale ternare de tip Darboux cu neliniarităţi de gradul trei şi patru;

– la investigarea diferitor modele matematice din medicină, biologie, mecanică ş.a.;

– în programele cursurilor opţionale a facultăţilor universitare cu profil real.

BIBLIOGRAFIE

1. Lie S. Vorlesungen über continuierliche Gruppen. Leipzig: Teubner, 1893. 805 p.
2. Cebotarev N.G. Theory of Lie groups. Moskva-Leningrad: GITTL, 1940. 396 p. (în rusă).
3. Pontreaghin L.S. Continuous groups. Moskva: Gostehizdat, 1949. 520 p. (în rusă).
4. Jacobson N. Lie Algebras. New York: Interscience, 1962. 355 p.
5. Eeisenhart L.P. Continuous groups of transformations. Moskva, 1974. 359 p. (în rusă).
6. Bourbaki N. Lie groups and Lie algebras. Moskva: Mir, 1976. 496 p. (în rusă).
7. Birkhoff G. Hidradynamics: A study in logic, fact and similitude. Princeton N.J.: Princeton Univ. Press, 1950. 186 p.
8. Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. Moskva: Nauka, 1978. 400 p. (în rusă).
9. Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. New York Berlin Heidlberg Tokyo: Springer-Verlag, 1986. 637 p.
10. Fushchich W.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Kiev: Naukova dumka, 1989. 355 p. (în rusă).
11. Ibragimov N.H. A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modelling (Classical and new methods, Nonlinear mathematical models, Symmetry and invariance principles). Sweden: ALGA Publications, Blekinge Institute of Tehnology, Karlkrona, 2006. 421 p.
12. Sibirsky K.S. Introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations. Nonlinear Science: Theory and Applications. Manchester: Manchester University Press, 1988. 169 p.
13. Sibirsky K.S. Centroaffine invariant center conditions in the sense of Dulac for a quadratic differential system. Diff. Uravneniya, 1986, vol. 22, no. 6, p. 954–961 (în rusă).
14. Vulpe N.I. Polynomial bases of comitants of differential systems and their applications in qualitative theory. Kishinev: Ştiinţa, 1986. 170 p. (în rusă).
15. Oliveira R., Rezende A., Schlomiuk D., Vulpe N. Geometric and algebraic classification of quadratic differential systems with invariant hyperbolas. In: Electron. J. Differential Equations 2017, vol. 2017, no. 295, p. 1-122.

16. Popa M.N. Metode cu algebre la sisteme diferenţiale. Universitatea din Piteşti: Flower Power. Seria Matematică Aplicată şi Industrială 15, 2004. 340 p.

17. Subă A. Partial integrals, integrability and the center problem. In: Differential Equations, 1996, vol. 32, no. 7, p. 884—892.

18. Subă A., Repeşco V. Cubic systems with degenerate infinity and invariant straight lines of total parallel multiplicity five. In: Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics, 2016, vol. 82, no. 3, p. 38–56.

19. Sibirsky K.S., Shubè A.S. Coefficient conditions for a center in the sense of Dulac for a differential system with one zero characteristic root and cubic right-hand sides. In: Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1988, vol. 303, no. 4, p. 799–803 (în rusă); translation in Soviet Math. Dokl., 1989, vol. 38, no. 3, p. 609–613.

20. Baltag V., Calin Iu. The transvectants and the integrals for Darboux systems of differential equations, In: Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics, 2008, vol. 56, no. 1, p. 4–18.

21. Calin Iu. On rational bases of $GL(2,\mathbb{R})$-comitants of planar polynomial systems of differential equations. In: Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics, 2003, vol. 42, no. 2, p. 69–86.

22. Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics. Chişinău: Ştiinţa, 2013. 240 p.

23. Cozma D. Darboux integrability and rational reversibility in cubic systems with two invariant straight lines. In: Electronic Journal of Differential Equations, 2013, vol. 2013, no. 23, p. 1–19.

24. Zoladek H. The monodromy group. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 2006. 580 p.

25. Dumortier F., Llibre J., Artés J. Qualitative theory of planar differential systems. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 308 p.

26. Schlomiuk D. Topological and polynomial invariants, moduli spaces, in classification problems of polynomial vector fields. In: Publicacions Matemátiques, 2014, Volume EXTRA, p. 461–496.

27. Boularas D., Bouzar Z. Symplectic invariants and covariants of matrices. In: Linear and Multilinear Algebra, 2017, vol. 65, no. 8, p. 1503–1528.

28. Cherkas L.A., Grin A.A., Bulgakov V.I. Constructive methods for investigating the limit cycles of autonomous second-order systems (numerical-algebraic approach). Grodno: Grodno State University, 2013. 489 p.

29. Sadovskii A.P. Polynomial ideals and varieties. Minsk: BGU, 2008. 199 p. (în rusă).

30. Romanovski V.G., Shafer D.S. The center and cyclicity problem: a computational approach. Birkhäuser, 2009. 330 p.

31. Romanovski V.G., Shafer D.S. Complete integrability and time-reversibility of some 3-dim systems. In: Applied Mathematics Letters, 2016, vol. 51, p. 27–33.

32. Han M. Bifuracation Theory of Limit Cycles, Mathematics Monograph Series 25, Beijing: Science Press, 2013. 348 p.

33. Popa M.N., Pricop V. Applications of algebraic methods in solving the center-focus problem. In: Bul. Acad. Ştiinţe a Republicii Moldova, Mat., 2013, vol. 71, no. 1, p. 45–71.

34. Gerştega N. Lie algebras for the three-dimensional differential system and applications. PhD thesis, Chişinău, 2006, 133 p.

35. Diaconescu O. Lie algebras and invariant integrals for polynomial differential systems. PhD thesis, Chişinău, 2008, 126 p.

36. Hu Zhaoping, Aldazharova M., Aldibekov T.M., Romanovski V.G. Integrability of 3-dim polynomial systems with three invariant planes. In: Nonlinear Dyn., 2013, vol. 74, p. 1077-1092.

37. Edneral V.F, Mahdi A., Romanovski V.G., Shafer D.S. The center problem on a center manifold in R^3. In: Nonlinear Analysis, 2012, vol. 75, p. 2614-2622.

38. Mahdi A. Center problem for third-order odes. In: International Journal of Bifurcation and Chaos, 2013, vol. 23, no. 5, 1350078 (11 pages).

39. Llibre J., Valls A. First integrals of Darboux type for a family of 3-dimensional Lotka-Volterra systems. In: Bull. Sci. Math., 2015, vol. 139, p. 473-494.

40. Yu Pei, Han Maoan. Ten limit cycles around a center-type singular point in a 3-d quadratic system with quadratic perturbation. In: Applied Mathematics Letters, 2015, vol. 44, p. 17–20.

41. Mahdi A., Romanovski V.G., Shafer D.S. Stability and periodic oscillations in the Moon-Rand systems. In: Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, vol. 14, p. 294-313.

42. Pessoa C.G. Homogeneous polynomial vector fields on $\mathbb{S}^2$. PhD thesis. Universitat Autónoma de Barcelona, 2006. 141 p.

43. Hounkanli K. The center and cyclicity problems in a family of three dimensional polynomial systems of ordinary differential equations. PhD thesis. The University of North Carolina at Charlotte, 2013. 100 p.

44. Lyapunov A.M. The general problem on stability of motion. Collection of works, II – Moscow-Leningrad: Izd. Acad. Nauk SSSR. 1956 (în rusă) (Liapunoff A.M., Probléme générale de la stabilitaté du mouvement. Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse, Ser. 2, 9(1907), p. 203–470, Reproduction in Annals of Mathematics Studies 17, Princenton: University Press, 1947, reprinted, Kraus Reprint Corporation, New York, 1965).

45. Merkin D.R. Introduction to the theory of stability. NY: Springer–Verlag, 1996. 320 p.

46. Merkin D.R., et al. Theory of stability in examples and problems. Institute of computers studies, Moskva-Ijevsk, 2007. 208 p. (în rusă).

47. Malkin I.G. Theory of stability of motion. Moskva: Nauka, 1966. 530 p. (în rusă).

48. **Neagu N.**, Popa M.N. Canonical form of the ternary generalized differential Lyapunov-Darboux system with quadratic nonlinearities. In: ROMAI Journal, 2015, vol. 11, no. 2, p. 89–107.

49. **Neagu N.**, Cozma D., Popa M.N. Invariant methods for studying stability of unperturbed motion in ternary differential systems with polynomial nonlinearities. In: Bukovinian Mathematical Journal, 2016, vol. 4, no. 3-4, p. 133–139.

50. **Neagu N.** Invariant integrability conditions for ternary differential systems with quadratic nonlinearities of the Darboux form. In: Bull. Acad. Sci. of Moldova. Mathematics, 2016, vol. 82, no. 3, p. 57–71.

51. **Neagu N.**, Orlov V., Popa M.N. Invariant conditions of stability of unperturbed motion governed by some differential systems in the plane. In: Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics, 2017, vol. 85, no. 3, p. 88–106.

52. **Neagu N.**, Orlov V., Popa M.N. Invariant conditions of stability of unperturbed motion for differential system with quadratic nonlinearities in the critical case. The 4th Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova (dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997)), June 28–July 2, 2017, Chişinău. Proceedings CMSM4, p. 301–304.

53. **Neagu N.**, Popa M.N., Orlov V. First integrals with polynomial not higher than second order of the mathematical model of the intrinsic transmission dynamics of tuberculosis. The third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova (dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics

and Computer Science), August 19-23, 2014, Chişinău. Proceedings IMCS50, p. 257–260.

54. **Neagu N.** Condiţii invariante de stabilitate a mişcărilor neperturbate pentru sistemul diferenţial cu nelinearităţi cubice în cazul critic. Materialele Conferinţei Ştiinţifice a Doctoranzilor (cu participare internaţională) "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători" ediţia VI-a, 15 iunie, 2017, Chişinău, p. 35–39.

55. **Neagu N.** Integrabilitatea sistemului diferenţial ternar pe o varietate invariantă. Materialele Conferinţei Ştiinţifice a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători" ediţia V-a, 25 mai, 2016, Chişinău, p. 314–319.

56. **Neagu N.**, Orlov V., Popa M.N. Stability of unperturbed motion for differential systems with nonlinearities of degree four. The 25th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2017), September 14-17, 2017, Iaşi, România. Book of Abstracts, p. 39–40.

57. **Neagu N.**, Cozma D., Popa M.N. Centro-affine invariants and stability of unperturbed motion in ternary polinomial differential systems. Materials of International Scientific Conference "Differential-functional equations and their applications" (dedicated to the 80th anniversary from day of birth of Professor V.I. Fodchuk (1936-1992)), Seprember 28-30, 2016, Chernivtsi, Ukraine, p. 124–125.

58. **Neagu N.**, Popa M.N. Ternary generalized Lyapunov-Darboux system and some polynomial-exponential first integrals. The 23th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2015), September 17-20, 2015, Suceava, România. Book of Abstracts. p. 27–28.

59. **Neagu N.**, Popa M.N. Ternary generalized Darboux system with quadratic nonlinearities. International Conference "Mathematics & information tehnologies: research and education (MITRE-2015)", Moldova State University, July 2-5, 2015, Chişinău. Abstracts, p. 61–62.

60. **Neagu N.**, Popa M.N. Lie algebras of ternary differential systems with quadratic nonlinearities of the Darboux form and applications. International Conference "Mathematics & information tehnologies: research and education (MITRE-2016)" (dedicated to the 70th anniversary of the Moldova State University), June 23-26, 2016, Chişinău. Abstracts, p. 46–47.

61. **Neagu N.** Necessary conditions for the existence of the Iacobi ternary differential system. Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători" ediţia IV-a, 10 martie 2015, p. 23.

62. Şibanov A. Lyapunov Alexandr Mihailovichi. In series "The life of remarcable people", Moskva: Ed. "Molodaia gvardia", 1985. 336 p.

63. Avilov K.K., Romaniuha A.A. Mathematical models of tuberculosis extension and control of it. In: Mathematical Biology and Bioinformatics, 2007, vol. 2, no. 2, p. 188–318 (în rusă).

64. Blower S. M. and other. The intrinsinc transmission dynamics of tuberculosis epidemics. In: Nature Medicine, 1995, vol. 8, no. 1, p. 815–821.

65. Puţuntică V. ş. a. Model matematic de control al tuberculozei în Republica Moldova. Raport ştiinţific final pe anii 2010–2011, Institutul de Matematică şi Informatică al AŞM, Chişinău, 2011.

66. Ren Jingli, Hou Yuankun. Traveling waves for two SIV models. In: Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences), 2015, vol. 44, no. 3, p. 304–313.

67. Cebanu V.M. The minimal polynomial basis of comitants of a differential system with cubic nonlinearities. In: Diff. Uravnenia, 1985, vol. 21, no. 3, p. 541–543 (în rusă).

68. Ciubotaru S. Rational bases of $GL(2,\mathbb{R})$-comitants and $GL(2,\mathbb{R})$-invariants for the planar systems of differential equations with nonlinearities of the fourth degree. In: Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Mat., 2015, vol. 79, no. 3, p. 14–34.

69. Gerştega N., Popa M.N. Lie algebras of the operators and three-dimensional polynomial differential system. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Mat., 2005, vol. 48, no. 2, p. 51–64.

70. Gurevich G. B. Foundations of the algebraic invariants. Moscow: GITTL, 1948. 429 p. (English transl., Nordhoff, 1964).

71. Gerştega N., Popa M.N. Mixed comitants and $GL(3,\mathbb{R})$–orbit's dimensions for the three-dimensional differential system. In: Buletin Ştiinţific Universitatea din Piteşti, Seria Matematică şi Informatică, 2003, no. 9, p. 149–154.

72. Alain Goriely. Integrability and nonintegrability of dynamical systems. Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 19. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001, XVIII. 415 p.

73. Hermit Ch. Sur le résultant de trois formes quadratique ternaires, extrait d'une lettre à M. Borchardt. In: Journal fur die reine und angewandte Mathematik, von A. L. Crelle, t. LVII, 1860, Berlin, p. 371–375.

DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnata, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări şi realizări ştiinţifice. Conştientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecinţele în conformitate cu legislaţia în vigoare.

Neagu Natalia

31 octombrie 2017

CURRICULUM VITAE

Numele: Neagu
Prenumele: Natalia
Data şi locul naşterii:
14.08.1987, s. Cioburciu, r-nul Ştefan-Vodă, Rep. Moldova
Cetăţenia: Republica Moldova
Limbi vorbite:
româna , rusă (fluent), engleza (mediu)

Studii/Titluri ştiinţifice:
2006–2010 – studentă la Universitatea Pedagogică de Stat ”Ion Creangă”, Facultatea Informatică şi Tehnologii Informaţionale, specialitatea Matematică şi Informatică
2010–2012 – masterandă la Universitatea Pedagogică de Stat ”Ion Creangă”, Facultatea Informatică şi Tehnologii Informaţionale, specialitatea Tehnologii informaţionale şi de comunicare în Instruire
2011–2013 – masterandă la Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică şi Informatică, specialitatea Structuri matematice fundamentale
2014–2017 – doctorandă la Universitatea de Stat din Tiraspol, specialitatea 111.02 - Ecuaţii diferenţiale

Domeniul de specializare: teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale

Formarea profesională:
2013–2017 - lector asistent, catedra Matematica Aplicată, Universitatea Pedagogică de Stat ”Ion Creangă”;
2017–prezent - lector universitar, catedra Informatică şi Matematică, Universitatea Pedagogică de Stat ”Ion Creangă”;

Stagii de cercetare în străinătate (ultimii 5 ani):
Universitatea de Stat din Belarus: 24 decembrie 2014 – 24 ianuarie 2015.

Participări în proiecte (ultimii 5 ani):
1. Proiectul Internaţional FP7, nr. 316338, "Dynamical systems and their applications", 2012–2016.
2. Proiectul Instituţional ”15.817.02.18F. Cercetarea structurilor funcţional-topologice şi aplicaţiile lor”, 2015–2018.
3. Proiectul pentru tineret ”16.80012.02.01F. Sisteme diferenţiale autonome şi aplicaţiile lor”, 2017–2018.

Participări la unele conferinţe internaţionale (ultimii 5 ani):

1. Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, August 19–23, 2014, Chişinău;

2. The 23^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2015), September 17-20, 2015, Suceava;
3. Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", ediţia a IV-a, 10 martie, 2015, Chişinău;
4. International Conference "Mathematics and Information Tehnologies: Research and Education" (MITRE 2015), July 2-5, 2015, Chişinău;
5. Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", ediţia a V-a, 25 mai, 2016, Chişinău;
6. International Conference "Mathematics and Information Tehnologies: Research and Education" (MITRE 2016), June 24–26, 2016, Chişinău;
7. The International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application", September 28-30, 2016, Chernivtsi, Ukraine;
8. Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători", ediţia a VI-a, 15 iunie, 2017, Chişinău;
9. The 25^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2017), September 14-17, 2017, Iaşi;
10. The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova (dedicated to the centenary of V. Andrunachievici 1917-1997), June 28-July 2, 2017, Chişinău.

Participări la seminare (ultimii 5 ani):

1. Seminarul "Ecuaţii Diferenţiale" din cadrul Facultăţii Matematică şi Mecanică, Universitatea de Stat din Belarus, Minsk, 2015;
2. Seminarul ştiinţific "Ecuaţii Diferenţiale şi Algebre" din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol (2014-2017);
3. Seminarul "Algebra şi Logica Matematică", 92 de ani de la naştere a profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică şi Informatică al ASM, 2017;
4. Seminarul de Ştiinţe Matematice "P. Osmătescu", Universitatea Tehnică a Moldovei, 2017.

Lucrări ştiinţifice publicate (ultimii 5 ani):

Articole ştiinţifice – 4

Articole în culegeri ştiinţifice de lucrări ale conferinţelor – 4

Comunicări şi teze ale conferinţelor internaţionale – 6

Premii, menţiuni, distincţii:

1. Bursa nominală V.Belousov, 2016-2017;

2. Diploma pentru cea mai buna prezentare la Conferinţa Ştiinţifică Internaţională a Doctoranzilor "Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători" ediţia V-a, Chişinău, Republica Moldova, 25 mai, 2016.

Date de contact: tele. mobil: 069806650, email: neagu_natusik@mail.ru