UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 512.548(043.2)

LUPAŞCO NATALIA

BUCLE MOUFANG COMUTATIVE CU CONDIŢII DE FINITUDINE

111.03 – LOGICA MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Autoreferatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

CHIŞINĂU, 2018

Teza a fost elaborată în cadrul catedrei "Algebră, Geometrie şi Topologie" a Universităţii de Stat din Tiraspol, cu sediul la Chişinău.

Conducător ştiinţific:
$\boxed{\textbf{SANDU Nicolae}}$, dr. în şt. fiz.-mat., conferenţiar universitar, UST.

Consultant ştiinţific:
CHIRIAC Liubomir, dr. hab. în şt. fiz.-mat., profesor universitar, UST.

Referenţi oficiali:
1. **ŞCERBACOV Victor**, dr. hab. în şt. fiz.-mat., conf. cercet., IMI.
2. **SÎRBU Parascovia**, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ., USM.

Componenţa Consiliului Ştiinţific Specializat:
1. **REABUHIN Iurie, preşedinte,** acad. al AŞM, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ., IMI.
2. **IZBAŞ Vladimir, secretar ştiinţific,** dr. în şt. fiz.-mat., conf. cercet., IMI.
3. **CIOBAN Mitrofan**, acad. al AŞM, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ., UST.
4. **LEAH Ion**, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ., UTM.
5. **CUZNEŢOV Eugeniu**, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ., IMI.

Susţinerea va avea loc la **26 iunie 2018**, ora **15:00** în şedinţa Consiliului Ştiinţific Specializat **D 01.111.03 - 09** din cadrul Institutul de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Moldovei (cab. 340; str. Academiei 5, or. Chişinău, MD-2028, Republica Moldova).

Teza de doctor şi autoreferatul pot fi consultate la biblioteca Institutului de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Moldovei şi la pagina web www.cnaa.md.

Autoreferatul a fost expediat la **25 mai 2018**.

Secretar ştiinţific al Consiliului Ştiinţific Specializat,
IZBAŞ Vladimir, dr. în şt. fiz.-mat., conf. cercet. ____________________

Conducător ştiinţific,
$\boxed{\textbf{SANDU Nicolae}}$, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ.

Consultant ştiinţific,
CHIRIAC Liubomir, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ.____________________

Autor,
LUPAŞCO Natalia ____________________

REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea temei. Este remarcabil faptul că dezvoltarea dinamică a unor clase de algebre neasociative: algebre alternative, algebre Jordan, algebre Mal'cev, algebre Lie, etc., s-a produs graţie studierii algebrelor respective cu diverse condiţii de finitudine. Condiţia de finitudine a unei clase de algebre reprezintă o proprietate algebrică pe care o poseda toate algebrele finite din clasa respectivă dar, în acelaşi timp, există algebre infinite ce nu posedă proprietatea dată.

Astfel, un punct de cotitură în dezvoltarea algebrelor alternative îl constituie demonstraţia celebrei teoreme a matematicianului scoţian de J. H. M. Wedderburn, prin care reuşeşte să arate că orice corp finit este comutativ. Ulterior, Emil Artin şi Max Zorn au extins rezultatul respectiv pentru algebre neasociative. Astfel, teorema Artin-Zorn este o generalizare a teoremei Wedderburn, care afirmă că corpul neasociativ, în care orice două elemente generează un subcorp asociativ, la fel este corp finit comutativ. Ceva mai târziu E. Noether a arătat că rezultatele obţinute de E. Artin sunt adevărate pentru inele ce satisfac doar condiţia de minimalitate.

În contextul respectiv menţionăm faptul că rezultate importante care ţin de cercetarea algebrelor alternative, Jordan, Mal'cev au fost obţinute şi de matematicienii: A. I. Shirshov, K. A. Zhevlacov, E. N. Kuz'min, I. P. Shestakov, V. T. Filippov etc. O contribuţie importantă în cercetarea grupurilor cu condiţii de finitudine ţine de rezultatele obţinute de şcoala Profesorului S. N. Chernicov şi de discipolii săi Ia. D. Polovithkii, D. I. Zait'ev, V. A. Onishciuk, etc. De exemplu, în lucrarea [1], S. N. Chernicov a introdus clasele de grupuri local nilpotente şi local rezolubile pentru a scoate în evidenţa obiecte de cercetare cu condiţii de finitudine.

În condiţiile respective, cercetarea buclelor Moufang comutative (abreviat BMC) ce satisfac diferitor condiţii de finitudine reprezintă o direcţie importantă a algebrei contemporane.

Descrierea situaţiei în domeniul de cercetare şi identificarea problemelor de cercetare

Apariţia şi cercetarea buclelor Moufang are conexiune strânsă cu examinarea planelor proiective, în mod special, în anii 30 a secolului XX. Termenul de quasigrup a fost introdus pentru prima dată în lucrarea matematicienei de origine germană R. Moufang care cerceta coordinatizarea planelor proiective [2]. Prin noţiunea de quasigrup R. Moufang înţelegea obiectul matematic care astăzi se numeşte buclă Moufang - bucla în care au loc identităţile $(x \cdot yz)x = xy \cdot zx$, $x(yz \cdot x) = xy \cdot zx$, $x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z$, $(zx \cdot y)x = z(x \cdot yx)$. R. Moufang a demonstrat o teoremă remarcabilă care ilustrează "conexiunea" dintre buclele Moufang şi grupuri:

Teotema Moufang [2]. Dacă pentru trei elemente a, b, c din bucla Moufang are loc legea asociativă $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, atunci ele generează o buclă asociativă (grup).

O consecinţă importantă a acestei teoreme se referă la diasociativitatea buclei Moufang: orice două elemente a buclei Moufang generează o bucla asociativă. În prezent sunt cunoscute puţine metode şi algoritmi care ne permit construcţia buclelor Moufang noi. Una din cele mai cunoscute metode este metoda Chein, care ne oferă posibilitatea să construim bucle Moufang neasociative de ordinul $2n$ din orice grup necomutativ de ordinul n.

Este interesant de punctat faptul că O. Chein şi H. O. Pflugfelder [3] au găsit bucla Moufang neasociativă de ordinul cel mai mic. Aceasta este bucla Moufang de ordinul 12 cu trei generatori. O. Chein a identificat şi clasificat toate buclele Moufang de ordinul mai mic ca 64. Ulterior toate buclele Moufang neasociative de ordin mai mic ca 64 au fost găsite prin intermediul computerului de G. Nagy şi P. Vojtechovsky în 2007.

Orice abordare nouă utilizată la studierea buclelor Moufang este importantă şi necesară, deoarece permite înţelegerea mai profundă a proprietăţilor algebrice examinate.

Astfel, Stephen M. Gagola examinează proprietăţile grupurilor cu trialitate şi le aplică la demonstraţia unor rezultate importante din teoria buclelor Moufang finite [4]. În contextul respectiv, M. W. Liebeck utilizând grupurile cu trialitate a finalizat clasificarea buclelor Moufang simple neasociative. A. N. Grishcov şi A. V. Zavarnitsine au demonstrat teorema Lagrange generalizată şi teorema Sylow pentru buclele Moufang finite.

Teoria buclelor Moufang comutative îşi are începutul din anul 1936, odată cu construcţia de către Hans Julius Zassenhaus, cunoscut matematician german în domeniul algebrei abstracte şi algebrei computeriale, a primelor exemple de bucle Moufang comutative, utilizate ulterior de către Boll pentru cercetarea obiectelor geometrice. În anii 40, mai mulţi matematicieni din diferite ţări au cercetat intensiv buclele Moufang comutative structura cărora era "aproape", într-un anumit sens, de structura grupurilor abeliene. Rezultate fundamentale din teoria buclelor Moufang comutative pot fi găsite în [5], [6].

Pentru buclele Moufang comutative (bucle pentru care identitatea $x^2 \cdot yz = xy \cdot xz$ este justă) s-a demonstrat următorul rezultat fundamental:

Teorema Bruck-Slaby [5]. Bucla Moufang comutativă generată de n elemente este central nilpotentă de clasa $n - 1$.

Central nilpotenţa se defineşte analog nilpotenţei pentru grupuri. Dacă o buclă este isotopă unei bucle Moufang, atunci ea însăşi este buclă Moufang, altfel spus proprietatea de a fi buclă Moufang este universală. Mai mult, dacă două bucle Moufang comutatuve sunt isotope, atunci ele sunt şi isomorfe. În prezent aceste bucle au o vastă aplicaţie în studiul diferitor algebre, cum ar fi quasigrupurile distributive şi CH-quasigrupurile. Destul de detaliat sunt studiate buclele Moufang în monografiile [5], [6] şi [7]. O contribuţie importantă la dezvoltarea teoriei buclelor Moufang, la etapa iniţială, au avut lucrările de o înalta ţinută ştiinţifică elaborate de R. Bruck [5], [8] V. Belousov [6], Iu. Manin [9].

În anul 1958, V. Belousov a demonstrat că utilizând careva automorfisme ale buclei Moufang comutative $(Q,+)$ folosind construcţia $x \cdot y = \varphi x + \psi y$, unde φ şi ψ sunt automorfisme BMC $(Q,+)$ poate fi obţinut orice quasigrup distributiv $(Q,\cdot)$. Quasigrupul în care au loc identităţile $xy = yx$, $x(xy) = y$ şi orice trei elemente genereazǎ un subquasigrup medial se numeşte CH-quasigrup. Quasigrupul $(Q,\cdot)$ este medial dacă are loc identitatea $xy \cdot zt = xz \cdot yt$. Noţiunea de CH-quasigrup a fost introdusă de Iu. Manin în legătură cu investigaţiile din geometria algebrică şi anume cu studierea hipersuprafeţelor cubice. Iu. Manin a demonstrat că orice CH-quasigrup poate fi obţinut aplicând construcţia $xy = (-x-y)+d$, unde d este un element din centrul BMC $(Q,+)$. Prin centrul BMC vom înţelege aşa o mulţime Z, astfel încât $Z = \{a \in Q | a + (x+y) = (a+x)+y, x, y \in Q\}$.

După cum menţionează H.O. Pflugfelder [10] rezultatele obţinute de Profesorul V. Belousov au influenţat pozitiv cercetările din domeniu şi au contribuit esenţial la dezvoltarea teoriei quasigrupurilor şi buclelor.

Astfel, de exemplu, T. Kepka şi P. Nêmec descriu buclele Moufang comutative de ordinul ≤ 728, quasigrupurile distributive de ordinul ≤ 15, quasigrupurile distributive nemediale de ordinul 81 şi quasigrupurile distributive comutative nemediale de ordinul 81 şi 82. Un rezultat în care se arată conexiunea dintre buclele Moufang, IP-buclele şi A-bucle au obţinut M. K. Kinyon, K. Kunen şi J. D. Phillips. Astfel, s-a demondtrat că pentru orice A-buclă L sunt echivalente afirmaţiile: (i) L este IP-buclă; (ii) în L sunt adevărate identităţile de alternativitate de stânga şi de dreapta $x \cdot xy = x^2 \cdot y$, $yx \cdot x = y \cdot x^2$ (iii) L este diasociativă; (iv) L este buclă Moufang.

Reamintim că bucla L se numeşte IP-bucla, dacă în L sunt adevărate identităţile: $x^{-1} \cdot xy = y$ şi $yx \cdot x^{-1} = y$. Noţiunea de IP-buclă, dar şi IP-quasigrup, a fost introdusă de R. H. Bruck. Bucla L se numeşte A-buclă, dacă orice substituţie internă a ei este automorfism. Încă un rezultat interesant ţine de lucrările lui J. Smith [11], G. Malbos [12] şi L. Beneteau [13] în care s-a demonstrat că graniţa exactă de sus a clasei de nilpotenţă a buclei Moufang comutative libere 3-periodice cu n-generatori liberi este $n-1$, de unde rezultă că clasa tuturor buclelor Moufang comutative 3-periodice nu este nilpotentă.

Monografiile elaborate de V. Andrunachievici [14], Iu. Reabuhin [15], V. Belousov [6] au contribuit la dezvoltarea algebrei în Moldova şi alte ţări.

O contribuţie importantă în dezvoltarea teoriei buclelor Moufang şi a conexiunilor cu alte quasigrupuri, a fost adusă de reprezentanţii şcolii de matematică fondată de V. D. Belousov: A. S. Basarab [16], N. I. Sandu [17], [18], [19], F. Sokhatsky [20], W. Dedek [21], L. Ursu [22], G. Beleavscaia, A. Tabarov [23], V. Shcerbacov [24], V. Izbaş [25], V. Ursu [26], [27], I. Leah [28], E. Kuzneţov [29], etc.

Putem constata că cercetările descriu în mare măsură cât de ”aproape” buclele Moufang comutative sunt de grupuri. La cercetarea quasigrupurilor apar în evidenţă următoarele structuri:

– grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$;

– grupul automorfismelor;

– semigrupul endomorfismelor;

– semigrupul matricilor peste câmpuri, etc.

În cercetările predecesorilor nu au fost stabilite profund conexiunile buclelor Moufang comutative cu aceste grupuri şi semigrupuri. Prin urmare este actuală următoarea problemă.

Problema de cercetare. *Descrierea proprietăţilor buclelor Moufang comutative care va contribui la identificarea conexiunii lor cu grupul multiplicativ şi cu grupul de automorfisme în vederea determinării structurii buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.*

Pentru soluţionarea problemei de cercetare este necesar să realizăm următoarele **obiective**:

- De determinat condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă (de clasa data).

- De descris grupul de automorfisme $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente.

- De determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţii de minimalitate.

- De determinat structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior.

- De determinat structura buclelor Moufang comutative metahamiltoniene.

Metodologia cercetarii stiintifice. Construcţiile şi metodele ştiinţifice se bazează pe aplicarea noţiunilor de buclă Moufang comutativă cu condiţii de finitudine, grupul automorfismelor şi semigrupul endomorfismelor ei.

Noutatea şi orignalitatea ştiinţifică: Rezultatele principale din lucrare sunt noi. Astfel, sunt stabilite condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă de clasa n. Este descris grupul de automorfisme $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu buclele Moufang central nilpotente. Este determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţii de minimalitate. Este demonstrat că semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative ce poseda descompunere în produs direct a propriilor subbucle este izomorf semigrupului M–matricilor. Este determinată structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior. Este determinată structura buclelor Moufang metahamiltoniene.

Problema ştiintifică soluţionată rezidă în *descrierea proprietăţilor buclelor Moufang comutative care contribuie la identificarea conexiunii lor cu grupul multiplicativ şi cu grupul de automorfisme în vederea determinării structurii buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.*

Semnificaţia teoretică. Au fost elaborate concepţii, metode şi construcţii noi care au contrubuit la rezolvarea obiectivelor propuse. Rezultatele obţinute reprezintă un pas important în studiul buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.

Valoarea aplicativa a lucrarii. Lucrarea poartă un caracter teoretic. Metodologia aplicată, concepţiile şi metodele elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori ale unor aspecte ale problemelor formulate în cadrul teoriei buclelor Moufang comutative. De asemenea rezultatele lucrării pot fi utilizate în predarea cursurilor de specialitate pentru studenţii, masteranzii şi doctoranzii de la specialităţile de matematică, matematică aplicată, etc.

Rezultatele principale ştiinţifice înaintate spre susţinere:

- Au fost stabilite condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă de clasa n (Teorema 2.1);

- A fost descris grupul de automorfisme $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente (Teorema 2.2);

- A fost determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţii de minimalitate (Teorema 2.3 şi Teorema 2.4);

- A fost determinată structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior (Teorema 3.1);

- A fost stabilită structura buclelor Moufang metahamiltoniene (Teorema 4.1, Teorema 4.2 şi Teorema 4.3).

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele lucrării pot fi implementate în teoria buclelor Moufang comutative, criptografie, sisteme informaţionale, la elaborarea unor cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele tezei au fost expuse în cadrul următoarelor conferinţe şi seminare ştiinţifice:

1. Second Conference of the Matemathical Society of Republic of Moldova, august 17 – 19, 2004.

2. Seminarul ştiinţific anual dedicat matematicianului V. D. Belousov.

3. Profesorul Osmătescu – 80 de ani, Universitatea Tehnică din Moldova, Chişinău, noiembrie 19, 2005.

4. A 6-a Conferintă Anuală a Societătii de Ştiinte Matematice din România, Bucureşti, 28 iunie - 4 iulie, 2007.
5. The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60th anniversary of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University, Chisinău, august 17-19, 2006.
6. International conference ”Mathematics & Information techoloies: Research and Education” (MITRE 2011), dedicated to the 65th anniversary of the Moldova State University, August 22 – 25, 2011.
7. The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Iaşi, septembrie 22 – 25, 2011.
8. The XXV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Iaşi, septembrie 14 – 17, 2017.
9. Seminarul catedrei Algebră, Geometrie şi Topologie al Universităţi de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chişinău).
10. International conference on mathematics, informatics and information technologies: dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19 – 21, 2018, Bălţi.

Publicaţii la tema tezei. Rezultatele de bază ale tezei au fost publicate în 12 lucrări ştiinţifice, inclusiv:

1. Monografia ”Коммутативные лупы Муфанг с некоторыми условиями минимальности”, Tipografia UST, 2017, 103 p. [37]
2. (a) Două articole în revista ”Buletinul Academiei de Ştiinte a Republicii Moldova” seria Matematica Nr 2(51) 2006 [38] şi Nr 3(61) 2009 [39] (categoria B, actual de categoria A).
   (b) Un articol publicat în revista ”Математические Заметки” 2012, т. 91, № 3 (impact factor 0.46) [40];
   Articolul respectiv publicat în versiunea engleză în ”Mathematical Notes” April 2012, Volume 91, Issue 3-4 (impact factor 0.484).
   (c) Două articole în revista ”Дискретная Математика”, 2011, т. 23, № 1, [41] şi 2011, т. 23, № 2 [42] (impact factor 0.453);
   Articolele respective în versiunea engleză publicate în revista ”Discrete Mathematics And Applications”, respectiv Volume 21, Issue 1 (Jan 2011) şi Volume 21, Issue 3 (Apr 2011), (impact factor 0.552).
3. Şase rezumate la conferinţe naţionale şi internaţionale: MITI 2018 [43], MITRE 2011 [44], CAIM 2006 [45], CAIM 2011 [46], CAIM 2017 [47] şi la ”The 6th Congres of Romanian Mathematicians” 2007 [48].

Dintre care de un singur autor: o monografie, 3 articole şi 5 teze la conferinţe naţionale şi internaţionale. Volumul total al publicaţiilor este aproximativ 9.75 coli de autor.

Structura şi volumul tezei. Teza conţine introducere, patru capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografia ce include 113 de titluri. Volumul total de bază este de 111 pagini.

Cuvinte cheie: buclă Moufang comutativă, condiţii de finitudine, grupul automorfismelor din BMC, semigrupul endomorfismelor.

CONŢINUTUL TEZEI

În introducere se argumentează actualitatea temei tezei, se prezintă scopul şi obiectivele, problemele cercetării şi se expune succint conţinutul lucrării.

În primul Capitol - Analiza situaţiei în domeniul buclelor Moufang comutative - se face o analiză a publicaţiilor în domeniul cercetării, se efectuează o trecere în revistă a unor elemente introductive din literatura de specialitate, sunt prezentate rezultate cunoscute care sunt utilizate în următoarele capitole. De asemenea se argumentează actualitatea problemei de cercetare.

În al **doilea Capitol - Grupul automorfismelor buclei Moufang comutative -** constă din şase paragrafe. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [37], [40], [41], [42], [44], [46]. În acest capitol au fost cercetate obiectivele 1-3.

În primul paragraf se examinează grupul automorfismelor buclei Moufang comutative. Evedenţiem: Teorema 2.1, Propoziţia 2.1. În contiunare este caracterizată bucla Moufang comutativă cu condiţii de finitudine prin grupul automorfismelor.

Vom scoate în evidenţă următoarele noţiuni.

În orice buclă Moufang comutativă arbitrară sunt adevărate identităţile

$$L(x,y)x = z(z,y,x) \quad (2.1)$$

$$x,y,z = (y^{-1},x,z) = (y,x,z)^{-1} = (y,z,x) \quad (2.1)$$

$$(x,y,z)^3 = 1 \quad (2.3)$$

$$(xy,u,v) = (x,u,v)((x,u,v),x,y)\cdot(y,u,v)((y,y,v),y,x)(2.4)$$

Şir central a buclei Moufang comutative se numeşte consecutivitatea ordonată după incluziune

$$1 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha \subseteq \ldots \subseteq Z_\gamma = Q \quad (2.5)$$

de subbucle normale a buclei Moufang comutative Q, ce satisfac condiţiilor:

(1) $Z_\alpha = \Sigma_{\beta<\alpha} Z_\beta$ pentru numărul limită de ordine α şi

(2) Bucla-factor $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$ – factorul şirului (2.5) pentru orice α se conţine în centrul buclei-factor Q/Z_α.

Şirul central crescător (2.5) al buclei Moufang comutative Q se numeşte şir central superior dacă factorul crescător $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$ pentru orice α coincide cu centrul buclei factor Q/Z_α.

Bucla Moufang comutativă care dispune de şir central superior se numeşte *ZA–buclă.*

Dacă şirul central superior al ZA–buclei este finit, atunci ea se numeşte central nilpotentă, iar numărul de factori cu astfel de şiruri se numeşte clasă central nilpotentă.

Se noteaza prin Q_i subbuclele buclei Moufang comutative Q, generate de toti asociatorii de forma $(x_1, x_2, \ldots, x_{2i+1})$ unde $(x_1, \ldots, x_{2i-1}, x_{2i}, x_{2i+1}) = ((x_1, \ldots, x_{2i-1}), x_{2i}, x_{2i+1})$. Şirul de subbucle normale

$$Q = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \ldots \supseteq Q_i \supseteq \ldots \quad (2.6)$$

se numeşte *şir cenrtal inferior* al buclei Moufang comutative Q.

Bucla Moufang comutativă Q se numeşte *central nilpotentă de clasă n*, dacă şirulrile central superior (2.5) şi inferior (2.6) au structura:

$$1 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_n = Q$$

$$Q = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \ldots \supseteq Q_n = 1$$

În lucrările [11], [12], [13] sunt construite exemple de bucle Moufang comutative cu n generatori, care sunt central nilpotente de clasa $n-1$. Astfel, conform teoremei Bruck-Slaby, este adevărată:

Lema 2.1 *Bucla Moufang comutativă liberă cu n generatori liberi este central nilpotentă de clasa $n-1$.*

Fie bucla Moufang comutativă Q cu şir central inferior (2.6). Prin Aut$Q$ notăm grupul automorfismelor buclei Q, iar prin $F(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ mulţimea tuturor automorfismelor din Aut$Q$ care induc aplicaţia identică pe Q/Q_k. Subgrupul $F(k)$ este subgrup normal al grupului Aut$Q$.

Notăm prin $F(1) = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supseteq F_i \supseteq \ldots$ şirul central inferior a subgrupului $F(1)$ a grupului Aut$Q$. Are loc următoarea lemă:

Lema 2.2 *Pentru $m = 1, 2, \ldots$ şi pentru orice număr nenegativ k elementele grupului $F(k)$ induc aplicaţia identică pe Q_m/Q_{m+k}.*

Fie acum Q o buclă Moufang comutativă cu centrul $Z(Q)$ şi cu grupul substituţiilor interne $\mathfrak{I}(Q)$, şi $Z(\mathfrak{I})$ centrul grupului $\mathfrak{I}(Q)$. În lucrarea [5] s-a demonstrat, $\mathfrak{I}(Q/Z) \cong \mathfrak{I}/Z(\mathfrak{I})$. Atunci din această egalitate şi definiţiile ZA–buclei şi buclei central nilpotente cu ajutorul inducţiei se obţine afirmaţia:

Teorema 2.1 *Pentru bucla Moufang comutativă Q şi grupul de automorfisme $F(1)$ următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *Bucla Q este central nilpotentă de clasa n;*

2. *Grupul $F(1)$ este nilpotent de clasa $n-1$;*

3. *Grupul substituţilor interne $\mathfrak{I}(Q)$ este nilpotent de clasa $n-1$.*

Propoziţia 2.1 *Pentru bucla Moufang comutativă Q următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *Bucla Q este ZA–buclă;*

2. *Grupul $F(1)$ este ZA–grup;*

3. *Grupul $\mathfrak{I}(Q)$ este ZA–grup.*

În 2.2 este caracterizată bucla Moufang comutativă prin grupul automorfismelor.

Teorema 2.2 *Fie că bucla Moufang comutativă Q se aproximează cu bucle Moufang comutative central nilpotente. Atunci grupul său de automorfisme este extensie a grupului $F(1)$. Dacă bucla Q este central nilpotentă de clasa n, atunci grupul $F(1)$ este nilpotent de clasa $n-1$ şi ordinul 3^k, unde $k = \max\{r|2^r \leq n\}$. În particular, dacă, bucla Q este finit generată, atunci $F(1)$ este 3-grup finit.*

Este bine cunoscută teorema A. I. Mal'cev [30] (la fel [31]):
Grupul resolubil de automorfisme a grupului abelian finit generat este policiclic.

Acest rezultat a fost extins şi pentru buclele Moufang comutative, astfel este adevărată

Propoziţia 2.2 *Grupul resolubil al automorfismelor al buclei Moufang comutative finit generate este policiclic.*

În 2.3 este realizat obiectivul 3.

Bucla (grupul) satisface condiţiei de minimalitate pentru subgrupuri (vom utiliza doar termenul condiţiei de minimalitate) dacă nu există nici un şir infinit descrescător de subbucle (subgrupuri). Datorită observaţiei formulate de V. Ursu în lucrarea [32] am revăzut formularea şi demonstraţiile lemei ce urmează şi toate afirmaţiile care folosesc lema în demonstraţie.

Fie acum Q o buclă Moufang comutativă cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$, ce satisface condiţiilor de minimalitate pentru subbucle.

Lema 2.11 *Pentru bucla Moufang comutativă central simplă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$, următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) *Bucla Q satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle;*

2) *Bucla Q poate fi descompusă în produs de un număr finit de grupuri quasiciclice $D = \prod_{p\in S} \mathbb{C}_{p^\infty}$ din centrul $Z(Q)$ al buclei Q şi o buclă Moufang comutativă finită H;*

3) Bucla Q poate fi descompusă în produs direct de un număr finit de grupuri quasiciclice $\prod_{p\in S}\mathbb{C}_{p^\infty}$ şi Q_3, $Q=\prod_{p\in S}\mathbb{C}_{p^\infty}\times Q_3$, unde S este o mulţime de numere prime diferit de 3, iar Q_3 este finită sau $Q_3=\mathbb{C}_{p^\infty}\cdot F$, F o subbuclă finită;

4) Grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ poate fi descompus în produs direct de un număr finit de grupuri $D=\prod_{p\in S}\mathbb{C}_{p^\infty}$ din centrul $Z(\mathfrak{M})$ al grupului $\mathfrak{M}$ şi un grup finit G.

În conformitate cu Lema 2.11

$$Q=D\times H,\ \mathfrak{M}=D\times G,\ \text{unde}\ D=\prod_{p\in S}C_{p^\infty},$$

H este buclă Moufang comutativă finită, G este grup finit. În conformitate cu Lema 2.10,

$$H=\prod_{p\in T}H_p,\ G=\prod_{p\in T}G_p,\ \text{unde}\ G_p\cong\mathfrak{M}_{H_p}$$

şi dacă bucla Moufang comutativă Q este neasociativă, atunci 3-subbucla H_3 este neasociativă şi 3 - subgrupul maximal G_3 este necomutativ. Mulţimile de numere prime S, T sunt finite. Are loc:

Teorema 2.3 *Fie Q o buclă Moufang comutativă cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$, ce satisface condiţiilor de minimalitate pentru subbucle. Atunci grupurile automorfismelor $AutQ$, $Aut\mathfrak{M}$ izomorf se reprezintă prin matrici peste suma directă de câmpuri $GL_n(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ de numere întregi p-adice. Mai exact, aici $p\in S$, unde S este mulţimea numerelor prime, din Lema 2.11, iar n este numărul lor.*

Reamintim că fiecare buclă aproape toată se aproximează dacă dispune de careva proprietate dacă ea conţine o subbuclă normală de indice finit, care dispune de aceeaşi proprietate. Atunci, ca în cazul grupurilor [33] şi din Teorema 2.2 similar rezultă:

Corolarul 2.6 *Fie bucla Moufang comutativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$, ce satisface condiţiilor de minimalitate pentru subbucle. Atunci grupul automorfismelor $AutQ$ (respectiv $Aut\mathfrak{M}$) aproape nu are torsiune şi aproape toată se aproximează cu p-grupuri finite nilpotente.*

În [33] Teorema 2.3 şi corolarul ei se demonstrează pentru grupul automorfismelor externe $\mathrm{Aut}G=\mathrm{Aut}G/\mathrm{Int}G$, unde G este grup Chernicov, adică este extensie finită al produsului direct de un număr finit de grupuri quasiciclice, iar $\mathrm{Int}G$ este grupul automorfismelor lui interne. Dar, spre deosebire de bucla Moufang comutativă, aceste afirmaţii nu sunt adevărate pentru tot grupul automorfismelor $\mathrm{Aut}G$. Este suficient să analizăm în calitatea de G conexiunea dintre grupurile quasiciclice cu grupul finit netrivial.

În 2.4 este caracterizată bucla Moufang comutativă cu condiţia de minimalitate

Teorema 2.4 *Pentru bucla Moufang comutativă neasociativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) Bucla Q satisface condiţiei de minimalitate pentru subbucle.

2) a) Bucla Q este periodică,

b) Grupul periodic de automorfisme al Q este finit.

3) a) Bucla Q este periodică,

b) Grupul periodic de automorfisme al buclei Q satisface condiţiilor de minimalitate pentru subgrupuri.

4) a) Bucla Q este periodică,

b) 3-subgrupurile elementare abeliene a grupului automorfismelor al buclei Q sunt numerabile.

5) a) Bucla Q este periodică,

b) Grupul substituţiilor interne $\mathfrak{I}(Q)$ al buclei Q este un 3-grup finit,

c) Grupul $\mathfrak{M}$ admite prezentare matricială izomorfă asupra unui câmp de caracteristica zero.

6) a) Bucla Q este periodică,

b) Subgrupurile normale (respectiv neabeliene) grupului $\mathfrak{M}$ admit prezentare izomorfă matricială asupra unui câmp de caracteristica zero.

7) a) Bucla Q este periodică,

b) Cel puţin un subgrup abelian maximal al grupului $\mathfrak{M}$ admite prezentare izomorfă matricială asupra unui câmp de caracteristica zero.

8) a) Bucla Q este periodică,

b) Grupul $\mathfrak{M}$ este local nilpotent, de aceea subgrupurile normale (respectiv neabeliene) grupului $\mathfrak{M}$ admit prezentare izomorfă matricială asupra unui câmp de caracteristica zero.

9) a) Bucla Q este periodică,

b) Orice grup periodic de automorfisme al grupului $\mathfrak{M}$ este finit.

10) a) Bucla Q este periodică,

b) Factor-grupul $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ este un 3-grup finit,

c) Grupurile elementare primare abeliene ale grupului automorismelor $\mathfrak{M}$ sunt numerabile.

În al **treilea Capitol - Semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative -** este cercetet obiectivul 4, iar reflectate rezultatele sunt publicate în lucrările: [37], [41], [48].

Se cunoaşte că endomorfismele şi automorfismele spaţiilor vectoriale pot fi prezentate ca matrici asupra câmpurilor respective. Această prezentare matricială joacă un rol important în teoria grupurilor liniare - grupurile automorfismelor spaţiilor vectoriale. Analogic, prezentarea matricială se cercetează şi pentru produsele directe ale grupurilor multiplicative [34].

Fie că bucla Moufang comutativă Q se descompune în produs direct ale componentelor sale

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_i \times \ldots \quad (3.1)$$

Dacă $u \in Q_i, v \in Q_j, w \in Q_t$ şi cel puţin doi din trei îndici i, j, t sunt diferiţi, atunci din definiţia produsului direct rezultă că $uv \cdot w = u \cdot vw$. Mai mult, analizăm produsul $a = (a_1 a_2 \ldots a_n)_\alpha$ pentru o careva distribuţie a parantezelor α, unde $a_i \in Q_j$. Dacă $(a_1 a_2 \ldots a_n)_\alpha$ conţine nu mai mult de doi factori a_i, a_j $(i, j = 1, \ldots, n)$, ce aparţin uneia şi aceleiaşi componente Q_k, atunci expresia $(a_1 a_2 \ldots a_n)_\alpha$ nu se schimbă pentru orice altă distribuţie a parantezelor α şi pentru orice substituţie ale factorilor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Această proprietate a expresiei α o vom numi *asociativitatea componentelor*.

Acum, analăgic că în [34], definim următoarele noţiuni. Fie M, N două mulţimi şi L un sistem algebric cu operaţii de înmulţire $(\cdot)$, adunare $(+)$ şi operaţia nulara 0. Se vor examina diferite funcţii $A, B, \ldots$ de două variabile, definite pe produsul cartezian $M \times N$ şi cu valori în L. Astfel de funcţii se numesc *M, N-matrici* asupra sistemului L. Prin $a_{\alpha\beta}$ se notează valorile funcţiei pentru argumentele α şi $\beta : A(\alpha, \beta) = a_{\alpha\beta}$, iar funcţia este matrice ce se notează prin $(a_{\alpha\beta})$. Dacă $A = (a_{\alpha\beta})$ este matrice, atunci, fixând în aceasta primul element, obţinem funcţia de o singură variabilă este linia $\overline{a}_\alpha = (\overline{a}_\alpha(\beta))$, şi analogic, fixând al doilea argument, obţinem coloana $\overline{a}^\beta = (\overline{a}^\beta(\alpha))$. Matricea A se numeşte *linie finită*, dacă în toate liniile sale este doar un număr finit de zerouri. Respectiv se definesc matricile de coloane finite. Fie acum A este M, N-matrice şi B este N, K-matrice, cu condiţia că A este linie finită şi B este coloană finită. Atunci produsul $C = AB$ este M, K-matrice, definită prin formula

$$c_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta},$$

unde $\alpha \in M$, $\gamma \in N$, $\beta \in K$ şi sumând numărul înfinit de zerouri la fel obţinem zero. În final, funcţia $\overline{a} = (\overline{a}_{\alpha\alpha})$ este diagonală principală a M-matricii $(a_{\alpha\beta})$.

Acum trecem la cercetarea legăturilor între M-matrici şi endomorfismele buclei Moufang comutative Q, ce dispune de descompunere în produs direct (3.1).

Teorema 3.1 *Semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative Q, ce dispune de descompunere în produs direct de subbucle (3.1) cu proprietatea de asociativitatea componentelor este izomorf semigrupului M-matricilor.*

În [17] este demonstrat, că orice buclă Moufang comutativă periodică se descompune în produs direct al p-componentelor sale. Unde p-componentele sunt bucle complet caracteristice. Atunci din Teorema 3.1 rezultă:

Corolarul 3.1 *Semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative periodice este izomorf cu semigrupul M-matricilor diagonale.*

În 3.2 este examinată interconexiunea dintre produsul direct, semigrupul endomorfismelor şi repzezentarea lor matricială în bucla Moufang comutativă.

În **Capitol patru - Bucle Moufang comutative cu restricţii -** se expun studiile asupra obiectivului 5, care au fost reflectate în publicaţiile [38], [39], [45], [47].

Grupul G se va numi *fără torsiune* dacă orice element $g \neq e$ din grupul respectiv are ordin infinit. Dacă orice element $g \neq e$ din grupul G are ordin finit atunci grupul se numeşte *periodic*.

Un grup se numeşte ciclic, dacă este generat de un singur element al său. Acest element se numeşte *generator* al grupului.

Un grup neabelian finit este numit *grup Miller–Moreno* dacă toate subgrupurile sale sunt abeliene.

Un *IH-grup* (respectiv *$\overline{IH}$–grup*) este un grup infinit în care toate subgrupurile sale abeliene infinite (respectiv nonabeliene) sunt normale.

Grupul Hamiltonian este grupul neabelian în care toate subgrupurile sunt normale.

Grupul G se numeşte *metahamiltonian* dacă toate subgrupurile neabeliene din G sunt normale.

În [1] este descrisă construcţia IH-grupurilor, cu elemente de ordin infinit şi IH-grupurilor periodice, care nu satisfac condiţia minimalităţii pentru subgrupurile abeliane. De asemenea, se descriu grupurile resolubile $\overline{IH}$ cu subgrupuri finite sau infinite de comutatori şi se caracterizează $\overline{IH}$-grupurile (resolubile) metahamiltoniene sau non-metahamiltoniene.

Fie $M(H)$ un subgrup al grupului multiplicativ $\mathfrak{M}(Q)$ al buclei Moufang comutative Q, generat de mulţimea $\{L(x)|x \in H\}$. Are loc:

Teorema 4.1 *Dacă grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative Q este un IH-grup, atunci $\mathfrak{M}$ este abelian şi, prin urmare, bucla Q este asociativă.*

Propoziţia 4.1 *Grup multiplicativ $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative neasociative infinite Q nu conţine subgrupuri infinite neabeliene, dacă şi numai dacă $Q = D \times H$, unde D este un grup quasiciclic, H este o 3-buclă generată neasociativă sau $\mathfrak{M} = D \times G$, unde G este un grup Miller-Moreno.*

Teorema 4.2 *Dacă grupul multiplictiv $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative Q este un $\overline{IH}$-grup, atunci:*

1) Grupul $\mathfrak{M}$ este un grup meta-hamiltonian;

2) Toate subbuclele neasociative ale buclei Q sunt normale;

3) Dacă grupul $\mathfrak{M}$ este neperiodic, atunci subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ din grupul $\mathfrak{M}$ este 3-grup finit abelian;

4) Dacă $\mathfrak{M}$ este periodic, atunci subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ din grupul $\mathfrak{M}$ este 3-grup resolubil finit de clasă nu mai mare ca trei.

În 4.2 se cercetează bucla Moufang comutativă cu restricţii asupra sistemelor de subbucle asociative infinite.

Teorema 4.3 *Pentru o buclă Moufang comutativă Q cu grupul multiplictiv $\mathfrak{M}$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) Bucla Q este asociativă.

2) Bucla Q are aşa o subbuclă infinită H pentru care orice subbuclă asociativă ce are o intersecţie infinită cu H este o subbuclă normală în Q.

3) Grupul $\mathfrak{M}$ este abelian.

4) Grupul $\mathfrak{M}$ are un subgrup infinit $\mathfrak{N}$ pentru care orice subgrup are o intersecţie infinită cu $\mathfrak{N}$ este un subgrup normal în $\mathfrak{M}$.

Construcţia grupurilor arbitrare care satisfac echivalenţa afirmaţiilor 3), 4) din Teorema 4.3 este descrisă în [36]. Demonstraţia echivalenţei afirmaţiilor 3), 4) din Teorema 4.3, prezentate aici, este similară cu demonstraţia echivalenţei afirmaţiilor 1), 2) din aceeşi Teoremă 4.3.

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

Cercetările în domeniul teoriei buclelor Moufang au fost iniţiate în a doua jumătate a secolului XIX-lea. Teoria buclelor Moufang comutative cu restricţii de finitudine prezintă un interes special pentru cercetare datorită ”apropierii” de teoria grupurilor. Dar s-a determinat că nu sunt suficient cercetate proprietăţile buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine şi conexiunea lor cu diverse structuri asociate.

Rezultatele principale ale lucrării sunt noi. Cercetările realizate în această lucrare se referă la obiectivele propuse pentru investigaţie şi ne permit să formulăm următoarele concluzii:

1. Aplicând grupul de automorfismre, au fost determinate condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă (de clasa dată).

   În acest scop a fost demonstrat că următoarele condiţii sunt echivalente: bucla Moufang comutativă Q este central nilpotentă de clasa n; grupul

$F(1)$ este nilpotent de clasa $n-1$; grupul aplicaţiilor interne $\mathfrak{I}(Q)$ este nilpotent de clasa $n-1$.

2. Pentru buclele Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente a fost descrisă sructura grupului $F(1)$.

   În acest scop a fost demonstrat că dacă bucla Moufang comutativă Q se aproximează cu bucle Moufang comutative central nilpotente, atunci grupul său de automorfisme este extensia grupului $F(1)$ nilpotent aproximabil, generat de toate automorfismele ce induc aplicaţia identică pe Q/Q_1, prin grupul automorfismelor grupului abelian Q/Q_1. De asemeni s-a extins rezultatul lui A. I. Mal'cev asupra grupul resolubil al automorfismelor Φ al buclei Moufang comutative Q finit generată s-a demonstrat că este policiclic.

3. A fost determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţii de minimalitate.

   Pentru realizarea acestui obiectiv a fost demonstrat că bucla Moufang comutativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$, ce satisface condiţiilor de minimalitate pentru subbucle, atunci grupurile automorfismelor $\mathrm{Aut}Q$, $\mathrm{Aut}\mathfrak{M}$ izomorf se reprezintă prin matrici peste suma directă de câmpuri $GL_n(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ de numere întregi p-adice. La fel au fost caracterizate buclele Moufang comutative neasociative arbitrare prin grupul său de automorfisme, demonstrându-se echivalenţa unui set de condiţii.

4. Folosind asociativitatea componentelor buclei a fost determinată structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior.

   În acest sens a fost definită asociativitatea componenetelor buclei Moufang comutative. Pentru buclele Moufang comutative cu asociativitatea componenetelor şi descompunere în produs direct de subbucle, semigrupul endomorfismelor este izomorf semigrupului M-matricilor. La fel semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative Q este izomorf semigrupului M-matricilor. Pentru semigrupul endomorfismelor s-au demonstrat câteva proprietăţi.

5. A fost stabilită structura buclelor Moufang comutative metahamiltoniene.

   Pentru buclele Moufang comutative cu restricţii asupra subbuclelor şi subgrupurilor grupului multiplicativ au fost stabilite condiţiile pentru care bucla Moufang comutativă Q este asociativă.

   Pentru bucla Moufang comutativă Q cu restricţii asupra sistemelor de subgrupuri ale grupului multiplicativ $\mathfrak{M}$ au fost stabilite condiţiile pentru care: grupul $\mathfrak{M}$ este grup metahamiltonian; toate subbuclele neasociative din bucla Moufang comutativă Q sunt normale; subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$

din $\mathfrak{M}$ este 3-grup finit abelian; subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ din $\mathfrak{M}$ este 3-grup finit resolubil.

Pentru bucla Moufang comutativă cu restricţii asupra sistemelor de subbucle asociative infinite au fost stabilite condiţiile pentru care următoarele afirmaţii sunt echivalente: bucla Moufang comutativă Q este asociativă; Bucla Q are aşa o subbuclă infinită H pentru care orice subbuclă asociativă ce are o intersecţie infinită cu H este o subbuclă normală în Q. grupul $\mathfrak{M}$ este abelian; Grupul $\mathfrak{M}$ are un subgrup infinit $\mathfrak{N}$ pentru care orice subgrup are o intersecţie infinită cu $\mathfrak{N}$ este un subgrup normal în $\mathfrak{M}$.

Prin urmare, toate obiectivele tezei sunt realizate şi este complet soluţionată problema ştiinţifică: rezidă în *descrierea proprietăţilor buclelor Moufang comutative care a contribuit la identificarea conexiunii lor cu grupul multiplicativ şi cu grupul de automorfisme în vederea determinării structurii buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.*

Recomandări:

1. Luând în consideraţie rolul buclelor Moufang comutative în algebra abstractă, fizica teorietică şi aplicată, criptografie şi sisteme informaţionale putem considera că teoria şi metodele elaborate pot fi aplicate eficient în cercetările din domeniile menţionate, cât şi în alte direcţii de cercetare.

2. Se recomandă ca rezultatele obţinute şi construcţiile elaborate să fie aplicate:

   - la examinarea proprietăţilor algebrice ale buclelor Moufang comutative cu diverse restricţii;
   - la cercetarea proprietăţilor topologice şi algebrice ale buclelor Moufang topologice;
   - la studierea anumitor compartimente din criptografie şi sisteme informaţionale;
   - la elaborarea cursurilor opţionale pentru masteranzi şi doctoranzi.

LISTA PUBLICAŢIILOR

1. Черников С. Н. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп.* Наука, Москва, 1980.

2. Moufang R. Zur Asruktur von Alternativ Korpen. *Mathematische Annalen*, pages 416 – 430, 1935.

3. Chein O. and Pflugfelder H. O. The smallest Moufang loop. *Archiv der Mathematik*, 22(6):273 – 276, 1971.

4. Stephen M. Gagola III. The conjugacy of triality subgroups of Sylow subloops of Moufang loops. *Journal of Group Theory*, (13):821 – 840, 2010.

5. Bruck R. H. *A survey of binary systems.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1958.

6. Белоусов В. Д. *Основы теории квазигрупп и луп.* Наука, Москва, 1967.

7. Chein O., Pflugfelder H. O., and Smith J. D. H. *Quasigroups and Loops: Theory and applications.* Helderman Verlag, Berlin, 1990.

8. Bruck R. H. Contributions to the Theory of Loops. *Transactions of the American Mathematical Society*, (60):245 – 354, 1946.

9. Манин Ю. И. *Кубические формы.* Наука, Москва, 1972.

10. Pflugfelder H. O. Historical notes on loop theory. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 41(2):359 – 370, 2000.

11. Smith J. D. H. On the nilpotence class of commutative Moufang loops. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 3(84):387 – 404, 1978.

12. Malbos J.-P. Sur la classe de nilpotence des boucles commutatives de Moufang et des espaces mediaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 287:691 – 693, 1998.

13. Beneteau L. Free commutative Moufang loops and anticommutative graded rings. *Journal of Algebra*, 67:1 – 35, 1980.

14. Андрунакиевич В. А. and Арнаутов В. И. *Конструкции топологических колец и модулей.* Штиинца, Кишинёв, 1988.

15. Андрунакиевич В. А. and Рябухин Ю. М. *Радикалы алгебр и структурная теория.* Наука, Москва, 1979.

16. Basarab A. S. Generalized Moufang L-loops. *Quasigroups and Related Systems*, 3:1 – 5, 1996.

17. Санду Н. И. Коммутативные лупы Муфанг с конечными классами сопряженных подлуп. *Математические заметки*, 73(2):269 – 280, 2003.

18. Sandu N. I. Commutative Moufang loops with minimum condition for subloops I. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, 3(43):25 – 40, 2003.

19. Sandu N. I. Commutative Moufang loops with minimum condition for subloops II. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, 2(45):33 – 48, 2004.

20. Sokhatsky Fedir M. and Fryz Iryna V. Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 53:429 – 445, 2012.

21. Dudek W. A., Glazek K., and Gleichgewicht B. A note on the axioms of n-groups. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, 29:195 – 202, 1978.

22. Ursu Leonid. About one special inversion matrix of non-symmetri. In *The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici*, pages 165 – 169, 2012.

23. Белявская Г. Б. и Табаров А. Х. Группоиды с тождеством, определяющим коммутативные лупы Муфанг. *Фундаментальная И Прикладная Математика*, 14(6):33 – 39, 2008.

24. Shcherbacov Victor. *Elements of Quasigroup Theory and Applications.* Taylor Francis Group CRC Press, Boca Raton London New York, 2017.

25. Izbaş V. Crossed-inverse-property groupoids. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, (2(54)):101 – 106, 2007.

26. Ursu Vasile I. On quasivarieties of nilpotent Moufang loops. I. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 53(3):475 – 489, 2012.

27. Ursu Vasile I. On quasivarieties of nilpotent Moufang loops. II. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 53(3):491 – 499, 2012.

28. Лях И. *О преобразованиях ортогональных систем операцый и алгебраических систем.* PhD thesis, Институт математики и информатики АН МССР, 1986.

29. Kuznetsov E. General form transversals in groups. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, (2(81)), 2016.

30. Мальцев А. И. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп. *Математический сборник*, 3(28):567 – 588, 1951.

31. Санду Н. И. О центрально нильпотентных коммутативных лупах Муфанг. *В сб.: Квазигруппы и лупы. Штиинца, Кишинев*, pages 145 – 155, 1979.

32. Ursu V. O observaţie asupra buclelor moufang comutative cucondiţia minimalităţii. In *International conference Mathematics, Informatics and Information technologies: dedicated to the illustrous scientist Valentin Belousov*, pages 98 – 99, Bălţi, 4 2018. USARB.

33. Мерзляков Ю. И. Матричное представление групп внешних автоморфизмов черниковских групп. *Алгебра и логика*, 4(8):478 – 482, 1969.

34. Плоткин Б. И. *Группы автоморфизмов алгебраических систем.* Наука, Москва, 1966.

35. Каргаполов М. И. *Основы теории групп.* Наука, Москва, 1977.

36. Semko N. N. Some forms of non-abelian groups with given systems of invariant infinite abelian subgroups (in russian). *Ukrainian Mathematical Journal*, (2):211 – 213, 1981.

Lista publicaţiilor autorului la tema tezei

37. Лупашко Н. *Коммутативные лупы Муфанг с некоторыми условиями минимальности.* Tipografia UST, Кишинэу, 2017.

38. Lupaşco N. T. On commutative Moufang loops with some restrictions for subgroups of its multiplication groups. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, (2):95 – 101, 2006.

39. Lupaşco N. T. On commutative Moufang loops with some restrictions for subloops and subgroups of its multiplication groups. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, (3):52 – 56, 2009.

40. Лупашко Н. Т. и Санду Н. И. Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг с условием минимальности. *Математические заметки*, 91(3):407 – 421, 2012.

41. Лупашко Н. Т. и Санду Н. И. О полугруппах эндоморфизмов прямых произведений коммутативных луп Муфанг. *Дискретная Математика*, 23(1):84 – 93, 2011.

42. Лупашко Н. Т. Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг. *Дискретная Математика*, 23(2):108 – 114, 2011.

43. Lupasco N. Despre condiţia de minimalitate a buclei Moufang comutative. In *International conference Mathematics, Informatics and Information technologies: dedicated to the illustrous scientist Valentin Belousov*, pages 55 – 57, Bălţi, 4 2018. USARB.

44. Lupasco N. On automorphisms of commutative Moufang loops. In *International conference Mathematics and Information technologies: research and education, Abstracts*, pages 71 – 71, Chişinău, 8 2011. Moldova State University.

45. Lupasco N. About commutative Moufang loops with some restriction for subgroups of its multiplication groups. In *The XIV Conference On Append And Industrial Mathematics, Book of abstracts*, pages 230 – 231, Chişinău, 8 2006. ROMAI, MSRM.

46. Lupasco N. and Sandu N. On groups of automorphsms of commutative Moufang loops. In *The XXV Conference On Append And Industrial Mathematics, Book of abstracts*, pages 89 – 90, Iaşi, 9 2011. ROMAI, UAIC.

47. Lupasco N. About commutative Moufang lops with some restrictions for subloops. In *The XXV Conference On Append And Industrial Mathematics, Book of abstracts*, pages 89 – 90, Iaşi, 9 2017. ROMAI, UAIC.

48. Lupashco N. T. On endomorphism semigroups of direct products of commtative Moufang loops. In *The 6th Congres of Romanian Mathematicians, Abstracts*, pages 98 – 99, Bucharest, 7 2007. IMAR.

ADNOTARE

la teza de doctor **”Bucle Moufang comutative cu condiţii de finitudine”**, prezentată de către Natalia Lupaşco pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 111.03 – Logica Matematică, Algebră şi Teoria Numerelor. Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Tiraspol, Chişinău, anul 2018.
Structura tezei: teza este scrisă în limba română şi constă din introducere, 4 capitole, concluzii generale şi recomadări, 113 titluri bibliografice, 111 pagini text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 12 lucrări.
Cuvinte cheie: buclă Moufang comutativă (BMC), condiţii de finitudine, grupul automorfismelor, semigrupul endomorfismelor.
Domeniul de studiu al tezei: BMC cu condiţii de finitudine.
Scopul şi obiectivele lucrării: De determinat condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă (de clasa data). De descris grupul $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu buclele Moufang central nilpotente. De determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţii de minimalitate. De determinat structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior. De determinat structura buclelor Moufang comutative metahamiltoniene.
Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: Rezultatele principale din lucrare sunt noi. Astfel, sunt stabilite condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă de clasa n. Este descris grupul $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu buclele Moufang central nilpotente. Este determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţia de minimalitate. Este demonstrat că semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative ce poseda descompunere în produs direct a propriilor subbucle este izomorf semigrupului M-matricelor. Este determinată structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior. Este determinată structura buclelor Moufang metahamiltoniene.
Problema ştiintifică importantă soluţionată rezidă în descrierea proprietăţilor buclelor Moufang comutative, care contribuie la identificarea conexiunii lor cu grupul multiplicativ şi cu grupul de automorfisme, în vederea determinării structurii buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.
Semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării: Metodologia aplicată şi concepţiile elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori a unor aspecte ale problemelor formulate în cadrul teoriei BMC.
Implementarea rezultatelor ştiinţifice: Rezultatele lucrării pot fi implementate în teoria BMC, criptografie, sisteme informaţionale, la elaborarea unor cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

АННОТАЦИЯ

диссертации **”Коммутативные лупы Муфанг с условиями конечности”**, представленная Наталья Лупашко на соискание ученой степени доктора математических наук по специальности 111.03. Диссертация была разработана в Кишинёве, в ТГУ, в 2018 г.

Структура диссертации: Диссертация написана на румынском языке и содержит введение, 4 главы, выводы, 113 библиографических названия, 111 страниц основного текста. Основной результат диссертации был опубликован в 12 научных работах.

Ключевые слова: Коммутативные лупы Муфанг (КЛМ), условия конечности, группа автоморфизмов, полугруппа эндоморфизмов.

Область изучения диссертации: КЛМ с условиями конечности.

Цель и задачи диссертации: Определить условия, в которых КЛМ является центральной нильпотентной (данного класса). Описать группу $F(1)$ КЛМ, которая аппроксимируется центральным нильпотентым лупам Муфанг. Определить группу автоморфизмов КЛМ с условиями минимальности. Определить структуру КЛМ, которая разлогается в нижней центральный ряд. Определить структуру метагамильтоновой КЛМ.

Научные инновации и оригинальность: Основные результаты диссертации новы, таким образом, описываются условия, в которых КЛМ является центральным нильпотентом класса n. Описывается группа $F(1)$ КЛМ, которая аппроксимируется центральным нильпотентным лупам Муфанг. Определяется группа автоморфизмов КЛМ с минимальными условиями. Показано, что полугруппа эндоморфизмов КЛМ, которая имеет разложение в прямое произведение подлуп, изоморфны M-матричной полугруппы. Определена структура КЛМ, которые разлогаются в нижний центральный ряд. Определена структура метагамильтоновой КЛМ.

Решёная научная задача: заключается в описание свойств КЛМ которое способствовало установлению их связи с мультипликативной группой и группой автоморфизмов для определения структуры КЛМ с условиями конечноси.

Теоретическая значимость и прикладная ценность диссертации: разработаны новые концепции, методы и новые конструкции, которые способствовали достижению целей и задач исследования. Основные исследования этой работы новы. Методология, применяемая в работе, позволила найти решение конкретных проблем теории КЛМ.

Реализация научных результатов: могут быть использованы в теории квазигрупп и луп, в криптографии и в разработке учебных курсов.

SUMMARY

of the thesis **"Commutative Loops Moufang with finiteness conditions"** presented by Natalia Lupaşco for the competition of Ph. Doctor degree in Mathematical Sciences, speciality 111.03. The thesis was elaborated in Chisinau, Tiraspol State University, in 2018.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and contains introduction, 4 chapter, conclusions, 113 references, 111 pages of basic text. The main result of the thesis was published in 12 scientific works.

Key words: commutative loop Moufang(CLM), finiteness conditions, group of automorphism, semigroup of endomorphisms.

Field of study of the thesis: CLM with finiteness conditions.

Thesis aim and objectives: establishing the condition for which the commutative Moufang loop is the central nilpotent (of the given class); describing the group $F(1)$ of the commutative Moufang loop which is approximate with commutative Moufang central nilpotence loops; determining the group of automorphism of commutative Moufang loop with minimal conditions; determining the structure of commutative Moufang loop which admit decomposition in the lower central series; determining the structure of meta-hamiltonian commutative Moufang loops.

Scientific innovation and originality: The main results of the paper are new. Thus, there have been established the condition for which the commutative Moufang loop is the central nilpotent (of the given class); there have been described the group $F(1)$ of the commutative Moufang loop which is approximate with commutative Moufang central nilpotence loops; there have been determined the group of automorphism of commutative Moufang loop with minimal conditions; there have been determined the structure of commutative Moufang loop which admit decomposition in the lower central series; there have been determined the structure of meta-hamiltonian commutative Moufang loops.

The important scientific problem solved: consists in the description proprietes of commutative Moufang loops and identifying their connection to the multiplicative group and the groups of automorphisms in order to determine the structure of commutative Moufang loops with finiteness conditions.

The theoretical significance and applicative value of the thesis: there have been elaborated the new concepts, methods and new constructions which contributed to achieving goals and objectives of the research. The basic research of the work are new. The methodology applied in work allowed to find the solution of concrete problems of the theory of CLM.

The implementation of the scientific results: the results from this work can be used in the theory of quasigroups and loops, in cryptography and in elaborating teaching courses.

LUPAŞCO NATALIA

BUCLE MOUFANG COMUTATIVE CU CONDIŢII DE FINITUDINE

111.03 – LOGICA MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Autoreferatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar: 22.05.2018 Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset. Tirajul 70 ex.
Coli de tipar: 1.8 Comanda nr.249

Tipografia Universităii de Stat din Tiraspol
Chişinău, str. Gh. Iablocikin 5, MD-2069