UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 512.548(043.3)

LUPAŞCO Natalia

BUCLE MOUFANG COMUTATIVE CU CONDIŢII DE FINITUDINE

111.03 – LOGICA MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Teză de doctor în ştiinţe matematice

Conducător ştiinţific: $\boxed{\text{SANDU Nicolae}}$
doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar

Consultant ştiinţific: **CHIRIAC Liubomir**
doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar,

Autor: **LUPAŞCO Natalia**

CHIŞINĂU, 2018

CUPRINS

ADNOTARE 5

LISTA ABREVIERILOR 8

INTRODUCERE 9

1. ANALIZA SITUAŢIEI ÎN DOMENIUL BUCLELOR MOUFANG COMUTATIVE 18

1.1 Noţiuni fundamentale 18

1.2 Grupuri, construcţii şi proprietăţi 21

1.3 Analiza unor rezultate şi construcţii ale teoriei buclelor Moufang 27

1.4 Concluzii la capitolul 1 33

2. GRUPUL AUTOMORFISMELOR BUCLELOR MOUFANG COMUTATIVE 35

2.1 Construcţia grupul automorfismelor buclelor Moufang comutative 35

2.2 Caracterizarea buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine prin grupul automorfismelor 41

2.3 Reprezentarea matriceală a grupului automorfismelor 43

2.4 Caracterizarea buclelor Moufang comutative finite cu condiţia de minimalitate 55

2.5 Descrierea unor clase de bucle Moufang comutative 66

2.6 Concluzii la capitolul 2 67

3. SEMIGRUPUL ENDOMORFISMELOR BUCLELOR MOUFANG COMUTATIVE 69

3.1 Reprezentarea matriceală a semigrupul endomorfismelor buclelor Moufang comutative 69

3.2 Interconexiunea produsului direct, endomorfisme şi reprezentarea matriceală 77

3.3 Concluzii la capitolul 3 82

4. BUCLE MOUFANG COMUTATIVE CU RESTRICŢII 83

4.1 Bucle Moufang comutative cu restricţii asupra sistemelor de subgrupuri ale grupului multiplicativ 83

4.2 Bucle Moufang comutative cu restricţii asupra sistemelor de subbucle asociative infinite 90
4.3 Concluzii la capitolul 4 94

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI **96**

BIBLIOGRAFIE **97**

DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII **108**

CV-ul AUTORULUI **109**

ADNOTARE

la teza de doctor **"Bucle Moufang comutative cu condiţii de finitudine"**, prezentată de către Natalia Lupaşco pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 111.03 – Logica Matematică, Algebră şi Teoria Numerelor. Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Tiraspol, Chişinău, anul 2018.

Structura tezei: teza este scrisă în limba română şi constă din introducere, 4 capitole, concluzii generale şi recomadări, 113 titluri bibliografice, 111 pagini text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 12 lucrări.

Cuvinte cheie: buclă Moufang comutativă (BMC), condiţii de finitudine, grupul automorfismelor, semigrupul endomorfismelor.

Domeniul de studiu al tezei: BMC cu condiţii de finitudine.

Scopul şi obiectivele lucrării: De determinat condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă (de clasa data). De descris grupul $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente. De determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţii de minimalitate. De determinat structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior. De determinat structura buclelor Moufang comutative metahamiltoniene.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică: Rezultatele principale din lucrare sunt noi. Astfel, sunt stabilite condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă de clasa n. Este descris grupul $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente. Este determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţia de minimalitate. Este demonstrat că semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative ce posedă descompunere în produs direct a propriilor subbucle este izomorf semigrupului M-matricelor. Este determinată structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior. Este determinată structura buclelor Moufang metahamiltoniene.

Problema ştiintifică soluţionată: Descrierea proprietăţilor buclelor Moufang comutative care contribuie la identificarea conexiunii lor cu grupul multiplicativ şi cu grupul de automorfisme în vederea determinării structurii buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.

Semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării: Metodologia aplicată şi concepţiile elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori a unor aspecte ale problemelor formulate în cadrul teoriei BMC.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele lucrării pot fi implementate în teoria BMC, criptografie, sisteme informaţionale, la elaborarea unor cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

АННОТАЦИЯ

диссертации **"Коммутативные лупы Муфанг с условиями конечности"**, представленная Наталья Лупашко на соискание ученой степени доктора математических наук по специальности 111.03. Диссертация была разработана в Кишинёве, в Тираспольском Государственном Университете, в 2018 году.

Структура диссертации: Диссертация написана на румынском языке и содержит введение, 4 главы, выводы, 113 библиографических названия, 111 страниц основного текста. Основной результат диссертации был опубликован в 12 научных работах.

Ключевые слова: Коммутативные лупы Муфанг (КЛМ), условия конечности, группа автоморфизмов, полугруппа эндоморфизмов.

Область изучения диссертации: КЛМ с условиями конечности.

Цель и задачи диссертации: Определить условия, в которых коммутативная лупа Муфанг является центральной нильпотентной (данного класса). Описать группу $F(1)$ коммутативной лупы Муфанг, которая аппроксимируется центральным нильпотентым лупам Муфанг. Определить группу автоморфизмов коммутативной лупы Муфанг с условиями минимальности. Определить структуру коммутативной лупы Муфанг, которая разлогается в нижней центральный ряд. Определить структуру метагамильтоновой коммутативной лупы Муфанг.

Научные инновации и оригинальность: Основные результаты диссертации новы, таким образом, описываются условия, в которых коммутативные лупы Муфанг является центральным нильпотентом класса n. Описывается группа $F(1)$ коммутативной лупы Муфанг, которая аппроксимируется центральным нильпотентным лупам Муфанг. Определяется группа автоморфизмов коммутативной лупы Муфанг с минимальными условиями. Показано, что полугруппа эндоморфизмов коммутативной лупы Муфанг, которая имеет разложение в прямое произведение подлуп, изоморфны M-матричной полугруппы. Определена структура коммутативных луп Муфанг, которые разлогаются в нижний центральный ряд. Определена структура метагамильтоновой коммутативной лупы Муфанг.

Решёная научная задача: Описание свойств коммутативных луп Муфанг которое способствовало установлению их связи с мультипликативной группой и группой автоморфизмов для определения структуры коммутативных луп Муфанг с условиями конечноси.

Теоретическая значимость и прикладная ценность диссертации: Разработаны новые концепции, методы и новые конструкции, которые способствовали достижению целей и задач исследования. Основные исследования этой работы новы. Методология, применяемая в работе, позволила найти решение конкретных проблем теории КЛМ.

Реализация научных результатов: Могут быть использованы в теории квазигрупп и луп, в криптографии и в разработке учебных курсов.

SUMMARY

of the thesis **"Commutative Loops Moufang with finiteness conditions"** presented by Natalia Lupaşco for the competition of Ph. Doctor degree in Mathematical Sciences, speciality 111.03. The thesis was elaborated in Chisinau, Tiraspol State University, in 2018.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and contains introduction, 4 chapter, conclusions, 113 references, 111 pages of basic text. The main result of the thesis was published in 12 scientific works.

Key words: commutative loop Moufang(CLM), finiteness conditions, group of automorphism, semigroup of endomorphisms.

Field of study of the thesis: CLM with finiteness conditions.

Thesis aim and objectives: establishing the condition for which the commutative Moufang loop is the central nilpotent (of the given class); describing the group $F(1)$ of the commutative Moufang loop which is approximate with commutative Moufang central nilpotence loops; determining the group of automorphism of commutative Moufang loop with minimal conditions; determining the structure of commutative Moufang loop which admit decomposition in the lower central series; determining the structure of meta-hamiltonian commutative Moufang loops.

Scientific innovation and originality: The main results of the paper are new. Thus, there have been established the condition for which the commutative Moufang loop is the central nilpotent (of the given class); there have been described the group $F(1)$ of the commutative Moufang loop which is approximate with commutative Moufang central nilpotence loops; there have been determined the group of automorphism of commutative Moufang loop with minimal conditions; there have been determined the structure of commutative Moufang loop which admit decomposition in the lower central series; there have been determined the structure of meta-hamiltonian commutative Moufang loops.

The important scientific problem solved: consists in the description proprietes of commutative Moufang loops and identifying their connection to the multiplicative group and the groups of automorphisms in order to determine the structure of commutative Moufang loops with finiteness conditions.

The theoretical significance and applicative value of the thesis: there have been elaborated the new concepts, methods and new constructions which contributed to achieving goals and objectives of the research. The basic research of the work are new. The methodology applied in work allowed to find the solution of concrete problems of the theory of CLM.

The implementation of the scientific results: the results from this work can be used in the theory of quasigroups and loops, in cryptography and in elaborating teaching courses.

LISTA ABREVIERILOR

BMC – bucla Moufang comutativă

Aut – grupul automorfismelor

Hom – grupul omomorfismelor

Hol – holomorful

$\mathfrak{M}$ – grupul multiplicativ

$\mathfrak{I}$ – grupul substituţiilor interne

$N(Q)$ – nucleul buclei Q

$Z(Q)$ – centrul buclei Q

$A(Q)$ – subbucla asociatorilor buclei Q

$F(Q)$ – subbucla Frattini

Q^p – subbucle maximale

Q_p – subbucle (componente) asociatoare

$\mathbb{Z}_p$ – grupul ciclic de numere întregi

INTRODUCERE

Actualitatea temei. Este remarcabil faptul că dezvoltarea dinamică a unor clase de algebre neasociative: algebre alternative, algebre Jordan, algebre Mal'cev, algebre Lie, etc., s-a produs graţie studierii algebrelor respective cu diverse condiţii de finitudine. Condiţia de finitudine a unei clase de algebre reprezintă o proprietate algebrică pe care o posedă toate algebrele finite din clasa respectivă dar, în acelaşi timp, există algebre infinite ce nu posedă proprietatea dată.

Astfel, un punct de cotitură în dezvoltarea algebrelor alternative ţine de demonstraţia celebrei teoreme a matematicianului scoţian de J. H. M. Wedderburn [1], prin care reuşeşte să arate că orice corp finit este comutativ. Ulterior, Emil Artin şi Max Zorn au extins rezultatul respectiv pentru algebre neasociative. Astfel, teorema Artin-Zorn este o generalizare a teoremei Wedderburn care afirmă că corpul neasociativ, în care orice două elemente generează un subcorp asociativ, este corp finit comutativ [2]. Mai târziu E. Noether a arătat că rezultatele obţinute de E. Artin [3] sunt adevărate pentru inele ce satisfac doar condiţia de minimalitate.

În contextul respectiv menţionăm faptul că rezultate importante care ţin de cercetarea algebrelor alternative, Jordan, Mal'cev au fost obţinute şi de matematicienii ruşi: A. I. Shirshov, K. A. Zhevlacov, E. N. Kuz'min, I. P. Shestakov, V. T. Filippov, etc. O sinteză a acestor rezultate au fost publicate în lucrarea [4]. O contribuţie importantă în cercetarea grupurilor cu condiţii de finitudine ţine de rezultatele obţinute de şcoala profesorului S. N. Chernikov şi de discipolii săi Ia. D. Polovithkii, D. I. Zait'ev, V. A. Onishciuk, etc. De exemplu, în lucrările [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] S. N. Chernikov a introdus clasele de grupuri local nilpotente şi local resolubile pentru a scoate în evidenţă obiecte de cercetare cu condiţii de finitudine.

În condiţiile respective cercetarea buclelor Moufang comutative ce satisfac diferitor condiţia de finitudine reprezintă o direcţie importantă a algebrei contemporane.

Apariţia şi cercetarea buclelor Moufang are conexiune strânsă cu examinarea planelor proiective din anii 30 a secolului XX. Termenul de quasigrup a fost introdus pentru prima dată în lucrarea matematicienei de origine germană Ruth Moufang care cerceta coordinatizarea planelor proiective [13]. R. Moufang prin noţiunea de quasigrup înţelegea obiectul matematic care astăzi se numeşte buclă Moufang adică bucla în care au loc identităţile $(x \cdot yz)x = xy \cdot zx$, $x(yz \cdot x) = xy \cdot zx$, $x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z$, $(zx \cdot y)x = z(x \cdot yx)$. Toerema remarcabilă care ilustrează "conexiunea" dintre buclele Moufang şi grupuri a fost demonstrată de către R. Moufang:

Teorema Moufang. *Dacă pentru trei elemente a, b, c din bucla Moufang are loc legea asociativă $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, atunci ele generează o buclă asociativă.*

O consecinţă importantă a acestei teoreme se referă la diasociativitatea buclei Moufang: orice două elemente a buclei Moufang generează o bucla asociativă. În prezent sunt cunoscute puţine metode şi algoritmi care ne permit construcţia buclelor Moufang noi. Una din cele mai cunoscute metode este metoda Chein, care ne oferă posibilitatea să construim bucle Moufang neasociative de ordinul $2n$ din orice grup necomutativ de ordinul n.

Este interesant de punctat faptul că O. Chein şi H. O. Pflugfelder [14] au găsit cea mai mică buclă Moufang neasociativă. Aceasta este bucla Moufang de ordinul 12 cu trei generatori. O. Chein [15] a identificat şi clasificat toate buclele Moufang de ordinul mai mic ca 64. Ulterior toate buclele Moufang neasociative de ordin mai mic ca 64 au fost găsite prin intermediul algebrei computaţionale de către G. Nagy şi P. Vojtechovsky în 2007. Fie $M(n)$ numărul de bucle Moufang comutative nonizomorfe. În lucrarea [16] este determinat $M(n)$ pentru toţi $n \leq 63$ şi $M(n) \neq 0$.

Orice abordare nouă utilizată la studierea buclelor Moufang este importantă şi necesară, deoarece permite înţelegerea mai profundă a proprietăţilor algebrice examinate.

În acest sens, descoperirea conexiunilor dintre buclele Moufang şi grupurile cu trialitate a contribuit semnificativ la elaborarea unor abordări noi privind studierea buclelor Moufang prin aplicarea unor metode puternic dezvoltate în teoria grupurilor la soluţionarea problemelor din teoria buclelor Moufang.

Astfel, Stephen M. Gagola în lucrarea [17] examinează proprietăţile grupurilor cu trialitate şi le aplică la demonstraţia unor rezultate importante din teoria buclelor Moufang finite. În contextul respectiv, M. W. Liebeck [18] utilizând grupurile cu trialitate a finalizat clasificarea buclelor Moufang neasociative simple. A. N. Grishcov şi A. V. Zavarnitsine [19] au demonstrat teorema Lagrange generalizată şi teorema Sylow pentru buclele Moufang finite.

Teoria buclelor Moufang comutative îşi are începutul în anul 1936, odată cu construcţia de către Hans Julius Zassenhaus, cunoscut matematician german în domeniul algebrei abstracte şi algebrei computaţionale, a primelor exemple de bucle Moufang comutative în lucrarea [20], utilizate ulterior de către Boll la cercetarea obiectelor geometrice. În anii 40 mai mulţi matematicieni din diferite ţări au cercetat intensiv buclele Moufang comutative structura cărora era "aproape", într-un anumit sens, de structura grupurilor abeliene. Rezultate fundamentale din teoria buclelor Moufang comutative pot fi găsite în [21] şi [22].

Pentru buclele Moufang comutative (bucle pentru care este justă identitatea $x^2 \cdot yz = xy \cdot xz$) s-a demonstrat următorul rezultat fundamental

Teorema Bruck-Slaby (vezi [21]). *Bucla Moufang comutativă generată de n elemente este central nilpotentă de clasa $\leq n-1$.*

Central nilpotenţa se defineşte analog nilpotenţei pentru grupuri. Dacă o buclă este isotopă unei bucle Moufang, atunci ea însăşi este buclă Moufang, altfel spus proprietatea de a fi buclă Moufang este universală. Mai mult, dacă două bucle Moufang comutative sunt isotope, atunci ele sunt izomorfe. În prezent aceste bucle au o vastă aplicaţie în studiul diferitor algebre, cum ar fi quasigrupurile distributive şi CH-quasigrupurile. Destul de detaliat sunt studiate buclele Moufang în monografiile [21], [22], [23] şi [24]. O contribuţie importantă la dezvoltarea teoriei buclelor Moufang, la etapa iniţială, au avut lucrările de o înalta ţinută ştiinţifică elaborate de R. H. Bruck [21], [25], [26], [27], [28] V. Belousov [22], Iu. Manin [29], [30]. Astfel, în anul 1958, V. Belousov a demonstrat că folosind unele automorfisme ale buclei Moufang comutative $(Q,+)$ poate fi obţinut orice quasigrup distributiv $(Q,\cdot)$, utilizând construcţia $x \cdot y = \varphi x + \psi y$, unde φ şi ψ sunt automorfisme ale buclei $(Q,+)$. Quasigrupul în care au loc identităţile $xy = yx$, $x(xy) = y$ şi orice trei elemente generează un subquasigrup medial se numeşte CH-quasigrup. Noţiunea de CH-quasigrup a fost introdusă de Iu. Manin în legătură cu investigaţiile din geometria algebrică şi anume cu studierea hipersuprafeţelor cubice. Iu. Manin a demonstrat că orice CH-quasigrup poate fi obţinut, aplicând construcţia $xy = (-x-y) + d$, unde d este un element din centrul buclei Moufang comutative $(Q,+)$. Prin centrul buclei Moufang comutative vom înţelege o mulţime Z, astfel încât $Z = \{a \in Q | a + (x+y) = (a+x) + y$, pentru orice $x, y \in Q\}$.

După cum menţionează profesoara H. O. Pflugfelder [31] rezultatele obţinute de profesorul V. Belousov au influenţat pozitiv cercetările din domeniu şi au contribuit esenţial la dezvoltarea teoriei quasigrupurilor şi buclelor în ţările din Europa de Est şi Centrală. De exemplu, T. Kepka şi P. Nêmec în lucrarea [32] descriu buclele Moufang comutative de ordinul ≤ 728, quasigrupurile distributive de ordinul ≤ 15, quasigrupurile distributive nemediale de ordinul 81 şi quasigrupurile distributive comutative nemediale de ordinul 81 şi 82. Un rezultat care arată conexiunea dintre buclele Moufang, IP-buclele şi A-bucle au obţinut M. K. Kinyon, K. Kunen şi J. D. Phillips [33]. S-a demonstrat că pentru orice A-buclă L sunt echivalente afirmaţiile: (i) L este IP-buclă; (ii) în L sunt adevărate identităţile de alternativitate de stânga şi de dreapta $x \cdot xy = x^2 \cdot y$, $yx \cdot x = y \cdot x^2$ (iii) L este diasociativă; (iv) L este buclă Moufang. Reamintim că bucla L se numeşte IP-buclă dacă în L sunt adevărate identităţile: $x^{-1} \cdot xy = y$ şi $yx \cdot x^{-1} = y$. Noţiunea de IP-buclă, dar şi IP-quasigrup, a fost introdusă de R. H. Bruck. Bucla L se numeşte A-buclă dacă orice substituţie internă a ei este automorfism. Încă un rezultat interesant ţine de lucrările lui J. Smith [34], G. Malbos [35] şi L. Beneteau [36], [37] în care s-a demonstrat că graniţa exactă de sus a clasei de nilpotenţă a buclei Moufang comutative libere 3-periodice cu n-generatori liberi este $n - 1$, de unde rezultă că clasa tuturor buclelor Moufang comutative 3-periodice nu este nilpotentă.

Un bilanţ al cercetărilor din domeniul teoriei buclelor Moufang comutative este prezentată în monografia elaborata de J. D. H. Smith [38].

Monografiile elaborate de V. Andrunachievici [39], Iu. Reabuhin [40], V. Belousov [22] au contribuit la dezvoltarea algebrei în Moldova şi alte ţări.

O contribuţie importantă în dezvoltarea teoriei buclelor Moufang şi a conexiunilor cu alte quasigrupuri, a fost adusă de reprezentanţii şcolii de matematică fondată de V. D. Belousov: A. S. Basarab [41], [42], [43], [44], [45], N. I. Sandu [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], F. Sokhatsky [54], W. Dedek [55], L. Ursu [56], G. Beleavscaia, A. Tabarov [57], V. Shcerbacov [58], V. Izbaş [59], [60], V. Ursu [61], [62], [63], [64], [65], I. Leah [66], E. Kuzneţov [67], etc.

Putem constata că cercetările descriu în mare măsură cât de "aproape" sunt buclele Moufang comutative de grupuri. La cercetarea quasigrupurilor în mod firesc apar următoarele structuri: grupul multiplicativ; grupul automorfismelor; semigrupul endomorfismelor; semigrupul matricelor peste câmpuri, etc.

În cercetările predecesorilor nu au fost stabilite profund conexiunile buclelor Moufang comutative cu aceste structuri algebrice. Prin urmare, este actuală următoarea **problema de cercetare:** rezidă în *descrierea proprietăţilor buclelor Moufang comutative care va contribui la identificarea conexiunii lor cu grupul multiplicativ şi cu grupul de automorfisme în vederea determinării structurii buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.*

Pentru soluţionarea problemei de cercetare au fost stabilite următoarele **obiective**:

1. De determinat condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă (de clasa dată).

2. De descris grupul de automorfisme $F(1)$ al buclei Moufang comutative care se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente.

3. De determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative care satisface condiţia de minimalitate.

4. De determinat structura buclelor Moufang comutative care admit descompunere în şir central inferior.

5. De determinat structura buclelor Moufang comutative metahamiltoniene.

Unele relaţii dintre grupul automorfismelor şi semigrupul endomorfismelor sunt bine cunoscute în teoria grupurilor. La demonstrarea unor echivalenţe, aceste rezultate se aplică direct. Însă scopul cercetării constă în evidenţierea legăturilor cu proprietăţile buclelor Moufang comutative.

Metodologia cercetării ştiinţifice. Construcţiile şi metodele ştiinţifice se bazează pe teoria generală a quasigrupurilor şi teoria grupurilor.

Noutatea şi orignalitatea ştiinţifică: Rezultatele principale din lucrare sunt noi. Astfel, sunt stabilite condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă de clasa n. Este descris grupul de automorfisme $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente. Este determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative ce satisface condiţia de minimalitate. Este demonstrat că semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative ce posedă descompunere în produs direct a propriilor subbucle este izomorf semigrupului M-matricelor. Este determinată structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior. Este descrisă structura buclelor Moufang metahamiltoniene.

Problema ştiintifică importantă soluţionată rezidă în *descrierea proprietăţilor buclelor Moufang comutative care contribuie la identificarea conexiunii lor cu grupul multiplicativ şi cu grupul de automorfisme în vederea determinării structurii buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.*

Semnificaţia teoretică. Au fost elaborate concepţii, metode şi construcţii noi care au contrubuit la rezolvarea obiectivelor propuse. Rezultatele obţinute reprezintă un pas important în studiul buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.

Valoarea aplicativă a lucrării. Lucrarea poartă un caracter teoretic. Metodologia aplicată, concepţiile şi metodele elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori ale unor aspecte ale problemelor formulate în cadrul teoriei buclelor Moufang comutative. De asemenea, rezultatele lucrării pot fi utilizate în predarea cursurilor de specialitate pentru studenţii, masteranzii şi doctoranzii de la specialităţile de matematică, matematică aplicată, etc.

Rezultatele principale ştiinţifice înaintate spre susţinere:

- Au fost stabilite condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă de clasa n (Teorema 2.1);
- A fost descris grupul de automorfisme $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente (Teorema 2.2);
- A fost determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţia de minimalitate (Teorema 2.3 şi Teorema 2.4);
- A fost determinată structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior (Teorema 3.1);
- A fost stabilită structura buclelor Moufang metahamiltoniene (Teorema 4.1, Teorema 4.2 şi Teorema 4.3).

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele tezei au fost expuse în cadrul următoarelor conferinţe şi seminare ştiinţifice:

1. Second Conference of the Matemathical Society of Republic of Moldova, august 17 – 19, 2004.
2. Seminarul ştiinţific anual dedicat matematicianului V. D. Belousov, februarie 17, 2005.
3. Profesorul Osmătescu – 80 de ani, Universitatea Tehnică din Moldova, Chişinău, noiembrie 19, 2005.
4. The 6th Congres of Romanian Mathematicians, Bucureşti, 28 iunie – 4 iulie, 2007.
5. The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60th anniversary of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University, Chisinău, august 17-19, 2006.
6. International conference "Mathematics & Information technologies: Research and Education" (MITRE 2011), dedicated to the 65th anniversary of the Moldova State University, August 22 – 25, 2011.
7. The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Iaşi, septembrie 22 – 25, 2011.

8. The XXV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Iaşi, septembrie 14 – 17, 2017.

9. Seminarul catedrei Algebră, Geometrie şi Topologie al Universităţi de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chişinău).

10. International conference on mathematics, informatics and information technologies: dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19 – 21, 2018, Bălţi.

Publicaţii. Rezultatele de bază ale tezei au fost publicate în 12 lucrări ştiinţifice:

1. Monografia "Коммутативные лупы Муфанг с некоторыми условиями минимальности", Tipografia UST, 2017, 103 p. [68]

2. (a) Două articole în revista "Buletinul Academiei de Ştiinte a Republicii Moldova" seria Matematica Nr 2(51) 2006 [69] si Nr 3(61) 2009 [70] (categoria B).

   (b) Un articol publicat în revista "Математические Заметки" 2012, т. 91, № 3 (impact factor 0.46) [71];
   Articolul respectiv publicat în versiunea engleză în "Mathematical Notes" April 2012, Volume 91, Issue 3-4 (impact factor 0.484).

   (c) Două articole în revista "Дискретная Математика", 2011, т. 23, № 1, [72] şi 2011, т. 23, № 2 [73] (impact factor 0.453);
   Articolele respective în versiunea engleză publicate în revista "Discrete Mathematics and Applications", respectiv Volume 21, Issue 1 (Jan 2011) şi Volume 21, Issue 3 (Apr 2011), (impact factor 0.552).

3. Şase rezumate la conferinţe naţionale şi internaţionale: MITI2018 [74], MITRE 2011 [75] şi CAIM 2006 [76], CAIM 2011 [77], CAIM 2017 [78] şi la "The 6th Congres of Romanian Mathematicians 2007" [79].

Dintre care de un singur autor: o monografie, 3 articole şi 5 teze la conferinţe naţionale şi internaţionale. Volumul total al publicaţiilor este aproximativ 9.75 coli de autor.

Structura şi volumul tezei. Teza conţine introducere, patru capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografia care include 113 de titluri. Volumul total de bază este de 111 pagini.

Sumarul compartimentelor tezei. În introducere se argumentează actualitatea temei tezei, se prezintă scopul şi obiectivele, problema cercetării şi se expune succint conţinutul lucrării.

În primul Capitol - Analiza situaţiei în domeniul buclelor Moufang comutative - se face o analiză a publicaţiilor în domeniul cercetării, se efectuează o trecere în revistă a unor elemente introductive din literatura de specialitate, se prezentă rezultate cunoscute care sunt utilizate în următoarele capitole. De asemenea se argumentează actualitatea problemei de cercetare.

În al **doilea Capitol - Grupul automorfismelor buclei Moufang comutative -** se stabilesc condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă de clasa n (Teorema 2.1); se descrie grupul de automorfisme $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente (Teorema 2.2); se determină grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţia de minimalitate (Teorema 2.3 şi Teorema 2.4); Pentru buclele Moufang comutative a fost demonstrată afirmaţia echivalentă **teoremei A. I. Mal'cev[80]:** *"Grupul resolubil de automorfisme al grupului abelian finit generat este policiclic"*. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [73], [71], [75], [77], [68], [74].

În al **treilea Capitol - Semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative -** se determină structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior (Teorema 3.1).

Se cunoaşte că endomorfismele şi automorfismele spaţiilor vectoriale pot fi prezentate ca matrice peste câmpurilor respective. Această prezentare matriceală joacă un rol important în teoria grupurilor liniare, anume grupurile automorfismelor spaţiilor vectoriale. Analog, prezentarea matriceală se cercetează şi pentru produsele directe ale grupurilor multiplicative [81]. Se cercetează legăturile între M-matrice şi endomorfismele buclei Moufang comutative Q, ce admite descompunere în produsul direct (3.1). În [51] este demonstrat, că orice buclă Moufang comutativă periodică se descompune în produs direct al p-componentelor proprii, unde p-componentele sunt bucle complet caracteristice. Acest rezultat a fost extins și pentru semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative periodice. Rezultatele reflectate în acest capitol sunt publicate în lucrările: [72], [79], [68].

În **Capitol patru - Bucle Moufang comutative cu restricţii -** se stabileşte structura buclelor Moufang metahamiltoniene (Teorema 4.1, Teorema 4.2 şi Teorema 4.3).

În [5] este descrisă construcţia IH-grupurilor cu elemente de ordin infinit şi IH-grupurilor periodice care nu satisfac condiţia minimalităţii pentru subgrupurile abeliane. De asemenea, se descriu $\overline{IH}$-grupurile resolubile cu subgrupuri finite sau infinite de comutatori şi se caracterizează $\overline{IH}$-grupurile (resolubile) metahamiltoniene sau nonmetahamiltoniene. Se prezintă condiţii echivalente, satisfacerea cărora asigură asociativitatea buclelor Moufang comutative. De asemeni, se cercetează bucla Moufang comutativă cu restricţii asupra sistemelor de subbucle asociative infinite. Rezultatele studiilor din acest capitol au fost reflectate în publicaţiile [69], [70], [76], [78].

Mulţumiri:

Exprim recunoştinţe sincere ***regretatului Profesor Nicolae Sandu***, pentru determinarea domeniului de cercetare, pentru formularea obiectivelor de cercetare, îndrumarea în munca doctorandului cu multă competenţă, pentru cunostinţele proprii, pentru materialul bibliografic personal foarte preţios prin conţinut, pentru ajutorul în realizarea lucrărilor ştiinţifice.

Cu deosebită consideraţie şi recunoştinţă aduc mulţumiri ***Profesorului Liubomir Chiriac*** pentru îndemn şi ajutor în depă şirea unor etape necesare în pregătirea tezei de doctor, pentru timpul pe care l-a petrecut, motivându-ma, pentru criticile constructive şi pentru răbdarea deosebită.

Exprim sincere mulţumiri ***Seminarului Ştiinţific de Profil*** pentru sfaturile şi criticile constructive care au contribuit la realizarea unei teze calitative.

1. ANALIZA SITUAŢIEI ÎN DOMENIUL BUCLELOR MOUFANG COMUTATIVE

În capitolul respectiv se realizează o analiză a conceptelor algebrice fundamentale. Sunt examinate construcţiile de bază ale teoriei buclelor Moufang, inclusiv a teoriei buclelor Moufang comutative. Se face o sinteză a situaţiei în domeniul cercetării.

1.1 Noţiuni fundamentale

Mulţimi şi aplicaţii

Dacă A este o mulţime şi fiecărui element $\alpha \in A$ i se asociază un obiect x_α, atunci A se numeşte *mulţime de indici*, iar $B = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ se numeşte *mulţime indexată.*

O mulţime elementele căreia sunt mulţimi se numeşte *familie de mulţimi.*

Fie A şi B două mulţimi nu neapărat distincte. Mulţimea notată $A \times B$ şi definită astfel:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ şi } y \in B\}$$

şi se numeşte *produs cartezian* al mulţimilor A şi B. În caz general, dacă n este un număr natural, $n \geq 3$ şi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulţimi, nu neapărat distincte, atunci produsul cartezian al acestor mulţimi se notează cu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ sau $\prod A_i, i = \overline{1..n}$ şi se defineşte astfel:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in A_i, \forall i, 1 \leq i \leq n\}$$

Se spune că f este *aplicaţie*, *funcţie*, *corespondenţă funcţională* a mulţimii A în mulţimea B şi se notează $f : A \to B$, dacă fiecărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $b = f(a) \in B$.

Fie dată aplicaţia $f : A \to B$. Funcţia f se numeşte:

- *surjecţie*, *aplicaţie pe*, dacă pentru fiecare element $b \in B$ există preimaginea $a \in A$, astfel încât $b = f(a)$;
- *injecţie*, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *bijecţie*, *aplicaţie bijectivă*, *aplicaţie biunivocă*, dacă f este simultan injecţie şi surjecţie [84].

Algebre universale

Noţiunea de algebră universală a fost introdusă, în anul 1898, de Alfred Whitehead în lucrarea "A Treatise on Universal Algebra". În conformitate cu Whitehead, pentru a obţine noţiunea de algebră universală este necesar de introdus noţiunea de operaţie. Astfel, aplicaţia $f : A^n \to A$ se numeşte operaţie algebrică n-ară pe mulţimea A pentru $n \geq 0$. În aşa fel Whitehead defineşte algebra universală ca un sistem (A, S), unde A este o mulţime nevidă şi S o mulţime de operaţii finite, numită *algebra* A *de signatura* S.

În 1935 Garret Birkhoff în celebra lucrare "On the structure of abstract algebras", introduce conceptele de bază ale algebrei universale: varietate, identitate, produs cartezian, congruenţă, obiect liber, etc.

Condiţia de finitudine a unei clase de algebre este aşa o proprietate pe care o posedă toate algebrele finite ale acestei clase, însă există algebre infinite ce nu posedă această proprietate. Algebra A satisface *condiţia de minimalitate* (respectiv *maximalitate*) pentru subalgebre ce posedă proprietatea α dacă orice şir descrescător $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ (respectiv crescător $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$)) de subalgebre ce posedă proprietatea α se stabilizează, adică $A_{n+1} = A_n = \ldots$ pentru un careva $n \in \mathbb{N}$. Pentru orice algebră A următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) algebra A satisface condiţia de maximalitate pentru subalgebre;

b) atât algebra A, cât şi toate subalgebrele proprii, sunt finit generate.

Astfel, grupoidul poate fi definit ca o algebră cu o operaţie binară. Quazigrupul este definit ca o algebră ce are o operaţie binară $(\cdot)$, astfel incât ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii unice pentru orice doua elemente a, b din quasigrup.

În unele situaţii quasigrupul este definit ca o algebra Q de signatura $S = \{\cdot, /, \backslash\}$ în care se îndeplinesc relaţiile

$$x(x\backslash y) = y, (x/y)y = x, \tag{1.1}$$

$$x\backslash(xy) = y, (xy)/y = x \tag{1.2}$$

unde, $a\backslash b$ este o operaţie de diviziune la stânga, b/a este operaţia de diviziune la dreapta şi $a \cdot (a\backslash b) = b$, iar $(b/a) \cdot a = b$.

Identităţile (1.1) confirmă existenţa soluţiilor ecuaţiilor $ax = b$ şi $ya = b$, iar (1.2) confirmă unicitatea acestora. Mai mult, aceste operaţii şi identităţi permit să elaborăm noţiuni şi construcţii importante din teoria quasigrupurilor.

Fie $(Q, \cdot)$ quasigrup şi fie există aşa un element $e \in Q$ astfel, încât $ae = ea = a$, pentru orice $a \in Q$. Aşa alement e se numeşte *unitate* în Q.

Dacă quasigrupul $(Q, \cdot)$ conţine elementul e astfel încât $e \cdot x = x(x \cdot e = x)$ pentru orice $x \in Q$, atunci e se numeşte element unitate de stânga (dreapta) în Q şi $(Q, \cdot)$ se numeşte buclă de stânga (dreapta).

Morfisme, izomorfisme şi izotopisme

O mulţime nevidă G se numeşte *grupoid* cu operaţia binară notată prin $\{\cdot\}$ dacă pentru orice pereche ordonată de elemenete $(a, b) \in G$, se defineşte în mod unic produsul $ab \in G$.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte *grupoid cu diviziune*, dacă pentru fiecare elemente $a, b \in G$ ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii, nu necesar unice.

Grupoidul $(N, \circ)$ se numeşte subgrupoid al grupoidului $(G, \cdot)$ dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $N \subseteq G$;
2. $x \circ y = x \cdot y, \forall x, y \in G$.

Un grupoid $(G, \cdot)$ se numeşte *finit* dacă mulţimea ce-l formează este finită. În acest caz numărul de elemente se numeşte *ordinul grupoidului* şi se notează $|G|$.

Fie $(M, \cdot)$ şi $(N, \circ)$ doi grupoizi. Aplicaţia $f : M \to N$ se numeşte *morfism*, *omomorfism*, (*homomorfism*) al grupoidului $(M, \cdot)$ în grupoidul $(N, \circ)$ dacă este satisfăcută condiţia $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in M$.

Un morfism bijectiv se numeşte *izomorfism*.

Un morfism (respectiv izomorfism) de tipul $f : M \to M$ se numeşte *endomorfism* (*automorfism*) al grupoidului M.

Propoziţia 1.1. *Fie $(M, *)$, $(N, \circ)$ şi $(P, \cdot)$ trei grupoizi. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1. Funcţia identică $1_M : M \to M$ este un automorfism al grupoidului $(M, *)$;

2. Dacă $f : M \to N$ şi $g : N \to P$ sunt morfisme de grupoizi, atunci funcţia $g \circ f : M \to P$ de asemenea este un morfism de grupoizi;

3. Dacă $f : M \to N$ este un izomorfism de grupoizi, atunci şi funcţia inversă $f^{-1} : N \to M$ de asemenea este un izomorfism.

Fie $Q(\cdot)$ un quasigrup. Aplicaţia $x \to ax$ se numeşte *translaţie de stânga* prin elementul a şi se notează $L_a : L_a x = ax$, care este substituţie a mulţimii Q. *Translaţia de dreapta* prin elementul a se defineşte prin egalitate $R_a : R_a x = xa$, care respectiv este substituţie.

Propoziţia 1.2. *Fie $(M, *)$ şi $(N, \circ)$ doi grupoizi şi aplicaţia $f : M \to N$ un morfism surjectiv (în particular un izomorfism). Au loc următoarele afirmaţii:*

1. Dacă operaţia $(*)$ este comutativă(respectiv asociativă), atunci şi operaţia $(\circ)$ este comutativă (respectiv asociativă);

2. Dacă e este element unitate pentru $(M,*)$ atunci $f(e)$ este element unitate pentru $(N,\circ)$;

3. Dacă $a \in M$ şi translaţia la stânga $L_a : M \to M$(respectiv translaţia la dreapta $R_a : M \to M$) definită de a este surjectivă atunci şi translaţia la stânga $L_{f(a)} : N \to N$(respectiv translaţia la dreapta $R_{f(a)} : N \to N$) definită de $f(a)$ este surjectivă.

Fie $(M,\cdot)$ şi $(N,\circ)$ doi grupoizi. Se numeşte *omotopism* sau *homotopism* al grupoidului $(M,\cdot)$ în grupoidul $(N,\circ)$ orice triplet ordonat (α,β,γ) care satisfac următoarele condiţii:

– $\alpha,\beta,\gamma : M \to N$ sunt aplicaţii bijective;

– $\alpha(x)\circ\beta(y) = \gamma(x\cdot y), \forall x,y \in M$.

Vom spune că tripletul de permutări (α,β,γ) este o *izotopie*, α este o substituţie de stânga (permutarea elementelor după coloane), β este o substituţie de dreapta (permutarea elementelor după linii); γ-substituţie principală (permutarea elementelor în interiorul grupoidului). Dacă $\alpha = \beta = \gamma$, atunci izotopismul se transformă în izomorfism. Izotopia de tipul $(T = \alpha,\beta,1)$ se numeşte principală. Prin *izotopism* al grupoidului $(M,\cdot)$ pe $(N,\circ)$ se înţelege un omotopism (α,β,γ) în care cele trei componente (α,β,γ) sunt bijecţii ale lui M pe N.

Grupoidul $(M,\cdot)$ se numeşte *izotop* cu $(N,\circ)$ (sau al lui $(N,\circ)$), şi se notează $N = M^T$ sau $N = M^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, dacă există măcar un izotopism (α,β,γ) al grupoidului $(M,\cdot)$ pe $(N,\circ)$.

Quasigrupul cu element unitate se numeşte *buclă*. Bucla asociativă se numeşte *grup*.

Fie $(Q,\cdot)$ o buclă. Prin $\langle a,b,\ldots\rangle$ notăm subbucla buclei Q, generată de elementele $a,b,\ldots \in Q$.

Dacă $S,T,\ldots$ sunt submulţimi sau elemente ale buclei Q, atunci prin $\{S,T,\ldots\}$ notăm subbuclele din Q generate de $S,T,\ldots$. Elementul $x \in Q$ este *nongenerator* al buclei Q [85], [21] dacă pentru orice submulţime S din Q $\{x,S\} = Q$ implică $\{S\} = Q$

Teorema 1.1. *[85] Mulţimea tuturor nongeneratorilor buclei formează o subbuclă $F(Q)$, numită subbucla Frattini.*

1.2 Grupuri, construcţii şi proprietăţi

Fie G un grup multiplicativ. Dacă g este un element din G, atunci produsul a n elemente g se va numi *puterea elementului* g şi va fi notat g^n. Dacă $g^n = e$ pentru un număr n întreg pozitiv, atunci cel mai mic n pentru care are loc relaţia respectivă se va numi *ordinul ori* *perioada elementului g*. Dacă $g^n \neq e$ pentru orice număr n întreg pozitiv, atunci ordinul ori perioada elementului g va fi infinită.

Grupul G se va numi *fără torsiune* dacă orice element $g \neq e$ din grupul respectiv are ordin infinit. Dacă orice element $g \neq e$ din grupul G are ordin finit, atunci grupul se numeşte *periodic*. Dacă în grupul periodic G toate ordinile elementelor reprezintă o mulţime finită, atunci cel mai mic multiplu comun al elementelor din mulţimea respectivă se numeşte *perioadă* a grupului G. Fie p un număr prim. Dacă în grupul periodic G toate ordinele elementelor din G reprezintă puteri a numărului p atunci vom spune că G este p-grup. Grupurile care sunt p-grupuri, pentru un număr prim p, se numesc grupuri *primare*.

Un grup *ciclic* este un grup ale cărui elemente sunt puteri (când operaţia de grup este considerată a fi de natură aditivă, se preferă termenul multipli) ai unui element a. Altfel, spus un grup se numeşte ciclic, dacă este generat de un singur element al său, acest element se numeşte *generator* al grupului. Sunt cunoscute în acest context următoarele teoreme:

Teorema 1.2. *Orice grup ciclic infinit este isomorf grupului $\mathbb{Z}$ şi orice grup ciclic de ordinul finit n este isomorf cu grupul $\mathbb{Z}_n$.*

Teorema 1.3. *Orice subgrup al grupului ciclic este ciclic.*

Grupul se numeşte *local ciclic* dacă orice submulţime generează un subgrup ciclic.

În anii 30 ai secolului XX O. Iu. Shmidt a formulat următoarea:

Problema Schmidt: De descris toate grupurile infinite (numite ulterior grupurile Schmidt) ale căror subgrupuri proprii sunt finite.

Problema respectivă s-a dovedit a fi destul de dificilă. În anul 1962, M. Kargapolov [12] a demonstrat că în clasa grupurilor local finite unicul grup de tip Shmidt este grupul quasiciclic.

Vom spune că grupul este *local finit* dacă toate subgrupurile finit generate sunt finite. Mulţimea $\mathbb{C}_{p^\infty}$, unde p este număr prim, care reprezintă toate rădăcinile ecuaţiei $x^{p^n} = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, din câmpul numerelor complexe cu înmulţirea obişnuită este p–grup abelian infinit. Grupul respectiv se numeşte quasiclic de tipul p^∞. Mai târziu, în anul 1962, A. Olshanskii a construit primul exemplu de grup nonquasiciclic de tip Shmidt, infinit generat de 2 elemente la care toate subgrupurile proprii au ordin finit şi chiar prim.

Grupuri nilpotente

Grupurile nilpotente reprezintă o clasă intermediară între grupurile abeliene şi grupurile resolubile. Fie G este un grup care posedă un şir normal

$$G = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} = 1$$

care se numeşte *central* dacă orice grup-factor A_i/A_{i+1} se conţine în centrul grupului-factor G/A_{i+1} pentru orice i. Grupul care posedă un *şir central* de lungime finită se numeşte nilpotent. Lungimea celui mai mic şir central se numeşte *clasă de nilpotenţă*.

Orice grup trivial este nilpotent, cu clasa de nilpotenţă 0. Orice grup abelian este nilpotent cu clasa de nilpotenţă unul. Grupul diedral de ordinul 8 este cel mai mic grup nilpotent neabelian (în termeni de ordin). Clasa de nilpotenţă al grupului diedral este doi. Mai jos vom relata unele prorpietăţi ale grupurilor nilpotente:

1. În orice grup nilpotent şirul central de subgrupuri diferite are lungimea mai mare sau egală cu clasa de nilpotenţă.

2. În orice grup nilpotent elementele de ordin finit constituie un subgrup, grupul-factor al cărui este fără torsiune.

3. Grupurile nilpotente finit generate sunt grupuri policiclice. Mai mult ca atât, ele posedă un şir central cu factori ciclici.

4. În grupurile nilpotente orice subgrup normal netrivial are o intersecţie netrivială cu centrul.

5. În orice grup care este produsul a două subgrupuri nilpotente normale de clasa s şi t, este un subgrup nilpotent normal de clasa $\leq s + t$.

Grupuri resolubile

Fie G un grup. Şirul de subgrupuri:

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n = \{e\} \tag{1.3}$$

este un şir descrescător de subgrupuri. Dacă orice G_i este subgrup normal al grupului G atunci şirul (1.3) se numeşte *şir normal*. Dacă pentru orice i subgrupul G_{i+1} este subgrup normal al grupului G_i, atinci şirul (1.3) se numeşte *şir subnormal*.

Numărul n se numeşte *lungimea şirului*, iar grupurile G_i/G_{i+1} se numesc *factorii şirului*.

Spunem că şirul normal (1.3) este *resolubil*, dacă toţi factorii săi sunt grupuri abeliene. Un grup se numeşte *resolubil*, dacă posedă un şir normal resolubil. De unde rezultă, că orice grup abelian este resolubil. Există grupuri neabeliene care sunt resolubile. Un subgrup al unui grup resolubil este resolubil. Orice grup factor al unui grup resolubil este resolubil.

Fie K un corp comutativ. Atunci ordinul $ord(1)$ al elementului 1 din K, în grupul aditiv $(K, +)$ poate fi finit ori infinit. Spunem că corpul K are caracteristica zero (ori este de caracteristica zero), dacă $ord(1)$ este infinit, adică $m \cdot 1 \neq 0$, pentru orice număr întreg pozitiv m. Spunem că corpul K are caracteristica n, dacă, $ord(1) = n$, adică n este cel mai mic număr întreg pozitiv, astfel încât $n \cdot 1 = 0$.

Are loc următoarea afirmaţie

Teoremă.[82] Fie H un subgrup normal al unui grup G. Atunci G este resolubil dacă şi numai dacă H şi G/H sunt resolubile.

Grupul G este nilpotent dacă posedă un lanţ central de lungime finită. Grupul G se numeşte *policiclic* dacă există un lanţ subnormal $\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G$ cu toţi factorii ciclici.

Cel mai mic n din (1.3) pentru care $G_n = \{e\}$ se numeşte *clasa resolubilităţii* grupului G de ordinul n. Grupurile resolubile de clasa resolubilităţii $\leq n$ constituie o varietate pe care o von nota V^n. Pentru $n = 1$ obţinem o varietate a grupurilor abeliene. Pentru $n = 2$ obţinem o varietate a grupurilor metabeliene. Grupurile nilpotente şi policiclice de asemenea sunt resolubile.

Clasa grupurilor resolubile este închisă în raport cu subgrupurile, factor-grupurile şi extinderile. Produsul cartezian a două subgrupuri normale resolubile dintr-un grup arbitrar este un subgrup resolubil.

Rang al grupului G se numeşte cel mai mic număr r cu proprietatea: toate subgrupurile finit generate din G sunt generate nu mai mult decât de r elemente. Dacă nu există un astfel de număr atunci se spune că grupul G este de rang infinit. În contextul respectiv a fost demonstrată următoarea teoremă.

Teorema Kargapolov. [82] Orice grup resolubil, ale cărui subgrupuri abeliene au ranguri finite, are rang finit.

Se spune că grupul este *local resolubil* dacă toate subgrupurile finit generate sunt resolubile.

Subgrupurile şi factor-grupurile grupurilor local resolubile sunt local resolubile. Evidenţiem următoarele proprietăţi cunoscute ale grupurilor resolubile şi local resolubile:

1. Grupul local resolubil fără torsiune de rang finit este resolubil.
2. Orice grup periodic local resolubil la care rangurile subgrurilor abeliene sunt finite de

asemenea este de rang finit.

3. Produsul cartezian a două subgrupuri normale local resolubile dintr-un grup arbitrar nu întotdeauna este un subgrup local resolubil.

4. Dacă grupul G este resolubil şi este dat omomorfismul din G pe grupul H, atunci şi H este resolubil.

5. Dacă grupul G este resolubil şi N este subgrup normal, atunci G/N este resolubil.

6. Dacă H şi G/H sunt resolubile, atunci G la fel este resolubil.

7. Orice grup finit de ordin impar este resolubil. (Teorema Feit-Thompson)

Este necesar de menţionat că dacă în definiţia grupului resolubil vom omite condiţia de finitudine obţinem o generalizare a grupurilor resolubile, aşa numita clasa grupurilor resolubile Kurosh–Chernikov.

Grupuri cu condiţia de finitudine

Condiţia de finitudine este o proprietate din teoria grupurilor pe care o posedă toate grupurile finite. Condiţia de finitudine se referă la grupurile periodice, local finite, finit generate, condiţia de maximilitate şi minimalitate pentru subgrupuri şi subgrupuri normale, etc.

Să examinăm, condiţia de finitudine prin intermediul grupurilor care satisfac condiţia de minimalitate.

Grupul satisface *condiţia de minimalitate pentru subgrupuri* (vom utiliza doar termenul *condiţia de minimalitate*) dacă nu există nici un şir infinit descrescător de subgrupuri.

Condiţia de minimalitate, de regulă, se studiază prin impunerea unor restricţii suplimentare. Unele din cele mai importante restricţii este aşa numita resolubilitate locală a grupului, despre care am discutat mai sus, şi care a permis construcţia teoriei grupurilor local resolubile cu condiţia de minimalitate. Un rol important în lansarea acestei teorii l-a avut şcoala profesorului S. N. Chernikov. Trebuie de menţionat faptul că grupurile cu condiţia de minimalitate au fost examinate şi prin prisma altor restricţii, mai generale comparativ cu resolubilitatea locală. Însă, metodele elaborate în cazul resolubilităţii locale au fost mai mult decât utile, au fost chiar decisive în situaţia generalităţilor examinate.

Dar, dezvoltarea ulterioară a teoriei grupurilor cu condiţia de minimalitate s-a confruntat cu probleme majore, care au apărut odată cu încercarea de a generaliza cunoscuta teoremă a lui Chernikov pentru orice grup cu condiţia minimalităţii. În legătură cu acest fapt, în cunoscuta sinteză a lui Kurosh-Chernikov [86], din anul 1947, a fost formulată problema, denumită problema minimalităţii:

Problema minimalităţii: *Va fi grupul infinit cu condiţia de minimalitate (în particular, grupul local finit cu condiţia minimalităţii) extindere finită a produsului cartezian a unui număr finit de grupuri quasiciclice?*

Problema respectivă a fost soluţionată negativ de către A. Iu. Olshanskii.

După cum am menţionat anterior, M. Kargapolov [87] a obţinut printre primii un rezultat important în acest sens, rezolvând negativ problema lui Shmidt în clasa grupurilor local finite, care este un caz particular a problemei minimalităţii. Ulterior rezultatul respectiv a fost obţinut şi în lucrările [88], [89], [82] şi [90]. Dacă problema minimalităţii se rezolvă negativ, atunci se poate demonstra că există un grup infinit G astfel încât orice subgrup infinit al grupului G nu este extindere finită a produsului cartezian a unui număr finit de grupuri quasicicilice [88].

Să studiem acum condiţia de finitudine prin prisma conexiunii dintre grupurile local finite şi periodice. Este clar că orice grup local finit este periodic. Dar este oare corectă afirmaţia inversă? Încă la începutul secolului trecut a fost fomulată problema Burnside:

1. **Problema generală Burnside**: Este oare orice grup periodic local finit?

2. **Problema limitată Burnside**: Este oare finit orice grup de perioada m (adică pentru care are loc relaţia $x^m = 1$ cu un număr dat de generatori r?

3. **Problema Burnside cu condiţie slăbită**: Este oare finit numărul de grupuri finite de perioada m cu un număr finit de elemente generatoare r?

Este clar, că din soluţionarea negativă problemei limită pentru careva r, m rezultă rezolvarea negativă a problemei generale, iar din soluţionarea pozitivă a problemei limită rezultă rezolvarea pozitivă a problemei cu condiţie slăbită.

Fie grupul liber cu n generatori. Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ notăm $F_m^n = \{g^n : g \in F_m\}$. Subgrupul F_m^n este subgrup normal al grupului F_m. Grupul $B(m, n) = F_m/F_m^n$ se numeşte *grup Burnside*. Fie $B(1, n) = C_n$. În 1902 Burnside a demonstrat următoarele afirmaţii:

1. $B(m, 2)$ este un grup abelian de ordinul 2^n şi un produs direct de n copii ale grupului C_2.
2. $B(m, 3)$ este un grup finit de ordinul $\leq 3^{2m-1}$.
3. $B(2, 4)$ este un grup de ordinul $\leq 2^{12}$.

Se ştie că E. Golod (1964) şi S. Aleshin (1972) au construit exemple de grupuri infinite, generat finit, periodice. Acest fapt soluţionează negativ problema generală Burnside. P. Novicov şi S. Adean (1968) au demonstrat infinitivitatea grupului liber $B(r, m)$ în varietatea grupurilor cu identitatea $x^m = 1$ şi cu r generatori liberi, unde $r \geq 2$ şi m este un număr impar ≥ 4381. Ulterior s-a demonstrat acest rezultat pentru m impar ≥ 665. A. Kostrikin în anul 1959 a soluţionat pozitiv Problema Burnside cu condiţie slăbită $B'(r, m)$ în cazul când m este număr prim.

1.3 Analiza unor rezultate şi construcţii ale teoriei buclelor Moufang

În acest paragraf se examinează unele rezultate fundamentale care ţin de caracterizarea şi construcţia buclelelor Moufang comutative.

Definiţia 1.1. *([21], p.115), Buclă ce satisface una din următoarele identităţi:*

$$[(xy)z]y = x[y(zy)] \tag{1.4}$$

$$(xy)(zx) = x[(yz)x] \tag{1.5}$$

se numeşte buclă Moufang.

Buclele Moufang sunt *diasociative*, adică orice două elemente ale proprii generează subbuclă asociativă [13].

În clasa buclelor Moufang identităţile :

$$(xy \cdot x)z = x(y \cdot xz), \qquad x(y \cdot zy) = (xy \cdot z)y, \qquad xy \cdot zx = (x \cdot yz)x,$$

numite respectiv de stânga, de dreapta şi centrală, sunt echivalente (vezi [21] p.115).

Pentru buclele Moufang comutative identitatea (1.5) poate fi rescrisă, utilizând diasociativitatea, în forma

$$(xy)(xz) = x^2(yz). \tag{1.6}$$

Pe de altă parte, bucla care satisface (1.6) este comutativă (substituind în (1.6) $y = e$ obţinem $x(xz) = x^2 z$ şi înlocuind $z = e$ în (1.6), obţinem $(xy)x = x^2 y = x(xy)$, deci $\omega x = x\omega$, pentru orice x şi ω, unde $y = x\backslash\omega$) şi la fel satisface (1.5). Urmează că identitatea (1.6) caracterizează bucla Moufang comutativă.

Ruth Moufang în lucrarea [13] a demonstrat teorema de bază a buclelor Moufang:

Teorema Moufang. *Dacă trei elemente ale buclei Moufang sunt legate prin legea asociativă, atunci ele generează o subbuclă asociativă.*

Fie $(Q, \cdot, e)$ o buclă Moufang comutativă. *Grupul multiplicativ* $\mathfrak{M}(Q)$ al buclei Q este gupul generat de toate translaţiile $L(a)$, unde $L(a)x = ax$.

Grupul $\mathfrak{I}(Q)$ generat de toate substituţiile interne $L(x,y) = L(xy)^{-1}L(x)L(y)$, unde $L(x)y = xy$, se numeşte *grupul substituţiilor interne* al buclei Q.

Propoziţia 1.3. *[21] În bucla Moufang comutativă substituţiile interne sunt automorfisme.*

Propoziţia 1.4. *[22] Fie $(Q,\cdot,e)$ o buclă. Pentru subbucla H a buclei Q următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. H este subbuclă normală

2. $\mathfrak{I}(H) = H$.

3. H satisface egalităţilor:

$$xy \cdot H = x \cdot yH,$$

$$H \cdot xy = Hx \cdot y,$$

$$xH = Hx$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Fie $(Q,\cdot,e)$ o buclă. Subbucla

$$\begin{aligned} N(Q) = \{a \in Q | a \cdot xy = ax \cdot y \qquad & \forall x, y \in Q\} \\ \cap \{a \in Q | x \cdot ay = xa \cdot y \qquad & \forall x, y \in Q\} \\ \cap \{a \in Q | x \cdot ya = xy \cdot a \qquad & \forall x, y \in Q\} \end{aligned}$$

se numeşte *nucleu*, iar subbucla normală

$$Z(Q) = \{a \in Q | ax = xa \qquad \forall x \in N(Q)\}$$

se numeşte *centrul* buclei $(Q,\cdot,e)$ [38].

Fie $(Q,\cdot)$ o buclă Moufang comutativă cu nucleul $N(Q)$ şi centrul $Z(Q)$. Elementul a (respectiv automorfismul φ) al buclei Q se numeşte *central* (respectiv *nuclear*), dacă $a \in Z(Q)$ (respectiv $\varphi(a) + a \in N(Q)$) [24].

Fie $a, b, c \in (Q,\cdot)$. *Asociatorul* (a,b,c) şi *comutatorul* $[a,b]$ se definesc respectiv prin egalităţile $ab \cdot c = (a \cdot bc)(a,b,c)$ şi $ab = ba \cdot [a,b]$ [21]. Totalitatea $A(Q)$ a asociatorilor formează o subbuclă normală a buclei Q [21].

Propoziţia 1.5. *[21] Fie $Z(Q)$ centrul buclei Moufang comutative Q. Atunci:*

1. Bucla factor $Q/Z(Q)$ are exponentul 3*, adică satisface identitatea $x^3 = 1$.*

2. Subbucla asociator $A(Q)$ este 3*-buclă, adică satisface identitatea $x^3 = 1$.*

3. Dacă bucla Moufang comutativă Q este finit generată, atunci subbucla $A(Q)$ este finită.

Propoziţia 1.6. *[91] Fie Q o buclă Moufang comutativă. Subbucla Frattini $F(Q)$ a buclei Q este normală în Q şi $A(Q) \subseteq F(Q)$.*

Teorema 1.4. *[21] Fie $\mathfrak{I}(Q)$ grupul substituţiilor interne şi $\mathfrak{M}$ grupul multiplicativ cu centrul $Z(\mathfrak{M})$ ale buclei Moufang comutative Q. Dacă bucla Q este finit generată, atunci $\mathfrak{I}(Q)$, grupul factor $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ şi comutatorul $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ sunt 3-grupuri finite.*

Următoarele rezultate ţin de teoria buclelor Moufang comutative periodice:

Propoziţia 1.7. *[21] Bucla Moufang comutativă periodică este local finită. Grupul multiplicativ al buclei Moufang comutative este grup periodic şi local finit.*

Pentru orice subbuclă Q se determină submulţimea $Q_p = \{x \in Q : x^p = 1\}$. Dacă Q este buclă Moufang, atunci Q_p este o p-subbucla maximală. Examinăm Q_p numai pentru numere prime p ([21, Propozitia 1.8] şi [92])

Propoziţia 1.8. *[91] Bucla Moufang comutativă periodică Q se descompune în produsul direct al p-subbuclelor sale maximale Q_p. Dacă $p \neq 3$, atunci subbucla Q_p este asociativă.*

În mod analog, grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative periodice este grup periodic şi se descompune în produsul direct al p-subgrupurilor proprii maximale $\mathfrak{M}_p$. Dacă $p \neq 3$, atunci subgrupul $\mathfrak{M}_p$ se conţine în centrul grupului $\mathfrak{M}$ [52].

Să expunem şi unele din cele mai importante rezultate privind buclele Moufang comutative nilpotente.

Teorema 1.5. ***Bruck-Slaby.****[21] Bucla Moufang comutativă cu n generatori este central nilpotentă de clasa $\leq n-1$.*

Limita exactă a clasei de nilpotenţă pentru bucla Moufang comutativă liberă generată de n generatori liberi a fost stabilită în lucrările [34], [36], [35]. S-au construit exemple de bucle Moufang comutative, generate de n elemente, care sunt central nilpotente de clasa $n-1$.

Teorema 1.6. *[34], [36], [35] Bucla Moufang comutativă liberă cu n generatori liberi este central nilpotentă de clasa $n-1$.*

Teorema 1.7. *[21] Bucla Moufang comutativă este central nilpotentă de clasa n dacă şi numai dacă grupul său de substituţii interne este nilpotent de clasa $n-1$.*

Menţionăm un rezultat important din teoria buclelor Moufang comutative:

Teorema 1.8. *[21] Bucla Moufang comutativă este central nilpotentă de clasa n dacă şi numai dacă grupul său multiplicativ este nilpotent de clasa $2n-1$.*

Mai jos expunem unele din rezultatele demonstrate de Nicolae Sandu [52], [53] privind buclele Moufang comutative ce satisfac condiţia de minimalitate pentru subbucle.

Teorema 1.9. *[52] Următoarele condiţii sunt echivalente pentru o buclă Moufang comutativă arbitrară Q:*

1) Q este o buclă finit cogenerată;

2) bucla Q posedă o subbuclă normală finită B astfel încât $B \cap H = 1$, pentru orice subbucla normală H a buclei Q;

3) bucla Q este un produs direct al unui număr finit de grupuri quasiciclice care se află în centrul $Z(Q)$ al buclei Q şi o buclă finită;

4) bucla Q satisface condiţia minimalităţii pentru subbucle;

5) bucla Q posedă o serie finită de subbucle normale, orice factor care este fie un grup de ordin simplu, fie un grup quasiciclic.

Teorema 1.10. *[53] Pentru o buclă Moufang nonasociativă comutativa Q cu un grup multiplicativ $\mathfrak{M}$ următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *bucla Q îndeplineşte condiţia minimalităţi pentru subbucle;*
2. *grupul $\mathfrak{M}$ este un produs cu un număr finit de grupuri quasiclice situate în centrul grupului $\mathfrak{M}$ şi un grup finit;*
3. *grupul $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri;*
4. *grupul $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri normale;*
5. *grupul $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupul non-abelian;*
6. *cel puţin un subgrup maximal abelian din grupa $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri;*
7. *dacă grupul $\mathfrak{M}$ conţine un subgrup resolubil din clasa r, atunci $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupurile resolubile din clasa r;*

8. *dacă grupul M conţine un subgrup nilpotent de clasa n, atunci $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupurile nilpotent din clasa n.*

Teorema 1.11. *[51]Dacă centrul $Z(Q)$ al ZA-buclei Moufang comutative Q satisface condiţia minimalitătii pentru subbucle, atunci şi Q satisface condiţia minimalităţii.*

Teorema 1.12. *[51] Dacă o buclă Moufang comutativă satisface condiţia minimalităţii pentru subbucle normale, acesta îndeplineşte condiţia minimalităţii pentru subbucle.*

Mai jos vom expune alte direcţii de cercetare a buclelor Moufang comutative. Menţionăm faptul că Vasile Ursu a descris în lucrările [61], [62], [64], [65], [63], quasivarietăţile buclelor Moufang comutative nilpotente de clasa < 2, care au un număr finit de subquasivarietăţi. A demonstrat că dacă srtuctura subquasivarietăţilor quasivarietăţii generate de bucla Moufang comutativă de clasa < 2 cu un număr finit generatori nu este finită, atunci ea este continuă.

Un rezultat important a fost obţinut de Parascovia Sârbu [93], care a determinat condiţiile necesare şi suficiente pentru ca IP-buclele cu elasticitate universală să fie bucle Moufang comutative.

Bucla ce satisface următoarele două identităţi este IP-*buclă*: $x^{-1}\cdot(x\cdot y) = y$ şi $(y\cdot x)\cdot x^{-1} = y$. În orice IP-buclă are loc identitatea: $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.

Evidenţiem rezultatul obţinut de Victor Shcerbacov şi Vladimir Izbaş [59], care au demonstrat că quasigrupul cu una din identităţile Moufang este buclă.

Un aport considerabil la dezvoltarea teoriei buclelor Moufang generalizate a fost adus de Alexandru Basarab, care a activat în cadrul Universirtăţii de Stat din Tiraspol. Alexandru Basarab a introdus noţinea de buclă Moufang generalizată [41]. Pentru a menţiona unele rezultate obţinute de A. Basarab avem nevoie de următoarele noţiuni [45]:

Bucla $Q(\cdot)$ se numeste:

(a) G-buclă [22] dacă fiecare buclă izotopă cu $Q(\cdot)$ este izomorfă cu ea;

(b) buclă Moufang generalizată [43] dacă se îndeplineşte una dintre următoarele identităţi:

$$x \cdot (yz \cdot x) = I(I^{-1}y \cdot I^{-1}x) \cdot zx,$$
$$(x \cdot yz) \cdot x = I^{-1}(Ix \cdot Iz),$$

unde $Ix = x^{-1}$ şi $I^{-1}x =^{-1} x$

(c) buclă Osborn [42] în cazul în care este valabila identitatea

$$xy \cdot (\Theta_x z \cdot x) = (x \cdot yz) \cdot x,$$

unde Θ_x este o substituţie internă care depinde de x;

(d) K-buclă [44] dacă se îndeplinesc următoarele identităţi:

$$(x \cdot yIx) \cdot xz = x \cdot yz, \qquad (y \cdot x) \cdot ((I^{-1}xz) \cdot x) = yz \cdot x;$$

(e) VD-buclă dacă au loc egalităţile

$$(\cdot)_x = (\cdot)_x^{L_x^{-1}R^x}, \qquad {}_x(\cdot) = (\cdot)^{R_x^{-1}L_x}(2),$$

care sunt valabile pentru orice $x \in Q$, unde

$$(\cdot)_x = (\cdot)^{(L_x, 1, L_x)}, \qquad {}_x(\cdot) = (\cdot)^{(1, R_x, R_x)}.$$

Orice K-bucla (orice VD-buclă) este G-buclă.

Teorema 1.13. *Bucla Moufang generalizată $Q(\cdot)$ este K-buclă dacă şi numai dacă $x^2 \in N$ pentru toţi $x \in Q$, unde N este nucleul buclei Moufang generalizate $(Q, \cdot)$.*

Teorema 1.14. *Bucla Moufang generalizată $Q(\cdot)$ este VD-buclă, dacă $x^4 \in N$ pentru orice $x \in Q$, unde N este nucleul buclei Moufang generalizate $(Q, \cdot)$.*

Teorema 1.15. *Orice VD-buclă este Osborn-buclă.*

Unele din rezultatele impotrante obţinute de Aliona Gurdiş sunt a fost propus un criteriu ca bucla Moufang comutativă să satisfacă diferite condiţii: de finitudine, de minimalitate pentru subbucle, de maximalitate pentru subbucle; de rang finit; pentru CH-quasigrupuri a fost stabilită echivalenţa diferitor condiţii de finitudine [94].

Bucla Q se numeşte *A-buclă* dacă orice substituţie internă a ei este automorfism.

Din rezultatele lui Alexandru Covalschi putem menţiona: subbuclele oricărei A-bucle nilpotente şi finit generate verifică condiţia maximalităţii; orice A-buclă nilpotentă şi finit generate este rezidual finită; identităţile oricărei A-bucle nilpotente au bază finită; este resolubilă problema egalităţii a două cuvinte în A-bucla nilpotentă şi finit generate; quasiidentităţile A-buclei nilpotente finit generate au bază finită dacă şi numai dacă ea este un grup abelian finit [95].

N. S. Chernikov în articolul [96], publicat în anul 2014, determină o clasă vastă de grupuri nonabelene care satisfac condiţia de minimalitate pentru subgrupuri nonabeliene şi nonnormale, şi care sunt grupuri nonabeliene Chernikov în acelaşi timp sunt resolubile nonabeliene cu subgrupuri normale nonabeliene.

Conexiunea dintre buclele Moufang comutative şi algebrele alternative a fost studiată de către Alexander N. Grishkov şi Ivan P. Shestacov în lucrarea [97] publicată în revista "Jornal of Algebra" în 2011, în care au reuşit să descrie bazele buclei Moufang comutative libere cu şapte generatori şi au calculat ordinul acestei bucle.

Alexander N. Grishkov şi Andrei V. Zavarnitsine publică în 2009 lucrarea "Sylow's teorem for Moufang loops" în "Jornal of Algebra" [98]. Autorii au demonstrat pentru bucle Moufang comutative finite, prima teorema Sylow, găsind criteriilie de existenţă a subbuclelor p-Sylow. De asemenea a fost găsit ordinul maximal al p-buclelor în bucla Moufang care posedă subbucle p-Sylow.

Comutantul unei bucle reprezintă mulţimea tuturor elementelor care comută cu toate elementele din buclă. Comutantul buclei Moufang este o subbuclă. Rămâne deschisă problema clasificării buclelor Moufang pentru care comutantul este normal. S. Doro [99] a formulat următoarea întrebare: în ce condiţii bucla Moufang are comutant normal? În 2012 Stephen M. Gagola, în lucrarea [100], demonstrează că comutantul oricărei bucle Moufang este întodeauna subbuclă normală. Gábor P. Nagy şi Petr Vojtěchovský în lucrarea [101] publicată în 2017 clasifică buclele Moufang de ordinul 64 şi ordinul 81. Autorii demonstrează că suplimentar la cele 267 de grupuri de ordinul 64, există 4262 de bucle Moufang nonasociative de ordinul 64. Şi suplimentar la cele 15 grupuri de ordinul 84 există 5 bucle Moufang nonasociative, două dintre care sunt comutative. Mai târziu, Vojtěchovský mai examinează în lucrarea [101] relaţia dintre buclele Moufang şi grupul substituţiilor interne. În 2016 în articolul [102] se examinează trialiatatea grupurilor multiplicative universale ale buclei Moufang. Alexander N. Grishkov , P. Plaumann, M. Rasskazova şi L. Sabinina studiază proprietăţile semi-automorfismelor buclei Moufang, automorfisme libere în lucrarea [103], publicată în "Mathematical Notes" în 2015.

1.4 Concluzii la capitolul 1

Cercetările în domeniul teoriei buclelor Moufang au fost iniţiate în anii 30 ai secolului XIX-lea. Metodele elaborate şi rezultatele obţinute în acest domeniu de mare interes ştiinţific, sunt cu succes implementate nu numai în algebra abstractă, dar şi în fizica teoretică şi aplicativă, criptografie, sisteme informaţionale, etc.

Putem constata că cercetările descriu în mare măsură cât de "aproape" sunt buclele Moufang comutative de grupuri. La cercetarea quasigrupurilor apar în evidenţă următoarele structuri:

– grupul multiplicativ;

– grupul automorfismelor;

– semigrupul endomorfismelor;

– semigrupul matricelor peste câmpuri, etc.

În cercetările predecesorilor nu au fost stabilite profund conexiunile buclelor Moufang comutative cu aceste structuri algebrice. Prin urmare este actuală următoarea problemă.

Problema de cercetare. *Rezidă în descrierea proprietăţilor buclelor Moufang comutative care contribuie la identificarea conexiunii lor cu grupul multiplicativ şi cu grupul de automorfisme în vederea determinării structurii buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.*

Pentru soluţionarea problemei de cercetare este necesar să realizăm următoarele **obiective**:

- De determinat condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă n dacă grupul $F(1)$ este nilpotent de clasa $n-1$.

- De descris grupul de automorfisme $F(1)$ al buclei Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente.

- De determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţia de minimalitate.

- De determinat structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior.

- De determinat structura buclelor Moufang comutative metahamiltoniene.

Metodologia cercetării ştiinţifice. Construcţiile şi metodele ştiinţifice se bazează pe teoria generală a quasigrupurilor şi teoria grupurilor.

2. GRUPUL AUTOMORFISMELOR BUCLELOR MOUFANG COMUTATIVE

2.1 Construcţia grupul automorfismelor buclelor Moufang comutative

Una din cele mai cercetate clase ale buclelor neasociative este clasa buclelor Moufang comutative. În paragraful dat se cercetează construcţia grupului automorfismelor Aut$Q$ pentru astfel de bucle Q. Fie $A(Q)$ subbucla asociatorilor a buclei Q şi fie $F(1)$ mulţimea tuturor automorfismelor din Aut$Q$ care induc aplicaţia identică pe bucla-factor $Q/A(Q)$. Se demonstrează că grupul Aut$Q$ este o extindere a grupului $F(1)$ prin intermediul grupului automorfismelor grupului abelian $Q/A(Q)$. Se cercetează construcţia grupului $F(1)$ cu condiţia că bucla Q este central nilpotentă sau ZA-bucla, sau finit generată. Menţionăm faptul că grupul atomorfismelor al buclei Moufang comutative se cercetează în lucrarea [48], iar în lucrările [21] şi [49] este examinat grupul substituţilor interne pentru astfel de bucle, care este subgrupul grupului automorfismelor.

În orice buclă Moufang comutativă arbitrară sunt adevărate identităţile

$$L(x,y)z = z(z,y,x) \tag{2.1}$$

$$(x,y,z) = (y^{-1},x,z) = (y,x,z)^{-1} = (y,z,x) \tag{2.2}$$

$$(x,y,z)^3 = 1 \tag{2.3}$$

$$(xy,u,v) = (x,u,v)((x,u,v),x,y)\cdot(y,u,v)((y,u,v),y,x) \tag{2.4}$$

Şir central a buclei se numeşte şirul ordonat după incluziune

$$Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\alpha \subset \ldots \subset Z_\gamma = Q \tag{2.5}$$

de subbucle normale a buclei Q care satisfac condiţiilor:

(1) $Z_\alpha = \Sigma_{\beta<\alpha} Z_\beta$ pentru numărul limită de ordine α,

(2) Bucla-factor $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$, factorul şirului (2.5), pentru orice α se conţine în centrul buclei-factor Q/Z_α.

Şirul central crescător (2.5) al buclei Q se numeşte *şir central superior* dacă factorul său $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$ coincide cu centrul buclei factor Q/Z_α, pentru orice α .

Bucla Moufang comutativă care posedă şir central superior se numeşte *ZA-buclă.* Dacă şirul central superior al ZA-buclei este finit, atunci ea se numeşte *central nilpotentă*, iar numărul de factori cu astfel de şiruri se numeşte *clasă de central nilpotenţă.*

Pentru bucla Moufang comutativă Q notăm $A_1(Q) = A(Q)$ şi prin inducţie definim $A_{n+1}(Q)$ că subbucla generată de toţi asociatorii (u, x, y) unde $u \in A_n(Q)$ şi $x, y \in Q$. Şirul de subbucle normale

$$Q = A_0(Q) \supset A_1(Q) \supset A_2(Q) \supset \ldots \supset A_i(Q) \supset \ldots \tag{2.6}$$

se numeşte *şir cenrtal inferior* al buclei Moufang comutative Q.

Bucla Moufang comutativă Q se numeşte *central nilpotentă de clasă n* dacă şirurile central superior şi inferior au structura:

$$\begin{gathered} Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\alpha \subset \ldots \subset Z_\gamma = Q \\ Q = A_0(Q) \supset A_1(Q) \subset A_2(Q) \supset \ldots \supset A_n(Q) = 1 \end{gathered} \tag{2.7}$$

Un rezultat important în teoria buclelor Moufang comutative este **teorema Bruck-Slaby**. În lucrările [34], [35], [36] sunt construite exemple de bucle Moufang comutative cu n generatori, care sunt central nilpotente de clasa $n - 1$. De aceea este adevărată

Lema 2.1. *[35] Bucla Moufang comutativă liberă cu n generatori liberi este central nilpotentă de clasa $n - 1$.*

Fie Q o buclă Moufang comutativă cu şir central inferior (2.6). Prin Aut$Q$ notăm grupul automorfismelor buclei Moufang comutative Q, iar prin $F(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, mulţimea tuturor automorfismelor Aut$Q$ din Q care induc aplicaţia identică pe $Q/A_k(Q)$. Grupul $F(k)$ este subgrup normal al grupului Aut$Q$. Are loc următoarea afirmaţie

Lema 2.2. *[48] Pentru $m = 1, 2, \ldots$ şi pentru orice număr nenegativ k elementele grupului $F(k)$ induc aplicaţia identică pe $A_m(Q)/A_{m+k}(Q)$.*

Notăm prin $F(1) = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supseteq F_i \supseteq \ldots$ şirul central inferior al subgrupului $F(1)$ al grupului Aut$Q$. Are loc

Lema 2.3. *Pentru orice număr nenegativ i este adevărată incluziunea $F_i \subseteq F(i+1)$. Dacă $\varphi \in F(i)$, atunci $\varphi^3 \in F(2i)$. Mai mult ca atât, pentru $\varphi \in F(i)$, $\varphi^{f(i)} \in F(g(i))$, unde $f(i) = 3^i$, $g(i) = 2^i$.*

Demonstraţie. Avem $F_0 = F(1)$. Presupunem că $F_{i-1} \subseteq F_i$. În [48] se demonstrează că pentru orice numere întregi nenegative k şi m este adevărată relaţia $(F(m), F(k)) \subseteq F(m + k)$, unde $(F(m), F(k))$ este subgrupul, generat de toţi comutatorii (u, v), $u \in F(m)$, $v \in F(k)$. Atunci

$$F_i = (F_{i-1}, F_0) = (F_{i-1}, F_1) \subseteq (F(i), F(1)) \subseteq F(i + 1).$$

Prin urmare, $F_i \subseteq F(i+1)$ pentru orice număr nenegativ i.

Fie acum $\varphi \in F(i)$, $x \in Q$. Conform definiţiei subgrupului $F(i)$ avem $\varphi x = xy$, unde $y \in A_i(Q)$. În conformitate cu Lema 2.2 avem

$$\varphi y = y(\operatorname{mod} A_{2i}(Q)).$$

Bucla Moufang comutativă este diasociativă, atunci

$$\varphi^2 x = \varphi(xy) = \varphi x \cdot \varphi y = (yx \cdot y)(\operatorname{mod} A_{2i}(Q)) = (xy^2)(\operatorname{mod} A_{2i}(Q)).$$

În mod analog $\varphi^3 x = (xy^3)(\operatorname{mod} A_{2i}(Q))$. Dar $y \in A_i(Q)$ şi $i > 0$, atunci conform relaţiei (2.3) avem $y^3 = 1$. Atunci $\varphi^3 \in F(2i)$.

Vom arăta că din $\varphi \in F(1)$ rezultă $\varphi^{f(t)} \in F(g(i))$ pentru orice număr întreg $i \geq 1$. Într-adevăr, pentru $i = 1$ afirmaţia este demonstrată mai sus. Fie $\varphi^{f(i-1)} \in F(g(i-1))$. Atunci

$$\varphi^{f(i)} = (\varphi^{f(i-1)})^3 \in F(g(i-1) \cdot 2) = F(g(i)).$$

Lema este demonstrată. $\square$

Corolarul 2.1. *[48] Fie Q bucla Moufang comutativă central nilpotentă de clasa n şi fie $F(1)$ subgrupul grupului automorfismelor ei. Atunci $F(1)$ va fi grup nilpotent de clasă nu mai mare de cât $n-1$ şi generatori de ordinul multiplul care devide 3^r, unde $r = \min\{r | 2^r \geq n\}$, şi în consecinţă va fi grup local finit.*

Corolarul 2.2. *Dacă Q este o buclă Moufang comutativă finit generată, atunci subgrupul $F(1)$ al grupului $Aut(Q)$ este 3-grup finit.*

Demonstraţie. Din definiţia grupului $F(1)$ rezultă că dacă $\alpha \in F(1)$ atunci α induce aplicaţia identică pe $Q/A(Q)$. Notăm $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Pentru orice $\alpha \in F(1)$ şi $i \leq n$ există un unic element $h_{(i,\alpha)} \in A(Q)$ pentru care $\alpha x_i = x_i h_{i,\alpha}$. Perechile $\{(x_i, h_{i,\alpha}) : i \leq n\}$ determină în mod univoc automorfismul α. Totalitatea acestor mulţimi de perechi este mai mare decât numărul $|A(Q)|^n$, unde numărul $|A(Q)|^n$ este egal cu totalitatea aplicaţiilor $X \to A(Q)$. Deci $|F(1)| \leq |A(Q)|^n$. Prin urmare grupul $F(1)$ este finit.

Conform Lemei 2.1 bucla Moufang comutativă este central nilpotentă. Atunci din Corolarul 2.1 rezultă că $F(1)$ este 3-grup finit. Corolar demonstrat. $\square$

Bucla Q *se aproximează* cu bucle cu proprietatea α sau *este aproximabilă* cu proprietatea α, dacă pentru orice element a din Q există o subbuclă normală H a buclei Q astfel încât $a \notin H$ şi Q/H satisface proprietatea α.

Bucla Moufang comutativă central nilpotent aproximabilă se caracterizează prin produsul cartezian de bucle central nilpotente. Orice buclă central nilpotent aproximabilă este o subbuclă a unui produs cartezian de bucle nilpotente. Folosind Lema 2.1 ne convingem că bucla Moufang comutativă liberă se aproximează cu bucle central nilpotente. În lucrarea [50] se prezintă exemple de bucle Moufang comutative la care lungimea şirului central inferior este egală cu un număr de ordine dat. De unde rezultă că clasa de bucle Moufang comutative central nilpotent aproximabile nu este inchisă în raport cu imaginile epimorfe.

Lema 2.4. *[50] Dacă bucla Moufang comutativă Q se aproximează cu bucle Moufang comutative central nilpotente, atunci subgrupul $F(1)$ al grupului automorfismelor $AutQ$ se aproximează cu grupuri nilpotente.*

Fie L este o subbuclă Moufang comutativă arbitrară cu grupul automorfismelor $\mathrm{Aut}\, L$. Prin $J(L)$ notăm mulţimea tuturor automorfismelor din $\mathrm{Aut}\, L$ care acţionează identic pe $L/A(L)$. Are loc

Lema 2.5. *Fie Q o buclă Moufang comutativă cu grupul automorfismelor $AutQ$ şi $J(L) = F(1)$, F, $Z_i = Z_i(Q)$. Atunci $J(Q/Z_i) \cong J/Z_i(J)$.*

Demonstraţie. Expresia $J(Q/Z_i) \cong J/Z_i(J)$ are forma extinsă $F_1(Q)/Z_i(Q) \cong (F_1(Q)/Z_i)(F_1(Q))$. Avem $J(Q/Z) \cong J/R$, unde $Z = Z_1$, $R = \{\varphi \in J | \varphi x \cdot Z = xZ \quad \forall x \in Q\}$. Fie $\varphi \in R$ pentru $x, y, v \in Q$. Atunci $\varphi u = uz_1$, $\varphi v = vz_2$, unde $z_1, z_2 \in Z$. Considerând (2.1) şi (2.4) avem

$$\begin{aligned}\varphi L(u,v)x &= \varphi(x(x,v,u)) \\ &= \varphi x(\varphi x, \varphi v, \varphi u) \\ &= \varphi x(\varphi x, vz_2, u_1) \\ &= \varphi x(\varphi x, v, u) \\ &= L(u,v)\varphi x,\end{aligned}$$

adică $\varphi L(u,v) = L(u,v)\varphi$ pentru orice $u, v \in Q$. Aceasta înseamnă că $\varphi \in Z(J)$, dar atunci $R \subseteq Z(J)$.

Reciproc fie $\varphi \in Z(J)$. Conform relaţiei (2.1) pentru orice $x, y, z \in Q$ avem

$$\begin{aligned}\varphi x(\varphi x, y, z) &= L(z, y)\varphi x \\ &= \varphi L(z, y)x \\ &= \varphi(x(x, y, x)) \\ &= \varphi x \cdot \varphi(x, y, z),\end{aligned}$$

adică

$$(\varphi x, y, z) = \varphi(x, y, z) \tag{2.8}$$

Din relaţiile (2.8) şi (2.2) obţinem

$$\varphi(x, y, z) = (\varphi x, \varphi y, \varphi z) = \varphi^3(x, y, z),$$

$$(x, y, z) = \varphi^2(x, y, z).$$

Rezultă că automorfismul φ^2 acţionează identic pe $A(Q)$.

Fie H o subbuclă finit generată a buclei Moufang comutative Q. Notăm prin $\overline{\varphi}$ restricţia automorfismului φ pe $A(H)$. Fie $\overline{\varphi}^2$ acţionează identic pe $A(H)$. În conformitate cu Teorema Bruck-Slaby subbucla H este central nilpotentă, de aceea în conformitate cu Corolarul 2.1 automorfismul $\overline{\varphi}$ are ordin de puterea lui 3. Atunci $\overline{\varphi}$ acţionează identic pe $A(H)$. Deoarece H este o subbuclă arbitrară finit generată a buclei Q, atunci şi automorfismul φ acţionează identic pe $A(Q)$. Rezultă din (2.8) că

$$(\varphi x, y, z) = (x, y, z) \tag{2.9}$$

Fixăm elementul x şi definim elementul $a : \varphi x = xa$. Din (2.9) şi (2.4) obţinem

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (xa, y, z) \\ &= (x, y, z)((x, y, z), x, a) \cdot (a, y, z)((a, y, z), a, x).\end{aligned}$$

Atunci pentru orice $y, z \in Q$ avem

$$(a, y, z) = ((x, y, z), x, a)^{-1}((a, y, z), a, x)^{-1}. \tag{2.10}$$

Din (2.10) când $y = x$, $z = w$ obţinem $(a, x, w) = 1$ pentru orice $w \in Q$. În particular, ambii factori ai părţii drepte a egalităţii (2.10) sunt egali cu unitatea. De aceia $a \in Q$, şi atunci

$\varphi x \cdot z = xz$ pentru orice $x \in Q$, deci $Z(J) \subseteq R$. Deci, rezultă că $R = Z(J)$. Presupunem că afirmaţia Lemei este adevărată pentru un i. Atunci prin inducţie

$$\begin{aligned}
J(Q/Z_{i+1}) &\cong J((Q/Z_i)/(Z_{i+1}/Z_i)) \\
&= J((Q/Z_i)/Z(Q/Z_i)) \\
&\cong J(Q/Z_i)/Z(Q/Z_i) \\
&\cong (J/Z_i(J))/Z(J/Z_i(J)) \\
&\cong (J/Z_i(J))/Z_{i+1}(J)/Z_i(J) \\
&\cong J/Z_{i+1}(J).
\end{aligned}$$

Lema este demonstrată. □

Fie acum Q este o buclă Moufang comutativă cu centrul $Z(Q)$ şi grupul substituţiilor interne $\mathfrak{I}(Q)$, şi $Z(\mathfrak{I})$ este centrul grupului $\mathfrak{I}(Q)$. În lucrarea [21] s-a demonstrat, $\mathfrak{I}(Q/Z) \cong \mathfrak{I}/Z(\mathfrak{I})$. Atunci din aceasta, definiţiile ZA-buclei şi buclei central nilpotente, aplicând inducţia obţinem afirmaţia

Teorema 2.1. *Pentru bucla Moufang comutativă Q şi grupul de automorfisme $F(1)$ următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *Bucla Q este central nilpotentă de clasa n;*

2. *Grupul $F(1)$ este nilpotent de clasa $n-1$;*

3. *Grupul substituţilor interne $\mathfrak{I}(Q)$ este nilpotent de clasa $n-1$.*

Implicaţiile $1 \to 3 \to 1$ au fost demonstrate în lucrarea [21]. Inducţia poate fi aplicată şi pentru un şir central superior de orice lungime finită sau infinită. În acest caz obţinem

Propoziţia 2.1. *Pentru bucla Moufang comutativă Q următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *Bucla Q este ZA-buclă;*

2. *Grupul $F(1)$ este ZA-grup;*

3. *Grupul $\mathfrak{I}(Q)$ este ZA-grup.*

2.2 Caracterizarea buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine prin grupul automorfismelor

Acum să cercetăm grupul automorfismelor buclei Moufang comutative cu centrul trivial, care conform lucrării [50] esenţial se deosebeşte de buclele central nilpotente. Considerând Lema 2.1 astfel de bucle nu pot să fie finit generate. Exemple de astfel de bucle pot fi găsite în lucrarea [21]. Din Lema 2.5 rezultă că dacă centrul buclei Moufang comutative Q este trivial, atunci şi centrul subgrupului $F(1)$ al grupului automorfismelor Aut$Q$ al buclei Moufang comutative Q la fel este trivial. În particular centrul grupului substituţilor interne al buclei Moufang comutative Q la fel este trivial. Acum să arătăm că centrul $Z(\mathrm{Aut}Q)$ al grupului automorfsmelor Aut$Q$ al buclei Moufang comutative Q este format doar din automorfisme φ, aşa încât $\varphi^2 = 1$. Evident automorfismul $x \to x^{-1}$ pentru $x \in Q$, aparţine lui $Z(\mathrm{Aut}Q)$. Într-adevăr, fie $\varphi \in Z(\mathrm{Aut}Q)$ şi $\varphi^2 \neq 1$. Rezultă că există un element $a \in Q$ aşa încât $\varphi^2 a \neq a$. Dacă $x, y \in Q$ atunci conform (2.8) şi (2.2) obţinem

$$\varphi(a, x, y) = (\varphi a, \varphi x, \varphi y) = \varphi(\varphi^2 a, x, y).$$

De unde, folosind (2.4) şi (2.2) obţinem $(\varphi^2 a \cdot a^{-1}, x, y) = 1$ pentru orice $x, y \in Q$. Ceea ce înseamnă că $1 = \varphi^2 a \cdot a^{-1} \in Z(Q)$. Obţinem contradicţie. În consecinţă, centrul $Z(\mathrm{Aut}Q)$ al grupului Aut$Q$ al buclei Moufang comutative Q este format doar din automorfisme φ astfel $\varphi^2 = 1$.

Fie Q o buclă cu asociatorul $A(Q)$, iar $\varphi : Q \to Q$ un endomorfism. Din $\varphi(A(Q)) \subseteq A(Q)$ rezultă că $\varphi(x(A(Q))) \subseteq \varphi(x)A(Q)$. Prin urmare, endomorfismul φ induce pe $Q/A(Q)$ un endomorfism $\psi : Q/A(Q) \to Q/A(Q)$, unde $\psi(xA(Q)) = \varphi(x)A(Q)$ pentru orice $x \in Q$. Este evident că diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "g"'] & Q \arrow[d, "g"] \\ Q/A(Q) \arrow[r, "\psi"'] & Q/A(Q) \end{tikzcd}$$

este comutativă, unde $g : Q \to Q/A(Q)$ este omomorfismul factor. Acum să demonstrăm următoarea afirmaţie

Lema 2.6. *Fie Q o buclă Moufang comutativă cu condiţia că $A(Q) \neq Q$. Endomorfismul buclei Q este automorfism dacă şi numai dacă el induce automorfism pe $Q/A(Q)$.*

Demonstraţie. Fie $\varphi : Q \to Q$ un endomorfism al buclei Moufang comutative Q şi $\psi : Q/A(Q) \to Q/A(Q)$ automorfismul indus de φ. Dacă φ este automorfism, atunci $\varphi(A(Q)) = A(Q)$ şi, prin urmare, ψ este reciproc biunivoc. Deci orice automorfism induce automorfism.

Fie ψ este automorfism. În acest caz $\varphi(A(Q)) = A(Q)$ şi $\varphi(Q) = Q$. Prin urmare Conform [25, Teorema 5A] φ este un automorfism. □

Corolarul 2.3. *Fie H o subbuclă normală a buclei Moufang comutative Q cu condiţia $A(Q) \neq Q$ şi $H \subseteq A(Q)$. Atunci pentru orice automorfism φ al buclei factor Q/H există un automorfism al buclei Q care induce φ.*

Demonstraţie. Într-adevăr, exstă un endomorfism al buclei Q, care induce automorfismul φ al buclei Q/H. Astfel, cum $H \subseteq A(Q)$, atunci acest endomorfism induce un automorfism pe $Q/A(Q)$. Conform Lemei 2.6 acest endomorfism este automorfism. □

Corolarul 2.4. *Fie Q o buclă Moufang comutativă la care $A(Q) \neq Q$. Atunci grupul automorfismelor $AutQ$ al buclei Q este o extensie a grupului $F(1)$ prin intermediul grupului automorfismelor grupului de automorfisme ale grupului $Q/A(Q)$.*

Din Corolarele 2.1, 2.2, 2.4 şi Lema 2.4 obţinem:

Teorema 2.2. *Fie că bucla Moufang comutativă Q se aproximează cu bucle Moufang comutative central nilpotente. Atunci grupul de automorfisme este extensie a grupului $F(1)$. Dacă bucla Q este central nilpotentă de clasa n, atunci grupul $F(1)$ este nilpotent de clasa $n-1$ şi ordinul 3^k, unde $k = \max\{r | 2^r \leq n\}$. În particular, dacă bucla Q este finit generată, atunci $F(1)$ este 3-grup finit.*

Este bine cunoscută [80] (la fel [47])

Teorema A. I. Mal'cev: *Grupul resolubil de automorfisme al grupului abelian finit generat este policiclic.*

Pentru bucla Moufang comutativă este adevarată

Propoziţia 2.2. *Grupul resolubil al automorfismelor buclei Moufang comutative finit generate este policiclic.*

Demonstraţie. Fie H partea periodică a buclei Moufang comutative Q. Aşa cum în bucla Moufang comutativă substituţiile interne sunt automorfismele ei [21], rezultă că H este subbuclă normală în Q. Conform raţionamentelor din [91] bucla Moufang comutativă Q

satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle. Atunci H este finit generată şi din teorema Bruck-Slaby şi condiţia de maximalitate rezultă că ea este finită.

Să cercetăm automorfismul $\alpha : \Phi \to Aut(Q/H)$, ce pune în corespondenţă pentru orice $\varphi \in \Phi$ un automorfism $\bar{\varphi}$ al buclei factor Q/H care induc φ, adică $\bar{\varphi}(aH) = \varphi(a)H$. Aşa cum Q/H este grup abelian finit generat fără torsiune, atunci el se descompune în produs direct de un număr finit de grupuri ciclice. Atunci $\mathrm{Aut}(Q/H)$ este izomorf grupului matricelor de numere întregi cu determinantul ± 1. Conform lucrărilor [80], [90] orice grup resolubil de matrice de numere întregi este policiclic. De aceia Φ/Ψ este grupul policiclic de matrice al numerelor întregi, unde $\Psi = \ker \alpha$.

Să demonstrăm finitudinea lui Ψ. Într-adevăr, dacă $a_1, \ldots, a_k$ este sistemul care generează bucla Moufang comutativă Q, atunci pentru orice $\psi \in \Psi$ avem $\psi(a_i) = a_i h_i$, $h_i \in H$. Considerând finitudinea lui H are loc doar pentru un număr finit de imagini posibile ale generatorilor a_i pentru aplicaţiile din Ψ, atunci şi Φ este policiclic. $\square$

2.3 Reprezentarea matriceală a grupului automorfismelor

În caz general grupul automorfismelor algebrelor conţine puţină informaţie despre algebrele date, dar situaţia se schimbă dacă algebrelor respective li se pun anumite restricţii. De exemplu, pentru grupuri abeliene astfel de restricţii sunt examinate în [104]. În paragraful dat se cercetează grupurile automorfismelor unei clase mai largi ca grupurile abeliene, şi anume pentru clasa buclelor Moufang comutative. Se cercetează grupul automorfismelor buclei Moufang comutative periodice şi bucla Moufang comutativă ce satisface codiţia de minimalitate pentru subbucle. În continuare expresia "pentru subbucle" vom omite-o parţial.

În continuare prin $< M >$ vom nota subbucla buclei Q generată de mulţimea $M \subseteq Q$. Subbucla $< M >$ coincide cu intersecţia tuturor subbuclelor care conţin mulţimea M.

Lema 2.7. *[47] Pentru bucla Moufang comutativă Q arbitrară cu grup multiplicativ $\mathfrak{M}$, grupul substituţiilor interne $\mathfrak{I}(Q)$, comutatorul $\mathfrak{M}'$ grupului $\mathfrak{M}$ şi grupul factor $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ a grupului $\mathfrak{M}$ după centrul său $Z(\mathfrak{M})$, sunt 3-grupuri local finite.*

Lema 2.8. *[21] Pentru o buclă comutativă Moufang Q arbitrară subbucla asociatoare Q' şi factor-bucla $Q/Z(Q)$ sunt 3-bucle local finite.*

Lema 2.9. *[21] Bucla comutativă Moufang periodică este local finită.*

Fie Q o buclă Moufang comutativă. Atunci se determină p-subbuclele maximale Q_p: $Q_p = \{x \in Q | x^{p^i} = 1, i = 0, 1, 2, \ldots\}$, p număr prim. Fiecare Q_p, $p \neq 3$, este un grup ciclic sau quasiciclic (un grup care nu este ciclic şi în care orice subgrup finit generat este grup ciclic). Pentru o buclă Moufang comutativă Q cu condiţia minimalităţii pentru subbucle şi $p = 3$ avem că Q_3 satisface una din următoarele trei condiţii:

- este o subbuclă finită;

- este produsul grupului ciclic $\mathbb{C}_{3^n}$ cu o buclă finită F cu elemente de perioada 3^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

- este produsul grupului quasiciclic $\mathbb{C}_{3^\infty}$ cu o buclă finită F cu elemente de perioada 3^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Propoziţia 2.3. *Fie Q o buclă Moufang comutativă cu condiţia minimalităţii pentru subbucle. Atunci există o subuclă finită H pentru care $Q = Z(Q) \cdot H = H \cdot Z(Q)$.*

Demonstraţie. Subbucla $Z(Q)$ este un subgrup abelian comutativ normal în Q şi $x^3 \in Z(Q)$ pentru orice $x \in Q$ [21]. Examinăm omomorfismul natural $\psi : Q \to Q/Z(Q) = L$. Demontrăm că L este o buclă finită. În primul rând menţionăm că $x^3 = 1$ pentru orice $x \in L$. Imaginea omomorfă a buclei cu condiţia de minimalitate pentru subbucle este bucla cu condiţia de minimalitate pentru subbucle. Deci L este o bucla cu condiţia de minimalitate pentru subbucle. Conform ([21], Teorema 11.3) bucla L este local finită.

Admitem că bucla L este infinită. Atunci putem construi un şir infinit

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

de elemente din L cu proprităţile:

- subbucla L_n generată de primile n elemente $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este finită;

- elemental a_{n+1} nu se conţine în L_n pentru orice n.

Fie M_k subbucla buclei L generată de submulţimea $\{a_i : i = 2^{kn}, n = 1, 2, \ldots\}$. Obţinem un şir monoton descrescător $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ de subbucle infinite diferite. Contrazicere cu condiţia de minimalitate pentru subbucle. Am stabilit că L este o subuclă finită. Atunci în Q există o submulţime finită M pentru care $\psi M = L$. Deoarece bucla Q este local finită mulţimea M generează o subbuclă finită H. Vom avea $\psi H = L$. Astfel putem constata că $Q = Z(Q) \cdot H = H \cdot Z(Q)$. $\square$

Fixăm bucla Q cu centrul $Z(Q)$. Subbucla H se numeşte *cocentrică* dacă $H \cdot Z(Q) = Q$. Este evident că pentru orice buclă neasociativă totalitatea subbuclelor cocentrice $CZ(Q)$

este nevidă. În primul rând observăm că $< Q \setminus Z(Q) > \in CZ(Q)$ este cocentrul maximal. Pentru a construi subbucle cocentrice folosim omomorfismul $\psi : G \longrightarrow G/Z(G) = L$. Fie $M \subset Q \setminus Z(Q)$, aplicaţia $\psi|M : M \longrightarrow \psi(M)$ este bijectivă şi mulţimea $\psi(M)$ generează bucla L. Atunci $< M \setminus Z(Q) > = < M >$, $< M > \in CZ(Q)$ şi $< M >$ va fi un cocentru "minimal".

În baza rezultatelor la Bruck [21] obţinem următoarele proprietăţi ale buclelor cocentrice:

Proprietatea 1. *Dacă* $a \in H =< H \setminus Z(Q) >$, $H \in CZ(Z)$ *şi* $ord(a) < \infty$, *atunci* $ord(a) = 3^k$ *pentru un* $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Proprietatea 2. *Dacă* Q *este buclă periodică cu condiţia de minimalitate pentru subbucle, atunci* $CZ(Q)$ *contine bucle finite.*

Proprietatea 3. *Pentru bucla periodică* Q *avem că* $H \cap Z(Q) \subseteq Q_3$ *pentru orice subbuclă finită* $H \in CZ(Q)$ *si* $< H \setminus CZ(Q) >= H$.

Obţinem că $Z(Q, 3) = Z(Q) \cap < Q \setminus Z(Q >$ este 3-centru buclei Q.

Vom spune că bucla Q este *central simplă* dacă există o subbuclă cocentrică D şi o subbucl̆din $H \subset Z(Q)$ pentru care $D \cap C(Z)$ este o subbucă finită, $D \cap H = \{1\}$ şi $D \cdot H = Q$.

Recent V. Ursu [106]a construit un exemplu de buclă Moufang comutativă cu condiţia minimalităţii pentru subbucle care nu este central simplă şi care are subbucle cocentrice finite.

Dacă subbucla Q_3 este finită, atunci bucla Q este central simplă.

Subbucla D a buclei Q se numeşte subbuclă cocentrică simplă dacă $D \in CZ(Q)$ şi $D \cap Z(Q) = \{1\}$,

Proprietatea 4. *Dacă* $D \in CZ(Q)$ *este o subbuclă cocentrică simplă, atunci bucla* Q *este central simplă.*

Proprietatea 5. *Pentru o subbuclă concentrică simplă* D *a buclei Moufang comutative* Q *vom avea* $(x, y, z) = x^3 = 1$ *pentru orice* $x, y, z \in D$.

Prin urmare, uşor se construiesc subbucle care nu conţin subbucle cocentrice simple.

A.G. Kurosh [105], [86] a determinat structura grupurilor abeliene cu condiţia de minimalitate pentru subgrupuri: *grupul abelian* G *este cu condiţia de minimalitate pentru subgrupuri dacă şi numai dacă* G *este produsul unui număr finit de grupuri quasiciclice* C_{p^∞} *şi un număr finit de grupuri ciclice.* Putem scrie

$$G = \prod_{p \in S} \mathbb{C}_{p^\infty} \times \prod_{p \in T} \mathbb{C}_{p^n},$$

unde S şi T sunt două mulţimi finite de numere prime cu intersecţie vidă: $S \cap T = \emptyset$. Acest rezultat joacă un rol important în teoria buclelor Moufang comutative. Centrul $Z(Q)$ este un grup abelian. Deci în cazul când Q este o buclă Moufang comutativă cu condiţia minimalităţii vom avea

$$Z(Q) = \prod_{p \in S} \mathbb{C}_{p^\infty} \times \prod_{p \in T} \mathbb{C}_{p^{n(p)}},$$

unde S şi T sunt două mulţimi finite de numere prime cu intersecţie vidă: $S \cap T = \emptyset$.

Corolarul 2.5. *Dacă Q este buclă Moufang comutativă central simplă cu condiţia de minimalitate, atunci Q se descompune*

$$Q = \prod_{p \in S} \mathbb{C}_{p^\infty} \times \prod_{p \in T} \mathbb{C}_{p^{n(p)}} \times H,$$

unde H este o buclă Moufang comutativă finită şi S, T sunt două mulţimi finite de numere prime cu intersecţie vidă: $S \cap T = \emptyset$.

Corolarul 2.6. *Dacă Q este buclă Moufang comutativă cu condiţia de minimalitate, atunci Q se descompune*

$$Q = \prod_{p \in S} \mathbb{C}_{p^\infty} \times Q_3 \times H,$$

unde H este un grup comutativ finit şi S este o mulţime finită de numere prime.

Lema 2.10. *[47], [52] Orice buclă comutativă Moufang Q periodică poate fi extinsă în produs direct de p-subbuclele maximale Q_p, încât pentru $p \neq 3$, Q_p aparţine centrului $Z(Q)$, iar grupul său multiplicativ $\mathfrak{M}$ se descompune în produs direct de p-subgrupuri maximale $\mathfrak{M}_p \cong \mathfrak{M}(Q_p)$ şi pentru $p \neq 3$ $\mathfrak{M}_p$ aparţine centrului $Z(\mathfrak{M})$ al grupului $\mathfrak{M}$.*

Să aplicăm Lema 2.10 asupra grupului automorfismelor buclei Moufang comutative şi asupra grupului său multiplicativ. Iniţial vom face unele observaţii generale.

Dacă B este subbuclă caracteristică a buclei Moufang comutative Q şi $\alpha \in \mathrm{Aut}Q$, atunci restricţia α pe B este automorfismul buclei Moufang comutative B şi $aB \to \alpha a \cdot B$ este automorfismul buclei Moufang comutative Q/B.

Dacă bucla Moufang comutativă Q se descompune în produs direct $Q = A \times B$, atunci grupul $\mathrm{Aut}A$ poate fi cercetat ca subgrup al grupului $\mathrm{Aut}Q$: *identificăm $AutA$ cu mulţimea tuturor $\alpha \in AutQ$ pentru care $\alpha B = B$.* Această identificare depinde de alegerea factorului B.

Fie $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ un produs direct. Atunci AutQ_i este subgrup al grupului Aut$Q$, aplicând identificarea anterioară. Produsul direct $\prod_{i \in I} \mathrm{Aut} Q_i$ este un subgrup al grupului Aut$Q$. Observăm că subgrupul $\prod_{i \in I} \mathrm{Aut} Q_i$ este format din toate automorfismele $\alpha \in \mathrm{Aut} Q$ care aplică fiecare subbuclă Q_i pe ea însăşi.

Subbucla B a buclei Q se numeşte subbuclă *caracteristică* dacă B este invariantă faţă de toate automorfismele buclei Q.

Subbucla B a buclei Q se numeşte *complet caracteristică*, dacă $\varphi(B) \subseteq B$ pentru orice endomorfism φ al buclei Q.

Dacă Q este o subbuclă Moufang comutativă şi fiecare Q_i este o subbuclă complet caracteristică a buclei Q, atunci $\mathrm{Aut} Q = \overline{\prod}_{i \in I} \mathrm{Aut} Q_i$, unde prin $\overline{\prod}$ notăm simbolul produsului cartezian.

Fie acum Q o buclă comutativă Moufang periodică cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$. Fiecare p-subbuclă maximală Q_p (respectiv p-subgrup $\mathfrak{M}_p$) este subbuclă (respectiv subgrup) complet caracteristică a buclei Moufang comutative Q (respectiv $\mathfrak{M}$). Atunci din Lema 2.10 rezultă

Propoziţia 2.4. *Fie Q o buclă comutativă Moufang periodică neasociativă cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$. Q_p sunt p-subbucle ale buclei Q şi $\mathfrak{M}_p$ sunt p-subgrupuri maximale ale grupului $\mathfrak{M}$, $p \in P$. Atunci*

$$AutQ = \overline{\prod}_{p \in P} AutQ_p$$

şi respectiv

$$Aut\mathfrak{M} = \overline{\prod}_{p \in P} \mathfrak{M}_p$$

pentru $p \neq 3$, Q_p şi $\mathfrak{M}_p$ sunt grupuri abeliene.

Acum să extindem propoziţia 2.4 în cazul când bucla Moufang comutativă Q satisface condiţia de minimalitate. Astfel de bucle Moufang comutative sunt studiate în [51], [52], [53]. În particular, este adevărată următoarea lemă pentru care echivalenţa condiţiilor 1), 2) este demonstrată în [51], [53], iar ale condiţiilor 1), 4) în [52]. Iar datorită observaţiei formulate de V. Ursu în lucrarea [106] am revăzut formularea şi demonstraţiile lemei ce urmează şi toate afirmaţiile care folosesc lema în demonstraţie.

Lema 2.11. *Pentru bucla Moufang comutativă central simplă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$, următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) Bucla Q satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle;

2) Bucla Q poate fi descompusă în produs de un număr finit de grupuri quasiciclice $D = \prod_{p\in S}\mathbb{C}_{p^\infty}$ din centrul $Z(Q)$ al buclei Q şi o buclă Moufang comutativă finită H;

3) Bucla Q poate fi descompusă în produs direct de un număr finit de grupuri quasiciclice $\prod_{p\in S}\mathbb{C}_{p^\infty}$ şi Q_3, $Q = \prod_{p\in S}\mathbb{C}_{p^\infty} \times Q_3$, unde S este o mulţime de numere prime diferit de 3, iar Q_3 este finită sau $Q_3 = \mathbb{C}_{p^\infty} \cdot F$, F o subbuclă finită;

4) Grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ poate fi descompus în produs direct de un număr finit de grupuri $D = \prod_{p\in S}\mathbb{C}_{p^\infty}$ din centrul $Z(\mathfrak{M})$ al grupului $\mathfrak{M}$ şi un grup finit G.

Demonstraţie. Subbucla $Z(Q)$ se descompune în produs direct de componente $Z(p)$. Conform Propoziţiei 2.3 există o mulţime finită $M \subset Q \setminus Z(Q)$ încât $(M \cap \{a\})Z(Q) = Q$. Fiecare element $a \in M$ va avea ordinul 3^k. Admitem contrariul. Fie n numărul natural pentru care $a^n = 1$ şi $n = 3^k \cdot m$, unde numerele $(m, 3) = 1$. Atunci $a^3 \neq 1$. Deoarece $a^3 \in Z(Q)$ obţinem că $< a >=< a^3 >\subseteq Z(Q)$, contrazicere. Deci a are ordinul 3^k. Notăm cu Q_3 subbucla generată de $Z(3)$ şi M. Vom avea $a^3 \in Z(3)$ pentru orice $a \in M$. Prin urmare $Q_3 \cup (\prod\{Q_p : p \neq 3\}) = \{1\}$. Lemă demonstrată. $\square$

Fie $\mathbb{C}_{p^\infty}$ este p-grup quasiciclic. Conform [90] grupul Aut$\mathbb{C}_{p^\infty}$ este izomorf cu grupul multiplicativ $\mathbb{Z}^*_{p^\infty}$ de elementelor reversibile din inelul numerelor întregi p-adice $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Grupul $\mathbb{Z}^*_{p^\infty}$ este format din numere întregi p-adice de tipul

$$\ldots a_n \ldots a_1 a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n,\ 0 \leq a_n < p$$

cu factorul liber a_0 diferit de zero. Mulţimea $\mathbb{Z}^*_{p^\infty}$ are puterea continuumului. Din Lema 2.4 rezultă

Corolarul 2.7. *Fie descompunerea buclei Q şi al grupului multiplicativ $\mathfrak{M}$, descrise în Lema 2.11*

$$Q = H \times \prod_{p\in P}\mathbb{C}_{p^\infty}, \qquad \mathfrak{M} = G \times \prod_{p\in P}\mathbb{C}_{p^\infty}.$$

Atunci

$$AutQ = AutH \times \prod_{p\in P} Aut\mathbb{C}_{p^\infty}, \qquad Aut\mathfrak{M} = AutG \times \prod_{p\in P} Aut\mathbb{C}_{p^\infty},$$

încât grupurile $AutH$ şi $AutG$ sunt finite, iar grupurile $Aut\mathbb{C}_{p^\infty}$ pentru $p \in P$ au puterea continuumului.

Bucla comutativă Moufang Q se numeşte *divizibilă* dacă pentru orice număr întreg $n > 0$ şi orice element $a \in Q$ ecuaţia $x^n = a$ are în Q cel puţin o soluţie.

Dacă $n \neq 3$, atunci din identităţile

$$(x^p, y^q, z^s) = (x, y, z)^{pqs},$$
$$(x, y, z)^3 = 1$$

definite în [21] rezultă că subbuclele divizibile ale buclei Moufang comutative Q aparţin centrului $Z(Q)$, şi deci sunt grupuri abeliene. Bucla Moufang comutativă care nu are subbucle neunitare divizibile se numeşte *reductibilă*.

Fie $Q = DH$ o buclă Moufang comutativă examinată prin prisma Lemei 2.11. Fie $\mu : Q \to Q$ un monomorfism a buclei Moufang comutative Q şi fie μ_D restricţia lui μ în D. Grupul abelian D este divizibil, iar bucla Moufang comutativă H finită. Atunci din construcţia grupului abelian divizibil [90] rezultă că D este subbuclă maximală divizibilă a buclei Q. Imaginea epimorfă a grupului divizibil este grup divizibil. Atunci $\mu_D(D) \subseteq D$ şi conform [90, exer. 4, pag. 133] monomorfismul $\mu_D : D \to D$ va fi automorfismul, $\mu_D(D) = D$. Fie μ_H restricţia monomomfismului μ pe bucla H. Aşa cum $D \cap H = 1$, atunci $\mu(D) \cap \mu(H) = 1$.

Deaceea μ_H va fi monomorfismul lui H în H. Bucla comutativă Moufang H este finită dacă μ_H va fi automorfism al buclei Moufang comutative H, $\mu_H(H) = H$. Deoarece $\mu_D(D) = D$, atunci $\mu(Q) = Q$. În consecinţă: *orice monomorfism al buclei Moufang comutative ce satisface condiţia de minimalitate în sine va fi automorfism*. Dacă $\mathfrak{M}$ este grupul multiplicativ al unei astfel de bucle comutative Moufang atunci în mod similar se demonstrează că *orice monomorfism a grupului $\mathfrak{M}$ în sine va vi automorfism al grupului $\mathfrak{M}$*.

Vom introduce următoarea noţiune. Fie L o buclă, G un grup abelian, iar α, β omomorfismele buclei L în grupului G. Definim suma $\alpha + \beta$, considerând $(\alpha + \beta)a = \alpha a \cdot \beta a$ pentru orice $\alpha \in L$. Uşor se verifică că $\alpha + \beta : L \to G$ este omomorfism şi mulţimea tuturor omomorfismelor din L în G în raport cu operaţia definită formează grup abelian, notându-l prin $\mathrm{Hom}(L, G)$. Zero acestui grup este omomorfismul trivial al buclei L în grupul G, elementul invers $-\alpha$ pentru elementul $\alpha : L \to G$ trece elementul $x \in L$ în elementul $(\alpha x)^{-1} = \alpha x^{-1} \in G$. Ca şi în cazul grupurilor abeliene [90] este adevărată

Lema 2.12. *Presupunem că bucla L poate fi descompusă în produs direct $L = \prod_{i \in I} L_i$, iar* *grupul abelian G se descompune în produs direct $G = \prod_{j \in J} G_j$. Atunci*

$$Hom(L, G) \cong \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} Hom(L_i, G_j).$$

Demonstraţie. Restricţia omomorfismului $\alpha : \prod L_i \to G$ pe L_i este automorfismul $\alpha_i : L_i \to G$. În acest mod obţinem aplicaţia $(\ldots, \alpha_i, \ldots)$ grupului $\mathrm{Hom}(\prod L_i, G)$ în $\prod \mathrm{Hom}(L_i, G)$, care este un omomorfism φ. Evident că φ trece în $(0, \ldots, 0, \ldots)$ doar elementul $\alpha = 0$, adică φ este monomorfism. Deoareace orice mulţime $\{\alpha_i\}_{i \in I}$, unde $\alpha_i \in \prod \mathrm{Hom}(L_i, G)$, defineşte un element $\alpha \in \mathrm{Hom}(\prod L_i, G)$, astfel încât restricţia α pe L_i coincide cu α_i, atunci φ este epimorfism. Deaceea

$$\mathrm{Hom}(\prod_{i \in I} L_i, G) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(L_i, G).$$

În acelaşi mod se demonstrează că

$$\mathrm{Hom}(L, \prod_{j \in J} G_j) \cong \prod_{j \in J} \mathrm{Hom}(L, G_j).$$

În consecinţă,

$$\mathrm{Hom}(L, G) \cong \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} \mathrm{Hom}(L_i, G_j).$$

□

Corolarul 2.8. *Fie Q o bucla Moufang comutativă periodică cu p-componente Q_p şi $\mathfrak{M}$ grupul său multiplicativ cu p-componente $\mathfrak{M}_p$ $(p \in P)$ şi fie G_p sunt p-componentele grupului abelian G. Atunci*

$$Hom(Q, G) \cong \prod_{p \in P} Hom(Q_p, G_p), \quad Hom(\mathfrak{M}, G) \cong \prod_{p \in P} Hom(\mathfrak{M}(p), G_p).$$

Lema 2.13. *Dacă subbucla H aparţine centrului $Z(L)$ al buclei L, atunci subgrupul $\sum_L(L/H, H)$ al grupului $AutL$ este format din toate automorfismele din $AutL$, care induc aplicaţia identică pe grupul H şi bucla factor L/H este izomorfă grupului $Hom(L/H, H)$.*

Demonstraţie. Cercetăm automorfismele $\alpha, \beta \in \sum_L(L/H, H)$. Atunci pentru elementul $a \in L$ există aşa elemente $b, c \in H$ pentru care $\alpha a = ab$, $\beta a = ac$. Acum $\alpha\beta a = \alpha(ac) = ab \cdot c$. Aplicaţiile

$$\bar{\alpha} : aH \to (\alpha - 1)a = b,$$

$$\bar{\beta} : aH \to (\beta - 1)a = c$$

sunt omomorfisme din L/H în H şi $\overline{\alpha\beta} : aH \to bc$. De unde rezultă că aplicaţia $\alpha \to \bar{\alpha}$ este un automorfism $\sum_L(L/H, H) \to \mathrm{Hom}(L/H, H)$ cu nucleu trivial. Pentru orice $\varphi \in \mathrm{Hom}(L/H, H)$ aplicaţia $\alpha : a \to a\varphi(aH)$ aparţine subgrupul $\sum_L(L/H, H)$. Deci rezultă că

$$\sum_L(L/H, H) \cong \mathrm{Hom}(L/H, H).$$

□

Lema 2.14. *Fie B o subbuclă normală a buclei Moufang comutative Q, A o subbuclă a buclei Q astfel încât $A \subseteq B \cap Z(Q)$, şi fie $\sum = \sum_Q(A, B)$ grupul automorfismelor buclei Q care acţionează identic pe Q/A şi B. Atunci $\sum_Q(A, B) \cong Hom(Q/B, A) \cong Hom(Q/BQ', A)$, unde $Q' = A(Q)$.*

Demonstraţie. Dacă σ este un automorfism din $\sum$, atunci $\sigma - 1$ şi $(\sigma - 1)x = \sigma x \cdot x^{-1}$, sunt aplicaţii de acelaşi tip în Q şi A, deoarece

$$\begin{aligned}(\sigma - 1)(gA) &= \sigma(gA) \cdot (gA)^{-1} \\ &= gA \cdot g^{-1}A \\ &= gg^{-1} \cdot AA \\ &= A\end{aligned}$$

pentru orice element $g \in Q$. Dacă x, y sunt elemente din Q, atunci folosind identitatea

$$(x, y, uv) = (x, y, u)((x, y, u), u, v) \cdot (x, y, v)((x, y, v), v, u)$$

din [21], obţinem

$$\begin{aligned}(\sigma - 1)(xy) &= (\sigma x \sigma y)(y^{-1}x^{-1}) \\ &= (\sigma x(\sigma x, \sigma y, y^{-1}x^{-1}))(\sigma y \cdot y^{-1}x^{1}) \\ &= (\sigma x(\sigma x, \sigma y, x^{-1}))(x^{-1}(x^{-1}, y^{-1}, \sigma y) \cdot y^{-1}\sigma y).\end{aligned}$$

Apoi

$$\begin{aligned}(\sigma x, \sigma y, y^{-1}x^{-1}) =&(\sigma x, \sigma y, y^{-1})((\sigma x, \sigma y, y^{-1}), y^{-1}, x^{-1}) \\ &\cdot(\sigma x, \sigma y, x^{-1})((\sigma x, \sigma y, x^{-1}), x^{-1}, y^{-1})\end{aligned}$$

şi

$$(\sigma x, \sigma y, x^{-1}) = (\sigma x \cdot x^{-1}, \sigma y, x^{-1}) = 1,$$

deoarece $\sigma x \cdot x^{-1} = (\sigma - 1)x \in A \subseteq Z(Q)$. Rezultă

$$\begin{aligned}(\sigma - 1)(xy) &= \sigma x(x^{-1}(\sigma - 1)y) \\ &= (\sigma x \cdot x^{-1}) \cdot (\sigma - 1)y \\ &= (\sigma - 1)x \cdot (\sigma - 1)y.\end{aligned}$$

Astfel, dacă σ este un element din $\sum$, atunci $\sigma - 1$ induce omomorfismul σ^* din Q/B în $B : \sigma^*(gB) = (\sigma - 1)g$. Fie $\alpha, \beta \in \sum$, $g \in Q$. Atunci

$$\begin{aligned}(\alpha\beta - 1)g &= (\alpha\beta)g \cdot g^{-1} \\ &= (\alpha\beta)g \cdot \alpha g^{-1}\alpha g)g^{-1} \\ &= (\alpha((\beta - 1)g)\alpha g)g^{-1} \\ &= ((\beta - 1)g \cdot \alpha g)g^{-1} \\ &= (\beta - 1)g \cdot (\alpha - 1)g,\end{aligned}$$

deoarece $(\beta - 1)g \in A \subseteq Z(Q)$ şi $(\beta - 1)g \in A \subseteq B$, dar orice element din B rămâne invariant pentru automorfismul α. În cosecinţă $(\alpha\beta)^* = \alpha^* + \beta^*$ pentru toţi $\alpha, \beta \in \sum$. Deci $\sigma \to \sigma^*$ este un omomorfism din $\sum$ în $\mathrm{Hom}(Q/B, A)$. Dacă $\sigma^* = 0$ şi $g \in Q$ atunci

$$1 = \sigma^*(gB) = (\sigma - 1)g.$$

Ceea ce induce $g = \sigma g$ pentru orice $g \in Q$ adică $\sigma = 1$. Deci aplicaţia $\sigma \to \sigma^*$ este monomorfism din $\sum$ în $\mathrm{Hom}(Q/B, A)$.

Pentru orice γ din $\mathrm{Hom}(Q/B, A)$ definim aplicaţia identică $\delta : Q \to Q$ prin regula $\delta g = \gamma(gB)g$ pentru orice $g \in Q$. Dacă $x, y \in Q$, atunci

$$\begin{aligned}\delta(xy) &= \gamma(xy \cdot B) \cdot xy \\ &= (\gamma(xB) \cdot \gamma(yB)) \cdot xy \\ &= \gamma(xB)x \cdot \gamma(yB)y \\ &= \sigma x \cdot \sigma y,\end{aligned}$$

deoarece $\gamma(Bx)$ aparţine lui $A \subseteq Z(Q)$. Atunci σ este endomorfism al buclei Moufang comutative Q. Dacă $\sigma x = 1$ atunci $\gamma(Bx)x = 1$. Ceea ce înseamnă că $x \in B$, deoarece $\gamma(Bx) \in A \subseteq B$. Deci $\gamma(Bx) = \gamma(B) = 1$ încât $x = 1$. În consecinţă, δ este monomorfism din Q în Q. Aşa cum $\gamma B = 1$, $\gamma(gB) \in A$, atunci este evident că δ induce aplicaţia identică în B şi Q/A. Fie $g \in Q$ şi fie $x = \gamma(Bg^{-1})g$. Atunci

$$\begin{aligned}\delta x &= \gamma(Bx)x \\ &= \gamma[B(\gamma(Bg^{-1})g)] \cdot \gamma(Bg^{-1})g \\ &= \gamma(Bg)[\gamma(Bg)^{-1}g] \\ &= g.\end{aligned}$$

Deoarece $\gamma(Bg^{-1}) \in A \subseteq B$, rezulută că δ este automorfism al buclei Q care aparţine lui $\sum$. În final $(\sigma - 1)g = \gamma(Bg)$ pentru orice $g \in Q$. În consecinţă $\sigma^* = \gamma$ şi $\sigma \to \sigma^*$ este izomorfism din $\sum$ în $\mathrm{Hom}(Q/B, A)$. Din asociativitatea subbuclei $A \subseteq Z(Q)$ rezultă izomorfismul $\mathrm{Hom}(Q/B, A) \cong \mathrm{Hom}(Q/B', A)$. Lema este demonstrată. $\square$

Fie acum Q o bucla Moufang comutativă cu grup multiplicativ $\mathfrak{M}$ care satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle. În conformitate cu Lema 2.11

$$Q = D \times H,\ \mathfrak{M} = D \times G,\ \text{unde } D = \prod_{p \in S} \mathbb{C}_{p^\infty},$$

unde H este bucla Moufang comutativă finită, G este grup finit. În conformitate cu Lema 2.10,

$$H = \prod_{p \in T} H_p,\ G = \prod_{p \in T} G_p,\ \text{unde } G_p \cong \mathfrak{M}(H_p)$$

şi dacă bucla Q este neasociativă, atunci 3-subbucla H_3 este neasociativă şi 3-subgrupul maximal G_3 este necomutativ. Mulţimile S, T de numere prime sunt finite. Are loc:

Propoziţia 2.5. *Fie Q o buclă Moufang comutativă care satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle şi grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$. Atunci grupul automorfismelor $AutQ$ este produs semidirect al unui grup abelian finit*

$$\sum_Q (H, D) \cong \prod_{p \in S \bigcap T} Hom(H_P, \mathbb{C}_{p^\infty})$$

şi subgrupurile $AutD \times \prod_{p \in T} AutH_p$.
Respectiv grupul $Aut\mathfrak{M}$ este produs semidirect al unui grup abelian finit

$$\sum_Q (G, D) \cong \prod_{p \in S \bigcap T} Hom(G_p, \mathbb{C}_{p^\infty})$$

şi subgrupurile $AutD \times \prod_{p \in T} AutG_p$.

Demonstraţie. Imaginea omomorfă a buclei Moufang comutative divizibile este buclă Moufang comutativă divizibilă. Subbucla D este subbuclă maximală divizibilă a buclei Q. De aceea D este complet caracteristică a buclei Q. Atunci orice automorfism $\alpha \in \mathrm{Aut}Q$ induce automorfismele $\alpha_D \in \mathrm{Aut}D$ şi

$$\alpha_H \in \mathrm{Aut}(Q/D) = \mathrm{Aut}H.$$

Corespondenţa $\alpha \to (\alpha_D, \alpha_H)$ este omomorfismul

$$\varphi : \mathrm{Aut}Q \to \mathrm{Aut}D \times \mathrm{Aut}H,$$

nucleul căruia coincide cu $\sum_Q(Q/D, D) = \sum_Q(H, D)$. Deoarece

$$\sum_Q(Q/D, D) \bigcap \varphi(\mathrm{Aut}Q) = 1,$$

atunci $\mathrm{Aut}Q$ este produs semidirect de subgrupuri $\sum_Q(H, D)$ şi $\mathrm{Aut}D \times \prod_{p\in T} \mathrm{Aut}H_p$. Descompunerea $\mathrm{Aut}H = \prod_{p\in T} \mathrm{Aut}H$ rezultă din propoziţia 2.4, iar automorfismul

$$\sum_Q(H, D) \cong \prod_{p\in S\bigcap T} \mathrm{Hom}(H_p, D_p)$$

rezultă din Lema 2.14 şi consecinţa la Lema 2.12. Ordinul subbuclei H_p este egal cu p^k. Grupul quasiciclic $\mathbb{C}_{p^\infty}$ conţine un număr finit de subgrupuri de ordinul $\leq p^k$. De aceea $\mathrm{Hom}(H_p, \mathbb{C}_{p^\infty})$ este grup abelian finit, iar atunci şi

$$\prod_{p\in T} \mathrm{Hom}(H_p, \mathbb{C}_{p^\infty})$$

este grup abelian finit. Similar se demonstrează şi pentru $\mathrm{Aut}\mathfrak{M}$. Propoziţia este demonstrată. □

Teorema 2.3. *Fie bucla Moufang comutativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ ce satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle. Atunci grupurile automorfismelor $AutQ$, $Aut\mathfrak{M}$ se reprezintă izomorf prin matrice peste suma directă de câmpuri $GL_n(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ de numere întregi p-adice. Mai exact, $p \in S$, unde S este mulţimea numerelor prime definite în Lema 2.11, iar n este numărul lor.*

Demonstraţie. Fie

$$\mathrm{Aut}D \times \prod_{p\in T} \mathrm{Aut}H_p,\ \sum_Q(H, D),\ \mathrm{Aut}D \times \prod_{p\in T} \mathrm{Aut}G_p,\ \sum_{\mathfrak{M}}(G, D)$$

subgrupuri ale gupurilor Aut$Q$, Aut$\mathfrak{M}$, examinate în propoziţia 2.5. Conform [107] grupul Aut$D$ este izomorf reprezentat prin matrice peste suma directă de câmpuri $GL_n(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ de numere întregi p-adice ($p \in S$). În [108, pag. 136] s-a arătat că dacă un grup G are subgrup de indice finit ce admite prezentare izomorfă prin matrice peste un inel, atunci grupul G admite o prezentare izomorfă asupra aceluiaşi inel. Subgrupurile Aut H, $\sum_Q(H, D)$, Aut$G$, $\sum_{\mathfrak{M}}(G, D)$ sunt finite. Atunci grupurile Aut$Q$, Aut$\mathfrak{M}$ dispun de aceeaşi prezentare matriceală ca şi subgrupul său Aut$D$. Teorema este demonstrată. $\square$

Reamintim că o buclă Q aproape satisface proprietate π dacă ea conţine o subbuclă normală de indice finit cu proprietatea π. Atunci, similar ca în cazul grupurilor [107] din Teorema 2.3 rezultă

Corolarul 2.9. *Fie Q bucla Moufang comutativă cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ care satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle. Atunci grupul automorfismelor $AutQ$ (respectiv $Aut\mathfrak{M}$) aproape nu are torsiune şi aproape toată se aproximează cu p-grupuri finite nilpotente.*

2.4 Caracterizarea buclelor Moufang comutative finite cu condiţia de minimalitate

Acum să trecem la caracterizarea buclei Moufang comutative cu condiţia de minimalitate (bucla Moufang comutativă finită) prin intermediul grupului automorfismelor ei. Pentru aceasta sunt necesare

Lema 2.15. *p-bucla Moufang comutativă reductibilă $(Q, +, 0)$ cu factorul Q/pQ finit, unde $pQ = \{pa | a \in Q\}$, este finită.*

Demonstraţie. Aşa cum Q/pQ este finit, atunci există subbuclă L finit generată a buclei Moufang comutative Q astfel încât $Q = L + pQ$. Conform Lemei 2.9 L este p-bucla finită. Atunci există număr n astfel încât $p^n L = 0$. În consecinţă

$$p^n Q = p^n L + p^{n+1} Q = p(p^n Q)$$

este buclă Moufang comutativă divizibilă. Dar Q este reductibilă, de aceea $p^n Q = 0$. Din egalitatea $Q = L + pQ$ obţinem

$$Q = L + pL + p^2 Q = L + p^2 Q = \ldots = L + p^n Q = L,$$

adică bucla Q este finită. $\square$

Lema 2.16. *Fie Q o buclă Moufang comutativă şi B un grup abelian care satisface condiţia de minimalitate pentru subgrupuri. Atunci orice grup periodic din $Hom(Q, B)$ este finit.*

Demonstraţie. Conform Lemei 2.11 bucla Moufang comutativă Q este sumă directă a buclei Moufang comutative L şi grupului abelian divizibil D. Atunci există un număr întreg n astfel încât $nL = 0$. Fie $F = \{a \in B | na = 0\}$. Cum B satisface condiţia de minimalitate F este finită. Dacă α este element din $\mathrm{Hom}(Q, B)$ de rangul r, atunci conform definiţiei operaţiei $(+)$ în $\mathrm{Hom}(Q, B)$ obţinem

$$\alpha D = \alpha(rD) = r(\alpha D) = \underbrace{\alpha D + \ldots + \alpha D}_{r} = (r\alpha)D = 0D = 0,$$

$$n(\alpha Q) = n(\alpha L + \alpha D) = \alpha(nL + nD) = \alpha(nD) = n(\alpha D) = 0.$$

Deci, $\alpha Q \subseteq F$. În consecinţă, grupul periodic din $\mathrm{Hom}(Q, B)$ este echivalent subgrupului grupului omomorfismelor buclei Moufang comutative $Q/D \cong L$ finită în grupul finit F. De unde rezultă finitudinea ei. $\square$

Lema 2.17. *Dacă bucla Moufang comutativă $(Q, +, 0)$ este sumă directă a unei mulţimi infinite de subbucle Q_α, atunci grupul automorfismelor buclei Q conţine un 2-grup abelian elementar nenumărabil.*

Demonstraţie. Fie $Q = \sum_{\alpha \in A} Q_\alpha$ şi A este o mulţime infinită cu $Q_\alpha \neq \{0\}$ pentru orice $\alpha \in Q$. Descompunem A în trei submulţimi A_1, A_2, A_3:

1) A_1 este format din indicii $\alpha \in A$ pentru care Q_α nu este 2-grup;

2) A_2 este format din indicii $a \in A$ pentru care Q_α este 2-grup periodic;

3) $A_3 = A \setminus (A_1 \cup A_2)$ şi este format din indicii pentru care Q_α este 2-grup quasiciclic.

Pentru $\alpha \in A$ notăm cu $id_\alpha : Q_\alpha \to Q_\alpha$ automorfismul identic. Cel puţin una din submulţimile A_1, A_2, A_3 este infinită.

Cazul 1. Mulţimea A_1 este infinită. Pentru fiecare $\alpha \in A_1$ automorfismul $\varphi_\alpha : x \to (-x)$ are periodicitatea doi si nu coincide cu id_α. Acest automorfism generează automorfismul $\overline{\varphi_\alpha} : Q \to Q$ la care $\overline{\varphi_\alpha}|Q_\alpha = \varphi_\alpha$ şi $\overline{\varphi_\alpha}|Q_\beta = id_\beta$ pentru $\beta \neq \alpha$. Obţinem subgrupurile $\{id_Q, \overline{\varphi_\alpha}\}$. Fiecare submulţime $B \subseteq A_1$, generează automorfismul $\varphi_B : Q \to Q$ la care $\varphi_B|Q_\alpha = \varphi_\alpha$ pentru $\alpha \in B$ şi $\varphi_B|Q_\alpha = id_\alpha$ pentru $\alpha \in A \setminus B$. Totalitatea $\varphi_B : B \subseteq A_1$ are puterea $2^{|A_1|} \geq 2^{\aleph_0}$.

Cazul 2. Mulţimea A_2 este infinită. Fiecare 2-grup periodic este produsul direct al unui număr finit de grupuri de două elemente. Deci putem considera că $Q_\alpha = \{0_1, 1_1\} \times \{0_2, 1_2\}$

pentru $\alpha \in A_2$. Fie $\varphi_\alpha : Q_\alpha \to Q_\alpha$ automorfismul la care $\varphi_\alpha(1_2) = 1_1$. Ca şi în cazul 1 constuim automorfismul φ_B pentru orice $B \subseteq A_2$.

Cazul 3. Mulţimea A_3 este infinită. Fiecare Q_α, $\alpha \in A_3$ este 2-grup quasiciclic $\mathbb{C}_{2^\infty} = \mathbb{C}_{2^\infty} \times \mathbb{C}_{2^\infty}$. Deci pentru fiecare $\alpha \in A_3$ construim automorfismul $\varphi_\alpha \neq id_\alpha$ de perioada doi. Apoi pentru orice $B \subseteq A_3$ construim automorfismul $\varphi_B : Q \to Q$.

□

Propoziţia 2.6. *Pentru orice buclă Moufang comutativă Q următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) Grupul substituţiilor interne $\mathfrak{I}(Q)$ al buclei Q este 3-grup finit;

2) Subbucla asociatoare Q' este 3-buclă finită;

3) Bucla factor $Q/Z(Q)$ este 3-buclă elementară finită;

4) Bucla Q conţine o subbuclă H normală asociativă astfel încât Q/H şi (H, Q, Q) este 3-buclă finită.

Demonstraţie. Vom folosi Lemele 2.7 şi 2.8. Fie bucla Moufang comutativă Q ce satisface condiţiei 1) şi fie pentru elementele $u_i, u_j, v, w \in Q$

$$(u_i, v, w) \neq (u_j, v, w).$$

Conform [21]

$$L(x, y)z = z(z, y, x),$$

$$(x, y, z) = (y, z, x)$$

avem

$$v(v, w, u_i) \neq v(v, w, u_j),$$

$$L(u_i, w)v \neq L(u_j, w)v,$$

$$L(u_i, w) \neq L(u_j, w).$$

Deoarece $\mathfrak{I}(Q)$ este finit rezultă că pentru $v, w \in Q$ fixaţi bucla Moufang comutativă Q are un număr finit de asociatori neunitari $(u_1, v, w), (u_2, v, w), \ldots, (u_r, v, w)$, dacă prima componentă u al asociatorului (u, v, w) parcurge toată mulţimea Q. În mod similar pentru w, u_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ fixaţi, bucla Moufang comutativă Q are un număr finit de asociatori neuniari $(u_i, v_1, w), \ldots, (u_i, v_s, w)$, dacă a doua componentă v al asociatorului (u_i, v, w) parcurge toată mulţmea Q. Exact în acelaşi mod obţinem că pentru u_i, v_j, $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$ fixaţi, bucla Q are un număr finit de asociatori neunitari (u_i, v_j, w) când w parcurge toată mulţimea Q. De unde rezultă că mulţimea tuturor asociatorilor neunitari ai buclei Q este finită. Atunci conform Lemei 2.8 subbucla asociatoare Q' este finită şi în consecinţă implicaţia 1)$\Rightarrow$ 2) este adevărată.

2) $\Rightarrow$ 3). În [51] se demonstrează că pentru elementele a, b ale unei bucle Moufang comutative L avem $aZ(L) = bZ(L)$, atunci şi numai atunci, când pentru orice $u, v \in L$

$$L(a,b)(a,u,v) = (b,u,v).$$

Avem

$$L(a,b)(a,u,v) = (a,u,v)((a,u,v),b,a).$$

Dacă bucla Moufang comutativă Q satisface condiţia 2), atunci în ea este adevărat doar un număr finit de identităţi de tipul

$$(a,u,v)((a,u,v),b,a) \neq (b,u,v).$$

De aici rezultă că centrul $Z(Q)$ are indice finit în Q. Atunci conform Lemei 2.8 bucla-factor $Q/Z(Q)$ este 3-buclă şi în consecinţă condiţia 3) este adevărată.

3)$\Rightarrow$ 1). Fie bucla Q satisface condiţiei 3) şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_k$ un sistem de echivalenţe ale buclei Q după $Z(Q)$. Orice element din Q are forma $a_i z_i$ unde $z_i \in Z(Q)$. Fie $u = a_i z_i, v = a_j z_j$, w sunt elemente arbitrare din Q. Folosind identitatea din [21] avem:

$$(uv,x,y) = (u,x,y)((u,x,y),u,v) \cdot (v,x,y)((v,x,y),v,u),$$

$$(x,y,z) = (y,z,x).$$

Deci, obţinem

$$L(u,v)w = w(w,v,u) = w(w,a_j z_j,a_i z_i) = w(w,a_j,a_i) = L(a_i,a_j)w,$$

$$L(u,v) = L(a_i,a_j).$$

De unde rezultă că grupul substituţilor interne $\mathfrak{I}(Q)$ este generat de un număr finit de substituţii $L(a_i, a_j)$. În consecinţă, conform Lemei 2.7, grupul $\mathfrak{I}(Q)$ este 3-grup finit, deci condiţia 1) este adevărată.

Evidentă este şi implicaţia 3)$\Rightarrow$ 4) dacă considerăm echivalenţa condiţiilor 2), 3). Presupunem acum că în bucla Q este adevărată condiţia 4). În bucla Moufang comutativă substituţile interne sunt automorfismele ei. Atunci din faptul că subbucla H este normală în Q rezultă normalitatea subbuclei (H, Q, Q) în Q. Notăm prin φ omomorfismul natural $Q \to Q/(H, Q, Q) = \overline{Q}$. Atunci $K = \varphi H$ este subbuclă normală asociativă a buclei Q şi $\overline{Q}/K$ este finită, deoarece Q/H este finită. Din

$$(K, \overline{Q}, \overline{Q}) = \varphi H, \varphi Q, \varphi Q = \varphi(H, Q, Q) = \overline{1}$$

rezultă că $K \subseteq Z(\overline{Q})$. În consecinţa $\overline{Q}/Z\overline{Q}$ este buclă Moufang comutativă finită şi din echivalenţa condiţiilor 2), 3) rezultă că $\overline{Q'}$ este buclă Moufang comutativă finită. Dar

$$\overline{Q'} = \varphi Q' = Q'/(H, Q, Q).$$

Bucla Moufang comutativă $\overline{Q}$ şi (H, Q, Q) sunt finite. Atunci şi subbucla asociatoare Q' la fel este finită. Deci bucla Q satisface condiţie 2). Astfel propoziţia este demonstrată. $\square$

Propoziţia 2.7. *Pentru orice buclă Moufang comutativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) Grupul substituţiilor interne $\mathfrak{I}(\mathfrak{M})$ este 3-grup finit;

2) Grupul factor $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ este 3-grup finit;

3) Comutantul $\mathfrak{M}'$ este 3-grup finit;

4) Grupul $\mathfrak{M}$ conţine un subgrup abelian normal încât $\mathfrak{M}/A$ şi $(A, \mathfrak{M})$ sunt 3-grupuri finite.

Demonstraţie. Echivalenţa condiţia 1), 2) rezultă din Lema 2.7 şi izomorfismul $\mathfrak{I}(G) \cong G/Z(G)$, adevărat pentru orice grup G arbitrar. Implicaţia 1) $\Leftrightarrow$ 3) rezultă din Lema 2.7 şi relaţiile

$$x^y \neq x^z,$$

$$x^{-1}x^y \neq x^{-1}x^z,$$

$$x^{-1}y^{-1}xy \neq x^{-1}z^{-1}xz,$$

$$(x, y) \neq (x, z).$$

Acum, dacă considerăm echivalenţa condiţia 2) şi 3), atunci implicaţia 2) $\Rightarrow$ 4) este evidentă, iar implicaţia 4) $\Rightarrow$ 3) se demonstrează analog cu implicaţia 4) $\Rightarrow$ 2) din propoziţia precedentă. Propoziţia este demonstrată. $\square$

Teorema 2.4. *Pentru bucla Moufang comutativă neasociativă arbitrară Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) Bucla Q satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle.

2) a) Bucla Q este periodică,

b) Grupul periodic de automorfisme al buclei Q este finit.

3) a) Bucla Q este periodică,

b) Grupul periodic de automorfisme al buclei Q satisface condiţia de minimalitate pentru subgrupuri.

4) a) Bucla Q este periodică,

b) Bucla Q satisface o condiţie echivalentă din propoziţia 2.6,

c) 3-subgrupurile elementare abeliene ale grupului automorfismelor buclei Q sunt numărabile.

5) a) Bucla Q este periodică,

b) Grupul $\mathfrak{M}$ admite o prezentare izomorfă matriceală peste un câmp de caracteristica zero.

6) a) Bucla Q este periodică,

b) Subgrupurile normale (respectiv neabeliene) ale grupului $\mathfrak{M}$ admit prezentare izomorfă matriceală peste un câmp de caracteristica zero.

7) a) Bucla Q este periodică,

b) Cel puţin un subgrup abelian maximal al grupului $\mathfrak{M}$ admite prezentare izomorfă matriceală peste un câmp de caracteristica zero.

8) a) Bucla Q este periodică,

b) Grupul $\mathfrak{M}$ este local nilpotent, de aceea subgrupurile normale (respectiv neabeliene) ale grupului $\mathfrak{M}$ admit prezentare izomorfă matriceală peste un câmp de caracteristica zero.

9) a) Bucla Q este periodică,

b) Orice grup periodic de automorfisme al grupului $\mathfrak{M}$ este finit.

10) a) Bucla Q este periodică,

b) Este adevărată una din afirmaţile echivalente din propoziţia 2.7,

c) Grupurile elementare primare abeliene ale grupului automorismelor $\mathfrak{M}$ sunt numărabile.

Demonstraţie. Demonstrăm implicaţia 1)$\Rightarrow$ 2). Fie că bucla Moufang comutativă Q satisface condiţia de minimalitate. Conform Lemei 2.11, centru $Z(Q)$ al buclei Q are indice finit în Q. Notăm prin Φ_1 şi Φ_2 subgrupurile periodice ale grupului automorfismelor Φ ale buclei Q, ce conţine astfel de automorfisme Φ care induc aplicaţia identică în $Z(Q)$ şi $Q/Z(Q)$ respectiv. Uşor se verifică normalitatea subgrupirilor Φ_1 şi Φ_2 în Φ. Conform Lemei 2.16, grupul factor Φ/Φ_1, ca grup periodic de automorfisme al grupului abelian $Z(Q)$ care satisface condiţia de minimalitate, este finit. Grupul factor Φ/Φ_2 ca grupul automorfismelor buclei Moufang comutative $Q/Z(Q)$ finită de asemenea este finit. Astfel grupul factor $\Phi/(\Phi_1 \cap \Phi_2)$ este finit. Conform Lemei 2.14,

$$\Phi/(\Phi_1 \cap \Phi_2) \cong \mathrm{Hom}(Q/Z(Q), Z(Q)) \cong \mathrm{Hom}(Q/Z(Q)Q', Z(Q)),$$

iar conform Lemei 2.16, grupul $\mathrm{Hom}(Q/Z(Q)Q', Z(Q))$ este finit. Dacă $\Phi/(\Phi_1 \cap \Phi_2)$ şi grupul automorfismelor Φ este finit. Deci în consecinţă 1) $\Rightarrow$ 2) este adevărată.

Implicaţia 2) $\Rightarrow$ 3) este evidentă. Dacă pentru bucla Moufang comutativă Q este adevărată condiţia 3), atunci grupul $\mathfrak{I}(Q)$ satisface condiţiei de minimalitate. Din Teorema 1.5 din [5] rezultă că în p-grupuri care satisfac condiţia de minimalitate numărul elemetelor de fiecare ordin este finit. Deaceea mulţimea tuturor substituţilor interne $L(u, v)$ a buclei Q este finită. Atunci conform Lemei 2.7 grupul $\mathfrak{I}(Q)$ este finit. În consecinţă, bucla Q satisface uneia din condiţiile echivalente ale propoziţiei 2.6. Astfel am demonstrat implicaţia 3) $\Rightarrow$ 4).

Demonstrăm implicaţia 4) $\Rightarrow$ 1). Dacă bucla Moufang comutativă Q satisface condiţiei 4) atunci pentru ea este adevărată afirmaţia:

(a) *dacă bucla Moufang comutativă Q se descompune în produs direct, atunci factorul asociativ A satisface condiţia de minimalitate.*

Într-adevăr, dacă A conţine un număr infinit de componente primare în descompunerea în produs direct, atunci conform Lemei 2.17 A are un 2-grup abelian elementar nenumărabil de automorfisme. Ultima afirmaţie este evidentă, de oarece este posibil de inclus izomorf în grupul automorfismelor buclei Q. Am obţinut contradicţie pentru condiţia 4.c). Deci A conţine un număr finit de componente A_p.

Conform Lemei 2.11 grupul A_p se decompune în produs direct $A_p = D \times C$, unde D este grup divizibil, C grup reductibil. Conform condiţiei 4.a) grupul divizibil D este periodic, astfel D este produs direct de grupuri quasiciclice [90]. Acest produs conţine un număr finit de factori, altfel obţinem contradicţie cu Lema 2.17. Deci grupul D satisface condiţia de minimalitate.

Dacă $C \neq 1$, atunci C conţine subgrupul L de ordin p. Conform Lemei 2.14 $\mathrm{Hom}(C/L, L)$ este izomorf cu un subgrup al grupului de automorfisme ale grupului G. Grupul C/L este reductibil ca imagine omomorfă a grupului C. Dacă grupul C este infinit, atunci C/L la fel este infinit, conform Lemei 1.2 din [109], $\mathrm{Hom}(C/L, L)$ conţine un p-grup abelian elementar nenumărabil care este izomorf cu un grup de automorfisme ale grupului C. Ceea ce contrazice condiţiei 4.c). Astfel, grupul C, iar din cele spuse mai sus, şi factorul direct A, satisface condiţia de minimalitate.

Conform Lemei 2.10 bucla periodică Q se descompune în produs direct de componentele proprii primare Q_p, mai mult, pentru $p \neq 3$, Q_p sunt asociative. Astfel pentru a demonstra condiţia 1) este suficient să considerăm bucla conform afirmaţiei (a) 3-buclă.

Considerând Lema 2.9 din condiţia 3) a propoziţiei 2.6 rezultă:

(b) *există subbucla E a buclei Q astfel că $Q = Z(Q)E$.*

Notăm prin R subgrupul maximal divizibil al grupului $Z(Q)$. Aşa cum $Z(Q)$ este grup periodic, atunci R este produs direct de grupuri quasiciclice [107]. Notăm prin R_1 produsul la astfel de grupuri quasiciclice, care au intersecţie netrivială cu EQ'. Fie $a_i \in R_1 \cap EQ' (i \in 1, 2, \ldots)$. Considerând divizibilitatea, în grupul R_1 pentru fiecare i există un şir infinit de elemente $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}, \ldots$, astfel încât

$$a_{i_1} = a_i, \;\; a_{i_n} = a_{i_{n+1}}^3, \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

Deci conchidem că fiecare element a_i poate fi inclus în 3-grup quasiciclic

$$A_i =< a_i, \ldots, a_{i_n}, \ldots > .$$

Confom condiţiei 2) din propoziţia 2.6 subbucla asociatoare Q' este finită, atunci subgrupul R_1 este produs direct de un număr finit de grupuri quasiciclice care satisac condiţia de minimalitate. Mai mult, R_1 este grup divizibil, deci conform [107, Teorema 21.3] $R = R_1 \times R_2$, unde R_2 este un grup divizibil ca imagine omomorfică a grupului divizibil. Dacă $x \in R_2 \cap Q'E$, atunci ca şi mai sus poate fi arătat că x poate fi inclus într-un subgrup quasiciclic. Dar aceasta contrazice condiţia minimalităţii grupului R_1. Deci

$$R_2 \cap Q'E = R_2 \cap (Z(Q) \cap Q'E) = 1.$$

Considerând [107, Teorema 21.2], există subgrupul S al grupului $Z(Q)$ care include $Z(Q)\cap Q'E$ astfel încât $Z(Q)=R_2\times S$. Din b) obţinem

$$Q = Z(Q)E = R_2SE = R_2(SQ'E),$$

$$\begin{aligned} R_2 \cap SQ'E &= R_2 \cap Z(Q) \cap Q'E \\ &= R_2 \cap S(Z(Q) \cap Q'E) \\ &= R_2 \cap S = 1. \end{aligned}$$

Deoarece $R_2 \subseteq Z(Q)$, atunci subbucla R_2 este normală în Q şi $Q = R_2 \times SQ'E$. Aplicând a), conchidem că R_2 satisface condiţia de minimalitate şi atunci subgrupul R satisface aceeaşi condiţie. Astfel:

(c) *subgrupurile divizibile din centrul buclei Moufang comutative Q satisfac condiţia de minimalitate.*

Notăm prin L subgrupul de ordinul trei al centrului $Z(Q)$. Notăm $Z^3=\{x^3|\forall x\in Z(Q)\}$. Să analizăm

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(Q/Q'ELZ^3, L) &= \mathrm{Hom}(Z(Q)Q'/Q'ELZ^3, L) \\ &= \mathrm{Hom}(Z(Q)/(Q'ELZ^3 \cap Z(Q)), L) \\ &\equiv H. \end{aligned}$$

Grupul L este ciclic de ordinul trei. Atunci din definiţie grupul $\mathrm{Hom}H$ va fi 3-grup abelian elementar. Conform Lemei 2.14 va fi izomorf cu grupul automorfismelor buclei Q. De aceea, conform condiţiei 4.c), H va fi numărabilă. Conform Teoremei Prüfer, [107] grupul $Z(Q)/(Q'EZ^3\cap Z(Q))$ se descompune în produs direct de grupuri de ordinul trei. Atunci din consecinţa Lemei 2.12 rezultă că grupul $Z(Q)/(Q'EZ^3\cap Z(Q))$ este finit. Atunci $Z(Q)/Z^3$ va fi grup finit, altfel în caz contrar $(Q'EZ^3\cap Z(Q))/Z^3$ va fi ifinit şi va coincide cu

$$Z^3(Q'EZ^3 \cap Z(Q))/Z^3 \cong (Q'ELZ \cap Z(Q))/(Q'EL \cap Z^3),$$

care este 3-grup abelian elementar care satisface condiţia de minimalitate. În consecinţă, grupul este finit. Astfel

(d) *factor grupul $Z(Q)/Z^3$ este finit.*

$Z(Q)$ este grup periodic, de aceea conform [107, Teorema 21.3] $Z(Q)=A\times B$, unde A este grup divizibil, iar B este grup reductibil. Conform (a) grupul A satisface condiţia de minimalitate, iar conform (d) B/B^3 este grup finit şi deoarece B este grup reductibil, conform Lemei 2.15 B este finit. Astfel, centrul $Z(Q)$ satisface condiţia de minimalitate, iar atunci conform (b) bucla Q la fel satisface această condiţie. Deci implicaţia 4) $\Rightarrow$ 1) este adevărată.

Să demonstrăm implicaţia 1) $\Rightarrow$ 5). Conform Lemei 2.11 condiţia 1) este echivalentă cu condiţia: *grupul $\mathfrak{M}$ se descompune în produs direct de un număr finit de grupuri quasiciclice şi un grup finit.* Ceea ce înseamnă că $\mathfrak{M}$ este grup special Chernikov şi conform [110] satisface condiţia 5). Conform Lemei 2.10 grupul multiplicativ $\mathfrak{N}$ al oricărei bucle Moufang comutative periodice se descompune în produs direct de p-subgrupuri $\mathfrak{N}_p$ încât pentru $p \neq 3$ avem $\mathfrak{N}_p \subseteq Z(\mathfrak{N})$. Dacă este adevărată condiţia 5), atunci grupul $\mathfrak{M}$ admite prezentare matriceală peste un câmp de caracteristică zero, este special, adică posedă un subgrup abelian normal de indice finit, exprimat în produs direct de un număr finit de p-grupuri quasiciclice. Grupul $\mathfrak{M}$ este periodic şi deoarece pentru $p \neq 3$, $\mathfrak{M}_p \subseteq Z(\mathfrak{M})$, atunci concludem că numărul de subgrupuri $\mathfrak{M}_p$ nu poate fi infinit. Deci grupul $\mathfrak{M}$ satisface condiţia de minimalitate, iar conform Lemei 2.11 şi bucla Q satisface condiţia de minimalitate. Concludem că implicaţia 1) $\Rightarrow$ 5) este adevărată.

Implicaţile 5) $\Rightarrow$ 6); 7); 8) sunt evidente. În [52] este demonstrat că pentru orice buclă Moufang comutativă neasociativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ următoarele condiţii sunt echivalente:

1) Bucla Q satisface condiţia de minimalitate;

2) Subgrupurile normale (respectiv neabeliene) ale grupului $\mathfrak{M}$ satisfac condiţia de minimalitate;

3) Cel puţin un subgrup abelian maximal al grupului $\mathfrak{M}$ satisface condiţia de minimalitate;

4) Dacă grupul $\mathfrak{M}$ conţine un subgrup nilpotent (respectiv resolubil) de clasa k, atunci toate subgrupurile nilpotente (respectiv resolubile) de clasă k ale grupului $\mathfrak{M}$ satisfac condiţia de minimalitate.

De aici şi din echivalenţa condiţiilor 1), 5) rerultă că implicaţile 6); 7); 8) $\Rightarrow$ 1) sunt adevărate. Din periodicitatea buclei Q rezultă periodicitatea grupului $\mathfrak{M}$, iar dacă Q satisface condiţia de minimalitate, atunci conform Lemei 2.11 $\mathfrak{M}$ satisface condiţia de minimalitate pentru subgrupuri şi grupul factor $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ este finit. Considerând aceste obervaţii echivalenţa condiţiilor 1), 9) este consecinţa 6.1 din [109], iar echivalenţa condiţiilor 1),

10) este echvalenţa condiţiilor (1), (5) a Teoremei de bază din [109]. Teorma este demonstrată. □

Remarca 2.1. *Grupul ciclic infinit este exemplu de grup abelian periodic cu grupul automorfismelor finit. Ceea ce arată că condiţiile 2.a) - 4.a), 8.a) - 10.a) sunt necesare pentru veridicitatea Teoremei 2.4. Produsul direct a unui număr infinit de grupuri cicice de ordin prim satisfac condiţiile 4.a), 4.c) şi 10.a), 10.b). Aceasta arată că condiţiile 4.c) şi 10.c) sunt suficiente.*

Corolarul 2.10. *Pentru bucla Moufang comutativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) Bucla Q este finită;

2) Bucla Q este periodică şi grupul său de automorfisme este finit;

3) Bucla Q este periodică şi grupul său de automorfisme este numărabil;

4) Bucla Q este periodică şi grupul de automorfisme al grupului $\mathfrak{M}$ este finit;

5) Bucla Q este periodică şi grupul de automorfisme al grupului $\mathfrak{M}$ este numărabil.

Demonstraţie. Implicaţiile 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) sunt evidente. Fie bucla Q îndeplineşte condiţia 3). Conform [52] bucla Q se descompune în produs direct $Q = D \times C$, unde D este grup divizibil, C este buclă Moufang comutativă reductibilă. După [111] grupul D se descompune în produs direct de grupuri quasiciclce. Grupul automorfimelor grupului quasiciclic este izomorf grupului multiplicativ al câmpului de numere p-adice

$$\sum_{n=-s}^{\infty} a_n p^n, 0 \leq a_n < p,$$

la care factorul "liber" termenul a_0 este diferit de zero [90]. Există o mulţime nenumărabilă de astfel de numere. De aceea $D = 1$. Conform Teoremei 2.4 bucla Moufang comutativă C satisface condiţia de minimalitate. Atunci conform Lemei 2.11 bucla C este finită. Astfel şi bucla Q este finită, adică Q îndeplineşte condiţia 1). Dacă bucla Moufang comutativă Q este finită atunci grupul $\mathfrak{M}$ de asemenea este finit, iar dacă bucla Q este periodică atunci şi grupul $\mathfrak{M}$ este peiodic. Atunci echivalenţa condiţiilor 1), 4), 5) este conecinţa 6.2 din [109]. Astfel, corolarul este demonstrat. □

2.5 Descrierea unor clase de bucle Moufang comutative

Acum analog cu [109], folosind proprietăţile mulţimilor putem caracteriza clasa buclelor Moufang comutative care îndeplinesc condiţia de minimalitate pentru subbucle şi clasa buclelor Moufang comutative finite. Bucla ce aparţine clasei ω o vom numi ω-buclă.

Propoziţia 2.8. *Notăm prin ω clasa buclelor ce satisfac condiţiile:*

1) Orice subbuclă a ω-buclei este ω-buclă;

2) Orice ω-buclă este numărabilă;

3) Dacă Q este ω-buclă, atunci Q este periodică şi orice grup periodic al automorfismelor buclei Moufang comutative Q aparţne clasei ω.

Atunci bucla Moufang comutativă Q va satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle dacă şi numai dacă ea aparţine clasei ω.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă bucla Moufang comutativă Q satisface condiţia de minimalitate, atunci conform Lemei 2.11 Q este un podus direct al unui număr finit de grupuri quasiciclice şi o buclă Moufang comutativă finită. Grupurile quasiciclice sunt numărabile şi deci bucla Q este numărabilă. Veridicitatea condiţiei 3) rezultă din Teorema 2.4.
Suficienţa. Dacă A este buclă Moufang comutativă asociativă din clasa ω, atunci conform condiţiei 3) ea este periodică şi grupul său periodic de automorfisme de asemenea aparţine clasei ω. Conform condiţiei 2) acest grup este numărabil. Atunci din echivalenţa condiţiilor 1) şi 4) din Teorema 2.4 rezultă că A satisface condiţia de minimalitate. De aici folosind condiţia 1) obţinem că dacă bucla Q aparţine clasei ω atunci orice subbuclă asociativă a ei satisface condiţia de minimalitate. Atunci conform [51], [53] bucla Q satisface condiţia de minimalitate. $\square$

Propoziţia 2.9. *Notăm prin ω clasa buclelor ce satisfac condiţiile:*

1) Orice subbuclă a ω-buclei este ω-buclă;

2) Orice ω-buclă este numărabilă;

3) Produsul direct a unui număr numărabil de ω-bucle este ω-buclă;

4) Grupul automorfismelor ω-buclei aparţne clasei ω.

Atunci bucla Moufang comutativă Q va fi finită dacă şi numai dacă ea aparţine clasei ω.

Demonstraţie. Fie că bucla Moufang comutativă Q satisface condiţiile 1) – 4). Vom demonstra periodicitatea ei. Presupunem contrariul. Atunci Q conţine un grup infinit ciclic Z care este ω-buclă, conform condiţiei 1). Astfel conform condiţiei 3) $F = Z \times Z$ este ω-bucla. Fie $F =< a > \times < b >$. Definim automorfismele φ, ψ ale grupului F prin relaţiile

$$\varphi a = ab^2, \qquad \varphi b = b, \qquad \psi a = a, \qquad \psi b = a^2 b.$$

Conform condiţiei 4) grupul $\Sigma =< \varphi, \psi >$ aparţine clasei ω şi conform 1) comutantul său Σ' apaţine clasei ω. Conform definiţiei grupul Σ este grup liber de ordinul 2. De asemenea comutantul Σ' este grup liber de rang infinit.

Dacă L este mulţimea grupurilor generatorilor liberi ale lui Σ' şi S o submulţime nevidă a mulţimii L, atunci există un unic automorfism de ordinul doi ce aplică elementele mulţimii S pe ea insăşi şi care aplică elementul mulţimii S pe ele însuşi, iar fiecare element din $L \setminus S$ se aplică pe inversul său. Grupul de automorfisme generat de toate automorfismele menţionate pentru toate submulţimile $S' \subseteq L$ aparţine clasei ω. Grupul automorfismelor nu este numărabil, ceea ce contrazice condiţiei 2). Astfel bucla Q este periodică şi în virtutea condiţiilor 2), 4) şi Corolarului 2.10 al Teoremei 2.4 bucla este finită. $\square$

2.6 Concluzii la capitolul 2

În acest capitol au fost examinate obiectivele 1-3. În contextul respectiv punctăm următoarele concluzii:

1. Aplicând grupul de automorfismre, au fost determinate condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă (de clasa dată).

   În acest scop a fost demonstrat că următoarele condiţii sunt echivalente: bucla Moufang comutativă Q este central nilpotentă de clasa n; grupul $F(1)$ este nilpotent de clasa $n-1$; grupul substutuţiilor interne $\mathfrak{I}(Q)$ este nilpotent de clasa $n-1$.

2. Pentru buclele Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente a fost descrisă structura grupului $F(1)$.

   În acest scop a fost demonstrat că dacă bucla Moufang comutativă Q se aproximează cu bucle Moufang comutative central nilpotente, atunci grupul său de automorfisme este extensie a grupului $F(1)$ nilpotent aproximabil, generat de toate automorfismele ce induc aplicaţia identică pe Q/Q_1, prin grupul automorfismelor grupului abelian Q/Q_1. De asemeni s-a extins rezultatul lui A. I. Mal'cev asupra grupul resolubil al automorfismelor Φ al buclei Moufang comutative Q finit generată s-a demonstrat că acesta este policiclic.

3. A fost determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţia de minimalitate.

   Pentru realizarea acestui obiectiv a fost demonstrat că bucla Moufang comutativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$, ce satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle, atunci grupurile automorfismelor $\mathrm{Aut}Q$, $\mathrm{Aut}\mathfrak{M}$ izomorf se reprezintă prin matrice peste suma directă de câmpuri $GL_n(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ de numere întregi p-adice. La fel au fost caracterizate buclele Moufang comutative neasociative arbitrare prin grupul său de automorfisme, demonstrându-se echivalenţa unui set de condiţii.

Metodologia de cercetare propusă în capitolul 2 poate fi utilizată la:

- Studierea în profunzime a grupului de automorfisme $\mathrm{Aut}Q$ şi $\mathrm{Aut}\mathfrak{M}$ în bucla Moufang comutativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$.

- Studierea condiţiilor pentru care bucla Moufang comutativă cu grup multiplicativ satisface condiţia de minimalitate pentru subbucle.

3. SEMIGRUPUL ENDOMORFISMELOR BUCLELOR MOUFANG COMUTATIVE

3.1 Reprezentarea matriceală a semigrupul endomorfismelor buclelor Moufang comutative

Se demonstrează că semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative care posedă descompunere în produse directe ale subbuclelor proprii, este izomorf cu semigrupul M-matricelor. Noţiunea de holomorf al buclei Moufang comutative se aplică şi pentru bucla Moufang comutativă care se descompune în produs direct, se prezintă descompunerea matriceală a holomorfului.

Se cunoaşte că endomorfismele şi automorfismele spaţiilor vectoriale pot fi prezetate prin matrice peste câmpurile respective. Această prezentare matriceală joacă un rol important în teoria grupurilor liniare, anume grupul automorfismelor spaţiilor vectoriale. În mod analog, prezentarea matriceală se cercetează şi pentru produsele directe ale grupurilor multiplicative [81].

În acest paragraf se cercetează aceiaşi întrebare pentru una din cele mai studiate clase de bucle neasociative-buclele Moufang comutative.

Se demonstrează că subgrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative care se descompune în produs direct de subbuclele proprii, este izomorfă cu semigrupul de M-matrice. Sunt şi alte studii asupra endomorfismelor şi automorfismelor, descompunerilor directe ale buclelor Moufang comutative. În particular, se cercetează noţiunea de holomorf pentru bucla Moufang comutativă şi se prezinta descompunerea matriceală a holomorfului buclei Moufang comutative, care se descompune în produs direct de subbuclele proprii.

Cunostinţele necesare despre teoria buclelor pot fi gaşite în [104]. Vom aminti doar că grupul substituţiilor interne ale unei bucle arbitrare sunt generate de substituţiile

$$T(a) = L^{-1}(a)R(a),$$
$$L(a,b) = L^{-1}(a,b)L(a)L(b),$$
$$R(a,b) = R^{-1}(a,b)R(b)R(a),$$

unde $L(a)x = ax$, $R(a)x = xa$. În bucla Moufang comutativă substituţiile interne sunt automorfismele ei.

Fie Q o buclă Moufang comutativă. Se notează prin Q_i subbuclele buclei Q, generate de toţi asociatorii de forma $(x_1, x_2, \ldots, x_{2i+1})$ unde $(x_1, \ldots, x_{2i-1}, x_{2i}, x_{2i+1}) =$

$((x_1, \dots, x_{2i-1}), x_{2i}, x_{2i+1})$. Bucla Q se descompune în produs direct ale componentelor proprii Q_i

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_r \times \dots \tag{3.1}$$

Dacă $u \in Q_i, v \in Q_j, w \in Q_t$ şi cel puţin doi din trei îndici i, j, t sunt diferiţi, atunci din definiţia produsului direct rezultă că $uv \cdot w = u \cdot vw$. Mai mult, analizăm produsul $a = (a_1a_2 \dots a_n)_\alpha$ pentru o distribuţie a parantezelor α, unde $a_i \in Q_j$.

Dacă $(a_1a_2 \dots a_n)_\alpha$ conţine nu mai mult de doi factori a_i, a_j, pentru $i, j = 1, \dots, n$ care aparţin uneia şi aceleiaşi componente Q_k, atunci expresia $(a_1a_2 \dots a_n)_\alpha$ nu se schimbă pentru orice altă distribuţie a parantezelor α şi pentru orice substituţie a factorilor $a_1, a_2, \dots, a_n$. Această proprietate a expresiei a o vom numi *asociativitatea componentelor*.

Demonstaraţia acestei afirmaţii o realizăm în inducţie pe lungimea n a cuvântului a. Adevărul acesteia pentru $n = 3$ este îndicat mai sus. Fie $n > 3$ şi $a = uv$. Presupunem, că u conţine factorul a_k. Atunci conform ipotezei înductive $u = u_1a_k$. Afirmaţia va fi demonstrată dacă arătăm că $a = u_1a_k \cdot v = u_1 \cdot a_kv$ sau $(u_1, a_k, v) = 1$, unde $xy \cdot z = (x \cdot yz)(x, y, z)$. Presupunem, că $u_1 = u_2u_3$. Folosim identitatea

$$(xy, z, t) = (x, z, t)((x, z, t), x, y) \cdot (y, z, t)((y, z, t), y, x),$$

adevărată în bucla Moufang comutativă arbitrară. Atunci

$$\begin{aligned}
(u_1, a_k, v) &= (u_2u_3, a_k, v) \\
&= (u_2, a_k, v)((u_2, a_k, v), u_2, u_3) \cdot (u_3, a_k, v)((u_3, a_k, v), u_3, u_2) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

deoarece, prin ipoteza înductivă $(u_2, a_k, v) = 1$, $(u_3, a_k, v) = 1$. Dacă însă $v = v_1v_2$, atunci este suficient să folosim identitatea $(x, y, z) = (y, z, x)$ [21]. Cu aceasta s-a demonstrat că bucla Q dispune de asociativitatea componentelor.

Considerând descompunerea (3.1), fiecare element $a \in Q$ are forma $a = \prod_{i=1}^t a_i$. Dacă φ este un endomorfism al buclei Q, atunci $\varphi a = \prod_{i=1}^t \varphi a_i$. Astfel pentru a defini un endomorfism φ este suficient de îndicat cum actionează φ pe componentele Q_i. Dacă $\varphi a_i = \prod a_{ki}$, atinci se scrie $\varphi a_i = \prod \varphi_{ki}a_i$. Deoarece elementul $a_{ki} = \varphi_{ki}a_i$ este univoc definit de elementul a_i şi aplicaţia φ, atunci φ_{ki} determină o aplicaţie univocă a lui Q_i în Q_k. Demonstrăm că φ_{ik} este un homomorfism al buclei Moufang comutative Q_i în bucla Moufang comutativă

Q_k. Sigur, fie $a_i, b_i \in Q_i$ şi

$$\varphi a_i = \varphi_{1i}a_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ki}a_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ni}a_i,$$

$$\varphi b_i = \varphi_{1i}b_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ki}b_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ni}b_i.$$

Considerând asociativitatea componenetelor buclei Moufang comutative Q în raport cu subbuclele Q_i, în ultimele două expresii omitem parantezele. Atunci

$$\begin{aligned}\varphi a_i \cdot \varphi b_i &= (\varphi_{1i}a_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ki}a_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ni}a_i)(\varphi_{1i}b_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ki}b_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ni}b_i) \\ &= \varphi_{1i}a_i\varphi_{1i}b_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ki}a_i\varphi_{ki}b_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ni}a_i\varphi_{ni}b_i.\end{aligned}$$

Aşa cum φ este endomorfism al buclei Q, atunci

$$\varphi a_i \cdot \varphi b_i = \varphi(a_i b_i).$$

Fie

$$\varphi(a_i b_i) = \varphi_{1i}(a_i b_i) \cdot \ldots \cdot \varphi_{ki}(a_i b_i) \cdot \ldots \cdot \varphi_{ni}(a_i b_i).$$

Atinci

$$\varphi_{1i}a_i\varphi_{1i}b_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ki}a_i\varphi_{ki}b_i \cdot \ldots \cdot \varphi_{ni}a_i\varphi_{ni}b_i$$

$$= \varphi_{1i}(a_i b_i) \cdot \ldots \cdot \varphi_{ki}(a_i b_i) \cdot \ldots \cdot \varphi_{ni}(a_i b_i).$$

În acest produs factorii $\varphi_{ki}a_i\varphi_{ki}b_i$ şi $\varphi_{ki}(a_i b_i)$ aparţin componentei Q_k. Atunci din definiţia produsului direct rezultă că

$$\varphi_{ki}a_i\varphi_{ki}b_i = \varphi_{ki}(a_i b_i).$$

Prin urmare, φ_{ki} este homomorfism al subbuclei Q_i în bucla Moufang comutativă Q_k.

Lema 3.1. *Fie bucla Moufang comutativă Q descompusă în produsul direct* (3.1) *şi φ endomorfismul buclei Q. Atunci bucla Q_i posedă proprietatea de asociativitate a componentelor în raport cu subbuclele proprii $\varphi_{ik}Q_k$.*

Demonstraţie. Fie $a_i \in Q_i$, $b_j \in Q_j$, $c_t \in Q_t$ şi fie cel puţin doi din trei îndici i, j, t diferiţi. Atunci

$$a_i b_j \cdot c_t = a_i \cdot b_j c_t,$$

$$\varphi(a_i b_j \cdot c_t) = \varphi(a_i \cdot b_j c_t),$$

$$\varphi a_i \varphi b_j \cdot \varphi c_t = \varphi a_i \cdot \varphi b_j \varphi c_t.$$

Astfel, se obţine egalitatea

$$\prod \varphi_{ki}a_i \prod \varphi_{kj}b_j \cdot \prod \varphi_{kt}c_t = \prod \varphi_{ki}a_i \cdot \prod \varphi_{kj}b_j \prod \varphi_{kt}c_t.$$

Folosind asociativitatea componenetelor buclei Q în raport cu descompunerea (3.1), se obţine:

$$(\varphi_{1i}a_i\varphi_{1j}b_j \cdot \varphi_{1t}c_t)\Big(\prod_{k=2} \varphi_{ki}a_i \prod_{k=2} \varphi_{kj}b_j \cdot \prod_{k=2} \varphi_{kt}c_t\Big) =$$
$$= (\varphi_{1i}a_i \cdot \varphi_{1j}b_j\varphi_{1t}c_t)\Big(\prod_{k=2} \varphi_{ki}a_i \cdot \prod_{k=2} \varphi_{kj}b_j \prod_{k=2} \varphi_{kt}c_t\Big).$$

De unde

$$\varphi_{1i}a_i\varphi_{1j}b_j \cdot \varphi_{1t}c_t = \varphi_{1i}a_i \cdot \varphi_{1j}b_j\varphi_{1t}c_t.$$

Folosindu-se aceleaşi raţionamente, se verifică şi identităţile:

$$\varphi_{ki}a_i\varphi_{kj}b_j \cdot \varphi_{kt}c_t = \varphi_{ki}a_i \cdot \varphi_{kj}b_j\varphi_{kt}c_t, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Să examinăm acum produsul $d = d_1d_2\ldots d_n$ pentru o distribuţie de paranteze, unde $d_i \in \varphi_{kj}Q_j$, $d_i = \varphi_{kj}a_j$ şi în condiţia că în cuvântul d se întâlnesc nu mai mult de două variabile care aparţin unei şi aceiaşi subbucle $\varphi_{kj}Q_j \subseteq Q_k$. Fie $a = a_1a_2\ldots a_n$. Atunci $\varphi a = d$. Elementul a este asociativ componenţial în raport cu factorul a_i. De unde rezultă, că elementul d este asociativ componenţial în raport cu factorii $d_i \in \varphi_{kj}Q_j$. Astfel Lema este demonstrată. $\Box$

Acum, analăg cu [81], definim următoarele noţiuni. Fie M, N două mulţimi şi L un sistem algebric cu operaţii de înmulţire $(\cdot)$, adunare $(+)$ şi operaţia nulara 0. Se vor examina diferite funcţii $A, B, \ldots$ de două variabile, definite pe produsul cartezian $M \times N$ şi cu valori în L. Astfel de funcţii se numesc (M, N)-*matrice* apeste sistemul L. Prin $a_{\alpha\beta}$ se notează valorile funcţiei pentru argumentele α şi β : $A(\alpha, \beta) = a_{\alpha\beta}$, iar funcţia este matrice ce se notează prin $(a_{\alpha\beta})$. Dacă $A = (a_{\alpha\beta})$ este matrice, atunci, fixând primul indice, obţinem o funcţie de o singură variabilă este matrice linie $\overline{A}_\alpha = (\overline{a}_\alpha(\beta))$, şi analog, fixând al doilea indice, obţinem matrice coloană $\overline{A}^\beta = (\overline{a}^\beta(\alpha))$, unde matricea A se numeşte *matrice linie finită*, dacă fiecare linie conţine doar un număr finit de non-zerouri. Respectiv se defineşte *matrice coloană finită*. Fie acum A o (M, N)-matrice linie finită şi B o (N, K)-matrice coloană finită. Atunci se defineşte produsul $C = AB$ care este o (M, K)-matrice cu elementele

$$c_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta},$$

unde $\alpha \in M$, $\gamma \in N$, $\beta \in K$. Considerăm că suma unui număr înfinit de zerouri este egal cu zero. Vom examina examina numai (M, N)-matrice linie finită şi coloană finită. Dacă $M = N$ atunci (M, N)-matricea se numeşte M-*matrice* În final, pentru M-matricea $A = (a_{\alpha\beta})$ definim M-*matricea diagonală* $\overline{A} = (\overline{a}_{\alpha\alpha})$ la care $a_{\alpha\beta} = 0$ pentru $\alpha = \beta$.

Acum trecem la cercetarea legăturilor între M-matrice şi endomorfismele buclei Q care dispune de descompunere în produs direct (3.1). Conform Lemei 3.1, oricărui endomorfism φ al buclei Q poate fi pus în corespondenţă M-matricea linie finită şi coloană finită prin omomorfismul $\varphi_{ki} : Q_i \to Q_k$. Dacă descompunerea (3.1) conţine n factori, atunci matricea (φ_{ki}), corespunzătoare endomorfismului φ, constă din n^2 omomorfisme φ_{ki}.

Se demonstrează afirmaţia inversă: M-matricea, formată din omomorfismele $\varphi_{ki} : Q_i \to Q_k$ şi îndeplineşte condiţiile Lemei 3.1, univoc defineşte endomorfismul φ al buclei Q.

Desigur, fie a, b elemente arbitrare din Q şi fie

$$a = \prod_{i=1}^{k} a_i, \quad b = \prod_{i=1}^{k} b_i, \quad a_i = \prod_{j=1}^{t} a_{ji}, \quad b_i = \prod_{j=1}^{t} b_{ji},$$

unde $a_i, b_i \in Q_i$, $a_{ji}, b_{ji} \in Q_j$. Utilizând omomorfismele specificate $\varphi_{ji} : Q_i \to Q_j$ se defineşte aplicaţie ψ a mulţimii Q, considerând

$$\psi a_i = \prod_{j=1}^{t} \varphi_{ji} a_i, \quad \psi b_i = \prod_{j=1}^{t} \varphi_{ji} b_i, \quad \mu a = \prod_{i=1}^{k} \psi a_i, \quad \mu b = \prod_{i=1}^{k} \psi b_i.$$

Se observă că prin trecerea la imaginea matriceală a endomorfismului φ definirea omomorfismului φ_{ji} depinde de elemntele subbuclei Q_i şi Q_j. Se arată că aplicaţia μ este endomorfism al buclei Q. Fie

$$ab = \prod_{i=1}^{k} (ab)_i, \quad (ab)_i = \prod_{j=1}^{t} \varphi_{ji} (ab)_i.$$

Atunci

$$\mu(ab) = \prod_{i=1}^{k} \Big(\prod_{j=1}^{t} \varphi_{ji} (ab)_i \Big).$$

Se transformă $\psi(ab)$. Pentru aceasta se uţilizează corelaţia $\varphi_{ji}(ab)_i = \varphi_{ji}(a_i b_i) = \varphi_{ji} a_i \varphi_{ji} b_i$ şi asociativitatea componenetelor buclei Moufang comutative Q_j în raport cu $\varphi_{ji} Q_i$ de unde rezultă că ψ este endomorfism al subbuclei Q_i. Dacă uţilizăm asociativitatea componentelor Q_i ale buclei Q. Obţinem

$$\begin{aligned}
\mu(ab) &= \prod_{i=1}^{k} \psi(ab)_i \\
&= \prod_{i=1}^{k} \Big(\prod_{j=1}^{t} \varphi_{ji}(ab)_i \Big) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \Big(\prod_{j=1}^{t} (\varphi_{ji} a_i \cdot \varphi_{ji} b_i) \Big) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \Big(\prod_{j=1}^{t} \varphi_{ji} a_i \cdot \prod_{j=1}^{t} \varphi_{ji} b_i \Big) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \big(\psi a_i \cdot \psi b_i \big) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \psi a_i \cdot \prod_{i=1}^{k} \psi b_i \\
&= \mu a \cdot \mu b.
\end{aligned}$$

În consecinţă, μ este endomorfism al buclei Q, care înduce aceleaşi omomorfisme între subbuclele Q_i şi Q_j identic φ. Atunci endomorfismele μ şi φ coincid. Astfel s-a demonstrat că între endomorfismele buclei Q şi M-matricele cu condiţia de asociativitatea componenetelor există o corespondenţă univocă.

Vom determina matricea care corespunde produsului endomorfismelor. Pentru aceasta iniţial se arată, cum uţilizarea endomorfismului la elementele buclei Q cu descompunerea (3.1) se reduce la produsul matriceal. Fie $a \in Q$ şi φ un endomorfism al buclei Q. Conform (3.1), $a = \prod a_i$, unde $a_i \in Q_i$, $i = 1, 2, \ldots, r, \ldots$, şi doar un număr finit de factori a_i diferiţi de unitate. Se notează prin $\overline{a}$ matrice coloană cu elementele $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$, iar prin $\overline{\varphi} = (\varphi_{kj})$ notăm M-matrice, ce corespunde endomorfismului φ. Atunci $\overline{\varphi a} = \overline{\varphi} \cdot \overline{a}$, unde din dreapta matricea se înmulţeşte la coloană, în rezultat obţinându-se coloană.

În continuare, pentru asociativitatea componentelor, în expresia $a = a_1 a_2 \ldots a_n$ se va folosi înscrierea aditivă $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Atunci

$$(\varphi a) = \sum_j \Big(\sum_k \varphi_{jk} a_k \Big).$$

Se arată, că

$$\sum_j \Big(\sum_k \varphi_{jk} a_k \Big) = \sum_k \Big(\sum_j \varphi_{jk} a_k \Big). \tag{3.2}$$

Se folosesc realţiile $\varphi_{jk} a_k \in Q_j$ pentru $a_k \in Q_k$, dar şi asociativitatea componentelor buclei

Q în raport cu subbuclele proprii Q_i şi asociativitatea componentelor subbuclei Moufang comutative Q_j în raport cu subbuclele proprii $\varphi_{jk}Q_k$. Atunci

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{t}(\sum_{k=1}^{t}\varphi_{jk}a_k) &= (\varphi_{11}a_1 + \varphi_{12}a_2 + \varphi_{13}a_3 + \ldots + \varphi_{1t}a_t) + \\
&+ (\varphi_{21}a_1 + \varphi_{22}a_2 + \varphi_{23}a_3 + \ldots + \varphi_{2t}a_t) \\
&+ (\varphi_{31}a_1 + \varphi_{32}a_2 + \varphi_{33}a_3 + \ldots\ldots + \varphi_{3t}a_t) + \ldots \\
&+ (\varphi_{t1}a_1 + \varphi_{t2}a_2 + \varphi_{t3}a_3 + \ldots + \varphi_{tt}a_t) \\
&= (((\varphi_{11}a_1 + (\varphi_{12}a_2 + \varphi_{13}a_3 + \ldots + \varphi_{1t}a_t)) \\
&+ (\varphi_{21}a_1 + (\varphi_{22}a_2 + \ldots + \varphi_{2t}a_t))) + \\
&+ (\varphi_{31}a_1 + \varphi_{32}a_2 + \ldots + \varphi_{3t}a_t) + \ldots \\
&+ (\varphi_{t1}a_1 + \varphi_{t2}a_2 + \varphi_{t3}a_3 + \ldots + \varphi_{tt}a_t) \\
&= (\varphi_{11}a_1 + \varphi_{21}a_1 + (\varphi_{12}a_2 + \varphi_{13}a_3 + \ldots + \varphi_{1t}a_t) \\
&+ (\varphi_{22}a_2 + \varphi_{23}a_3 + \ldots + \varphi_{2t}a_t)) \\
&+ (\varphi_{31}a_1 + \varphi_{32}a_2 + \varphi_{33}a_3 + \ldots + \varphi_{3t}a_t) \\
&+ \ldots + (\varphi_{t1}a_1 + \varphi_{t2}a_2 + \varphi_{t3}a_3 + \ldots + \varphi_{tt}a_t) \\
&= (\varphi_{11}a_1 + \varphi_{21}a_1 + (\varphi_{31}a_1 + (\varphi_{32}a_2 + \ldots + \varphi_{3t}a_t))) + \ldots \\
&+ (\varphi_{t1}a_1 + \varphi_{t2}a_2 + \ldots + \varphi_{tt}a_t) \\
&+ (\varphi_{12}a_2 + \varphi_{13}a_3 + \ldots + \varphi_{1t}a_t) \\
&+ (\varphi_{22}a_2 + \varphi_{23}a_3 + \ldots + \varphi_{2t}a_t) \\
&= (\varphi_{11}a_1 + \varphi_{21}a_1 + \varphi_{31}a_1) + \ldots \\
&+ (\varphi_{t1}a_1 + \varphi_{t2}a_2 + \varphi_{t3}a_3 + \ldots + \varphi_{tt}a_t) \\
&+ (\varphi_{12}a_2 + \varphi_{13}a_3 + \ldots + \varphi_{1t}a_t) \\
&+ (\varphi_{22}a_2 + \varphi_{23}a_3 + \ldots + \varphi_{2t}a_t) \\
&+ (\varphi_{32}a_2 + \ldots + \varphi_{3t}a_t) = \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\varphi_{11}a_1 + \varphi_{21}a_1 + \ldots + \varphi_{t1}a_1)\\
&+ ((\varphi_{12}a_2 + \varphi_{13}a_3 + \ldots + \varphi_{1t}a_t)\\
&+ (\varphi_{22}a_2 + \varphi_{23}a_3 + \ldots + \varphi_{2t}a_t)\\
&+ (\varphi_{32}a_2 + \varphi_{33}a_3 + \ldots + \varphi_{3t}a_t) + \ldots\\
&+ (\varphi_{t2}a_2 + \varphi_{t3}a_3 + \ldots + \varphi_{tt}a_t)) = \ldots\\
&= (\varphi_{11}a_1 + \varphi_{21}a_1 + \ldots + \varphi_{t1}a_a)\\
&+ ((\varphi_{12}a_2 + \varphi_{22}a_2 + \ldots + \varphi_{t2}a_2)\\
&+ ((\varphi_{13}a_3 + \varphi_{23}a_3 + \ldots + \varphi_{t3}a_3) + \ldots\\
&+ (\varphi_{1t}a_t + \varphi_{2t}a_t + \varphi_{3t}a_t + \ldots + \varphi_{tt}a_t)\ldots))\\
&= \sum_k (\sum_j \varphi_{jk}a_k).
\end{aligned}
$$

Din transformările expuse mai sus se observă că sumarea după k în ultima expresie se realizează pentru o distribuţie arbitrară a parantezelor.

Totaliatatea endomorfismelor unei algebre arbitrare în mod natural se transformă în semigrup. Înmulţirea este realizarea succesivă a endomorfismelor. Să se determine matricea corespunzătoare produsului endomorfismelor buclei Q care posedă descompunerea (3.1). Fie $a \in Q, a = \prod a_k, a_k \in Q_k, \sigma$ şi φ endomorfismele buclei Q şi acestor endomorfisme le corespund matricele (σ_{ij}) şi (φ_{jk}). Să se calculeze $\sigma(\varphi a)$, folosind (3.2)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\varphi a) &= \sigma\left(\sum_j\left(\sum_k \varphi_{jk}a_k\right)\right)\\
&= \sum_j\left(\sum_k(\sigma(\varphi_{jk}a_k))\right)\\
&= \sum_i\left(\sum_j\left(\sum_k(\sigma_{ij}(\varphi_{jk}a_k))\right)\right)\\
&= \sum_i\left(\sum_j\left(\sum_k\left(\sigma_{ij}(\varphi_{jk}a_k)\right)\right)\right)\\
&= \sum_i\left(\sum_k\left(\sum_j\left(\sigma_{ij}(\varphi_{jk}a_k)\right)\right)\right)\\
&= \sum_i\left(\sum_k\left((\sigma\varphi)_{ik}a_k\right)\right).
\end{aligned}
$$

Se observă că elementele matricei corespunzătoare endomorfismelor buclei Q, corespund anumitor descompuneri (3.1). Elementele $\sigma_{ij}\varphi_{jk}$ sunt omomorfisme Q_k în Q_i. Astfel, sumând după îndicele j, următoarea expresie trebuie înţeleasă ca:

$$(\sigma_{ij_1}\varphi_{j_1k} + \sigma_{ij_2}\varphi_{j_2k})a_k = \sigma_{ij_1}\varphi_{j_1k}a_k \cdot \sigma_{ij_2}\varphi_{j_2k}a_k.$$

Astfel, s-a demonstrat:

Teorema 3.1. *Semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative Q care dispune de descompunere în produs direct de subbuclele proprii* (3.1) *este izomorf semigrupului M-matricelor cu proprietatea de asociativitate a componentelor, îndicate în Lema 3.1.*

În [52] este demonstrat că orice buclă Moufang comutativă periodică se descompune în produs direct al p-componentelor proprii. Unde p-componentele sunt bucle complet caracteristice. Atunci din Teorema 3.1 rezultă

Corolarul 3.1. *Semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative periodice este izomorf cu semigrupul M-matricelor diagonale.*

3.2 Interconexiunea produsului direct, endomorfisme şi reprezentarea matriceală

Acum, ca şi în cazul grupurilor abeliene şi câmpurilor proprii de endomorfisme [104], se prezintă unele afirmaţii privind legăturile dintre descompunerea directă a buclei Moufang comutative Q şi semigrupul endomorfismelor $E(Q)$, dar şi a M-matricelor, care reprezintă aceste endomorfisme. Să demonstrăm următoarele afirmaţii.

(a) *Dacă $Q = A \times B$, atunci semigrupul $E(B)$ poate fi analizat ca subsemigrup al semigrului $E(Q)$, identificând $E(B)$ cu mulţimea tuturor $\alpha \in E(Q)$, care înduc aplicaţia identică pe subbucla A.* Mai mult, dacă $Q = \prod_{i\in I} A_i$, acel produs cartezian $\overline{\prod}_{i\in I} E(A_i)$ al tuturor semigrupurilor $E(A_i)$ este subsemigrup al semigrupului $E(Q)$. Acest subsemigrup este format din toate endomorfismele $\alpha \in E(Q)$, care aplică fiecare subbuclă A_i pe sine. Pentru semigrupul endomorfismelor α prezentarea matriceală $\overline{\prod}_{i\in I} E(A_i)$ este exact mulţimea tuturor M-matricelor diagonale, înafara diagonalei sunt doar zerouri.

(b) *Fie $Q = B \times C$ şi $\varepsilon : Q \to B$ proiecţia respectivă. Atunci poate fi realizată identificarea*

$$E(B) = \varepsilon E(Q)\varepsilon.$$

Dacă $\alpha \in E(Q)$, atunci $\varepsilon\alpha\varepsilon$ este endomorfismul buclei Moufang comutative B. Pe de altă parte, dacă θ este un endomorfism al buclei Moufang comutative B, atunci, realizând identificarea θ cu endomorfismul buclei Q, obţinem $\theta = \varepsilon\theta\varepsilon$.

(c) *Fie bucla Moufang comutativă $Q = B \times C$ şi $\overline{Q}$ posedă semigrupuri de endomorfisme şi $\varphi : E(Q) \to E(\overline{Q})$ sunt izomorfe între ele. Atunci $\overline{Q} = \overline{B} \times \overline{C}$ şi φ induce izomorfismele $E(B) \to E(\overline{B})$ şi $E(C) \to E(\overline{C})$.*

Notăm prin ε proiecţia $Q \to B$, iar prin ν notăm proiecţia $Q \to C$ şi presupunem că $\varphi : \varepsilon \to \mu$, $\varphi : \nu \to \eta$. Notăm $\overline{B} = \mu(\overline{Q})$, $\overline{C} = \ker\mu$. Atunci $\overline{C}$ este subbuclă normală a buclei $\overline{Q}$ şi $\overline{Q} = \bar{B}\bar{C}$. Avem $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$, atunci şi $\mu\mu = \mu$. Deci orice element ce se află în acelaşi timp în $\mu\overline{B}$ şi în $\mu\overline{C}$ la endomorfismul μ se aplică în sine sau în 1, aşa încât $\overline{B} \cap \overline{C} = \{1\}$. Vom demonstra că $\overline{B}$ este subbuclă normală a buclei Moufang comutative $\overline{Q}$. Fie $b \in \overline{B}$ şi $u, v \in \overline{Q}$. Atunci $u = b_1c_1$, $v = b_2c_2$, unde $b_1, b_2 \in B$, $c_1, c_2 \in C$. Are loc

$$\begin{aligned}\mu L(u,v)b &= \mu L^{-1}(u,v)L(u)L(v)b\\ &= L^{-1}(\mu u \cdot \mu v)L(\mu u)L(\mu v)\mu b\\ &= L^{-1}(\mu b_1 \cdot \mu b_2)L(\mu b_1)L(\mu b_2)\mu b \in B.\end{aligned}$$

Deci, subbucla $\overline{B}$ este normală în $\overline{Q}$, iar atunci $\overline{Q} = \overline{B} \times \overline{C}$. Acum, realizându-se identificarea indicată în afirmaţia (b)

$$\begin{aligned}E(B) &= \varepsilon E(Q)\varepsilon,\\ E(C) &= \nu E(Q)\nu,\\ E(\overline{B}) &= \mu E(\overline{Q})\mu,\\ E(\overline{C}) &= \eta E(\overline{Q})\eta.\end{aligned}$$

rezultă

$$\varphi(\varepsilon E(Q)\varepsilon) = \mu E(\overline{Q})\mu, \qquad \varphi(\nu E(Q)\nu) = \eta E(\overline{Q})\eta$$

obţinem că izomorfismul $\varphi : E(Q) \to E(\overline{Q})$ înduce izomorfismele

$$E(B) \to E(\overline{B}), \qquad E(C) \to E(\overline{C}).$$

Astfel afirmaţia (c) este demonstrată.

Următoarea afirmaţie îndică, cum izomorfismul a doi factori poate fi definit în termenii endomorfismelor.

(d) *Fie*

$$Q = B \times C = \overline{B} \times \overline{C}$$

este descompunerea directă a buclei Moufang comutative Q şi $\varepsilon : Q \to B$, $\mu : Q \to \overline{B}$ sunt proiecţiile respective. Atunci $B \cong \overline{B}$ dacă şi numai dacă există aşa elemente $\alpha, \beta \in E(Q)$, astfel încât $\beta\alpha = \varepsilon$ şi $\alpha\beta = \mu$.

Dacă $\alpha, \beta \in E(Q)$ satisface aceste identităţi atunci

$$\beta\alpha\beta = \varepsilon\beta = \beta\mu, \qquad \alpha\beta\alpha = \alpha\varepsilon = \mu\alpha$$

rezultă că restricţia $\overline{\beta}$ a omomorfismului $\beta\alpha\beta$ pe subbucla B şi restricţia $\overline{\alpha}$ a omomorfismului $\alpha\beta\alpha$ pe subbucla $\overline{B}$ sunt omomorfismele $\overline{\beta} : B \to \overline{B}$ şi $\overline{\alpha} : \overline{B} \to B$. Identităţile

$$(\beta\alpha\beta)(\alpha\beta\alpha) = \varepsilon, \qquad (\alpha\beta\alpha)(\beta\alpha\beta) = \mu$$

arată că $\overline{\alpha}$ şi $\overline{\beta}$ sunt aplicaţii reciproc inverse. Astfel $B \cong \overline{B}$. Reciproc, dacă $\overline{\beta} : B \to \overline{B}$ şi $\overline{\alpha} : \overline{B} \to B$ sunt izomorfisme reciproc inverse, atunci pentru $\beta = \varepsilon\overline{\beta}$ şi $\alpha = \mu\overline{\alpha}$ sunt adevărate egalităţile $\beta\alpha = \varepsilon$ şi $\alpha\beta = \mu$.

(e) *Izomorfismul $\alpha : Q \to B$ al buclei Moufang comutative induce izomorfismul semigrupurilor $\overline{\alpha} : E(Q) \to E(B)$, definit prin formula $\overline{\alpha} : \varphi \to \alpha\varphi\alpha^{-1}$.* Se trece acest fapt în limbajul matriceal în cazul când bucla Q admite descompunerea (3.1) şi α este automorfismul buclei Q. Fie că α transferă descompunerea (3.1) într-o nouă descompunere

$$Q = \overline{Q}_1 \times \overline{Q}_2 \times \ldots \times \overline{Q}_r \times \ldots \tag{3.3}$$

unde $\overline{Q_i} = \alpha Q_i$, şi fie σ un endomorfism al buclei Moufang comutative Q. Să presupunem că endomorfismul σ în vechea descompunerea corespunde la M-matricea (σ_{ik}) şi în noua descompunere la (φ_{ik}). Pentru a determina legătura între aceste matrice trebuie luat în consideraţie următorul fapt. Cum este îndicat anterior Teoremei 3.1, elementele matricei depind de o descompunere anume şi nu sunt obiecte îndependente. În legatură cu acesta se întroduce urmăroarea noţiune.

Fie ω un endomorfism al buclei Q şi Q_1 este o subbuclă a buclei Q şi $Q_2 = \omega Q_1$. Se presupune că este definit un careva izomorfism β între subbucle $Q_1, \overline{Q}_1$ şi $Q_2, \overline{Q}_2$:

$$\overline{Q}_1 = \beta Q_1, \qquad \overline{Q}_2 = \beta Q_2.$$

Atunci omomorfismul $\omega : Q_1 \to Q_2$ induce omomorfismul $\overline{\omega} : \overline{Q}_1 \to \overline{Q}_2$, definit în felul următor. Dacă $\overline{a} \in \overline{Q}_1$, $\overline{a} = \beta a$, atunci presupunem

$$\overline{\omega a} = \overline{\omega}\beta a = \beta\overline{\omega}a = \overline{\omega a}.$$

Astfel M-matricea (σ_{ik}), conectată la descompunerea (3.1), poate fi conectată la descompunerea (3.3) fiecărui $\sigma_{ik} : Q_k \to Q_i$ i se pune în corespondenţă o anumită aplicaţie

$\varphi_{ik} : \alpha Q_k \to \alpha Q_i$. Mai mult, matricea (φ_{ik}) va corespunde unui nou endomorfism φ al buclei Q. Să se detrmine legătura dintre φ şi σ. Fie a este un element arbitrar din Q. Atunci

$$\begin{aligned}\varphi\alpha a &= \sum_k(\sum_i \varphi_{ik}(\alpha a)_k) \\ &= \sum_k(\sum_i \alpha\sigma_{ik}a_k) \\ &= \alpha(\sum_k(\sum_i \sigma_{ik}a_k)) \\ &= \alpha\sigma a.\end{aligned}$$

De unde rezultă

$$\varphi\alpha = \alpha\sigma,\ \varphi = \alpha\sigma\alpha^{-1}.$$

Dacă se alege o M-matrice ce corespunde automorfismului α după a doua descompunere, atunci s-a demonstrat că *M-matricea (φ_{ik}) care corespunde endomorfismului σ în vechea descompunere* (3.1)*, şi M-matricea (σ_{ik}) care corespunde endomorfismului φ în noua descompunere* (3.3)*, sunt conjugate.*

(f) Fie Q un grup arbitrar şi Φ grupul automorfismelor lui. Se cunoaşte (vezi, de exemplu, [82]) că mulţimea Hol Q perechilor (φ, g), pentru $\varphi \in \Phi$, $g \in Q$ care se înmulţesc după regula:

$$(\varphi, g)(\varphi_1, g_1) = (\varphi\varphi_1, g\varphi_1 \cdot g_1) \tag{3.4}$$

formează un holomorf al grupului Q (ca şi în [82] imaginea elementului a pentru aplicaţia φ se notează $a\varphi$). Aplicaţia

$$\Phi \to \mathrm{Hol}Q, \qquad Q \to \mathrm{Hol}Q,$$

dată de regula $\varphi \to (\varphi, 1)$, $g \to (1, g)$, este încluziune izomorfă. Dacă se identifică Φ şi Q cu subgrupurile din Hol Q în virtutea acestor încluziuni atunci

$$\varphi^{-1}g\varphi = g\varphi, \quad \varphi \in \Phi, \quad g \in Q \tag{3.5}$$

şi Hol$Q$ este produs semidirect Q şi Φ. Egalitatea (3.5) îndică, că fiecare automorfism $\varphi \in \Phi$ este o comprimare a unui automorfism intern din grupul Hol$Q$.

Se presupune acum că Q este buclă Moufang comutativă şi Φ este grupul automorfismelor ei. Se verifică mulţimea Hol$Q$ perechilor (φ, g), $\varphi \in \Phi$, $g \in Q$, înmulţite conform relaţiei (3.4), formează buclă şi pentru ea sunt adevărate toate raţionamentele anterioare, fără ultima afirmaţie. Totuşi, dacă $\alpha, \beta \in \Phi$, atunci se verifică direct că substuţiile înterne $T(\alpha)$, $L(\alpha, \beta)$, $R(\alpha, \beta)$ sunt automorfismele buclei Hol$Q$. Atunci identitatea (3.5) arată că fiecare automorfism $\varphi \in \Phi$ este o contracţie a substituţiei interne a buclei Hol$Q$ de tipul $T(\varphi)$. Ca şi în cazul grupurilor, bucla Hol$Q$ se numeşte *holomorful buclei Moufang comutative Q*.

Acum vom efectua reprezentarea matriceală a holomorfului Hol$Q$ al buclei Q care admite descompunerea (3.1), utilizând reprezentarea matriceală a automorfismelor buclei Q. Elementele din Q se analizează ca linie, mai mult dacă $g = \sum_{i \in I} g_i$, şirul respectiv se va scrie că $\overline{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_r, \ldots)$. Conform Teoremei 3.1, grupul Aut$Q$ poate fi prezentat ca M-matrice de tipul (σ_{ik}), unde $\sigma_{ik} : Q_k \to Q_i$ sunt omomorfisme şi orice subbuclă Q_i din descompunerea (3.1) respectă asociativitatea componentelor subbuclelor proprii $Q_k\sigma_{ik}$. Dacă φ este automorfism din Aut$Q = \Phi$, atunci M-matricea respectivă se notează prin $\overline{\varphi}$. Linia $\overline{g}$ se înmulţeste la matricea $\overline{\varphi}$ conform regulei obişnuite de înmulţirea matricelor:

$$\begin{aligned}\bar{g}\bar{\varphi} = \Big(&g_1\varphi_{11} + g_2\varphi_{21} + \ldots + g_r\varphi_{r1} + \ldots,\\ &g_1\varphi_{12} + g_2\varphi_{22} + \ldots + g_r\varphi_{r2} + \ldots,\\ &\ldots,\\ &g_1\varphi_{1r} + g_2\varphi_{2r} + \ldots + g_r\varphi_{rr} + \ldots,\\ &\ldots\Big).\end{aligned}$$

Aici $(+)$ este operaţia înmulţire a elementelor din subbuclele Q_i care posedă asociativitatea componentelor. În rezultatul înmulţirii obţinem linia, mai mult $\overline{g\varphi} = \bar{g} \cdot \bar{\varphi}$. Analizăm M-matricea de tipul

$$M(\overline{\varphi}, \overline{g}) = \begin{pmatrix} \overline{\sigma} & 0 \\ \overline{g} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

unde 0 este coloana formată din omomorfisme nule şi 1 este unitatea buclei Moufang comutative Q. Se notează totalitatea de M-matrice de acest tip prin $\overline{M}$. Înmulţirea acestor matrice se face conform regulilor obişnuite de înmulţire a matricelor. Folosind înmulţirea celulară a matricelor se verifică adevărul formulei:

$$M(\overline{\sigma}, \overline{a})M(\overline{\varphi}, \overline{b}) = M(\bar{\sigma}\bar{\varphi}, \bar{a}\bar{\varphi} \cdot \overline{b});$$

$$M(E, \overline{a})M(\overline{\sigma}, \overline{1}) = M(\overline{\sigma}, \overline{a});$$

$$M^{-1}(\overline{\sigma}, \overline{1})M(E, \overline{a})M(\overline{\sigma}, \overline{1}) = M(E, \bar{a}\bar{\sigma}).$$

Aici E este M-matrice unitară (pe diagonala principală sunt unităţi, iar în celelalte poziţii sunt zerouri). *Aplicaţiile $\Phi \to \overline{M}$, $Q \to \overline{M}$, definite de regula*

$$\sigma \to \begin{pmatrix} \overline{\sigma} & 0 \\ \overline{1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad g \to \begin{pmatrix} E & 0 \\ \overline{g} & 1 \end{pmatrix},$$

sunt incluziuni izomorfe. Atunci totalitatea $\overline{M}$ *de* M*-matrice de tipul* (3.6) *pot fi analizate ca reprezentarea matriceă a holomorfului buclei Moufang comutative* Q *care posedă descompunerea* (3.1).

3.3 Concluzii la capitolul 3

În acest capitol a fost examinat obiectivul 4. În contextul respectiv punctăm următoarele concluzii:

Folosind asociativitatea componentelor buclei a fost determinată structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior.

În acest sens a fost definită asociativitatea componenetelor buclei Moufang comutative. Pentru buclele Moufang comutative cu asociativitatea componenetelor şi descompunerea în produs direct de subbucle, semigrupul endomorfismelor este izomorf semigrupului M-matricelor. La fel semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative Q este izomorf semigrupului M-matricelor. Pentru semigrupul endomorfismelor s-au demonstrat câteva proprietăţi.

Metodologia de cercetare propusă în capitolul 3 poate fi utilizată la studierea proprietăţilor semigrupului de endomorfismelor al buclei Moufang comutative Q ce admite descompunere în produs direct al propriilor subbucle.

4. BUCLE MOUFANG COMUTATIVE CU RESTRICŢII

4.1 Bucle Moufang comutative cu restricţii asupra sistemelor de subgrupuri ale grupului multiplicativ

La cercetarea diferitor clase de algebre un rol important joacă existenţa anumitor subalgebre cu proprietăţi specifice. În aceste cazuri apare necesitatea de a cunoaşte structura algebrelor în care nu există subalgebre cu proprietăţile solicitate.

Fie $\mathfrak{M}$ este grupul multiplicativ al buclei Moufang comutative Q. În aceast paragraf se demonstrează că dacă toate subgrupurile infinite abeliene din $\mathfrak{M}$ sunt normale în $\mathfrak{M}$, atunci Q este asociativă. Dacă toate subgrupurile infinite nonabeliene din $\mathfrak{M}$ sunt normale în $\mathfrak{M}$, atunci toate subbuclele nonasociative din Q sunt normale în Q, toate subgrupurile neabeliane din $\mathfrak{M}$ sunt normale în $\mathfrak{M}$ şi subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ este 3-grup finit.

Vom aminti unele noţiuni din teoria grupului şi buclele Moufang comutative din [5] şi [21].

Un grup neabelian finit este numit *grup Miller-Moreno* dacă toate subgrupurile sunt abeliene.

Un IH*-grup* este un grup infinit dacă toate subgrupurile abeliene infinite sunt normale.

Un $\overline{IH}$*-grup* este un grup infinit dacă toate grupurile proprii nonabeliene infinite sunt normale.

Grupul hamiltonian este grupul neabelian în care toate subgrupurile sunt normale.

Grupul se numeşte *metahamiltonian* dacă toate subgrupurile neabeliene sunt normale.

Construcţia IH-grupurilor este descrisă în [5] cu elemente de ordin infinit şi ale IH-grupurilor periodice, care nu satisfac condiţia minimalităţii pentru subgrupurile abeliene. De asemenea, se descriu $\overline{IH}$-grupurile resolubile cu subgrupuri finite sau infinite de comutatori şi se caracterizează $\overline{IH}$-grupurile (resolubile) metahamiltoniene sau nonmetahamiltoniene.

Fie $M(H)$ subgrupul grupului multiplicativ $\mathfrak{M}(Q)$ al buclei Moufang comutative Q, generat de mulţimea $\{L(x)|\forall x \in H\}$. Are loc

Lema 4.1. *[52]. Fie Q buclă Moufang comutativă cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$. $Z(\mathfrak{M})$, este centrul grupului $\mathfrak{M}$, iar $Z(Q)$ este centrul buclei Q. Admitem că bucla Q se descompune în produsul direct $Q = D \times H$, unde $D \subseteq Z(Q)$. Atunci $\mathfrak{M} = M(D) \times M(H)$, $M(D) \subseteq Z(M)$, şi $M(D) \cong D$.*

În lucrările [52], [53], [51] bucla Moufang comutativă este caracterizată prin intermediul diferitor sisteme de subbucle proprii şi deasemeni prin diferite sisteme de subgrupuri multiplicative ale ei. În particular, este demonstrată

Lema 4.2. *[53] Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru o buclă Moufang comutativă nonasociativă arbitrară Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$:*

1) Bucla Q satisface condiţia minimalităţii pentru subbucle;

2) Grupul $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri;

3) Bucla Q se descompune în produs direct al unui număr finit de grupuri quasiciclice care se conţin în centrul buclei Q şi o buclă finită;

4) Grupul $\mathfrak{M}$ se descompune în produs direct al unui număr finit de grupuri quasiciclice, care se conţin în centrul $\mathfrak{M}$, şi un grup finit;

5) Bucla Q satisface condiţia minimalităţii pentru subbucle nonnormale;

6) Grupul $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri nonnormale;

7) Grupul $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri neabeliene;

8) Grupul $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri abeliene.

Următoarele afirmaţii sunt o reducere naturală a afirmaiţilor 5) şi 6):

i) Toate subbuclele infinite asociative ale Q sunt normale în Q;

ii) Toate subbuclele infinite nonasociative ale Q sunt normale în Q;

iii) Grupul $\mathfrak{M}$ este un IH-grup;

iv) Grupul $\mathfrak{M}$ este un $\overline{IH}$-grup.

Structura buclei Moufang comutative cu condiţiile i), ii) este examinată în [53]. Este demonstrat că bucla Moufang comutativă cu condiţia i) este asociativă, bucla Moufang comutativă cu condiţia ii) are o subbuclă asociativă finită şi într-o astfel de buclă Moufang comutativă orice subbucle neasociative (finite sau infinite) sunt normale. În aceast paragraf vom demonstra că bucla Moufang comutativă cu condiţia iii) este asociativă. Vom demonstra de asemene că bucla Moufang comutativă cu condiţia iv) satisface condiţia ii), grupul său multiplicativ $\mathfrak{M}$ este metahamiltonian şi subgrupul $\mathfrak{M}'$ este 3-grup finit.

Lema 4.3. *Dacă elementul a de ordinul infinit său de ordinul trei din grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative arbitrare Q generează un subgrup normal, atunci elementul a aparţine centrului $Z(\mathfrak{M})$ al grupului $\mathfrak{M}$.*

Demonstraţie. Este evident că $a \neq 1$. Notăm $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$, $x^y = y^{-1}xy$. Observăm că $x^y = x(x, y)$.

Din faptul că subgrupul H generat de elementul a este normal, pentru elementul $b \in \mathfrak{M}$ există un aşa număr întreg $k \neq 0$ pentru care $a^b = b^{-1}ab = a^k$. Vom avea $a^b = a(a, b)$ şi $(a, b) = a^{k-1}$.

Dacă $k = 1$, atunci $(a, b) = a^0 = 1$. Prin urmare $a \in Z(\mathfrak{M})$.

Admitem că $k > 1$, atunci şi $a^3 = 1$. Atunci $k = 2$ şi $(a, b) = a$. Din faptul că grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ este local nilpotent [52], obţinem că

$$a = (a, b) = ((a, b), b) = (((a, b), b), b) = \ldots = 1,$$

contradicţie cu cazul $a \neq 1$. Deci în cazul $a^3 = 1$ vom avea $k \neq 2$, adică $k = 1$.

Admitem că elementul a este de ordin infinit şi $k \neq 1$. Conform [21, Teorema 11.2] subgrupul comutatorilor al grupului multiplicativ $\mathfrak{M}$ este 3-grupul local finit. Prin urmare, există un număr natural şi pentru care $(a^{k-1})^{3n} = (a, b)^{3n} = 1$. Deci $a^{3nk-3n} = a^0$, contrazicere cu condiţia că $a^n \neq a^m$ pentru numerele întregi n, m diferite. Prin urmare, cazul $k \neq 1$ este imposibil. Lema este demonstrată. $\square$

Teorema 4.1. *Dacă grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative Q este un IH-grup, atunci $\mathfrak{M}$ este abelian şi, prin urmare, bucla Q este asociativă.*

Demonstraţie. Presupunem că grupul $\mathfrak{M}$ este neabelian. În acest caz grupul $\mathfrak{M}$ trebuie să fie periodic. Presupunem că grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ nu este periodic. Atunci bucla Q de asemenea nu este periodică. Fie a un element de ordin infinit în Q. Conform lucrării [21] elementul a^3 aparţine centrului $Z(Q)$ al buclei Q. Este uşor să arătăm, având în vedere definiţia grupului $\mathfrak{M}$, că elementul $\alpha = L(a^3)$ aparţine centrului $Z(\mathfrak{M})$ al grupului $\mathfrak{M}$. Prin urmare, grupul $A =< \alpha >$ este un subgrup normal infinit abelian din grupul $\mathfrak{M}$. Fie β un element periodic arbitrar al grupului $\mathfrak{M}$ şi $B =< \beta >$. Din incluziunea $A \subseteq Z(\mathfrak{M})$ obţinem că produsul AB va fi un subgrup abelian infinit al grupului $\mathfrak{M}$. Prin supoziţie, subgrupul AB este normal în $\mathfrak{M}$, deci, dacă φ este un automorfism intern al grupului $\mathfrak{M}$, atunci

$$AB = \varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B) = A \cdot \varphi(B).$$

Prin urmare,

$$AB = A \cdot \varphi(B).$$

Fie β_1 un element arbitrar din B. Atunci există astfel de elemente $\alpha_1 \in A$, $\beta_2 \in B$ încât $\varphi(\beta_1) = \alpha_1\beta_2$ sau $\varphi(\beta_1)\beta_2^{-1} = \alpha_1$. Deoarece β_1 este un element periodic, atunci $\varphi(\beta_1)$ este, de asemenea, un element periodic şi α_1 ca element al grupului ciclic infinit nu este periodic. Mai mult, $\varphi(\beta_1)$, $\beta_2 \in \mathfrak{M}$, apoi fie

$$\varphi(\beta_1) = L(u_1) \dots L(u_k),$$

$$\beta_2^{-1} = L(v_1) \dots L(v_n),$$

unde $u_i, v_j \in Q$. Vom nota cu H subbucla buclei Q generată de mulţimea $\{a, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n\}$. Subbucla Moufang comutativă H este finit generată şi atunci conform Teorema Bruck-Slaby [21, Teorema 10.1] ea este central nilpotentă. Din nou, prin [21, Teorema 11.5] obţinem că grupul multiplicativ $\mathfrak{M}(H)$ este nilpotent. În continuare vom nota prin $\varphi(\overline{\beta}_1), \overline{\beta}_2^{-1}, \overline{\alpha}_1$ restricţiile pe H ale aplicaţiilor $\varphi(\beta_1), \beta_2^{-1}, \alpha_1$ mulţimii Q. Este evident că $\varphi(\overline{\beta}_1), \overline{\beta}_2^{-1}, \overline{\alpha}_1 \in \mathfrak{M}(H)$. Astfel $\varphi(\overline{\beta}_1), \overline{\beta}_2^{-1}$ sunt elemente periodice şi $\overline{\alpha}_1$ este un element de ordin infinit. Elementele periodice formează un subgrup în grupul nilpotent, de unde rezultă că produsul $\varphi(\overline{\beta}_1) \cdot \overline{\beta}_2^{-1}$ este un element periodic. Din egalitatea $\varphi(\beta_1)\beta_2^{-1} = \alpha_1$ urmează egalităţile

$$\varphi(\overline{\beta}_1) \cdot \overline{\beta}_2^{-1} = \overline{\alpha}_1,$$

$$\overline{\alpha}_1 = 1,$$

$$\varphi(\overline{\beta}_1) = \overline{\beta}_2,$$

$$\varphi(B) = B.$$

Am stabilit că orice element din $\mathfrak{M}$ generează un subgrup normal. Prin urmare, orice subgrup din $\mathfrak{M}$ este normal în $\mathfrak{M}$. Atunci $\mathfrak{M}$ este un grup hamiltonian.

Într-adevăr, grupurile arbitrare hamiltoniene sunt descrise de următoarea afirmaţie. *Grupul hamiltonian poate fi descompus într-un produs direct de grupul quaternionilor şi grupuri abeliene, a căror fiecare element are ordinul nu mai mare ca 2.* Pe de altă parte, un grup care posedă o astfel de descompunere este hamiltonian.

Grupul quaternionilor este grupul generat de generatorii a, b şi care satisfac relaţiile identice $\alpha^4 = 1$, $\alpha^2 = \beta^2$, $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}$.

În [21, Theorem 11.4] este demonstrat că grupul factor $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ este un 3-grup local finit. Atunci, din $\alpha^4 = 1$ rezultă $\alpha \in Z(\mathfrak{M})$, din $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}$ rezultă $\alpha^2 = 1$, din $\alpha^2 = \beta^2$

rezultă $\beta^2 = 1$ şi, în cele din urmă, din $\beta^2 = 1$ rezultă $\beta \in Z(\mathfrak{M})$. Obţinem că *subgrupul hamiltonian al grupului multiplicativ al buclei Moufang comutative este abelian*. Din cele menţionate anterior rezultă că grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative Q este abelian. Dar acest lucru contrazice presupunerea noastră despre grupul neabelian $\mathfrak{M}$. În consecinţă, grupul $\mathfrak{M}$ este periodic.

Din Lemele 1.4 şi 3.1 din [52] rezultă că grupul periodic multiplicativ $\mathfrak{M}$ al buclei Q se descompune într-un produs direct de p-subgrupurile proprii maximale $\mathfrak{M}_p$, în plus, $\mathfrak{M}_p$ aparţine centrului $Z(\mathfrak{M})$ pentru $p \neq 3$. Notăm $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{M}_3$, unde $\mathfrak{N} = \prod_{p\neq 3} \mathfrak{M}_p$. Presupunem că $\mathfrak{N}$ este un grup infinit şi fie α un element arbitrar în $\mathfrak{M}_3$. Dacă $\mathfrak{A} =< \alpha >$ atunci prin supoziţie, grupul abelian infinit $\mathfrak{N} \times \mathfrak{A}$ este normal în $\mathfrak{M}$. Fie φ un automorfism din $\mathfrak{M}$. Atunci $\mathfrak{N} \times \mathfrak{A} = \varphi(\mathfrak{N} \times \mathfrak{A}) = \varphi\mathfrak{N} \times \varphi\mathfrak{A} = \mathfrak{N} \times \varphi\mathfrak{A}$, adică $\mathfrak{N} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{N} \times \varphi\mathfrak{A}$. Apoi, pentru un anumit $\alpha_1 \in \mathfrak{A}$ există astfel de elemente $\alpha_2 \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{N}$ încât $\beta\alpha_2 = \varphi\alpha\varphi$. Mai mult, $\beta^3\alpha_2^3 = \varphi\alpha_1^3$, $\beta^{3^k}\alpha_2^{3_k} = \varphi\alpha_1^{3^k}$ şi pentru un anumit număr întreg n avem $\alpha_2^{3^n} = \varphi\alpha_1^{3^n} = 1$. Prin urmare $\beta^{3^k} = 1$. Dar ordinul lui β nu divide 3. Prin urmare, $\beta = 1$ şi obţinem $\varphi\alpha_1 = \alpha_2$, $\varphi\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. De aici rezultă că subgrupul $\mathfrak{M}_3$ este hamiltonian. Prin urmare, ca şi în cazul de mai sus, $\mathfrak{M}_3$, de asemenea şi $\mathfrak{M}$ este grup abelian. În consecinţă, în descompunerea $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{M}_3$ ar trebui să luăm în considerare cazul în care subgrupul $\mathfrak{N}$ este finit. Mai mult, fără a limita generalizarea, vom considera că $\mathfrak{M}$ este un 3-grup.

Presupunem că $\mathfrak{M}$ nu satisface condiţia de minimalitate pentru subgrupuri. Atunci, utilizând 8) din Lema 4.2, grupul $\mathfrak{M}$ conţine un subgrup abelian care nu îndeplineste condiţia minimalităţii pentru subgrupuri. Apoi conţine un grup infinit abelian elementar $\mathfrak{H}$. Fie $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_n \times \ldots$ o descompunere a grupului $\mathfrak{H}$ în produs direct al grupurilor ciclice de ordinul 3. Pentru orice element $\alpha \in \mathfrak{H}$ vor exista astfel de elemente în subgrupul infinit $\mathfrak{H}(\alpha) \subseteq \mathfrak{H}$, pentru care $< \alpha > \cap\mathfrak{H}(x) = 1$. Fie $\mathfrak{H}(\alpha) = \mathfrak{H}^1(\alpha)$ este o descompunere a grupului $\mathfrak{H}(\alpha)$ în produsul direct a doi factori infiniţi. Deoarece grupul ciclic $< a >$ este, evident, intersecţia a două subgrupuri infinite asociative $< a > \mathfrak{H}^1(\alpha)$ şi $< a > \mathfrak{H}^2(\alpha)$, atunci el este normal în $\mathfrak{M}$. Având în vedere elementul arbitrar $\alpha \in \mathfrak{H}$, rezultă că toţi factorii $\mathfrak{H}_n$ sunt normali în $\mathfrak{M}$. Fiecare factor $\mathfrak{H}_n$ este un grup ciclic de ordinul 3 şi conform Lemei 4.3 se include în centrului $Z(\mathfrak{M})$. Prin urmare $\mathfrak{H} \subseteq Z(\mathfrak{M})$. Fie acum β este un element arbitrar din $\mathfrak{M}$ şi $\mathfrak{H}(\beta)$ un subgrup infinit din $\mathfrak{H}$ pentru care $< \beta > \cap\mathfrak{H}(\beta) = \{1\}$. Admitem că $\mathfrak{H}(\beta) = \mathfrak{H}^1(\beta) \times \mathfrak{H}^2(\beta)$ este o descompunere a grupului $\mathfrak{H}(\beta)$ în produs direct de doi factori infiniţi. Din condiţia $\mathfrak{H}(\beta) \subset Z(\mathfrak{M})$ obţinem că $\mathfrak{H}^1(\beta), \mathfrak{H}^2(\beta)$ sunt subgrupuri normale ale grupului $\mathfrak{M}$ şi produsele $\beta\mathfrak{H}^1(\beta)$ şi $\beta\mathfrak{H}^2(\beta)$ sunt subgrupuri abeliene infinite. Atunci, $\beta\mathfrak{H}^1(\beta)$

şi $\beta\mathfrak{H}^2(\beta)$ sunt subgrupuri normale, prin urmare $< \beta >=< \beta > \mathfrak{H}^1(y) \cap \mathfrak{H}^2(\beta)$ şi $\beta\mathfrak{H}^2$ este subgrup normal. Avem orice element din $\mathfrak{M}$ generează un subgrup normal în $\mathfrak{M}$. În consecinţă, $\mathfrak{M}$ este un grup hamiltonian şi, aşa cum s-a demonstrat mai sus, este abelian. Acest fapt contrazice presupunerii noastre că $\mathfrak{M}$ este grup neabelian. Prin urmare, grupul $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri.

Din condiţia minimalităţii pentru subgrupurile pentru $\mathfrak{M}$ şi din Lema 4.2 rezultă că $\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, unde $\mathfrak{C} \subseteq Z(\mathfrak{M})$ şi $\mathfrak{B}$ este un grup finit. Dacă γ este un element arbitrar din $\mathfrak{M}$, atunci $< \gamma > \mathfrak{C}$ este un subgrup infinit abelian. Mai mult, din faptul că $< \gamma > \mathfrak{C}$ este normal în $\mathfrak{M}$ urmează faptul că $< \gamma >$ este normal în $\mathfrak{M}$. Rezultă că $\mathfrak{M}$ este un grup hamiltonian. Conform argumentelor de mai sus, $\mathfrak{M}$ este un grup abelian. Teorema este demonstrată. $\square$

Propoziţia 4.1. *Grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative neasociative infinite Q nu conţine subgrupuri infinite neabeliene dacă şi numai dacă $Q = D \times H$, unde D este grup quasiciclic, H este o 3-buclă generată neasociativă sau echivalent $\mathfrak{M} = D \times G$, unde G este grup Miller-Moreno.*

Demonstraţie. Sa analizăm acum o buclă Moufang comutativă cu anumite restricţii asupra subgrupurilor neabeliane din grupul multiplicativ. Presupunem că grupul multiplictiv $\mathfrak{M}$ al buclei Q nu are subgrupuri infinite neabeliene. Unde din Lema 4.2 $\mathfrak{M}$ satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri şi $\mathfrak{M} = K \times G$, unde K este un produs direct al unui număr finit de grupuri quasiciclice care se conţin în centrul $Z(\mathfrak{M})$ al grupului $\mathfrak{M}$, iar G este un grup finit. Dar, deoarece $\mathfrak{M}$ nu are subgrupuri propri infinite neabeliene, atunci K este grup quasiciclic şi G este grup Miller-Moreno.

Conform Lemei 4.2, bucla Q satisface condiţia minimalităţii pentru subbucle şi $Q = D \times H$, unde D este produs direct al unui număr finit de grupuri quasiciclice care se conţine în centrul $Z(Q)$ al buclei Q, H este o buclă finită. Mai mult, din Lema 4.1 $\mathfrak{M} = M(D) \times M(H)$ şi $M(D) \cong D$. În consecinţă, avem $M(H) \cong G$. Ulterior, dacă pentru $a, b, c \in H$ avem $ab \cdot c \neq a \cdot bc$, atunci

$$L(c)L(a)b \neq L(a)L(c)b,$$

$$L(c)L(a) \neq L(a)L(c).$$

Prin urmare, dacă bucla Moufang comutativă H conţine subbucle neasociative, atunci grupul $M(H)$ conţine subgrupuri neabeliene. Bucla Moufang comutativă este diasociativă [21].

Atunci din relaţia $M(H) \cong G$ rezultă că bucla Moufang comutativă H este generată de trei elemente. Propoziţie demonstrată. $\square$

Teorema 4.2. *Dacă grupul multiplictiv $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative Q este $\overline{IH}$-grup, atunci:*

1) Grupul $\mathfrak{M}$ este grup metahamiltonian;

2) Toate subbuclele neasociative ale buclei Q sunt normale;

3) Dacă grupul $\mathfrak{M}$ este neperiodic, atunci subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ din grupul $\mathfrak{M}$ este 3-grup finit abelian;

4) Dacă $\mathfrak{M}$ este periodic, atunci subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ din grupul $\mathfrak{M}$ este 3-grup resolubil finit de clasă nu mai mare decât trei.

Demonstraţie. Conform [52], grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ al unei bucle Moufang comutative arbitrare este local nilpotent. Atunci, conform [5, Teorema 1.18], grupul $\mathfrak{M}$ este prezentat ca un sistem central cu factori ciclici de ordin prim. În aceste cazuri, dacă $\mathfrak{M}$ este un $\overline{IH}$-grup, atunci conform [5, Propoziţiei 6.5] $\mathfrak{M}$ este resolubil. Corolarul 6.11 din [5] arată că un $\overline{IH}$-grup nonmetahamiltonian resolubil satisface condiţia minimalităţii pentru subgrupuri. Atunci în conformitate cu Lema 4.2 rezultă că $\overline{IH}$-grupul multiplictiv $\mathfrak{M}$ este metahamiltonian. În consecinţă, afirmaţia 1) este demonstrată.

Fie acum H o subbuclă arbitrară neasociativă a buclei Q şi grupul său multiplicativ $\mathfrak{M}$ este un $\overline{IH}$-grup. Atunci, subgrupul $\mathfrak{N}$, generat de aplicaţiile $L(a)$, $a \in Q$, este neabelian şi, potrivit afirmaţiei 1), este normal în $\mathfrak{M}$. Mulţimea $\mathfrak{N}a$ pentru $a \in Q$, este o parte din bucla Q şi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}a \cdot \mathfrak{N}b &= L(\mathfrak{N}b)\mathfrak{N}a = \mathfrak{N}L(\mathfrak{N}b)a \\
&= \mathfrak{N}(\mathfrak{N}b \cdot a) = \mathfrak{N}(L(a)\mathfrak{N}b) \\
&= \mathfrak{N}(\mathfrak{N}L(a)b) = \mathfrak{N}L(a)b \\
&= \mathfrak{N}(ab).
\end{aligned}$$

Dacă $\mathfrak{N}(ba) = \mathfrak{N}(ca)$, atunci

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}b \cdot a &= L(a)\mathfrak{N}b = \mathfrak{N}L(a)b \\
&= \mathfrak{N}(ba) = \mathfrak{N}(ca) \\
&= \mathfrak{N}L(a)
\end{aligned}$$

deci $\mathfrak{N}b = \mathfrak{N}c$. Prin urmare, aplicaţia φ definită de $\varphi a = \mathfrak{N}a$ este un omomorfism al buclei Q pe o buclă φQ şi nucleul $\mathfrak{N}1 = H$ este o subbuclă normală a buclei Q. În consecinţă, orice subbuclă nonasociativă H a buclei Q este normală în Q, adică afirmaţia 2) este demonstrată.

Ţinând cont de Teorema 6.3 din [5], subgrupul comutatorilor $\mathfrak{M}'$ al $\overline{IH}$-grupului neperiodic este un p-grup abelian finit. Dar subgrupul comutatorilor grupului multiplicativ al buclei Moufang comutative arbitrare este un 3-grup [21, Teorema 11.4]. Prin urmare, subgrupul comutatorilor $\mathfrak{M}'$ este un 3-grup finit abelian, adică afirmaţia 3) este demonstrată.

Având în vedere Teorema 6.7 din [5], toate $\overline{IH}$-grupurile resolubile cu subgrup infinit al comutatorilor îndeplinesc condiţia minimalităţii pentru subgrupuri. Dar din afirmaţia 4) a Lemei 4.2 rezultă că în aceste cazuri subgrupul $\mathfrak{M}'$ din $\mathfrak{M}$ este finit. De aici subgrupul comutatorilor $\mathfrak{M}'$ din $\overline{IH}$-grupul $\mathfrak{M}$ este finit, iar conform [21, Teorema 11.4] este un 3-grup finit.

Să presupunem că al doilea subgrup al comutatorilor $\mathfrak{M}^{(2)}$ al grupului $\mathfrak{M}$ este neabelian. Atunci orice subgrup care conţine $\mathfrak{M}^{(2)}$ este neabelian şi în conformitate cu afirmaţia 2), este normal în $\mathfrak{M}$. Evident, grupul $\mathfrak{M}\ /\mathfrak{M}^{(2)}$ este hamiltonian şi cum s-a arătat în demonstraţia Teoremei 4.1, este un grup abelian. Prin urmare, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}^{(2)}$, adică $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^{(2)}$. Dar subgrupul comutatorilor $\mathfrak{M}'$ este un 3-grup finit, deci este nilpotent. Prin urmare, $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{M}^{(2)}$. Contradicţie. În consecinţă, $\mathfrak{M}^{(2)}$ este un subgrup abelian şi grupul $\mathfrak{M}$ este resolubil de clasă nu mai mare decât trei. Aceasta încheie demonstraţia teoremei. $\square$

Ca şi în cazul Teoremei 4.2, subgrupul comutatorilor $\mathfrak{M}'$ al $\overline{IH}$-grupului multiplicativ este finit, atunci din lucrările [85] şi [112] rezultă că $\mathfrak{M}$ este un grup cu clase finite de elemente conjugate şi numărul de elemente în fiecare calasă nu depăşeşte numărul $|\mathfrak{M}|$. Mai mult, în lucrarea [52] se demonstrează că grupul factor $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ al unul grup multiplicativ $\mathfrak{M}$ cu centrul $Z(\mathfrak{M})$ este un 3-grup local finit. Prin urmare, din lucrările [112] şi [113] rezultă că dacă $\mathfrak{M}$ este un $\overline{IH}$-grup, atunci orice element din $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ se conţine într-un 3-grup normal finit.

4.2 Bucle Moufang comutative cu restricţii asupra sistemelor de subbucle asociative infinite

În acest paragraf demonstrăm că bucla Moufang comutativă Q este asociativă dacă şi numai dacă conţine o subbuclă infinită H pentru care orice subgrup din Q cu intersecţie infinită cu H este subbucla normală.

În lucrarea [52] se demonstrează că fiecare buclă Moufang comutativă infinită Q conţine o subbuclă asociativă infinită şi dacă toate subbuclele asociative infinite ale Q sunt normale în Q, atunci Q este asociativă [53]. Analog, echivalenţa afirmaţiilor 1), 2), 8) din Teorema 3.5 din [52], rezultă că *fiecare grup multiplicativ $\mathfrak{M}$ al buclei Moufang comutative infinite Q conţine un subgrup abelian infinit* şi dacă toate subgrupurile abeliene infinite ale grupului multiplicativ $\mathfrak{M}$ sunt normale în $\mathfrak{M}$ atunci Q este asociativă [69].

În aceast paragraf restricţia privind subbuclele asociative infinite şi subgrupurile abeliene infinite este redusă.

Teorema 4.3. *Pentru o buclă Moufang comutativă Q cu grupul multiplictiv $\mathfrak{M}$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) Bucla Q este asociativă;

2) Bucla Q conţine o subbuclă infinită H pentru care orice subgrup din Q cu intersecţie infunită cu H este o subbuclă normală în Q;

3) Grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ este abelian;

4) Grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ conţine un subgrup $\mathfrak{N}$ pentru care orice subgrup cu intersecţie infinită cu $\mathfrak{N}$ este un subgrup normal în $\mathfrak{M}$.

Demonstraţie. Implicaţiile 1)$\Rightarrow$ 2), 3)$\Rightarrow$ 4), 1)$\Leftrightarrow$ 3) sunt evidente.

Vom demonstra implicaţia 2)$\Rightarrow$1). Presupunem că H este o subbuclă nonperiodică şi fie $a \in H$ un element de ordin infinit. În lucrarea [21] se arată că elementul a^3 se conţine în centrul $Z(Q)$ al buclei Moufang comutative Q. Fie b un element arbitrar din Q astfel încât $< b > \cap < a >= 1$. Subbucla $< a^3 >$ este normală în Q. Atunci conform [21] produsul $< b >< a^3 >$ este un subgrup. Deoarece $< a^3 > \subseteq < b >< a^3 > \cap H$ atunci conform afirmaţiei 2) $< b >< a^3 >$ este o subbuclă normală în Q. Fie φ o aplicaţie internă din bucla Q. Fiindcă în bucla Moufang comutativă substuţiile interne sunt automorfismele proprii [21]. Atunci

$$< b >< a^3 >= \varphi\Big(< b >< a^3 >\Big) = \varphi\Big(< b >\Big)\varphi\Big(< a^3 >\Big) = \varphi\Big(< b >\Big) < a^3 >,$$

$$\varphi\Big(< b >\Big) =< b >< a^3 > .$$

Cum $< b > \cap < a^3 >= 1$, atunci $\varphi\Big(< b >\Big) =< b >$. Prin urmare, subbucla $< b >$ este normală în Q.

Notăm $< a^3 >= A$, $< b >= B$. Fie θ, η restricţii ale omomorfismului natural $\lambda : AB \rightarrow AB/A$ pe B şi φB respectiv. Evident, $\ker\theta = B \cap A$, $\ker\eta = \varphi B \cap A$. Atunci din egalităţile $B \cap A = 1$, $\varphi B \cap A = 1$ rezultă că θ, η sunt monomorfisme.

Fie $b \in B$. Atunci $b = ca$ pentru un $c \in \varphi B$, $a \in A$. Mai mult,

$$\lambda b = \lambda(ca),$$

$$\lambda b = \lambda c \cdot \lambda a,$$

$$\lambda b = \lambda c \cdot \lambda 1,$$

$$\lambda b = \lambda c.$$

Prin urmare $\lambda c = \eta c$. Unde η este o restricţie de λ pe φB şi este un monomorfism de φB. Atunci din $\lambda b = \eta c$ rezultă că $b \in \varphi B$, $B \subseteq \varphi B$. Similar, $\varphi B \subseteq B$. Prin urmare $\varphi B = B$. În consecinţă, subbucla $< b >$ este normală în L.

Ulterior, utilizând normalitatea buclei $< b >$ în Q prin analogie se demonstrează că subbucla $< a >$ este normală în Q. Avem că orice element din Q, generează o subbuclă normală în Q. Aceasta înseamnă că bucla Q este hamiltoniană. Dar orice buclă Moufang comutativă hamiltoniană este asociativă [92]. Prin urmare implicaţia 2) $\Rightarrow$ 1) este adevărată.

Acum presupunem că grupul abelian H este periodic. Atunci H se decompune în produs direct de p-subgrupuri maximale H_p. Fie $H = D \times H_3$. Din [47] avem $D \subseteq Z(Q)$.

Subgrupul D este normal în Q. Dacă D este infinit atunci, ca şi în cazul precedent, se demonstrează că bucla Moufang comutativă Q este hamiltoniană şi, prin urmare, este asociativă. Dacă D este finit atunci subgrupul H_3 este infinit.

Presupunem că grupul abelian infinit H_3 satisface condiţia de minimalitate pentru subgrupurile proprii. Atunci $H_3 = T \times K$, unde K este un grup finit şi T este un grup infinit divizibil. Din [52], $T \subset Z(Q)$ şi ca în cazul precedent bucla Moufang comutativă este asociativă.

Pentru a demonstra implicaţia 2) $\Rightarrow$ 1) vom considera cazul când grupul abelian H_3 nu satisface condiţia de minimalitate pentru subgrupurile proprii. În acest caz H_3 posedă un subgrup abelian infinit B care se decompune într-un produs direct de grupuri ciclice de ordinul 3. Fie $b \in B$ şi un subgrup $R \subseteq B$ astfel încât $< b > \cap R = 1$. Fie $R = R_1 \times R_2$ o decompunere a grupului R într-un produs direct de două subgrupuri infinite. Din afirmaţia 2) rezultă că subbuclele R_1, $< b > \times R_1$, R_2, $< b > \times R_2$ sunt normale în bucla Moufang comutativă Q. În [53] se demonstrează că dacă în bucla Moufang comutativă un element de ordinul 3 generează o subbuclă normală, atunci acest element aparţine centrul acestei bucle

Moufang comutative. Apoi $b \in Z(Q)$, şi în consecinţă $B \subseteq Z(Q)$. Subgrupul B este infinit, atunci ca şi în cazurile anterioare se poate demonstra că bucla Moufang comutativă Q este asociativă. Ca urmare implicaţia 2) $\Rightarrow$ 1) aeste adevărată.

Acum demonstrăm implicaţia 4)$\Rightarrow$ 3). Presupunem că $\mathfrak{N}$ este un subgrup nonperiodic şi fie $\alpha \in \mathfrak{N}$ un element de ordin infinit. Fie $Z(\mathfrak{M})$ centrul grupului $\mathfrak{M}$. În [21] este demonstrat că factor-grupul $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ este 3-grup local finit. Atunci elementul α^k aparţine centrului $Z(\mathfrak{M})$ pentru orice număr înteg k. Fie ε unitatea pentru grupul $\mathfrak{M}$ şi β un element arbitrar din $\mathfrak{M}$ astfel încât $< \beta > \cap < \alpha >= \varepsilon$. Subgrupul $< \alpha^k >$ este normal în $\mathfrak{M}$. Atunci rezultă că produsul $< \beta >< \alpha^k >$ este un subgrup. Cum $< \alpha^k >\subseteq< \beta >< \alpha^k > \cap\mathfrak{N}$, atunci identitatea 4), $< \beta >< \alpha^k >$ este un subgup normal din $\mathfrak{M}$. Fie φ un automorfism intern al grupului $\mathfrak{M}$. Atunci

$$< \beta >< \alpha^k >= \varphi\Big(< \beta >< \alpha^k >\Big) = \varphi\Big(< \beta >\Big)\varphi\Big(< \alpha^k >\Big) = \varphi\Big(< \beta >\Big) < \alpha^k >,$$

$$\varphi\Big(< \beta >\Big) =< \beta >< \alpha^k > .$$

Cum $< \beta > \cap < \alpha^k >= \varepsilon$, atunci $\varphi\Big(< \beta >\Big) =< \beta >$. Prin urmare, subgrupul $< \beta >$ este normal în $\mathfrak{M}$.

Notam $< \alpha^k >= \mathfrak{A}$, $< \beta >= \mathfrak{B}$. Fie θ, η restricţiile omomorphismului natural $\lambda : \mathfrak{A}\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ pe $\mathfrak{B}$ şi $\varphi\mathfrak{B}$ respectiv. Evident, $\ker\theta = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$, $\ker\eta = \varphi\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$. Apoi, din egalităţile $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} = \varepsilon$, $\varphi\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} = \varepsilon$ rezultă că θ, η sunt monomorfisme.

Fie $\beta \in \mathfrak{B}$. Atunc $\beta = \gamma\alpha$ pentru un $\gamma \in \varphi\mathfrak{B}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Mai mult, $\lambda\beta = \lambda(\gamma\alpha)$, $\lambda\beta = \lambda\gamma \cdot \lambda\alpha$, $\lambda\beta = \lambda\gamma \cdot \lambda\varepsilon$, $\lambda\beta = \lambda\gamma$. Omomorfismul λ acţionează pe $\varphi\mathfrak{B}$ ca η. Prin urmare, $\lambda\gamma = \eta\gamma$. η este o restricţie de λ pe $\varphi\mathfrak{B}$ şi este un monomorfism pe $\varphi\mathfrak{B}$. Atunci din $\lambda\beta = \eta\gamma$ rezultă că $\beta \in \varphi\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subseteq \varphi\mathfrak{B}$. În mod analog, $\varphi\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$. Prin urmare, $\varphi\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$. În consecinţă, subgrupul $< \beta >$ este normal în $\mathfrak{M}$.

Mai mult, folosind normalitatea lui $< \beta >$ în $\mathfrak{M}$, se demonstrează prin analogie că subgrupul $< \alpha >$ este normal în $\mathfrak{M}$. Obţinem că orice element din $\mathfrak{M}$ generează un subgrup normal în $\mathfrak{M}$. Acest lucru înseamnă că grupul $\mathfrak{M}$ este hamiltonian. Dar orice grup multiplicativ hamiltonian din bucla Moufang comutatiă este abelian (Teorema 4.2). Prin urmare implicaţia 4)$\Rightarrow$ 3) este adevarată pentru cazul când $\mathfrak{M}$ este neperiodic.

Să presupunem că grupul abelian $\mathfrak{N}$ este periodic. Atunci $\mathfrak{N}$ se decompune într-un produs direct de p-subgrupurile proprii maximale $\mathfrak{N}_p$. Fie $\mathfrak{N} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{N}_3$. Conform [53] $\mathfrak{D} \subseteq Z(\mathfrak{M})$. Subgrupul $\mathfrak{D}$ este normal în $\mathfrak{M}$. Dacă $\mathfrak{D}$ este infinit, atunci ca şi în cazul precedent putem să demonstrăm că bucla Moufang comutativă $\mathfrak{M}$ este hamiltoniană şi, în consecinţă, este asociativă. Dacă $\mathfrak{D}$ este finit, atunci subgrupul $\mathfrak{N}_3$ este infinit.

Fie grupul infinit abelian $\mathfrak{N}_3$ satisface condiţia de minimalitate pentru subgrupurile proprii. Atunci $\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{T} \times \mathfrak{K}$, unde $\mathfrak{K}$ este grup finit şi $\mathfrak{T}$ este un grup infinit divizibil. Din [52] $\mathfrak{T} \subset Z(\mathfrak{M})$ şi, ca în cazul precedent, bucla Moufang comutativă Q este abeliană.

Pentru a demonstra implicaţia 4) $\Rightarrow$ 3), trebuie să considerăm doar cazul în care grupul abelian $\mathfrak{N}_3$ nu îndeplineşte condiţia de minimalitate pentru subgrupurile acestuia. În acest caz, $\mathfrak{N}_3$ are un subgrup infinit abelian $\mathfrak{B}$ care se descompune într-un produs direct al grupurilor ciclice de ordin 3. Fie $\beta \in \mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{B}$ astfel încât $< \beta > \cap \mathfrak{R} = \varepsilon$. Fie $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ o descompunere a grupului $\mathfrak{R}$ într-un produs direct de două subgrupuri infinite. Din afirmaţia 2) rezultă că subbuclele $\mathfrak{R}_1$, $< \beta > \times \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $< \beta > \times \mathfrak{R}_2$ sunt normale în grupul $\mathfrak{M}$. În Teorema 4.2 este demonstrat că dacă într-un grup multiplicativ al buclei Moufang comutative un element de ordinul 3, generează un subgrup normal, atunci acest element este din centrul grupului multiplicativ. Atunci $b \in Z(\mathfrak{M})$ şi, prin urmare, $\mathfrak{B} \subseteq Z(\mathfrak{M})$. Subgrupul $\mathfrak{B}$ este infinit, atunci ca şi în cazurile anterioare se poate demonstra că grupul $\mathfrak{M}$ este abelian. Prin urmare, implicaţia 4) $\Rightarrow$ 3) are loc şi în acest caz. Aceasta finalizează demonstraţia teoremei. $\square$

Construcţia de grupuri arbitrare care satisfac echivalenţa afirmaţiilor 3), 4) din Teorema 4.3 este descrisă în [83]. Demonstrarea echivalenţei afirmaţiilor 3), 4) din Teorema 4.3, oferite aici, coincide în mod direct şi grafic cu demonstraţia echivalenţei afirmaţiilor 1), 2) din Teoremă 4.3 pentru buclele Moufang comutative. Dar dacă se utilizează rezultatele din lucrarea [83] pentru a demonstra echivalenţa afirmaţiilor 3), 4), atunci demonstrarea nu este mai uşoară, dar, din contra, acesta este mai complexă.

4.3 Concluzii la capitolul 4

În acest capitol au fost examinat obiectivul 5. În contextul subiectelor examinate punctăm următoarele concluzii:

A fost stabilită structura buclelor Moufang comutative metahamiltoniene.

Pentru buclele Moufang comutative cu restricţii asupra subbuclelor şi subgrupurilor grupului multiplicativ au fost stabilite condiţiile pentru care bucla Moufang comutativă Q este asociativă.

Pentru bucla Moufang comutativă Q cu restricţii asupra sistemelor de subgrupuri ale grupului multiplicativ $\mathfrak{M}$ au fost stabilite condiţiile pentru care: grupul $\mathfrak{M}$ este grup metahamiltonian;

– toate subbuclele neasociative din bucla Moufang comutativă Q sunt normale;

– subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ din $\mathfrak{M}$ este 3-grup finit abelian;

– subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ din $\mathfrak{M}$ este 3-grup finit resolubil.

Pentru bucla Moufang comutativă cu restricţii asupra sistemelor de subbucle asociative infinite au fost stabilite condiţiile pentru care următoarele afirmaţii sunt echivalente: bucla Moufang comutativă Q este asociativă; bucla Q care are o subbuclă infinită H în care fiecare subbuclă asociativă are o intersecţie infinită cu H este o subbuclă normală în Q; grupul $\mathfrak{M}$ este abelian; grupul $\mathfrak{M}$ care are o subbuclă infinită $\mathfrak{N}$ în care fiecare subbuclă asiciativă are o intersecţie infinită cu $\mathfrak{N}$ este un subgrup normal în $\mathfrak{M}$.

Metodologia de cercetare descrisă în capitolul patru poate fi utilizată la:

- stabilirea condiţiilor pentru care în bucla Moufang comutativă Q cu restricţii asupra sistemelor de subbucle asociative infinite grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$ este metahamiltonian.

- stabilirea condiţiilor pentru care în bucla Moufang comutativă Q cu restricţii aupra sistemelor de subgrupuri ale grupului multiplicativ $\mathfrak{M}$, grupul multiplicativ este metabelian.

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

Cercetările în domeniul teoriei buclelor Moufang au fost iniţiate în a doua jumătate a secolului XIX-lea. Teoria buclelor Moufang comutative cu restricţii de finitudine prezintă un interes special pentru cercetare datorită "apropierii" de teoria grupurilor. Dar s-a determinat că nu sunt suficient cercetate proprietăţile buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine şi conexiunea lor cu diverse structuri asociate.

Rezultatele principale ale lucrării sunt noi. Cercetările realizate în această lucrare se referă la obiectivele propuse pentru investigaţie şi ne permit să formulăm următoarele concluzii:

1. Aplicând grupul de automorfismre, au fost determinate condiţiile în care bucla Moufang comutativă este central nilpotentă (de clasa dată) [73], [75], [68].

   În acest scop a fost demonstrat că următoarele condiţii sunt echivalente: bucla Moufang comutativă Q este central nilpotentă de clasa n; grupul $F(1)$ este nilpotent de clasa $n-1$; grupul aplicaţiilor interne $\mathfrak{I}(Q)$ este nilpotent de clasa $n-1$.

2. Pentru buclele Moufang comutative ce se aproximează cu bucle Moufang central nilpotente a fost descrisă sructura grupului $F(1)$, [73], [75], [68].

   În acest scop a fost demonstrat că dacă bucla Moufang comutativă Q se aproximează cu buclele Moufang comutative central nilpotente, atunci grupul său de automorfisme este extensia grupului $F(1)$ nilpotent aproximabil, generat de toate automorfismele ce induc aplicaţia identică pe Q/Q_1, prin grupul automorfismelor grupului abelian Q/Q_1. De asemeni s-a extins rezultatul lui A. I. Mal'cev asupra grupul resolubil al automorfismelor Φ al buclei Moufang comutative Q finit generată s-a demonstrat că este policiclic .

3. A fost determinat grupul de automorfisme al buclei Moufang comutative cu condiţia de minimalitate [72], [71], [77], [78] [68], [74].

   Pentru realizarea acestui obiectiv a fost demonstrat că bucla Moufang comutativă Q cu grupul multiplicativ $\mathfrak{M}$, ce satisface condiţiilor de minimalitate pentru subbucle, atunci grupurile automorfismelor Aut$Q$, Aut$\mathfrak{M}$ izomorf se reprezintă prin matrice peste suma directă de câmpuri $GL_n(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ de numere întregi p-adice. La fel au fost caracterizate buclele Moufang comutative neasociative arbitrare prin grupul său de automorfisme, demonstrându-se echivalenţa unui set de condiţii.

4. Folosind asociativitatea componentelor buclei a fost determinată structura buclelor Moufang comutative ce admit descompunere în şir central inferior.

   În acest sens a fost definită asociativitatea componenetelor buclei Moufang comutative. Pentru buclele Moufang comutative cu asociativitatea componenetelor şi descompunere în produs direct de subbucle, semigrupul endomorfismelor este izomorf semigrupului M, M-matricelor. La fel semigrupul endomorfismelor buclei Moufang comutative Q este izomorf semigrupului M, M-matricelor. Pentru semigrupul endomorfismelor s-au demonstrat câteva proprietăţi [68], [72], [79].

5. A fost stabilită structura buclelor Moufang comutative metahamiltoniene.

   Pentru buclele Moufang comutative cu restricţii asupra subbuclelor şi subgrupurilor grupului multiplicativ au fost stabilite condiţiile pentru care bucla Moufang comutativă Q este asociativă.

   Pentru bucla Moufang comutativă Q cu restricţii asupra sistemelor de subgrupuri ale grupului multiplicativ $\mathfrak{M}$ au fost stabilite condiţiile pentru care: grupul $\mathfrak{M}$ este grup metahamiltonian; toate subbuclele neasociative din bucla Moufang comutativă Q sunt normale; subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ din $\mathfrak{M}$ este 3-grup finit abelian; subgrupul comutator $\mathfrak{M}'$ din $\mathfrak{M}$ este 3-grup finit resolubil.

   Pentru bucla Moufang comutativă cu restricţii asupra sistemelor de subbucle asociative infinite au fost stabilite condiţiile pentru care următoarele afirmaţii sunt echivalente: bucla Moufang comutativă Q este asociativă; bucla Q care are o subbuclă infinită H în care fiecare subbuclă asociativă are o intersecţie infinită cu H este o subbuclă normală în Q; grupul $\mathfrak{M}$ este abelian; grupul $\mathfrak{M}$ care are o subbuclă infinită $\mathfrak{N}$ în care fiecare subbuclă asiciativă are o intersecţie infinită cu $\mathfrak{N}$ este un subgrup normal în $\mathfrak{M}$ [79], [69], [70], [76].

Prin urmare, toate obiectivele tezei sunt realizate şi este complet soluţionată problema ştiinţifică: *descrierea proprietăţilor buclelor Moufang comutative care contribuie la identificarea conexiunii lor cu grupul multiplicativ şi cu grupul de automorfisme în vederea determinării structurii buclelor Moufang comutative cu condiţii de finitudine.*

Recomandări:

1. Luând în consideraţie rolul buclelor Moufang comutative în algebra abstractă, fizica teorietică şi aplicată, criptografie şi sisteme informaţionale putem considera că teoria

şi metodele elaborate pot fi aplicate eficient în cercetările din domeniile menţionate, cât şi în alte direcţii de cercetare.

2. Se recomandă ca rezultatele obţinute şi construcţiile elaborate să fie aplicate:

   - la examinarea proprietăţilor algebrice ale buclelor Moufang comutative cu diverse restricţii;
   - la cercetarea proprietăţilor topologice şi algebrice ale buclelor Moufang topologice;
   - la studierea anumitor compartimente din criptografie şi sisteme informaţionale;
   - la elaborarea cursurilor opţionale pentru masteranzi şi doctoranzi.

BIBLIOGRAFIE

1. Wedderburn J. H. M. A theorem on finite algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, (6), 1905.

2. Zorn M. Alternative korper und quadratische Systeme. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg*, (8):123 – 147, 1930.

3. Artin A. E. Ring with minimum condition. *University of Michgan*, pages 31 – 40, 1944.

4. Zhevlacov K. A., Slin'ko A. M., Shestakov I. P., and Shirshov A. I. *Rings that are Nearly Associative.* Academic Press, New York, 1982.

5. Черников С. Н. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп.* Наука, Москва, 1980.

6. Chernikov S. N. Periodic ZA-extensions of complete groups. *Matematicheskii Sbornik*, (27(69)):117 – 128, 1950.

7. Tschernikow S. N. Uber unendliche spezielle Gruppen. *Recueil Mathématique [Математический Сборник]*, (6(48)):185 – 200, 1939.

8. Chernikov S. N. On special p-groups. *Matematicheskii Sbornik*, (27(70)):185 – 200, 1950.

9. Chernikov S. N. On locally solvable groups satisfying the minimality condition for subgroups. *Matematicheskii Sbornik*, (28(70)):119 – 129, 1950.

10. Chernikov S. N. Finiteness conditions in the general theory of groups. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, (14(5)):45 – 96, 1959.

11. Chernikov S. N. On periodic groups of automorphisms of extremal groups. *Matematicheskie Zametki*, (4(1)):91 – 96, 1968.

12. Chernikov S. N. Infinite nonabelian groups with minimal condition for non-normal subgroups. *Matematicheskie Zametki*, (3(1)):11 – 18, 1969.

13. Moufang R. Zur Asruktur von Alternativ Korpen. *Mathematische Annalen*, pages 416 – 430, 1935.

14. Chein O. and Pflugfelder H. O. The smallest Moufang loop. *Archiv der Mathematik*, 22(6):273 – 276, 1971.

15. Chein O. Moufang loops of small order. II. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 13(197):1 – 131, 1978.

16. Vojtechovsky Petr Nagy Gabor P. The Moufang Loops of Order 64 and 81. *Journal of Symbolic Computation*, (49(9)):871 – 883, 2007.

17. Stephen M. Gagola III. The conjugacy of triality subgroups of Sylow subloops of Moufang loops. *Journal of Group Theory*, (13):821 – 840, 2010.

18. Liebeck M. W. The classification of finite simple Moufang loops. *Matematical Proceedings of the Cambridge Pilosopical Society*, (102):33 – 47, 1987.

19. Grishkov A. N. and Zavarnitsine A. V. Lagrange's theorem for Moufang loops. *Matematical Proceedings of the Cambridge Pilosopical Society*, (139):41 – 57, 2005.

20. Zassenhaus H. Uber endliche Fostkorper. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg*, (11):187 – 220, 1935.

21. Bruck R. H. *A survey of binary systems*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1958.

22. Белоусов В. Д. *Основы теории квазигрупп и луп*. Наука, Москва, 1967.

23. Pflugfelder H. O. *Quasigroups and Loops: An Introduction*. Helderman Verlag, Berlin, 1990.

24. Chein O., Pflugfelder H. O., and Smith J. D. H. *Quasigroups and Loops: Theory and applications*. Helderman Verlag, Berlin, 1990.

25. Bruck R. H. Some results in the theory of quasigrups. *Transactions of the American Mathematical Society*, (55):19 – 52, 1944.

26. Bruck R. H. Some results in the theory of linear non-associative algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, (56):141 – 199, 1944.

27. Bruck R. H. Simple quasigrups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (50):769 – 781, 1944.

28. Bruck R. H. Contributions to the Theory of Loops. *Transactions of the American Mathematical Society*, (60):245 – 354, 1946.

29. Манин Ю. И. Кубические гиперповерхности. I. Квазигруппы классов точек. *Известия Академии Наук СССР Серия математическая*, 6(32):1223 – 1244, 1968.

30. Манин Ю. И. *Кубические формы*. Наука, Москва, 1972.

31. Pflugfelder H. O. Historical notes on loop theory. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 41(2):359 – 370, 2000.

32. Kepka T. and Němec P. Commutative Moufang loops and distributive groupoids of small orders. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 31(106):633 – 669, 1981.

33. Kinyon M. K., Kunen K., and Phillips J. D. A generalization of Moufang and Steiner loops. *Algebra universalis*, 1(48):81 – 101, 2002.

34. Smith J. D. H. On the nilpotence class of commutative Moufang loops. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 3(84):387 – 404, 1978.

35. Malbos J.-P. Sur la classe de nilpotence des boucles commutatives de Moufang et des espaces mediaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 287:691 – 693, 1998.

36. Beneteau L. Free commutative Moufang loops and anticommutative graded rings. *Journal of Algebra*, 67:1 – 35, 1980.

37. Beneteau L. La qiotient de Frattini d'une boucle de Moufang commutative. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 10:443 – 446, 1980.

38. Smith J. D. H. Commutative Moufang loops: the first 50 years. *Algebras, Groups and Geometries*, 2(3):209 – 324, 1985.

39. Андрунакиевич В. А. and Арнаутов В. И. *Конструкции топологических колец и модулей*. Штиинца, Кишинёв, 1988.

40. Андрунакиевич В. А. and Рябухин Ю. М. *Радикалы алгебр и структурная теория*. Наука, Москва, 1979.

41. Басараб А. С. *Лупы с ослабленными свойством обратимости.* PhD thesis, Институт математики и информатики АН МССР, 1968.

42. Basarab A. S. A class of WLK-loops, (russian). *Matematicheskie Issledovaniya*, 2:72 – 77, 1968.

43. Basarab A. S. A class of LK-loops, (russian). *Matematicheskie Issledovaniya*, 120:3 – 7, 1991.

44. Basarab A. S. K-loops. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, 1(7):28 – 33, 1992.

45. Basarab A. S. Generalized Moufang L-loops. *Quasigroups and Related Systems*, 3:1 – 5, 1996.

46. Санду Н. И. *Коммутативные лупы Муфанг и связанные с ними квазигруппы.* PhD thesis, Институт математики и информатики АН МССР, 1979.

47. Санду Н. И. О центрально нильпотентных коммутативных лупах Муфанг. *В сб.: Квазигруппы и лупы. Штиинца, Кишинев*, pages 145 – 155, 1979.

48. Санду Н. И. Об относительно свободных коммутативных лупах Муфанг. *Алгебра и логика*, 3(18):194 – 205, 1979.

49. Санду Н. И. Медиально нильпотентные дистрибутивные квазигруппы и CH-квазигруппы. *Сибирский Математический Журнал*, 2(28):159 – 170, 1987.

50. Санду Н. И. О длине нижнего центрального ряда (производного ряда) коммутативной лупы Муфанг. *Математические заметки*, 3(62):475 – 479, 1997.

51. Санду Н. И. Коммутативные лупы Муфанг с конечными классами сопряженных подлуп. *Математические заметки*, 73(2):269 – 280, 2003.

52. Sandu N. I. Commutative Moufang loops with minimum condition for subloops I. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, 3(43):25 – 40, 2003.

53. Sandu N. I. Commutative Moufang loops with minimum condition for subloops II. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, 2(45):33 – 48, 2004.

54. Sokhatsky Fedir M. and Fryz Iryna V. Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 53:429 – 445, 2012.

55. Dudek W. A., Glazek K., and Gleichgewicht B. A note on the axioms of n-groups. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, 29:195 – 202, 1978.

56. Ursu Leonid. About one special inversion matrix of non-symmetri. In *The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici*, pages 165 – 169, 2012.

57. Белявская Г. Б. и Табаров А. Х. Группоиды с тождеством, определяющим коммутативные лупы Муфанг. *Фундаментальная И Прикладная Математика*, 14(6):33 – 39, 2008.

58. Shcherbacov Victor. *Elements of Quasigroup Theory and Applications*. Taylor Francis Group CRC Press, Boca Raton London New York, 2017.

59. Shcherbacov V. A. and Izbash V. I. On quasigroups with Moufang identity. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, (2):109 – 116, 1998.

60. Izbaş V. Crossed-inverse-property groupoids. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, (2(54)):101 – 106, 2007.

61. Урсу В. И. *Алгебраическая теория квазимонообразий коммутативных луп Муфанг.* PhD thesis, Новосибирский государственный университет и Кишинёвский Технический университет, 2000.

62. Ursu V. I. Quasiidentities of free commutative Moufang loops of rank 3. Proceedings of the 9th national conference on algebra held at the University of Cluj-Napoca, Romania, September 18-20, 1991. Cluj-Napoca: Univ. Cluj-Napoca, Fac. of Math. and Computer Science, "Babeş- Bolyai" Univ., Fac. Math. Comput. Sci. Res. Semin., Prepr. 1992(1), 125-126 (1992)., 1992.

63. Ursu Vasile I. Finitely separable solvable Moufang loops. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov , Ser. III, Math. Inform. Phys.*, 5:275–286, 2012.

64. Ursu Vasile I. On quasivarieties of nilpotent Moufang loops. I. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 53(3):475 – 489, 2012.

65. Ursu Vasile I. On quasivarieties of nilpotent Moufang loops. II. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 53(3):491 – 499, 2012.

66. Лях И. *О преобразованиях ортогональных систем операцый и алгебраических систем.* PhD thesis, Институт математики и информатики АН МССР, 1986.

67. Kuznetsov E. General form transversals in groups. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, (2(81)), 2016.

68. Лупашко Н. *Коммутативные лупы Муфанг с некоторыми условиями минимальности.* Tipografia UST, Кишинэу, 2017.

69. Lupaşco N. T. On commutative Moufang loops with some restrictions for subgroups of its multiplication groups. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, (2):95 – 101, 2006.

70. Lupaşco N. T. On commutative Moufang loops with some restrictions for subloops and subgroups of its multiplication groups. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica*, (3):52 – 56, 2009.

71. Лупашко Н. Т. и Санду Н. И. Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг с условием минимальности. *Математические заметки*, 91(3):407 – 421, 2012.

72. Лупашко Н. Т. и Санду Н. И. О полугруппах эндоморфизмов прямых произведений коммутативных луп Муфанг. *Дискретная Математика*, 23(1):84 – 93, 2011.

73. Лупашко Н. Т. Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг. *Дискретная Математика*, 23(2):108 – 114, 2011.

74. Lupasco N. Despre condiţia de minimalitate a buclei Moufang comutative. In *International conference Mathematics, Informatics and Information technologies: dedicated to the illustrous scientist Valentin Belousov*, pages 55 – 57, Bălţi, 4 2018. USARB.

75. Lupasco N. On automorphisms of commutative Moufang loops. In *International conference Mathematics and Information technologies: research and education, Abstracts*, pages 71 – 71, Chişinău, 8 2011. Moldova State University.

76. Lupasco N. About commutative Moufang loops with some restriction for subgroups of its multiplication groups. In *The XIV Conference On Append And Industrial Mathematics, Book of abstracts*, pages 230 – 231, Chişinău, 8 2006. ROMAI, MSRM.

77. Lupasco N. and Sandu N. On groups of automorphsms of commutative Moufang loops. In *The XXV Conference On Append And Industrial Mathematics, Book of abstracts*, pages 89 – 90, Iaşi, 9 2011. ROMAI, UAIC.

78. Lupasco N. About commutative Moufang lops with some restrictions for subloops. In *The XXV Conference On Append And Industrial Mathematics, Book of abstracts*, pages 89 – 90, Iaşi, 9 2017. ROMAI, UAIC.

79. Lupashco N. T. On endomorphism semigroups of direct products of commtative Moufang loops. In *The 6th Congres of Romanian Mathematicians, Abstracts*, pages 98 – 99, Bucharest, 7 2007. IMAR.

80. Мальцев А. И. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп. *Математический сборник*, 3(28):567 – 588, 1951.

81. Плоткин Б. И. *Группы автоморфизмов алгебраических систем*. Наука, Москва, 1966.

82. Каргаполов М. И. *Основы теории групп*. Наука, Москва, 1977.

83. Semko N. N. Some forms of non-abelian groups with given systems of invariant infinite abelian subgroups (in russian). *Ukrainian Mathematical Journal*, (2):211 – 213, 1981.

84. Goian I., Sarbu P., and Topala A. *Grupuri şi inele: Curs de lecţii*. CEP USM, Chişinău, 2005.

85. Newmann B. H. Groups covered by permutable subsets. *Journal of the London Mathematical Society*, (29):236 – 248, 1954.

86. Kurosh A. G. and Chernikov S. N. Solvable and nilpotent groups. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 2(3(19)):18 – 59, 1947.

87. Каргаполов М. И. О проблеме О. Ю. Шмидта. *Сибирский математический журнал*, 4(1):232 – 235, 1962.

88. Ольшанский А. Ю. Бесконечная простая нётерова группа без кручения. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*

89. Ольшанский А. Ю. *Геометрия определяющих соотношений в группах*. Наука, Москва, 1989.

90. Каргаполов М. И. и Мерзляков Ю. И. *Основы теории групп*. Наука, Москва, 1977.

91. Evans T. Identities and relations in commutative Moufang loops. *Journal of Algebra*, 31:508 – 513, 1974.

92. Norton D. Hamiltonian loops. *Proceedings of the American Mathematical Society*, (3):56 – 65, 1952.

93. Syrbu P. On loops with universal elasticiti. *Quasigroups and Related Systems*, 3:41 – 54, 1996.

94. Gurdiş Aliona. *Bucle Moufang comutative şi CH-cuasigrupuri cu condiţii de finitudine*. PhD thesis, Universitatea de Stat din Tiraspol, 2010.

95. Covalschi Alexandru. *Identităţile şi cvasiidentitatile A-buclei nilpotente*. PhD thesis, Universitatea de Stat din Tiraspol, 2013.

96. Chernikov N. S. Groups Satisfying the Minimal condition for Non-abelian Non-normal Subgroups. *Matematicheskie Zametki*, (3(1)):11 – 18, 1969.

97. Grishkov A. N. and Shestacov I. P. Commutative Moufang loops and alternative algebras. *Journal of Algebra*, (333):1 – 13, 2011.

98. Grishkov A. N. and Zavarnitsine A. V. Sylow's teorem for Moufang loops. *Journal of Algebra*, (321):1813 – 1825, 2009.

99. Doro S. Simple Moufang loops. *Matematical Proceedings of the Cambridge Pilosopical Society*, (83):377 – 392, 1978.

100. Stephen M. Gagola III. Hall's Theorem for Moufang loops. *Matematical Proceedings of the Cambridge Pilosopical Society*, (152(2)):193 – 206, 2012.

101. Kinyon Michael, Stuhl Izabella, and Vojtechovsky Petr. Half-Isomorphisms. (to appear), 2017.

102. Phillips J.D. The commingling of commutativity and associativity in Bol loops. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*.

103. Grishkov A., Plaumann P., Rasskazova M., and Sabinina L. Half-Automorphisms of Free Automorphic Moufang loops. *Mathematical Notes*, 98(2):325 – 327, 2015.

104. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы*, volume 2. Мир, Москва, 1977.

105. Курош А. Г. *Теория Групп*. Наука, Москва, 1967.

106. Ursu V. O observaţie asupra buclelor moufang comutative cucondiţia minimalităţii. In *International conference Mathematics, Informatics and Information technologies: dedicated to the illustrous scientist Valentin Belousov*, pages 98 – 99, Bălţi, 4 2018. USARB.

107. Мерзляков Ю. И. Матричное представление групп внешних автоморфизмов черниковских групп. *Алгебра и логика*, 4(8):478 – 482, 1969.

108. Мерзляков Ю. И. *Рациональные группы Ч. 1. Алгебраические группы матриц*. Новосибирск, Новосибирск, 1967.

109. Schlette A. Artian, almost abelian groups and their groups of automorphisms. *Pacific Journal of Mathematics*, 29(2):402 – 425, 1969.

110. Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами. *Математический сборник*, 8:405 – 422, 1940.

111. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы*, volume 1. Мир, Москва, 1974.

112. Горчаков Ю. М. *Группы с конечными классами сопряженных элементов*. Наука, Москва, 1978.

113. Baer R. Finitiness properties of groups. *Duke Mathematical Journal*, (15):1021 – 1032, 1948.

DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnata, Lupaşco Natalia, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări şi realizări ştiinţifice. Conştientizez că, în caz contrar, urmeaža să suport consecinţele în conformitate cu legislaţia în vigoare.

Lupaşco Natalia

Semnătura ______________

Data ______________

CV-ul AUTORULUI

Nume: Lupaşco

Prenume: Natalia

Cetatenia: Republica Moldova

EDUCAŢIE

2004-2007: Studii de doctorat. Catedra Algebra, Geometrie şi Topologie, Universitatea de Stat din Tiraspol.

2001-2002: Studii de masterat la specialitatea de Matematica, Universitatea de Stat din Tiraspol.

1994-1999: Studii superioare de licenţă la specialitatea Matematica şi informatică, Universitatea de Stat din Tiraspol.

EXPERIENŢA

01.09.1999 - present: lector universitar, Catedra Informatică şi Tehnologii Informaţionale, Universitatea de Stat din Tiraspol.

DOMENIILE DE INTERES ŞTIINŢIFIC

Teoria grupurilor, teoria cuazigrupurilor, criptografia, programarea.

PARTICIPĂRI ÎN PROIECTE INTERNAŢIONALE

TEMPUSIV - Western-Eastern Teacher Education Network WETEN, Numărul proiectului: 145035-TEMPUS-2008-LT-JPTHN, Durata proiectului: 2009-2011

Programul Erasmus+ - Creating Moldovan E-network for promoting inovate e-teaching in the continuing profesional education (Teach Me) Numărul proiectului: 561820-EPP-1-2015-1-DE-EPPKA2-CBHE-JP Durata proiectului: 2015-2018

PARTICIPĂRI LA FORURI ŞTIINŢIFICE

Am participat la circa 15 conferinţe ştiintifico-didactice, dintre care menţionez:

1. Second Conference of the Matemathical Society of Republic of Moldova, august 17 – 19, 2004.

2. The 6th Congres of Romanian Mathematicians, Bucureşti, 28 iunie – 4 iulie, 2007.

3. The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the 60th anniversary of the Faculty of Mathematics and Computer Science of Moldova State University, Chisinău, august 17-19, 2006.

4. International conference "Mathematics & Information technologies: Research and Education" (MITRE 2011), dedicated to the 65th anniversary of the Moldova State University, August 22 – 25, 2011.

5. The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Iaşi, septembrie 22 – 25, 2011.

6. The XXV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Iaşi, septembrie 14 – 17, 2017.

7. International conference on mathematics, informatics and information technologies: dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19 – 21, 2018, Bălţi.

LUCRĂRI ŞTIINTIFICE ŞI ŞTIINTIFICO-METODICE PUBLICATE

Am publicat circa 20 lucrări ştiinţifico-didactice, dintre care menţionez:

1. Лупашко Н., Санду Н., Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг с условием минимальности, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ, 2012, т. 91, № 3, с. 407-421.

2. Лупашко Н., Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг, ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА, 2011, т. 23, № 2, с. 108-114.

3. Лупашко Н., Санду Н., О полугруппах эндоморфизмов прямых произведений коммутативных луп Муфанг, ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА, 2011, т. 23, № 1, с. 84-93.

4. Lupashco N., On commutative Moufan loops with some restrictions for subloops and subgroups of its multiplication groups, BULETINUL ACADEMIEI DE STIINTE A REPUBLICII MOLDOVA. MATEMATICA. Number 3(61), 2009, Pages 52-56.

5. Lupashco N., On commutative Moufan loops with some restrictions for subgroups of its multiplication groups, BULETINUL ACADEMIEI DE STIINTE A REPUBLICII MOLDOVA. MATEMATICA. Number 2(51), 2006, Pages 95 – 101.

6. Chiriac L., Indoitu N., Pruteanu M., Bobeica N., Identificarea Structurilor Algebrice Neizomorfe, Acta Et Commentationes, Analele Universităţii de Stat Tiraspol, Volumul III, Chisinau, 2003, pag. 114 – 118

7. Lupaşco N., Despre condiţia de minimalitate a buclei Moufang comutative. In International conference Mathematics, Informatics and Information technologies: dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, pages 55 – 57, Bălţi, 4 2018. USARB.

8. Lupaşco N., About commutative Moufang loops with some restrictions for subloops, CAIM 2017, Iasi, September 14-17, 2017

9. Lupaşco N., Sandu N., On groups of automorphsms of commutative Moufang loops, CAIM 2011, Iasi, September 22-25, 2011

10. Lupaşco N., On automorphisms of commutative Moufang loops, MITRE 2011, Chisinau, August 22-25, 2011.

11. Lupaşco N., Automorfismele buclelor Moufang commutative, Seminarul "V. D. Belousov 80 ani", 17 februarie 2005.

12. Lupaşco N., About commutative Moufang loops with some restriction for subgroups of its multiplication groups, CAIM 2006. 17-19 August. 2006. Chisinau.

13. Lupaşco N., On automorphisms of commutative Moufang loops with condition for subloops, A X-a Conferinta a Societatii de Matematica din Romania, 19-21 mai 2006, Bucuresti.

14. Lupaşco N., On periodic groups of automorphism of commutative Moufang loops with condition for subloops, Second Conference of the Mathematical Society of Republic of Moldova, August 17-19, 2004, Chisinau.

15. Chiriac L., Indoitu N., "Identificarea quazigrupurilor neizomorfe", Invatamantul universitar din Moldova la 70 ani, seria Matematica, Materialele conferintei, V3, 9-10 octombrie, 2000, Chisinau, p.37

16. Lupaşco N., Despre necesitatea studierii Python in institutiile de invatamant, Conferinta Stiintifico-didactica nationala cu participare internationala consacrata aniversarii a 80-a de la nasterea profesorului universitar Andrei Hariton, 4-6 octombrie 2013

17. Vascan T., Globa A., Lupaşco N., Grafica asistata de calculator, Indrumar de laborator. Tipografia UST, Chisinau, 2017, p. 150.

18. Лупашко Н. Коммутативные лупы Муфанг с некоторыми условиями минимальности Тираспольский гос. ун-т. - Кишинэу: Б. и., 2017 (Tipografia UST). - 103 p.

APARTENENŢA LA SOCIETĂŢI ŞTIINŢIFICE INTERNAŢIONALE

ROMAI

CUNOAŞTEREA LIMBILOR

româna – limbă maternă

rusa – avansat

franceza – mediu

engleza – elementar

DATE CONTACT DE SERVICIU

Adresa: MD-2069, Republica Moldova, or. Chişinău, str. Gh. Iablicichin 5

Tel: +(373)79539046

E-mail: nlupashco@gmail.com