

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 519.718, 519.624

CEBOTARU ELENA

**CERCETAREA STABILITĂȚII ÎN SENS LYAPUNOV A
SOLUȚIILOR STAȚIONARE ÎN MODELUL DINAMIC
ALBAOUI - GREBENICOV (CAZUL A OPT CORPURI
PLANARE)**

**112.03 – CIBERNETICĂ MATEMATICĂ ȘI CERCETĂRI
OPERATIONALE**

Teza de doctor în științe matematice

Conducător științific:

Grebenicov Evghenii,

Doctor hab. în științe
fizico-matematice,
prof. univ.

Consultant științific:

Cioban Mitrofan,

Doctor hab. în științe
matematice, prof. univ.,
academician

Autorul:

Cebotaru Elena

CHIȘINĂU, 2018

CUPRINS

ADNOTĂRI	5
INTRODUCERE	8
1. SCURT ISTORIC AL REZULTATELOR ȘTIINȚIFICE DE BAZĂ REFERITOARE LA PROBLEMA NEWTONIANĂ A MAI MULTOR CORPURI	15
1.1. Formularea matematică a problemei newtoniene a n corpuri.....	15
1.2. Diferite aspecte ale problemei integrabilității ecuațiilor diferențiale ale problemei a mai multor corpuri.	20
1.3. Ideile lui Poincaré despre integrabilitatea asimptotică a ecuațiilor diferențiale.....	25
1.4. Determinarea soluțiilor particulare exacte.....	31
1.5. Despre stabilitatea soluțiilor homografice ale problemei newtoniene mărginite..	35
1.6. Concluzii la capitolul 1	39
2. STUDIEREA STABILITĂȚII ÎN PRIMA APROXIMAȚIE A SOLUȚIILOR STAȚIONARE ÎN PROBLEMA MĂRGINITĂ A OPT CORPURI	41
2.1. Algoritmul general de generare a ecuațiilor diferențiale ce descriu problemele mărginite ale dinamicii cosmice	41
2.2. Ecuațiile diferențiale ale problemei mărginite a opt corpuri	47
2.3. Teoremele despre existența soluțiilor staționare	50
2.4. Determinarea pozițiilor de echilibru	52
2.5. Teoremele despre stabilitatea și instabilitatea liniară a punctelor staționare	66
2.6. Concluzii la capitolul 2	73
3. STUDIEREA STABILITĂȚII ÎN SENS LYAPUNOV A SOLUȚIILOR STAȚIONARE ÎN PROBLEMA MĂRGINITĂ A OPT CORPURI	75
3.1. Teorema despre stabilitatea în sens Lyapunov a punctelor staționare ale sistemelor hamiltoniene	75
3.2. Normalizarea părții pătratice a hamiltonianului	77
3.3. Normalizare în sens Birghoff a formei cubice și a formei de ordinul patru a hamiltonianului	87
3.4. Studiul stabilității soluțiilor staționare în forma numerică.....	102
3.5 Concluzii la capitolul 3.....	115

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI.....	116
BIBLIOGRAFIE.	.118
DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII	125
CV-ul AUTORULUI.	126

ADNOTARE

Cebotaru Elena

„Cercetarea stabilității în sens Lyapunov a soluțiilor staționare în modelul dinamic Albaouy–Grebenicov (cazul a opt corpuri planare)”. Teză de doctor în științe matematice, specialitatea 112.03 – Cibernetică matematică și cercetări operaționale. Chișinău, 2018.

Structura tezei: lucrarea este scrisă în limba română și constă din introducere, 3 capitole, concluzii generale, bibliografie ce cuprinde 93 de titluri, 117 pagini de text de bază, 26 figuri și 3 tabele. Rezultatele obținute sunt publicate în 15 lucrări științifice.

Cuvinte cheie: problemă mărginită a n -corpuri, model matematic, configurație centrală, punct staționar, stabilitate în prima aproximație, stabilitate în sens Lyapunov, sisteme hamiltoniene, algoritm, algebră computerizată.

Domeniul de studiu al tezei: reprezintă bazele teoretice și metodele de modelare matematică și analiză a modelelor dinamice ale mecanicii cerești care permit studiul acestora cu precizia necesară în scopuri practice.

Scopul și obiectivele lucrării: Scopul principal al lucrării constă în a studia influența câmpului gravitațional al configurației formate din șapte corpuri asupra mișcării unei mase infinit mici amplasate în acest sistem. Pentru a rezolva această problemă este necesar să realizăm următoarele obiective: determinarea condițiilor de existență ale modelului, determinarea punctelor staționare în problema mărginită, studierea stabilității liniare și stabilității în sens Lyapunov a soluțiilor staționare.

Noutatea și originalitatea științifică: constă în determinarea și studierea stabilității unei clase noi de soluții în problema mărginită a $7+1$ corpuri configurația căreia reprezintă un pătrat cu două mase pe una din diagonale și a șaptea masă plasată în originea sistemului de coordonate, ce coincide cu centrul de greutate al pătratului. Au fost elaborate programe în codurile sistemului de calcul Mathematica pentru studiul problemei date.

Problema științifică importantă soluționată: constă în abordarea metodelor calitative și constructive de studiu al ecuațiilor mișcării a opt corpuri, ceea ce a contribuit la determinarea configurației și a condițiilor de existență a punctelor staționare în vederea aplicării lor ulterioare în descrierea exactă a evoluției sistemului dinamic.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării: în lucrarea curentă s-a arătat că există configurație în formă de pătrat cu două mase pe diagonală; s-a demonstrat că există așa dimensiuni ale configurației pentru care punctele staționare în problema mărginită sunt stabile în prima aproximație și în sens Lyapunov.

Implementarea rezultatelor științifice: Algoritmii și programele computerizate dezvoltate în teză au permis determinarea eficientă a condițiilor de existență a modelului și studiul stabilității soluțiilor staționare. Acestea pot fi utilizate în studiul altor modele matematice ale mecanicii cerești. Rezultatele tezei pot fi folosite în procesul de predare a ecuațiilor diferențiale, mecanica cerească, teoria stabilității, modelarea matematică.

АННОТАЦИЯ

Чеботару Елена

«Исследование устойчивости в смысле Ляпунова стационарных решений в динамической модели Альбауи-Гребеникова (случай восьми тел в плоскости)».

Диссертация на соискание ученой степени кандидата математических наук по специальности 112.03 - Математическая кибернетика и операционные исследования. Кишинев, 2018.

Структура диссертации: работа написана на румынском языке и состоит из введения, трех глав, заключения, 93 источника литературы, 117 страниц основного текста, 26 рисунка и 3 таблиц. Полученные результаты опубликованы в 15 научных работах.

Ключевые слова: ограниченная задача n -тел, математическая модель, центральная конфигурация, стационарная точка, устойчивость в первом приближении, устойчивость в смысле Ляпунова, гамильтоновы системы, алгоритм, компьютерная алгебра.

Область исследования диссертации: теоретические основы и методы математического моделирования и анализа динамических моделей небесной механики, которые позволяют их исследование с достаточной точностью для практических целей.

Цель и задачи: Основной целью данной работы является изучение влияния гравитационного поля конфигурации, состоящего из семи тел, на движение бесконечно малой массы, расположенной в этой системе. Для решения этой задачи необходимо решить следующие задачи: определить условия существования модели, определить стационарные точки в ограниченной задаче, изучить линейную устойчивость и устойчивость в смысле Ляпунова стационарных решений.

Научная новизна и оригинальность: состоит в определении и изучении устойчивости нового класса решений в ограниченной задаче $7 + 1$ тел, конфигурация которой представляет собой квадрат с двумя массами на одной из диагоналей и седьмой массой, расположенной в начале системы координат, совпадающей с центром тяжести квадрата. Были разработаны программы в кодах вычислительной системы Mathematica для изучения проблемы.

Главная решенная задача: состоит в качественном и конструктивном методе изучения уравнений движения восьми тел, описывающие математическую модель, который помог определить конфигурацию и условий существования стационарных точек для их последующего применения в точном описании эволюции динамической системы.

Теоретическая и прикладная значимость: в текущей работе было показано, что существует конфигурация в форме квадрата с двумя массами по диагонали; было доказано, что существуют такие размеры конфигурации, для которых стационарные точки в ограниченной задаче устойчивы в первом приближении и в смысле Ляпунова.

Внедрение научных результатов: Разработанные в диссертации алгоритмы и компьютерные программы позволили эффективно определить условия существования модели и изучить устойчивость стационарных решений. Они могут быть использованы при изучении других математических моделей небесной механики. Результаты диссертации могут быть использованы при проектировании, управлении космических полетов, при преподавании дифференциальных уравнений, небесной механики, теории устойчивости, методов математического моделирования.

ANNOTATION

Cebotaru Elena

"Researching stability in the Lyapunov sense of stationary solutions in the dynamic Albaouy-Grebenicov model (the case of eight planar bodies)".

PhD thesis in Mathematics Sciences, specialty 112.03 - Mathematical cybernetics and operational research. Chişinău, 2018.

Thesis structure: the study is written in Romanian and consists of an introduction, 3 chapters, general conclusions, 93 bibliography items, 117 pages of main text, 26 figures and 3 tables. The obtained results were published in 15 scientific papers.

Keywords: the restricted problem of n -bodies, mathematical model, central configuration, stationary point, stability in the first approximation, stability in the Lyapunov sense, Hamiltonians systems, algorithm, computer algebra.

Field of study of the thesis: the theoretical basis, the methods of mathematical modeling and analysis of the dynamic models of the celestial mechanics which allow their study with the necessary precision for practical purposes.

The aim of research: The main aim of the paper is to study the influence of the gravitational field of the seven-body configuration on the movement of an infinitely small mass placed in this system. To solve this problem it is necessary to achieve the following objectives: determining the existence conditions of the model, determining the stationary points in the restricted problem, studying the linear stability and Lyapunov stability of the stationary solutions.

Scientific innovation and originality: consists in determining and studying the stability of a new class of solutions in the restricted problem of $7 + 1$ bodies whose configuration is a square with two masses on one of the diagonals and the seventh body placed in the origin of the coordinate system coinciding with the center of gravity of the square. Programs have been developed in the Mathematica computing system codes to study the problem.

The main scientific solved problem: consists in the using of the qualitative and constructive study methods of the equations of the motion of the eight bodies, that describes a mathematical model, which contributed to the determination of the configuration and the existence conditions of the stationary points for their subsequent application in the exact description of the evolution of the dynamic system.

The theoretical significance and applicative value of the thesis: in the current paper it has been shown that there is a square-shaped configuration with two masses on diagonally; it has been demonstrated that there are such dimensions of the configuration for which the stationary points in the restricted problem are stable in the first approximation and Lyapunov sense.

The implementation of the scientific results: The algorithms and computer programs developed in the thesis have made it possible to effectively determine the model's existence conditions and to study the stability of stationary solutions. They can be used in the study of other mathematical models of celestial mechanics. The results of the thesis can be used in the design, management of space flights, in the teaching of differential equations, celestial mechanics, stability theory, mathematical modeling methods.

INTRODUCERE

Se examinează problema newtoniană a șapte corpuri configurația cărora verifică condițiile: corpurile formează un sistem plan centralizat în formă de pătrat, în vârfurile căruia se află masele m_1, m_2, m_3, m_4 , două mase m_5 și m_6 se află pe o diagonală a sa, iar al șaptelea corp este plasat în centrul de greutate al configurației.

Se studiază influența câmpului gravitațional al configurației date asupra mișcării unei mase infinit mici amplasate în acest sistem.

Actualitatea și importanța problemei abordate:

Modelele matematice ale mecanicii cerești și ale dinamicii cosmice, la care se referă problema Newtoniană, sunt, de regulă, descrise prin sisteme de ecuații diferențiale neliniare avînd o structură analitică foarte complicată. Lipsa unor metode universale de integrare exactă a unor astfel de sisteme a stimulat dezvoltarea unor metode analitice aproximative și numerico-analitice care pot fi implementate în algoritmi computerizați eficienți. Studiile în această direcție sunt asociate cu numele lui K. Zundman, V.A. Brumberg, E.A. Grebenicov, Yu.A. Ryabov și alți oameni de știință, în ale căror lucrări au fost obținute o serie de rezultate fundamentale și s-au dezvoltat algoritmi pentru construirea soluțiilor, în primul rând pentru problema clasică Newtoniană a trei corpuri și varietățile ei sub forma unor serii. Aceste rezultate cunoscute au fost obținute, de regulă, în "perioada de precomputere", prin urmare, nu pot fi adaptate întotdeauna la noile tehnologii informaționale.

În prezent devin tot mai eficiente metodele de cercetare calitative ale sistemelor dinamice, bazate pe determinarea soluțiilor speciale exacte ale ecuațiilor diferențiale de mișcare și analiza ulterioară a stabilității lor, folosind cele mai recente progrese în matematica computerizată [37, 63, 84, 85, 86]. Această abordare aparține lui A. Poincaré și A.M. Lyapunov și a lucrat bine în cazul modelului bine-cunoscut în astronomie, matematică și mecanică - problema mărginită a trei corpuri. Ea constă, în primul rând, în dezvoltarea de metode matematice și algoritmi pentru construirea soluțiilor particulare exacte și poate fi aplicată și în cazul problemei newtoniene a n corpuri deoarece numărul de soluții determinate ale ei este foarte mic. Rezultatele remarcabile în această direcție au fost obținute de oamenii de știință din diferite țări, printre care trebuie citați, în primul rând, V.M. Alekseev, G.N. Duboshin, A.A. Orlov, K.A. Sitnickov, A. Albaouy, D. Bang, F. Cedo, A. Chenicer, J.M. Cors, O. Dziobek, V. Elmabsout, L.

Euler, Y. Hagihara, J.L. Lagrange, P.C. Laplace, J. Llibre, K.R. Meyer, R. Moeckel, R. Montgomery, F.R. Moulton, J.I. Palmore, L.M. Perko, D.G. Saari, D.S. Schmidt, V. Szebehely, E.L. Walter, A.L. Whipple, A. Wintner și alții. Cele mai multe dintre soluțiile exacte cunoscute ale problemei newtoniene a n corpuri aparțin unei așa-numite clase de soluții homografice, condițiile suficiente pentru existența carora au fost obținute de Wintner în prima jumătate a secolului al XX-lea, iar condițiile necesare au fost formulate mai apoi de E.A. Grebenicov. În ciuda acestor rezultate fundamentale legate de determinarea soluțiilor homografice exacte, algoritmii constructivi pentru obținerea lor cu ajutorul computerului în prezent sunt foarte puțini. Aceasta face ca problema dezvoltării lor să fie relevantă [36, 76, 78, 81, 87].

E de menționat faptul că primele sisteme simbolice computerizate au apărut, mai întâi de toate, pentru rezolvarea efectivă a problemelor practice ale dinamicii cerești și ale fizicii teoretice, dar ele nu erau sisteme universale. Mai târziu, prin anii 70 ai secolului trecut profesorul Hern din USA a elaborat primul sistem universal al algebrei computerizate „Reduce-2”, care a obținut popularitate în USA și fosta URSS.

Dezvoltarea mecanicii homografice cerești se datorează în mare măsură datorită aplicării largi a noilor tehnologii computerizate, în primul rând a Sistemelor Algebrei Computerizate, ce permit convinabil și efectiv de efectuat volume mari nu numai de calcule numerice dar și analitice, fără de care e imposibilă rezolvarea oricărei probleme a mecanicii cerești. Printre acestea pot fi enumerate Sistemele de Calcul Simbolic: „Maple”, „Mathematica” [33, 89], „Matcad”, aplicate des în diferite cercetări științifice.

În acest context, dezvoltarea modelelor de dinamică spațială, a aparatului matematic și algoritmilor pentru investigarea lor cu ajutorul tehnologiilor computerizate sunt foarte actuale. Rezultate remarcabile în această direcție au fost obținute de către: V.I. Arnold, A.D. Bruno, M.A. Vashkovy, Yu.F. Gordeeva, E.A. Grebenikov, S.A. Gutnik, V.F. Edneral, G.B. Efimov, N.I. Zemtsova, A.P. Ivanov, A.M. Leontovich, M.J. Lidov, A.P. Markeev, C.B. Mironov, Yu.A. Ryabov, V.A. Sarychev, A.G. Sokolsky, A. Albaouy și alții [13, 24, 25, 23, 26, 28, 36, 90].

Lucrarea este dedicată problemei existenței și stabilității în sens Lyapunov a punctelor staționare în problema mărginită a opt corpuri. Prin analogie cu problema clasică a trei corpuri, formulată de Jacobi și Poincaré, E.A. Grebenicov a propus un model nou în mecanica cerească – problema mărginită a mai multor corpuri ($n > 3$) în care câmpul gravitațional este generat de corpurile ce formează figuri plane (poligoane regulate și sisteme de astfel de poligoane), ce se

rotesc în jurul corpului central și într-un astfel de câmp se studiază mișcarea masei ce gravitează pasiv. Pentru $n=3$ existența a astfel de configurații rezultă din teoria soluțiilor homografice ale problemei newtoniene a trei corpuri, fondată de cunoscutul matematician american A. Wintner. Din rezultatele obținute de Wintner rezultă că în problema generală a trei corpuri (toate trei mase sunt diferite de zero) există soluții exacte ale ecuațiilor diferențiale geometric reprezentate de triunghiuri echilaterale ce se rotesc și care au fost numite de el soluții homografice [61, 88].

Dacă presupunem că unul din punctele materiale are masa egală cu zero și prin urmare nu influențează asupra câmpului gravitațional al celorlalte două mase diferite de zero, obținem problema newtoniană mărginită a trei corpuri. În acest model există soluția homografică în formă de triunghi echilateral. Ea se descrie printr-un sistem obișnuit de ecuații diferențiale de ordinul șase care întotdeauna poate fi scris în forma hamiltoniană. E bine cunoscut faptul că stabilitatea a oricărei soluții particulare a ecuațiilor problemei mărginite a trei corpuri poate fi studiată doar cu ajutorul teoriei KAM (teoria soluțiilor convențional periodice ale lui A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold, Iu. Moser). Doar în teoria KAM există teoremele despre stabilitatea în sens Lyapunov a soluțiilor particulare ale sistemelor hamiltoniene [11, 12, 21, 24, 42, 49, 50, 51, 55, 77].

Sinteza teoremelor clasice și a teoriei KAM a fost neevitabilă așa cum în limitele teoriei clasice în cel mai bun caz pot fi obținute rezultate despre stabilitatea formală (stabilitatea liniară ș.a.) și nu stabilitatea în sensul lui Lyapunov. Însuși Lyapunov considera aceasta drept una din cele mai complicate probleme matematice pentru sistemele hamiltoniene. Teoria KAM, cel puțin pentru sistemele hamiltoniene cu două grade de libertate, dă răspuns la această întrebare. Mai mult ca atât, arsenalul său posedă teoreme despre „stabilitatea pe măsura condițiilor inițiale”, care în principiu pot fi aplicate în modelele teoretice ale dinamicii cosmice și a căror rol devine și mai evident la rezolvarea problemelor dinamicii computerizate .

Partea constructivă a teoriei sistemelor hamiltoniene necesită întotdeauna realizarea unui șir de transformări canonice ale lui Birghoff [21, 24, 35, 42, 48] ce aduce hamiltonianul la așa-numita formă normală. Actual acest lucru anevoios poate fi realizat efectiv aplicând metodele algebrei computerizate - un atribut inevitabil al calculelor simbolice moderne.

În studiul obișnuit al ecuațiilor diferențiale neliniare întotdeauna apare problema existenței soluțiilor particulare care posedă o careva simetrie păstrată în timpul procesului de schimbare a variabilei independente.

Determinarea și studierea stabilității punctelor de echilibru în problema mărginită a mai multor corpuri configurația căreia nu posedă simetrie completă este una din direcțiile actuale ale teoriei KAM.

Scopul lucrării constă în studierea influenței câmpului gravitațional al modelului (configurației) format din șapte corpuri asupra mișcării unei mase infinit mici amplasate în acest sistem.

Pentru a rezolva această problemă este necesar să realizăm următoarele obiective:

- determinarea condițiilor de existență a problemei newtoniene a șapte corpuri configurația căreia reprezintă un pătrat în vârfurile căruia se află masele m_1, m_2, m_3, m_4 , două mase m_5 și m_6 se află pe o diagonală a sa, iar al șaptelea corp este plasat în centrul de greutate al sistemului;
- determinarea punctelor staționare în problema mărginită a opt corpuri;
- liniarizarea ecuațiilor diferențiale ale problemei mărginite în vecinătatea punctelor staționare;
- determinarea valorilor proprii ale matricei sistemului liniarizat;
- determinarea condițiilor de stabilitate liniară a punctelor de echilibru;
- construcția hamiltonianului problemei mărginite;
- liniarizarea sistemului hamiltonian;
- normalizarea formei pătratice a hamiltonianului H_2 ;
- normalizarea formei cubice a hamiltonianului H_3 ;
- eliminarea formei cubice H_3 și normalizarea formei H_4 ;
- determinarea stabilității în sens Lyapunov a punctelor de echilibru;
- determinarea condițiilor de aplicare în practică a rezultatelor.

Metodologia cercetării științifice. Metoda de cercetare se bazează pe aplicarea teoriei analitice și calitative a ecuațiilor diferențiale, a teoriei stabilității Lyapunov-Poincaré, a teoriei Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) a soluțiilor convențional periodice ale sistemelor hamiltoniene, a teoriei și algoritmilor de programare matematică și utilizarea sistemelor moderne de algebră la efectuarea calculelor numerice, prelucrarea informațiilor simbolice și vizualizarea rezultatelor obținute, folosirea softului specializat pentru efectuarea calculelor numerice și studierea modelelor elaborate.

Noutatea și originalitatea științifică: deoarece clasele de soluții cu simetrie incompletă au fost introduse recent de către profesorul E. Grebenicov ele au fost mai puțin studiate. Una din direcțiile actuale ale teoriei KAM este determinarea și studierea stabilității punctelor de echilibru

în problema mărginită a mai multor corpuri configurația căreia nu posedă simetrie completă. În lucrare se cercetează o clasă nouă de soluții în problema newtoniană a șapte corpuri, configurația căreia reprezintă un pătrat cu două mase pe una din diagonale și a șaptea masă plasată în originea sistemului de coordonate, ce coincide cu centrul de greutate al pătratului. Au fost elaborate programe în codurile sistemului de calcul Mathematica pentru studiul problemei date.

Problema științifică importantă soluționată constă în abordarea metodelor calitative și constructive de studiu al ecuațiilor mișcării a opt corpuri ce descriu modelul matematic, ceea ce a contribuit la determinarea configurației și a condițiilor de existență a punctelor staționare în vederea aplicării lor ulterioare în descrierea exactă a evoluției sistemului dinamic.

Problema principală rezolvată constă în modelarea matematică a sistemului dinamic descris de configurație, determinarea condițiilor de existență a configurației cercetate, determinarea punctelor staționare în problema mărginită, stabilirea condițiilor de stabilitate în prima aproximație a punctelor staționare; studierea stabilității în sens Lyapunov a punctelor de echilibru stabile în prima aproximație.

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării: în lucrarea curentă s-a construit configurația în formă de pătrat cu două mase pe diagonală; s-a demonstrat că există așa dimensiuni ale configurației pentru care punctele staționare în problema mărginită sunt stabile în prima aproximație și în sens Lyapunov.

Studiile calitative și numerice ale sistemelor de acest tip contribuie la rezolvarea sistemelor hamiltoniene de ecuații diferențiale care descriu problemele specifice ale dinamicii spațiului, inclusiv problemele zborurilor spațiale [65, 68, 78, 79]. O caracteristică a acestora din urmă este faptul că traiectoria de zbor începe întotdeauna în vecinătatea unor puncte singulare ale ecuațiilor diferențiale de mișcare, iar celălalt capăt e în vecinătatea altor puncte singulare. Cu alte cuvinte, este necesar să se examineze setul de soluții care sunt invariabile în raport cu timpul t , care includ punctele staționare, precum și studiul vecinătății lor (vecinătatea punctelor staționare stabile ale ecuațiilor diferențiale).

Rezultatele obținute pot fi utilizate în dezvoltarea de mai departe a studiului problemei newtoniene a n -corpuri cu simetrie incompletă, în procesul de predare a ecuațiilor diferențiale, mecanica cerească, teoria stabilității, modelarea matematică.

Rezultatele științifice principale înaintate spre susținere:

- a fost determinată configurația modelului a 7 corpuri;
- s-au determinat condițiile de existență ale problemei newtoniene a șapte corpuri configurația căreia reprezintă un pătrat în vârfurile căruia se află masele m_1, m_2, m_3, m_4 , două mase m_5 și m_6 se află pe o diagonală a sa, iar al șaptelea corp este plasat în centrul de greutate al sistemului;
- s-au determinat punctele staționare în problema mărginită a 7+1 corpuri;
- s-a studiat stabilitatea punctelor staționare în prima aproximație a modelului;
- s-au determinat condițiile de stabilitate în sens Lyapunov a punctelor staționare stabile în prima aproximație și au fost obținute condițiile de aplicare în practică a rezultatelor.

Aprobarea rezultatelor: Rezultatele lucrării au fost expuse la următoarele conferințe și foruri științifice:

- *Determinarea vitezei unghiulare a mișcării de rotație a cinci corpuri* . Conferința tehnico-științifică a studenților și doctoranzilor consacrată anului fizicii, UTM, noiembrie 17, 2005;
- *Existence condisions of the central configuration in sense Witner for the 4-body problem as an isosceles acute-angled triangle*. CERMCS INTERNATIONAL CONFERENCE OF YOUNG SCIENTISTS affiliated to the International Conference "Computer Algebra in Scientific Computing-2006" (CASC 2006) September 11-15, 2006, Chișinău, Moldova;
- *Проблема существования семейства стационарных решений в ньютоновой проблеме четырех тел, изображаемых равнобедренными треугольниками с массой внутри их* . II международная научно-теоретическая конференция "Роль физико-математических наук в современном образовательном пространстве", май 15-16, Атырау, 2008, Казахстан;
- *Studierea stabilității în prima aproximație a punctelor staționare în problema restrînsă a cinci corpuri in formă de triunghi isoscel*. Conferința jubiliară a doctoranzilor și masteranzilor UTM, noiembrie 17-18, 2006;
- *Despre instabilitatea configurației în formă de triunghi isoscel ascuțitunghic în problema newtoniană a patru corpuri*. Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, noiembrie 15-17, 2007;
- *Determinarea intervalelor de stabilitate ale unor soluții particulare ale problemei newtoniene a patru corpuri*. Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, decembrie 10-12, 2009;
- *Determinarea unor soluții particulare ale problemei newtoniene a șapte corpuri*. Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, noiembrie 17-19, 2010;

- *Studiarea stabilității în forma numerică a punctelor staționare în problema restrânsă a șapte corpuri.* Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, decembrie 08-10, 2011;
- *Studiul problemei stabilității a opt corpuri planare .* Seminarul "Ecuații diferențiale și algebre" de pe lângă Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chișinău); Noiembrie 13, Chișinău, 2018;
- *Cercetarea stabilității în sens Liapunov a soluțiilor staționare în modelul dinamic Albaouy A. –Grebenicov.* Seminarul științifico-metodic "Prof. Petre Osmătescu", Noiembrie 14, Chișinău, 2018;
- *Intervals of linear stability of geometrical parameters in the restricted eight bodies problem with incomplete symmetry.* The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2018), September 20-23, 2018, Chișinău, Moldova;
- *Aplicarea SCS Mathematica la studierea stabilității liniare a punctelor staționare din problema mărginită a opt corpuri.* Seminarul Științific "Probleme actuale de Matematică și Informatică", USM, martie14, 2018;
- *Normalizarea formei pătratice H_2 a hamiltonianului în problema mărginită a 8-corpuri.* Conferință Internațională de Matematică, Informatică și Tehnologii Informaționale (MITI), aprilie 19-21, USARB, Bălți, Moldova, 2018.

1. SCURT ISTORIC AL REZULTATELOR ȘTIINȚIFICE DE BAZĂ REFERITOARE LA PROBLEMA NEWTONIANĂ A MAI MULTOR CORPURI

1.1. Formularea matematică a problemei newtoniene a n corpuri

Problema newtoniană, fără îndoială, poate fi considerată drept una din cele mai renumite probleme ale matematicii clasice, mecanicii și astronomiei. Formularea ei e destul de simplă:

Fie că în spațiul euclidian tridimensional autonom $O\xi\eta\zeta$ avem n ($n=1, 2, 3, \dots$) puncte materiale $P_1, P_2, \dots, P_n$, având masele cunoscute $m_1, m_2, \dots, m_n$, ce se atrag reciproc conform legii de atracție a lui Newton. Trebuie determinate traiectoriile mișcării punctelor materiale cunoscând datele inițiale (poziții și viteze inițiale).

Astfel, problema newtoniană constă în determinarea proprietăților mișcării sistemului izolat din n puncte materiale cu mase cunoscute și care se atrag reciproc după legile lui Newton, știind pozițiile și vitezele inițiale ale acestor puncte în raport cu careva sistem fixat de coordonate.

Modelul matematic al problemei formulate este reprezentat de un sistem obișnuit de ecuații diferențiale neliniare de ordinul $6n$ de forma [21, 24]:

$$\begin{cases} m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \text{grad}_k U, \\ \text{grad}_k U = \frac{\partial U}{\partial \xi_k} \vec{e}_\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta_k} \vec{e}_\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta_k} \vec{e}_\zeta, \\ \vec{r}_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k), k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1.1)$$

$\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ - sunt vectorii unitari ai axelor de coordonate $O\xi, O\eta, O\zeta$.

Funcția scalară U reprezintă potențialul newtonian și se determină din relația:

$$\begin{cases} U = \frac{f}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{m_k m_s}{\Delta_{ks}}, \\ \Delta_{ks} = \sqrt{(\xi_s - \xi_k)^2 + (\eta_s - \eta_k)^2 + (\zeta_s - \zeta_k)^2}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Semnul „, ” de la a doua sumă indică faptul că indicii de sumare k, s niciodată nu sunt egali:

$k \neq s$, f - este constanta gravitațională. În formă scalară sistemul de ecuații diferențiale (1.1) are structura:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_k} = f \sum_{s=1}^n m_s \frac{\xi_s - \xi_k}{\Delta_{ks}^3}, \\ \frac{d^2 \eta_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_k} = f \sum_{s=1}^n m_s \frac{\eta_s - \eta_k}{\Delta_{ks}^3}, \\ \frac{d^2 \zeta_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_k} = f \sum_{s=1}^n m_s \frac{\zeta_s - \zeta_k}{\Delta_{ks}^3}, \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.3)$$

Rezolvarea clasică a acestui sistem de ecuații diferențiale (1.3) poate fi formulată sub forma a două probleme:

Problema Cauchy: Fie că se cunosc coordonatele și vitezele inițiale ale punctelor materiale $P_1, P_2, \dots, P_n$, (pentru $t=0$ se cunosc mărimile):

$$\begin{aligned} \xi_k &= \xi_k(0), \eta_k = \eta_k(0), \zeta_k = \zeta_k(0), \\ \frac{d\xi_k}{dt} \Big|_{t=0} &= \dot{\xi}_k(0), \frac{d\eta_k}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{\eta}_k(0), \\ \frac{d\zeta_k}{dt} \Big|_{t=0} &= \dot{\zeta}_k(0), k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.4)$$

trebuie de determinat soluția particulară a sistemului (1.3), cu alte cuvinte trebuie de găsit funcțiile $\xi_k(t), \eta_k(t), \zeta_k(t)$ de două ori derivabile ce verifică împreună cu derivatele lor condițiile inițiale (1.4) și ecuațiile (1.3).

Problema despre integrala generală: Trebuie determinat un așa sistem de funcții derivabile $\xi_k(t, C_1, \dots, C_{6n}), \eta_k(t, C_1, \dots, C_{6n}), \zeta_k(t, C_1, \dots, C_{6n}), k = 1, 2, \dots, n$ care depind de $6n$ parametri arbitrari $C_1, \dots, C_{6n}$ și care transformă fiecare ecuație a sistemului (1.3) într-o totalitate în raport cu t și $C_1, \dots, C_{6n}$. Se știe că acest sistem de funcții

$$\xi_k(t, C_1, \dots, C_{6n}), \eta_k(t, C_1, \dots, C_{6n}), \zeta_k(t, C_1, \dots, C_{6n}), k = 1, 2, \dots, n$$

se numește soluția generală sau integrala generală a sistemului (1.3). Cunoașterea lui dă posibilitatea, de regulă, relativ ușor de scris soluția problemei Cauchy (cu excepția soluțiilor singulare). Necesitățile astronomiei și mecanicii impun determinarea exactă a pozițiilor și vitezelor inițiale ale tuturor n puncte materiale pentru orice moment de timp t în sistemul de

coordonate $O\xi\eta\zeta$.

Rezolvarea problemelor formulate anterior în raport cu sistemele de ecuații diferențiale (1.3) depinde esențial de valoarea parametrului n .

Cazul $n=1$ (problema unui corp). În spațiul euclidian tridimensional $O\xi\eta\zeta$ se consideră doar un punct material P_1 asupra căruia nu acționează forțe exterioare. Atunci sistemul corespunzător de ecuații diferențiale obținut din sistemul (1.3) pentru $n=1$ are forma:

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = 0, \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = 0, \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = 0.$$

Într-adevăr, în acest caz indecele $k=1$, iar părțile drepte ale ecuațiilor se transformă în zero deoarece alte puncte materiale în spațiul $O\xi\eta\zeta$ nu-s ($m_2=m_3=\dots=m_n=0$). Ecuațiile scrise se integrează ușor:

$$\xi_1(t) = C_1t + C_2, \eta_1(t) = C_3t + C_4, \zeta_1(t) = C_5t + C_6. \quad (1.5)$$

Egalitățile (1.5) exprimă matematic primul postulat al dinamicii newtoniene (sau legea inerției) despre mișcarea rectilinie și uniformă a corpului dacă asupra lui nu acționează forțe exterioare.

Cazul $n=2$ (problema a două corpuri). În spațiul euclidian tridimensional $O\xi\eta\zeta$ se consideră două puncte materiale P_1 și P_2 având masele m_1 și m_2 corespunzător, ce se atrag reciproc conform legii de gravitație a lui Newton. Atunci potențialul newtonian a două corpuri obținut din relațiile (1.2) pentru $n=2$ va avea forma:

$$U = \frac{fm_1m_2}{\Delta_{12}}, \Delta_{12} = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}. \quad (1.6)$$

Ecuațiile diferențiale ale mișcării punctelor materiale P_1 și P_2 au forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{fm_2(\xi_2 - \xi_1)}{\Delta_{12}^3}, \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = \frac{fm_1(\xi_1 - \xi_2)}{\Delta_{12}^3} \\ \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = \frac{fm_2(\eta_2 - \eta_1)}{\Delta_{12}^3}, \frac{d^2\eta_2}{dt^2} = \frac{fm_1(\eta_1 - \eta_2)}{\Delta_{12}^3} \\ \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{fm_2(\zeta_2 - \zeta_1)}{\Delta_{12}^3}, \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} = \frac{fm_1(\zeta_1 - \zeta_2)}{\Delta_{12}^3} \end{cases} \quad (1.7)$$

Observăm că sistemul (1.7) este neliniar în raport cu funcțiile $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ și are ordinul 12. Cu toate acestea el este integrabil în sensul că se poate construi cu ajutorul analizei matematice soluția sa generală - rezultat remarcat de marele Newton.

Cercetările teoretice ale lui Newton au demonstrat că mișcarea eliptică a planetei în jurul Soarelui după legile lui Kepler are loc doar în acel caz când planeta este atrasă de Soare cu o forță de o mărime invers proporțională distanței „Planetă-Soare” și întotdeauna îndreptată spre Soare. Newton a obținut acest rezultat datorită metodelor de calcul diferențial și integral elaborate de el. Putem afirma că matematica superioară s-a născut odată cu dinamica cerească, care mai târziu, la sfârșitul secolului XVIII, la insistența lui Laplace a început să se numească mecanica cerească.

Cu alte cuvinte, Newton a stabilit că legile mișcării planetelor, care au fost descoperite cu mult mai înainte de Kepler, sunt de facto consecințe ale legii gravitației universale. Ținând cont de acestea, el a demonstrat că nu numai planetele se mișcă în jurul Soarelui în prima aproximație în corespundere cu legile lui Kepler, dar și mișcarea sateliților în jurul planetelor, precum și a cometelor în jurul Soarelui se supune acelorași legi dinamice. Evident, aceste afirmații sunt adevărate în domeniul dinamicii fără perturbații, adică în modelul problemei a două corpuri, când nu se iau în considerare atracțiile reciproce dintre planete [43, 56].

Astfel, dacă problema a două corpuri este atât de importantă, este evident faptul că rolul problemei newtoniene a $n \geq 3$ corpuri e și mai mare. În consecință devin tot mai actuale metodele aproximative și exacte de rezolvare a sistemului de ecuații diferențiale (1.3) [16, 18, 24, 53].

Prezintă interes cognitiv analiza amplă și interpretarea „principiului de atracție universală” efectuată de clasicul științelor naturale Pier Simon Laplace, care trebuie menționate pentru a evidenția atât rolul matematic cât și științific al problemei newtoniene a mai multor corpuri.

«Extrema dificultate a problemelor cu privire la lume, care recurg la aproximări, întotdeauna pun la îndoială faptul dacă valoarea atribuită mărimilor va avea sau nu un impact notabil asupra rezultatelor cercetărilor. Atunci când observațiile geometrilor conduceau la ideea că acest efect are loc, ei reveneau la analiza lui. Corectând, ei uneori determinau cauza anomaliilor observate. Astfel se determinau legile și, adesea, înainte de a rezolva inegalitățile se anticipau rezultatele observațiilor deși acestea nu erau încă evidente. Teoriile despre Lună, Saturn, Jupiter și sateliții lor ofereau, după cum putem constata, multe exemple de acest fel. Prin urmare, putem spune că natura însăși a contribuit la dezvoltarea teoriilor astronomice, bazate pe principiul gravitației universale. În opinia mea, aceasta este una dintre cele mai puternice dovezi ale acestui uimitor principiu.

Este oare acest principiu legea primară a naturii sau doar o consecință unei cauze necunoscute? Aceasta e dilema cu privire la proprietățile interne ale materiei care ne cuprinde, ne oprește și ne ține departe de orice speranță de a găsi un răspuns satisfăcător la aceste întrebări.»- constată Laplace. Vom reține faptul că Laplace a folosit termenul «inegalitate» pentru unele formule destul de complicate care descriu coordonatele planetelor.

Orice descoperire de epocă are o istorie bogată și o multime de participanți, coautori, ce și-au adus propria lor contribuție. Din această perspectivă, laconică, dar în același timp, la maxim de amplă caracteristica istorică de descoperire a legii gravitației univesale, enunțată de Laplace, reprezintă un model demn de urmat. El scria în faimosul «Sistemul Lumii»:

«Familiarizarea noastră cu principiul general al mișcării cerești de soarta i-a fost destinată lui Newton. Înzestrându-l cu un talent genial, natura s-a mai străduit încă ca el să trăiască în cele mai favorabile condiții istorice. Descartes a dotat științele matematice cu fructuoasele aplicații ale algebrei în teoria curbelor și funcțiilor variabile. Fermat a pus bazele analizei infinitesimală prin metodele sale de maxim și tangențe. Wallis, Rehn și Huygens recent au găsit legile de transfer ale mișcării. Învățăturile lui Galileo despre căderea corpurilor și ale lui Huygens despre evoluția și forța centrifugă - toate acestea au condus la teoria de mișcare a corpurilor pe curbe. Kepler le-a identificat pe cele care le descriu planetele și a prezis fenomenul de gravitație universală. În cele din urmă, Huk a observat că mișcarea planetelor este rezultatul forței inițiale ale mișcării acordată cu atracția Soarelui. Astfel, mecanica cerească pentru deplină sa prosperare era în așteptarea unui geniu care, reunind și generalizând aceste descoperiri, să fie capabil de a enunța în baza lor legea gravitației. Newton a fost acela care a încununat aceste așteptări prin «Începuturile matematice ale filosofiei naturale».»

Analizând minunatele comentarii ale lui Laplace, concluzionăm că Newton intuitiv a simțit imposibilitatea de integrare a ecuațiilor diferențiale (1.3) pentru problema a trei, patru și mai multe corpuri. Mai mult decât atât, Newton acorda o mare importanță construcției soluțiilor lor aproximative folosind noi «inegalități», adică folosind metoda de aproximări succesive, pe de o parte, și pe de altă parte, el a arătat că traiectoriile eliptice ale planetelor pot fi rezultatul doar a unei astfel de legi a atracției reciproce, în care forța este proporțională cu r^{-2} .

Am formulat problema newtoniană a mai multor corpuri ca problema newtoniană a n puncte materiale. De fapt, toate cele enunțate mai sus sunt valabile pentru n sfere materiale omogene cu raze arbitrare, care în procesul dinamic nu au puncte comune.

1.2. Diferite aspecte ale problemei integrabilității ecuațiilor diferențiale ale problemei a mai multor corpuri

În paragraful anterior s-a discutat problema integrabilității ecuațiilor diferențiale (1.3) pentru $n = 1, 2$. Putem afirma cu alte cuvinte, că sistemul de ecuații (1.3) pentru $n = 1, 2$ este integrabil. În cazul în care numărul de puncte materiale ce se atrag reciproc nu este mai mic de trei ($n \geq 3$), de exemplu, în cazul problemei newtoniene a trei, patru sau mai multe corpuri, tentativele mai multor eminente matematicieni de a integra sistemul de ecuații diferențiale (1.3), ce presupunea determinarea soluției generale, au fost fără succes. De aceea, în contrast cu termenul de «sistem integrabil», a apărut, de asemenea, termenul de «sistem neintegrabil» și, prin urmare, în teoria ecuațiilor diferențiale a apărut prima clasificare a obiectelor matematice, bazate pe ideea de solvabilitate și insolvabilitate ale ecuațiilor. Deoarece cronologic primele ecuații diferențiale descriau dinamica obiectelor cosmice, acest lucru a dus la răspândirea noului termen de «sistem dinamic», iar mai apoi - «sistem dinamic integrabil» și «sistem dinamic neintegrabil». Cu toate acestea, însăși esența termenului de sistem «integrabil» și «neintegrabil» a fost și este într-o stare de continuă evoluție, care i-a dat dreptul lui A. Poincaré filosofic să observe faptul că nu există nici un sistem integrabil sau neintegrabil, dar există sisteme integrabile într-o măsură mai mare sau mai mică [57, 58].

În epoca de dezvoltare rapidă a analizei matematice clasice (sec. al 18-lea și prima jumătate a sec. 19), a fost la modă să se creadă că orice sistem de ecuații diferențiale ordinare, integrala generală (soluția generală) a căruia poate fi obținută prin metoda separării de variabile, sau prin metoda cuadraturilor, poate fi atribuit la categoria de sisteme integrabile [14, 57, 60]. Așa păreau lucrurile doar la prima vedere, însă analiza mai amplă a arătat că această tratare a problemei are lacune esențiale. Deseori, chiar dacă se poate construi integrala generală a ecuațiilor diferențiale sub forma unei totalități de integrale simple nedeterminate, identificarea coordonatelor ca o funcție de timp este imposibilă fără operația de «transformare a integralelor».

Într-adevăr, chiar și în cazul celei mai simple probleme clasice - problema oscilațiilor pendulului matematic într-un câmp gravitațional omogen, care este descrisă de ecuația diferențială [35, 52, 60, 64]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 \sin x = 0,$$

unde a^2 - este o constantă pozitivă, x - amplituda pendulului (unghiul de deviere a pendulului de la poziția de echilibru), cu ajutorul unor operații elementare nu este posibil de a obține în mod explicit funcția $x(t)$. Pentru a rezolva această problemă Legendre a fondat teoria integralelor eliptice și Jacobi-Weierstrass teoria funcțiilor eliptice.

În acest sens, A. Wintner a remarcat faptul că de foarte multe ori «extracția» din soluția generală a soluției particulare nu este posibilă fără a recurge la transformarea cuadraturilor, ce necesită, în general, o analiză mult mai complexă decât teorema de existența a ecuațiilor diferențiale ordinare» [61].

Metoda cuadraturelor a fost necesară, în primul rând, pentru a integra ecuațiile diferențiale ale problemei a trei corpuri și care la rândul său a și demonstrat mărginirea și neefectivitatea ei. După o căutare fără succes a integralelor prime ale ecuațiilor diferențiale ale problemei a trei corpuri, ce aveau ordinul 18, Bruns a demonstrat [20, 44] remarcabila teoremă depre inexistența a altor integrale prime algebrice în problema a $n \geq 3$ corpuri, în afară de primele zece integrale clasice cunoscute: șase integrale prime de mișcare a centrului de masă a celor trei puncte materiale, trei integrale de conservare a momentului cantității de mișcare și integrala de conservare a energiei totale a sistemului.

Ideea este că structura analitică a integralelor prime enumerate consta din funcții algebrice de coordonate speciale, așa că se pare logică căutarea celorlalte opt necunoscute (pentru $n = 3$) tot în forma de funcții algebrice. Teorema Bruns a dat un răspuns negativ la această întrebare. Este adevărat că acest răspuns nu poate fi considerat o dovadă a faptului neintegrabilității ecuațiilor diferențiale ale problemei a $n \geq 3$ corpuri, deoarece Bruns nu a demonstrat lipsa de integrale prime «algebrice» în orice sistem de variabile dependente (în orice spațiu de fază sau de configurare [42, 49]), ci doar numai într-un anumit spațiu de fază hamiltonian [21, 31, 45, 49]. Acesta este spațiul coordonatelor rectangulare absolute ale corpurilor și impulsurile corespunzătoare calculate după normele formalismului hamiltonian. Strict vorbind, rezultatul lui Bruns este relevant doar la problema a trei corpuri, așa cum una din

lemele ajutătoare a fost demonstrată numai pentru cazul $n = 3$. Lemă menționată mai sus a fost demonstrată pentru orice $n > 3$ de matematicianul francez Penleve doar în anul 1898.

Dezvoltarea paralelă a teoriei analitice a ecuațiilor diferențiale ordinare, stimulatorul de bază a careia a fost teoria perturbațiilor pentru problemele dinamicii cosmice create de Euler, Lagrange [29, 45] și Laplace, a dat naștere la cea de-a doua interpretare a problemei integrabilității. În cadrul acestei abordări, problema ar trebui să fie considerată integrabilă dacă se poate construi soluția generală a ecuațiilor diferențiale în forma de serii infinite (în special, de puteri sau trigonometrice), care converg într-un interval parametric apriori dat al sistemului dinamic, precum și pentru orice, inclusiv și infinit, interval de timp. Această formulare este în deplină concordanță cu rezultate remarcabile ale matematicianului finlandez K. Zundman. El, bazându-se pe teorema clasică a lui Cauchy-Picard, a construit o soluție generală a ecuațiilor diferențiale ale problemei a trei corpuri în formă de serie de puteri după puterile unui careva «timp regularizat» s , ce converge în intervalul unitar $0 \leq s \leq 1$. Ultimului interval de variație a «timpului» s îi corespunde intervalul infinit de timp primar $-\infty < t < \infty$, astfel sumele seriilor lui Zundman exprima soluția exactă a ecuațiilor problemei a trei corpuri pentru orice puncte inițiale din spațiul inițial absolut euclidian tridimensional și viteze inițiale ale maselor m_1, m_2, m_3 . Cu toate acestea, viteza de convergență a unor astfel de serii, așa cum afirma matematicianul francez J. Beloritsky, este foarte mică, de aceea chiar și în prezent, având cele mai avansate calculatoare, utilizarea lor nu este posibilă.

În ceea ce privește noua interpretare a problemei integrabilității a ecuațiilor diferențiale ale problemei mai multor corpuri, Poincaré a demonstrat teorema despre inexistența integralelor prime univoce a acestor ecuații, scrise în variabile canonice speciale, în care energia totală (Hamiltonianul) a celor trei corpuri este o funcție analitică, periodică în aceste coordonate [49, 56, 57].

Dacă nu există integralele prime ale problemei a trei corpuri în formă de funcții algebrice a căror variabile să fie coordonatele euclidiene absolute și impulsurile corespunzătoare, atunci, evident, apare întrebarea despre existența integralelor prime ale ecuațiilor diferențiale sub formă de alte funcții sau integrale ale căror argumente sunt diferite de cele enumerate mai sus. Răspuns la această întrebare, menționată mai sus, a dat teorema lui Poincaré.

Teorema 1.1. Teorema Poincaré. Fie că este dat sistemul hamiltonian autonom de ordinul $2n$ de forma:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (1.9)$$

cu hamiltonianul

$$H(p, q) \equiv H_0(p) + \mu H_1(p, q), \quad (1.10)$$

$$H_1(p, q + (2\pi)) \equiv H_1(p, q), \quad (1.11)$$

analitic în domeniul de dimensiunea $(2n+1)$:

$$G_{2n+1} = \left\{ p \in G_n, \| \operatorname{Im} p \| < \rho < 1, \| \operatorname{Im} q \| = \sum_{s=1}^n | \operatorname{Im} q_s |, 0 \leq \mu \leq \mu_0 < 1 \right\}, \quad (1.12)$$

2π - periodic în raport cu toate coordonatele fazice $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$,

G_n - varietate toroidală alcătuită din toruri de dimensiunea n .

Dacă hamiltonianul neperturbat $H_0(p)$ este astfel încât determinantul lui $\operatorname{Hess} \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_k \partial p_s} \right| \neq 0$

pentru orice valori $p \in G_n$, atunci sistemul hamiltonian (1.9) în afară de integrala primă evidentă

$$H(p, q, \mu) = C \quad (1.13)$$

nu mai posedă altă integrală primă univocă analitică în orice alt domeniu $G_{2n+1}^* \subset G_{2n+1}$.

Din această teoremă rezultă că în varianta planetară a problemei a trei corpuri (în care două mase din trei sunt esențial mai mici în raport cu a treia - condiție ce garantează existența parametrului mic μ în hamiltonian) integrala energiei și cele trei integrale de conservare a momentului cantității mișcării sistemului reprezintă integralele prime univoce. Alte integrale prime în afară de cele enumerate sistemul (1.9) nu are.

Problema integrabilității ecuațiilor dinamice de tipul (1.9) Poincaré a formulat-o în termeni de conversie în felul următor:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}(P)}{\partial Q} = 0, \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(P)}{\partial P} = \tilde{\omega}(P), \quad (1.14)$$

sau în formă de transformări canonice:

$$\begin{aligned} (p, q) &\rightarrow (P, Q), \\ p &= \varphi(P, Q), q = \psi(P, Q) \end{aligned} \quad (1.15)$$

care reduc sistemul (1.9) la sistemul (1.14). În ultimul sistem noul hamiltonian $\tilde{H}(P)$ depinde doar de impulsurile noi $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ și nu depinde de noile variabile fazice „unghiulare”

$Q=(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ și prin urmare sistemul (1.14) este integrabil.

Construcția transformărilor canonice (1.15) e posibilă doar sub formă de serii Fourier în raport cu variabilele „unghiulare” Q , cu coeficienți ce depind de noile impulsuri P , dar în acest caz apare problema convergenței acestor serii. Cercetările lui Poincaré au arătat că aceste serii sunt în general divergente, de aceea este inadmisibilă aplicarea lor. Astfel problema integrabilității rămânea nerezolvată. Dar după apariția în anii 40 ai secolului trecut a teoremelor lui K. Siegel din domeniul teoriei numerelor s-a dovedit că teorema lui Poincaré poate servi drept bază a unei noi direcții fundamentale în problema integrabilității sistemelor dinamice hamiltoniene, care poate fi numită „problema integrabilității pentru majoritatea condițiilor inițiale” sau teoria KAM, a cărei fondatori au fost Kolmogorov A.N., Arnold V.I. și Moser Ju..

Realizările fundamentale ale teoriei KAM referitoare la problema integrabilității sistemelor hamiltoniene de forma (1.9) afirmă că aproape pentru toate punctele din domeniul G_{2n+1} (1.12) transformările (1.15) există și, prin urmare, sistemul (1.14) echivalent sistemului hamiltonian inițial (1.9) este integrabil. Acestea au fost publicate în diverse articole și monografii, printre care menționăm [49, 50, 51, 64].

În limitele teoriei KAM transformările canonice $(p, q) \rightarrow (P, Q)$, care transformă sistemul (1.9) în (1.14), constituie un șir infinit convergent de substituții canonice nedegenerate:

$$(p, q) \leftrightarrow (p^{(1)}, q^{(1)}) \leftrightarrow (p^{(2)}, q^{(2)}) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (p^{(\infty)}, q^{(\infty)}) \equiv (P, Q). \quad (1.16)$$

Varietățile, pe care converg transformările canonice, reprezintă un lanț de incluziuni de tip infinit [45]:

$$G_{2n} \supset G_{2n}^{(1)} \supset G_{2n}^{(2)} \supset \dots \supset G_{2n}^{(\infty)}, \quad (1.17)$$

în care varietatea finală nu e vidă

$$G_{2n}^{(\infty)} \neq \emptyset. \quad (1.18)$$

Din păcate, varietatea de fază $G_{2n}^{(\infty)}$, așa cum s-a spus, e peste tot densă în varietatea inițială G_{2n} , dar Siegel a arătat că măsura Lebesgue a varietății $\overline{G_{2n}} = G_{2n} \setminus G_{2n}^{(\infty)}$ e foarte mică în comparație cu măsura întreagă a G_{2n} , egală cu 1. Structura topologică a varietății $G_{2n}^{(\infty)}$ nu permite la moment de a dezvolta metode constructive pentru alcătuirea șirului convergent de transformări (1.16) care ar permite a «scrie» soluțiile exacte ale sistemului hamiltonian (1.9). Principalul obstacol în calea acestui fapt este că, dacă $n \geq 2$ (sistemul dinamic are cel puțin două grade de

libertate) atunci apar, în mod inevitabil, «rezonanțele» frecvențelor sistemului hamiltonian liniarizat. Acest lucru înseamnă că numerele – (frecvențele) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ verifică relația:

$$(k, \omega) = 0 \quad (1.19)$$

unde $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ - vector cu componentele k_s întregi, egale cu $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

1.3. Ideile lui Poincaré despre integrabilitatea asimptotică a ecuațiilor diferențiale

Înțelegând esența rezolvării problemei integrabilității în sensul exact, Poincaré a sugerat o altă interpretare a acesteia, numită de el problema integrabilității asimptotice, care are importanță atât teoretică, cât și aplicativă.

Interpretarea acestei abordări este cel mai bine explicată de însuși Poincaré în nemuritoarele «Metode noi», în care el a scris:

«Geometrii și astronomii înțeleg în mod diferit convergența. Geometrii sunt interesați în totalitate de rigoarea calculelor în cauză și adesea sunt destul de indiferenți la lungimea calculelor complexe (realizarea cărora ei o presupun, dar nu gândesc prea mult despre reala lor punere în aplicare), ei declară că careva serie va converge dacă suma termenilor săi tinde la o anumită limită, chiar și în cazul în care primii termeni ai seriei descresc foarte încet. În contrast, cu aceștia, astronomii spun că o serie e convergentă dacă, de exemplu, primii douăzeci de termeni din această serie descresc foarte rapid, în ciuda faptului că ceilalți termeni următori ai săi este cresc nemărginit.

Ca exemplu, vom considera două serii, termenii generali ai cărora au forma

$$\frac{1000^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \text{ și } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1000^n}.$$

Geometrii vor spune că prima serie converge mai repede, așa cum al milionulea termen este cu mult mai mic de $1 / 999999$, iar cea de-a doua serie aceștia o vor considera divergentă, așa cum termenul general al ei crește la nesfârșit.

Astronomii, pe de altă parte, vor considera prima serie divergentă, deoarece primii 1000 de termeni din această serie creasc, și cea de-a doua serie convergentă, așa cum primii 1000 de termeni ai săi descresc foarte rapid.

Ambele puncte de vedere sunt legale: primul - în studiile teoretice, cel de-al doilea - în aplicații numerice, fiecare din ele sunt dominante individual, dar în diferite domenii și hotarele dintre aceste zone ar trebui să fie în mod clar delimitate.

Astronomi nu întotdeauna știu exact sfera de aplicare a metodelor lor, dar ei rareori fac greșeli. Această abordare, aplicată de ei, de obicei se află în limitele în care aceste metode pot fi aplicate. În plus, intuiția, le va permite să prevadă rezultatul corect, dar în cazul în care s-ar fi făcut o greșală, atunci compararea rezultatului cu observațiile înlătură orice nedreptate.

Totuși, cred că ar fi potrivit de a face pentru această problemă câteva precizări, și anume aceasta am de gând să fac, chiar dacă prin natura sa, problema în cauză nu este foarte potrivită pentru acest scop. Pentru a evita orice neînțelegere de la bun început, vreau să avertizez că în cazul în care nu este specificat contrariul, voi folosi cuvântul de convergență în sensul în care acesta este înțeles de geometri ».

În scopul punerii în aplicare a părții programului, care se referă la «astronomi», Poincaré a creat o teorie a seriilor asimptotice (reprezentari asimptotice), în baza căreia el și adepții lui au elaborat teoria asimptotică a oscilațiilor neliniare, dinamica analitică cu rezonanțe și dinamica cosmică [11, 59].

Potrivit lui Poincaré, vom considera seria infinită de puteri de forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(t, \mu), \quad (1.19)$$

în care fiecare termen este definit în $G_2 = \{(t, \mu) : t \in [0, T], \mu \in [0, \mu^*]\}$.

Vom nota suma parțială prin:

$$S_n(t, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu^k z_k(t, \mu) \quad (1.20).$$

Definiția 1.1. În cazul în care în G_2 există o funcție $S(t, \mu)$, astfel încât, pentru orice $n > 0$ există limita raportului

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{S(t, \mu) - S_n(t, \mu)}{\mu^n} = 0, \quad (1.21)$$

vom spune că seria (1.19) este reprezentarea asimptotică a funcției $S(t, \mu)$ în G_2 .

Poincaré de asemenea a propus pentru definiția (1.21) a folosi un simbol al identității de egalitate

$$S(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(t, \mu) \quad (1.22)$$

și a numit astfel de relații egalități asimptotice.

Fiecare serie de puteri convergentă este, bineînțeles, și serie asimptotică, dar afirmația inversă este în mod clar incorectă. Din această definiție rezultă o foarte importantă egalitate

$$S(t, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu^k z_k(t, \mu) + O(\mu^n), \quad (1.23)$$

unde $O(\mu^n)$ este un infinit mic de ordin mai mare ca μ^n .

Două serii asimptotice pot fi adunate și înmulțite, adică, dacă

$$S_1(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k^{(1)}(t, \mu), \quad (1.24)$$

$$S_2(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k^{(2)}(t, \mu), \quad (1.25)$$

atunci

$$S(t, \mu) = S_1(t, \mu) + S_2(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(t, \mu), \quad (1.26)$$

$$\prod(t, \mu) = S_1(t, \mu) S_2(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \prod_k(t, \mu), \quad (1.27)$$

unde

$$z_k(t, \mu) = z_k^{(1)}(t, \mu) + z_k^{(2)}(t, \mu), \quad (1.28)$$

$$\prod_k(t, \mu) = \sum_{s=0}^k z_k^{(1)}(t, \mu) z_{k-s}^{(2)}(t, \mu). \quad (1.29)$$

Dacă fiecare termen al seriei asimptotice (1.19), îl vom integra în raport cu t în intervalul $[t_1, t_2] \subset [0, T]$, atunci va avea loc egalitatea asimptotică

$$\int_{t_1}^{t_2} S(t, \mu) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \int_{t_1}^{t_2} z_k(t, \mu) dt, \quad (1.30)$$

adică seriile asimptotice pot fi integrate termen cu termen, iar rezultatul este din nou o serie asimptotică.

Operațiile inverse asupra seriilor asimptotice (împărțirea seriilor și diferențierea termen cu termen) sunt, de asemenea, posibile, dar în anumite condiții suplimentare.

Dacă $z_0^{(2)}(t, \mu) \neq 0$ în G_2 atunci:

$$\frac{S_1(t, \mu)}{S_2(t, \mu)} \equiv D(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k d_k(t, \mu), \quad (1.31)$$

unde coeficienții $d_k(t, \mu)$ se determină consecutiv din sistemul infinit de ecuații algebrice:

$$\begin{aligned} d_0 z_0^{(2)} &= z_0^{(1)}, \\ d_1 z_0^{(2)} &= z_1^{(1)} - d_0 z_1^{(2)}, \\ d_2 z_0^{(2)} &= z_2^{(1)} - d_0 z_2^{(2)} - d_1 z_1^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ d_k z_0^{(2)} &= z_k^{(1)} - d_0 z_k^{(2)} - d_1 z_{k-1}^{(2)} - \dots - d_{k-1} z_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

Așa cum a arătat Poincaré, diferențierea termen cu termen a seriei asimptotice (1.22), chiar dacă fiecare termen al serie (1.19) este o funcție diferențiabilă, în general, este imposibilă.

Cu alte cuvinte, seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{dz_k(t, \mu)}{dt}$$

și funcția $\frac{dS}{dt}$ pot fi definite astfel încât

$$\frac{dS(t, \mu)}{dt} \neq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{dz_k(t, \mu)}{dt}. \quad (1.33)$$

Cu toate acestea, Poincaré a arătat că seriile asimptotice pot fi folosite la construirea soluțiilor ecuațiilor diferențiale în următorul sens. Fie că funcția $z(t, \mu)$ diferențiabilă după t este soluție a ecuației

$$\frac{dz}{dt} = Z(z, t, \mu), \quad (1.34)$$

iar seria

$$D(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(t, \mu) \quad (1.35)$$

verifică formal ecuația (1.34) (fără a se ține cont de faptul dacă aceasta converge sau diverge).

Vom scrie egalitatea asimptotică:

$$\frac{dD(t, \mu)}{dt} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{dz_k(t, \mu)}{dt}. \quad (1.36)$$

Se poate afirma că

$$\frac{dz(t, \mu)}{dt} \equiv \frac{dD(t, \mu)}{dt}. \quad (1.37)$$

Vom formula acum egalitatea asimptotică pentru funcții compuse. Fie că funcția $F(z)$ este analitică în careva vecinătate a punctului $z = 0$. Sa presupunem de asemenea că există egalitatea analitică

$$x(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t, \mu). \quad (1.38)$$

Atunci, are loc următoarea egalitate asimptotică:

$$F(x(t, \mu)) = F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t, \mu)\right). \quad (1.39)$$

Poincaré a arătat de asemenea că proprietățile și relațiile de mai sus pentru reprezentările asimptotice pot fi generalizate cu ușurință pentru cazul funcțiilor de mai multe variabile, când argumentul $z = (z_1, \dots, z_n)$ are dimensiunea n , fapt foarte important la rezolvarea ecuațiilor diferențiale.

Următoarea teoremă a lui Poincaré servește drept baza teoretică pentru aplicarea descompunerilor asimptotice în teoria ecuațiilor diferențiale ordinare.

Teorema 1.2. Fie dată ecuația

$$\frac{dz}{dt} = Z(z, t, \mu) \quad (1.40)$$

și condiția inițială

$$z(0, \mu) = z_0. \quad (1.41)$$

Presupunem, în plus:

- 1) vector-funcția $Z(z, t, \mu)$ este definită, continuă și mărginită în domeniul $G_{n+2} = G_{n+1} \times [0, T]$ de dimensiunea $(n + 2)$, analitică în raport z, μ în domeniul $G_{n+1} = z \in G_n, \mu \in [0, \mu^*]$;
- 2) termenii seriei (1.35) sunt analitici pentru $\mu \in [0, \mu^*]$ și verifică condițiile:

$$z_k(0, \mu) = 0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.42)$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\mu_0 \in [0, \mu^*]$, astfel încât pentru toți $\mu \in [0, \mu_0]$ și

$t \in [0, T_0 \leq T]$ are loc relația

$$\|z(t, \mu) - S_p(t, \mu)\| \leq \varepsilon \quad (1.43)$$

unde $z(t, \mu)$ este soluția exactă a ecuației (1.40) cu condițiile inițiale (1.41),

$$S_p(t, \mu) = \sum_{k=0}^p \mu^k z_k(t, \mu). \quad (1.44)$$

Această remarcabilă teoremă este o justificare matematică a aplicabilității seriilor divergente în teoria mișcării perturbate a planetelor, asteroizilor și sateliților din sistemul Solar pe un interval finit de timp, a cărei valoare este de ordinul $\frac{1}{\mu}$, unde μ este parametrul mic caracteristic fiecărei probleme concrete. De exemplu, în teoriile de mișcare a planetelor mari din Sistemul Solar, construite de Leverrier și Newcomb, această perioadă de timp e egală cu 1000 de rotații a lui Jupiter în jurul Soarelui, adică, de aproximativ 11000 de ani. Acest comentariu ar trebui să fie înțeles în felul următor: soluțiile aproximative ale ecuațiilor diferențiale de mișcare ale planetelor mari, prezentate, în general, prin serii divergente de puteri în raport cu excentricitatea, înclinația și raportul dintre semiaxele mari ale orbitelelor neperturbate ale planetelor, construite de Leverrier și Newcomb, pe intervalul de timp de 11000 de ani, reprezintă soluțiile lor exacte, dacă acestea ar putea fi găsite. Aceste afirmații teoretice sunt rezultatul unor teoreme ale lui E.A. Grebenicov, Yu.A. Ryabov, S.G. Juravlev, V.A. Prihodiko, S.V. Mironov [17, 22, 31, 59, 67, 93].

Deseori apare necesitatea de a descrie dinamica nu cantitativă a sistemului ci calitativă, care dă o descriere a sistemului în ansamblu [32, 55, 73, 75, 77, 82]. În termeni matematici care reflectă situația dată – aceasta este echivalență topologică a două sisteme. Esenta acestei definiții este că două astfel de sisteme sunt denumite echivalente topologic în vecinătatea unui careva punct de fază dacă ele au portrete similare de fază [74]. De asemenea, dacă facem referire la Poincaré, el a fost primul care a propus o clasificare a punctelor singulare ale ecuațiilor diferențiale liniare în plan și, care în continuare a fost dezvoltată în lucrările fundamentale ale lui A.M. Lyapunov, Dzh. Birkhoff, A.A. Andronov, V.V. Nemîțkii și V.V. Stepanov, S. Lefșet, G. N. Dubošin, A.T. Fomenko ș.a.

1.4. Determinarea soluțiilor particulare exacte

În pofida faptului că studiul integrabilității ecuațiilor diferențiale ale problemei newtoniene a trei și mai multe corpuri a fost însoțit, de regulă, de eșec, pentru mulți oameni de știință din trecut el a stimulat o profundă și diversă cercetare într-o varietate de domenii: în teoria funcțiilor de variabilă reală și complexă, teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale și, mai presus de toate, în teoria stabilității, în calcul variațional, în calculul numeric și în alte domenii ale matematicii. Nu va fi, bineînțeles, o exagerare să spunem că problema mai multor corpuri deseori dictata moda la noi cercetari matematice și aplicații în domeniul mecanicii și astronomiei.

Evidentă, în această situație, a fost problema determinării soluțiilor parțiale exacte ale ecuațiilor diferențiale ale problemei a mai multor corpuri. Wintner [61, 88] subliniază faptul că «pentru dinamica, este important să se identifice toate integralele independente, care sunt izolate», așa cum faptul că careva dintre integralele prime a sistemului de ecuații diferențiale este algebrică, având partea dreaptă algebrică, este o condiție suficientă, dar nu și o condiție necesară a sa de izolare.

Primele soluții exacte ale problemei a trei corpuri au fost găsite încă în sec al XVIII-lea, de către Euler în 1766 și Lagrange în 1772. Primul savant a demonstrat existența soluțiilor coliniare exacte ale ecuațiilor diferențiale pentru problema a trei corpuri în cazul când masele exacte m_1, m_2, m_3 , ce se atrag reciproc, pentru toți $-\infty < t < +\infty$ se află imobil pe careva dreaptă, ce se rotește uniform în jurul centrului de greutate comun, evident amplasat pe aceeași dreaptă. Lagrange a arătat că ecuațiile diferențiale pentru problema a trei corpuri admit o așa soluție exactă pentru careva mase m_1, m_2, m_3 (luate arbitrar) și care pentru toți $-\infty < t < +\infty$ formează un triunghi echilateral, ce se rotește uniform în jurul centrului comun de greutate din careva plan nevariabil. Viteza unghiulară de rotație se determină univoc de valorile maselor și dimensiunile liniare ale configurației. Evidentă devine determinarea a unor astfel de soluții exacte ce posedă o careva simetrie geometrică și în modelul în care una din mase este egală cu zero. Acest model a fost numit de Jacobi problema mărginită a trei corpuri [20], care a devenit mai apoi cea mai renumită problemă matematică a mecanicii cerești.

Creatorii teoriei stabilității, Lyapunov și Poincaré, au accentuat în mod repetat, că studiul stabilității soluțiilor particulare ale problemei a trei corpuri nu poate fi dusă până la sfârșit

în limitele teoremelor clasice enunțate de ei. Cu toate acestea, dezvoltarea teoriei stabilității, inclusiv și apariția teoriei KAM, se datorează se pare celui mai simplu model- problema mărginită a trei corpuri. Fiecărei soluții particulare ale ecuațiilor problemei a mai multor corpuri i se poate pune în corespondență structura geometrică, numită configurație în spațiul Euclidean tridimensional. Printre acestea din urmă a fost evidențiată o clasă a așa-numitelor configurații centrale, caror li s-au consacrat o mulțime de cercetări.

Laplace primul a propus definiția intuitivă a configurației centrale, folosită de mulți matematicieni, pe viitor, pentru determinarea a altor soluții exacte ale problemei a $n > 3$ corpuri. În special, A. Fransen arătat că în problema a trei corpuri există soluții exacte spațiale și plane, geometric descrise prin triunghiuri isoscele în schimbare, care nu păstrează proprietatea de asemănare, dar R. Lemman-Filges a arătat că pentru $n = 4$ nu există decât o singură configurație centrală tridimensională spațială – tetraedrul regulat, dar numai atunci când $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$. Analiză fundamentală a proprietăților configurațiilor centrale în interpretarea lui Lagrange și Laplace aparține lui O. Dziobek [91, 92], care a cercetat amănunțit întrebarea cu privire la numărul configurațiilor centrale coliniare în funcție de parametrul n și a arătat că pentru orice valoare a lui n printre configurațiile centrale necoliniare există poligoane regulate (mai exact, poligoane regulate cu n - unghi) sau poligoane regulate cu $(n-1)$ – unghiuri, în centrul cărora se poate afla o careva masă arbitrară, iar în vârfurile lor - mase egale între ele. Interesante sunt rezultatele recente ale lui A. Albaouy și N. Zemtsova [24, 67, 90] cu privire la existența unor noi configurații centrale în problema a 4-corpuri, prima - sub forma unui triunghi isoscel cu cea de-a patra masă localizată pe bisectoare (toate cele patru mase sunt egale) și cea de-a doua – sub formă de romb cu două câte două mase egale între ele. În monografia [24] este dat un rezultat cu privire la non-existența unor configurații centrale în formă de dreptunghiuri, trapeze și deltoide.

O contribuție fundamentală la această direcție de cercetare a prezentat renumitul matematician american Wintner [61, 88], care a propus cea mai corectă definiție a «configurației centrale», în baza căreia a reușit să obțină rezultate importante în teoria soluțiilor homografice ale ecuațiilor diferențiale ale dinamicii Newtoniene.

Definiția 1.2. [21, 24]. Figura spațială $P_1P_2...P_n$, în vârfurile căreia se află punctele mareriale $P_1, P_2, ..., P_n$ de mase $m_1, m_2, ..., m_n$, se numește configurație centrală în sistemul euclidian baricentric de coordonate $G \xi \eta \zeta$ (G – e baricentrul sistemului de corpuri menționat), dacă forța

newtoniană de atracție $\vec{F}_k$, ce acționează asupra fiecărui corp P_k ($k=1,2,\dots,n$) de masă m_k în momentul de timp t_0 , e proporțională masei m_k și vectorului $\vec{r}_k$, ce determină poziția corpului P_k în sistemul $G\xi\eta\zeta$, în timp ce coeficientul de proporționalitate σ este unul și același pentru toate corpurile P_k ($k=1,2,\dots,n$).

Această definiție, în mod evident, se exprimă prin egalități vectoriale:

$$\vec{F}_k = \sigma m_k \vec{r}_k, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (1.45)$$

și în baza ecuațiilor diferențiale ale problemei newtoniene a n corpuri pentru momentul de timp t_0 iau forma:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sigma \vec{r}_k, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (1.46)$$

Ele sunt complet determinate dacă se cunoaște expresia analitică pentru coeficientul de proporționalitate σ ,

$$\sigma = -\frac{U}{I}, \quad (1.47)$$

unde U este potențialul newtonian al sistemului din n -corpuri $P_1, P_2, \dots, P_n$, iar I - momentul baricentric sumat de inerție al lui. Sistemul de ecuații funcționale neliniare:

$$\overrightarrow{\text{grad}}_k U = -\frac{m_k U}{I} \vec{r}_k, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (1.48)$$

determină toate configurațiile centrale ale sistemului din n corpuri în momentul de timp t_0 . Sistemul de ecuații (1.48) este numit sistemul lui Lagranje-Wintner. Trecerea de la configurația centrală la soluția homografică a ecuațiilor dinamicii e simplă și devine evidentă definiția ultimei noțiuni: soluția homografică - este o așa soluție care în orice moment dat de timp t «descrie» configurația centrală.

Folosind noțiunea matematică de asemănare a spațiului euclidian n -dimensional [61, 88], Wintner a determinat soluția homografică în felul următor:

Definiția 1.3. [21, 24] Soluția problemei a n corpuri $P_k(\xi_k(t), \eta_k(t), \zeta_k(t))$, ($k=1, 2, \dots, n$) în sistemul baricentric de coordonate $G\xi\eta\zeta$ se numește homografică dacă configurația, formată de corpurile P_k , e asemenea sie însăși pentru toți $t \geq 0$.

Astfel de soluții sunt, de exemplu, soluțiile staționare de tip poziții de echilibru în problema mai multor corpuri de mase egale, reprezentate prin poligoane regulate ce se rotesc

uniform, cu dimensiuni constante, în jurul centrului de simetrie și soluțiile staționare reprezentate de aceleași poligoane, dar nu în spațiul euclidian, ci în spațiul lui Nehvil.

Dacă vom trece de la spațiul Nehvil la spațiul Euclidean, soluțiile homografice menționate se descriu prin poligoane regulate asemenea și înseși ce se rotesc cu viteză unghiulară variabilă, iar orbita fiecăruia din corpuri (cu excepția celui central) este o orbită kepleriană (elipsă, parabolă sau hiperbolă). În afară de soluțiile homografice Wintner a introdus conceptul de soluție omotetică, caracterizată prin persistența asemănării configurației în lipsă de rotație.

Astfel, putem explora întrebarea cu privire la existența soluțiilor homografice tridimensionale și omotetice în problema spațială a mai multor corpuri, și de același tip, dar bidimensionale (configurații plane) și unidimensionale (existența unor configurații alcătuite din puncte materiale ce se atrag reciproc pe aceeași linie, care poate fi fixată în spațiul Euclidian tridimensional sau ce se rotește jurul unui punct- centru de masă a punctelor ce gravitează). Soluțiile spațiale omotetice sunt soluțiile problemei newtoniene a patru, șase, opt, douăsprezece și douăzeci de corpuri, care formează în momentul inițial de timp configurația în formă de poliedre regulate ale lui Platon. Condițiile de existență a unor astfel de soluții este egalitatea maselor din vârfurile configurației și egalitatea vitezelor radiale inițiale, îndreptate fie că în exteriorul, fie că în interiorul acestor poliedre. Până în prezent nu este dovedită existența soluțiilor omotetice în problema a mai multor corpuri, configurațiile inițiale ale cărora sunt poliedre semiregulate. Un rezultat fundamental este afirmația că soluții homografice tridimensionale (cu rotație) în problema a mai multor corpuri nu există, de aceea în centrul atenției al cercetătorilor a fost axat studiul configurațiilor bidimensionale și unidimensionale (coliniare).

Matematicienii francezi Elmabsut B. și D. Bang au obținut o generalizare interesantă a rezultatelor lor referitoare la existența unor puncte staționare de tipul punctelor de echilibru, care formează nu unul ci mai multe poligoane regulate, ce se mișcă în jurul centrului comun de greutate cu una și aceeași viteză unghiulară în unul și același plan. Autorii au adus suficiente condiții care garantează existența soluțiilor particulare exacte ale ecuațiilor diferențiale ale problemei mai multor corpuri, care sunt poziții de echilibru ale sistemului în spațiul fizic Euclidian de rotație. Această construcție dinamică poate fi un generator al unui nou model dinamic - problema mărginită a mai multor corpuri. Ea a fost numită «problema mărginită a mai multor corpuri cu simetrie incompletă». Determinare soluțiilor particulare exacte (punctelor

staționare) ale sistemului de ecuații diferențiale ale problemei mărginite se reduce, după cum se arată în [21, 24], la rezolvarea sistemelor complexe de ecuații algebrice. Problema de solvabilitate a unor astfel de ecuații reprezintă o amplă, destul de sofisticată analiză, care, practic, se poate face doar cu ajutorul unor noi sisteme de programare.

1.5. Despre stabilitatea soluțiilor homografice ale problemei newtoniene mărginite

Se cunosc multiple definiții și interpretări a noțiunii de stabilitate a soluției ecuației diferențiale [30, 54, 62]. Destul de răspândită în literatura matematică este și noțiunea (echivalentă cu cea anterioară) de stabilitate a mișcării. Prima noțiune se folosește mai des în cercetările matematice, iar a doua este utilizată mai mult de specialiștii ce activează în domeniile aplicative precum mecanica, fizica și multe alte ramuri cu caracter de aplicație ale științelor tehnice.

Se poate considera că termenul stabilitate a apărut în limbajul uzual probabil odată cu vorbirea umană, dar aplicarea sa în discursuri științifice o putem atribui la epoca antică, când a activat Ptolomeu. Sunt de neînchipuit conversațiile înțelepților antici despre Universul văzut de ei fără discuțiile referitoare la vârsta și dimensiunea lui.

Dacă însă considerăm apariția teoriei stabilității ca domeniu al matematicii, atunci aceasta s-a datorat în mare măsură lucrărilor a mai multor matematicieni și fizicieni renumiți din trecut: Euler, Lagrange, Laplace, Poisson, Poincaré, referitoare, în particular, la stabilitatea orbitelor planetare și în general la sistemele dinamice ale punctelor materiale ce gravitează reciproc.

Rezultatele lor au fost generalizate și dezvoltate de elevul cunoscutului matematician P. L. Cebîșev, renumitul matematician și mecanic A. M. Lyapunov.

În prezent nu există cercetări teoretice sau aplicative în fizică, mecanică, astronomie și alte domenii ale cunoașterii în care să nu se discute problema stabilității proceselor neliniare de diversă natură.

În literatura matematică se cunosc mai mult de o sută de definiții ale noțiunii de stabilitate. De exemplu, la mijlocul secolului XX în cercetările dinamicii cosmice se utilizau aproximativ treizeci de definiții.

Dacă facem referire la trecut, atunci se poate menționa că la sfârșitul secolului XIX, ba chiar și în secolul XX direcția destul de populară în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale a

dinamicii cosmice consta în studiul stabilității soluțiilor lor în sens Poisson, ceea ce a favorizat acumularea de cunoștințe noi referitoare la problema stabilității unor modele ale sistemului Solar. Lyapunov este acela care a introdus formularea cea mai des acceptată a noțiunii de stabilitate a soluției ecuației diferențiale și a problemei stabilității soluției ecuației diferențiale ordinare. Ilustrul savant a dezvoltat metode matematice efective de studiu a proprietăților stabilității sistemelor dinamice, descrise prin ecuații diferențiale ordinare. Lyapunov a formulat și promovat două abordări diferite de rezolvare a acestei probleme matematice fundamentale [40, 46, 47]:

1. metoda V-funcției Lyapunov;
2. metoda bazată pe proprietățile aproximării liniare.

Cu toate acestea trebuie de constatat că problema newtoniană a mai multor corpuri s-a dovedit a fi, din punctul de vedere al studiului proprietăților stabilității soluțiilor sale, una din cele mai complicate probleme ale matematicii moderne, care până în prezent rămâne nerezolvată integral. Vom enunța definiția stabilității în sens Lyapunov a soluției ecuației diferențiale.

Fie că este dată ecuația diferențială vectorială

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \quad (1.49)$$

în care funcția vectorială $X(x, t)$ de dimensiunea n este definită în careva domeniu de dimensiunea $(n+1)$:

$$G_{n+1} = G_n \times I, t \in I = (0, \infty), x \in G_n,$$

în care G_n este un domeniu de dimensiunea n în spațiul R^n .

Presupunem că ecuația vectorială (1.49) admite soluția particulară cunoscută $x = x^*(t)$, pe care o vom numi soluție neperturbată, iar toate celelalte soluții le vom numi soluții perturbate.

Definiția 1.4. Soluția particulară $x^*(t)$ a sistemului de ecuații diferențiale (1.49) o vom numi stabilă în sens Lyapunov în raport cu vectorul x , dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ și orice t_0 din intervalul infinit de timp $(0, \infty)$ există mărimea $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ astfel încât se verifică următoarele condiții:

- 1) toate soluțiile $x(t)$ care verifică condiția inițială

$$x(t_0) = x, \quad \|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \delta,$$

sunt definite pe intervalul infinit $t_0 \leq t < \infty$;

2) pentru aceste soluții este adevărată inegalitatea

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$$

pentru toate valorile $t_0 \leq t < \infty$.

În cazul dat norma oricărui vector $x(t)$ este suma valorilor absolute a componentelor sale:

$$\|x(t)\| = \sum_{k=1}^n |x_k(t)|.$$

Definiția 1.5. Dacă mărimea $\delta = \delta(\varepsilon)$ nu depinde de momentul de timp inițial t_0 din intervalul de timp $[0, T]$ și se verifică celelalte condiții din definiția precedentă atunci soluția $x^*(t)$ se numește uniform stabilă în domeniul T .

Definiția 1.6. Soluția $x^*(t)$ se numește asimptotic stabilă pentru $t \rightarrow \infty$, dacă ea este stabilă și în plus pentru orice valoare t_0 din intervalul infinit $[a, \infty)$ există mărimea $\Delta = \Delta(t_0)$ astfel încât toate soluțiile $x(t)$, ce verifică condiția inițială $\|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \Delta$, mai verifică și relația

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*(t)\| = 0.$$

În particular, soluția trivială $x^*(t) \equiv 0$ este asimptotic stabilă dacă ea este stabilă și

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^*(t)\| = 0.$$

În cercetările dinamicii cosmice se mai pot folosi și noțiunile de stabilitate în sens Lagranje, Hill, Jacobi.

Teoria stabilității, fundamentată de Lyapunov și predecesorii săi, este aplicată actual cu succes la proiectarea echipamentelor și diverselor aparate, dar nu poate fi efectiv folosită în cercetările stabilității structurilor cosmice dinamice, la care se referă sistemele planetare și sistemele de sateliți artificiali [42, 50, 83]. Remarcabile în dezvoltarea teoriei stabilității în sens Lyapunov a sistemelor hamiltoniene, la care se atribuie dinamica cosmică, sunt rezultatele

savanților A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold și Ju. Moser, care mai sunt numiți fondatori ai teoriei KAM [49].

Teoria KAM a dat răspuns la un șir de întrebări asupra studiului stabilității soluțiilor dinamicii hamiltoniene, însă problema stabilității în sens Lyapunov a sistemelor planetare rămâne nerezolvată.

Din aceste considerente dezvoltarea teoriei stabilității modelelor dinamicii cosmice nu-și pierde actualitatea.

În baza rezultatelor teoriei KAM studierea stabilității în sens Lyapunov a soluțiilor staționare ale problemelor mărginite presupune efectuarea următorilor pași [21, 24]:

- determinarea pozițiilor de echilibru și condițiilor de existență a configurației ce descrie problema studiată;
- determinarea punctelor staționare în problema mărginită;
- liniarizarea ecuațiilor diferențiale ale problemei mărginite în vecinătatea punctelor staționare;
- determinarea valorilor proprii ale matricei sistemului liniarizat;
- determinarea condițiilor de stabilitate liniară a punctelor de echilibru;
- construcția hamiltonianului problemei mărginite;
- liniarizarea sistemului hamiltonian;
- normalizarea formei pătratice a hamiltonianului H_2 ;
- normalizarea formei cubice H_3 a hamiltonianului;
- eliminarea formei cubice H_3 și normalizarea formei H_4 ;
- determinarea stabilității în sens Lyapunov a punctelor de echilibru, aplicarea teoremei Arnold-Moser.

Profesorul E. A. Grebenicov a considerat că prezintă interes examinarea soluțiilor în problema newtoniană a opt corpuri. În lucrarea aceasta se examinează o clasă nouă de soluții în problema newtoniană a opt corpuri configurația căreia verifică condițiile: corpurile formează un sistem plan centralizat în formă de pătrat, în vârfurile căruia se află masele m_1, m_2, m_3, m_4 , două mase m_5 și m_6 se află pe o diagonală a sa, iar al șaptelea corp este plasat în centrul de greutate al configurației. Se studiază influența câmpului gravitațional al configurației date asupra mișcării unei mase infinit mici amplasate în acest sistem (problema mărginită a opt corpuri).

1.6. Concluzii la capitolul 1

În primul capitol, ce constă din cinci paragrafe, este dată o analiză amplă a domeniului, ce ține de tema tezei de doctorat.

Problema newtoniană este una din cele mai renumite probleme ale matematicii clasice, mecanicii și astronomiei. Ea constă în determinarea proprietăților mișcării sistemului izolat format din n corpuri ce se atrag reciproc după legea lui Newton și pentru care sunt cunoscute masele, coordonatele inițiale, precum și vitezele acestor puncte materiale în raport cu careva sistem inerțial fixat de coordonate.

Rezolvarea acestei probleme, descrise de un sistem de ecuații diferențiale, depinde în mare măsură de valoarea parametrului n , adică de numărul de puncte materiale. Deși a fost formulată cu mai mult de 300 de ani în urmă până în prezent rămâne încă nerezolvată.

Remarcabile în dezvoltarea teoriei stabilității în sens Lyapunov a sistemelor hamiltoniene, la care se atribuie dinamica cosmică, sunt rezultatele savanților A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold și Iu. Moser, care mai sunt numiți fondatori ai teoriei KAM. Teoria KAM a dat răspuns la un șir de întrebări asupra studiului stabilității soluțiilor dinamicii hamiltoniene.

Scopul principal al tezei constă în aplicarea teoriei KAM la cercetarea calitativă a ecuațiilor diferențiale ce descriu problema mărginită a $7+1$ corpuri, formulate anterior de profesorul E. A. Grebenicov. Ea constă în studierea mișcării corpului 8, de masa infinit mică în raport cu celelalte mase, în câmpul gravitațional al celorlalte 7 corpuri, configurația și mișcarea cărora este binedeterminată și stabilă.

Pentru a rezolva această problemă este necesar să realizăm următoarele obiective:

- determinare condițiilor de existență a problemei newtoniene a șapte corpuri configurația căreia reprezintă un pătrat în vârfurile căruia se află masele m_1, m_2, m_3, m_4 , două mase m_5 și m_6 se află pe o diagonală a sa, iar al șaptelea corp este plasat în centrul de greutate al sistemului;
- determinarea punctelor staționare în problema mărginită a opt corpuri;
- liniarizarea ecuațiilor diferențiale ale problemei mărginite în vecinătatea punctelor staționare;
- determinarea valorilor proprii ale matricei sistemului liniarizat;
- determinarea condițiilor de stabilitate liniară a punctelor de echilibru;

- construcția hamiltonianului problemei mărginite;
- liniarizarea sistemului hamiltonian;
- normalizarea formei pătratice a hamiltonianului H_2 ;
- normalizarea formei cubice a hamiltonianului;
- eliminarea formei cubice H_3 și normalizarea formei H_4 ;
- determinarea stabilității în sens Lyapunov a punctelor de echilibru.

2. STUDIAREA STABILITĂȚII ÎN PRIMA APROXIMAȚIE A SOLUȚIILOR STAȚIONARE ÎN PROBLEMA MĂRGINITĂ A OPT CORPURI

2.1. Algoritm general de generare a ecuațiilor diferențiale ce descriu problemele mărginite ale dinamicii cosmice

O abordare universală binecunoscută a cunoașterii lumii din jurul nostru, care, după cum spun matematicienii, este un model esențial neliniar, constă în faptul că ea poate fi realizată pas cu pas, doar prin aproximări succesive sau iterații. Mai sus a fost formulată problema fundamentală a dinamicii analitice în reprezentarea lui H. Poincaré. Poincaré, făcând referire la studiul problemelor dinamicii cosmice, în special ale Cosmosului, în general, a încercat întotdeauna să pună în practică o abordare științifică bazată pe următoarea metodologie: datorită faptului că ecuațiile dinamicii cosmice “nu pot fi integrate”, este posibil ca pentru acestea să se investigheze, mai presus de toate, problema existenței oricărei soluții staționare și mai apoi problema studierii proprietăților geometrice și dinamice ale acestora din urmă.

Genialul savant francez a evidențiat în primul rând determinarea tuturor soluțiilor staționare ale sistemului de ecuații diferențiale cu hamiltonianul analitic și periodic în raport cu coordonatele lui Lagrange.

Primele rezultate în soluționarea ecuațiilor diferențiale ce descriu problema newtoniană a mai multor corpuri au fost obținute de O. Dziobek, A. Wintner, B. Elmabsout și D. Bang pentru spațiile euclidiene. În spațiile Nehvil cu timpul regularizat E. Gebeniov a determinat o nouă clasă de soluții homografice mărginite și nemărginite. Aceste soluții posedă o totală simetrie dinamică și geometrică în spațiile respective. D. Bang și B. Elmabsout de asemenea au demonstrat că în spațiul euclidian există soluții exacte ale ecuațiilor diferențiale ce descriu problema newtoniană a mai multor corpuri cu simetrie incompletă atunci când corpurile ce se atrag reciproc formează nu doar un poligon regulat (în cazul simetriei totale) dar câteva astfel de poligoane regulate cu o orientare univocă a unuia față de celelalte. Cu toate acestea rezultatul obținut de D. Bang și B. Elmabsout nu dă răspuns complet la întrebarea referitoare la mulțimea soluțiilor staționare ale problemei newtoniene generale a mai multor corpuri, de ceea ce putem presupune că se vor putea determina și alte soluții staționare. În același timp soluțiile staționare obținute de D. Bang și B. Elmabsout pot servi ca generator a unei noi clase de soluții ale problemelor dinamicii cosmice - problemelor mărginite cu simetrie incomplete [91].

În acest capitol se va cerceta problema influenței câmpului gravitațional al configurației formată din șapte corpuri asupra mișcării unei mase infinit mici amplasate în acest sistem.

Se va studia stabilitatea în prima aproximație a unei noi clase de soluții exacte ale problemei newtoniene plane, mărginite a opt corpuri cu simetrie incompletă.

Modelele dinamice ce descriu problema newtoniană, de regulă, sunt descrise prin ecuații diferențiale neliniare, prin urmare rezolvarea și investigarea lor se bazează, de obicei, pe metodele aproximărilor succesive implementate în diferiți algoritmi iterativi. Problema newtoniană a trei corpuri este modelul matematic de bază ce descrie mișcările corpurilor din sistemul solar. Lipsa de progrese semnificative în integrarea exactă a ecuațiilor diferențiale ale problemei date obținute de matematicieni și astronomi timp de două secole, a condus ca în anii 60 ai secolului XIX, matematicianul și mecanicul german Carl Gustav Jacobi să formuleze un nou model matematic simplificativ al dinamicii cosmice, pe care el l-a numit problema mărginită a trei corpuri [20]. Această problemă a devenit un model matematic foarte popular al dinamicii cosmice. În plus, s-a demonstrat că ea permite o generalizare simplă în cazul oricărui număr de corpuri ce gravitează reciproc.

Jacobi a formulat următoarea problemă: Este necesar să se investigheze în spațiu tridimensional mișcarea a unui punct material, cu o masă infinit mică, atras de alte două puncte materiale cu mase de dimensiuni finite, în conformitate cu legea de gravitație a lui Newton.

Masa infinit mică însăși nu exercită o influență gravitațională asupra mișcării celorlalte două puncte materiale cu mase nenule.

Deoarece aceste două puncte materiale nu sunt supuse influenței gravitaționale din partea celei de-a treia mase infinit mică, mișcarea lor în spațiul tridimensional are loc în conformitate cu legile lui Kepler de mișcare a planetelor, iar masă infinit mică μ , la rândul său, se deplasează în spațiu sub acțiunea forțelor de atracție newtoniene create de cele două puncte materiale cu masele m_1 și m_2 [7].

Rezolvarea matematică a problemei mărginite a trei corpuri constă în a găsi soluția exactă a unui sistem specific, nelinear de ecuațiile diferențiale de ordinul șase în care funcțiile necunoscute sunt coordonatele și componentele vitezei masei infinit mici μ , ca funcții de timp, adică studierea tuturor posibilelor mișcări ale masei infinit mici în spațiul Euclidian tridimensional sub acțiunea atragerii acestora de către particulele cu masele m_1 și m_2 .

Prin analogie cu problema a trei corpuri academicianul E. Grebenicov a formulat următoarea problemă: să se studieze în spațiu tridimensional mișcarea a unui punct material, cu o masă infinit mică, atras de alte șapte puncte materiale cu mase de dimensiuni finite, în conformitate cu legea de gravitație a lui Newton, configurația cărora este un pătrat, cu o masă situată în centrul de greutate, iar altele două situate pe o diagonală a pătratului.

Se știe că legile dinamicii clasice au fost formulate de Galilei și Newton pentru sistemele inerțiale. Fie că în careva spațiu inerțial tridimensional $Oxyz$ avem $(n+1)$ corpuri ce se atrag reciproc conform legii de atracție universală.

Atunci forma vectorială a ecuațiilor diferențiale ce descriu mișcarea acestor corpuri este următoarea:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \text{grad}_i U, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

în care raza vectorie $\overrightarrow{OP}_i = \vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, iar funcția scalară - potențialul U se exprimă prin relația:

$$U(x_0, y_0, z_0, \dots, x_n, y_n, z_n) = \frac{f}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n ' \frac{m_k m_i}{\Delta_{ki}}, \quad \Delta_{ki} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}, \quad (2.2)$$

f este constanta gravitațională, iar semnul ' în sume arată că $k \neq i$, vectorul

$$\text{grad}_i U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y_i} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (2.3)$$

Scrisă în forma pe coordonate totalitatea (2.1) reprezintă un sistem de ecuații diferențiale neliniare de ordinul $(6n+6)$ de forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Dacă vom înțelege prin problemă mărginită a mai multor corpuri cazul când pentru unul din corpuri nu se îndeplinește a treia lege a dinamicii Newtoniene, atunci aceasta implică existența unei mase infinit mici, deci una din masele $m_0, m_1, \dots, m_n$ este infinit mică de aceea ea

nu acționează cu atracția sa alte mase, iar acestea la rândul lor o atrag. Înlocuirea în sistemul (2.4) masei infinit mici cu zero va duce la obținerea unui sistem asemănător dar de ordinul $6n$.

Astfel, în loc de sistemul de ecuații diferențiale a problemei newtoniene a $(n+1)$ corpuri, vom obține ecuațiile diferențiale a problemei newtoniene a n corpuri.

Deci, în urma operației de egalare cu zero a unei din masele $m_0, m_1, \dots, m_n$ în ecuațiile (2.4), nu se obțin ecuațiile diferențiale ce descriu mișcarea masei infinit mici.

Vom scrie sistemul (2.4) într-o formă mai detaliată, evidențiind, de exemplu, ecuațiile diferențiale ale masei m_0 .

$$\begin{cases} m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_0} = f m_0 \sum_{k=1}^n m_k \frac{x_k - x_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_0} = f m_0 \sum_{k=1}^n m_k \frac{y_k - y_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ m_0 \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_0} = f m_0 \sum_{k=1}^n m_k \frac{z_k - z_0}{\Delta_{k0}^3}, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} = f m_i \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{x_k - x_i}{\Delta_{ki}^3} + m_0 \frac{x_0 - x_i}{\Delta_{0i}^3} \right), \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} = f m_i \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{y_k - y_i}{\Delta_{ki}^3} + m_0 \frac{y_0 - y_i}{\Delta_{0i}^3} \right), \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} = f m_i \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{z_k - z_i}{\Delta_{ki}^3} + m_0 \frac{z_0 - z_i}{\Delta_{0i}^3} \right), \\ i = 1, 2, \dots, n, k \neq i. \end{cases} \quad (2.6)$$

Așa cum masa $m_0 = \mu \rightarrow 0$ vom împărți ambele părți ale sistemului (2.5) la m_0 , iar în sistemul (2.6) înlocuim $m_0 = 0$. Atunci obținem următoarele sisteme:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{x_k - x_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{y_k - y_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{z_k - z_0}{\Delta_{k0}^3}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{x_k - x_i}{\Delta_{ki}^3}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{y_k - y_i}{\Delta_{ki}^3}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{z_k - z_i}{\Delta_{ki}^3}, \\ i = 1, 2, \dots, n, k \neq i. \end{cases} \quad (2.8)$$

Analizând sistemele (2.7) și (2.8) observăm că în al doilea sistem nu figurează coordonatele x_0, y_0, z_0 ale masei infinit mici, deci sistemul (2.8) descrie mișcarea în problema newtoniană a n corpuri cu masele respectiv egale cu $m_1, \dots, m_n$ și pentru rezolvarea sa nu avem nevoie să cunoaștem coordonatele $x_0(t), y_0(t), z_0(t)$ ca funcții de timp.

Dacă s-ar putea determina careva soluție particulară a sistemului (2.8) $x_i(t), y_i(t), z_i(t), i = 1, \dots, n$ și dacă s-ar putea realiza înlocuirea acestora în sistemul (2.7), atunci sistemul nou obținut neautonom, echivalent sistemului (2.7) va putea fi studiat aparte.

Admitem că s-a determinat una din soluțiile particulare ale sistemului (2.8):

$$\begin{cases} x_k(t) = f_k(t), \\ y_k(t) = \varphi_k(t), \\ z_k(t) = \psi_k(t), k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.9)$$

Substituind aceste funcții în sistemul (2.7) obținem sistemul de ordinul șase de ecuații diferențiale neautonome ce descriu problema mărginită a n corpuri:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{f_k(t) - x_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{\varphi_k(t) - y_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{\psi_k(t) - z_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \Delta_{k0}^2(t) = (f_k(t) - x_0)^2 + (\varphi_k(t) - y_0)^2 + (\psi_k(t) - z_0)^2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Sistemul (2.10) descrie mișcarea masei infinit mici $m_0 = \mu$ în câmpul gravitațional format de masele $m_1, m_2, \dots, m_n$ și care se mișcă în corespundere cu mișcarea cunoscută, descrisă de soluția determinată $f_k(t), \varphi_k(t), \psi_k(t), k=1, \dots, n$. Cu părere de rău, până în prezent mișcarea masei infinit mici nu este încă cunoscută.

Din cele de mai sus rezultă că mișcarea masei infinit mici în orice problemă mărginită a mai multor corpuri este descrisă, de regulă, printr-un sistem neautonom de ecuații diferențiale de ordinul șase.

În cazul soluției plane ($z_0 = z_1 = \dots = z_n \equiv 0$) se va cerceta un sistem de ordinul patru nu cel de ordinul șase:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{f_k(t) - x_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = f \sum_{k=1}^n m_k \frac{\varphi_k(t) - y_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \Delta_{k0}^2(t) = (f_k(t) - x_0)^2 + (\varphi_k(t) - y_0)^2. \end{cases}$$

Sistemul astfel obținut descrie mișcarea masei infinit mici μ în câmpul gravitațional al punctelor materiale $P_1, P_2, \dots, P_n$, mișcarea cărora are loc în unul și același plan în care are loc mișcarea a însăși masei materiale P_0 .

În baze celor expuse mai sus putem formula următoarea teoremă:

Teorema 2.1. Orice soluție particulară cunoscută a problemei newtoniene a n corpuri servește drept generator de ecuații diferențiale ale mișcării în problema newtoniană mărginită a $(n+1)$ corpuri.

Acest lucru ne permite să introducem conceptul de problemă mărginită în sens Jacobi pentru orice număr de corpuri, în special, putem vorbi despre "problema mărginită a 3+1 corpuri", "problema mărginită a 4+1 corpuri", "problema mărginită a o sută de corpuri" etc.

Așa cum în caz general sistemul de ecuații diferențiale ale problemei newtoniene mărginite a $(n+1)$ corpuri este neautonom, H. Poincaré a formulat în calitate de problemă primară a dinamicii analitice determinarea unor astfel de transformări ale coordonatelor fazice în care soluțiile particulare din problema a n corpuri de tipul (2.9) se se exprime prin mărimi constante, sau, altfel spus, se reprezintă "poziții de echilibru" ale sistemului transformat de

ecuații diferențiale. În acest caz în noul spațiu fazic ecuațiile diferențiale corespunzătoare sistemului (2.10) vor fi autonome și cercetarea lor va putea fi mai eficientă.

Fie că asupra corpurilor $P_0, P_1, \dots, P_n$ acționează forțele arbitrare $\vec{F}_i$, ce depind de coordonatele euclidiene $x_0, y_0, z_0, \dots, x_n, y_n, z_n$ și derivatele lor $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$. Atunci conform legii fundamentale a dinamicii newtoniene avem:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(x_0, y_0, z_0, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, \alpha_0, \dots, \alpha_k), i = 0, 1, \dots, n,$$

unde $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ sunt mărimi ce exprimă dependența dintre parametrii geometrici și dinamici ai modelului.

Fie, de exemplu, că $m_0 = 0$, iar funcția vectorială $\vec{F}_0$ nu depinde de derivatele $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

Atunci în locul sistemului anterior obținem următorul sistem mixt de ecuații:

$$\begin{cases} \vec{F}_0(x_0, \dots, \alpha_k) = 0, \\ m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(x_0, \dots, \alpha_k), \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

ce constă dintr-o ecuație funcțională vectorială (de multe ori algebrică) și un subsistem de ecuații diferențiale. Dacă ar fi posibil de exprimat coordonatele x_0, y_0, z_0 din prima ecuație prin celelalte coordonate și derivatele lor, atunci rezolvarea subsistemului de ecuații diferențiale ar deveni problemă independentă a dinamicii corpurilor $P_1, P_2, \dots, P_n$. În condițiile că se determină soluția sa, mișcarea masei $m_0 = 0$ se va determina din relații algebrice și nu prin integrarea ecuațiilor diferențiale ce descriu mișcarea sa. Aceasta este în principiu ușor de realizat, dar anume o astfel de abordare nu este aplicabilă pentru gravitația newtoniană, deoarece în acest caz în locul ecuației $\vec{F}_0 = 0$ obținem identitatea $0 = 0$ și studierea mișcării masei infinit mici $m_0 \rightarrow 0$ nu este posibilă.

2.2. Ecuațiile diferențiale ale problemei mărginite a opt corpuri

Din paragraful anterior rezultă că la studierea ecuațiilor diferențiale ale problemelor mărginite mai întâi trebuie studiată existența soluțiilor particulare de tip "poziții de echilibru" în problemele nemărginite de dimensiune mai mică.

Dacă în calitate de origine de coordonate a spațiului euclidian tridimensional se va alege unul din corpurile ce gravitează , de exemplu punctual P_0 , atunci, evident că, sistemul euclidian de coordonate P_0xyz va fi neinerțial.

Fie că în spațiul neinerțial de coordonate P_0xyz are loc mișcarea a opt corpuri $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P$, fiecare având respectiv masele $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, \mu$, ce se atrag reciproc în corespundere cu legea atracției universale. Se va studia modelul dinamic plan format dintr-un pătrat în vârfurile căruia se află punctele P_1, P_2, P_3, P_4 , celelalte două puncte P_5, P_6 , având masele $m_5 = m_6$, se află pe diagonala P_1P_3 a pătratului la distanțe egale de punctul P_0 , în jurul căruia se rotește această configurație cu o viteză constantă ω , determinată exact din parametrii modelului. Se va studia mișcarea masei infinit mici $\mu \rightarrow 0$ (așa-numitul corp ce gravitează pasiv) în câmpul gravitațional format de cele șapte corpuri $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, ce se atrag reciproc și atrag corpul P (Figura 2.1).

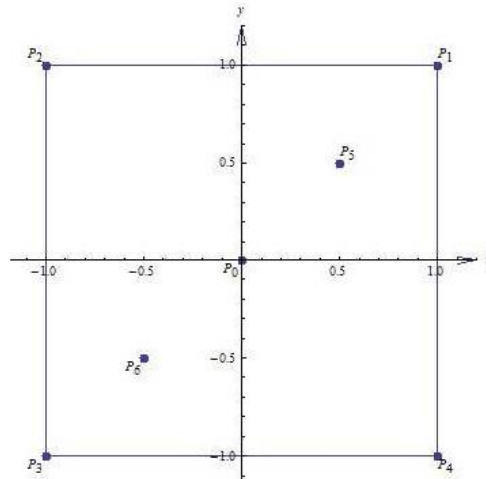


Fig. 2.1. **Imaginea geometrică a configurației studiate.**

H. Poincaré a demonstrat că ecuațiile diferențiale ale dinamicii punctului P în problema mărginită a trei corpuri aparțin clasei sistemelor neintegrabile, sau, altfel spus, a sistemelor a căror integrală generală nu poate fi exprimată prin funcții transcendente univoce. Ecuațiile hamiltoniene ale problemei mărginite a opt corpuri au o structură și mai complicată, de aceea ele de asemenea pot fi considerate ca neintegrabile după Poincaré.

Ecuațiile diferențiale ale problemei newtoniene a opt corpuri într-un sistem cartezian neinerțial de coordonate P_0xyz au forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_k)x_k}{r_k^3} = \frac{\partial R_k^*}{\partial x_k}, \\ \frac{d^2 y_k}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_k)y_k}{r_k^3} = \frac{\partial R_k^*}{\partial y_k}, \\ \frac{d^2 z_k}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_k)z_k}{r_k^3} = \frac{\partial R_k^*}{\partial z_k}, \end{cases} \quad (2.11)$$

$k=1,2,\dots,7$;

unde R_k^* ($k=1,2,\dots,7$) sunt funcțiile de perturbare, ce se exprimă prin relațiile:

$$\begin{cases} R_k^* = f \sum_{j=1}^7 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{kj}} - \frac{x_k x_j + y_k y_j + z_k z_j}{r_j^3} \right), j \neq k \\ \Delta_{kj}^2 = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2, \\ r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2, \\ k = 1, 2, \dots, 7, \end{cases} \quad (2.12)$$

unde f este constanta gravitațională.

În modelul studiat $m_7 = \mu \rightarrow 0$. Pentru simplitate se va considera în continuare

$P(x_7, y_7, z_7) \equiv P(x, y, z)$ și atunci ecuațiile mișcării punctului $P(x, y, z)$ au forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f m_0 x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{f m_0 y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{f m_0 z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z}, \end{cases} \quad (2.13)$$

unde

$$\begin{cases} R = f \sum_{j=1}^6 m_j \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{xx_j + yy_j + zz_j}{r_j^3} \right), \\ \Delta_j^2 = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2, \\ r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2, r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ j = 1, 2, \dots, 6. \end{cases} \quad (2.14)$$

2.3. Teoremele despre existența soluțiilor staționare

Cu creșterea numărului n , dificultățile de a găsi pozițiile de echilibru cresc în mod evident, în primul rând datorită creșterii dimensiunii sistemului în sine și, în plus, se adaugă noi termeni neliniari în părțile drepte ale ecuațiilor referitori la valorile căutate ale coordonatelor corpurilor și maselor lor. Prin urmare, pare potrivit să prezentăm aici afirmațiile a două teoreme care au fost folosite de mai multe ori atunci când s-au găsit poziții de echilibru în problema a n -corpuri. Aceasta este, în primul rând, teorema Bang-Elmabsout, binecunoscută specialiștilor dinamicii spațiului [21, 24].

Teorema 2.2. (Bang-Elmabsout) Fie că se cunosc $N+1=pn+1$ corpuri $P_0, P_1, \dots, P_N$ ce se atrag reciproc, fiecare având respectiv masele $M_0, M_1, \dots, M_N$. Fie că corpurile $P_1, P_2, \dots, P_N$ formează p poligoane concentrice regulate (fiecare având n -laturi) cu centrul P_0 , în vârfurile cărora avem plasate masele $M_1, \dots, M_N$

$$(M_1 = M_2 = \dots = M_n = m_1, M_{n+1} = M_{n+2} = \dots = M_{2n} = m_2, \dots, M_{N-n+1} = M_{N-n+2} = \dots = M_N = m_p),$$

fiecare poligon este orientat în raport cu fiecare doi vecini ai săi sub un unghi de $\frac{\pi}{n}$ și se rotește

în jurul centrului P_0 cu viteza unghiulară

$$\omega_l^2 = \frac{M_0}{|q_{l,k}|^3} + \frac{1}{q_{l,k}} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq r \leq p \\ r \neq l}} m_r \sum_{j=1}^n \frac{q_{l,k} - q_{r,j}}{|q_{l,k} - q_{r,j}|^3} + m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{q_{l,k} - q_{l,j}}{|q_{l,k} - q_{l,j}|^3} \right\} \quad (2.15)$$

unde $q_{l,k} = (x_{l,k}, y_{l,k})$ sunt coordonatele corpurilor P_k ($k=1, 2, \dots, n$) ce sunt plasate în vârfurile poligonului respectiv cu n laturi ($l=1, 2, \dots, p$),

$$|q_{l,k} - q_{r,j}|^3 = \left[(x_{l,k} - x_{r,j})^2 + (y_{l,k} - y_{r,j})^2 \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Dacă pentru coordonatele cunoscute inițial $q_{l,k}$ există astfel de valori ale parametrilor $m_1, m_2, \dots, m_p$ astfel încât are loc egalitatea

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \dots = \omega_p^2 = \omega^2 \quad (2.16)$$

atunci problema newtoniană plană a $(N+1)$ corpuri are soluție homografică exactă, descrisă geometric de p poligoane regulate cu n laturi, ce se rotesc cu viteza unghiulară ω în jurul corpului P_0 .

Vom reformula această teoremă într-o formă mai convenabilă pentru studiul ce-l facem. Dacă pentru valorile date ale parametrilor $m_1, m_2, \dots, m_p$ există așa seturi ale coordonatelor $(x_{l,k}, y_{l,k})$, pentru care au loc relațiile (2.16), atunci problema newtoniană plană admite soluție homografică exactă descrisă de p poligoane regulate cu n laturi, ce se rotesc cu viteza unghiulară ω în unul și același plan și în aceeași direcție în jurul corpului P_0 .

Un nou rezultat în rezolvarea problemei date a fost propus de către N. Zemțova [26, 36, 90], care a reformulat-o în felul următor: cunoscând initial configurația, în vârfurile căreia se află corpurile ce gravitează, trebuie de determinat așa valori ale maselor, care ar garanta existența configurației.

O altă abordare a problemei date constă în faptul că cercetătorul trebuie să aibă întotdeauna în vedere că pentru orice set de valori ale maselor și ale coordonatelor punctelor ce gravitează, valoarea vitezei unghiulare de rotație ω a sistemului de coordonate trebuie să fie invariantă pentru toate ecuațiile sistemului de ecuații ce descrie configurația [66, 80].

A doua teoremă este teorema de existență a soluțiilor particulare exacte a ecuațiilor diferențiale ce descriu mișcarea în problema newtoniană plană a $n+1$ corpuri, scrise în coordonatele lui Nehvill:

Teorema 2.3. Fie că:

1. punctele materiale $P_0, P_1, \dots, P_n$, fiecare având respectiv masele m_0 și $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$, se atrag reciproc în conformitate cu legile atracției universale;
2. în momentul initial de timp $t=0$ punctele $P_1, \dots, P_n$ formează un poligon regulat cu centrul în P_0 ;
3. vitezele inițiale ale punctelor $P_1, \dots, P_n$ formează un câmp arbitrar al vitezelor în raport cu centrul P_0 .

Atunci soluția ecuațiilor diferențiale ale mișcării corpurilor $P_1, \dots, P_n$ pentru orice moment de timp t reprezintă un poligon regulat, de dimensiuni variabile, ce se rotește cu viteză unghiulară variabilă în jurul centrului de masa P_0 , iar fiecare dintre corpurile $P_1, \dots, P_n$ se mișcă pe o orbită, determinate de ecuațiile problemei clasice a două corpuri, în care în calitate de mase servesc careva mărimi, ce depind evident de masele $m_0, m_1, \dots, m_n$ și numărul n de puncte ce gravitează.

Aşa o configurație, evident, nu este o poziție de echilibru în spațiul cartezian de coordonate, ce se rotește cu viteză unghiulară constantă ω , dar este poziție de echilibru în continuumul de dimensiunea patru al lui Nehvill.

Aceste teoreme pot fi utilizate în continuare la cercetarea existenței punctelor staționare și în studiul stabilității lor pentru diferite modele ale problemei newtoniene a mai multor corpuri. Deosebit de importante sunt aceste rezultate pentru cazul când se cunoaște initial geometria configurației.

2.4. Determinarea pozițiilor de echilibru

Din raționamentele de mai sus rezultă că trebuie să alegem mai întâi așa valori ale lui $(x_k, y_k), k=1, \dots, 6$ pentru care $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \dots = \omega_6^2 = \omega^2$.

Pentru a determina ω vom efectua așa o transformare de coordonate care ar exclude din partea dreaptă a ecuațiilor (2.11), scrise doar pentru corpurile $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, timpul t :

$$\begin{cases} x_j = X_j \cos(\omega t) - Y_j \sin(\omega t), \\ y_j = X_j \sin(\omega t) + Y_j \cos(\omega t), \\ z_j = Z_j. \end{cases} \quad (2.17)$$

Așa cum se cercetează configurația plană avem că $z_j = 0, j=0, 1, \dots, 6$. În noile coordonate ecuațiile (2.11), scrise doar pentru corpurile $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ au forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X_k}{dt^2} = \omega^2 X_k + 2\omega \frac{dY_k}{dt} - \frac{f(m_0 + m_k) X_k}{r_k^3} + \frac{\partial R_k^*}{\partial X_k}, \\ \frac{d^2 Y_k}{dt^2} = \omega^2 Y_k - 2\omega \frac{dX_k}{dt} - \frac{f(m_0 + m_k) Y_k}{r_k^3} + \frac{\partial R_k^*}{\partial Y_k}, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} R_k^* = f \sum_{j=1}^6 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{kj}} - \frac{X_k X_j + Y_k Y_j}{r_j^3} \right), j \neq k \\ \Delta_{kj}^2 = (X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2, \\ r_j^2 = X_j^2 + Y_j^2, \\ k=1, 2, \dots, 6. \end{cases} \quad (2.19)$$

Sistemul de ecuații diferențiale (2.18) descrie mișcarea sistemului material format din șapte puncte în sistemul de coordonate cu rotație. De aceea, pentru studierea sa ulterioară, conform teoremei clasice despre existența soluțiilor ecuațiilor diferențiale ordinare, e necesar de a-l înlocui cu un sistem echivalent de ecuații diferențiale, scrise în coordonatele spațiului fazic cu rotație al coordonatelor și vitezelor de dimensiunea patru.

În dinamica, în mod traditional, este adoptată descrierea modelului dinamic folosind „acelerația“, adică derivata de ordinul doi în raport cu timpul t a coordonatelor necunoscute a corpurilor ce gravitează reciproc, folosind spațiul tridimensional de configurare (sau bidimensional pentru probleme „plane“) în care ecuațiile dinamice sunt scrise folosind derivata de ordinul doi în raport cu timpul (adică, valorile accelerației) ale funcțiilor necunoscute $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Folosind regulile canonizării ecuațiilor mișcării, vom introduce mai întâi variabilele suplimentare - impulsurile unitare, aplicând formulele mecanicii clasice: $\frac{dX}{dt} = p_x, \frac{dY}{dt} = p_y$.

Atunci în noile coordonate fazice (X, Y, p_x, p_y) ecuațiile diferențiale ce descriu mișcarea celor șapte corpuri în sistemul respectiv va avea forma standardă Cauchy. Aceasta presupune scrierea sistemului în așa o formă, în care partea stângă a ecuațiilor sistemului conține doar derivatele de ordinul unu ale funcțiilor ce trebuie determinate:

$$\begin{cases} \frac{dX_k}{dt} = p_{kx}, \frac{dY_k}{dt} = p_{ky}, \\ \frac{dp_{kx}}{dt} = \omega^2 X_k + 2\omega p_{ky} - \frac{f(m_0 + m_k) X_k}{r_k^3} + \frac{\partial R_k^*}{\partial X_k}, \\ \frac{dp_{ky}}{dt} = \omega^2 Y_k - 2\omega p_{kx} - \frac{f(m_0 + m_k) Y_k}{r_k^3} + \frac{\partial R_k^*}{\partial Y_k}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Așa cum se caută punctele staționare ale sistemului (2.20), atunci conform definiției lor, ele trebuie să fie soluții ale sistemului de ecuații funcționale:

$$\begin{cases} p_{kx} = 0, p_{ky} = 0, \\ \omega^2 X_k + 2\omega p_{ky} - \frac{f(m_0 + m_k) X_k}{r_k^3} + \frac{\partial R_k^*}{\partial X_k} = 0, \\ \omega^2 Y_k - 2\omega p_{kx} - \frac{f(m_0 + m_k) Y_k}{r_k^3} + \frac{\partial R_k^*}{\partial Y_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \end{cases} \quad (2.21)$$

Deci, determinarea soluțiilor staționare (punctelor de echilibru) ale problemei newtoniene a șapte corpuri se reduce la stabilirea tuturor soluțiilor reale ale sistemului neliniar de ecuații funcționale (2.21). Acest sistem este echivalent cu sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} \omega^2 X_k + \frac{f(m_0 + m_k) X_k}{r_k^3} + \frac{\partial R_k^*}{\partial X_k} = 0, \\ \omega^2 Y_k + \frac{f(m_0 + m_k) Y_k}{r_k^3} + \frac{\partial R_k^*}{\partial Y_k} = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

care este alcătuit din 12 ecuații algebrice și are 20 necunoscute, dacă considerăm drept necunoscute coordonatele X_k, Y_k ale corpurilor ce gravitează, masele lor $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ și viteza unghiulară ω de rotație a sistemului de coordonate. În aceste condiții problema determinării soluțiilor staționare ale problemei newtoniene a mai multor corpuri devine, dintr-un punct de vedere, incorectă, iar din alt punct de vedere admite multiple aspecte și interpretări în studiul său. Una din interpretări este cazul în care considerăm că sunt cunoscute coordonatele corpurilor-parametrii geometrice ai configurație și atunci problema matematică se simplifică esențial deoarece sistemul (2.22) devine un sistem algebric liniar în raport cu masele $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ și la rezolvarea căruia putem aplica metodele algebrei liniare [1, 9, 19, 38, 39, 72]. În alte cazuri nu-i totul atât de clar și deoarece ecuațiile sistemului sunt algebrice iraționale toate mijloacele matematice de soluționare sunt binevenite dacă sunt aplicate corect și rezolvă problema.

Considerăm cazul când $P_1(1,1), P_2(-1,1), P_3(-1,-1), P_4(1,-1), P_5(\alpha, \alpha), P_6(-\alpha, -\alpha), f=1, m_0=1, m_5=m_6$ atunci, aplicând sistemul de calcul simbolic Mathematica (SCS Mathematica), din sistemul (2.22) obținem:

$$m_1 = m_3, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} m_2 = m_4 = f_1(m_1, \alpha) = \\ \frac{1}{1 - \frac{8}{(1+\alpha^2)^{3/2}}} \left(2\sqrt{2} \left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\alpha^3} - \sqrt{2} m_1 + (-1 + \sqrt{2}) m_1 + \frac{\sqrt{2}(-2 + \alpha) m_1}{(-1 + \alpha)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\sqrt{2}(2 + \alpha) m_1}{(1 + \alpha)^2} + \left((-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2} (-1 + \alpha^3)}{\alpha^3} + \left(-\frac{4\sqrt{2}\alpha^2}{(-1 + \alpha^2)^2} + \frac{1}{4} \left(4 + \sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{(-1 + \alpha)^2} + \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha)^2} - \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right) m_1 \right) \right) /$$

$$\left(8\sqrt{2} \left(\frac{(-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right)}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. \left(\left(-8 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^2 \sqrt{1 + \alpha^2} \right) \left(-1 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^4 \left(-1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right) + 2\alpha^2 \left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right) \right) \right) \right) \right),$$

$$m_5 = m_6 = f_2(m_1, \alpha) = - \left((-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \right.$$

$$\left. \left(\frac{\sqrt{2} (-1 + \alpha^3)}{\alpha^3} + \left(-\frac{4\sqrt{2}\alpha^2}{(-1 + \alpha^2)^2} + \frac{1}{4} \left(4 + \sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{(-1 + \alpha)^2} + \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha)^2} - \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right) m_1 \right) \right) /$$

$$\left(4 \left(\frac{(-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right)}{8\sqrt{2}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} \left(\left(-8 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^2 \sqrt{1 + \alpha^2} \right) \left(-1 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^4 \left(-1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right) + 2\alpha^2 \left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right) \right) \right) \right) \right),$$

$$\omega^2 = f_3(m_1, \alpha) = -\frac{3m_1}{8\sqrt{2}} + \frac{1 + m_1}{2\sqrt{2}} + \left((-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(\frac{-1 + \alpha}{2\sqrt{2} (-1 + \alpha)^2} - \frac{\alpha}{2\sqrt{2} (\alpha^2)^{3/2}} \right) \right.$$

$$\left. \left(\frac{\sqrt{2} (-1 + \alpha^3)}{\alpha^3} + \left(-\frac{4\sqrt{2}\alpha^2}{(-1 + \alpha^2)^2} + \frac{1}{4} \left(4 + \sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{(-1 + \alpha)^2} + \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha)^2} - \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right) m_1 \right) \right) /$$

$$\left(4 \left(\frac{(-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right)}{8\sqrt{2}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} \left(\left(-8 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^2 \sqrt{1 + \alpha^2} \right) \left(-1 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^4 \left(-1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right) + 2\alpha^2 \left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right) \right) \right) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& \left((-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(\frac{-1 - \alpha}{2\sqrt{2} (-1 - \alpha)^2} + \frac{\alpha}{2\sqrt{2} (\alpha^2)^{3/2}} \right) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\sqrt{2} (-1 + \alpha^3)}{\alpha^3} + \left(-\frac{4\sqrt{2}\alpha^2}{(-1 + \alpha^2)^2} + \frac{1}{4} \left(4 + \sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{(-1 + \alpha)^2} + \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha)^2} - \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right) \right) m_1 \right) \right) / \\
& \quad \left(4 \left(\frac{(-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right)}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} \left((-8 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^2 \sqrt{1 + \alpha^2}) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (-1 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^4 (-1 + \sqrt{1 + \alpha^2}) + 2\alpha^2 (1 + \sqrt{1 + \alpha^2})) \right) \right) \right) + \\
& \quad \frac{1}{1 - \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}}} \left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\alpha^3} - \sqrt{2} m_1 + (-1 + \sqrt{2}) m_1 + \frac{\sqrt{2} (-2 + \alpha) m_1}{(-1 + \alpha)^2} - \frac{\sqrt{2} (2 + \alpha) m_1}{(1 + \alpha)^2} + \right. \\
& \quad \left((-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\sqrt{2} (-1 + \alpha^3)}{\alpha^3} + \left(-\frac{4\sqrt{2}\alpha^2}{(-1 + \alpha^2)^2} + \frac{1}{4} \left(4 + \sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{(-1 + \alpha)^2} + \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha)^2} - \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right) \right) m_1 \right) \right) / \\
& \quad \left(8\sqrt{2} \left(\frac{(-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right)}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} \left((-8 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{1 + \alpha^2} \right) (-1 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^4 (-1 + \sqrt{1 + \alpha^2}) + 2\alpha^2 (1 + \sqrt{1 + \alpha^2})) \right) \right) \right) - \\
& \quad \frac{1}{1 - \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}}} \left(2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\alpha^3} - \sqrt{2} m_1 + (-1 + \sqrt{2}) m_1 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{\sqrt{2} (-2 + \alpha) m_1}{(-1 + \alpha)^2} - \frac{\sqrt{2} (2 + \alpha) m_1}{(1 + \alpha)^2} + \left((-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\sqrt{2} (-1 + \alpha^3)}{\alpha^3} + \left(-\frac{4\sqrt{2}\alpha^2}{(-1 + \alpha^2)^2} + \frac{1}{4} \left(4 + \sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{(-1 + \alpha)^2} + \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha)^2} - \frac{8\sqrt{2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right) \right) m_1 \right) \right) / \\
& \quad \left(8\sqrt{2} \left(\frac{(-4 + \sqrt{2}) (-1 + \alpha^2)^2 (1 + \alpha^2) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{8}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right)}{8\sqrt{2}} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} \left((-8 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^2 \sqrt{1 + \alpha^2}) (-1 + \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^4 (-1 + \sqrt{1 + \alpha^2}) + 2\alpha^2 (1 + \sqrt{1 + \alpha^2})) \right) \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Teorema 2.4. Verificarea relațiilor (2.23) reprezintă condiția suficientă de existență a soluției homografice a problemei newtoniene a șapte corpuri, configurația căreia reprezintă un pătrat $P_1P_2P_3P_4$ cu unul din corpuri (P_0) situat în originea de coordonate, iar alte două situate pe diagonala P_1P_3 .

Dependența dintre $m_2 = m_4 = f_1(m_1, \alpha)$, $m_5 = m_6 = f_2(m_1, \alpha)$, $\omega^2 = f_3(m_1, \alpha)$ poate fi observată din Figurile 2.2; 2.3; 2.4.

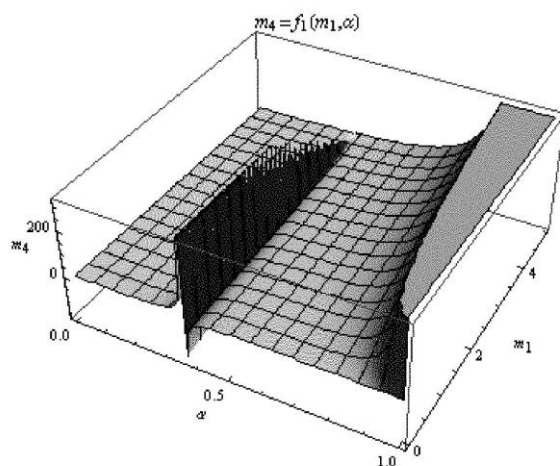


Fig. 2.2. Dependența funcțională $f_1(m_1, \alpha)$.

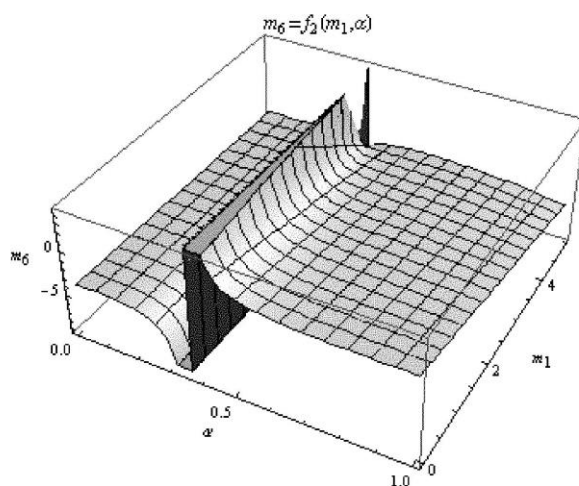


Fig. 2.3. Dependența funcțională $f_2(m_1, \alpha)$.

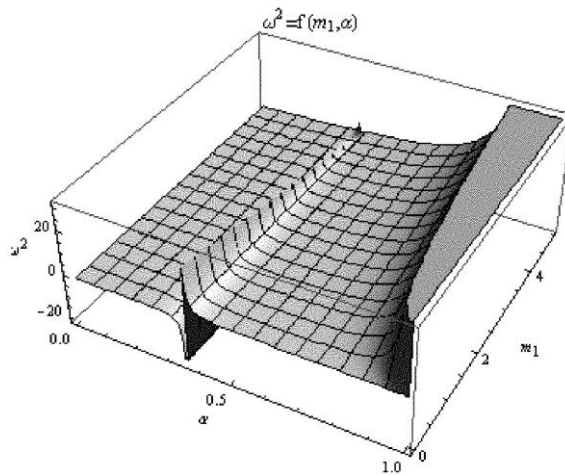


Fig. 2.4. **Dependența funcțională** $f_3(m_1, \alpha)$.

Pentru obținerea lor sa folosit instrucțiunea

```
Plot3D[f, {alpha, alpha_1, alpha_2}, {m1, m11, m12}, PlotPoints -> 40, Mesh -> True,
PlotLabel -> f["f_i"]("m1", alpha), AxesLabel -> {"alpha", m1, f_i}].
```

Așa cum $m_2 = m_4 > 0, m_5 = m_6 > 0, \omega^2 > 0$ vom determina intervalele valorilor admisibile pentru parametrul α variind valorile lui m_1 . De exemplu, pentru $m_1 = 0.1$ dependența dintre $m_2 = m_4, m_5 = m_6, \omega^2$ și parametrul α se observă din Figura 2.5 obținută prin aplicarea funcției `Plot[exp., {alpha, alpha_1, alpha_2}, PlotStyle -> {Black, Black, Black}]]`:

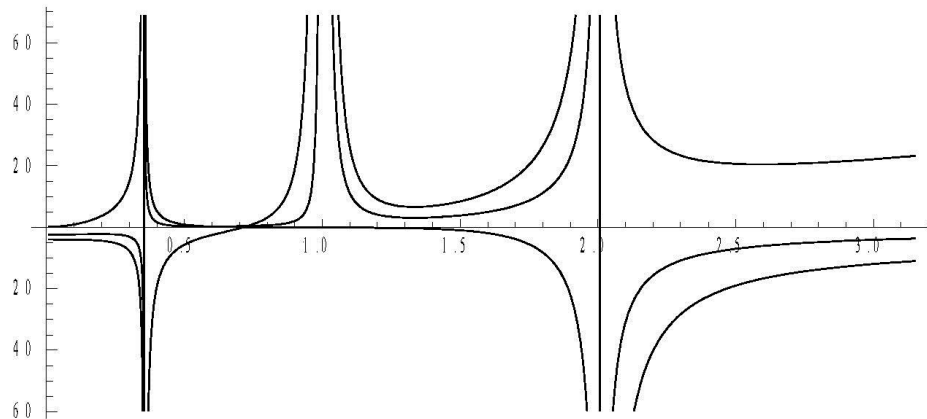


Fig. 2.5. **Dependențele funcționale** $f_1(0,1;\alpha), f_2(0,1;\alpha), f_3(0,1;\alpha)$.

Tabelul 2.1. Intervale admisibile pentru α .

m_1	Intervale admisibile pentru α
0.0001	-----
0.001	-----
0.01	(0.8582; 0.85857)
0.1	(0.715; 0.718)
1	(0.48965; 0.5053)
10	(0.291; 0.320)
100	(0.149; 0.2871)
1000	(0.050; 0.2838)

În tabelul 2.1 sunt prezentate intervalele admisibile ale lui α în dependență de careva valori ale lui m_1 calculate aproximativ folosind mijloacele grafice ale SCS Mathematica.

De exemplu, pentru $m_1 = 1, \alpha = 0.48965$ avem:

$$m_2 = m_4 = 0.000257628, \quad m_5 = m_6 = 0.160844, \quad \omega^2 = 0.685968,$$

iar pentru $m_1 = 1, \alpha = 0.5053$:

$$m_2 = m_4 = 0.997682, \quad m_5 = m_6 = 0.000341148, \quad \omega^2 = 0.691908.$$

Să studiem în continuare mișcarea corpului $P(x_7, y_7, z_7)$ ce gravitează pasiv în câmpul celorlalte corpuri. Așa cum sistemul (2.13) este neautonom atunci efectuând transformarea:

$$\begin{cases} x = X \cos(\omega t) - Y \sin(\omega t), \\ y = X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t), \\ z = Z. \end{cases} \quad (2.24)$$

vom obține un sistem autonom de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = \omega^2 X + 2\omega \frac{dY}{dt} - \frac{f m_0 X}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial X}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \omega^2 Y - 2\omega \frac{dX}{dt} - \frac{f m_0 Y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Y}, \end{cases} \quad (2.25)$$

unde

$$\begin{cases} R = f \sum_{j=1}^6 m_j \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{XX_j + YY_j}{r_j^3} \right), \\ \Delta_j^2 = (X_j - X)^2 + (Y_j - Y)^2, \\ r_j^2 = X_j^2 + Y_j^2, r^2 = X^2 + Y^2 \\ j = 1, 2, \dots, 6, \end{cases} \quad (2.26)$$

iar (X_j, Y_j) sunt coordonatele corpurilor $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ alese anterior.

Vom introduce noile coordonate fazice x, y, u, v unde

$$\begin{cases} x = X, y = Y, \\ \frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \end{cases} \quad (2.27)$$

pentru a aduce sistemul (2.25) la forma normală Cauchy. Astfel în noile coordonate el are forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \\ \frac{du}{dt} = \omega^2 x + 2\omega v - \frac{fm_0 x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} = \omega^2 y - 2\omega u - \frac{fm_0 y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Conform definiției soluțiilor staționare ale ecuațiilor diferențiale, pozițiile de echilibru (în caz că ele există) sunt soluții ale sistemului funcțional de ecuații:

$$\begin{cases} u = 0, v = 0, \\ \omega^2 x + 2\omega v - \frac{fm_0 x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \\ \omega^2 y - 2\omega u - \frac{fm_0 y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

sau în formă desfășurată

$$\left\{ \begin{array}{l} u=0, v=0, \\ \omega^2 x + 2\omega v - \frac{fm_0 x}{r^3} - f \sum_{j=1}^6 m_j \left(\frac{x-x_j}{\Delta_j^3} + \frac{x_j}{r_j^3} \right) = 0, \\ \omega^2 y - 2\omega u - \frac{fm_0 y}{r^3} - f \sum_{j=1}^6 m_j \left(\frac{y-y_j}{\Delta_j^3} + \frac{y_j}{r_j^3} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (2.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_j^2 = (X_j - X)^2 + (Y_j - Y)^2, \\ r_j^2 = X_j^2 + Y_j^2, r^2 = X^2 + Y^2 \\ j=1, 2, \dots, 6. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Pentru simplitate ca și mai sus s-a luat $f=1, m_0=1$. Înlocuind în (2.30) (X_j, Y_j) , $j=1, 2, \dots, 6$, și $m_2 = m_4 = f_1(m_1, \alpha), m_5 = m_6 = f_2(m_1, \alpha), \omega^2 = f_3(m_1, \alpha)$ determinate mai sus pentru careva α și m_1 obținem sistemul (2.32).

$$\left\{ \begin{array}{l} u=0, v=0, \\ f(x, y) = \omega^2 x + 2\omega v - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + m_1 \left(\frac{-1-x}{((1-x)^2 + (-1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-x}{((1-x)^2 + (1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ + m_4 \left(\frac{1-x}{((1-x)^2 + (-1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-1-x}{((-1-x)^2 + (1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ + m_6 \left(\frac{-\alpha-x}{((-\alpha-x)^2 + (-\alpha-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha-x}{((\alpha-x)^2 + (\alpha-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0, \\ g(x, y) = \omega^2 y - 2\omega u - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + m_1 \left(\frac{-1-y}{((-1-x)^2 + (-1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-y}{((1-x)^2 + (1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ + m_4 \left(\frac{1-y}{((1-x)^2 + (-1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-1-y}{((-1-x)^2 + (1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ + m_6 \left(\frac{-\alpha-y}{((-\alpha-x)^2 + (-\alpha-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha-y}{((\alpha-x)^2 + (\alpha-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Primele două ecuații se verifică pentru $u=v=0$ de aceea sistemul (2.32) se reduce la rezolvarea sistemului (2.33) format din două ecuații algebrice iraționale cu necunoscutele x, y .

$$\left\{ \begin{aligned} & \omega^2 x - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + m_1 \left(\frac{-1-x}{((1-x)^2 + (-1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-x}{((1-x)^2 + (1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ & + m_4 \left(\frac{1-x}{((1-x)^2 + (-1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-1-x}{((-1-x)^2 + (1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ & + m_6 \left(\frac{-\alpha-x}{((-\alpha-x)^2 + (-\alpha-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha-x}{((\alpha-x)^2 + (\alpha-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0, \\ & \omega^2 y - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + m_1 \left(\frac{-1-y}{((-1-x)^2 + (-1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-y}{((1-x)^2 + (1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ & + m_4 \left(\frac{1-y}{((1-x)^2 + (-1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-1-y}{((-1-x)^2 + (1-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ & + m_6 \left(\frac{-\alpha-y}{((-\alpha-x)^2 + (-\alpha-y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha-y}{((\alpha-x)^2 + (\alpha-y)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.33)$$

Teorema 2.5. Condițiile de existență a soluțiilor sistemului (2.33) reprezintă condiția necesară și suficientă de existență a soluțiilor staționare ale problemei mărginite a opt corpuri.

Ecuațiile din sistemul (2.33) au o structură destul de complicată de aceea rezolvarea sa e destul de anevoioasă. Dacă s-ar determina soluția sistemului (2.33) atunci adăugînd la ea $u=v=0$ s-ar obține condiția necesară și suficientă de existență a soluției de tip poziție de echilibru a ecuațiilor diferențiale ce descriu problema mărginită a opt corpuri.

Pentru determinarea soluțiilor sistemului (2.33) s-au folosit posibilitățile grafice ale SCS Mathematica. Cu ajutorul pachetului grafic al SCS Mathematica pentru diferite valori ale parametrilor α și m_1 s-au construit graficele curbelor descrise de ecuațiile sistemului (2.33). Evident că punctele de intersecție ale acestor curbe în planul P_0xy nu vor fi altceva decât pozițiile de echilibru ale sistemului cercetat.

De exemplu pentru $m_1 = 0.01$ și $\alpha = 0.8585$ graficele acestor curbe sunt reprezentate în fig. 2. 6.

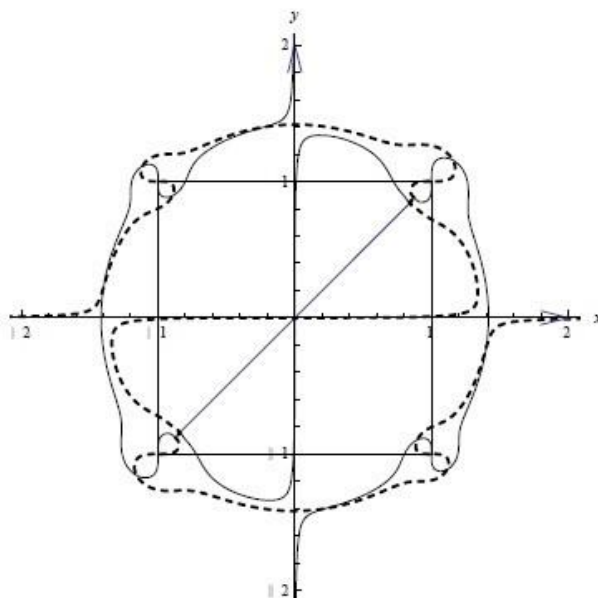


Fig. 2.6. Graficele lui f, g pentru $m_1 = 0.01$ și $\alpha = 0.8585$.

În Figura 2.6 axa absciselor este axa P_0x , axa ordonatelor- dreapta P_0y . Soluțiile sistemului (2.33) reprezintă punctele de intersecție ale curbelor din desen. Observăm că axele de coordonate ele înseși verifică ecuațiile sistemului dat: punctele axei P_0x a doua ecuație a totalității, iar punctele axei P_0y - prima ecuație.

În total avem 12 puncte de echilibru.

Programul 2.1 permite rezolvarea în mod grafic a sistemului (2.33) pentru orice m_1 și α admisibile.

Programul 2.1.

```
solgr [m_ , alpha _]:=Module[ {},gf=f; gg=g;
cpx= ContourPlot[gf,{x,-2.5,2.5},{y,-2.5,2.5},
Contours->{0}, ContourShading->False, PlotPoints->100,
ContourStyle->{Black}, Axes->True, Frame->False];
cpy= ContourPlot[gg,{x,-2.5,2.5},{y,-2.5,2.5},
Contours->{0}, ContourShading->False, PlotPoints->100,
ContourStyle->Dashed, Frame->False];
```

```

tr= ListPlot[{{1,1},{1,-1},{-1,-1},{-1,1},{1,1}},
PlotStyle->{PointSize[0.02]}, Joined->True];
p=ListPlot[{{ $\alpha$ , $\alpha$ },{- $\alpha$ , - $\alpha$ }},
PlotStyle->{PointSize[0.02]}, Joined->True];
Show[cpx, cpy, p, tr, PlotRange->{{-2,2},{-2,2}},
AxesLabel->{x,y}, AspectRatio->Automatic,
PlotLabel->"m1"<>ToString[m] ;  $\alpha$  = "<>ToString[ $\alpha$ ]",
TextStyle->{"Times New Roman",12}]]

```

Vom numi punctele ce se află pe dreptele ce trec prin centrul configurației și orice vârf al pătratului poziții radiale de echilibru (le vom nota pe viitor prin N_i). Celelalte puncte le vom numi poziții bisectoriale de echilibru (le vom nota pe viitor prin S_i).

În Figurele 2.7- 2.10 sunt reprezentate soluțiile grafice ale sistemului (2.33) pentru anumite valori admisibile, determinate anterior, ale parametrilor m_1 și α :

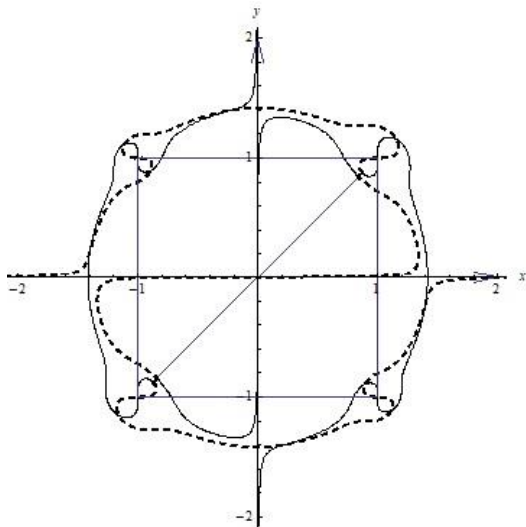


Fig. 2.7. Graficele lui f, g
pentru $m_1=0.01, \alpha = 0.8583$.

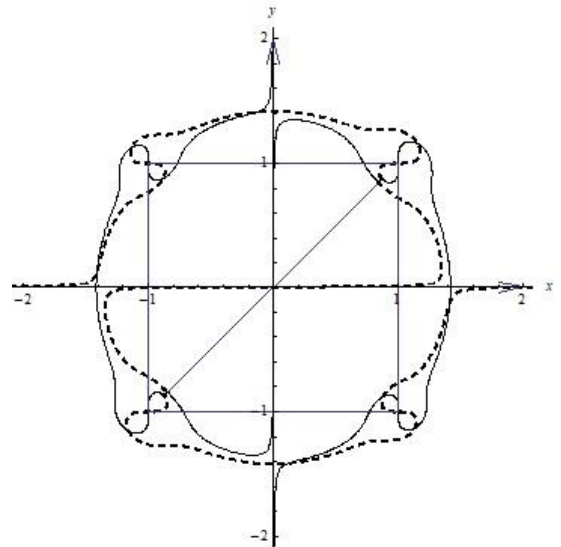


Fig. 2.8. Graficele lui f, g
pentru $m_1=0.01, \alpha = 0.8584$.

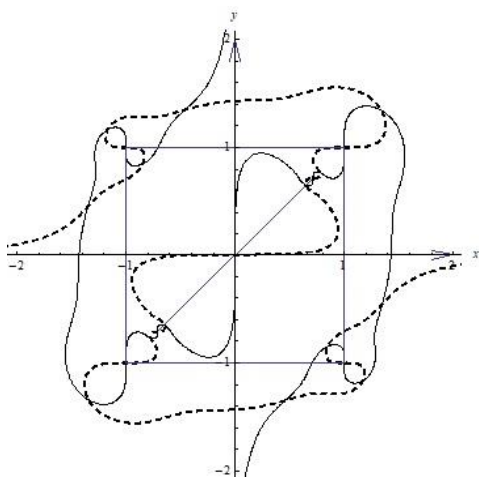


Fig. 2.9. Graficele lui f, g
pentru $m_1=0.1, \alpha = 0.715$.

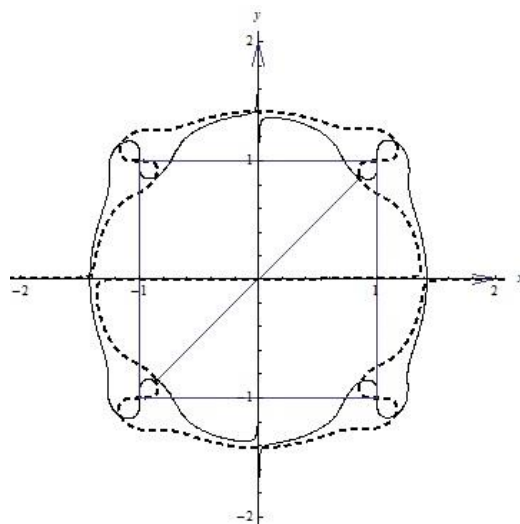


Fig. 2.10. Graficele lui f, g
pentru $m_1=0.01, \alpha = 0.85853$.

Metoda grafică de rezolvare a sistemelor dă posibilitatea de a determina valorile aproximative ale pozițiilor de echilibru folosind aplicația FindRoot: FindRoot[{f==0,g==0},{x,x0},{y,y0}], care are ca bază metoda de iterații a lui Newton.

Pentru graficele mai sus menționate coordonatele tuturor punctelor de echilibru au fost calculate cu o exactitate destul de înaltă. Tabelul 2.2 ce urmează conține coordonatele acestor puncte cu exactitatea de până la cinci cifre după virgulă.

Tabelul 2.2. Coordonatele punctelor staționare.

m_1	α	N_1		S_1	
		x^*	y^*	x^*	y^*
0.01	0.8583	1.15589	1.15589	1.39868	-0.22286
0.01	0.8584	1.15597	1.15597	1.41168	-0.12379
0.01	0.8585	1.15604	1.15604	1.41684	-0.05223
0.01	0.85853	1.15606	1.15606	1.41760	-0.03417
0.1	0.715	1.34188	1.34188	1.34865	-0.45766
0.1	0.717	1.34324	1.34324	1.44139	-0.11335
1	0.48965	1.63351	1.63351	0.93934	-1.05917
1	0.505	1.66022	1.66022	1.82285	-0.00771
10	0.291	1.84521	1.84521	2.19692	-0.00052
100	0.2	1.82945	1.82945	0.82914	-0.02594
1000	0.2	1.81083	1.81083	2.10424	-0.05038

Aplicând metoda iterațională a lui Newton obținem că sistemul de ecuații algebrice neliniare (2.33) are soluție și ea poate fi calculată cu precizia de până la șaiszeci cifre după virgulă.

Programul 2.2 permite de a determina valorile aproximative ale pozițiilor de echilibru pentru orice m_1 și α admisibile.

Programul 2.2.

```
graf4[m_ ,  $\alpha$  _]:=Module[ {m=n,  $\alpha$ =a}, gf=f(x, y, m,  $\alpha$ ); gg=g(x, y, m,  $\alpha$ );
f1=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,1},{y,0}]; Print["S1:", f1];
f12=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,1},{y,1.05}]; Print["N1:", f12];
f13=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,0.9},{y,0.9}]; Print["N2:", f13];
f2=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,0},{y,1}]; Print["S2:", f2];
f21=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,1},{y,-1.05}]; Print["N3:", f21];
f22=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,0.9},{y,-0.9}]; Print["N4:", f22];
f3=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,-1},{y,0}]; Print["S3:", f3];
f31=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,-1},{y,-1.05}]; Print["N5:", f31];
f32=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,-0.9},{y,-0.9}]; Print["N6:", f32];
f4=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,0},{y,1}]; Print["S4:", f4];
f41=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,-1},{y,-1.05}]; Print["N7:", f41];
f42=FindRoot[{gf==0, gg==0},{x,-0.9},{y,0.9}]; Print["N8:", f42].
```

2.5. Teoremele despre stabilitatea și instabilitatea liniară a punctelor staționare

Trebuie de constatat că problema newtoniană a mai multor corpuri s-a dovedit a fi, din punctul de vedere al studiului proprietăților stabilității soluțiilor sale, una din cele mai complicate probleme ale matematicii moderne, care până în prezent rămâne nerezolvată integral.

Teoria stabilității, fundamentată de Lyapunov și predecesorii săi, este aplicată actual cu succes la proiectarea echipamentelor și diverselor aparate, dar nu poate fi efectiv folosită în cercetările stabilității structurilor cosmice dinamice, la care se referă sistemele planetare și sistemele de sateliți artificiali [41, 49, 63]. Remarcabile în dezvoltarea teoriei stabilității în sens Lyapunov a sistemelor hamiltoniene, la care se atribuie dinamica cosmică, sunt rezultatele

savanților A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold și Ju. Moser, care mai sunt numiți fondatori ai teoriei KAM [50, 51].

Teoria KAM a dat răspuns la un șir de întrebări asupra studiului stabilității soluțiilor dinamicii hamiltoniene și în teoria existenței soluțiilor convențional periodice ale sistemelor hamiltoniene de ordinul patru și de ordin mai mare ca patru. Problema stabilității soluțiilor ecuațiilor diferențiale ale mecanicii cosmice este strâns legată de problema existenței soluțiilor periodice și convențional periodice ale ecuațiilor ce descriu problema newtoniană a mai multor corpuri, mișcarea cărora poartă un caracter conventional periodic pe un interval de timp finit și destul de mare.

În baza rezultatelor fondatorilor teoriei KAM pentru studierea stabilității punctelor N_i, S_i în baza primei metode a lui A.M. Lyapunov trebuie de efectuat liniarizarea sistemului de ecuații diferențiale (2.28) în vecinătatea fiecărui punct staționar N_i, S_i , transcriind în prealabil ecuațiile mișcării punctului ce gravitează pasiv în forma normală Cauchy. Pentru aceasta vom introduce în locul spațiului tridimensional $\{x, y, z\}$ spațiul fazic de dimensiunea șase după formulele

$$x = X, y = Y, z = Z, \frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w.$$

În noile coordonate sistemul (2.28) ia forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w \\ \frac{du}{dt} = \omega^2 X + 2\omega v - \frac{fm_0 X}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial X}, \\ \frac{dv}{dt} = \omega^2 Y - 2\omega u - \frac{fm_0 Y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Y}, \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial R}{\partial Z}, \end{cases} \quad (2.34)$$

unde

$$\begin{cases} R = f \sum_{j=1}^6 m_j \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{XX_j + YY_j + ZZ_j}{r_j^3} \right), \\ \Delta_j^2 = (X_j - X)^2 + (Y_j - Y)^2 + (Z_j - Z)^2, \\ r_j^2 = X_j^2 + Y_j^2 + Z_j^2, r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ j = 1, 2, \dots, 6, \end{cases} \quad (2.35)$$

$(X_j, Y_j, Z_j = 0)$ și ω^2 sunt cele determinate anterior.

Pentru studierea stabilității punctelor de echilibru ale sistemului (2.34) e necesar de construit sistemul liniarizat de ecuații diferențiale în vecinătatea fiecărui punct N_i, S_i și de cercetat proprietățile valorilor proprii ale matricei sistemului liniarizat [4, 10, 18, 21, 69].

Vom nota, pentru simplitate, coordonatele oricărui punct N_i, S_i prin $x_i^*, y_i^*, z_i^* = 0$ și prin x vectorul

$$x = (u - u^*, v - v^*, w - w^*, x - x^*, y - y^*, z - z^*). \quad (2.35)$$

În notația (2.35) $u^* = v^* = w^* = 0$.

Spațiul fazic șase dimensional $\{x\}$ este local, de aceea fiecare din punctele de echilibru N_i și S_i (luate aparte) reprezintă punctul $x=0$ al acestui spațiu. Efectuând procedura de liniarizare a părților drepte ale sistemului (2.34) în vecinătatea punctului fazic $x=0$ cu ajutorul SCS Mathematica obținem următorul sistem de ecuații diferențiale liniare:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2.36)$$

în care matricea A de dimensiunea 6×6 are forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ b & c & 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Elementele a, b, c, d ale matricei A , calculate cu ajutorul SCS Mathematica analitic se exprimă prin relațiile:

$$a = \omega^2 + \frac{3(x^*)^2}{\left((x^*)^2 + (y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((x^*)^2 + (y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
& +m_1 \left(\frac{3-6x^*+3(x^*)^2}{\left((1-x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((1-x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
& +m_4 \left(\frac{3-6x^*+3(x^*)^2}{\left((1-x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((1-x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
& +m_6 \left(-\frac{3(\alpha-x^*)(-2\alpha+2x^*)}{2\left((\alpha-x^*)^2+(\alpha-y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((\alpha-x^*)^2+(\alpha-y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
& +m_6 \left(-\frac{3(-\alpha-x^*)(2\alpha+2x^*)}{2\left((\alpha+x^*)^2+(\alpha+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((\alpha+x^*)^2+(\alpha+y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
& +m_4 \left(-\frac{1}{\left((1+x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + (-1-x^*) \left(\frac{-3-3x^*}{\left((1+x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right) \right) + \\
& +m_1 \left(-\frac{1}{\left((1+x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + (-1-x^*) \left(\frac{-3-3x^*}{\left((1+x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right) \right); \\
\\
& b = \frac{3x^*y^*}{\left((x^*)^2+(y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3m_6(\alpha-x^*)(-2\alpha+2y^*)}{2\left((\alpha-x^*)^2+(\alpha-y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \\
& - \frac{3m_6(-\alpha-x^*)(2\alpha+2y^*)}{2\left((\alpha+x^*)^2+(\alpha+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + m_1 \frac{(3-3y^*)(1-x^*)}{\left((1-x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + m_4 \frac{(3-3y^*)(-1-x^*)}{\left((1+x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} +
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
& +m_4 \frac{(-3-3y^*)(1-x^*)}{\left((1-x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + m_1 \frac{(-3-3y^*)(-1-x^*)}{\left((1+x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}}; \\
c = & \omega^2 + \frac{3(y^*)^2}{\left((x^*)^2+(y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((x^*)^2+(y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \\
& +m_1 \left(\frac{3-6y^*+3(y^*)^2}{\left((1-x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((1-x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
& +m_4 \left(\frac{3-6y^*+3(y^*)^2}{\left((1-x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((1-x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
& +m_6 \left(-\frac{3(\alpha-y^*)(-2\alpha+2y^*)}{2\left((\alpha-x^*)^2+(\alpha-y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((\alpha-x^*)^2+(\alpha-y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
& +m_6 \left(-\frac{3(-\alpha-y^*)(2\alpha+2y^*)}{2\left((\alpha+x^*)^2+(\alpha+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((\alpha+x^*)^2+(\alpha+y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
& +m_4 \left(-\frac{1}{\left((1+x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + (-1-y^*) \left(\frac{-3-3y^*}{\left((1+x^*)^2+(1-y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right) \right) + \\
& +m_1 \left(-\frac{1}{\left((1+x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + (-1-y^*) \left(\frac{-3-3y^*}{\left((1+x^*)^2+(1+y^*)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right) \right);
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
d = & -\frac{1}{\left((x^*)^2 + (y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - m_1 \left(\frac{1}{\left((1+x^*)^2 + (1+y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left((1-x^*)^2 + (1-y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) - \\
& -m_4 \left(\frac{1}{\left((1+x^*)^2 + (1-y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left((1-x^*)^2 + (1+y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) - \\
& -m_6 \left(\frac{1}{\left((\alpha-x^*)^2 + (\alpha-y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left((\alpha+x^*)^2 + (\alpha+y^*)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Expresiile (2.38) - (2.41) depind de valorile x_i^*, y_i^* , de aceea pentru fiecare poziție de echilibru valorile elementelor a, b, c, d ale matricei A vor fi diferite.

Ecuția caracteristică din care se determină valorile proprii ale matricei A are forma:

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda^2 - d)(\lambda^4 + (4\omega^2 - a - c)\lambda^2 + ac - b^2) = 0. \tag{2.42}$$

Să cercetăm mai amănunțit rădăcinile ecuației (2.42). Din relația (2.41) se observă că întotdeauna (pentru orice valori ale coordonatelor x_i^*, y_i^*) $d < 0$ de aceea din ecuația

$$\lambda^2 - d = 0 \tag{2.43}$$

obținem că două valori proprii ale matricei A vor fi întotdeauna imaginare. Le vom nota pe viitor prin λ_5, λ_6 . Să cercetăm acum ecuația

$$\lambda^4 + (4\omega^2 - a - c)\lambda^2 + ac - b^2 = 0. \tag{2.44}$$

Pentru ca fiecare din pozițiile de echilibru cercetată să fie stabilă, e necesar ca toate cele patru soluții ale ecuației (2.44) să fie imaginare. În caz contrar, dacă ecuația bipătrată are o rădăcină cu partea reală pozitivă atunci numaidecât ea o are drept soluție și pe cea cu partea reală negativă (cu același modul). Aceasta este una din proprietățile de bază ale matricelor simplectice, din care fac parte și matricele sistemelor hamiltoniene liniarizate. Deci, rezultă că, punctul staționar este stabil doar în cazul când toate patru soluții ale ecuației bipătrăte au partea reală nulă.

Problema cercetată se reduce atunci la determinarea acelor valori ale parametrilor m_1 și

α pentru care elementele a, b, c, d ale matricei A primesc astfel de valori încât rădăcinile ecuației bipătratică (2.44) sunt pur imaginare (pe viitor vom nota aceste rădăcini prin $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$).

Așa cum structura relațiilor (2.38)-(2.41) e destul de complicată, determinarea unei expresii analitice ce ar exprima dependența dintre valorile proprii ale matricei A și parametrii m_1 și α e practic imposibilă. Pentru soluționarea acestei probleme s-au folosit posibilitățile SCS Mathematica și s-au determinat valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ pentru toate punctele N_i și S_i , obținute pentru diferite valori ale lui m_1 și α . Programul 2.3 permite determinarea valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ale matricei A pentru careva punct staționar determinat anterior.

Programul 2.3.

```
eigenv[n_, a_, b_, c_] :=
Module[{m=n,  $\alpha$ =a},  $\omega$ =w(m,  $\alpha$ ); gf=f(x, y, m,  $\alpha$ ); gg=g(x, y, m,  $\alpha$ );
a31=SeriesCoefficient[Series[gf/.{x→X+b,y→Y+c},{X,0,1}],1]/.{Y→0};
a32=SeriesCoefficient[Series[gf/.{x→X+b,y→Y+c},{Y,0,1}],1]/.{X→0};
a41=SeriesCoefficient[Series[gg/.{x→X+b,y→Y+c},{X,0,1}],1]/.{Y→0};
a42=SeriesCoefficient[Series[gg/.{x→X+b,y→Y+c},{Y,0,1}],1]/.{X→0};
A={{0,0,1,0},{0,0,0,1},{a31,a32,0,2 $\omega$ },{a41,a42,-2 $\omega$ ,0}};
M=MatrixForm[A]; Print["A=", M]; Eigenvalues[A]].
```

Tabelul 2.3 de mai jos conține valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ pentru punctele staționare N_1 și S_1 .

Analizând tabelul 2.3 observăm că pentru punctul staționar N_1 , variind valorile parametrilor m_1 și α , valorile proprii ale matricei A nu sunt pur imaginare. Același rezultat se obține și pentru celelalte puncte N_i . De aici rezultă că punctele staționare de tipul N_i sunt instabile în prima aproximație. Din teorema clasică a lui Lyapunov despre stabilitate rezultă că aceste puncte sunt instabile nu doar în prima aproximație dar sunt instabile și în sens Lyapunov pentru $t \rightarrow \pm\infty$. Vom formula acest rezultat prin teorema:

Teorema 2.6. Punctele radiale de echilibru N_i ale ecuațiilor diferențiale ce descriu problema mărginită a opt corpuri sunt instabile în prima aproximație pentru orice valori ale parametrilor m_1 și α .

Tabelul 2.3. Valorile proprii ale matricei A.

m_1	α	N_1		S_1	
		λ_1, λ_2	λ_3, λ_4	λ_1, λ_2	λ_3, λ_4
0.01	0.8583	± 1.30918	$\pm 1.12374i$	$\pm 0.28434i$	$\pm 0.51826i$
0.01	0.8584	± 1.30792	$\pm 1.12295i$	$\pm 0.49471i$	$\pm 0.32201i$
0.01	0.8585	± 1.30666	$\pm 1.12216i$	$\pm 0.45941i$	$\pm 0.36935i$
0.01	0.85853	± 1.30627	$\pm 1.12197i$	$\pm 0.00440 + 0.36926i$	$\pm 0.00440 - 0.36926i$
0.1	0.715	± 1.19131	$\pm 1.06789i$	$\pm 0.34443 + 0.53193i$	$\pm 0.34443 - 0.53193i$
0.1	0.717	± 1.17894	$\pm 1.06051i$	$\pm 0.40784 + 0.56449i$	$\pm 0.40784 - 0.56449i$
1	0.48965	± 1.36716	$\pm 1.30616i$	$\pm 0.74472 + 0.82809i$	$\pm 0.74472 - 0.82809i$
1	0.505	± 1.23329	$\pm 1.12811i$	$\pm 0.75807 + 0.83104i$	$\pm 0.75807 - 0.83104i$
10	0.291	± 2.50383	$\pm 2.63038i$	$\pm 1.6617 + 1.88497i$	$\pm 1.66170 - 1.88497i$
100	0.2	± 8.22619	$\pm 8.56881i$	± 15.3124	$\pm 8.390991i$
1000	0.2	± 27.1564	$\pm 28.0709i$	$\pm 17.7615 + 19.8928i$	$\pm 17.7615 - 19.8928i$

Din tabelul 2.3 mai observăm că în punctul de echilibru S_1 pentru anumite valori ale parametrilor m_1 și α valorile proprii ale matricei A sunt pur imaginare, deci în acest punctul staționar S_1 este stabil în prima aproximație. În mod analog, se obțin rezultate similare și pentru alte puncte de tipul S_i .

Teorema 2.7. Există așa valori ale parametrilor m_1 și α pentru care punctele staționare bisectoriale S_i ale problemei mărginite a opt corpuri sunt stabile în prima aproximație.

2.6. Concluzii la capitolul 2

În capitolul 2

- a fost determinat modelul pentru cele 7 corpuri;
- s-au determinat ecuațiile ce descriu mișcarea configurației în problema a 7+1 corpuri;
- au fost determinate condițiile de existență ale problemei newtoniene a șapte corpuri configurația căreia reprezintă un pătrat în vârfurile căruia se află masele m_1, m_2, m_3, m_4 , două mase m_5 și m_6 se află pe o diagonală a sa, iar al șaptelea corp este plasat în centrul de greutate al sistemului (poziții, mase, viteză);

- s-au calculat coordonatele punctelor staționare în problema mărginită a opt corpuri;
- s-au studiat și determinat condițiile de stabilitate liniară a punctelor de echilibru;
- s-a argumentat alegerea metodei liniarizării.

Pentru efectuarea calculelor au fost folosite posibilitățile sistemului de calcul simbolic Mathematica. Au fost construiți algoritmi și alcătuite programe în scopul realizării obiectivelor stabilite.

3. STUDIAREA STABILITĂȚII ÎN SENS LYAPUNOV A SOLUȚIILOR STAȚIONARE ÎN PROBLEMA MĂRGINITĂ A OPT CORPURI

3.1. Teorema despre stabilitatea în sens Lyapunov a punctelor staționare ale sistemelor hamiltoniene

Problema stabilității în sens Lyapunov a soluțiilor particulare ale sistemelor hamiltoniane ale dinamicii cosmice este una dintre cele mai dificile probleme ale teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale obișnuite, deoarece sistemele hamiltoniene nu aparțin clasei de sisteme, pentru care stabilitatea în aproximarea liniară garantează și stabilitatea în sens Lyapunov [42, 46, 48, 50]. Doar dezvoltarea teoriei KAM a contribuit la obținerea rezultatelor semnificative în teoria lui Lyapunov privind stabilitatea soluțiilor sistemelor hamiltoniene de ordinul 4 și în teoria existenței unor soluții convențional periodice ale sistemelor hamiltoniene de ordinul 4 și mai mare ca patru.

Studiarea stabilității în sens Lyapunov a punctelor staționare ale sistemelor hamiltoniene de ordinul patru se poate realiza doar în baza teoremei Arnold-Moser, care a fost utilizată de mulți cercetători în studiile calitative privind dinamica cosmică și homografică. Prezentăm formularea sa așa cum este dată în monografia profesorului A.P. Markeev [48].

Teorema 3.1. (Arnold-Moser)

Fie dat un sistem hamiltonian de ordinul patru:

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = -\frac{dH}{dq_k}, \\ \frac{dq_k}{dt} = \frac{dH}{dp_k}, \end{cases} \quad (3.1)$$

$k=1,2$, cu hamiltonianul $H(p_1, p_2, q_1, q_2)$ analitic în vecinătatea G_4 a punctului fazic $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$, care este soluție de tip poziție de echilibru a sistemului (3.1). În plus la aceasta, fie că există transformarea canonică

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)$$

în rezultatul căreia hamiltonianul H se transformă în hamiltonianul W :

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) \equiv W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2),$$

de forma:

$$W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) = W_2(T_1, T_2) + W_4(T_1, T_2) + W_5(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \quad (3.2)$$

în care $W_2 = \sigma_1 T_1 - \sigma_2 T_2$, $W_4 = c_{20} T_1^2 + c_{12} T_1 T_2 + c_{10} T_2^2$, $W_5(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2)$ sunt componentele din descompunerea hamiltonianului $W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)$ de ordin nu mai mic ca cinci în raport cu coordonatele canonice și

$$T_k = \frac{p_k^2 + q_k^2}{2}, k = 1, 2. \quad (3.3)$$

Fie că:

1. valorile proprii ale matricei sistemului obținut după liniarizarea sistemului (3.1) sunt numere pur imaginare $\pm i\sigma_1, \pm i\sigma_2$,

2. $k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 \neq 0$, unde k_1, k_2 sunt numere întregi ce verifică inegalitatea

$$0 < |k_1| + |k_2| \leq 4, \quad (3.4)$$

$$3. \quad c_{20}\sigma_1^2 + c_{12}\sigma_1\sigma_2 + c_{10}\sigma_2^2 \neq 0, \quad (3.5)$$

atunci punctul staționar

$$T_1 = T_2 = \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad (3.6)$$

al sistemului hamiltonian

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{\partial W}{\partial T_1}, & \frac{dT_1}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \psi_1}, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{\partial W}{\partial T_2}, & \frac{dT_2}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \psi_2} \end{cases} \quad (3.7)$$

cu hamiltonianul (3.2) este stabil în sens Lyapunov [26].

Această teoremă conține practic algoritmul de studiere a stabilității în sens Lyapunov a punctelor staționare ale sistemelor hamiltoniene de ordinul patru.

Menționăm faptul că poziția de echilibru $T_1 = T_2 = \psi_1 = \psi_2 = 0$ a sistemului hamiltonian (3.6) corespunde punctului staționar

$$p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0 \quad (3.8)$$

al sistemului hamiltonian (3.1).

Vom descrie în continuare etapele de cercetare a stabilității în sens Lyapunov a punctelor de echilibru ale problemelor mărginite a mai multor corpuri. În diferite monografii și articole științifice termenii de formă normală și procedură de normalizare au multiple interpretări. Menționăm că în această lucrare prin formă normală a ecuațiilor diferențiale vom înțelege forma normală Birghoff [15, 21].

În dinamica hamiltoniană prin formă normală Birghoff se înțelege că hamiltonianul după șirul de transformări canonice în forma finală va depinde doar de impulsuri (variabile de tipul p) și nu va depinde de unghiurile fazice (variabile de tipul q). Vectorul p reprezintă totalitatea impulsurilor, deci a mărimilor proporționale proiecțiilor vitezelor, iar vectorul q reprezintă coordonatele punctelor ce gravitează reciproc.

Studierea stabilității punctelor de echilibru ale sistemelor hamiltoniene din mecanica cerească, evident că se începe în primul rând cu

1. determinarea coordonatelor acestor puncte,
2. liniarizarea ecuațiilor diferențiale ce descriu problema mărginită în vecinătatea punctelor staționare;
3. determinarea valorilor proprii ale sistemului liniarizat.

Acesate s-au efectuat în capitolul 2 al acestei lucrări.

Așa cum unul din scopurile cercetărilor expuse în această lucrare este studierea stabilității în sens Lyapunov a punctelor de echilibru ale modelului studiat, vom analiza toate condițiile în urma realizării cărora poate fi aplicată teorema Arnold-Moser. Condițiile acestei teoreme impun realizarea preventivă a următoarelor transformări:

1. să excludem din partea pătratică a hamiltonianului, deci din structurile funcției W_2 , variabilele unghiulare ψ_1, ψ_2 . Altfel spus funcția W_2 trebuie să conțină doar variabilele lente $T_1, T_2 : W_2 \equiv W_2(T_1, T_2)$;
2. să egalăm cu zero forma de ordinul trei: $W_3 \equiv 0$;
3. forma de ordinul patru, funcția W_4 trebuie să depindă doar de variabilele lente, impulsurile $T_1, T_2 : W_4 \equiv W_4(T_1, T_2)$.

3.2. Normalizarea părții pătratice a hamiltonianului

Vom încerca mai întâi să aducem la forma normală în sens Birghoff descompunerea hamiltonianului în serii de puteri în vecinătatea oricărui punct staționar, stabil în prima aproximație.

Fie sistemul de ecuații diferențiale ce descrie problema mărginită a opt corpuri:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{fm_0x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{fm_0y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{fm_0z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z}, \end{cases} \quad (3.9)$$

unde

$$\begin{cases} R = f \sum_{j=1}^6 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{kj}} - \frac{xx_j + yy_j + zz_j}{r_j^3} \right), \\ \Delta_j^2 = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2, \\ r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2, r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

În capitolul 2 al acestei lucrări s-au determinat soluțiile staționare ale acestui sistem și s-au determinat condițiile de stabilitate ale acestora în prima aproximație.

Vom efectua trecerea de la sistemul (3.9) la sistemul hamiltonian de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_x}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_y} \\ \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x}, & \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial y}, \end{cases} \quad (3.11)$$

aplicând legile dinamicii hamiltoniene. În acest caz (x, y, p_x, p_y) reprezintă spațiul fazic canonic al coordonatelor lagranjiene și al impulsurilor.

Hamiltonianul h se exprimă prin relația:

$$h = \omega(y p_x - x p_y) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{1}{\Delta_k} - \frac{xx_k + yy_k}{r_k^3} \right), \quad (3.12)$$

unde $\Delta_k^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2$, $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2$. Pentru configurația cercetată el va avea forma:

$$\begin{aligned} h = \omega(y p_x - x p_y) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - m_1 \left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}} \right) - \\ - m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}} \right) - m_6 \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+\alpha)^2 + (y+\alpha)^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pentru a studia stabilitatea în sens Lyapunov a punctelor staționare (ce au coordonatele fazice $(x^*, y^*, p_{x^*} = -\omega y^*, p_{y^*} = \omega x^*)$) e necesar de exprimat hamiltonianul h prin coordonatele hamiltoniene locale:

$$\begin{cases} X = x - x^*, \\ Y = y - y^*, \\ P_X = p_x - p_{x^*}, \\ P_Y = p_y - p_{y^*} \end{cases} \quad (3.14)$$

și apoi de construit descompunerea sa în serie Taylor în vecinătatea punctului de echilibru $X = Y = P_X = P_Y = 0$.

În noile coordonate fazice $\{X, Y, P_X, P_Y\}$ hamiltonianul se exprimă prin formula:

$$\begin{aligned} H = & \omega \left((Y + y^*)(P_X + p_{x^*}) - (X + x^*)(P_Y + p_{y^*}) \right) + \frac{1}{2} \left((P_X + p_{x^*})^2 + (P_Y + p_{y^*})^2 \right) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{\left((X + x^*)^2 + (Y + y^*)^2 \right)}} - \\ & - m_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\left((X + x^* - 1)^2 + (Y + y^* - 1)^2 \right)}} + \frac{1}{\sqrt{\left((X + x^* + 1)^2 + (Y + y^* + 1)^2 \right)}} \right) - \\ & - m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{\left((X + x^* + 1)^2 + (Y + y^* - 1)^2 \right)}} + \frac{1}{\sqrt{\left((X + x^* - 1)^2 + (Y + y^* + 1)^2 \right)}} \right) - \\ & - m_6 \left(\frac{1}{\sqrt{\left((X + x^* - \alpha)^2 + (Y + y^* - \alpha)^2 \right)}} + \frac{1}{\sqrt{\left((X + x^* + \alpha)^2 + (Y + y^* + \alpha)^2 \right)}} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

În coordonatele X, Y, P_X, P_Y ecuația (3.11) păstrează forma hamiltoniană:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \frac{dY}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \frac{dP_X}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}, & \frac{dP_Y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Y}, \end{cases} \quad (3.16)$$

și admite, evident, soluția particulară

$$X = Y = P_X = P_Y = 0, \quad (3.17)$$

corespunzătoare poziției de echilibru inițiale $(x^*, y^*, p_{x^*}, p_{y^*})$.

Procedura de liniarizare a sistemului hamiltonian în vecinătatea punctului (3.17), efectată cu ajutorul SCS Mathematica, dă următorul rezultat:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \omega Y + P_X, \\ \frac{dY}{dt} = -\omega X + P_Y, \\ \frac{dP_X}{dt} = a'X + b'Y + \omega P_Y, \\ \frac{dP_Y}{dt} = b'X + c'Y - \omega P_X. \end{cases} \quad (3.18)$$

Coeficienții a' , b' , c' ai acestui sistem se exprimă prin formulele:

$$a' = \frac{3x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & + m_2 \left(\frac{3(1+x_0)(2+2x_0)}{2(2+2x_0+x_0^2-2y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(2+2x_0+x_0^2-2y_0+y_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ & + \frac{3(-1+x_0)(-2+2x_0)}{2(2-2x_0+x_0^2+2y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(2-2x_0+x_0^2+2y_0+y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Big) + m_1 \left(\frac{3(-1+x_0)(-2+2x_0)}{2(2+2x_0+x_0^2-2y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \right. \\ & - \frac{1}{(2+2x_0+x_0^2-2y_0+y_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(1+x_0)(2+2x_0)}{2(2+2x_0+x_0^2+2y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(2+2x_0+x_0^2+2y_0+y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Big) + \\ & + m_6 \left(\frac{3(-\alpha+x_0)(-2\alpha+2x_0)}{2(2\alpha^2-2\alpha x_0+x_0^2-2\alpha y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(2\alpha^2-2\alpha x_0+x_0^2-2\alpha y_0+y_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ & + \frac{3(\alpha+x_0)(2\alpha+2x_0)}{2(2\alpha^2+2\alpha x_0+x_0^2+2\alpha y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(2\alpha^2+2\alpha x_0+x_0^2+2\alpha y_0+y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b' = & \frac{3x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} + m_2 \left(\frac{3(1+x_0)(-2+2y_0)}{2(2+2x_0+x_0^2-2y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(-1+x_0)(2+2y_0)}{(2-2x_0+x_0^2-2y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} \right) + \\ & + m_1 \left(\frac{3(-1+x_0)(-2+2y_0)}{2(2-2x_0+x_0^2-2y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(1+x_0)(2+2y_0)}{(2+2x_0+x_0^2+2y_0+y_0^2)^{\frac{5}{2}}} \right) + \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
& +m_6 \left(\frac{3(-\alpha + x_0)(-2\alpha + 2y_0)}{2(2\alpha^2 - 2\alpha x_0 + x_0^2 - 2\alpha y_0 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(\alpha + x_0)(2\alpha + 2y_0)}{(2\alpha^2 + 2\alpha x_0 + x_0^2 + 2\alpha y_0 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
c' = & \frac{3y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} + m_2 \left(\frac{3(-1 + y_0)(-2 + 2y_0)}{2(2 + 2x_0 + x_0^2 - 2y_0 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \right. \\
& - \frac{1}{(2 + 2x_0 + x_0^2 - 2y_0 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(1 + y_0)(2 + 2y_0)}{2(2 - 2x_0 + x_0^2 + 2y_0 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \\
& - \left. \frac{1}{(2 - 2x_0 + x_0^2 + 2y_0 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + m_1 \left(\frac{3(-1 + y_0)(-2 + 2y_0)}{2(2 - 2x_0 + x_0^2 - 2y_0 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \right. \\
& - \frac{1}{(2 - 2x_0 + x_0^2 - 2y_0 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(1 + y_0)(2 + 2y_0)}{2(2 + 2x_0 + x_0^2 + 2y_0 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \left. \frac{1}{(2 + 2x_0 + x_0^2 + 2y_0 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
& + m_6 \left(\frac{3(-\alpha + y_0)(-2\alpha + 2y_0)}{2(2\alpha^2 - 2\alpha x_0 + x_0^2 - 2\alpha y_0 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(2\alpha^2 - 2\alpha x_0 + x_0^2 - 2\alpha y_0 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\
& + \left. \frac{3(\alpha + y_0)(2\alpha + 2y_0)}{2(2\alpha^2 + 2\alpha x_0 + x_0^2 + 2\alpha y_0 + y_0^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(2\alpha^2 + 2\alpha x_0 + x_0^2 + 2\alpha y_0 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Pentru calculele de mai departe vom folosi forma matriceală de scriere a sistemului hamiltonian (3.18) :

$$\left[\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dP_X}{dt}, \frac{dP_Y}{dt} \right]^T = A' [X, Y, P_X, P_Y]^T, \tag{3.22}$$

unde matricea

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 1 \\ a' & b' & 0 & \omega \\ b' & c' & -\omega & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

iar simbolul $\mathbf{T}$, ca de obicei, reprezintă operația de transpunere.

În calculele și transformările ce urmează s-a utilizat punctul staționar stabil în prima aproximație S_1 cu coordonatele

$$x^* = 1.4116760833927924, y^* = -0.12379179384743404, \tag{3.24}$$

obținute pentru $m_1 = 0.01, \alpha = 0.8584$. Vom construi, într-o vecinătate destul de mică a acestui punct, descompunerea în serie de puteri a hamiltonianului (3.15) cu exactitatea până la puterea a patra a coordonatelor X, Y și a impulsurilor P_X, P_Y . Vom avea :

$$H = H_2(X, Y, P_X, P_Y) + H_3(X, Y) + H_4(X, Y) + R_5(X, Y), \quad (3.25)$$

unde $H_k, (k = 2, 3, 4)$ este o formă omogenă de gradul k , iar R_5 - restul din descompunerea în seria Taylor. Pentru cazul studiat (3.24) forma pătratică H_2 și formele de ordinul 3 și 4 sunt egale cu:

$$H_2 = 0.5(-0.68942X^2 + 0.32466Y^2 + P_X^2 + P_Y^2 + 0.17922XY + 1.19431(YP_X - XP_Y)) \quad (3.26)$$

$$H_3 = 0.1667(1.4248X^3 - 0.7599X^2Y - 2.007XY^2 + 0.1931Y^3) \quad (3.27)$$

$$H_4 = 0.04167(-4.01396X^4 + 3.7127X^3Y + 11.6388X^2Y^2 - 2.8827XY^3 - 1.5419Y^4) \quad (3.28)$$

Expresia (3.26) indică faptul că nu putem determina semnul formei $H_2(X, Y, P_X, P_Y)$ deoarece ea conține termenul $(YP_X - XP_Y)$, iar la ceilalți termeni ale formei pătratice semnele variază. Acest fapt nu ne permite să aplicăm nemijocit teoremele despre stabilitate în conformitate cu a doua metodă a lui Lyapunov. Teorema lui Birghoff [15, 21] despre normalizarea hamiltonianului ne indică că mai întâi trebuie de găsit așa o transformare nedegenerată $(X, Y, P_X, P_Y) \rightarrow (p_1, p_2, q_1, q_2)$ care ar exclude din forma pătratică transformată H_2 produsele dintre impulsuri și coordonate $(p_1q_1, p_2q_1, q_1q_2, q_2p_1, q_2p_2, p_1p_2)$ și ar lăsa doar pătratele lor $p_1^2, p_2^2, q_1^2, q_2^2$. În plus, coeficientul sumei $(p_1^2 + q_1^2)$ trebuie să fie mărimea $\frac{\sigma_1}{2} = \frac{|\lambda_1|}{2}$, iar al sumei $(p_2^2 + q_2^2)$ - mărimea $-\frac{\sigma_2}{2} = -\frac{|\lambda_3|}{2}$, unde λ_1, λ_3 sunt valorile proprii diferite ale matricei A' . Anume o astfel de formă pentru H_2 se numește formă normală în sens Birghoff.

Transformările menționate le vom căuta sub forma :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ P_X \\ P_Y \end{bmatrix} = B_4 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

unde B_4 este o matrice necunoscută de dimensiunea 4×4 . Vom determina elementele ei astfel încât noul hamiltonian $K(H(X, Y, P_X, P_Y) \rightarrow K(q_1, q_2, p_1, p_2))$ să fie de forma :

$$K(q_1, q_2, p_1, p_2) = K_2(q_1, q_2, p_1, p_2) + K_3(q_1, q_2, p_1, p_2) + K_4(q_1, q_2, p_1, p_2) + \dots, \quad (3.30)$$

iar forma pătratică $K_2(q_1, q_2, p_1, p_2)$ să posede forma normală Birghoff:

$$K_2 = \frac{1}{2} \sigma_1 (p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2} \sigma_2 (p_2^2 + q_2^2). \quad (3.31)$$

Pentru punctul staționar (3.24) $\sigma_1 = 0.49470788472448207$, $\sigma_2 = 0.32200478020850365$. Are loc următoare teoremă:

Teorema 3.2. Există așa o transformare canonică nedegenerată (3.29) a hamiltonianului H (3.25) astfel încât hamiltonianul obținut K are forma (3.30), iar forma sa pătratică $K_2(q_1, q_2, p_1, p_2)$ are forma normală Birghoff (3.31).

Demonstrație:

Elementele matricei B_4 , după efectuarea transformărilor matriceale necesare, amănunțit descrise în [21,24], se determină din sistemul de ecuații liniare omogene de ordinul 16 :

$$C_{16} z = 0, \quad (3.32)$$

unde vectorul transpus de dimensiunea 16 $z^T = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{44})$ este alcătuit din elementele matricei

$$B_4 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

C_{16} este o matrice de dimensiunea 16×16 cu elementele cunoscute. Structura ei este dată în relația (3.34).

Vom studia compatibilitatea sistemului (3.32). Calcularea determinantului matricei C_{16} , o parte din elementele căreia se calculează folosind relațiile (3.18)-(3.21), fără aplicarea metodelor matematicii computerizate este imposibilă. Folosind posibilitățile SCS Mathematica putem obține

$$C_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a' & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ b' & 0 & 0 & 0 & c' & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & b' & 0 & 0 & 0 & c' & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & c' & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & c' & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

pentru determinantul matricei C_{16} formula analitică:

$$\det C_{16} = \left(\det(A' - \lambda_1 E) \right)^2 \left(\det(A' - \lambda_3 E) \right)^2 \quad (3.35)$$

unde λ_1, λ_3 sunt valorile proprii ale matricei A' , iar E este matricea unitate de dimensiunea 4×4 . Din relația precedentă rezultă că

$$\det C_{16} = 0. \quad (3.36)$$

Rezultă că sistemul algebric (3.32) este compatibil nedeterminat și deci transformarea nedegenerată (3.29) există.

Teorema 3.2 este demonstrată.

Pentru a aplica această teoremă e necesar de ales din mulțimea de soluții ale sistemului (3.32) doar pe acea care ar asigura forma canonică a transformării (3.29). Mai întâi ar trebui de determinat rangul matricei C_{16} . S-au calculat toți minorii de ordinul 15, 14, 13 ai matricei C_{16} care s-au dovedit a fi egali cu zero. Matricea C_{16} are minori nenuli de ordinul 12, de aceea, evident, rangul său este 12 și sistemul (3.32) posedă o bază a soluțiilor de dimensiunea patru.

Pentru ca transformarea (3.29) să fie nu numai nedegenerată dar și canonică, e necesar ca matricea B_4 să fie simplctică, deci să verifice relația:

$$B_4^T T_4 B_4 = T_4 \quad (3.37)$$

în care matricea T_4 are forma:

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0_2 & -E_2 \\ E_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

$E_2, 0_2$ sunt respectiv matricea unitata și matricea nulă de dimensiunea 2×2 .

Patru elemente ale matricei B_4 , care reprezintă parametrii sistemului (3.32), au fost aleși în așa mod ca forma pătratică K_2 a hamiltonianului transformat să posede forma (3.31), iar matricea B_4 să fie symplectică, deci să verifice relația (3.37). Această relație matriceală este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31} + b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41} = 0 \\ b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31} + b_{21}b_{43} - b_{23}b_{41} = 1 \\ b_{11}b_{34} - b_{14}b_{31} + b_{21}b_{44} - b_{24}b_{41} = 0 \\ b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32} + b_{22}b_{43} - b_{23}b_{42} = 0 \\ b_{12}b_{34} - b_{14}b_{32} + b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42} = 1 \\ b_{13}b_{34} - b_{14}b_{33} + b_{23}b_{44} - b_{24}b_{43} = 0. \end{cases}$$

Programul 3.1 permite calcularea oricărui determinant de ordinul 12 al matricei C_{16} , verifică dacă el e egal cu zero, apoi construiește matricea B_4 .

Pentru punctul S_I cu coordonatele (3.24) așa o matrice symplectică B_4 există și este egală cu:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0.655878 & -0.96524 & -1.88012 & -1.43332 \\ 4.22743 & -4.70206 & 0.7917 & 1.79003 \\ -1.59432 & 2.34632 & -0.148299 & -0.758111 \\ 0 & 0 & 0.968621 & 0.658175 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Programul 3.1.

```
MatrixB[i1_,i2_,i3_,i4_,j1_,j2_,j3_,j4_] := Module[{A},
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a' & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ b' & 0 & 0 & 0 & c' & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & b' & 0 & 0 & 0 & c' & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & c' & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & c' & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L1=Partition[{i1,i2,i3,i4},1];

A1=Delete[A,L1];

L2=Table[{i,j1},{i,1,12}];

L3=Table[{i,j2},{i,1,12}];

L4=Table[{i,j3},{i,1,12}];

L5=Table[{i,j4},{i,1,12}];

L6=Join[L1,L2,L3,L4,L5];

A2=Delete[A, L6];

If[Det[A2]==0,"determinantul e egal cu zero",

B=Table[-A1[[i,j1]]×t1-A1[[i,j2]]×t2-A1[[i,j3]]×t3-A1[[i,j4]]×t4,{i,12}];

b1=FullSimplify[LinearSolve[A2,B]];

G=Insert[Insert[Insert[Insert[b1,t1,j1],t2,j2],t3,j3],t4,j4];

G1=Partition[G,4]]].

Dacă vom aplica acum transformarea canonică (3.29) cu matricea B_4 formelor H_2, H_3, H_4 ale hamiltonianului H (3.25), atunci formele corespunzătoare K_2, K_3, K_4 ale hamiltonianului K se vor determina din relațiile:

$$K_2 = \frac{1}{2} \sigma_1(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2} \sigma_2(p_2^2 + q_2^2) = 0.247354(p_1^2 + q_1^2) - 0.161002(p_2^2 + q_2^2), \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} K_3 = & -1.52247 p_1^3 - 2.75988 p_1^2 p_2 - 0.560614 p_1 p_2^2 + 0.555805 p_2^3 + \\ & + 4.33427 p_1^2 q_1 + 13.6424 p_1 p_2 q_1 + 8.14701 p_2^2 q_1 + 11.8376 p_1 q_1^2 + \\ & 8.80617 p_2 q_1^2 - 1.65267 q_1^3 - 5.45395 p_1^2 q_2 - 16.1243 p_1 p_2 q_2 - \\ & - 9.30725 p_2^2 q_2 - 25.8349 p_1 q_1 q_2 - 18.3724 p_2 q_1 q_2 + 7.0171 q_1^2 q_2 + \\ & + 14.0106 p_1 q_2^2 + 9.47119 p_2 q_2^2 - 9.47983 q_1 q_2^2 + 4.134 q_2^3, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} K_4 = & -1.74247 p_1^4 - 2.96036 p_1^3 p_2 + 2.1337 p_1^2 p_2^2 + 5.36404 p_1 p_2^3 + \\ & + 1.99884 p_2^4 + 11.3635 p_1^3 q_1 + 44.9959 p_1^2 p_2 q_1 + 47.2451 p_1 p_2^2 q_1 + \\ & + 12.9554 p_2^3 q_1 + 30.1269 p_1^2 q_1^2 + 33.4298 p_1 p_2 q_1^2 - 2.83397 p_2^2 q_1^2 - \\ & - 22.8284 p_1 q_1^3 - 43.3045 p_2 q_1^3 - 22.588 q_1^4 - 13.7101 p_1^3 q_2 - \\ & - 52.0847 p_1^2 p_2 q_2 - 53.0885 p_1 p_2^2 q_2 - 14.0642 p_2^3 q_2 - 64.3346 p_1^2 q_1 q_2 - \\ & - 65.2487 p_1 p_2 q_1 q_2 + 11.9894 p_2^2 q_1 q_2 + 84.7749 p_1 q_1^2 q_2 + \\ & + 151.297 p_2 q_1^2 q_2 + 99.8009 q_1^3 q_2 + 34.0675 p_1^2 q_2^2 + 30.8765 p_1 p_2 q_2^2 - \\ & - 9.92384 p_2^2 q_2^2 - 103.733 p_1 q_1 q_2^2 - 175.458 p_2 q_1 q_2^2 - 164.82 q_1^2 q_2^2 + \\ & + 41.8947 p_1 q_2^3 + 67.5526 p_2 q_2^3 + 120.569 q_1 q_2^3 - 32.9581 q_2^4. \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.3. Normalizare în sens Birghoff a formei cubice și a formei de ordinul patru a hamiltonianului

Coordonatele canonice q_1, q_2, p_1, p_2 determinate anterior nu sunt coordonate fazice de tipul „unghi-acțiune” deoarece forma pătratică K_2 depinde nu doar de impulsurile p_1, p_2 , dar și de coordonatele fazice q_1, q_2 .

Pentru a trece la variabilele de tipul „unghi-acțiune” vom folosi transformarea clasică a lui Birghoff:

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{2\tau_1} \sin \theta_1, q_2 = \sqrt{2\tau_2} \sin \theta_2, \\ p_1 = \sqrt{2\tau_1} \cos \theta_1, p_2 = \sqrt{2\tau_2} \cos \theta_2, \end{cases} \quad (3.43)$$

în care variabilele noi $\tau_1, \tau_2, \theta_1, \theta_2$ sunt variabile de tipul „unghi-acțiune”. Într-adevăr aplicând transformările (3.43) hamiltonianului $K(q_1, q_2, p_1, p_2)$, vom obține hamiltonianul nou $F(\tau_1, \tau_2, \theta_1, \theta_2)$ în descompunerea căruia forma pătratică F_2 nu mai depinde de noile unghiuri fazice θ_1, θ_2 , dar depinde doar de noile impulsuri τ_1, τ_2 . Dacă vom scrie noul hamiltonian F în forma:

$$F(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) = F_2(\tau_1, \tau_2) + F_3(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) + F_4(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) + \dots, \quad (3.44)$$

atunci după efectuarea transformărilor corespunzătoare obținem:

$$F_2(\tau_1, \tau_2) = \sigma_1 \tau_1 - \sigma_2 \tau_2 = 0.49470788472448207 \tau_1 - 0.32200478020850365 \tau_2, \quad (3.45)$$

$$F_3(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) = 5.140807128421396 \cos(\theta_1) \tau_1^{\frac{3}{2}} - \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} & -9.447002132517966 \cos(3.3\theta_1) \tau_1^{\frac{3}{2}} - 0.4410576429807893 \sin(\theta_1) \tau_1^{\frac{3}{2}} + \\ & + 4.2334038467659605 \sin(3, 3\theta_1) \tau_1^{\frac{3}{2}} - 7.806124283941839 \cos^2(\theta_1) \cos(\theta_2) \tau_1 \sqrt{\tau_2} + \\ & + 38.58642460870544 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \tau_1 \sqrt{\tau_2} + \\ & + 24.907612265036185 \cos(\theta_2) \sin^2(\theta_1) \tau_1 \sqrt{\tau_2} - 15.426098377291202 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_2) \tau_1 \sqrt{\tau_2} - \\ & - 73.07224617082807 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \tau_1 \sqrt{\tau_2} + 19.84734692378447 \sin^2(\theta_1) \sin(\theta_2) \tau_1 \sqrt{\tau_2} \\ & + 19.02114995344577 \cos(\theta_1) \tau_1 \sqrt{\tau_2} - 23.2946324255347 \cos(\theta_1 - 2, 3\theta_2) \tau_1 \sqrt{\tau_2} \\ & + 2.687826810358894 \cos(\theta_1 + 2, 3\theta_2) \tau_1 \sqrt{\tau_2} - 1.88488.37609154767 \sin(\theta_1) \tau_1 \sqrt{\tau_2} \\ & + 23.865686043367923 \sin(\theta_1 - 2, 3\theta_2) \tau_1 \sqrt{\tau_2} + 1.0624359116678743 \sin(\theta_1 + 2, 3\theta_2) \tau_1 \sqrt{\tau_2} \\ & + 7.87618565201249 \cos(\theta_2) \tau_2^{\frac{3}{2}} - 6.30413200622528 \cos(3, 3\theta_2) \tau_2^{\frac{3}{2}} \\ & + 2.188311042025169 \sin(\theta_2) \tau_2^{\frac{3}{2}} - 9.504396465770082 \sin(3, 3\theta_2) \tau_2^{\frac{3}{2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) = & -6.969881281613226 \cos^4(\theta_1) \tau_1^2 + \\ & + 45.454113527747765 \cos^3(\theta_1) \sin(\theta_1) \tau_1^2 + 120.50746000127171 \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_1) \tau_1^2 - \\ & - 91.31359286335648 \cos(\theta_1) \sin^3(\theta_1) \tau_1^2 - 90.35204997264518 \sin^4(\theta_1) \tau_1^2 - \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}
& -11.841427060198953 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \tau_1^{\frac{3}{2}} \tau_2 + \\
& +179.98355886522316 \cos^2(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \tau_1^{\frac{3}{2}} \tau_2 + \\
& +133.71915539476012 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin^2(\theta_1) \tau_1^{\frac{3}{2}} \tau_2 - \\
& -173.21785807783607 \cos(\theta_2) \sin^3(\theta_1) \tau_1^{\frac{3}{2}} \tau_2 - 54.840333543747754 \cos^3(\theta_1) \sin(\theta_2) \tau_1^{\frac{3}{2}} \tau_2 - \\
& -257.33827618833567 \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_1) \sin[\theta_2] \tau_1^{\frac{3}{2}} \tau_2 + \\
& +339.09953140011754 \cos(\theta_1) \sin^2(\theta_1) \sin(\theta_2) \tau_1^{\frac{3}{2}} \tau_2 + \\
& +399.20376738710405 \sin^3(\theta_1) \sin(\theta_2) \tau_1^{\frac{3}{2}} \tau_2 + \\
& +8.534817800981632 \cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \tau_1 \tau_2 + 188.9803103611347 \cos(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \sin(\theta_1) \tau_1 \tau_2 \\
& -11.335870499738613 \cos^2(\theta_2) \sin^2(\theta_1) \tau_1 \tau_2 - \\
& -208.33865036141836 \cos^2(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) \tau_1 \tau_2 - \\
& -260.9949644148126 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \tau_1 \tau_2 + \\
& +605.1874773948903 \cos(\theta_2) \sin^2(\theta_1) \sin(\theta_2) \tau_1 \tau_2 + \\
& +136.27006631468186 \cos^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \tau_1 \tau_2 - \\
& -414.9310814510366 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \tau_1 \tau_2 - \\
& -659.2794851324245 \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \tau_1 \tau_2 + 21.456172919149942 \cos(\theta_1) \cos^3(\theta_2) \tau_1 \tau_2^{\frac{3}{2}} + \\
& +51.82160720244291 \cos^3(\theta_2) \sin(\theta_1) \tau_1 \tau_2^{\frac{3}{2}} - \\
& -212.35408658838364 \cos(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \sin(\theta_2) \tau_1 \tau_2^{\frac{3}{2}} \\
& +47.95769627845318 \cos^2(\theta_2) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \tau_1 \tau_2^{\frac{3}{2}} + \\
& +123.50602292832706 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin^2(\theta_2) \tau_1 \tau_2^{\frac{3}{2}} - \\
& -701.8306162555593 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \tau_1 \tau_2^{\frac{3}{2}} + 167.5789819207007 \cos(\theta_1) \sin^3(\theta_2) \tau_1 \tau_2^{\frac{3}{2}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +482.2756933745956 \sin(\theta_1) \sin^3(\theta_2) \tau_1 \tau_2^{\frac{3}{2}} + 7.995356521015545 \cos^4(\theta_2) \tau_2^2 - \\
& -56.25682130966341 \cos^3(\theta_2) \sin(\theta_2) \tau_2^2 - 39.695366443250215 \cos^2(\theta_2) \sin^2(\theta_2) \tau_2^2 + \\
& +270.21048483116584 \cos(\theta_2) \sin^3(\theta_2) \tau_2^2 - 131.83246904065774 \sin^4(\theta_2) \tau_2^2.
\end{aligned}$$

Forma cubică F_3 și forma de ordinul patru F_4 s-au obținut din formele K_3, K_4 după aplicarea la ele a transformării (3.43).

Pe viitor vom numi formele F_2, F_3, F_4 fiind respectiv de ordinele 2, 3, 4, deși pe fapt ele sunt de ordinele 1, 1.5, 2 în raport cu impulsurile τ_1, τ_2 .

În vecinătatea punctului staționar ecuațiile hamiltoniene în noile coordonate se exprimă prin formulele:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_3}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_4}{\partial \tau_1} + \dots, & \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_3}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_4}{\partial \tau_2} + \dots, \\ \frac{d\tau_1}{dt} = -\frac{\partial F_3}{\partial \theta_1} - \frac{\partial F_4}{\partial \theta_1} + \dots, & \frac{d\tau_2}{dt} = -\frac{\partial F_3}{\partial \theta_2} - \frac{\partial F_4}{\partial \theta_2} + \dots, \end{cases} \quad (3.48)$$

În ultimele două ecuații ale sistemului (3.48) derivatele parțiale $\frac{\partial F_2}{\partial \theta_1}, \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2}$ lipsesc, deci într-adevăr noile impulsuri τ_1, τ_2 sunt mai „lente” spre deosebire de coordonatele fazice „rapide” θ_1, θ_2 . Aceasta este una din deosebirile dintre variabilele canonice de tipul „unghi-acțiune” și alte variabile canonice.

Teorema Arnold-Moser impune construcția încă a unei transformări canonice

$$(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \quad (3.49)$$

care ar anula forma de ordinul trei în hamiltonianul transformat și ar exclude din forma de ordinul patru unghiurile fazice, lăsând cu toate acestea forma pătratică coresunzătoare $F_2(\tau_1, \tau_2)$ neschimbată.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 3.3. Dacă hamiltonianul (3.30) $K(p, q)$ este analitic în vecinătatea punctului

staționar S_I și hesianul $\det \left| \frac{\partial^2 K}{\partial q \partial p} \right| \neq 0$, atunci există așa o transformare canonică (3.49) a

hamiltonianului F (3.44) care aduce la identitatea

$$F(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \quad (3.50)$$

în care noul hamiltonian

$$\begin{aligned} W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) &= W_2(T_1, T_2) + W_4(T_1, T_2) + F_5(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) + \dots, \\ W_2(T_1, T_2) &= \sigma_1 T_1 - \sigma_2 T_2, W_4(T_1, T_2) = c_{20} T_1^2 + c_{11} T_1 T_2 + c_{02} T_2^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

iar coeficienții numerici c_{20}, c_{11}, c_{02} depind de coordonatele punctului S_I .

Demonstrație:

Expresia (3.51) indică faptul că descomunerea hamiltonianului W nu conține forma de ordinul trei W_3 , iar noile unghiuri fazice ψ_1, ψ_2 sunt prezente în descompunerea sa doar în formele de ordinul nu mai mic de cinci.

Vom căuta transformarea (3.49) sub forma

$$\begin{cases} \theta_1 = \psi_1 + V_{13}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) + V_{14}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \theta_2 = \psi_2 + V_{23}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) + V_{24}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \tau_1 = T_1 + U_{13}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) + U_{14}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \tau_2 = T_2 + U_{23}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) + U_{24}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \end{cases} \quad (3.52)$$

în care funcțiile necunoscute $V_{13}, V_{23}, U_{13}, U_{23}$ sunt forme de ordinul trei, iar $V_{14}, V_{24}, U_{14}, U_{24}$ sunt forme de ordinul patru în raport cu T_1, T_2 .

Vom arăta că ele se determină din careva ecuații diferențiale liniare cu derivate parțiale. Astfel, vom căuta transformarea (3.52) sub formă de serii infinite, dar pentru cercetările necesare în această lucrare ne vom mărgini doar la expresiile scrise în continuare.

Construcția ecuațiilor cu derivate parțiale pentru funcțiile necunoscute $V_{13}, V_{23}, U_{13}, U_{23}, V_{14}, V_{24}, U_{14}, U_{24}$ sunt însoțite de efectuarea unui șir de transformări analitice anevoioase, de aceea ele au fost efectuate aplicând SCS Mathematica. Aceste ecuații au forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{13}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{13}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{13}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial U_{23}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{23}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{23}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial V_{13}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial V_{13}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = B_{13}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial V_{23}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial V_{23}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = B_{23}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_{14}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{14}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{14}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial U_{24}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{24}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{24}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial V_{14}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial V_{14}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = B_{14}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial V_{24}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial V_{24}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = B_{24}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \end{array} \right. \quad (3.54)$$

Părțile drepte ale sistemului (3.53) se exprimă prin derivatele parțiale ale formei $F_3(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2)$ în care au fost efectuate substituțiile (3.38):

$$\begin{aligned} A_{13} = - \frac{\partial F_3}{\partial \theta_1} \Big|_{(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)} &= 0.4410576429807893 \cos[\psi_1] T_1^{3/2} - \\ &- 12.700211540297882 \cos[3\psi_1] T_1^{3/2} + 5.140807128421396 \sin[\psi_1] T_1^{3/2} \\ &- 28.341006397553898 \sin[3\psi_1] T_1^{3/2} - 38.58642460870544 \cos^2[\psi_1] \cos[\psi_2] T_1 \sqrt{T_2} - \\ &- 65.42747309795605 \cos[\psi_1] \cos[\psi_2] \sin[\psi_1] T_1 \sqrt{T_2} + \\ &+ 38.58642460870544 \cos[\psi_2] \sin^2[\psi_1] T_1 \sqrt{T_2} + \\ &+ 73.07224617082807 \cos^2[\psi_1] \sin[\psi_2] T_1 \sqrt{T_2} - \\ &- 70.54689060215135 \cos[\psi_1] \sin[\psi_1] \sin[\psi_2] T_1 \sqrt{T_2} - \\ &- 73.07224617082807 \sin^2[\psi_1] \sin[\psi_2] T_1 \sqrt{T_2} + 1.8848837609154767 \cos[\psi_1] \sqrt{T_1} T_2 - \\ &- 23.865686043367923 \cos[\psi_1 - 2\psi_2] \sqrt{T_1} T_2 - \\ &- 1.0624359116678743 \cos[\psi_1 + 2\psi_2] \sqrt{T_1} T_2 + 19.02114995344577 \sin[\psi_1] \sqrt{T_1} T_2 - \\ &- 23.2946324255347 \sin[\psi_1 - 2\psi_2] \sqrt{T_1} T_2 + 2.687826810358894 \sin[\psi_1 + 2\psi_2] \sqrt{T_1} T_2; \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} A_{23} = - \frac{\partial F_3}{\partial \theta_2} \Big|_{(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)} &= 15.426098377291202 \cos^2[\psi_1] \cos[\psi_2] T_1 \sqrt{T_2} + \\ &+ 73.07224617082807 \cos[\psi_1] \cos[\psi_2] \sin[\psi_1] T_1 \sqrt{T_2} - \\ &- 19.84734692378447 \cos[\psi_2] \sin^2[\psi_1] T_1 \sqrt{T_2} - \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
& -7.806124283941839 \cos[\psi_1] \sin[\psi_2] T_1 \sqrt{T_2} + \\
& +38.58642460870544 \cos[\psi_1] \sin[\psi_1] \sin[\psi_2] T_1 \sqrt{T_2} + \\
& +24.907612265036185 \sin^2[\psi_1] \sin[\psi_2] T_1 \sqrt{T_2} + \\
& +47.731372086735846 \cos[\psi_1 - 2\psi_2] \sqrt{T_1 T_2} - \\
& -2.1248718233357486 \cos[\psi_1 + 2\psi_2] \sqrt{T_1 T_2} + \\
& +46.5892648510694 \sin[\psi_1 - 2\psi_2] \sqrt{T_1 T_2} + \\
& +5.375653620717788 \sin[\psi_1 + 2\psi_2] \sqrt{T_1 T_2} - 2.188311042025169 \cos[\psi_2] T_2^{3/2} + \\
& +28.513189397310246 \cos[3\psi_2] T_2^{3/2} + 7.87618565201249 \sin[\psi_2] T_2^{3/2} - \\
& -18.91239601867584 \sin[3\psi_2] T_2^{3/2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{13} = -\frac{\partial F_3}{\partial \tau_1} \Big|_{(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)} &= -7.711210692632093 \cos[\psi_1] \sqrt{T_1} + \\
& +14.170503198776949 \cos[3\psi_1] \sqrt{T_1} + 0.661586464471184 \sin[\psi_1] \sqrt{T_1} \\
& - 6.350105770148941 \sin[3\psi_1] \sqrt{T_1} + \\
& +7.806124283941839 \cos^2[\psi_1] \cos[\psi_2] \sqrt{T_2} - \\
& -38.58642460870544 \cos[\psi_1] \cos[\psi_2] \sin[\psi_1] \sqrt{T_2} - \\
& -24.907612265036185 \cos[\psi_2] \sin^2[\psi_1] \sqrt{T_2} + \\
& +15.426098377291202 \cos^2[\psi_1] \sin[\psi_2] \sqrt{T_2} + \\
& +73.07224617082807 \cos[\psi_1] \sin[\psi_1] \sin[\psi_2] \sqrt{T_2} - \\
& -19.84734692378447 \sin^2[\psi_1] \sin[\psi_2] \sqrt{T_2} - \frac{9.510574976722886 \cos[\psi_1] T_2}{\sqrt{T_1}} + \\
& + \frac{11.64731621276735 \cos[\psi_1 - 2\psi_2] T_2}{\sqrt{T_1}} - \\
& - \frac{1.343913405179447 \cos[\psi_1 + 2\psi_2] T_2}{\sqrt{T_1}} + \frac{0.9424418804577384 \sin[\psi_1] T_2}{\sqrt{T_1}} - \\
& - \frac{11.932843021683961 \sin[\psi_1 - 2\psi_2] T_2}{\sqrt{T_1}} - \frac{0.5312179558339372 \sin[\psi_1 + 2\psi_2] T_2}{\sqrt{T_1}};
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
B_{23} = -\frac{\partial F_3}{\partial \tau_2} \Big|_{(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)} &= -19.02114995344577 \cos[\psi_1] \sqrt{T_1} + \\
&+ 23.2946324255347 \cos[\psi_1 - 2\psi_2] \sqrt{T_1} - 2.687826810358894 \cos[\psi_1 + 2\psi_2] \sqrt{T_1} + \\
&+ 1.8848837609154767 \sin[\psi_1] \sqrt{T_1} - 23.865686043367923 \sin[\psi_1 - 2\psi_2] \sqrt{T_1} - \\
&- 1.0624359116678743 \sin[\psi_1 + 2\psi_2] \sqrt{T_1} + \frac{3.9030621419709197 \cos^2[\psi_1] \cos[\psi_2] T_1}{\sqrt{T_2}} - \\
&- \frac{19.29321230435272 \cos[\psi_1] \cos[\psi_2] \sin[\psi_1] T_1}{\sqrt{T_2}} - \\
&- \frac{12.453806132518093 \cos[\psi_2] \sin^2[\psi_1] T_1}{\sqrt{T_2}} + \\
&+ \frac{7.713049188645601 \cos^2[\psi_1] \sin[\psi_2] T_1}{\sqrt{T_2}} + \\
&+ \frac{36.53612308541403 \cos[\psi_1] \sin[\psi_1] \sin[\psi_2] T_1}{\sqrt{T_2}} - \\
&- \frac{9.923673461892236 \sin^2[\psi_1] \sin[\psi_2] T_1}{\sqrt{T_2}} - 11.814278478018736 \cos[\psi_2] \sqrt{T_2} + \\
&+ 9.45619800933792 \cos[3\psi_2] \sqrt{T_2} - 3.282466563037753 \sin[\psi_2] \sqrt{T_2} + \\
&+ 14.256594698655123 \sin[3\psi_2] \sqrt{T_2}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Din mulțimea de soluții ale sistemului (3.54) vom alege doar pe aceea care ar aduce W_4 al hamiltonianului transformat la forma $W_4 = c_{20}T_1^2 + c_{11}T_1T_2 + c_{02}T_2^2$. Pentru aceasta nu este necesar de cercetat sistemul (3.54) în întregime, dar e suficient de determinat soluțiile doar a primelor sale două ecuații:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{14}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{14}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{14}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial U_{24}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{24}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{24}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \end{cases} \tag{3.59}$$

deoarece funcțiile V_{14} , V_{24} și prin urmare a treia și a patra ecuație a sistemului dat, participă în definirea structurii analitice din descompunerea hamiltonianului (3.51) în termenii de ordin mai mare ca patru.

Care va fi structura analitică a funcțiilor A_{14}, A_{24} ?

Părțile drepte ale ecuațiilor (3.59) conțin toate expresiile care după ultima transformare a formelor F_3 și F_4 asigură ordinul patru în raport cu noile impulsuri T_1 și T_2 . Vom nota aceste expresii prin F_3^* și F_4^* . Atunci obținem:

$$\begin{aligned}
 A_{14} = & -\frac{\partial F_3^*}{\partial \psi_1} - \frac{\partial F_4^*}{\partial \psi_1} = 22.929739667804355 \cos[2\psi_1] T_1^2 - \\
 & -68.38385319555212 \cos[4\psi_1] T_1^2 + 83.38216869103192 \sin[2\psi_1] T_1^2 - \\
 & -108.91469562776504 \sin[4\psi_1] T_1^2 + 64.2810682671449 \cos[\psi_1 - \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
 & -280.1779807075967 \cos[3\psi_1 - \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
 & +20.63643557492631 \cos[\psi_1 + \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
 & +15.276918000302288 \cos[3\psi_1 + \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
 & +129.80848752339247 \sin[\psi_1 - \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
 & -300.78848476139956 \sin[3\psi_1 - \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
 & -105.25976896985165 \sin[\psi_1 + \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
 & +191.61804792018026 \sin[3\psi_1 + \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
 & +112.97538554495097 \cos[2\psi_1] T_1 T_2 - 354.35937989212 \cos[2\psi_1 - 2\psi_2] T_1 T_2 + \\
 & +52.40368398603431 \cos[2\psi_1 + 2\psi_2] T_1 T_2 + 407.7101198739133 \sin[2\psi_1] T_1 T_2 - \\
 & -259.16845689029964 \sin[2\psi_1 - 2\psi_2] T_1 T_2 - \\
 & -128.67097468289336 \sin[2\psi_1 + 2\psi_2] T_1 T_2 - \\
 & -141.6981614958858 \cos[\psi_1 - 3\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
 & +104.59358172774363 \cos[\psi_1 - \psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
 & +31.997866934314022 \cos[\psi_1 + \psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} - \\
 & -46.714894368614736 \cos[\psi_1 + 3\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} -
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
& -67.04598088816495 \sin[\psi_1 - 3\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +210.3324147610021 \sin[\psi_1 - \psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} - \\
& -163.36377933955788 \sin[\psi_1 + \psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +41.533518385870664 \sin[\psi_1 + 3\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{24} = & -\frac{\partial F_3^*}{\partial \psi_2} - \frac{\partial F_4^*}{\partial \psi_2} = -64.28106826714492 \cos[\psi_1 - \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +93.39266023586558 \cos[3\psi_1 - \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +20.636435574926338 \cos[\psi_1 + \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +5.092306000100759 \cos[3\psi_1 + \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
& -129.80848752339247 \sin[\psi_1 - \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +100.26282825379985 \sin[3\psi_1 - \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
& -105.25976896985163 \sin[\psi_1 + \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +63.87268264006008 \sin[3\psi_1 + \psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +354.35937989212 \cos[2\psi_1 - 2\psi_2] T_1 T_2 - 198.42441351673597 \cos[2\psi_2] T_1 T_2 + \\
& +52.40368398603431 \cos[2\psi_1 + 2\psi_2] T_1 T_2 + 259.1684568902997 \sin[2\psi_1 - 2\psi_2] T_1 T_2 + \\
& +260.10418305949287 \sin[2\psi_2] T_1 T_2 - 128.6709746828934 \sin[2\psi_1 + 2\psi_2] T_1 T_2 + \\
& +425.09448448765744 \cos[\psi_1 - 3\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} - \\
& -104.59358172774367 \cos[\psi_1 - \psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +31.99786693431406 \cos[\psi_1 + \psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} - \\
& -140.1446831058442 \cos[\psi_1 + 3\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +201.1379426644948 \sin[\psi_1 - 3\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} - \\
& -210.3324147610021 \sin[\psi_1 - \psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} - \\
& -163.36377933955788 \sin[\psi_1 + \psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +124.60055515761198 \sin[\psi_1 + 3\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} - \\
& -106.97683176075122 \cos[2\psi_2] T_2^2 + 163.23365307041462 \cos[4\psi_2] T_2^2 +
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$+139.82782556167328\sin[2\psi_2]T_2^2 - 42.07087303819599\sin[4\psi_2]T_2^2.$$

Soluțiile sistemelor (3.53) și (3.59) au fost determinate aplicând metoda caracteristicilor, ce constă în faptul că din integrala generală a ecuațiilor cu derivate parțiale, care evident conțin funcții arbitrare, se aleg doar acele părți ale soluției care asigură pentru noul hamiltonian $W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)$ forma (3.51). De fapt se aleg doar acele soluții particulare ale sistemelor (3.53) și (3.59) care depind doar de noile unghiuri fazice ψ_1, ψ_2 sub formă de funcții trigonometrice sinus și cosinus. Pentru cazul studiat am obținut:

$$U_{13} = -10.391601361446803\cos[\psi_1]T_1^{3/2} + \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} &+19.096122023159765\cos[3.\psi_1]T_1^{3/2} + 0.8915516744319283\sin[\psi_1]T_1^{3/2} - \\ &-8.557380986809362\sin[3.\psi_1]T_1^{3/2} + \\ &+40.33259306003576\cos[2.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]T_1\sqrt{T_2} - \\ &-30.235125187090183\cos[1.34910\psi_1 + 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]T_1\sqrt{T_2} - \\ &-28.16025337145765\sin[2.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]T_1\sqrt{T_2} - \\ &-2.481963408633762\sin[1.34910\psi_1 + 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]T_1\sqrt{T_2} - \\ &-38.44925569366907\cos[\psi_1]\sqrt{T_1}T_2 + \\ &+18.002656687485924\cos[0.30179\psi_1 - 2.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]\sqrt{T_1}T_2 + \\ &+20.456903092970766\cos[2.30179\psi_1 - 2.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]\sqrt{T_1}T_2 + \\ &+3.810094439803047\sin[\psi_1]\sqrt{T_1}T_2 - \\ &-7.1160347446861625\sin[0.30179\psi_1 - 2.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]\sqrt{T_1}T_2 - \\ &-20.958391517750506\sin[2.30179\psi_1 - 2.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]\sqrt{T_1}T_2; \end{aligned}$$

$$U_{23} = 26.55471134624281\cos[0.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]T_1\sqrt{T_2} - \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} &-20.16629653001787\cos[2.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]T_1\sqrt{T_2} - \\ &-15.117562593545092\cos[1.34910\psi_1 + 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]T_1\sqrt{T_2} - \\ &-6.86519085777305\sin[0.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)]T_1\sqrt{T_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +14.080126685728823 \sin[2.65089\psi_1 - 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_1 \sqrt{T_2} - \\
& -1.240981704316881 \sin[1.34910\psi_1 + 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_1 \sqrt{T_2} + \\
& +36.00531337497189 \cos[0.30179\psi_1 - 2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} T_2 - \\
& -40.91380618594154 \cos[2.30179\psi_1 - 2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} T_2 - \\
& -14.232069489372334 \sin[0.30179\psi_1 - 2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} T_2 + \\
& +41.916783035501034 \sin[2.30179\psi_1 - 2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} T_2 - \\
& -19.577759069735706 \cos[1.95269\psi_1 - 3. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_2^{3/2} + \\
& +24.45984077289948 \cos[0.65089\psi_1 - 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_2^{3/2} + \\
& +29.516321029817707 \sin[1.95269\psi_1 - 3. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_2^{3/2} - \\
& -6.795896137343677 \sin[0.65089\psi_1 - 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_2^{3/2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{13} = & \frac{1}{\sqrt{T_1}} (-1.3373275116478922 \cos[\psi_1] T_1 + 4.278690493404682 \cos[3. \psi_1] T_1 - \quad (3.64) \\
& -15.587402042170202 \sin[\psi_1] T_1 + 9.548061011579884 \sin[3. \psi_1] T_1 - \\
& -6.865190857773032 \cos[0.65089\psi_1 - 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} + \\
& +14.080126685728821 \cos[2.65089\psi_1 - 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} + \\
& +1.2409817043168798 \cos[1.34910\psi_1 + 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} - \\
& -26.554711346242808 \sin[0.65089\psi_1 - 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} + \\
& +20.166296530017874 \sin[2.65089\psi_1 - 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} - \\
& -15.117562593545093 \sin[1.34910\psi_1 + 1. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} - \\
& -1.9050472199015236 \cos[\psi_1] T_2 + \\
& +10.479195758875257 \cos[2.30179\psi_1] \cos[2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_2 - \\
& -3.558017372343081 \cos[0.30179\psi_1 - 2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_2 - \\
& -19.224627846834533 \sin[\psi_1] T_2 + \\
& +10.228451546485383 \cos[2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] \sin[2.30179\psi_1] T_2 - \\
& -10.228451546485383 \cos[2.30179\psi_1] \sin[2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_2 + \\
& +10.479195758875257 \sin[2.30179\psi_1] \sin[2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_2 - \\
& -9.001328343742966 \sin[0.30179\psi_1 - 2. (0.65089\psi_1 + 1. \psi_2)] T_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{23} = & \frac{1}{\sqrt{T_2}} (-3.4325954288865175 \cos[0.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_1 + \quad (3.65) \\
& + 7.040063342864414 \cos[2.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_1 + \\
& + 0.6204908521584404 \cos[1.34910\psi_1 + 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_1 - \\
& - 13.277355673121406 \sin[0.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_1 + \\
& + 10.083148265008935 \sin[2.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_1 - \\
& - 7.558781296772547 \sin[1.34910\psi_1 + 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_1 - \\
& - 3.8100944398030485 \cos[\psi_1] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} - \\
& 7.116034744686169 \cos[0.30179\psi_1 - 2.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} + \\
& + 20.958391517750513 \cos[2.30179\psi_1 - 2.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} - \\
& - 38.44925569366906 \sin[\psi_1] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} - \\
& - 18.002656687485942 \sin[0.30179\psi_1 - 2.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} + \\
& + 20.456903092970773 \sin[2.30179\psi_1 - 2.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] \sqrt{T_1} \sqrt{T_2} + \\
& + 14.75816051490885 \cos[1.95269\psi_1] \cos[3.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_2 - \\
& - 10.193844206015509 \cos[0.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_2 + \\
& + 9.788879534867847 \cos[3.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] \sin[1.95269\psi_1] T_2 - \\
& - 9.788879534867847 \cos[1.95269\psi_1] \sin[3.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_2 + \\
& + 14.75816051490885 \sin[1.95269\psi_1] \sin[3.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_2 - \\
& - 36.6897611593492 \sin[0.65089\psi_1 - 1.(0.65089\psi_1 + 1.\psi_2)] T_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{14} = & -84.27414567838352 \cos[2.\psi_1] T_1^2 + 55.03990283499471 \cos[4.\psi_1] T_1^2 + \quad (3.66) \\
& + 23.175029523306094 \sin[2.\psi_1] T_1^2 - 34.557693189808944 \sin[4.\psi_1] T_1^2 - \\
& - 158.94021618244867 \cos[0.99999\psi_1 - 1.\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& + 166.53770520163937 \cos[3.\psi_1 - 1.\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& + 609.4839421957992 \cos[1.\psi_1 + 1.\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
& - 164.88678758517497 \cos[3.\psi_1 + 1.\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& + 78.70707903423947 \sin[0.99999\psi_1 - 1.\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
& - 155.1262774972436 \sin[3.\psi_1 - 1.\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +119.49081999864708 \sin[1.\psi_1 + 1.\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +13.145744675998728 \sin[3.\psi_1 + 1.\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
& -412.07158048529936 \cos[2.\psi_1] T_1 T_2 + \\
& +158.66562869547607 \cos[1.99999\psi_1 - 2.\psi_2] T_1 T_2 + 0. \cos[0.60359\psi_1 + 2.\psi_2] T_1 T_2 + \\
& +372.5207344810319 \cos[2.\psi_1 + 2.\psi_2] T_1 T_2 + 114.18393463434526 \sin[2.\psi_1] T_1 T_2 - \\
& -216.94250322492334 \sin[1.99999\psi_1 - 2.\psi_2] T_1 T_2 + 0. \sin[0.60359\psi_1 + 2.\psi_2] T_1 T_2 + \\
& +151.7161029991385 \sin[2.\psi_1 + 2.\psi_2] T_1 T_2 + \\
& +45.89919953610656 \cos[1.\psi_1 - 3.\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} - \\
& -257.53539009739825 \cos[0.99999\psi_1 - 1.\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +945.9226560947177 \cos[1.\psi_1 + 1.\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +88.1242297147578 \cos[1.\psi_1 + 3.\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} - \\
& -97.00554906113962 \sin[1.\psi_1 - 3.\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +128.06656027101766 \sin[0.99999\psi_1 - 1.\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +185.2767327141683 \sin[1.\psi_1 + 1.\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2} + \\
& +99.11787497013307 \sin[1.\psi_1 + 3.\psi_2] \sqrt{T_1} T_2^{3/2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{24} = & 158.94021618244864 \cos[1.\psi_1 - 0.99999\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
& -55.51256840054643 \cos[3.\psi_1 - 0.99999\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +609.483942195799 \cos[0.99999\psi_1 + 0.99999\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
& -54.96226252839165 \cos[3.\psi_1 + 0.99999\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
& -78.70707903423956 \sin[1.\psi_1 - 0.99999\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +51.70875916574789 \sin[3.\psi_1 - 0.99999\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +119.49081999864728 \sin[0.99999\psi_1 + 0.99999\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \\
& +4.381914891999572 \sin[3.\psi_1 + 0.99999\psi_2] T_1^{3/2} \sqrt{T_2} - \\
& -158.66562869547604 \cos[2.\psi_1 - 2.\psi_2] T_1 T_2 + 403.8824872274737 \cos[2.\psi_2] T_1 T_2 + \\
& +372.5207344810319 \cos[2.\psi_1 + 2.\psi_2] T_1 T_2 + \\
& +216.94250322492343 \sin[2.\psi_1 - 2.\psi_2] T_1 T_2 + 308.1078693742571 \sin[2.\psi_2] T_1 T_2 + \\
& +151.7161029991384 \sin[2.\psi_1 + 2.\psi_2] T_1 T_2 -
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
& -137.69759860831962 \cos[1.\psi_1 - 3.\psi_2] \sqrt{T_1 T_2^{3/2}} + \\
& +257.53539009739814 \cos[1.\psi_1 - 0.99999\psi_2] \sqrt{T_1 T_2^{3/2}} + \\
& +945.922656094717 \cos[0.99999\psi_1 + 0.99999\psi_2] \sqrt{T_1 T_2^{3/2}} + \\
& +264.3726891442735 \cos[1.\psi_1 + 3.\psi_2] \sqrt{T_1 T_2^{3/2}} + \\
& +291.0166471834189 \sin[1.\psi_1 - 3.\psi_2] \sqrt{T_1 T_2^{3/2}} - \\
& -128.0665602710177 \sin[1.\psi_1 - 0.99999\psi_2] \sqrt{T_1 T_2^{3/2}} + \\
& +185.27673271416853 \sin[0.99999\psi_1 + 0.99999\psi_2] \sqrt{T_1 T_2^{3/2}} + \\
& +297.3536249103993 \sin[1.\psi_1 + 3.\psi_2] \sqrt{T_1 T_2^{3/2}} + \\
& +217.12072949838256 \cos[2.\psi_2] T_2^2 - 32.66323640518192 \cos[4.\psi_2] T_2^2 + \\
& +166.11062682280973 \sin[2.\psi_2] T_2^2 - 126.73232130647102 \sin[4.\psi_2] T_2^2.
\end{aligned}$$

Efectuând transformarea (3.52) prin intermediul funcțiilor (3.62)-(3.67) obținem pentru hamiltonianul W în vecinătatea punctului staționar S_I cu coordonatele (3.24), calculate pentru $m_1 = 0.01, \alpha = 0.8584$, forma finală:

$$W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) = W_2(T_1, T_2) + W_4(T_1, T_2) + F_5(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) + \dots,$$

unde

$$W_2(T_1, T_2) = \sigma_1 T_1 - \sigma_2 T_2 = 0.49470788472448207 T_1 - 0.32200478020850365 T_2, \quad (3.68)$$

$$W_4(T_1, T_2) = c_{20} T_1^2 + c_{12} T_1 T_2 + c_{10} T_2^2,$$

$$c_{20} = -41.5987, c_{12} = -458.902, c_{10} = 64.1789, \quad (3.69)$$

$$W_4(\sigma_1, \sigma_2) = 65.918 \neq 0.$$

Teorema 3.3 este demonstrată.

Astfel, scopul tuturor transformărilor efectuate mai sus a constat în aceea ca după efectuarea lor forma pătratică și cea de ordinul patru W_2 și W_4 să depindă doar de impulsurile T_1, T_2 , iar forma cubică să se anuleze ($W_3 \equiv 0$).

Să verificăm dacă pentru punctul staționar S_I cu coordonatele (3.24), calculate pentru $m_1 = 0.01, \alpha = 0.8584$, se îndeplinesc condițiile teoremei Arnold-Moser.

În baza studiului putem concluziona :

1. s-au determinat valorile parametrului α , pentru valori date ale lui m_1 , pentru care matricea sistemului (2.25) liniarizat în vecinătatea punctelor de echilibru are valorile proprii numere complexe imaginare. Astfel pentru punctul staționar S_1 cu coordonatele $(1.41168, -0.12379)$, calculate pentru $m_1 = 0.01, \alpha = 0.8584$, valorile proprii ale matricei sistemului liniarizat (2.25) sunt numerele complexe imaginare $\pm 0.49471i, \pm 0.32201i$.
2. se observă că $k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 \neq 0$, unde k_1, k_2 sunt numere întregi ce verifică inegalitatea $0 < |k_1| + |k_2| \leq 4$.
3. pentru punctul staționar S_1 mărimea $W_4(\sigma_1, \sigma_2) = 65.918 \neq 0$, deci este îndeplinită a treia condiție din teorema Arnold-Moser.

Rezultate similare au fost obținute și pentru celelalte poziții bisectoriale de echilibru S_i . Acest rezultat indică că toate calculele efectuate în SCS Matematica sunt corecte și în concordanță cu concluziile teoretice rezultate din cauza simetriei modelului gravitațional studiat. Astfel se poate concluziona că punctele staționare stabile în prima aproximație sunt stabile și în sens Lyapunov. În baza cercetărilor efectuate putem formula următoarea teoremă:

Teorema 3.4. Există așa valori ale parametrului m_1 și valori corespunzătoare ale parametrului α pentru care punctele staționare ale problemei mărginite a opt corpuri sunt stabile nu numai în prima aproximație, dar sunt stabile și în sens Lyapunov.

3.4. Studiul stabilității soluțiilor staționare în forma numerică

Problemă mărginită a n -corpuri este o problemă tipic hamiltoniană. Problema stabilității soluțiilor sale staționare în sens Lyapunov poate fi rezolvată doar în cadrul teoriei KAM (teoria soluțiilor condițional-periodice ale lui A.N.Kolmogorov, V.I. Arnold, J. Moser). Aceasta implică efectuarea unui șir de transformări analitice voluminoase ale hamiltonianului [21, 24, 28, 41].

Dezvoltarea noilor tehnologii computerizate a oferit posibilitatea de a aborda altfel problema a $n+1$ corpuri și permit de a estima calitativ dimensiunea și forma domeniului de stabilitate pentru intervale de timp suficient de mari. Rezultatele obținute furnizează noi

informații despre comportarea navelor cosmice, telescoapelor, sateliților artificiali și a altor corpuri cosmice de dimensiuni mici pe orbită [63, 65, 68].

Existența punctelor staționare din problema newtoniană mărginită și plană a 7+1 corpuri cu simetrie incompletă și stabilitatea lor în sens Lyapunov s-a determinat aplicând teoria KAM [2, 3, 5, 6, 9, 38, 69, 70, 71].

În continuare vom cerceta caracteristicile geometrice ale domeniului de stabilitate a acestor puncte staționare. Așa cum pentru rezolvarea acestei probleme nu pot fi aplicate metodele analitice, s-au efectuat un șir de experimente numerice. Acestea oferă o informație nouă despre comportarea traiectoriei în vecinătatea punctelor de echilibru. Transformările și calculele respective s-au obținut aplicând posibilitățile sistemului de calcul simbolic Mathematica [8, 33, 34, 89].

Ecuatiile diferențiale ce descriu mișcarea corpului $P_7(x, y, z)$ în câmpul gravitațional format de corpurile $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ în spațiul cu rotații au forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} - 2\omega \frac{dY}{dt} = \omega^2 X - \frac{f m_0 X}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial X}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\omega \frac{dX}{dt} = \omega^2 Y - \frac{f m_0 Y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Y}, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{f m_0 Z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Z}, \end{cases} \quad (3.70)$$

unde

$$\begin{cases} R = f \sum_{j=1}^6 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{kj}} - \frac{XX_j + YY_j + ZZ_j}{r_j^3} \right), \\ \Delta_j^2 = (X_j - X)^2 + (Y_j - Y)^2 + (Z_j - Z)^2, \\ r_j^2 = X_j^2 + Y_j^2 + Z_j^2, r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \\ j = 1, 2, \dots, 6, \end{cases} \quad (3.71)$$

$(X_j, Y_j, Z_j = 0)$ sunt coordonatele corpurilor $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, iar $m_2 = m_4 = f_1(m_1, \alpha)$,

$m_5 = m_6 = f_2(m_1, \alpha), \omega^2 = f_3(m_1, \alpha)$ se determină din condițiile de existență a configurației.

Mai întâi vom aplica Programul 3.2, scris în codurile sistemului Mathematica, care oferă posibilitatea de a determina coordonatele punctelor staționare și de a construi în mod grafic soluția problemei mărginite a opt corpuri pentru diferite valori ale parametrilor m_1 și α .

Programul 3.2

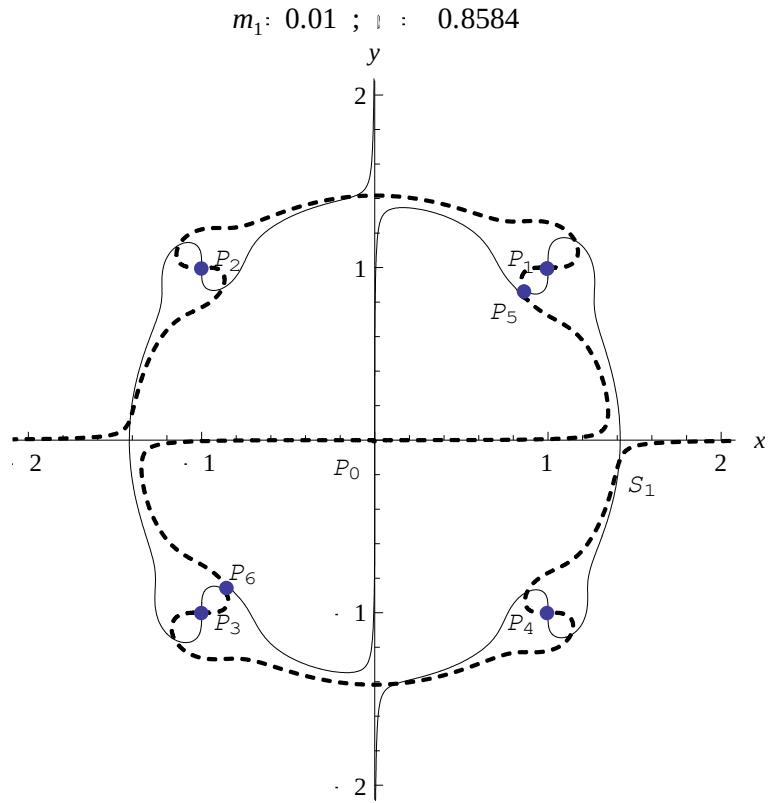
```

gr4[m_,α_]:=Module[{}, gf=f(m1,α); gg=g(m1,α);
cpx=ContourPlot[gf,{x,-2.5,2.5},{y,-2.5,2.5},Contours→{0},ContourShading→False,
PlotPoints→100,ContourStyle→{Black},Axes→True,Frame→False];
cpy=ContourPlot[gg,{x,-2.5,2.5},{y,-2.5,2.5},Contours→{0},ContourShading→False,
PlotPoints→100,ContourStyle→Dashed,Frame→False];
tr=ListPlot[{{1,1},{1,-1},{-1,-1},{-1,1},{1,1}},PlotStyle→{PointSize[0.02]}];
p=ListPlot[{{α,α},{-α,-α}},PlotStyle→{PointSize[0.02]}];
M0:=Graphics[Text["P0",{-0.15,-0.15}]]; M1:=Graphics[Text["P1",{0.85,1.05}]];
M2:=Graphics[Text["P2",{-0.85,1.05}]]; M4:=Graphics[Text["P4",{0.85,-1.05}]];
M3:=Graphics[Text["P3",{-0.85,-1.05}]]; M5:=Graphics[Text["P5",{α-0.1,α-0.1}]];
M6:=Graphics[Text["P6",{-α+0.1,-α+0.1}]]; f1=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,1},{y,0}];
S1:=Graphics[Text["S1",{1.55,-0.25}]]; Print["S1:",f1];
f12=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,1},{y,1.05}]; Print["N1:",f12]; f13=FindRoot[{gf==0,
gg==0},{x,0.9},{y,0.9}]; Print["N2:",f13]; f2=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,0},{y,1}];
Print["S2:",f2]; f21=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,1},{y,-1.05}]; Print["N3:",f21];
f22=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,0.9},{y,-0.9}]; Print["N4:",f22]; f3=FindRoot[{gf==0,
gg==0},{x,-1},{y,0}]; Print["S3:",f3]; f31=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,-1},{y,-1.05}];
Print["N5:",f31]; f32=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,-0.9},{y,-0.9}]; Print["N6:",f32];
f4=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,0},{y,1}]; f41=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,-1},{y,-1.05}];
Print["N7:",f41]; f42=FindRoot[{gf==0,gg==0},{x,-0.9},{y,0.9}]; Print["N8:",f42];
Print["S4:",f4]; Show[cpx,cpy,p,tr,M0,M1,M2,M3,M4,M5,M6,S1,
PlotRange→{{-2,2},{-2,2}},AxesLabel→{x,y},AspectRatio→Automatic,
PlotLabel→m1="<>ToString[m]"; α="<>ToString[α]",
TextStyle→{"Times New Roman",12}]].

```

De exemplu, pentru valorile $m_1 = 0.01$ și $\alpha = 0.8584$, obținem:

```
gr4[0.01,0.8584]
```

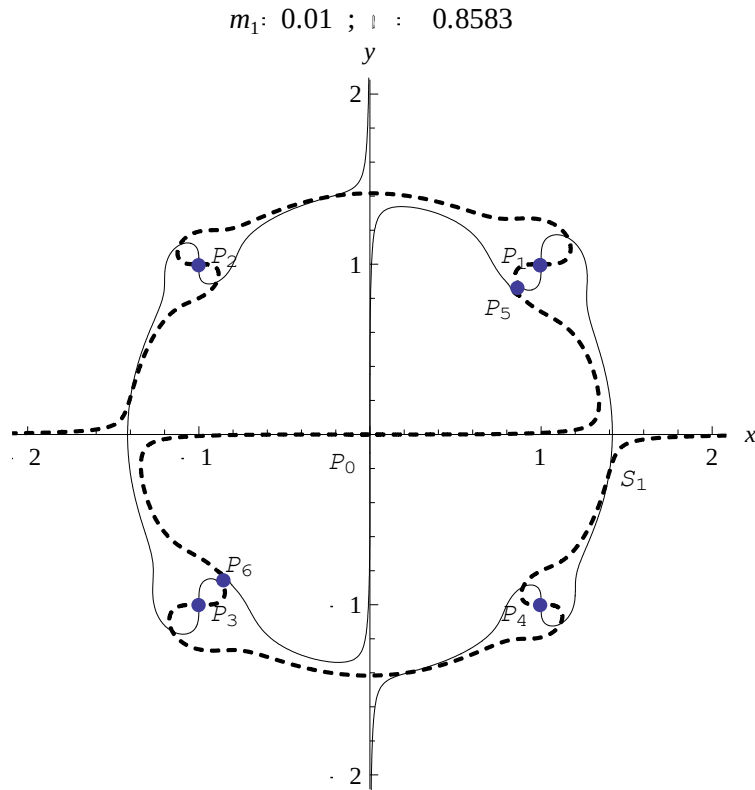



S1: $\{x \rightarrow 1.41168, y \rightarrow -0.123792\}$; N1: $\{x \rightarrow 1.15597, y \rightarrow 1.15597\}$
 N2: $\{x \rightarrow 0.872839, y \rightarrow 0.872839\}$; S2: $\{x \rightarrow -0.123792, y \rightarrow 1.41168\}$
 N3: $\{x \rightarrow 1.13066, y \rightarrow -1.13066\}$; N4: $\{x \rightarrow 0.879787, y \rightarrow -0.879787\}$
 S3: $\{x \rightarrow -1.41168, y \rightarrow 0.123792\}$; N5: $\{x \rightarrow -1.15597, y \rightarrow -1.15597\}$
 N6: $\{x \rightarrow -0.872839, y \rightarrow -0.872839\}$; N7: $\{x \rightarrow -1.15597, y \rightarrow -1.15597\}$
 N8: $\{x \rightarrow -0.879787, y \rightarrow 0.879787\}$; S4: $\{x \rightarrow -0.123792, y \rightarrow 1.41168\}$

Fig. 3.1. **gr4[0.01,0.8584].**

Iar pentru $m_1 = 0.01$ și $\alpha = 0.8583$:

gr4[0.01,0.8583]



S1: $\{x \rightarrow 1.39868, y \rightarrow -0.222864\}$; N1: $\{x \rightarrow 1.15589, y \rightarrow 1.15589\}$
 N2: $\{x \rightarrow 0.874819, y \rightarrow 0.874819\}$; S2: $\{x \rightarrow -0.222864, y \rightarrow 1.39868\}$
 N3: $\{x \rightarrow 1.11278, y \rightarrow -1.11278\}$; N4: $\{x \rightarrow 0.895088, y \rightarrow -0.895088\}$
 S3: $\{x \rightarrow -1.39868, y \rightarrow 0.222864\}$; N5: $\{x \rightarrow -1.15589, y \rightarrow -1.15589\}$
 N6: $\{x \rightarrow -0.874819, y \rightarrow -0.874819\}$; N7: $\{x \rightarrow -1.15589, y \rightarrow -1.15589\}$
 N8: $\{x \rightarrow -0.895088, y \rightarrow 0.895088\}$; S4: $\{x \rightarrow -0.222864, y \rightarrow 1.39868\}$

Fig. 3.2. **gr4[0.01,0.8583]**.

Vom studia în continuare punctul staționar

$$S(1.41168, -0.12379), \quad (3.72)$$

determinat pentru $m_1 = 0.01$ și $\alpha = 0.8584, Z = 0$. El este liniar stabil, deoarece valorile proprii ale matricei sistemului liniarizat au partea reală nulă: $\pm 0.49471i; \pm 0.32201i$.

Folosind sistemul de calcul Mathematica, putem rezolva ecuațiile diferențiale (3.70) cu datele inițiale (3.72) pe un interval de timp destul de mare sub formă de funcții de interpolare:

$$S1 = \text{NDSolve}[\{x''[t] - 2y'[t] == f, x[0] == x_1, x'[0] == 0, \\ y''[t] + 2x'[t] == g, y[0] == y_1, y'[0] == 0\}, \{x, y\}, \{t, 0, 1000\}],$$

prin f, g s-au notat părțile drepte respective ale ecuațiilor (3.70), (x_1, y_1) sunt coordonatele punctului S.

Graficele funcțiilor obținute se construiesc cu ajutorul instrucțiunii:

`ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]}/.S1], {t, 0, t1}, AxesLabel → { " x[t] ", " y[t] " },
AxesOrigin → { x1, y1 }].`

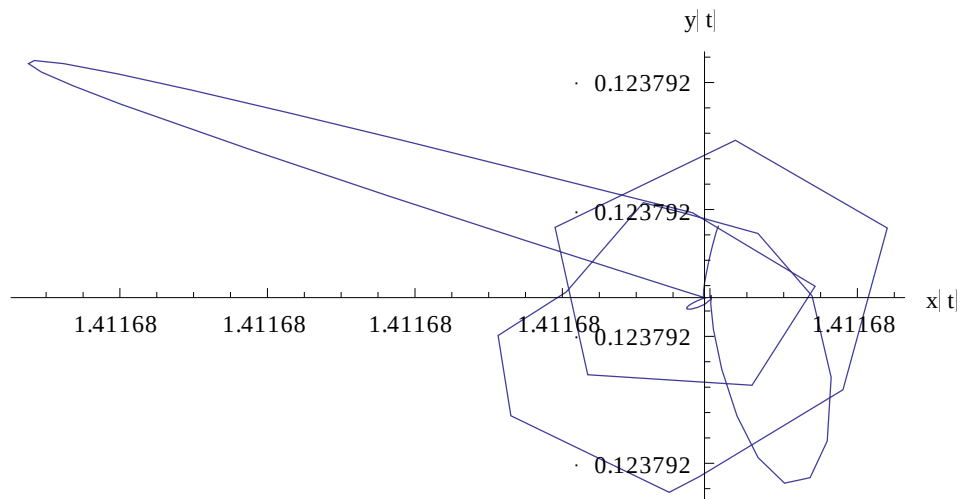


Fig. 3.3. Graficul soluției în vecinătatea punctului S obținut pentru $0 < t < 250$.

Soluțiile ecuațiilor diferențiale se obțin nu sub formă de tabele, dar sub formă de funcții de interpolare. Axele de coordonate au originea în punctul S. Graficele acestora pot fi construite pentru diferite intervale de integrare. În fig. 3.3-3.5 sunt prezentate graficele lor pentru intervalele de timp: $0 < t < 250$, $0 < t < 1000$, $0 < t < 2000$.

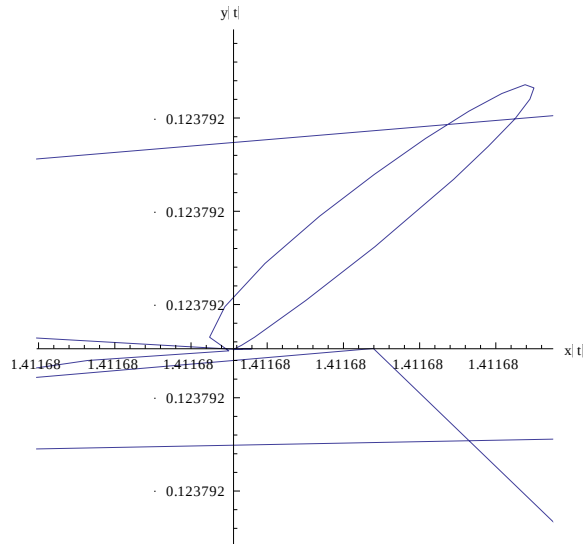


Fig. 3.4. Graficul soluției în vecinătatea punctului S obținut pentru $0 < t < 1000$.

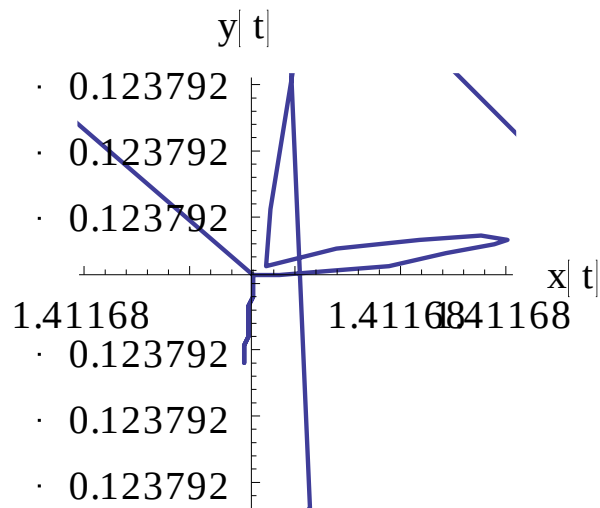


Fig. 3.5. Graficul soluției în vecinătatea punctului S obținut pentru $0 < t < 2000$.

Din desene date se vede traiectoria nu se depărtează cu mult de la punctul de echilibru S.

Pentru punctul staționar

$$N(1.15596; 1.15596) \quad (3.73)$$

determinat pentru $m_1 = 0.01$ și $\alpha = 0.8584$, $Z = 0$, care este liniar instabil, deoarece valorile proprii ale matricei sistemului liniarizat sunt ± 1.30792 , $\pm 1.12295i$, obținem următorul rezultat (Figurele 3.6- 3.7):

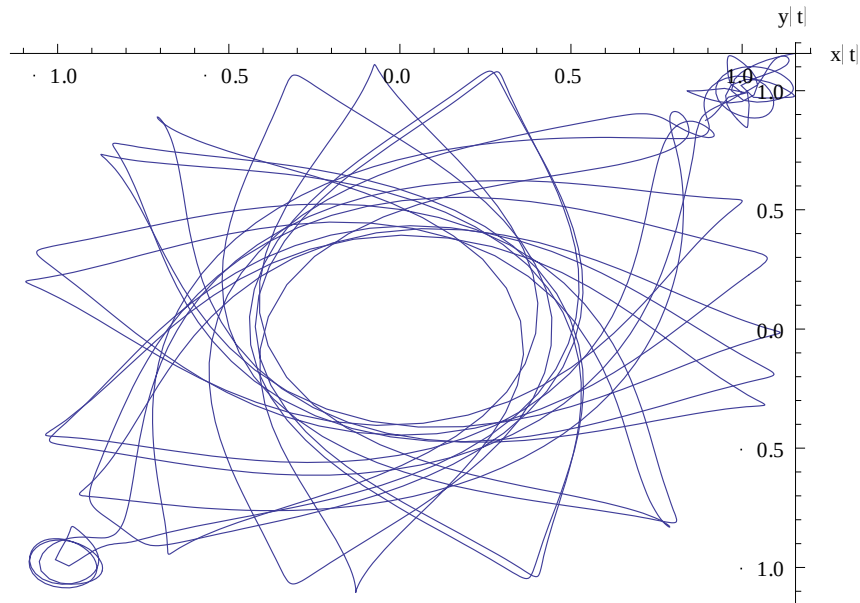


Fig. 3.6. Graficul soluției în vecinătatea punctului N obținut pentru $0 < t < 250$.

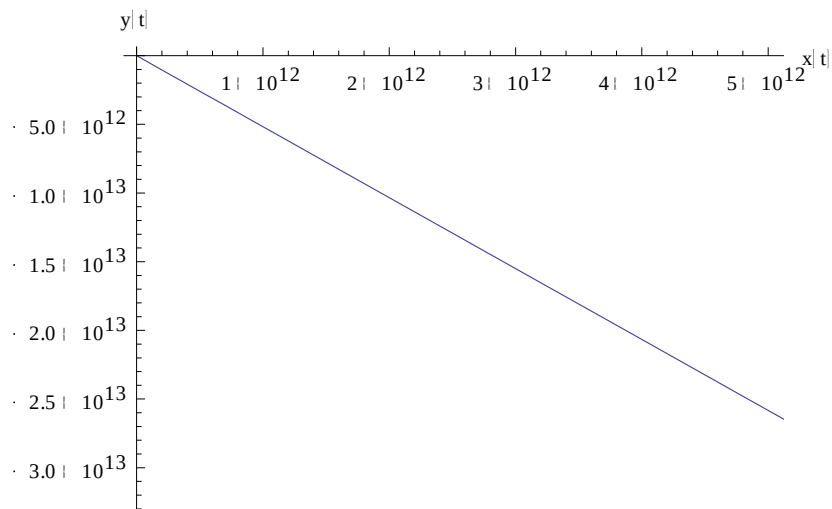


Fig. 3.7. Graficul soluției în vecinătatea punctului N obținut pentru $0 < t < 1000$.

Fie $\Delta r(t)$ distanța locală de la punctul de echilibru până la punctul de pe traiectorie. Vom examina comportarea lui $\Delta r(t)$, pentru aceleași intervale de timp ca în Figurile 3.3-3.5, obținute pentru punctul staționar S. Vom avea:

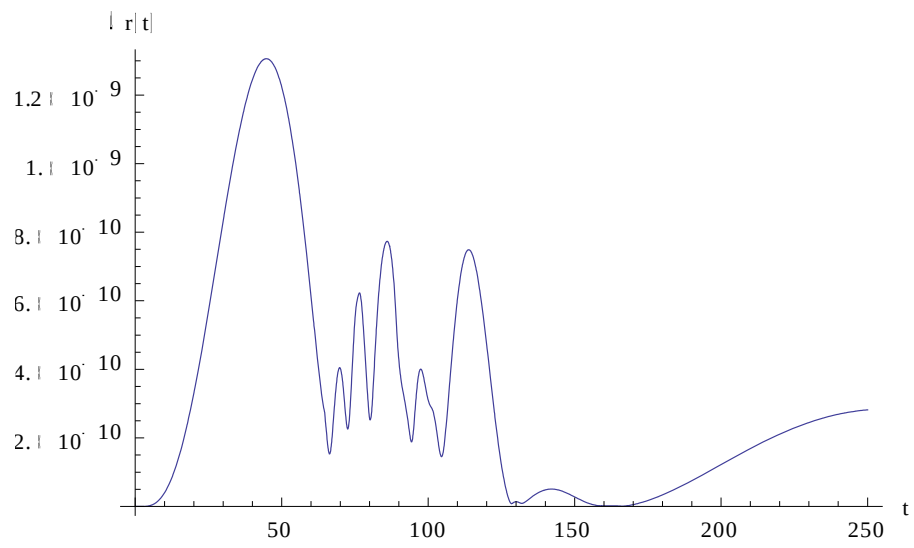


Fig. 3.8. $\Delta r(t)$ obținut pentru punctul S, $0 < t < 250$.

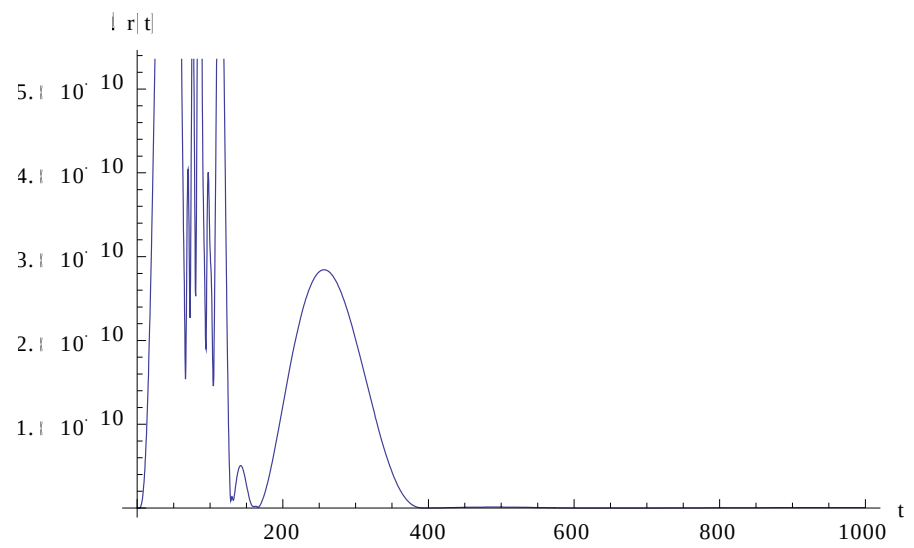


Fig. 3.9. $\Delta r(t)$ obținut pentru punctul S, $0 < t < 1000$.

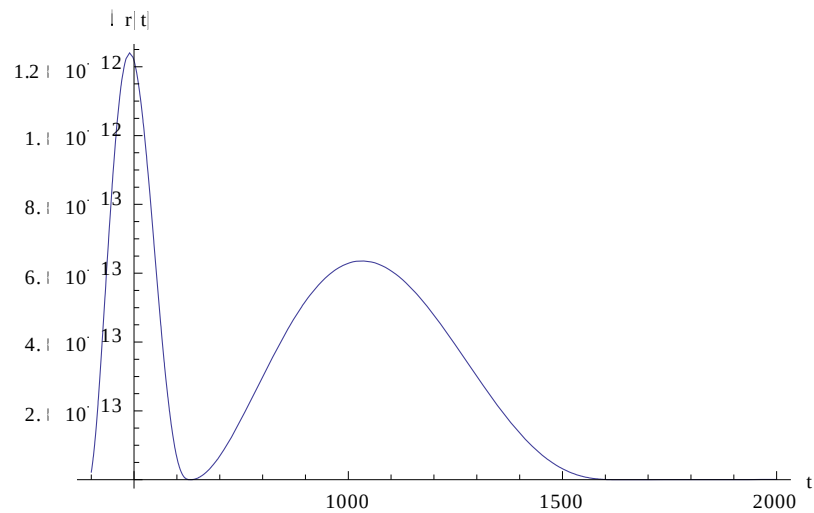


Fig. 3.10. $\Delta r(t)$ obținut pentru punctul S, $0 < t < 2000$.

Din Figurile 3.8-3.10 se vede că depărtarea traiectoriei de la punctul de echilibru S este destul de mică. Pentru intervale mari de timp traiectoria tinde să păstreze aceeași distanță.

Pentru punctul staționar N se obțin următoarele rezultate (Figurile 3.11-3.12):

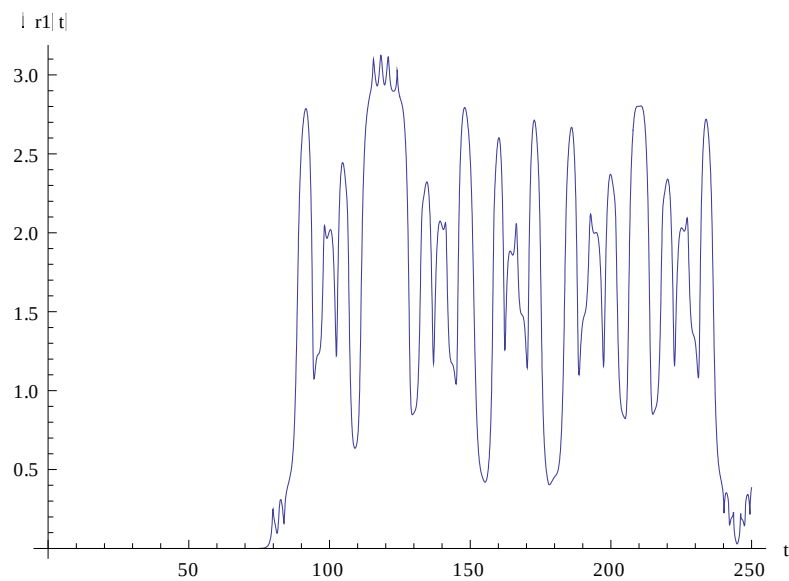


Fig. 3.11. $\Delta r(t)$ obținut pentru punctul N, $0 < t < 250$.

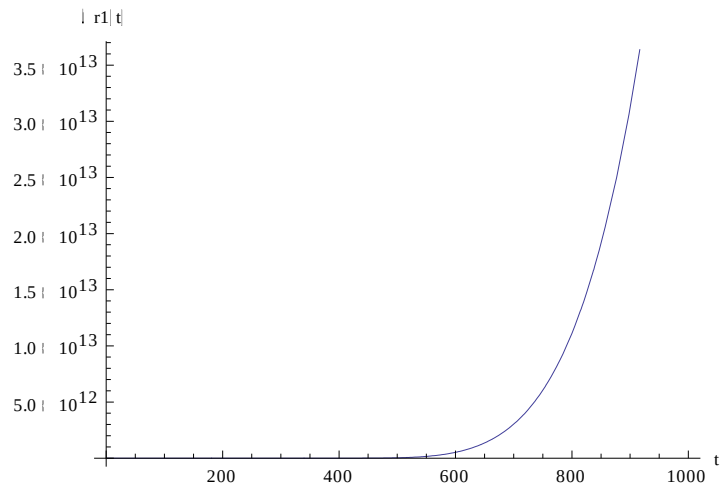


Fig. 3.12. $\Delta r(t)$ obținut pentru punctul N, $0 < t < 1000$.

Deci, în baza acestor experimente numerice putem admite că punctul S este asimptotic stabil, iar punctul staționar N este instabil. Rezultatul obținut nu este în contradicție cu cercetările teoretice.

Vom schimba datele inițiale, perturbând puțin datele inițiale. Fie, de exemplu,

$$x[0] = x_1 + 0,001 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right), x'[0] = 0, y[0] = y_1 + 0,001 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right), y'[0] = 0. \quad (3.74)$$

În urma integrării în forma numerică a ecuațiilor diferențiale (3.70) pentru punctul staționar S cu coordonatele (3.72), aplicând instrucțiunile

$$\begin{aligned} S2 = \text{NDSolve}[\{x''[t] - 2y'[t] == f, x[0] == x_1 + 0,001 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right), x'[0] == 0, \\ y''[t] + 2x'[t] == g, y[0] == y_1 + 0,001 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right), y'[0] == 0\}, \{x, y\}, \{t, 0, 1000\}], \end{aligned} \quad (3.75)$$

```
{{x→InterpolatingFunction[{{0.,1000.}},<>],y→InterpolatingFunction[{{0.,1000.}},<>]}}
```

se obține următoarea reprezentare geometrică a soluției în vecinătatea punctului staționar (Figurile 3.13- 3.16) :

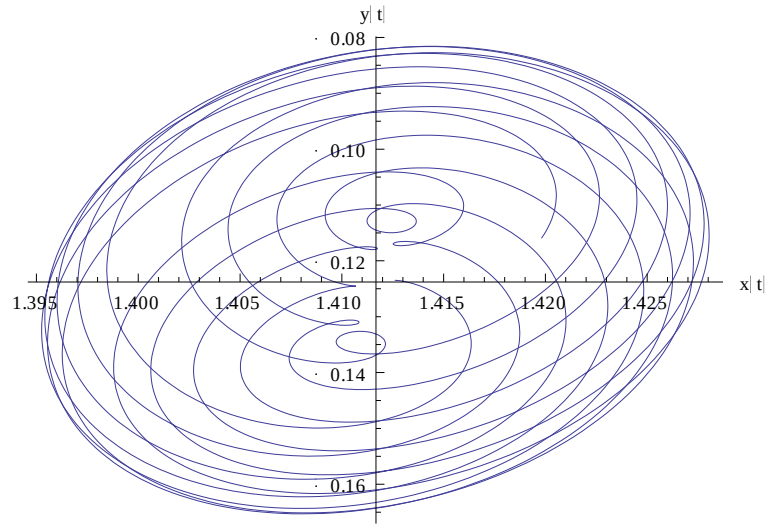


Fig. 3.13. Graficul soluției S2 în vecinătatea punctului S obținut pentru $0 < t < 250$.

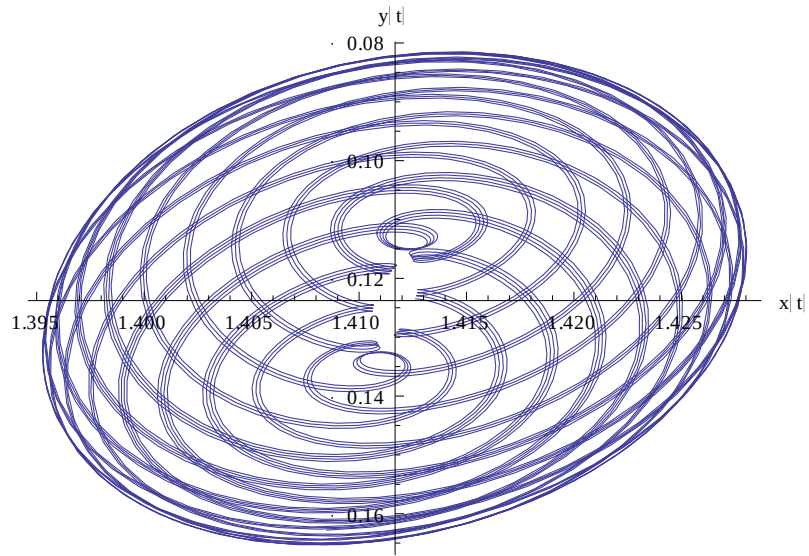


Fig. 3.14. Graficul soluției S2 în vecinătatea punctului S obținut pentru $0 < t < 1000$.

Fie $\Delta r_2(t)$ distanța locală de la punctul de echilibru până la punctul de pe traiectorie, pentru problema cu datele inițiale (3.74).

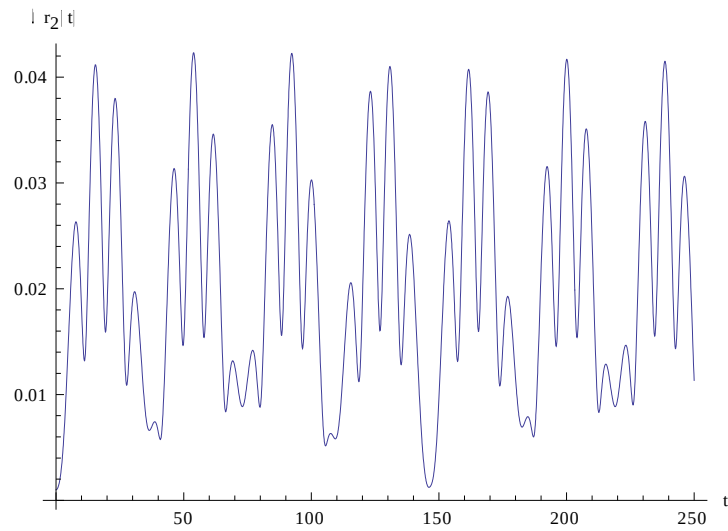


Fig. 3.15. $\Delta r_2(t)$ obținut pentru punctul S, $0 < t < 250$.

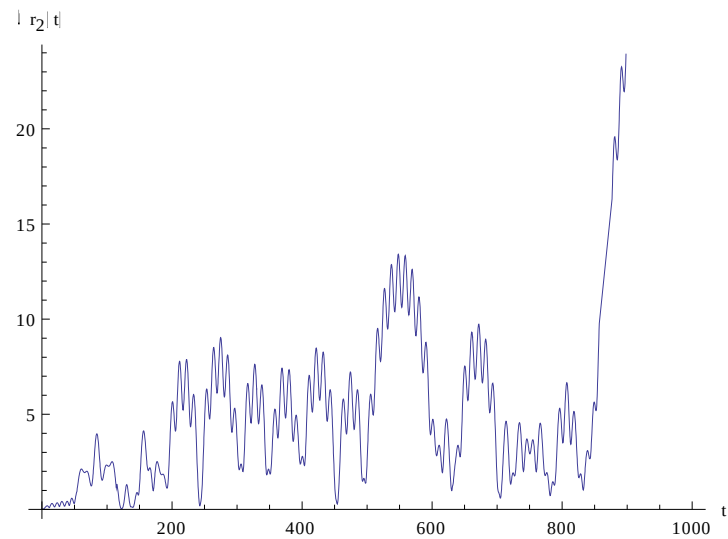


Fig. 3.16. $\Delta r_2(t)$ obținut pentru punctul S, $0 < t < 1000$.

Din Figura 3.16 se observă că pentru $0 < t < 800$ traiectoria se rotește în jurul punctului de echilibru S și nu se îndepărtează cu mult de poziția inițială, iar pentru $t > 800$ traiectoria se

îndepărtează de punctul staționar S și soluția devine instabilă. Valoarea $\varphi = \frac{\pi}{10}$ indică în acest caz direcția vectorului ce descrie poziția inițială în sistemul local de coordonate.

Analizând rezultatele obținute, se poate de făcut o analiză a formei geometrice și a dimensiunilor domeniului de stabilitate a punctului S cu coordonatele (3.72). La o perturbare mică a condițiilor inițiale traiectoria tinde să obțină o formă eliptică.

În bază experimentelor numerice efectuate putem concluziona că procedurile de rezolvare numerică a ecuațiilor diferențiale ale mișcării corpurilor în problema mărginită a opt corpuri, efectuate aplicând SCS Mathematica, permit de a estima calitativ dimensiunea și forma domeniului de stabilitate pentru intervale de timp suficient de mari.

3.5 Concluzii la capitolul 3

Cercetările efectuate în capitolul 3 permit să formulăm următoarele concluzii:

1. În scopul aplicării teoremei Arnold-Moser, s-a construit hamiltonianul corespunzător modelului cercetat.

Transformările efectuate au permis:

- liniarizarea sistemului hamiltonian;
- normalizarea formelor H_2 și H_3 a hamiltonianului;
- eliminarea formei cubice H_3 și normalizarea formei H_4 .

2. Au fost determinate condițiile de stabilitate în sens Lyapunov a punctelor de echilibru. S-a stabilit că există așa valori ale parametrilor m_1 și α pentru care punctele staționare ale problemei mărginite a 7+1 corpuri sunt stabile nu numai în prima aproximație a modelului, dar sunt stabile și în sens Lyapunov.

3. Au fost reconfirmate rezultatele teoretice din capitolele 2 și 3. Procedurile de rezolvare numerică a ecuațiilor diferențiale ale mișcării corpurilor în problema mărginită a 7+1 corpuri permit de a estima calitativ dimensiunea și forma domeniului de stabilitate pentru intervale de timp suficient de mari și oferă posibilitatea de a determina condițiile de aplicare în practică a rezultatelor obținute. Rezultatele experimentelor oferă noi informații despre comportarea traiectoriei ce descrie mișcarea navei cosmice, sateliților artificiali, ș.a pe orbită.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

În rezultatul cercetării influenței câmpului gravitațional al configurației formată din șapte corpuri asupra mișcării unei mase infinit mici amplasate în acest sistem, aplicând teoria KAM putem efectua următoarele concluzii și recomandări:

Concluzii generale:

În teza de față

1. a fost determinată configurația modelului a 7 corpuri;
2. au fost obținute condițiile de existență ale problemei newtoniene a șapte corpuri configurația căreia reprezintă un pătrat în vârfurile căruia se află masele m_1, m_2, m_3, m_4 , două mase m_5 și m_6 se află pe o diagonală a sa, iar al șaptelea corp este plasat în centrul de greutate al sistemului [5, 70, 71];
3. au fost determinate condițiile necesare și suficiente pentru existența soluțiilor de echilibru ale ecuațiilor diferențiale ale problemei mărginite a $7+1$ corpuri, cu simetrie incompletă. Au fost dezvoltate metode analitice pentru determinarea lor [9, 69, 70, 71];
4. s-a demonstrat teorema privind instabilitatea soluțiilor radiale de echilibru ale problemei mărginite a $7+1$ corpuri. S-au stabilit condițiile de stabilitate în sens Lyapunov a punctelor de echilibru [3, 6, 71];
5. s-a elaborat algoritmul de sortare a valorilor parametrilor gravitaționali și geometrici pentru care are loc stabilitatea în prima aproximare a soluțiilor staționare bisectoriale ale problemei mărginite a $7+1$ corpuri. Acest algoritm este validat prin exemple [3, 71];
6. folosind metodele calculului algebric computerizat, s-a construit lanțul de transformări canonice Birghoff care reduce hamiltonianul problemei a $7+1$ corpuri la forma necesară pentru aplicarea teoremei Arnold-Moser despre stabilitatea sistemelor hamiltoniene [3, 6, 70, 71];
7. s-a formulat și demonstrat principalul rezultat al tezei de doctorat cu privire la stabilitatea în sens Lyapunov a soluțiilor staționare ale ecuațiilor diferențiale ce descriu problema newtoniană a $7+1$ corpuri cu simetrie incompletă. S-au determinat condițiile de aplicare în practică a rezultatelor [3, 70].

Recomandări:

Sistemul modern de calcul simbolic Mathematica și algoritmii dezvoltati în teză oferă noi oportunități pentru rezolvarea problemelor mecanicii cerești și dinamicii cosmice, deoarece aceștia permit analiza și prelucrarea informației la un nivel calitativ superior. În acest sens dezvoltarea modelelor dinamicii cosmice, aparatului matematic și softurilor pentru cercetarea lor sunt relevante.

Rezultatele obținute și metodele de cercetare elaborate în teză pot fi folosite: în dezvoltarea de mai departe a studiului problemei newtoniene a $n+1$ corpuri cu simetrie incompletă, în procesul de predare a ecuațiilor diferențiale, mecanica cerească, teoria stabilității, metode de modelare matematică.

În aplicațiile practice ale modelului studiat, corpul de masă infinit mică descrie mișcarea unui satelit sau a unei nave cosmice. Aparatul matematic, algoritmii dezvoltati și rezultatele științifice obținute pot fi folosite la proiectarea, dirijarea zborurilor cosmice ale sateliților și navelor cosmice.

BIBLIOGRAFIE

1. **Cebotaru E.**, Blanaru G. *Despre instabilitatea configurației în formă de triunghi isoscel ascuțitunghic în problema newtoniană a patru corpuri*. Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, 2007, p. 270-272.
2. **Cebotaru E.**, Blanaru G. *Determinarea vitezei unghiulare a mișcării de rotație a cinci corpuri*. Conferința tehnico-științifică a studenților și doctoranzilor consacrată anului fizicii, UTM, 2005, p. 72-73.
3. **Cebotaru E.** *Despre stabilitatea în sens Lyapunov a punctelor staționare în problema mărginită a opt corpuri*. În: Studia Universitatis Moldavie, 2018, nr. 2 (112), p. 19-25.
4. **Cebotaru E.** *Determinarea intervalelor de stabilitate ale unor soluții particulare ale problemei newtoniene a patru corpuri*. Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, 2009, p. 358-359.
5. **Cebotaru E.** *Determinarea unor soluții particulare ale problemei newtoniene a șapte corpuri*. Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, 2010, p. 289-291.
6. **Cebotaru E.** *Normalizarea formei pătratice H_2 a hamiltonianului în problema mărginită a 8-corpuri*. Conferință Internațională de Matematică, Informatică și Tehnologii Informaționale (MITI), Bălți, 2018, p.106.
7. Ciobanu M., **Cebotaru E.** *Kepler și problema a n corpuri*. În Academos, nr. 4, 2018, p. 21-27.
8. Gheorghiu C. *Metode numerice pentru sisteme dinamice*, Cluj-Napoca. Casa Cărții de Știință, 2004, 151 p.
9. Grebenicov E., **Cebotaru E.** *Determinarea punctelor de echilibru în problema mărginită a opt corpuri*. În: Studia Universitatis Moldavie, 2018, nr. 2 (112), p. 12-18.
10. Grebenicov E., Blanaru G., **Cebotaru E.** *Studierea stabilității în prima aproximație a punctelor staționare în problema restrânsă a cinci corpuri în formă de triunghi isoscel*. Conferința jubiliară a doctoranzilor și masteranzilor UTM, 2006, p. 246-249.
11. Neagu V. *Operatori Noetherieni cu aplicații*. Universitatea de Stat din Tiraspol, Chișinău: US Tiraspol, 2015, 200 p.

12. Абалакин В., Аксенов В., Гребенников Е., Демин В., Рябов Ю. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*, под ред. Г.Н.Дубошина. Москва: Наука, 1976, 854 с.
13. Арнольд В. *Математические методы классической механики*. Москва, 1974.
14. Беллман Р. *Теория устойчивости дифференциальных уравнений*, пер. с английского языка. Москва, 1954.
15. Биркгоф Дж. *Динамические системы*. Ижевск: Изд.Дом, «Удмуртский университет», 1999.
16. Виленкин Н. *Метод последовательных приближений*. Москва: Физматгиз, 1968.
17. Гадомский Л., Гребеников Е., Гурская А., Земцова Н. *Новые классы точных решений в проблеме многих тел, взаимно притягивающих друг друга по произвольному закону, зависящему от взаимных расстояний*. Украинский математический журнал, 1998, т.50, № 3, с.329–337.
18. Гончар А. *О новом методе исследования точек равновесия неинерциальной ограниченной проблемы многих тел*. Proceedings of The Third International Workshop on «Mathematica» System in Teaching and Research, Siedlce, September, 5–7, 2001.
19. Гребеников Е. *Метод усреднения в прикладных задачах*. Москва: «Наука», Гл. ред. физ.–мат. л–ры, 1986, 256 с.
20. Гребеников Е. *Лекции по проблеме трех тел*. Сб. «Нелинейные колебания», Изд–во «Наукова Думка», Киев, 1979, 70 с..
21. Гребеников Е. *Математические проблемы гомографической динамики*. Москва: МАКС Пресс, 2010, 256 с.
22. Гребеников Е. *О необходимых и достаточных условиях существования гомографических решений ньютоновой проблемы многих тел в неинерциальных системах отсчета*. Москва, ПАИМС, Сб. «Нелинейный анализ и гомографическая динамика», 1999, с. 5–19.
23. Гребеников Е., Земцова Н. *Новые гомографические решения в ньютоновой задаче многих тел*. Тезисы докладов Международной конференции «Математическое моделирование и вычислительная физика» (Дубна, 7-11 июля 2009г.), Дубна: ОИЯИ, 2009, с.145-146.

24. Гребеников Е., Козак–Сковородкина Д., Якубяк М. *Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел*. Москва: Из–во РУДН, 2002, 212с.
25. Гребеников Е., Диарова Д., Земцова Н. *Существование устойчивых ромбоподобных центральных конфигураций в смысле Уинтнера для ньютоновой модели девяти тел*. Сб. «Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа», ВЦ РАН, 2006, с.65-76.
26. Гребеников Е., Земцова Н. *О существовании асимметричных решений функциональных уравнений Лагранжа-Винтнера*. Сб. Нелинейный анализ и гомографическая динамика, Москва: ПАИМС, 1999, с.70-78.
27. Гребеников Е., Ихсанов Е. *Общий алгоритм генерации дифференциальных уравнений ограниченных задач космической динамики*. Brest: Applications of the «Mathematica» System to Social Processes and Mathematical Physic, Proceedings of the international workshop, 3–6 June 2003, p. 27–33.
28. Гребеников Е., Рябов Ю. *Новые качественные методы в небесной механике*. Москва: «Наука», Гл. редакция физико–математической литературы, 1971, 444 с.
29. Даламбер Ж. (D’Alembert J.) *Динамика*. Москва: Л., 1950.
30. Демидович Б. *Лекции по математической теории устойчивости*. Москва, 1967.
31. Дубошин Г. *Небесная механика. Аналитические и качественные методы*. Москва: Наука, 1964, 460 с.
32. Дубошин Г. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. Москва: Изд-во РУДН, 2002.
33. Дьяконов В. *Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах*. Москва, Солон-Пресс, 2004.
34. Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. *Компьютерная алгебра* / пер. с французского Е.В.Панкратьева; под ред. А.В.Михалева. Москва: МИР, 1991.
35. Жуковский Н. *Теоретическая механика*. Москва: Л., 1950.
36. Земцова Н. *Новые центральные конфигурации ньютоновой проблемы 10-ти тел*. Материалы 3-й международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», Казахстан, Алматы, 17-19 июня 2009, Алматы: Изд-во «ЭВЕРО», 2009, с.11-15.
37. Земцова Н. *Нормализация квадратичной формы гамильтониана ограниченной ньютоновой задачи многих тел*. Проблемы современной науки и образования, 2016,

28 (70), с. 12-15. <https://cyberleninka.ru/article/n/normalizatsiya-kvadratichnoy-formy-gamiltoniana-ogranichennoy-nyutonovoy-zadachi-mnogih-tel>.

38. Земцова Н., Чеботару Е. *О неустойчивости семейства гомографических решений, изображаемых равнобедренными треугольниками в Ньютоновой проблеме четырех тел.*

Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа, Москва: Ран., 2008, с.127-134.

39. Земцова Н., Чеботару Е. *Проблема существования семейства стационарных решений в ньютоновой проблеме четырех тел, изображаемых равнобедренными треугольниками с массой внутри их.* Сб. материалов II Межд. научно–техн.конф. «Роль физ.–мат. наук в современном образовательном пространстве», Казахстан, Атырау, 15–16 мая 2008 г., с. 53–58.

40. Зубов В. *Методы А.М.Ляпунова и их применение.* Л., 1957.

41. Ихсанов Е. *Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики.* Москва, Изд–во РУДН, 2004, 133с..

42. Колмогоров А. *О сохранении условно –периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.* М.: Наука, Доклады АН СССР, 98, №4, 1954, с.527–530.

43. Коперник Н. *О вращениях небесных сфер.* Нюрнберг, Германия, 1543 г.

44. Ла–Салль Ж., Лефшец С. *Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.* пер. с англ., М., 1964.

45. Лагранж Ж. *Аналитическая механика.* 2-е изд., т. 1, Москва, 1950.

46. Ляпунов А. *Общая задача об устойчивости движения.* Гостехиздат, 1950.

47. Малкин И. *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.* Гостехиздат, 1949.

48. Маркеев А. *Исследования устойчивости движений в некоторых задачах небесной механики.* Препринт ИПМ АН СССР, 1970.

49. Маркеев А. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике.* М.: Наука, 1978, 312 с.

50. Мозер Ю. *КАМ–теория и проблема устойчивости.* Научный Изд. Центр «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001, 448 с.

51. Мозер Ю. *Лекции о гамильтоновых системах.* Москва: МИР, 1973.

52. Моисеев Н. *Очерки развития механики.* Изд–во МГУ, М.: 1961.

53. Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*, дополнение А.Н.Крылова в книге: Крылов А.Н.. Собр. Трудов, т.7, Москва: Л., 1936.
54. Поляченко В., Фридман А.М. *Равновесие и устойчивость гравитационных систем*. Москва: 1976.
55. Попа М., Прикоп В. *Проблема центра и фокуса: алгебраические решения и гипотезы*. Акад. Наук Молдовы, Ин-т математики и информатики, Кишинэу, 2018, 256 с.
56. Птолемей К. *«Альмагест» или матем. сочинение в 13 книгах*. Перевод с древнегреческого языка И.Н.Веселовского, Москва, Наука, Физматлит, 1998 г., 672 с..
57. Пуанкаре А. *Избранные труды*. М.: Наука, т.т. 1–3, 1971, 1972.
58. Пуанкаре А. *Лекции по небесной механике*. Наука, М.: 1965.
59. Себехей В. *Теория орбит*, пер. с англ.. М.: Наука, 1982, 657 с..
60. Степанов В. *Курс дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1968.
61. Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики*. М.: Наука, 1967, 512 с.
62. Четаев Н. *Устойчивость движения. Работы по аналитической механике*. М., 1962, 452 с.
63. Чичурин А., Швычкина Е., Кальчук И. *Компьютерные методы исследования в моделях хемостата и качественных исследованиях ограниченной ньютоновой проблемы многих тел*. Вестник Брестского государственного технического университета, №5, 2017, с. 72-76.
64. Ш. де ля Валле–Пуссен. *Лекции по теоретической механике*. т.1,т.2, Москва, Рос. Изд–во Иностр. Лит–ры, 1948–1949.
65. Шестоперов А. И., Ткачев С. С. *Управление тремя спутниками в групповом полете при помощи электростатических сил*. Препринты Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2018, 5–17.
66. Якубяк М. *Достаточные условия линейной устойчивости положений равновесия в гравитационной ньютоновой модели шести тел*. Киев: Наукова Думка, Нелінійні коливання, т.2, № 1, 1999, с. 138–144.
67. Albouy A. *Symmetry of planar four-body convex central configurations*. may 8, 2008, Disponibil: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/464/2093/1355>.
68. Bader Ph., Blanes S., Casas F., Kopylov N. *Symplectic propagators for the Kepler problem with time-dependent mass*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, June 2019.

69. **Cebotaru E.** *Intervals of linear stability of geometrical parameters in the restricted eight bodies problem with incomplete symmetry.* CAIM 2018, September 20-23, Chişinău, 2018, p.32.
70. **Cebotaru E.** *On the restricted eight bodies problem.* În: ROMAI JOURNAL, v.14, no. 1(2018), p. 43-62.
71. **Cebotaru E.** *The application of Mathematica to research the restricted eight bodies problem.* În: Computer Science Journal of Moldova, 2018, v. 26, no. 2(77), p. 182-189.
72. **Cebotaru H.** *Existence condisions of the central configuration in sense Witner for the 4-body problem as an isosceles acute-angled triangle. CERMCS INTERNATIONAL CONFERENCE OF YOUNG SCIENTISTS affiliated to the International Conference " Computer Algebra in Scientic Computing-2006"(CASC 2006), p.20-25.*
73. Choban M., Kenderov P., Revalski J. *Topological Spaces Related to the Banach-Mazur Game and the Generic Well-Posedness of Optimization Problems.* Set-Valued Analysis 3(1995), p. 263-279.
74. Choban M., Kenderov P., Revalski J. *Variational principles and topological games.* Topology and its Appl., 159 (2012), no. 17, p. 3550-3562.
75. Choban M., Kenderov P., Revalski, J. *Generic well-posedness of optimization problems in topological spaces.* Mathematika 36(1989), p. 301-324.
76. Corbera M., Cors J., Roberts G. *A Four-Body Convex Central Configuration with Perpendicular Diagonals Is Necessarily a Kite.* Qual. Theory Dyn. Syst., vol. 17(2), 367–374, 2018. DOI: [10.1007/s12346-017-0238-z].
77. Cozma D. *Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics.* Chişinău: Ştiinţa, 2013. 240 p.
78. Fernandes A., Llibre J., Mello L. *Convex central configurations of the 4-body problem with two pairs of equal adjacent masses.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, October 2017, Volume 226, Issue 1, pp 303–320.
79. Kenta Oshima, Tomohiro Yanao. *Spatial unstable periodic quasi-satellite orbits and their applications to spacecraft trajectories.* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 131(6), June 2019. DOI: 10.1007/s10569-019-9901-9.
80. Kozak D., Oniszk E. *Equilibrium Points in the Restricted Four – Body Problem. Sufficient Conditions for Linear Stability.* Bucharest: Rom.Astron.J. vol. 8, №1, 1998, pp. 27–31.

81. Kuo-Chang Chen and Jun-Shian Hsiao. *Strictly convex central configurations of the planar five-body problem*. Transactions of the American Mathematical Society, **370** (2018), 1907-1924.
82. Neagu N., Orlov V., Popa M. *Invariant conditions of stability of unperturbed motion governed by some differential systems in the plane*. Buletinul AŞM. Matematica, NR. 3(85), 2017, p.88-114.
83. Popa M., Pricop V. *Applications of algebraic methods in solving the centerfocus problem*. In: Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics, 2013, vol. 71, no. 1, p. 45–71.
84. Prokopenya A. *Numerical-Symbolic Methods for Searching Relative Equilibria in the Restricted Problem of Four Bodies*. Mathematical Modelling and Analysis, Volume 23, Issue 3, 2018, p. 507-525. <https://doi.org/10.3846/mma.2018.030>.
85. Prokopenya A. *Computer Algebra Methods for Modeling in Celestial Mechanics*. International Conference Materials, Moscow, June 29 – July 2, 2016, p. 29-32.
86. Prokopenya A., Minglibayev M., Mayemerova G., Imanova Zh. *Investigation of the Restricted Problem of Three Bodies of Variable Masses Using Computer Algebra*. Programming and Computer Software, 2017, Vol. 43, No. 5, pp. 289–293. DOI: 10.1134/S0361768817050061
87. Santoprete M. *Four-body central configurations with one pair of opposite sides parallel*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 464, Issue 1, 1 August 2018, p. 421-434.
88. Wintner A. *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1941.
89. Wolfram S. *The Mathematica Book*. Cambridge: University Press, 1996.
90. Zemtsova N. *Stability of the stationary solutions of the differential equations of restricted Newtonian problem with incomplete symmetry*. Kiev: Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2001, v. 3(1), pp.121-130.
91. Bang D., Elmabsout B. *Configurations polygonales en equilibre relative*. Paris: C. R. Acad. Sci., t. 329, Serie Lib., 2001, p. 243–248.
92. Elmabsout B. *Sur l'existence de certaines configurations d'equilibre relative dans le problème des n corps*. Cel. Mech. and Dyn. Astron., v.4, N 1, 1988, p.131-151.
93. Nechvile V. *Sur une nouvelle forme des equations differentielles du probleme restreint elliptique*. Paris: Compte Rendus, 182, 1926, p.310.

DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnata, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.

Cebotaru Elena

Semnătura:

Data:

CV-ul AUTORULUI

Date personale: Elena Cebotaru, 11.05.1978, Soroca,
Republica Moldova.

Studii: superioare, magistratură la matematică.

1998-2002 – Universitatea de Stat din Moldova, facultatea
de matematică și informatică, specialitatea matematică.

2002-2003 – magistratura la specialitatea matematică la
Universitatea de Stat din Moldova.



2004-2008 – doctorantura la specialitatea 111.02- Ecuații Diferențiale la Universitatea
Tehnică a Moldovei.

Activitatea profesională: lector universitar la departamentul Matematică, Universitatea
Tehnică a Moldovei.

Domeniile de cercetare științifică: Ecuații diferențiale, modelare matematică.

Participări la foruri științifice naționale și internaționale:

- Conferința tehnico-științifică a studenților și doctoranzilor consacrată anului fizicii,
UTM, noiembrie 17, 2005;
- CERMCS INTERNATIONAL CONFERENCE OF YOUNG SCIENTISTS affiliated
to the International Conference "Computer Algebra in Scientific Computing-2006" (CASC
2006) September 11-15, 2006, Chișinău, Moldova;
- II международная научно-теоретическая конференция "Роль физико-
математических наук в современном образовательном пространстве" , май 15-16,
Атырау, Казахстан, 2008;
- Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа, Москва, 2008;
- Conferința jubiliară a doctoranzilor și masteranzilor ai UTM, noiembrie 17-18, 2006;
- Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, noiembrie 15-17, 2007;
- Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, decembrie 10-12, 2009;
- Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, noiembrie 17-19, 2010;
- Conferința doctoranzilor și masteranzilor UTM, decembrie 8-10, 2011;

- Seminarul "Ecuatii diferențiale și algebre" de pe lângă Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chișinău); Noiembrie 13, Chișinău, 2018;
- Seminarul științifico-metodic "Prof. Petre Osmătescu", Noiembrie 14, Chișinău, 2018;
- The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2018), September 20-23, 2018, Chișinău, Moldova;
- Seminarul Științific "Probleme actuale de Matematică și Informatică", USM, martie 14, 2018;
- Conferință Internațională de Matematică, Informatică și Tehnologii Informaționale (MITI), aprilie 19-21, USARB, Bălți, Moldova, 2018.

Lucrări științifice publicate: Articole științifice - 5; Materiale ale comunicărilor științifice 15.

Date de contact: tel. serv. 0 22 50 99 31; tel. mob. 069 07 31 69;

e-mail: elena.cebotaru@mate.utm.md;

adresa: Ștefan cel Mare și Sfânt 168, MD-2004, Chișinău, Republica Moldova.