INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
VLADIMIR ANDRUNACHIEVICI

Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 512.548

JARDAN ION

DESPRE UNELE CONSTRUCŢII SPECIALE DIN TEORIA RADICALILOR ÎN CATEGORII DE MODULE

111.03 – LOGICĂ MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Rezumatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

CHIŞINĂU, 2020

Teza a fost elaborată în laboratorul Algebră şi Topologie al Institutului de Matematică şi Informatică „Vladimir Andrunachievici”.

Conducător ştiinţific:

Caşu Alexei, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar.

Referenţi oficiali:

1. Botnaru Dumitru, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar;

2. Popa Valeriu, doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar, I.M.I „V. Andrunachievici”.

Membri ai consiliului ştiinţific specializat:

1. Arnautov Vladimir, dr. hab. în şt. fiz.-mat., acad. A.Ş.M., preşedinte al C.Ş.S.;

2. Izbaş Vladimir, dr. în şt. fiz.-mat., conf. cercetător, secretar ştiinţific al C.Ş.S.;

3. Ciobanu Mitrofan, dr. hab. în şt. fiz.-mat., acad. A.Ş.M., prof. univ.;

4. Ursu Vasile, dr. hab. în şt. fiz.-mat., prof. univ.;

5. Cojuhari Elena, dr. în şt. fiz.-mat., conf. univ.

Susţinerea va avea loc la **18 septembrie 2020, ora 15.00** în cadrul şedinţei Consiliului ştiinţific specializat D 111.03-01 de pe lângă Institutului de Matematică şi Informatică „Vladimir Andrunachievici”, cab.340, str. Academiei 5, Chişinău, MD-2028, Republica Moldova.

Teza de doctorat şi rezumatul ei pot fi consultate la biblioteca Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova şi pe pagina web a ANACEC.

Rezumatul a fost expediat la 17 august 2020.

Secretar ştiinţific al Consiliului ştiinţific specializat,

Izbaş Vladimir, dr., conf. cerc. __________

Conducător ştiinţific,

Caşu Alexei, dr.hab., prof. univ. __________

Autor

Jardan Ion __________

CUPRINS

Reperele conceptuale ale cercetării

Actualitatea temei. Întrebările cercetate în lucrare au un caracter actual şi inovator. Tematica tezei posedă un ecou suficient de bine accentuat în literatura de specialitate. Într-adevăr, structura laticeală a clasei preradicalilor a fost intens cercetată şi utilizată în ultimii ani, în special în lucrările [14 – 17], [26 – 28], [38 – 41].

Toate cele patru operaţii clasice din clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ categoriei R-modulelor stângi R-Mod sunt intens utilizate în lucrările recente referitoare la proprietăţile acestei clase, la caracterizarea prin preradicali a unor clase de inele, cât şi în multe alte cazuri.

Actualitatea problemelor cercetate în lucrare se reflectă şi în faptul că noile rezultate permit reformularea unor lucruri cunoscute şi prezentarea lor drept cazuri particulare ale celor noi. Astfel, abordarea teoriei radicalilor arătată în lucrare reprezintă şi un nou punct de vedere asupra unei părţi din rezultatele cunoscute.

Descrierea situaţiei în domeniul de cercetare şi identificarea problemelor de cercetare. Noţiunea de *radical* poartă un caracter foarte general şi se utilizează în diverse sisteme algebrice (în grupuri, inele, module, algebre, categorii, etc.). Cu ajutorul acestei noţiuni se evidenţiază structura unor tipuri speciale de inele şi algebre ([10]).

O ramură specială a teoriei generale a radicalilor în algebră o constituie teoria radicalilor şi torsiunilor în categorii abeliene şi în special în categorii de module. Aplicarea ideii generale de radical în acest caz s-a dovedit a fi deosebit de rodnică din cauza, că categoriile de module posedă o mulţime de proprietăţi excelente (pe care nu le au aşa categorii ca cea a inelelor sau a grupurilor, în particular, categoria de tipul R-Mod este abeliană, posedă generatori, cogeneratori, etc.), ceea ce asigură posibilitatea de dezvoltare a acestei teorii în foarte multe direcţii. De aceea, teoria radicalilor în module formează în prezent un domeniu sinestătător, care posedă propriile metode, construcţii, cât şi problematica sa specifică.

Bazele cercetărilor în domeniul teoriei radicalilor în module (şi în general în categorii abeliene) au fost puse în disertaţia lui P. Gabriel „Des categories abeliennes", scrisă în 1962 (vezi [4]). Apoi au urmat multe lucrări importante pe această tematică, efectuate de S. E. Dickson, J. P. Jans, J. M. Maranda, O. Goldman, K. Morita, J. Lambek, şi alţii.

Acumularea unui material impunător pe tema analizată a adus la apariţia unor monografii consacrate acestui domeniu. Menţionăm mai întâi cartea A. P. Mişina şi L. A. Scorneacov „Grupuri abeliene şi module" (1969). Apoi au apărut monografiile:

J. Lambek [7], B. Stenstorm [9] în anul 1971, cât şi cărţile cu expunere mai amănunţită a tematicii: N. Popescu [8] (1973) şi J. Golan [5] (1986).

La fel merită de amintit faptul, că în monografia fundamentală a lui Carl Faith „Algebra: rings, modules and categories", scrisă în două volume (I, 1973 [2] şi II, 1976 [3]) este expusă şi o parte esenţială a teoriei radicalilor în module (vezi volumul I, capitolul 16).

S-a constatat faptul, că la baza cercetărilor în acest domeniu este mai firesc de pus noţiunea de *preradical*, care se exprimă în limbajul categorial ca fiind un subfunctor al functorului identic al categoriei R-Mod. Toate tipurile de preradicali (printre care şi noţiunea centrală de torsiune) se obţin prin condiţii simple suplimentare: idempotenţa, „radicalitatea", ereditatea, coereditatea, etc.

O trăsătură specifică a acestui domeniu constă în aceea, că majoritatea tipurilor de preradicali posedă caracterizări foarte diverse cu ajutorul diferitor mijloace: prin clase de module, operatori de închidere, mulţimi de ideale stângi ale inelului R (filtre radicale), functori de localizare, subcategorii reflective, etc. Mai evidenţiem un fapt specific pentru teoria radicalilor în module: orice torsiune defineşte aşa numitul functor de localizare asociat, care este strâns legat de inele de câturi. Astfel toate noţiunile precedente de inele de câturi au obţinut o unică şi firească generalizare prin localizările asociate torsiunilor [9].

Dintre monografiile apărute în acest domeniu menţionăm în mod special cartea L. Bican, T. Kepka, P. Nemec (în colaborare cu P. Jambor) „Rings, modules and preradicals" (1982) [1], ce conţine o expunere minuţioasă a teoriei, începând de la preradicali (majoritatea lucrărilor precedente erau consacrate torsiunilor), cu aplicaţii interesante la caracterizarea omologică a inelelor, utilizând condiţii asupra preradicalilor de diverse tipuri.

Merită menţionat un ciclu de articole al unui grup de algebrişti din Mexic (F. Raggi, J. R. Montes, H. Rincon, R. Fernandez-Alonso, C. Signoret, etc.), care au studiat structura laticeală a clasei preradicalilor [33 – 35], preradicalii primi, $\wedge$- primi şi ireductibili [36], preradicalii coprimi, $\vee$-coprimi şi coireductibili [37], descrierea unor clase de inele, şi alte întrebări.

În continuare cercetările pe această tematică s-au aprofundat şi diversificat în aşa măsură, încât este greu de urmărit cât de cât sistematic literatura din acest domeniu. Putem menţiona doar o parte dintre autorii, care au contribuţii importante în dezvoltarea acestei tematici: L. Bican, P. Jambor, T. Kepka, P. Nemec, M. Teply,

K. Morita, J. E. Viola-Prioli, Iu. M. Reabuhin, L. A. Scorneacov, T. Kato, C. Walker, E. Walker, T. Albu, J. A. Beachy, K. Ohtake, Y. Kurata, R. J. McMaster, B. J. Muller, C. Năstăsescu, H. Tachikawa, R. Wisbauer, etc.

În monografia [11], A. I. Caşu a expus atât bazele teoriei radicalilor în module, cât şi unele probleme speciale legate de localizări şi colocalizări. O sinteză a următoarelor cicluri de lucrări ale aceluiaşi autor este expusă în lucrarea [26]. Nemijlocit de tematica prezentei teze sunt legate articolele [22 – 25], în care se introduc şi se cercetează unele operaţii noi (în laticea completă a submodulelor), definite cu ajutorul preradicalilor.

De asemenea, nemijlocit pe tematica tezei este capitolul patru din monografia lui J.S. Golan „Linear topologies on a ring” [6], unde este definită şi studiată o operaţie similară celor din prezenta lucrare (în laticea filtrelor preradicale).

Problema de cercetare. Elaborarea unor construcţii speciale în teoria radicalilor în categorii de module, şi anume, introducerea şi studierea a noi operaţii în clasa preradicalilor unei categorii de module, în scopul aprofundării instrumentale şi completării metodelor de cercetare în acest domeniu.

Scopul şi obiectivele lucrării. Scopul principal al lucrării constă în introducerea şi studierea unor operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module. Pentru realizarea acestui scop au fost stabilite următoarele obiective:

1. Introducerea unor operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module;
2. Determinarea proprietăţilor principale ale acestor operaţii;
3. Identificarea proprietăţilor preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării acestor construcţii;
4. Cercetarea unor cazuri particulare ale operaţiilor definite şi legăturilor dintre preradicalii obţinuţi;
5. Evidenţierea relaţiilor dintre noile operaţii şi unele noţiuni şi construcţii cunoscute din teoria radicalilor;
6. Studierea comportamentului acestor operaţii în cazul unor preradicali de tip special.

Metodologia cercetării ştiinţifice. În prezenta lucrare se utilizează metodele clasice ale algebrei, orientate spre cercetarea operaţiilor algebrice şi a proprietăţilor lor. Totodată aceste metode sunt combinate cu o abordare modernă, legată de aspectul şi limbajul categorial. La baza cercetărilor se află rezultatele bine cunoscute, referitoare la teoria radicalilor în categorii abeliene, în special în categorii de module.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. Toate rezultatele principale ale lucrării sunt noi şi originale. Ele constituie o continuare firească a cercetărilor precedente din acest domeniu. Anume, celor patru operaţii cunoscute în clasa preradicalilor li se adaugă încă patru operaţii noi. Au fost determinate proprietăţile lor; compatibilitatea lor cu operaţiile laticeale din clasa preradicalilor. Au fost cercetate unele cazuri particu-lare ale noilor operaţii; au fost stabilite relaţiile dintre ele şi unele construcţii din teoria radicalilor; a fost descris comportamentul lor în cazul unor preradicali de tip special.

Rezultatul obţinut care contribuie la soluţionarea unei probleme ştiinţifice importante. Problema principală rezolvată constă în introducerea şi cercetarea a patru operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module, ceea ce a condus la îmbogăţirea rezervei instrumentale de lucru în această clasă, pentru completarea studiului în domeniul teoriei inelelor şi a modulelor.

Semnificaţia teoretică. Lucrarea are un caracter teoretic şi reprezintă un pas important în dezvoltarea teoriei radicalilor în module.

Valoarea aplicativă a lucrării. Rolul rezultatelor obţinute constă în: lărgirea spectrului de cunoştinţe în domeniu prin introducerea unor noi operaţii în clasa preradicalilor; completarea esenţială a metodelor de cercetare cu ajutorul noilor operaţii; posibilitatea de aplicare a lor la probleme structurale.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere:

– au fost definite patru operaţii noi în clasa preradicalilor a unei categorii de module, şi anume, câtul stâng în raport cu reuniunea, cocâtul stâng în raport cu intersecţia, câtul stâng în raport cu intersecţia şi cocâtul stâng în raport cu reuniunea;

– au fost determinate proprietăţile acestor operaţii şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării acestor construcţii;

– au fost examinate cazurile particulare ale operaţiilor introduse şi legăturile dintre preradicalii obţinuţi;

– au fost stabilite relaţiile dintre noile operaţii şi unele noţiuni şi construcţii din teoria radicalilor (pseudocomplement, suplement);

– a fost descris comportamentul operaţiilor noi definite în cazul unor preradicali de tip special;

– a fost arătat, că cocâtul stâng în raport cu intersecţia reprezintă o generalizare a unui cunoscut rezultat al lui J. Golan.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele noi obţinute pot fi utilizate în dezvoltarea de mai departe a teoriei radicalilor, pot găsi aplicaţii în cercetări adiacente, pot fi folosite în calitate de suport de cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele lucrării au fost expuse la următoarele foruri ştiinţifice:

– Seminarul ştiinţific al laboratorului „Algebră şi Topologie” de pe lângă Institutul de Matematică şi Informatică „Vladimir Andrunachievici”;

– Seminarul ştiinţifico-metodic „Prof. Petre Osmătescu – 80” al departamentului „Matematica” de pe lângă Universitatea Tehnică a Moldovei;

– The International Conference „Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE)”, 2015, Chişinău, Moldova;

– The International Conference „Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE)”, 2016, Chişinău, Moldova;

– The 4^{th} Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova (CMSM), Chişinău, 2017;

– The International Conference on Mathematics, Informatics and Technologies dedicated to the ilustrous scientist Valentin Belousov (MITI), 2018, Bălţi, Moldova;

– The 26^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), 2018, Chişinău, Moldova;

– The International Conference „Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE)”, 2019, Chişinău, Moldova.

Publicaţii la tema tezei. Rezultatele principale ale tezei au fost publicate în 9 lucrări ştiinţifice, lista cărora este adusă la sfârşitul autoreferatului, toate lucrările sunt scrise fără coautori, inclusiv 3 articole – în reviste recenzate.

Volumul şi structura tezei. Teza constă din introducere, 5 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie ce cuprinde 133 de titluri, 91 pagini de text de bază.

Cuvintele-cheie. Inel, modul, categorie, latice, (pre)radical, (pre)torsiune.

CONŢINUTUL TEZEI

În **Introducere** se argumentează actualitatea temei lucrării, se prezintă scopul şi obiectivele tezei, noutatea ştiinţifică a rezultatelor obţinute, importanţa teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării, aprobarea rezultatelor şi se expune succint conţinutul lucrării pe capitole, cu evidenţierea rezultatelor principale.

Primul capitol intitulat „Analiza situaţiei în domeniul teoriei radicalilor în module" este constituit din două paragrafe. În primul paragraf sunt date noţiunile de bază şi este făcută o analiză amplă a domeniului teoriei radicalilor, ce ţine de tema tezei de doctorat. În paragraful doi este făcută o analiză succintă a materialelor ştiinţifice în domeniu, descriind pe scurt cercetările şi rezultatele din teorea radicalilor în module. De asemenea, se argumentează actualitatea problemei de cercetare.

În **capitolul doi** al tezei cu titlu „Câtul stâng în raport cu reuniunea", ce constă din patru paragrafe, se defineşte şi se cercetează o nouă operaţie în clasa $\mathbb{PR}$ a preradicalilor categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, inversa la stânga a produsului în raport cu reuniunea. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în lucrările [47; 51; 55].

În primul paragraf se defineşte operaţia *câtul stâng în raport cu reuniunea*, apoi se arată unele proprietăţi principale ale ei.

Definiţia 2.1. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Vom numi **cât stâng în raport cu reuniunea al lui** r **pe** s cel mai mare preradical dintre preradicalii $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $r_\alpha \cdot s \leq r$. Vom nota acest preradical prin $r \,{}^{\vee}\!\!/\!.\, s$.

Vom spune, că preradicalul r este *numărătorul*, iar preradicalul s este *numitorul* câtului stâng $r \,{}^{\vee}\!\!/\!.\, s$.

În baza proprietăţii de distributivitate la stânga a produsului preradicalilor în raport cu reuniunea, acest cât stâng există pentru orice pereche de preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ şi el poate fi reprezentat în forma:

$$r \,{}^{\vee}\!\!/\!.\, s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \leq r \}.$$

În raport cu relaţia de ordine parţială $(\leq)$ din clasa $\mathbb{PR}$ au loc următoarele afirmaţii.

Propoziţia 2.3. (Monotonie la numărător) Dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{PR}$ şi $r_1 \leq r_2$, atunci $r_1 \,{}^{\vee}\!\!/\!.\, s \leq r_2 \,{}^{\vee}\!\!/\!.\, s$ pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

Propoziţia 2.4. (Antimonotonie la numitor) Dacă $s_1, s_2 \in \mathbb{PR}$ şi $s_1 \leq s_2$, atunci $r \,{}^{\vee}\!\!/\!.\, s_1 \geq r \,{}^{\vee}\!\!/\!.\, s_2$ pentru orice preradical $r \in \mathbb{PR}$.

Următorul rezultat obţinut este foarte important, deoarece el poate fi considerat ca o altă definiţie a câtului stâng în raport cu reuniunea şi este des utilizat în obţinerea altor afirmaţii.

Teorema 2.5. Pentru orice preradicali $r, s, t \in \mathbb{PR}$ are loc relaţia:

$$r \geq t \cdot s \Leftrightarrow r \curlyvee\!\!/.\, s \geq t.$$

În continuare se arătă unele proprietăţi ale câtului stâng în raport cu reuniunea (Lema 2.2, Propoziţiile 2.6, 2.7, 2.8).

Propoziţie. În clasa $\mathbb{PR}$ sunt adevărate relaţiile:

(1) $r \curlyvee\!\!/.\, s \geq r$; (2) $(r \curlyvee\!\!/.\, s) \cdot s \leq r \leq (r \cdot s) \curlyvee\!\!/.\, s$;

(3) $(r \curlyvee\!\!/.\, s) \curlyvee\!\!/.\, t = r \curlyvee\!\!/.\, (t \cdot s)$; (4) $(r \cdot s) \curlyvee\!\!/.\, t \geq r \cdot (s \curlyvee\!\!/.\, t)$;

(5) $(r \curlyvee\!\!/.\, t) \curlyvee\!\!/.\, (s \curlyvee\!\!/.\, t) \geq r \curlyvee\!\!/.\, s$; (6) $(r \cdot t) \curlyvee\!\!/.\, (s \cdot t) \geq r \curlyvee\!\!/.\, s$.

Relaţiile dintre acest cât stâng şi operaţiile laticeale „$\wedge$" şi „$\vee$" din clasa $\mathbb{PR}$ sunt indicate în:

Teorema 2.9. (Distributivitatea câtului stâng $r \curlyvee\!\!/.\, s$ în raport cu intersecţia) Fie $s \in \mathbb{PR}$. Atunci pentru orice familie de preradicali $\{r_\alpha | \, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ următoarea relaţie este adevărată:

$$\left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \right) \curlyvee\!\!/.\, s = \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \curlyvee\!\!/.\, s).$$

Propoziţia 2.10. În clasa $\mathbb{PR}$ următoarele relaţii sunt adevărate:

1) $\left(\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \right) \curlyvee\!\!/.\, s \geq \bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \curlyvee\!\!/.\, s)$;

2) $r \curlyvee\!\!/.\, \left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha \right) \geq \bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r \curlyvee\!\!/.\, s_\alpha)$;

3) $r \curlyvee\!\!/.\, \left(\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha \right) \leq \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r \curlyvee\!\!/.\, s_\alpha)$.

În paragraful doi se cercetează cazurile particulare ale câtului stâng în raport cu reuniunea şi legătura lor cu unele noţiuni şi construcţii din teoria radicalilor în module.

Propoziţia 2.11. Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r \geq s$;

2) $r \curlyvee\!\!/.\, s = 1$.

Propoziţia 2.12. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Atunci:

1) $0 \curlyvee\!\!/.\, s = a(s)$, unde $a(s) = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot s = 0\}$ - *anulatorul* lui s;

2) $r \curlyvee\!\!/.\, 1 = r$.

De unde deducem următoarele cazuri particulare:

(1) $0 \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} 0 = a\,(0) = 1$; (2) $r \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} r = 1$ pentru orice $r \in \mathbb{PR}$;

(3) $1 \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} 1 = 1$; (4) $1 \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} s = 1$ pentru orice $s \in \mathbb{PR}$.

Mai mult, $(r \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} r) \cdot r = r$ şi $a\,(r) \cdot r = 0$ pentru orice preradical $r \in \mathbb{PR}$.

În continuare se indică relaţiile dintre anulatorul unui preradical şi aşa construcţii din laticea completă („mare”) $\mathbb{PR}$, ca pseudocomplement şi suplement al preradicalului respectiv.

Propoziţia 2.16. Pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$ avem $a\,(s) \geq s^{\perp}$, unde $s^{\perp}$ este pseudocomplementul lui s.

Propoziţia 2.17. Fie preradicalul $s \in \mathbb{PR}$ şi s posedă suplementul s^*. Atunci $a\,(s) \leq s^*$.

În paragraful trei se indică condiţiile necesare pentru a avea egalitate în unele proprietăţi ale câtului stâng în raport cu reuniunea, apoi se arată comportamentul câtului stâng în raport cu reuniunea în cazul unor preradicali de tip special.

Propoziţia 2.18. Fie preradicalii $r, s \in \mathbb{PR}$. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r = (r \cdot s) \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} s$.

2) $r = t \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$.

Propoziţia 2.19. Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r = (r \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} s) \cdot s$.

2) $r = t \cdot s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$.

În următoarele afirmaţii se arată comportamentul câtului stâng în raport cu reuniunea în cazul unor preradicali de tip special: primi, $\wedge$ - primi, ireductibili.

Propoziţia 2.20. Preradicalul r este prim dacă şi numai dacă $r \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} s = 1$ sau $r \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} s = r$ pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

Propoziţia 2.21. Dacă preradicalul r este $\wedge$ - prim, atunci câtul stâng $r \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} s$ este un preradical $\wedge$ - prim pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

Propoziţia 2.22. Fie $r \in \mathbb{PR}$ şi $r = t \cdot s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Dacă preradicalul r este ireductibil, atunci câtul stâng $r \mathbin{{}^{\vee}\!\!/.} s$ este un preradical ireductibil pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

La sfârşitul acestui paragraf este precizată aranjarea preradicalilor obţinuţi cu ajutorul operaţiei cercetate.

Corolarul 2.24.

1) Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ au loc următoarele relaţii:

$$r \cdot s \leq (r \,{}^{\vee}\!/_{\cdot}\, s) \cdot s \leq r \wedge s \leq r \leq (r \cdot s) \,{}^{\vee}\!/_{\cdot}\, s \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\cdot}\, s;$$

2) Dacă r este o pretorsiune, atunci

$$r \cdot s = (r \,{}^{\vee}\!/_{\cdot}\, s) \cdot s = r \wedge s \leq r \leq (r \cdot s) \,{}^{\vee}\!/_{\cdot}\, s = r \,{}^{\vee}\!/_{\cdot}\, s$$

pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

În **capitolul trei** al tezei cu titlul „Cocâtul stâng în raport cu intersecţia", format din cinci paragrafe, se introduce şi se studiază o altă operaţie nouă în clasa $\mathbb{PR}$ a preradicalilor categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, inversa la stânga a coprodusului în raport cu intersecţia, care este duală operaţiei definite în capitolul doi. Rezultatele acestui capitol sunt similare celor din capitolul precedent şi au fost publicate în lucrările [48; 49; 52; 55].

În primul paragraf se defineşte operaţia *cocâtul stâng în raport cu intersecţia* şi se arată unele proprietăţi de bază ale ei.

Definiţia 3.1. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Vom numi **cocât stâng în raport cu intersecţia al lui** r **pe** s cel mai mic preradical dintre preradicalii $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $r_\alpha \# s \geq r$. Vom nota acest preradical prin $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$.

Vom spune, că preradicalul r este *numărătorul*, iar preradicalul s este *numitorul* cocâtului stâng $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$.

Proprietatea de distributivitate la stânga a coprodusului preradicalilor în raport cu intersecţia, asigură existenţa acestui cocât stâng pentru orice pereche de preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ şi el poate fi reprezentat în forma:

$$r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \geq r \}.$$

În raport cu relaţia de ordine $(\leq)$ din clasa $\mathbb{PR}$ avem următoarele afirmaţii.

Propoziţia 3.3. (Monotonie la numărător) Dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{PR}$ şi $r_1 \leq r_2$, atunci $r_1 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq r_2 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

Propoziţia 3.4. (Antimonotonie la numitor) Dacă $s_1, s_2 \in \mathbb{PR}$ şi $s_1 \leq s_2$, atunci $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_1 \geq r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_2$ pentru orice preradical $r \in \mathbb{PR}$.

Afirmaţia ce urmează poate fi privită ca o altă definiţie a cocâtului stâng în raport cu intersecţia şi este des folosită în cercetările ce urmează pe parcursul acestui capitol.

Teorema 3.5. Pentru orice preradicali $r, s, t \in \mathbb{PR}$ are loc relaţia:

$$r \leq t \# s \Leftrightarrow r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq t.$$

În continuare se arată unele proprietăţi ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia (Lema 3.2, Propoziţiile 3.6, 3.7, 3.8).

Propoziţie. În clasa $\mathbb{PR}$ sunt adevărate relaţiile:

(1) $r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s \le r$; (2) $(r \# s) \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s \le r \le (r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s) \# s$;

(3) $(r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s) \,{}^{\wedge}/_{\#}\, t = r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, (t \# s)$; (4) $(r \# s) \,{}^{\wedge}/_{\#}\, t \le r \# (s \,{}^{\wedge}/_{\#}\, t)$;

(5) $(r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, t) \,{}^{\wedge}/_{\#}\, (s \,{}^{\wedge}/_{\#}\, t) \le r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s$; (6) $(r \# t) \,{}^{\wedge}/_{\#}\, (s \# t) \le r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s$.

Concordanţa între cocâtul stâng în raport cu intersecţia şi operaţiile laticeale din $\mathbb{PR}$ (intersecţia şi reuniunea) este prezentată în:

Teorema 3.9. (Distributivitatea cocâtului stâng $r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s$ în raport cu reuniunea) Fie $s \in \mathbb{PR}$. Atunci pentru orice familie de preradicali $\{r_\alpha | \, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ următoarea relaţie este adevărată:

$$\left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\wedge}/_{\#}\, s = \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s).$$

Propoziţia 3.10. În clasa $\mathbb{PR}$ următoarele relaţii sunt adevărate:

1) $\left(\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\wedge}/_{\#}\, s \le \bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s)$;

2) $r \,{}^{\wedge}/_{\#} \left(\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \ge \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s_\alpha)$;

3) $r \,{}^{\wedge}/_{\#} \left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \le \bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s_\alpha)$.

În paragraful doi al acestui capitol se examinează unele cazuri particulare ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia şi legătura lor cu unele noţiuni şi construcţii din teoria radicalilor în module.

Propoziţia 3.11. Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r \le s$;

2) $r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s = 0$.

Propoziţia 3.12. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Atunci:

1) $1 \,{}^{\wedge}/_{\#}\, s = t\,(s)$, unde $t\,(s) = \wedge \{r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \# s = 1\}$ este *totalizatorul* lui s;

2) $r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, 0 = r$.

De unde găsim următoarele cazuri particulare:

(1) $1 \,{}^{\wedge}/_{\#}\, 1 = t\,(1) = 0$; (2) $r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, r = 0$ pentru orice $r \in \mathbb{PR}$;

(3) $0 \,{}^{\wedge}/_{\#}\, 0 = 0$; (4) $s \,{}^{\wedge}/_{\#}\, 1 = 0$ pentru orice $s \in \mathbb{PR}$.

Mai mult, $(r \,{}^{\wedge}/_{\#}\, r) \# r = r$ pentru orice preradical $r \in \mathbb{PR}$ şi $t\,(s) \# s = 1$ pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

Relaţiile dintre totalizatorul unui preradical şi aşa construcţii din laticea completă („mare”) $\mathbb{PR}$, ca pseudocomplementul şi suplementul preradicalului respectiv sunt prezentate în:

Propoziţia 3.13. Pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$ avem $t(s) \geq s^{\perp}$, unde $s^{\perp}$ este pseudocomplementul lui s.

Propoziţia 3.14. Fie $s \in \mathbb{PR}$ şi s posedă suplementul s^{*}. Atunci $t(s) \leq s^{*}$.

În paragraful trei se identifică condiţiile necesare pentru a avea egalitate în unele proprietăţi ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia, apoi se arată comportamentul acestui cocât stâng în cazul unor preradicali de tip special.

Propoziţia 3.15. Fie preradicalii $r, s \in \mathbb{PR}$. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r = (r \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$.

2) $r = t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$.

Propoziţia 3.16. Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r = (r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s$.

2) $r = t \# s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$.

În următoarele afirmaţii se arată comportamentul cocâtului stâng în raport cu intersecţia în cazul unor preradicali de tip special: coprimi, $\vee$-coprimi, coireductibili.

Propoziţia 3.17. Preradicalul r este coprim dacă şi numai dacă $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = 0$ sau $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = r$ pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

Propoziţia 3.18. Dacă preradicalul r este $\vee$-coprim, atunci cocâtul stâng $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ este un preradical $\vee$-coprim pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

Propoziţia 3.19. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$ şi $r = t \# s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Dacă preradicalul r este coireductibil, atunci preradicalul $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ este coireductibil.

La finalul acestui paragraf se precizează aranjarea preradicalilor obţinuţi cu ajutorul cocâtului stâng în raport cu intersecţia.

Corolarul 3.21.

1) Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ au loc următoarele relaţii:

$$r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq (r \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq r \leq r \vee s \leq (r \,{}^{\wedge}\!/_{\#} s) \# s \leq r \# s;$$

2) Dacă preradicalul r este coereditar, atunci

$$r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = (r \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq r \leq r \vee s = (r \,{}^{\wedge}\!/_{\#} s) \# s = r \# s$$

pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

În paragraful patru se consideră un caz particular al preradicalilor, şi anume, pretorsiunile (preradicalii ereditari). Se arată că pentru pretorsiuni, cocâtul stâng în raport cu intersecţia coincide cu operaţia *rest drept* (*right residual*) introdusă şi studiată de J. S. Golan ([6]) în termenii filtrelor preradicale ale inelului R cu unitate.

Este destul de cunoscută descrierea pretorsiunilor prin filtre preradicale [1; 11].

Amintim, definiţia şi rezultatele principale necesare.

Definiţia 3.6. Numim **filtru preradical** mulţimea idealelor stângi $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_R R)$, care satisface următoarele condiţii:

(a_1) Dacă $I \in \mathcal{E}$ şi $a \in R$, atunci $(I : a) = \{x \in R \mid xa \in I\} \in \mathcal{E}$;

(a_2) Dacă $I \in \mathcal{E}$ şi $I \subseteq J$, $J \in \mathbb{L}({}_R R)$, atunci $J \in \mathcal{E}$;

(a_3) Dacă $I, J \in \mathcal{E}$, atunci $I \cap J \in \mathcal{E}$.

Între pretorsiunile categoriei R-Mod şi filtrele preradicale a laticei $\mathbb{L}({}_R R)$ există o bijecţie monotonă definită prin aplicaţiile:

$$r \rightsquigarrow \mathcal{E}_r, \quad \mathcal{E}_r = \{I \in \mathbb{L}({}_R R) \mid r(R/I) = R/I\};$$

$$\mathcal{E} \rightsquigarrow r_{\mathcal{E}}, \quad r_{\mathcal{E}}(M) = \{m \in M \mid (0 : m) \in \mathcal{E}\} \text{ ([1; 12]).}$$

Mulţimea tuturor pretorsiunilor $\mathbb{PT}$ şi mulţimea tuturor filtrelor preradicale $\mathbb{PF}$ pot fi considerate ca latice complete şi aplicaţiile indicate mai sus determină un izomorfism între aceste latice: $\mathbb{PT} \cong \mathbb{PF}$.

Menţionăm, că în laticea $\mathbb{PT}$ produsul a două pretorsiuni $r \cdot s$ coincide cu intersecţia lor $r \wedge s$, iar coprodusul a două pretorsiuni r şi s este definit prin regula:

$$[(r \# s)(M)]/s(M) = r(M/s(M)), \quad M \in R\text{-Mod}.$$

În mod similar se introduce în $\mathbb{PF}$ noţiunea de coprodus a două filtre preradicale:

$$\mathcal{E}_r \# \mathcal{E}_s = \{I \in \mathbb{L}({}_R R) \mid \exists\, H \in \mathcal{E}_r,\ I \subseteq H \text{ astfel încât } (I : a) \in \mathcal{E}_s, \forall a \in H\}.$$

Deci avem laticele izomorfe $\mathbb{PT}(\wedge, \vee, \#)$ şi $\mathbb{PF}(\bigwedge, \bigvee, \#)$ ce satisfac următoarele proprietăţi:

$$\mathcal{E}_{\underset{\alpha \in \mathfrak{A}}{\wedge} r_\alpha} = \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{E}_{r_\alpha}; \qquad \mathcal{E}_{\underset{\alpha \in \mathfrak{A}}{\vee} r_\alpha} = \bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{E}_{r_\alpha}.$$

Reamintim câteva noţiuni şi rezultate din monografia [6], unde pretorsiunile sunt cercetate din punct de vedere al filtrelor preradicale asociate. În [6] $\mathbb{PF}$ este notată prin $R - fil$ şi operaţia *înmulţirea* (*multiplication*) în $R - fil$ este definită prin regula:

$$KK' = \{I \in \mathbb{L}({}_R R) \mid \exists\, H \in K', \text{ astfel încât } I \subseteq H \text{ şi } (I : a) \in K, \forall a \in H\},$$

unde $K, K' \in R - fil$.

Uşor se arată, că în notaţiile noastre avem $\mathcal{E}_s \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_r \# \mathcal{E}_s$ pentru orice $r, s \in \mathbb{PT}$.

Toate proprietăţile operaţiei „înmulţirea” se traduc uşor în limbajul coprodusului, în special asociativitatea şi distributivitatea:

$$\mathcal{E}_1 \,\#\, (\mathcal{E}_2 \,\#\, \mathcal{E}_3) = (\mathcal{E}_1 \,\#\, \mathcal{E}_2) \,\#\, \mathcal{E}_3; \quad (\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{E}_{r_\alpha}) \,\#\, \mathcal{E} = \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (\mathcal{E}_{r_\alpha} \,\#\, \mathcal{E}).$$

Utilizând „înmulţirea” $KK^{'}$ pentru filtrele preradicale, în [6] se defineşte operaţia *rest drept* (*right residual*) $K'^{-1}K$ al lui K pe K' ca cel mai mic unic filtru preradical K'' din $R-fil$ care satisface condiţia $K'K'' \supseteq K$. În baza proprietăţii de distributivitate a „înmulţirii” în raport cu intersecţia, acest filtru preradical există întotdeauna şi poate fi reprezentat în forma

$$K'^{-1}K = \bigcap \{K'' \mid K'K'' \supseteq K\}.$$

În monografia [6] sunt arătate o serie de proprietăţi ale acestei operaţii.

Traducând în notaţiile noastre şi făcând modificările necesare (înmulţirea în coprodus) se obţin urmatoarele afirmaţii.

Definiţia 3.7. Fie $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2 \in \mathbb{PF}$. Vom numi **cocât stâng în raport cu intersecţia a lui** $\mathcal{E}_1$ **pe** $\mathcal{E}_2$ cel mai mic filtru preradical $\mathcal{E} \in \mathbb{PF}$ cu proprietatea $\mathcal{E} \,\#\, \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}_1$ sau $\bigwedge\{\mathcal{E} \in \mathbb{PF} \mid \mathcal{E} \,\#\, \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}_1\}$.

Vom nota acest filtru preradical prin $\mathcal{E}_1 \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, \mathcal{E}_2$.

În continuare se arată că acest filtru preradical coincide cu filtrul preradical al pretorsiunii $r_{\mathcal{E}_1} {}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, r_{\mathcal{E}_2}$.

Lema 3.22. Dacă r, $s \in \mathbb{PT}$, atunci $\mathcal{E}_{r \,\#\, s} = \mathcal{E}_r \,\#\, \mathcal{E}_s$.

Teorema 3.23. Pentru orice pretorsiuni r, $s \in \mathbb{PT}$ avem:

$$\mathcal{E}_{r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s} = \mathcal{E}_r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, \mathcal{E}_s.$$

Această afirmaţie arată, că toate rezultatele obţinute pentru operaţia cocâtul stâng în raport cu intersecţia definită pentru preradicali în acest capitol, sunt valabile şi pentru operaţia cocâtul stâng în raport cu intersecţia definită pentru filtre preradicale (pretorsiuni), care şi reprezintă operaţia *rest drept* definită şi studiată de Golan în [6]. Prin urmare, *restul drept* poate fi privit ca un caz particular al operaţiei cercetate în acest capitol.

În **capitolul patru** al lucrării intitulat „Câtul stâng în raport cu intersecţia”, ce constă din patru paragrafe, se defineşte şi se cercetează o nouă operaţie în clasa $\mathbb{PR}$ a preradicalilor categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, inversa la stânga a produsului în raport cu intersecţia. Spre deosebire de operaţiile definite în capitolele precedente această operaţie este parţială. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în lucrările [50; 53; 55].

În primul paragraf se defineşte operaţia *câtul stâng în raport cu intersecţia*, se indică criteriul ei de existenţă, apoi se arată proprietăţile principale ale ei.

Definiţia 4.1. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Vom numi **cât stâng în raport cu intersecţia al lui** r **pe** s cel mai mic preradical dintre preradicalii $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $r_\alpha \cdot s \geq r$. Vom nota acest preradical prin $r \curlyvee\!. \; s$.

Vom spune, că preradicalul r este *numărătorul*, iar preradicalul s este *numitorul* câtului stâng $r \curlyvee\!. \; s$.

La început se determină criteriul de existenţă al câtului stâng $r \curlyvee\!. \; s$ şi forma lui de reprezentare.

Lema 4.1. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Câtul stâng $r \curlyvee\!. \; s$ există dacă şi numai dacă $r \leq s$ şi el poate fi reprezentat în forma:

$$r \curlyvee\!. \; s = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \geq r \}.$$

În următoarele afirmaţii se arată legătura dintre câtul stâng în raport cu intersecţia şi relaţia de ordine parţială $(\leq)$ din clasa $\mathbb{PR}$.

Propoziţia 4.3. (Monotonie la numărător) Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{PR}$ şi $r_1 \leq r_2$. Atunci pentru orice preradical $s \geq r_2$, avem $r_1 \curlyvee\!. \; s \leq r_2 \curlyvee\!. \; s$.

Propoziţia 4.4. (Antimonotonie la numitor) Fie $s_1, s_2 \in \mathbb{PR}$ şi $s_1 \leq s_2$. Atunci pentru orice preradical $r \leq s_1$, avem $r \curlyvee\!. \; s_1 \geq r \curlyvee\!. \; s_2$.

Rezultatul următoarei afirmaţii este destul de valoros, deoarece el poate fi considerat ca o altă definiţie a câtului stâng în raport cu intersecţia şi este frecvent utilizat în cercetările ce urmează.

Teorema 4.5. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$ şi $r \leq s$. Atunci pentru orice $t \in \mathbb{PR}$ avem:

$$r \leq t \cdot s \Leftrightarrow r \curlyvee\!. \; s \leq t.$$

În continuare se prezintă unele proprietăţi ale câtului stâng în raport cu intersecţia (Lema 4.2, Propoziţiile 4.6, 4.7, 4.8).

Propoziţie. În clasa $\mathbb{PR}$ sunt adevărate relaţiile:

(1) $r \curlyvee\!. \; s \geq r$ pentru $r \leq s$;

(2) $(r \cdot s) \curlyvee\!. \; s \leq r \leq (r \curlyvee\!. \; s) \cdot s$ pentru $r \leq s$;

(3) $(r \curlyvee\!. \; s) \curlyvee\!. \; t = r \curlyvee\!. \; (t \cdot s)$ pentru $t \cdot s \geq r$;

(4) $(r \cdot s) \curlyvee\!. \; t \leq r \cdot (s \curlyvee\!. \; t)$ pentru $t \geq s$;

(5) $(r \curlyvee\!. \; t) \curlyvee\!. \; (s \curlyvee\!. \; t) \leq r \curlyvee\!. \; s$ sau $(r \curlyvee\!. \; s) \cdot (s \curlyvee\!. \; t) \geq r \curlyvee\!. \; t$ pentru $t \geq s \geq r$;

(6) $(r \cdot t) \curlyvee\!. \; (s \cdot t) \leq r \curlyvee\!. \; s$ sau $r \cdot t \leq (r \curlyvee\!. \; s) \cdot (s \cdot t)$ pentru $r \leq s$.

Relaţiile dintre acest cât stâng şi operaţiile laticeale „$\wedge$” şi „$\vee$” din clasa $\mathbb{PR}$ sunt indicate în:

Teorema 4.9. (Distributivitatea câtului stâng $r \mathbin{/\!\!.} s$ în raport cu reuniunea) Fie $s \in \mathbb{PR}$. Atunci pentru orice familie de preradicali $\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \leq s,\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ următoarea relaţie este adevărată:

$$\left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \mathbin{/\!\!.} s = \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{/\!\!.} s).$$

Propoziţia 4.10. În clasa $\mathbb{PR}$ următoarele relaţii sunt adevărate:

1) $\left(\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \mathbin{/\!\!.} s \leq \bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{/\!\!.} s)$, unde $r_\alpha \leq s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$;

2) $r \mathbin{/\!\!.} \left(\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \mathbin{/\!\!.} s_\alpha)$, unde $r \leq s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$;

3) $r \mathbin{/\!\!.} \left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq \bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \mathbin{/\!\!.} s_\alpha)$, unde $r \leq s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$.

În paragraful doi se cercetează unele cazuri particulare ale câtului stâng în raport cu intersecţia.

Propoziţia 4.11. Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ avem:

1) $r \mathbin{/\!\!.} r = e\,(r)$, unde $e\,(r) = \wedge \{\, r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot r = r \}$ este egalizatorul lui r;

2) $r \mathbin{/\!\!.} 1 = r$;

3) $0 \mathbin{/\!\!.} s = 0$.

De unde deducem următoarele cazuri particulare:

(1) $0 \mathbin{/\!\!.} 0 = 0$; (2) $1 \mathbin{/\!\!.} 1 = 1$.

Egalizatorul oricărui preradical r este un preradical idempotent şi preradicalul r este idempotent dacă şi numai dacă $e\,(r) = r$.

Mai mult, $r \leq r \mathbin{/\!\!.} s \leq e\,(r)$ pentru $r \leq s$ şi $e\,(r) \cdot r = r$ pentru orice $r \in \mathbb{PR}$.

În continuare se arată unele proprietăţi ale egalizatorului unui preradical.

Propoziţia 4.12. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$ şi $r \leq s$. Atunci

(1) $e\,(r) \cdot (r \mathbin{/\!\!.} s) = r \mathbin{/\!\!.} s$;

(2) $(r \mathbin{/\!\!.} s) \cdot e\,(s) = r \mathbin{/\!\!.} s$;

(3) $(r \mathbin{/\!\!.} s) \mathbin{/\!\!.} e\,(s) = r \mathbin{/\!\!.} s$.

Propoziţia 4.15. Dacă preradicalul s este idempotent, atunci pentru orice preradical $r \leq s$ avem:

(1) $r \mathbin{/\!\!.} s \leq s$;

(2) $(r \mathbin{/\!\!.} s) \mathbin{/\!\!.} s = r \mathbin{/\!\!.} s$;

(3) $(r \mathbin{\gamma\!.} s) \cdot s = r \mathbin{\gamma\!.} s$;

(4) $(r \cdot s) \mathbin{\gamma\!.} s = r \cdot s$.

În paragraful trei se indică condiţiile necesare pentru a avea egalitate în unele proprietăţi ale câtului stâng în raport cu intersecţia, apoi se arată comportamentul acestui cât stâng în cazul unor preradicali de tip special.

Propoziţia 4.16. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r = (r \cdot s) \mathbin{\gamma\!.} s$.

2) $r = t \mathbin{\gamma\!.} s$ pentru un preradical $t \leq s$.

Propoziţia 4.17. Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r = (r \mathbin{\gamma\!.} s) \cdot s$ pentru $r \leq s$.

2) $r = t \cdot s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$.

În continuare se prezintă comportamentul câtului stâng în raport cu intersecţia în cazul preradicalilor de tip special: coprimi, $\vee$ - coprimi, coireductibili.

Propoziţia 4.18. Dacă preradicalul r este coprim, atunci câtul stâng $r \mathbin{\gamma\!.} s$ este un preradical coprim pentru orice preradical $s \geq r$.

Propoziţia 4.19. Dacă preradicalul r este $\vee$-coprim, atunci câtul stâng $r \mathbin{\gamma\!.} s$ este un preradical $\vee$-coprim pentru orice preradical $s \geq r$.

Propoziţia 4.20. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$ şi $r = t \cdot s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Dacă preradicalul r este coireductibil, atunci câtul stâng $r \mathbin{\gamma\!.} s$ este un preradical coireductibil.

La sfârşitul acestui paragraf este precizată aranjarea preradicalilor obţinuţi cu ajutorul operaţiei cercetate.

Corolarul 4.21.

(1) Pentru $r, s \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $r \leq s$ au loc următoarele relaţii:

$$r \cdot s \leq (r \cdot s) \mathbin{\gamma\!.} s \leq r \leq (r \mathbin{\gamma\!.} s) \cdot s \leq r \mathbin{\gamma\!.} s;$$

(2) Dacă preradicalul s este idempotent, atunci

$$r \cdot s = (r \cdot s) \mathbin{\gamma\!.} s \leq r \leq (r \mathbin{\gamma\!.} s) \cdot s = r \mathbin{\gamma\!.} s \leq s$$

pentru orice preradical $r \leq s$.

În **capitolul cinci** al tezei cu titlul „Cocâtul stâng în raport cu reuniunea", ce conţine patru paragrafe, se introduce şi se studiază o altă operaţie nouă în clasa $\mathbb{PR}$ a preradicalilor categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, inversa la stânga a coprodusului în raport cu reuniunea, care este duală operaţiei definite în capitolul patru. Rezultatele acestui capitol sunt similare celor din capitolul precedent şi au fost publicate în lucrările [50; 54; 55].

În primul paragraf se defineşte operaţia *cocâtul stâng în raport cu reuniunea*, se indică criteriul ei de existenţă, apoi se arată unele proprietăţi de bază ale ei.

Definiţia 5.1. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Vom numi **cocât stâng în raport cu reuniunea al lui** r **pe** s cel mai mare preradical dintre preradicalii $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $r_\alpha \# s \leq r$. Vom nota acest preradical prin $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Vom spune, că preradicalul r este *numărătorul*, iar preradicalul s este *numitorul* cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Pentru început se arată criteriul de existenţă şi forma de reprezentare a cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Lema 5.1. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Cocâtul stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ există dacă şi numai dacă $r \geq s$ şi el poate fi reprezentat în forma:

$$r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r \}.$$

În afirmaţiile ce urmează se arată legătura dintre cocâtul stâng în raport cu reuniunea şi relaţia de ordine parţială $(\leq)$ din clasa $\mathbb{PR}$.

Propoziţia 5.3. (Monotonie la numărător) Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{PR}$ şi $r_1 \leq r_2$. Atunci pentru orice preradical $s \leq r_1$ avem $r_1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r_2 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Propoziţia 5.4. (Antimonotonie la numitor) Fie $s_1, s_2 \in \mathbb{PR}$ şi $s_1 \leq s_2$. Atunci pentru orice preradical $r \geq s_2$ avem $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_1 \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_2$.

Următoarea afirmaţie poate servi ca o altă definiţie a cocâtului stâng în raport cu reuniunea şi este des folosită în studiul ce urmează.

Teorema 5.5. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$ şi $r \geq s$. Atunci pentru orice $t \in \mathbb{PR}$ avem:

$$r \geq t \# s \Leftrightarrow r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq t.$$

În continuare se arată unele proprietăţi ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea (Lema 5.2, Propoziţiile 5.6, 5.7, 5.8).

Propoziţie. În clasa $\mathbb{PR}$ sunt adevărate relaţiile:

(1) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r$ pentru $r \geq s$;

(2) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \leq r \leq (r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ pentru $r \geq s$;

(3) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (t \# s)$ pentru $r \geq t \# s$;

(4) $(r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t \geq r \# (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t)$ pentru $s \geq t$;

(5) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t) \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ sau $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t) \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t$ pentru $t \leq s \leq r$;

(6) $(r \# t) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \# t) \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ sau $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# (s \# t) \leq r \# t$ pentru $r \geq s$.

Următoarele afirmaţii arată compatibilitatea cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ cu operaţiile laticeale din $\mathbb{PR}$.

Teorema 5.9. (Distributivitatea câtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ în raport cu intersecţia) Pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$ şi orice familie de preradicali $\{r_\alpha \in \mathbb{PR} |\, r_\alpha \geq s,\, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ este adevărată următoarea afirmaţie:

$$\left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s).$$

Propoziţia 5.10. În clasa $\mathbb{PR}$ următoarele relaţii sunt adevărate:

1) $\left(\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq \bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)$ pentru $r_\alpha \geq s$, $\alpha \in \mathfrak{A}$;

2) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#} \left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha \right) \geq \bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_\alpha)$ pentru $r \geq s_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$;

3) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#} \left(\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha \right) \leq \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_\alpha)$ pentru $r \geq s_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$.

În al doilea paragraf se examinează unele cazuri particulare ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea.

Propoziţia 5.11. Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ avem:

1) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r = c(r)$, unde $c(r) = \vee \{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# r = r\}$ este coegalizatorul lui r;

2) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, 0 = r$;

3) $1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = 1$.

De unde avem următoarele cazuri particulare:

(1) $0 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, 0 = 0$; (2) $1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, 1 = 1$.

Coegalizatorul oricărui preradical r este un radical şi preradicalul r este un radical dacă şi numai dacă $c(r) = r$.

Mai mult, $c(r) \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r$ pentru $r \geq s$ şi $c(r) \# r = r$ pentru orice $r \in \mathbb{PR}$.

În continuare se indică unele proprietăţi ale coegalizatorului unui preradical.

Propoziţia 5.12. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$ şi $r \geq s$. Atunci

(1) $c(r) \# (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$;

(2) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# c(s) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$;

(3) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, c(s) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Propoziţia 5.15. Dacă s este un radical, atunci pentru orice preradical $r \geq s$ avem:

(1) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq s$;

(2) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$;

(3) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$;

(4) $(r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = r \# s$.

În paragraful trei se arată condiţiile necesare pentru a avea egalitate în unele proprietăţi ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea, apoi se identifică comportamentul acestui cocât stâng în cazul unor preradicali de tip special.

Propoziţia 5.16. Fie preradicalii $r, s \in \mathbb{PR}$. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r = (r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

2) $r = t \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ pentru un preradical $t \geq s$.

Propoziţia 5.17. Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ următoarele condiţii sunt echivalente:

1) $r = (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s$ pentru $r \geq s$.

2) $r = t \# s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$.

Următoarele afirmaţii arată comportamentul cocâtului stâng în raport cu reuniunea în cazul unor preradicali de tip special: primi, $\wedge$-primi, ireductibili.

Propoziţia 5.18. Dacă preradicalul r este prim, atunci preradicalul $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ este prim pentru orice preradical $s \leq r$.

Propoziţia 5.19. Dacă preradicalul r este $\wedge$-prim, atunci preradicalul $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ este $\wedge$-prim pentru orice preradical $s \leq r$.

Propoziţia 5.20. Fie $r, s \in \mathbb{PR}$ şi $r = t \# s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Dacă preradicalul r este ireductibil, atunci preradicalul $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ este ireductibil.

La sfârşitul acestui paragraf este indicată aranjarea preradicalilor obţinuţi cu ajutorul cocâtului stâng în raport cu reuniunea.

Corolarul 5.21.

(1) Pentru orice $r, s \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $r \geq s$ au loc următoarele relaţii:

$$r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \leq r \leq (r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r \# s;$$

(2) Dacă s este un radical, atunci:

$$s \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \leq r \leq (r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = r \# s$$

pentru orice preradical $r \geq s$.

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

Problema de bază a algebrei este studiul structurilor algebrice (grupuri, inele, câmpuri, module, latice, categorii etc.) şi a legăturilor dintre aceste structuri algebrice. Acest lucru poate fi efectuat numai cercetând legile generale ale operaţiilor din structu-rile algebrice respective. Prin urmare, având mai multe operaţii acest studiu poate fi făcut mai minuţios, mai amplu, mai efectiv.

În prezenta lucrare sunt introduse unele noi construcţii în teoria radicalilor în module, şi anume, sunt definite şi studiate patru operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module, ceea ce a condus la îmbogăţirea rezervei instrumentale de lucru în clasa preradicalilor unei categorii de module şi reprezintă scopul acestei lucrări.

Rezultatele principale elaborate în domeniul teoriei radicalilor unei categorii de module din această lucrare sunt noi. Cercetările realizate în lucrare se referă la obiectivele propuse pentru investigaţie şi ne permit să formulăm următoarele concluzii şi recomandări.

Concluzii generale:

1. Au fost definite şi studiate două operaţii noi **complete** (în sens că există pentru orice pereche de preradicali) în clasa preradicalilor unei categorii de module, şi anume, *câtul stâng în raport cu reuniunea* şi *cocâtul stâng în raport cu intersecţia.* Au fost determinate proprietăţile principale ale lor şi ale preradicalilor noi obţinuţi în rezultatul efectuării acestor construcţii. S-a arătat compatibilitatea operaţiilor noi definite cu cele laticeale din clasa $\mathbb{PR}$ (intersecţia şi reuniunea). ([47], [48], [51], [52], [55])

2. Au fost cercetate unele cazuri particulare ale câtului stâng în raport cu reuniunea şi ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia. S-au stabilit relaţiile dintre aceste operaţii noi şi unele noţiuni şi construcţii cunoscute din teoria radicalilor (pseudocomplement şi suplement). A fost descris comportamentul câtului stâng în raport cu reuniunea în cazul preradicalilor primi, $\wedge$ - primi, ireductibili şi al cocâtului stâng în raport cu intersecţia în cazul preradicalilor coprimi, $\vee$-coprimi, coireductibili. ([47], [48], [51], [52], [55])

3. A fost demonstrat, că operaţia *rest drept*, introdusă şi studiată de J. Golan în monografia „Linear topologies on a ring" pentru filtre preradicale, reprezintă un caz particular al operaţiei *cocâtul stâng în raport cu intersecţia* definită şi cercetată în această lucrare în caz general pentru preradicali. ([49])

4. Au fost introduse şi cercetate două operaţii noi **parţiale** în clasa preradicalilor unei categorii de module, şi anume, *câtul stâng în raport cu intersecţia* şi *cocâtul stâng în raport cu reuniunea.* Au fost determinate criteriile de existenţă şi proprietăţile de bază ale lor şi ale preradicalilor noi obţinuţi în rezultatul aplicării acestor construcţii. S-au stabilit relaţiile dintre aceste noi operaţii definite şi cele laticeale din clasa $\mathbb{PR}$. ([50], [53], [54], [55])

5. Au fost determinate şi studiate unele cazuri particulare ale câtului stâng în raport cu intersecţia şi ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea. A fost stabilit comportamentul câtului stâng în raport cu reuniunea în cazul preradicalilor primi, $\wedge$ - primi,

ireductibili, idempotenţi şi al cocâtului stâng în raport cu intersecţia în cazul preradicalilor coprimi, $\vee$-coprimi, coireductibili, radicalilor. ([50], [53], [54], [55])

Prin urmare toate obiectivele tezei sunt realizate.

Teza propusă spre susţinere conţine soluţionarea completă a problemei introducerii şi cercetării unor noi operaţii în clasa preradicalilor unei categorii de module.

Recomandări:

1. Rezultatele tezei pot constitui conţinutul unor cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi de la specialităţile matematice şi pot servi drept suport pentru unele teze de licenţă şi masterat.

2. Rezultatele obţinute pot fi utilizate la studierea şi dezvoltarea de mai departe a teoriei radicalilor în module, la cercetarea problemelor de tip structural în teoria inelelor.

3. Aceste rezultate pot fi generalizate în alte cazuri: în clasa operatorilor de închidere, în categorii abeliene şi în alte tipuri de categorii.

BIBLIOGRAFIE

1. BICAN, L., KEPKA, T., NEMEC, P. *Rings, modules and preradicals.* Lect. Notes in Pure and Appl. Math., vol. 75, New York: Marcel Dekker, 1982. 241 p. ISBN 978-0824715687.
2. FAITH, C. *Algebra: rings, modules and categories I.* New York: Springer-Verlag, 1973. 568 p. ISBN 978-3-642-80634-6. (traducere în rusă în 1977)
3. FAITH, C. *Algebra: rings, modules and categories II.* New York: Springer-Verlag, 1976. 302 p. ISBN 978-3-642-65321-6. (traducere în rusă în 1979)
4. GABRIEL, P. *Des categories abeliennes.* In: Bull. Soc. Math. France, vol. 90, 1962, pp. 323-448.
5. GOLAN, J.S. *Torsion theories.* New York: Longman Scientific and Technical, 1986. 651 p. ISBN 978-0470203675.
6. GOLAN, J.S. *Linear topologies on a ring: an overview.* New York: Longman Scientific and Technical, 1987. 104 p. ISBN 978-0582013131.
7. LAMBEK, J. *Torsion theories, additive semantics and rings of quotients.* Lect. Notes in Math., vol. 117, Springer Berlin, 1971. 104 p. ISBN 978-3540053408.
8. POPESCU, N. *Abelian categories with applications to rings and modules.* London: Acad. Press., 1973. 467 p. ISBN 978-0125615501.
9. STENSTRÖM, B. *Rings and modules of quotients.* Lect. Notes in Math., vol. 237, New York: Springer-Verlag Berlin, 1971. 138 p. ISBN 978-3-540-37002-4.
10. АНДРУНАКИЕВИЧ, В.А., РЯБУХИН, Ю.М. *Радикалы алгебр и структурная теория.* Москва: Изд-во Наука, 1979. 496 с.
11. КАШУ, А.И. *Радикалы и кручения в модулях.* Кишинёв: Штиинца, 1983. 156 с.
12. Кашу А.И., *Функторы и кручения в категории модулей.* Кишинёв: Изд-во Академии Наук РМ, 1997. 267 с.
13. МИШИНА, А.П., СКОРНЯКОВ, Л.А. *Абелевы группы и модули.* Москва: Изд-во Наука, 1969. 95 с.
14. ALBU, T., IOSIF, M. Lattice preradicals with applications to Grothendieck categories and torsion theories. In: *Journal of Algebra.* 2015, vol. 444, pp. 339-366. ISSN 0021-8693.
15. ALBU, T., IOSIF, M. Lattice preradicals versus module preradicals. In: *Ann. Univ. Buchar. Math.* 2015, Ser. 6 (LXIV), no. 1, pp. 19-34. ISSN 2067-9009.
16. ALBU, T., IOSIF, M. Modular C11 lattices and lattice preradicals. In: *Journal of Algebra and Its Applic.* 2017, vol. 16, no. 6, 19 p. ISSN 0219-4988.

17. ALBU, T., PEREZ, J.R., MONTES, J.R. The lattice structure of all lattice preradicals on modular complete lattices, and applications (I). In: *Bull. Math. Soc. Sc. Math. de Roumanie*. 2019, vol. 62, Issue 1, pp. 3-20. ISSN 1220-3874.
18. AMITSUR, S.A. A general theory of radicals, I. In: *Amer. Journal of Math.* 1952, vol. 74, pp. 774-786. ISSN 0002-9327.
19. AMITSUR, S.A. A general theory of radicals, II. In: *Amer. Journal of Math.* 1954, vol. 76, pp. 100-125. ISSN 0002-9327.
20. DICKSON, S.E. A torsion theory for Abelian categories. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 1966, vol. 121, no. 1, pp. 223-235. ISSN 0002-9947.
21. GABRIEL, P., POPESCU, N. Caracterisation des categories abeliennes avec generateurs et limites inductives exactes. In: *C. R. Acad. Science Paris*. 1964, no. 258, 1964, p. 4188-4190. ISSN 0764-4442.
22. KASHU, A.I. Preradicals and characteristic submodules: connections and operations. In: *Algebra and Discrete Math.* 2010, vol. 9, no. 2, pp. 61-71. ISSN 1726-3255.
23. KASHU, A.I. On some operations in the lattice of submodules determined by preradicals. In: *Bul. Acad. Şt. Repub. Mold., Mat.* 2011, vol. 66, no. 2, pp. 5-16. ISSN 1024-7696.
24. KASHU, A.I. On inverse operations in the lattices of submodules. In: *Algebra and Discrete Math.* 2012, vol. 13, no. 2, pp. 273-288. ISSN 1726-3255.
25. KASHU, A.I. On partial inverse operations in the lattices of submodules. In: *Bul. Acad. Şt. Repub. Mold., Mat.* 2012, vol. 69, no. 2, pp. 59-73. ISSN 1024-7696.
26. KASHU, A.I. A survay of results on radicals and torsions in modules. In: *Algebra and Discrete Math.* 2016, vol. 21, no. 1, pp. 69-100. ISSN 1726-3255.
27. KASHU, A.I. Pretorsions in modules and associated closure operators. In: *Bul. Acad. Şt. Repub. Mold., Mat.* 2017, vol. 84, no. 2, pp. 24-41. ISSN 1024-7696.
28. KASHU, A.I. Morita contexts and closure operators in modules. In: *Bul. Acad. Şt. Repub. Mold., Mat.* 2019, vol. 89, no. 1, pp. 109-122. ISSN 1024-7696.
29. MARKI, L., MLITZ, R., WIEGANDT, R. A general Kurosh-Amitsur radical theory. In: *Comm. in Algebra*. 1988, vol. 16, no. 2, pp. 249-305. ISSN 0092-7872.
30. MORITA, K. Localizations in categories of modules I. In: *Math. Zeit.* 1970, vol. 114, pp. 121-144. ISSN 0025-5874.
31. MORITA, K. Localizations in categories of modules II. In: *Journal Reine Angew. Math.* 1970, vol. 242, pp. 163-169. ISSN 0075-4102.
32. MORITA, K. Localizations in categories of modules III. In: *Math. Zeit.* 1971, vol. 119, pp. 313-320. ISSN 0025-5874.

33. RAGGI, F., RIOS, J, RINCON, H., FERNANDEZ-ALONSO, R., SIGNORET, C. The lattice structure of preradicals. In: *Commun. in Algebra* 2002, vol. 30, no. 3, pp. 1533-1544. ISSN 0092-7872.

34. RAGGI, F., RIOS, J, RINCON, H., FERNANDEZ-ALONSO, R., SIGNORET, C. The lattice structure of preradicals II: partitions. In: *Journal of Algebra and Its Applications*. 2002, vol. 1, no. 2, pp. 201-214. ISSN 0219-4988.

35. RAGGI, F., RIOS, J, RINCON, H., FERNANDEZ-ALONSO, R., SIGNORET, C. The lattice structure of preradicals III: operators. In: *Journal of Pure and Applied Algebra*. 2004, vol. 190, pp. 251-265. ISSN 0022-4049.

36. RAGGI, F., RIOS, J, RINCON, H., FERNANDEZ-ALONSO, R., SIGNORET, C. Prime and irreducible preradicals. In: *Journal of Algebra and Its Applications*. 2005, vol. 4, no. 4, pp. 451-466. ISSN 0219-4988.

37. RAGGI, F., RIOS, J., WISBAUER, R. Coprime preradicals and modules. In: *Journal of Pure and Applied Algebra*. 2005, vol. 200, pp. 51-69. ISSN 0022-4049.

38. FERNANDEZ-ALONSO, R., MAGANA, J. Galois connections between lattices of preradicals induced by adjoint pairs between categories of modules. In: *Applied Categorical Structures*. 2016, vol. 24, no. 3, pp. 241-268. ISSN 0927-2852.

39. RINCON, H., SANDOVAL-MIRANDA, M.L.S., ZORRILLA-NORIEGA, M.G. Mappings between R-tors and other lattices. In: *Journal of Algebra and Its Applications*. 2017, vol. 16, no. 5. ISSN 0219-4988.

40. FERNANDEZ-ALONSO, R., HERBERA, D. Finite lattices of preradicals and finite representation type rings. In: *Intern. Electr. Journal of Algebra*. 2017, vol. 21, pp. 103-120. ISSN 1306-6048.

41. PARDO-GUERRA, S., RINCON, H., ZORRILLA-NORIEGA, M.G. Some isomorphic big lattices and some properties of lattice preradicals. In: *Journal of Algebra and Its Applications*. 2019, Online Ready. ISSN 0219-4988.

42. АНДРУНАКИЕВИЧ, В.А. Радикалы ассоциативных колец, I. В: *Математический сборник*. 1958, т. 44, №2, с. 179-212. ISSN 0368-8666.

43. АНДРУНАКИЕВИЧ, В.А. Радикалы ассоциативных колец, II. В: *Математический сборник*. 1961, т. 55, №3, с. 329-346. ISSN 0368-8666.

44. БОТНАРУ, Д.В. Относительные теории кручения категорий. В: *Математические исследования*. Кишинёв: Штиинца. 1984, вып. 76, с. 3-13.

45. КУРОШ, А.Г. Радикалы колец и алгебр. В: *Математический сборник*. 1953, т. 33, №1, с. 13-26. ISSN 0368-8666.

46. РЯБУХИН, Ю.М. Радикалы в категориях. В: *Известия Академии Наук сер. физ.-мат. и техн. н.* 1964, №6, с. 58-74. ISSN 0236-3089.

Publicaţiile autorului la tema tezei

47. **JARDAN, I.** On the inverse operations in the class of preradicals of a module category, I. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Mat.* 2017, vol. 83, no. 1, pp. 57-66. ISSN 1024-7696.

48. **JARDAN, I.** On the inverse operations in the class of preradicals of a module category, II. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Mat.* 2017, vol. 84, no. 2, pp. 77-86. ISSN 1024-7696.

49. **JARDAN, I.** Left coquotient wiht respect to meet in the case of pretorsions in R-Mod. In: *Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4*, June 28–July 2, 2017, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 95-98. ISBN 978-9975-71-915-5.

50. **JARDAN, I.** On partial inverse operations in the class of preradicals of modules. In: *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa.* 2019, vol. 27, no. 2, pp. 15-36. ISSN 1224-1784.

51. **JARDAN, I.** On left quotient with respect to join in the class of preradicals of a module category. In: *Abstracts of the International Conference Mathematics and Information Technologies: research and education MITRE2015*, July 2-5, 2015, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 51-52. ISBN 978-9975-71-678-9.

52. **JARDAN, I.** On a new operation in the class of preradicals of modules. In: *Abstracts of the International Conference Mathematics and Information Technologies: research and education MITRE2016*, June 22-26, 2016, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 38-39. ISBN 978-9975-71-794-6.

53. **JARDAN, I.** Left quotient with respect to meet for preradicals in modules. In: *Communications of the International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies MITI2018*, April 19-21, 2018, Balti, Republic of Moldova, pp. 47-48. ISBN 978-9975-3214-7-1.

54. **JARDAN, I.** Left coquotient with respect to join in the class of preradicals in modules. In: *Book of Abstracts of the* 26^{th} *Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM2018*, September 20-23, 2018, Chişinău, Republic of Moldova, pp. 95-96. ISBN 978-9975-76-247-2.

55. **JARDAN, I.** New operations in the class of preradicals of modules. In: *Abstracts of the International Conference Mathematics and Information Technologies: research and education MITRE2019*, June 24-26, 2019, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 38-39. ISBN 978-9975-149-17-4.

C.Z.U: 517.925

ADNOTARE

Lucrarea **„Despre unele construcţii speciale din teoria radicalilor în categorii de module"** este înaintată de **Jardan Ion** pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 111.03 – Logică matematică, Algebră şi Teoria Numerelor. Teza a fost elaborată la Institutul de Matematică şi Informatică „Vladimir Andrunachievici", Chişinău, 2020.

Structura tezei: lucrarea este scrisă în limba română şi constă din introducere, 5 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie ce cuprinde 133 de titluri, 91 de pagini de text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 9 lucrări ştiinţifice.

Cuvintele cheie: inel, modul, categorie, latice, (pre)radical, (pre)torsiune.

Domeniul de studiu al tezei: teoria inelelor şi modulelor, radicali în categorii de module.

Scopul şi obiectivele lucrării: introducerea unor operaţii noi în clasa preradicalilor a unei categorii de module; determinarea proprietăţilor lor şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul acestor construcţii; cercetarea unor cazuri particulare ale operaţiilor definite şi legăturilor dintre preradicalii obţinuţi; evidenţierea relaţiilor dintre noile operaţii şi unele noţiuni şi construcţii cunoscute din teoria radicalilor; cercetarea comportamentului acestor operaţii în cazul unor preradicali de tip special.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. Toate rezultatele principale ale lucrării sunt noi şi originale. Ele constituie o continuare firească a cercetărilor precedente din acest domeniu. Anume, celor patru operaţii cunoscute în clasa preradicalilor li se adaugă încă patru operaţii noi. Au fost determinate proprietăţile lor; compatibilitatea lor cu operaţiile laticeale din clasa preradicalilor. Au fost cercetate unele cazuri particulare ale noilor operaţii; au fost stabilite relaţiile dintre ele şi unele construcţii din teoria radicalilor; a fost descris comportamentul lor în cazul unor preradicali de tip special.

Rezultatul obţinut care contribuie la soluţionarea unei probleme ştiinţifice importante constă în introducerea şi cercetarea a patru operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module, ceea ce a condus la îmbogăţirea rezervei instrumentale de lucru în această clasă, pentru completarea studiului în domeniul teoriei inelelor şi a modulelor.

Semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării. Lucrarea are un caracter teoretic şi reprezintă un pas important în dezvoltarea teoriei radicalilor în module. Rolul rezultatelor obţinute constă în: lărgirea spectrului de cunoştinţe în domeniu prin introducerea unor noi operaţii în clasa preradicalilor; completarea esenţială a metodelor de cercetare cu ajutorul noilor operaţii; posibilitatea de aplicare a lor la probleme structurale.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele obţinute pot fi utilizate în dezvoltarea de mai departe a teoriei radicalilor, pot fi folosite în calitate de suport de cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

УДК 512.548

АННОТАЦИЯ

Диссертация **„О некоторых специальных конструкциях из теории радикалов в категориях модулей"** представлена **Жардан Ион** на соискание учёной степени доктора математических наук по специальности 111.03 – Математическая логика, алгебра и теория чисел. Работа выполнена в Институте Математики и Информатики имени Владимира Андрунакиевича, Кишинёв, 2020.

Структура диссертации: работа написана на румынском языке и состоит из введения, 5 глав, общих выводов и рекомендаций, 133 источников литературы, 91 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 9 научных работах.

Ключевые слова: кольцо, модуль, категория, решётка, (пред)радикал,(пред)кручение.

Область исследования: теория колец и модулей, радикалы в категории модулей.

Цели и задачи диссертации: введение некоторых новых операций в решётке предрадикалов категории модулей; определение свойств этих операций, а также полученных предрадикалов в результате этих конструкций; исследование некоторых частных случаев этих операций и связей между ассоциированными предрадикалами; выделение взаимосвязей между новыми операциями и некоторыми понятиями и конструкциями из теории радикалов; исследование поведения этих операций в случае специальных предрадикалов.

Научная новизна и оригинальность: все основные результаты работы являются новыми и оригинальными. Они составляют естественное продолжение предыдущих исследований в этой области. А именно, к известным четырём операциям в классе предрадикалов добавлены четыре новые операции. Указаны свойсва этих операций, их совместимость с решёточными операциями в классе предрадикалов, изучены некоторые их частные случаи. Были установлены связи этих операций с некоторыми конструкциями из теории радикалов, описано поведение их в случае предрадикалов специальных типов.

Полученный результат который способствует решению важной научной проблемы: состоит в введение и исследование четырёх новых операций в классе предрадикалов модульной категории, что привело к обогощению инструментального резерва действий в этом классе, к дополнению новых знаний в теории колец и модулей.

Теоретическая и прикладная значимость: работа носит теоретический характер и представляет собой значительный шаг в развитии теории радикалов в модулях. Значимость полученных результатов состоит: в расширении спектра знаний в данной области с помощью новых операций в классе предрадикалов; в существенном дополнении методов исследования применением новых операций; в появлении возможностей их применения в структурных проблемах.

Внедрение научных результатов: полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории радикалов, могут быть полезными в качестве основы для специальных курсов для мастерантов и докторантов.

512.548

ANNOTATION

The thesis **„On some special constructions from theory of radicals in categories of modules"** is presented by **Jardan Ion** to obtain the degree of PhD in mathematical sciences, speciality 111.03 – Mathematical logic, algebra and theory of numbers. It was elaborated at the Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, Chişinău, 2020.

Thesis structure: the work is written in Roumanian and consists of introduction, 5 chapters, general conclusions and recommendations, 133 bibliography items, 91 pages of main text. The obtained results were published in 9 scientific works.

Keywords: ring, module, category, lattice, (pre)radical, (pre)torsion.

Field of study of the thesis: theory of rings and modules, radicals in the categories of modules.

The purpose and objectives: introduction of some new operations in the class of preradicals of a module category, elucidation of their properties and of preradicals obtained as a result of these constructions; investigation of some particular cases of new operations and of relations between the obtained preradicals; the study of connections between the new operations and some know notions and constructions of the radicals theory; the recearch of the behaviour of these operations in case of preradicals of special types.

Scientific innovation and originality: all principal results of this work are new and original. They constitute a natural continuation of the previous investigations in this domain. Namely, the well known four operations in the class of preradicals are completed by four new operations. The properties of them are determined, the compatibility by the latticeal operations in the class of preradicals. The relations of these operations with some constructions of the theory of radicals are shown, the behaviour of them in the case of preradicals of special types is described.

The obtained result which contributes to solve some important scientific problem: consists of the introduction and the investigation of new four operations in the class of preradicals of a module category, which led to enrichment of instrumental reservs of work in this class, as well to complete the knowledge in theory of rings and modules.

The theoretical significance and applicative value of the thesis: this work has a theoretical character and represents an important step in the development of the theory of radicals in modules. The importance of results consists in: the broadening of knowledges in domain by investigation of new operations with preradicals; the essencial completion of methods of investigation by new operations; the possibility of application of them in structural problems.

The implementation of the scientific results: the obtained in the this work results can be used in the further development of the radical theory, also can serve as a support for the preparation of courses for university faculties.

JARDAN ION

DESPRE UNELE CONSTRUCŢII SPECIALE DIN TEORIA RADICALILOR ÎN CATEGORII DE MODULE

111.03 – LOGICĂ MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Rezumatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar: 14.08.2020	Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar RISO.	Tiraj: 80 ex.
Coli de tipar: 2,00	Comanda nr.55

UTM, MD-2004, Chişinău, bd. Ştefan cel Mare şi Sfânt, 168

Editura ”Tehnica-UTM

MD-2045, Chişinău, str. Studenţilor, 9/9