INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
VLADIMIR ANDRUNACHIEVICI

Cu titlu de manuscris
C.Z.U.: 512.548

JARDAN ION

DESPRE UNELE CONSTRUCŢII SPECIALE DIN TEORIA RADICALILOR ÎN CATEGORII DE MODULE

111.03 – LOGICĂ MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Teza de doctor în ştiinţe matematice

Conducător ştiinţific: **Caşu Alexei,** doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar

Autorul: **Jardan Ion**

CHIŞINĂU, 2020

CUPRINS

ADNOTĂRI 5

LISTA ABREVIERILOR 8

INTRODUCERE 9

1. ANALIZA SITUAŢIEI ÎN DOMENIUL TEORIEI RADICALILOR ÎN MODULE 18

1.1. Noţiuni fundamentale 18

1.2. Analiza literaturii în domeniu 23

1.3. Concluzii la capitolul 1 30

2. CÂTUL STÂNG ÎN RAPORT CU REUNIUNEA 31

2.1. Definiţia şi proprietăţile principale ale câtului stâng în raport cu reuniunea 31

2.2. Cazurile particulare ale câtului stâng în raport cu reuniunea 36

2.3. Comportamentul câtului stâng în raport cu reuniunea în cazul unor tipuri speciale de preradicali 39

2.4. Concluzii la capitolul 2 43

3. COCÂTUL STÂNG ÎN RAPORT CU INTERSECŢIA 44

3.1. Definiţia şi proprietăţile principale ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia 44

3.2. Cazurile particulare ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia 50

3.3. Comportamentul cocâtului stâng în raport cu intersecţia în cazul unor tipuri speciale de preradicali 53

3.4. Cocâtul stâng în raport cu intersecţia pentru pretorsiuni 57

3.5. Concluzii la capitolul 3 61

4. CÂTUL STÂNG ÎN RAPORT CU INTERSECŢIA 62

4.1. Definiţia şi proprietăţile principale ale câtului stâng în raport cu intersecţia 62

4.2. Cazurile particulare ale câtului stâng în raport cu intersecţia 69

4.3. Comportamentul câtului stâng în raport cu intersecţia în cazul unor tipuri speciale de preradicali 72

4.4. Concluzii la capitolul 4 75

5. COCÂTUL STÂNG ÎN RAPORT CU REUNIUNEA 76

5.1. Definiţia şi proprietăţile principale ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea 76

5.2. Cazurile particulare ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea 83
5.3. Comportamentul cocâtului stâng în raport cu reuniunea în cazul unor tipuri speciale de preradicali 86
5.4. Concluzii la capitolul 5 89
CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI 90
BIBLIOGRAFIE 92
DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII 104
CV-ul AUTORULUI 105

ADNOTARE

Lucrarea **„Despre unele construcţii speciale din teoria radicalilor în categorii de module”** este înaintată de **Jardan Ion** pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 111.03 – Logică matematică, Algebră şi Teoria Numerelor. Teza a fost elaborată la Institutul de Matematică şi Informatică „Vladimir Andrunachievici”, Chişinău, 2020.

Structura tezei: lucrarea este scrisă în limba română şi constă din introducere, 5 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie ce cuprinde 133 de titluri, 91 de pagini de text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 9 lucrări ştiinţifice.

Cuvintele cheie: inel, modul, categorie, latice, (pre)radical, (pre)torsiune.

Domeniul de studiu al tezei: teoria inelelor şi modulelor, radicali în categorii de module.

Scopul şi obiectivele lucrării: introducerea unor operaţii noi în clasa preradicalilor a unei categorii de module; determinarea proprietăţilor lor şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul acestor construcţii; cercetarea unor cazuri particulare ale operaţiilor definite şi legăturilor dintre preradicalii obţinuţi; evidenţierea relaţiilor dintre noile operaţii şi unele noţiuni şi construcţii cunoscute din teoria radicalilor; cercetarea comportamentului acestor operaţii în cazul unor preradicali de tip special.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. Toate rezultatele principale ale lucrării sunt noi şi originale. Ele constituie o continuare firească a cercetărilor precedente din acest domeniu. Anume, celor patru operaţii cunoscute în clasa preradicalilor li se adaugă încă patru operaţii noi. Au fost determinate proprietăţile lor; compatibilitatea lor cu operaţiile laticeale din clasa preradicalilor. Au fost cercetate unele cazuri particulare ale noilor operaţii; au fost stabilite relaţiile dintre ele şi unele construcţii din teoria radicalilor; a fost descris comportamentul lor în cazul unor preradicali de tip special.

Rezultatul obţinut care contribuie la soluţionarea unei probleme ştiinţifice importante constă în introducerea şi cercetarea a patru operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module, ceea ce a condus la îmbogăţirea rezervei instrumentale de lucru în această clasă, pentru completarea studiului în domeniul teoriei inelelor şi a modulelor.

Semnificaţia teoretică şi valoarea aplicativă a lucrării. Lucrarea are un caracter teoretic şi reprezintă un pas important în dezvoltarea teoriei radicalilor în module. Rolul rezultatelor obţinute constă în: lărgirea spectrului de cunoştinţe în domeniu prin introducerea unor noi operaţii în clasa preradicalilor; completarea esenţială a metodelor de cercetare cu ajutorul noilor operaţii; posibilitatea de aplicare a lor la probleme structurale.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele obţinute pot fi utilizate în dezvoltarea de mai departe a teoriei radicalilor, pot fi folosite în calitate de suport de cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

АННОТАЦИЯ

Диссертация **„О некоторых специальных конструкциях из теории радикалов в категориях модулей”** представлена **Жардан Ион** на соискание учёной степени доктора математических наук по специальности 111.03 – Математическая логика, алгебра и теория чисел. Работа выполнена в Институте Математики и Информатики имени Владимира Андрунакиевича, Кишинёв, 2020.

Структура диссертации: работа написана на румынском языке и состоит из введения, 5 глав, общих выводов и рекомендаций, 133 источников литературы, 91 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 9 научных работах.

Ключевые слова: кольцо, модуль, категория, решётка, (пред)радикал,(пред)кручение.

Область исследования: теория колец и модулей, радикалы в категории модулей.

Цели и задачи диссертации: введение некоторых новых операций в решётке предрадикалов категории модулей; определение свойств этих операций, а также полученных предрадикалов в результате этих конструкций; исследование некоторых частных случаев этих операций и связей между ассоциированными предрадикалами; выделение взаимосвязей между новыми операциями и некоторыми понятиями и конструкциями из теории радикалов; исследование поведения этих операций в случае специальных предрадикалов.

Научная новизна и оригинальность: все основные результаты работы являются новыми и оригинальными. Они составляют естественное продолжение предыдущих исследований в этой области. А именно, к известным четырём операциям в классе предрадикалов добавлены четыре новые операции. Указаны свойсва этих операций, их совместимость с решёточными операциями в классе предрадикалов, изучены некоторые их частные случаи. Были установлены связи этих операций с некоторыми конструкциями из теории радикалов, описано поведение их в случае предрадикалов специальных типов.

Полученный результат который способствует решению важной научной проблемы: состоит в введение и исследование четырёх новых операций в классе предрадикалов модульной категории, что привело к обогощению инструментального резерва действий в этом классе, к дополнению новых знаний в теории колец и модулей.

Теоретическая и прикладная значимость: работа носит теоретический характер и представляет собой значительный шаг в развитии теории радикалов в модулях. Значимость полученных результатов состоит: в расширении спектра знаний в данной области с помощью новых операций в классе предрадикалов; в существенном дополнении методов исследования применением новых операций; в появлении возможностей их применения в структурных проблемах.

Внедрение научных результатов: полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории радикалов, могут быть полезными в качестве основы для специальных курсов для мастерантов и докторантов.

ANNOTATION

The thesis **„On some special constructions from theory of radicals in categories of modules"** is presented by **Jardan Ion** to obtain the degree of PhD in mathematical sciences, speciality 111.03 – Mathematical logic, algebra and theory of numbers. It was elaborated at the Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, Chişinău, 2020.

Thesis structure: the work is written in Roumanian and consists of introduction, 5 chapters, general conclusions and recommendations, 133 bibliography items, 91 pages of main text. The obtained results were published in 9 scientific works.

Keywords: ring, module, category, lattice, (pre)radical, (pre)torsion.

Field of study of the thesis: theory of rings and modules, radicals in the categories of modules.

The purpose and objectives: introduction of some new operations in the class of preradicals of a module category, elucidation of their properties and of preradicals obtained as a result of these constructions; investigation of some particular cases of new operations and of relations between the obtained preradicals; the study of connections between the new operations and some know notions and constructions of the radicals theory; the recearch of the behaviour of these operations in case of preradicals of special types.

Scientific innovation and originality: all principal results of this work are new and original. They constitute a natural continuation of the previous investigations in this domain. Namely, the well known four operations in the class of preradicals are completed by four new operations. The properties of them are determined, the compatibility by the latticeal operations in the class of preradicals. The relations of these operations with some constructions of the theory of radicals are shown, the behaviour of them in the case of preradicals of special types is described.

The obtained result which contributes to solve some important scientific problem: consists of the introduction and the investigation of new four operations in the class of preradicals of a module category, which led to enrichment of instrumental reservs of work in this class, as well to complete the knowledge in theory of rings and modules.

The theoretical significance and applicative value of the thesis: this work has a theoretical character and represents an important step in the development of the theory of radicals in modules. The importance of results consists in: the broadening of knowledges in domain by investigation of new operations with preradicals; the essencial completion of methods of investigation by new operations; the possibility of application of them in structural problems.

The implementation of the scientific results: the obtained in the this work results can be used in the further development of the radical theory, also can serve as a support for the preparation of courses for university faculties.

LISTA ABREVIERILOR

R-Mod – categoria R-modulelor stângi

$\mathbb{PR}$ – clasa preradicalilor categoriei R-Mod

$\mathbb{L}({}_RR)$ – laticea idealelor stângi ale inelului R

$\mathbb{PT}$ – laticea pretorsiunilor categoriei R-Mod

$\mathbb{PF}$ – laticea filtrelor preradicale ale inelului R

$\mathcal{T}_r$ – clasa modulelor r-radicale din R-Mod

$\mathcal{F}_r$ – clasa modulelor r-semisimple din R-Mod

INTRODUCERE

Această lucrare este consacrată teoriei radicalilor în module.

Noţiunea de radical în algebră are un caracter foarte general şi se utilizează pe larg în diverse sisteme algebrice, de exemplu, în grupuri, inele, module, algebre, etc. În cele ce urmează schiţăm în linii mari istoria bogată şi interesantă a acestei direcţii de investigare în algebră. Mai amănunţit partea acestei istorii, referitoare la inele şi algebre, este expusă în monografia V. A. Andrunachievici, Iu. M. Reabuhin „Радикалы алгебр и структурная теория" [24].

Pe parcursul dezvoltării algebrei mai întâi au apărut câţiva radicali concreţi, de tip particular şi necesitatea utilizării lor se motiva prin tendinţa de a obţine teoreme de tip structural (drept model servea cunoscuta teoremă Wedderburn-Artin). Astfel, au apărut: nilradicalul Baer, radicalul local nilpotent Levitzki, nilradicalul superior Köthe, radicalul quasi-regular Jacobson-Perlis, şi alţii, care în prezent se numesc radicali clasici. O contribuţie esenţială la această etapă preliminară au avut-o astfel de algebrişti iluştri ca: R. Baer, G. Koethe, N. Jacobson, J. Levitzki, N. H. McCoy, B. Brown, V. A. Andrunachievici, Iu. M. Reabuhin, şi alţii.

Cu ajutorul unor astfel de radicali a fost obţinută o serie întreagă de rezultate, ce aveau drept scop evidenţierea structurii unor tipuri speciale de inele şi algebre (o mare parte din aceste rezultate sunt formulate în [24]).

Pe baza radicalilor concreţi, numiţi mai sus, în mod firesc a apărut noţiunea generală de radical în inele şi în algebre. Practic concomitent această noţiune a fost formulată şi cercetată de S. A. Amitsur (1952, 1954) şi de A. G. Kuroş (1953). Apoi au urmat numeroase lucrări pe această temă, efectuate de aşa algebrişti cunoscuţi ca: A. Sulinski, R. Anderson, N. Divinsky, E. P. Armendariz, W. G. Leavitt, R. Wiegandt, V. A. Andrunachievici, Iu. M. Reabuhin şi mulţi alţii.

Este important faptul, că de la bun început a fost observat caracterul general al noţiunii de radical, ceea ce face posibilă utilizarea ei în cercetarea altor structuri algebrice. Astfel în continuare au apărut radicali în grupuri, semigrupuri, aproape inele, inele grupale, Ω-grupuri, algebre universale. O generalizare esenţială o reprezintă noţiunea de radical în categorii (cu anumite condiţii), introdusă de E. G. Şuligeifer, A. H. Livşiţ, Iu. M. Reabuhin, şi studiată în continuare în lucrările multor specialişti (R. Wiegandt, L. Marki, R. Mlitz, B.R. Gardner etc.).

O ramură specială a teoriei generale a radicalilor în algebră o constituie teoria radicalilor şi torsiunilor în categorii abeliene şi în special în categorii de module. Aplicarea ideii generale de radical în acest caz s-a dovedit a fi deosebit de rodnică din cauza, că categoriile de module posedă o mulţime de proprietăţi excelente (pe care nu le au aşa categorii ca cea a inelelor sau a grupurilor, în particular, categoria de tipul R-Mod este abeliană, posedă generatori, cogeneratori, etc.), ceea ce asigură posibilitatea de dezvoltare a acestei teorii în foarte multe direcţii. De aceea teoria radicalilor în module formează în prezent un domeniu sinestătător, care posedă propriile metode, construcţii, cât şi problematica sa specifică.

De exemplu, s-a clarificat faptul, că la baza cercetărilor în acest domeniu este mai firesc de pus noţiunea de *preradical*, care se exprimă în limbajul categorial ca fiind un subfunctor al functorului identic al categoriei R-Mod. Toate tipurile de preradicali (printre care şi noţiunea centrală de torsiune) se obţin prin condiţii simple suplimentare: idempotenţa, „radicalitatea”, ereditatea, coereditatea, etc.

O trăsătură specifică a acestui domeniu constă în aceea, că majoritatea tipurilor de preradicali posedă caracterizări foarte diverse cu ajutorul diferitor mijloace: prin clase de module, operatori de închidere, mulţimi de ideale stângi ale inelului R (filtre radicale), functori de localizare, subcategorii reflective, etc. Mai evidenţiem un fapt specific pentru teoria radicalilor în module: orice torsiune defineşte aşa numitul functor de localizare asociat, care este strâns legat de inele de câturi. Astfel, toate noţiunile precedente de inele de câturi au obţinut o unică şi firească generalizare prin localizările asociate torsiunilor [21; 22].

Bazele cercetărilor în domeniul teoriei radicalilor în module (şi în general în categorii abeliene) au fost puse în disertaţia lui P. Gabriel „Des categories abeliennes”, scrisă în 1962 (vezi [7]). Apoi au urmat multe lucrări importante pe această tematică, efectuate de: S. E. Dickson, J. P. Jans, J. M. Maranda, O. Goldman, K. Morita, J. Lambek, şi alţii.

Acumularea unui material impunător pe tema analizată a adus la apariţia unor monografii consacrate acestui domeniu. Menţionăm mai întâi cartea A. P. Mişina şi L. A. Scorneacov „Grupuri abeliene şi module" (1969) (traducere în engleză 1976). Apoi au apărut monografiile: J. Lambek [15], B. Stenstorm [21] şi N. Popescu [19] în anul 1971, cât şi cărţile cu expunere mai amănunţită a tematicii: N. Popescu [20] (1973), B. Stenstorm [22] (1975) şi J. Golan [10] (1986).

La fel merită de amintit faptul, că în monografia fundamentală a lui Carl Faith „Algebra: rings, modules and categories", scrisă în două volume (I, 1973 [5] şi II, 1976 [6]) este expusă şi o parte esenţială a teoriei radicalilor în module (vezi volumul I, capitolul 16).

Dintre monografiile apărute în acest domeniu menţionăm în mod special cartea L. Bican, T. Kepka, P. Nemec (în colaborare cu P. Jambor) „Rings, modules and preradicals" (1982) [2], ce conţine o expunere minuţioasă a teoriei, începând de la preradicali (majoritatea lucrărilor precedente erau consacrate torsiunilor), cu aplicaţii interesante la caracterizarea omologică a inelelor, utilizând condiţii asupra preradicalilor de diverse tipuri.

Merită menţionat un ciclu de articole al unui grup de algebrişti din Mexic (F. Raggi, J. R. Montes, H. Rincon, R. Fernandez-Alonso, C. Signoret, etc.), care au studiat structura laticeală a clasei preradicalilor [92; 93; 94], preradicalii primi, $\wedge$-primi şi ireductibili [95], dimensiunea atomică a laticei complete („mari") a preradicalilor [59], preradicalii coprimi, $\vee$-coprimi şi coireductibili [96], descrierea unor clase de inele, şi alte întrebări.

În continuare cercetările pe această tematică s-au aprofundat şi diversificat în aşa măsură, încât este greu de urmărit cât de cât sistematic literatura din acest domeniu. Putem menţiona doar o parte dintre autorii, care au contribuţii importante în dezvoltarea tematicii acestea: L. Bican, P. Jambor, T. Kepka, P. Nemec, M. Teply, K. Morita, J. E. Viola-Prioli, Iu. M. Reabuhin, L. A. Scorneacov, C. Walker, E. Walker, T. Kato, T. Albu, J. A. Beachy, K. Ohtake, Y. Kurata, R. J. McMaster, B. J. Muller, C. Năstăsescu, H. Tachikawa, R. Wisbauer, etc.

În monografia [27], A. I. Caşu a expus atât bazele teoriei radicalilor în module, cât şi unele probleme speciale legate de localizări şi colocalizări. O sinteză a următoarelor cicluri de lucrări ale aceluiaşi autor este expusă în lucrarea [74]. Nemijlocit de tematica prezentei teze sunt legate articolele [70], [71], [72], [73], în care se introduc şi se cercetează unele operaţii noi (în laticea completă a submodulelor), definite cu ajutorul preradicalilor.

De asemenea, nemijlocit pe tematica tezei este capitolul patru din monografia lui J.S. Golan „Linear topologies on a ring" [11], unde este definită şi studiată o operaţie similară celor din prezenta lucrare (în laticea filtrelor preradicale).

Scopul şi obiectivele tezei. Scopul principal al lucrării constă în introducerea şi studierea unor operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module. Pentru realizarea acestui scop au fost stabilite următoarele obiective:

1. Introducerea unor operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module;

2. Determinarea proprietăţilor principale ale acestor operaţii;

3. Identificarea proprietăţilor preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării acestor construcţii;

4. Cercetarea unor cazuri particulare ale operaţiilor definite şi legăturilor dintre preradicalii obţinuţi;

5. Evidenţierea relaţiilor dintre noile operaţii şi unele noţiuni şi construcţii cunoscute din teoria radicalilor;

6. Studierea comportamentului acestor operaţii în cazul unor preradicali de tip special.

Metodologia cercetării ştiinţifice. În prezenta lucrare se utilizează metodele clasice ale algebrei, orientate spre cercetarea operaţiilor algebrice şi a proprietăţilor lor. Totodată aceste metode sunt combinate cu o abordare modernă, legată de aspectul şi limbajul categorial. La baza cercetărilor se află rezultatele bine cunoscute, referitoare la teoria radicalilor în categorii abeliene, în special în categorii de module.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. Toate rezultatele principale ale lucrării sunt noi şi originale. Ele constituie o continuare firească a cercetărilor precedente din acest domeniu. Anume, celor patru operaţii cunoscute în clasa preradicalilor li se adaugă încă patru operaţii noi. Au fost determinate proprietăţile lor; compatibilitatea lor cu operaţiile laticeale din clasa preradicalilor. Au fost cercetate unele cazuri particu-lare ale noilor operaţii; au fost stabilite relaţiile dintre ele şi unele construcţii din teoria radicalilor; a fost descris comportamentul lor în cazul unor preradicali de tip special.

Rezultatul obţinut care contribuie la soluţionarea unei probleme ştiinţifice importante. Problema principală rezolvată constă în introducerea şi cercetarea a patru operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module, ceea ce a condus la îmbogăţirea rezervei instrumentale de lucru în această clasă, pentru completarea studiului în domeniul teoriei inelelor şi a modulelor.

Semnificaţia teoretică. Lucrarea are un caracter teoretic şi reprezintă un pas important în dezvoltarea teoriei radicalilor în module.

Valoarea aplicativă a lucrării. Rolul rezultatelor obţinute constă în: lărgirea spectrului de cunoştinţe în domeniu prin introducerea unor noi operaţii în clasa preradicalilor; completarea esenţială a metodelor de cercetare cu ajutorul noilor operaţii; posibilitatea de aplicare a lor la probleme structurale.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere:

– au fost definite patru operaţii noi în clasa preradicalilor a unei categorii de module, şi anume, câtul stâng în raport cu reuniunea, cocâtul stâng în raport cu intersecţia, câtul stâng în raport cu intersecţia şi cocâtul stâng în raport cu reuniunea;

– au fost determinate proprietăţile acestor operaţii şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării acestor construcţii;

– au fost examinate cazurile particulare ale operaţiilor introduse şi legăturile dintre preradicalii obţinuţi;

– au fost stabilite relaţiile dintre noile operaţii şi unele noţiuni şi construcţii din teoria radicalilor (pseudocomplement, suplement);

– a fost descris comportamentul operaţiilor noi definite în cazul unor preradicali de tip special;

– a fost arătat, că cocâtul stâng în raport cu intersecţia reprezintă o generalizare a unui cunoscut rezultat al lui J. Golan.

Aprobarea rezultatelor. Rezultatele lucrării au fost expuse la următoarele foruri ştiinţifice:

– Seminarul ştiinţific al laboratorului „Algebră şi Topologie" de pe lângă Institutul de Matematică şi Informatică „Vladimir Andrunachievici";

– Seminarul ştiinţifico-metodic „Prof. Petre Osmătescu – 80" al departamentului „Matematica" de pe lângă Universitatea Tehnică a Moldovei;

– The International Conference „Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2015)", 2015, Chişinău, Moldova;

– The International Conference „Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2016)", 2016, Chişinău, Moldova;

– The 4^{th} Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chişinău, 2017;

– The International Conference on Mathematics, Informatics and Technologies dedicated to the ilustrous scientist Valentin Belousov, 2018, Bălţi, Moldova;

– The 26^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2018), 2018, Chişinău, Moldova;

– The International Conference „Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2019)", 2019, Chişinău, Moldova.

Publicaţii. Rezultatele de bază ale tezei au fost reflectate în 9 publicaţii:

1. (a) Două articole în revista „Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova" seria Matematica Nr 1(83), 2017 [66] şi Nr 2(84), 2017 [67] (categoria B);

   (b) Un articol în revista „Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius Constanţa" seria Matematica, Vol XXVII (2019) fascicola 2 [69];

2. Un articol în culegere de articole ştiinţifice la the 4^{th} Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, 2017 [68];

3. Cinci rezumate la conferinţe internaţionale: MITRE 2015 [129], MITRE 2016 [130], MITI 2018 [131], CAIM 2018 [132] şi MITRE 2019 [133].

Toate lucrările sunt scrise fără coautori.

Structura şi volumul tezei. Teza este scrisă în limba română, cuprinde 106 pagini şi este compusă din: Introducere, cinci capitole, Concluzii generale şi recomandări, Bibliografie cu 133 titluri.

Sumarul compartimentelor tezei. În **Introducere** este prezentată starea de lucruri în domeniul de cercetare al tezei, scopul şi obiectivele tezei, importanţa, noutatea şi originalitatea rezultatelor tezei, formularea succintă a rezultatelor principale ale tezei, aprobarea rezultatelor tezei. De asemenea, este expusă succint evoluţia noţiunii de radical.

Primul capitol al tezei poartă un caracter introductiv şi conţine o trecere in revistă a celor mai importante rezultate referitoare la tema tezei, problemele principale soluţionate în teză şi a unor elemente introductive din literatura de specialitate. De asemenea, se argumentează actualitatea problemei de cercetare.

În **Capitolul 2** este definită şi cercetată o operaţie nouă în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, **câtul stâng în raport cu reuniunea**. Sunt arătate proprietăţile principale ale acestei operaţii şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării ei. Este determinată compatibilitatea noii operaţii cu operaţiile laticeale din $\mathbb{PR}$ (intersecţia şi reuniunea preradicalilor). Sunt stabilite relaţiile dintre operaţia definită şi unele noţiuni şi construcţii din laticea completă „mare” $\mathbb{PR}$. Este descrisă comportarea operaţiei noi în cazul unor preradicali de tip special (preradicali primi, $\wedge$-primi, ireductibili). De asemenea, sunt studiate unele cazuri particulare ale acestei operaţii.

În **Capitolul 3** este introdusă şi cercetată o altă operaţie nouă în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, **cocâtul stâng în raport cu intersecţia**. Ea este duală operaţiei câtul stâng în raport cu reuniunea definite şi cercetate în capitolul 2. Sunt determinate proprietăţile principale ale acestei operaţii, proprietăţile preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării ei şi relaţiile dintre această operaţie şi unele noţiuni şi construcţii din laticea completă „mare” $\mathbb{PR}$. Este stabilit comportamentul cocâtului stâng în raport cu intersecţia în cazul unor preradicali de tip special (preradicali coprimi, $\vee$-coprimi, coireductibili). Sunt cercetate unele cazuri particulare ale acestei operaţii.

În paragraful 4 al acestui capitol este arătat, că operaţia *rest drept* (*right residual*) introdusă şi investigată de J. S. Golan pentru filtre preradicale în monografia *Linear topologies on a ring* [11] (pag. 44), poate fi tratată ca un caz particular al operaţiei cocâtul stâng în raport cu intersecţia definite în acest capitol pentru preradicali.

În **Capitolul 4** este definită şi investigată o operaţie nouă în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, **câtul stâng în raport cu intersecţia**. Ea este o operaţie parţială, în sens că ea nu există pentru orice doi preradicali din $\mathbb{PR}$. Este indicat criteriul de existenţă al ei. Sunt stabilite proprietăţile principale ale acestei operaţii şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării ei. Este arătată legătura dintre operaţia definită şi operaţiile laticeale din laticea completă „mare" $\mathbb{PR}$. Este descris comportamentul acestei operaţii în cazul unor preradicali de tip special (preradicali idempotenţi, primi, $\wedge$-primi, ireductibili) şi sunt menţionate unele cazuri particulare ale acestei operaţii.

În **Capitolul 5** este introdusă şi cercetată o operaţie nouă în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, **cocâtul stâng în raport cu reuniunea**. Ea este duală operaţiei câtul stâng în raport cu intersecţia definite şi studiate în capitolul 4. Este indicat criteriul de existenţă al ei. Sunt descrise proprietăţile principale ale acestei operaţii, proprietăţile preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării ei. Este stabilită compatibilitatea operaţiei definite cu operaţiile laticeale din laticea completă „mare" $\mathbb{PR}$ şi comportarea noii operaţii în cazul unor preradicali de tip special (preradicali coprimi, $\vee$-coprimi, coireductibili şi radicali). Sunt descrise unele cazuri particulare ale acestei operaţii.

Mulţumiri:

Exprim cu deosebită consideraţie sincere recunoştinţe domnului **Profesor Caşu Alexei**, pentru determinarea domeniului de cercetare, îndrumarea în munca ştiinţifică cu multă competenţă, pentru cunoştinţele proprii destul de vaste şi aprofundate, pentru materialul bibliografic personal foarte bogat şi preţios prin conţinut, pentru ajutorul acordat în realizarea lucrărilor şi rezultatelor ştiinţifice, pentru ajutorul şi timpul pe care l-a oferit motivându-mă, pentru discuţiile şi criticile constructive şi pentru răbdarea deosebită.

Cu deosebit respect şi recunoştinţă aduc mulţumiri şefului laboratorului de Algebră şi Topologie domnului **Vladimir Izbaş**, pentru şansa, ajutorul şi îndemnul de a face lucru ştiinţific după o perioadă lungă de repaos.

Exprim sincere mulţumiri **Seminarului Ştiinţific de Profil** pentru sfaturile şi criticele constructive, care au contribuit la realizarea unei teze calitative.

1. ANALIZA SITUAŢIEI ÎN DOMENIUL TEORIEI RADICALILOR ÎN MODULE

1.1. Noţiuni fundamentale

În expunerea ce urmează vom considera cunoscute unele noţiuni elementare şi generale din domeniul algebrei: inel, modul, categorie, functor, ideal, latice, submodul, omomorfism (de inel, de modul). Vom aminti doar câteva noţiuni specifice problemelor analizate în prezenta lucrare, cât şi unele rezultate preliminare.

În centrul atenţiei în cercetările noastre se află noţiunea de preradical. Fie R un inel cu unitate şi R-Mod este categoria R-modulelor stângi unitare.

Preradical în R-Mod se numeşte un subfunctor r al functorului identic al categoriei R-Mod, adică r este o funcţie, care asociază oricărui modul $M \in R$-Mod un submodul $r(M) \subseteq M$, astfel încât pentru orice R-morfism $f : M \to M'$ are loc relaţia: $f(r(M)) \subseteq r(M')$.

Vom nota prin $\mathbb{PR}$ clasa tuturor preradicalilor categoriei R-Mod. În această clasă se introduce relaţia de ordine parţială $(\leq)$ prin regula:

$$r_1 \leq r_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} r_1(M) \subseteq r_2(M)$$

pentru orice $M \in R$-Mod.

Pe baza acestei relaţii clasa $\mathbb{PR}$ poate fi transformată în *latice completă* („mare”) cu ajutorul următoarelor două operaţii laticeale:

1) *intersecţia* $\underset{\alpha \in \mathfrak{A}}{\wedge} r_\alpha$ unei familii de preradicali $\{r_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} \subseteq \mathbb{PR}$ acţionează astfel:

$$\left(\underset{\alpha \in \mathfrak{A}}{\wedge} r_\alpha\right)(M) \overset{def}{=} \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha(M) \text{ pentru orice } M \in R\text{-Mod};$$

2) *reuniunea* $\underset{\alpha \in \mathfrak{A}}{\vee} r_\alpha$ familiei de preradicali $\{r_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} \subseteq \mathbb{PR}$ se defineşte prin regula:

$$\left(\underset{\alpha \in \mathfrak{A}}{\vee} r_\alpha\right)(M) \overset{def}{=} \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha(M) \text{ pentru orice } M \in R\text{-Mod}.$$

Mai mult, în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ se definesc două operaţii binare în felul următor:

3) *înmulţirea* (produsul) $r \cdot s$ a doi preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ se efectuează prin regula:

$$(r \cdot s)(M) \overset{def}{=} r(s(M)) \ \text{ pentru orice } \ M \in R\text{-Mod};$$

4) *coînmulţirea* (coprodusul) $r \# s$ a preradicalilor r şi s se defineşte prin regula:

$$[(r \# s)(M)]/s(M) \overset{def}{=} r(M/s(M)\ ) \ \text{ pentru orice } \ M \in R\text{-Mod}.$$

Remarcăm, că în monografia [2] (pag. 31) (de asemenea în [12], [27], [92 – 96]) coprodusul a doi preradicali r şi s este notat $(r : s)$ şi este definit prin regula:

$$[(r : s)(M)]/r(M) \ = s(M/r(M)\ ).$$

Deci avem $(r \# s) = (s : r)$.

Aceste patru operaţii sunt bine cunoscute şi cercetate în literatura de specialitate ([2]; [27]; [92]; [93]; [94]; ...), unde sunt arătate proprietăţile, aplicaţiile lor, etc. Menţionăm aici în calitate de exemplu *proprietăţile de distributivitate* ale acestor operaţii, care au următoarea formă:

1) $(\wedge\, r_\alpha) \cdot s = \wedge\, (r_\alpha \cdot s)$;

2) $(\vee\, r_\alpha) \cdot s = \vee\, (r_\alpha \cdot s)$;

3) $(\wedge\, r_\alpha) \# s = \wedge\, (r_\alpha \# s)$;

4) $(\vee\, r_\alpha) \# s = \vee\, (r_\alpha \# s)$,

pentru orice familie $\{r_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subseteq \mathbb{PR}$ şi $s \in \mathbb{PR}$.

Aceste proprietăţi sunt importante pentru scopurile noastre, deoarece utilizarea lor permite obţinerea unor operaţii noi în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$, ceea ce constituie scopul acestei lucrări.

Operaţiile intersecţia şi reuniunea sunt comutative şi asociative, iar produsul şi coprodusul sunt doar asociative. Mai mult, produsul şi coprodusul preradicalilor posedă proprietatea de monotonie atât pentru primul factor cât şi pentru al doilea factor. Prin intermediul acestor operaţii obţinem patru preradicali, care sunt aranjaţi în următoarea ordine:

$$r \cdot s \leq r \wedge s \leq r \vee s \leq r \# s$$

pentru orice $r, s \in \mathbb{PR}$.

În continuare amintim tipurile principale de preradicali. Preradicalul $r \in \mathbb{PR}$ se numeşte:

– *preradical idempotent*, dacă $r\left(r\left(M\right)\right) = r\left(M\right)$ pentru orice $M \in R$-Mod (adică $r \cdot r = r$);

– *radical*, dacă $r\left(M/r\left(M\right)\right) = 0$ pentru orice $M \in R$-Mod (adică $r \# r = r$);

– *radical idempotent*, dacă satisface ambele condiţii precedente;

– *preradical ereditar* (sau pretorsiune), dacă pentru orice pereche $N \subseteq M$, unde $M \in R$-Mod şi $N \in \mathbb{L}(M)$, are loc relaţia: $r\left(N\right) = N \bigcap r\left(M\right)$;

– *preradical coereditar*, dacă pentru orice $M \in R$-Mod şi pentru orice submodul $N \in \mathbb{L}(M)$, are loc relaţia: $r\left(M/N\right) = \left(r(M) + N\right)/N$;

– *torsiune*, dacă r este un radical ereditar;

– *cotorsiune*, dacă r este idempotent şi coereditar.

Menţionăm, că dacă preradicalul r este ereditar, atunci $r \cdot s = r \wedge s$, iar dacă preradicalul r este coereditar, atunci $r \# s = r \vee s$.

O parte importantă a teoriei radicalilor în module este consacrată descrierii tipurilor principale de preradicali prin diverse metode: cu ajutorul claselor asociate de module, prin mulţimi de ideale stângi ale inelului R, prin ideale bilaterale din R şi altele. Amintim în formă succintă unele rezultate de acest tip.

Orice preradical $r \in \mathbb{PR}$ determină două clase de module:

$\mathcal{T}_r = \{M \in R\text{-Mod} \mid r(M) = M\}$ – clasa modulelor r-*radicale*;

$\mathcal{F}_r = \{M \in R\text{-Mod} \mid r(M) = 0\}$ – clasa modulelor r-*semisimple*.

În caz general preradicalul r nu se restabileşte nici prin una dintre aceste clase. Preradicalul r este determinat în mod unic de clasa $\mathcal{T}_r$ atunci şi numai atunci când el este *idempotent*. În mod dual, r se restabileşte prin clasa $\mathcal{F}_r$ atunci şi numai atunci când el este un *radical*.

Amintim regulile de trecere de la clasele de module la preradicali. Fie $\mathcal{K}$ o clasă abstractă de module. Atunci ea defineşte în R-Mod doi preradicali $r^{\mathcal{K}}$ şi $r_{\mathcal{K}}$ prin următoarele reguli:

$$r^{\mathcal{K}} \overset{def}{=} \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \{M_\alpha \subseteq M \mid M_\alpha \in \mathcal{K}\},$$

$$r_{\mathcal{K}} \overset{def}{=} \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} \{M_\alpha \subseteq M \mid M/M_\alpha \in \mathcal{K}\}.$$

Asocierile $r \rightsquigarrow \mathcal{T}_r$ $(r \rightsquigarrow \mathcal{F}_r)$ şi $\mathcal{K} \rightsquigarrow r^{\mathcal{K}}$ $(\mathcal{K} \rightsquigarrow r_{\mathcal{K}})$ definesc bijecţii monotone (antimonotone) între preradicalii de anumit tip şi clasele abstracte de module cu proprietăţi speciale. De exemplu, aplicaţiile $r \rightsquigarrow \mathcal{T}_r$ şi $\mathcal{K} \rightsquigarrow r^{\mathcal{K}}$ definesc o bijecţie monotonă între preradicalii *idempotenţi* din $\mathbb{PR}$ şi clasele de module, închise în raport cu imaginile omomorfice şi sumele directe. Dual, aplicaţiile $r \rightsquigarrow \mathcal{F}_r$ şi $\mathcal{K} \rightsquigarrow r_{\mathcal{K}}$ definesc o bijecţie antimonotonă între *radicalii* din $\mathbb{PR}$ şi clasele de module, închise în raport cu submodulele şi produsele directe. Toate celelate tipuri principale de preradicali posedă caracterizări similare, adăugând proprietăţi noi asupra claselor de module.

Prezintă un interes deosebit faptul, că unele tipuri de preradicali posedă descrieri în limbajul inelului R, şi anume, prin mulţimi speciale de ideale stângi (filtre), sau prin ideale bilaterale ale lui R. Pentru formularea rezultatelor respective avem nevoie de următoarele noţiuni ([7], [9; 10; 11], [15],[21; 22], ...).

Mulţimea de ideale stângi $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$ ale inelului R se numeşte *filtru preradical* (filtru topologic), dacă satisface următoarele condiţii:

(a_1) Dacă $I \in \mathcal{E}$ şi $a \in R$, atunci $(I : a) \in \mathcal{E}$ pentru orice $a \in R$, unde $(I : a) = \{x \in R \mid xa \in I\}$;

(a_2) Dacă $I \in \mathcal{E}$ şi $I \subseteq J$, $J \in \mathbb{L}({}_RR)$, atunci $J \in \mathcal{E}$;

(a_3) Dacă $I \in \mathcal{E}$ şi $J \in \mathcal{E}$, atunci $I \cap J \in \mathcal{E}$.

Rezultatul principal constă în următoarele: există o bijecţie monotonă între *pretorsiunile* categoriei R-Mod şi *filtrele preradicale* ale inelului R, care se realizează prin aplicaţiile: $r \rightsquigarrow \mathcal{E}_r$, unde $\mathcal{E}_r = \{I \in \mathbb{L}({}_RR) \mid R/I \in \mathcal{T}_r\}$ şi $\mathcal{E} \rightsquigarrow r_{\mathcal{E}}$, unde $r_{\mathcal{E}}(M) = \{m \in M \mid (0 : m) \in \mathcal{E}\}$.

Mai mult, condiţia

(a_4) Dacă $I_\alpha \in \mathcal{E}$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, atunci $\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha \in \mathcal{E}$,

descrie pretorsiunile *jansiene*, care se definesc prin cererea ca idealul $K_r = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha \in \mathcal{E}_r$. Deci idealul K_r (*nucleul* lui r) determină univoc pretorsiunea jansiană $r \in \mathbb{PR}$.

Astfel, aplicaţiile $r \rightsquigarrow K_r$ şi $I \rightsquigarrow r_{(I)}$, unde $r_{(I)}(M) = \{m \in M \mid Im = 0\}$, definesc o bijecţie monotonă între pretorsiunile jansiene din laticea $\mathbb{PR}$ şi idealele bilaterale ale inelului R.

O importanţă deosebită în construcţiile asociate (localizări, inele de câturi, etc.) o are descrierea *torsiunilor* în limbajul inelului, care are următoarea formă.

Mulţimea de ideale stângi $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$ se numeşte *filtru radical* (topologie Gabriel, filtru topologic idempotent), dacă ea satisface condiţiile (a_1), (a_2) şi (a_5), unde:

(a_5) Dacă $I \in \mathcal{E}$ şi $J \in \mathbb{L}({}_RR)$, $J \subseteq I$, $(J : i) \in \mathcal{E}$ pentru orice $i \in I$, atunci $J \in \mathcal{E}$.

Aplicaţiile $r \rightsquigarrow \mathcal{E}_r$ şi $\mathcal{E} \rightsquigarrow r_{\mathcal{E}}$ definesc o bijecţie monotonă între torsiunile categoriei R-Mod şi filtrele radicale ale inelului R. Acest rezultat fundamental permite expunerea teoriei torsiunilor în limbajul filtrelor radicale. Toate proprietăţile torsiunilor, operaţiile în mulţimea torsiunilor şi construcţiile adiacente pot fi „traduse” şi exprimate prin filtrele radicale respective.

Torsiunile ocupă un loc deosebit în literatura de specialitate, lor le sunt consacrate un şir de monografii ([[9; 10], [15], [21; 22], ...). Acest fapt se lămureşte prin aceea, că torsiunile posedă variate forme de exprimare şi suficiente proprietăţi pentru a permite construcţii adiacente importante (functor de localizare, inel de câturi şi altele). Orice torsiune r determină functorul de localizare L_r, care asociază oricărui modul M modulul de câturi $L_r(M)$, care este r-semisimplu şi r-injectiv. Clasa modulelor r-semisimple şi r-injective formează *subcategoria de localizare*, determinată de torsiunea r.

În cazul când $M = {}_RR$, obţinem inelul de câturi $L_r({}_RR)$. Teoria inelelor de câturi asociate torsiunilor este expusă în monografiile [11], [15], [21; 22]. Unul dintre cele mai bine cunoscute rezultate în acest domeniu este *teorema lui Popescu şi Gabriel*, care afirmă, că orice categorie Grothendieck (AB5-categorie cu generator) este echivalentă cu o categorie de module, factorizată pe o subcategorie de localizare (obţinută printr-o torsiune).

1.2. Analiza literaturii în domeniu

Teoria radicalilor posedă o bibliografie foarte bogată, de aceea este dificil de expus o sinteză completă a literaturii în acest domeniu. Noi vom arăta în formă succintă doar acele surse bibliografice, care sunt nemijlocit legate de tematica acestei lucrări.

Una dintre primele lucrări de tip monografic, care conţine expunerea bazelor teoriei radicalilor în module este cartea autorilor A. P. Misina şi L. A. Skornjakov [30]. Varianta engleză (completată) a fost publicată în anul 1976 ([17]). În ea se studiază trei noţiuni de bază: puritatea, torsiunea şi completitudinea. Noi menţionăm partea consacrată torsiunilor. Se acceptă punctul de vedere general, introdus de A. G. Kuroş: prin *radical* se înţelege un radical idempotent, iar prin *torsiune* un radical ereditar. Se arată descrierea lor prin clase de module, iar în cazul torsiunilor se caracterizează prin filtre Gabriel (filtre radicale). Diverse aspecte ale noţiunilor cercetate şi relaţia lor cu cele auxiliare (injectivitate, puritate, etc.) sunt arătate, utilizând unele metode din algebra omologică (Ext, etc.). Specificul acestei lucrări constă în bogăţia bibliografică, punctul de vedere complex şi larg, în accentuarea legăturii cu multe noţiuni şi construcţii. Precum scriu autorii în rezumat, lucrarea arată progresul cercetărilor în domeniu şi ea poate servi drept o „trambulină” pentru cercetările următoare.

Cartea lui Nicolae Popescu [19] reprezintă o monografie fundamentală consacrată teoriei categoriilor abeliene. Ea conţine o expunere amănunţită a tuturor noţiunilor şi construcţiilor de bază în categorii abeliene. Unul dintre capitolele principale ale lucrării se numeşte „Localizarea” şi conţine expunerea categoriilor de fracţii, calculul fracţiilor, localizarea în categorii cu anvelope injective, localizarea în categorii de module, studiul inelului de localizare. Păstrând punctul de vedere al lui P. Gabriel [7], se generalizează pentru categorii abeliene construcţiile de bază cunoscute pentru categorii de module. Se arată structura categoriilor abeliene cu generatori şi condiţia AB5 (categorii Grothendieck).

Rezultatul central în teoria localizării dă o caracterizare a categoriilor Grothendieck, reducând studiul lor la studiul categoriilor de module (acest rezultat în literatura de specialitate poartă denumirea de teorema Gabriel – Popescu). Astfel, teoria torsiunilor în categorii de module a servit drept fundament pentru generalizări foarte esenţiale pentru un şir de domenii ale algebrei şi topologiei.

Menţionăm în continuare câteva lucrări ale lui K. Morita apropiate de tematica teoriei radicalilor şi localizărilor în module.

În lucrările [85; 86; 87] se cercetează localizările în categorii de module dintr-un singur punct de vedere, şi anume, cu ajutorul centralizatorului dublu al unui modul finit generat şi injectiv, care reprezintă o localizare arbitrară a inelului dat. Cu ajutorul unei tehnici perfecte de lucru cu functorii adjuncţi, se arată descrierea situaţiei când o categorie de module este echivalentă cu o subcategorie de localizare a altei categorii de module.

În articolul lui K. Morita [88] sunt continuate cercetările precedente. Pentru un modul plat U_A mulţimea de ideale stângi $\mathcal{F}(U_A) = \{J \subseteq A \,|\, UJ = U\}$ este un filtru radical. Se introduce noţiunea de „modul de tip FP" şi se arată, că dacă U_A este modul plat de tipul FP, atunci inelul de câturi relativ la filtru $\mathcal{F}(U_A)$ coincide cu centralizatorul dublu al modulului U_A. Se cercetează şi situaţia duală, când este dat un modul injectiv ${}_AV$ şi se obţine filtrul radical $\mathcal{F}({}_AV) = \{J \subseteq A \,|\, Hom_A(A/J, {}_AV) = 0\}$. Se arată când inelul de câturi al lui A relativ la filtrul $\mathcal{F}({}_AV)$ coincide cu centralizatorul dublu al modulului ${}_AV$.

Lucrarea [89] reprezintă o totalizare şi completare a celor precedente şi conţine rezultate despre localizări în module şi despre prezentarea inelului de câturi în raport cu o torsiune în formă potrivită (ca bicomutator sau dublu centralizator al unui modul dat).

Inelele şi modulele de câturi, construite pe baza torsiunilor, au fost cercetate în mod sistematic de B. Stenstrom în cărţile [21] şi [22]. Varianta preliminară [21] conţine construcţiile de bază ale acestei teorii şi expunerea situaţiei generale în acea perioadă. Monografia [22] este mai completă, în ea sunt adăugate toate materialele necesare pentru expunere, referitoare la teoria inelelor şi modulelor, la teoria laticelor şi inelelor de fracţii, capitole speciale sunt consacrate categoriilor abeliene şi categoriilor Grothendieck.

În [21] sunt expuse rezultatele principale despre teorii de torsiune, este arătată relaţia lor cu topologiile lineare (topologiile Gabriel sau filtrele radicale). Sunt studiate teoriile de torsiune ereditare pentru inele noetheriene. Se construiesc inele şi module de câturi pe baza generalizării noţiunii de injectivitate. Aspectul categorial este accentuat prin studierea categoriilor modulelor de câturi, care formează aşa numitele subcategorii Giraud. Se cercetează localizările perfecte, construite cu ajutorul topologiilor Gabriel de tip special (numite *perfecte*). Un interes special este acordat aşa numitelor inele de câturi *maximale*, care reprezintă generalizarea construcţiilor clasice legate de inelele de fracţii.

Cartea [22] este o totalizare a unei perioade mari de dezvoltare a teoriei inelelor de câturi şi în ea sunt sintetizate în mod sistematic rezultatele principale în acest domeniu, expuse în limbaj categorial. Astfel, multe construcţii cunoscute în teoria inelelor de câturi (inele *clasice* de câturi) pot fi considerate cazuri particulare ale teoriei generale expuse în monografia [22].

În monografia monumentală a lui Carl Faith [5; 6] (în două volume, traduse în rusă în 1977 şi 1979) în primul volum se conţine partea IV „Structura categoriilor abeliene" (capitolele 14 – 17). Ea constă din expunerea unor întrebări strâns legate de teoriile de torsiune. Anume, se studiază categoriile Grothendieck (AB5 – categorii abeliene cu generatori), care au multe proprietăţi comune cu categoriile de module. Se defineşte noţiunea de *factor-categorie* $\mathscr{A}/\mathscr{S}$ a unei categorii abeliene $\mathscr{A}$ pe o subcategorie de localizare, pe baza căreia se obţine functorul de localizare în raport cu $\mathscr{S}$. Se arată că în categoria R-Mod există o bijecţie între subcategoriile de localizare şi topologiile Gabriel ale inelului R (adică între torsiunile din R-Mod). Capitolul 15 al monografiei conţine teorema Gabriel – Popescu, care descrie categoriile Grothendieck ca factor-categorii ale unor categorii de module. Capitolul 16 „Teorii de torsiune, radicali şi mulţimi topologizante idempotente şi multiplicative" conţine aplicaţii ale functorilor de localizare şi ale factor-categoriilor în cazuri concrete, obţinând rezultate referitoare la filtre radicale şi teorii de torsiune. Se construieşte inelul de câturi maximal (în sensul lui Johnson) şi se arată când el este semisimplu (în sens clasic).

Cea mai completă expunere a teoriei *preradicalilor* se află în monografia *L. Bican, T. Kepka, P. Nemec „Rings, modules and radicals"* [2], publicată în anul 1982. În ea se totalizează rezultatele autorilor (împreună cu P. Jambor) în anii precedenţi şi publicate într-o serie de articole [41 – 57] în anii 1971 – 1979. Cartea conţine un material bogat referitor la proprietăţile preradicalilor, la operaţiile asupra lor, la descrierea unor tipuri de preradicali. Se studiază filtre preradicale, injectivitatea şi proiectivitatea relativă, definită prin preradicali.

Unul dintre scopurile declarate ale acestei monografii constă în *caracterizarea omologică* a inelelor cu ajutorul preradicalilor de diverse tipuri, adică descrierea unor inele cu ajutorul a unor cerinţe speciale asupra categoriei R-Mod, formulate prin preradicali. Astfel, se stabileşte legătura dintre proprietăţile preradicalilor categoriei R-Mod şi structura inelului R. Atenţia principală se acordă studiului sistematic al proprietăţilor de bază ale preradicalilor, metodelor de generare şi cogenerare a filtrelor preradicale, cât şi diverselor aspecte ale problemei scindării (separarea lui $r(M)$ ca sumand direct în M).

Un curs de lecţii pe teoria preradicalilor este expus concis în cartea *Preradicali şi teorii de torsiune* [12]. Ea conţine bazele teoriei generale a radicalilor în module, expunerea este însoţită de multe exemple şi exerciţii pentru testarea competenţelor şi completarea cunoştinţelor cititorului în domeniu.

Una dintre primele publicaţii de proporţii mai mari în acest domeniu este lucrarea lui *Joachim Lambek „Torsion theories, additive semanties and rings of quotients”* [15] (1971). Ea conţine material esenţial referitor la aşa numitele *teorii de torsiune*, care reflectă teoria (pre)radicalilor, prezentată prin perechi de clase $(\mathcal{T}_r,\ \mathcal{F}_r)$ cu proprietăţi speciale (vezi la fel [60] (Dickson)). Se construiesc module şi inele de câturi, se arată relaţia cu alte construcţii algebrice (în limbaj categorial).

În articolul [109] se face o încercare de generalizare a teoriilor de torsiune (în sens Dickson [60]) ca perechi de clase $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, substituind condiţia $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$ cu condiţia $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \mathcal{Z}$ pentru o subcategorie $\mathcal{Z}$ a categoriei $\mathcal{C}$. Se analizează posibilităţile de a construi asemenea teorii relative de torsiune, precum şi unele categorii speciale de spaţii topologice [110 – 112].

Laticea $Tors({}_RR)$ a tuturor torsiunilor categoriei R-Mod este studiată în lucrările [120] şi [125 – 128]. Ea este booleană, dacă inelul R este semiartinian la stânga [125;

126]. Sunt descrise torsiunile prime şi sunt găsite condiţiile în care fiecare torsiune este o intersecţie finită de torsiuni prime [127; 128]. Laticea $Tors({}_R R)$ posedă un singur coatom, dacă inelul R este absolut fără torsiune, dacă toate modulele injective sunt fidele („*faithful*”) [120].

În articolele [113; 114; 115; 118; 121] este studiată laticea $Ptors({}_R R)$ a tuturor pretorsiunilor categoriei R-Mod. Ea este modulară şi atomică. $Ptors({}_R R)$ este booleană, dacă inelul R este semisimplu. $Ptors({}_R R)$ are doar două elemente, dacă inelul R este simplu artinian [113]. Distributivitatea acestei latice este studiată în [115]. Toate pretorsiunile categoriei R-Mod sunt ideale (superereditare), dacă inelul R este artinian la stânga, dacă toate R-modulele sunt cofidele [114]. Inelul R este artinian la stânga esenţial (adică conţine un ideal stâng artinian esenţial), dacă pretorsiunea Goldie z este ideală şi coesenţială, şi orice pretorsiune $r \geq z$ este ideală [118]. Condiţiile asupra inelului R când laticea $Ptors({}_R R)$ posedă coatom sunt arătate în [121].

În lucrările [116; 117; 119] de către autori sunt stabilite bijecţii între pretorsiunile categoriei R-Mod şi unele mulţimi speciale (mulţimi primare, terţiare, primale) de ideale ale inelului R.

Publicaţii importante în acest domeniu sunt legate de numele lui *Jonathan Golan* ([9; 10; 11]).

În monografia [9] se cercetează localizările în inele necomutative. Specificul lucrării constă în aceea, că orice torsiune este privită ca o clasă de echivalenţă $[E]$ a unui modul injectiv E (adică E este cogeneratorul torsiunii respective). În acest limbaj se expune teoria torsiunilor şi construcţiile asociate. Se arată structura laticeală a mulţimii R-tors a tuturor torsiunilor din R-Mod. Un compartiment al lucrării este consacrat teoriilor de torsiune de tip special: exacte, stabile, semisimple etc. În fiecare caz se arată criterii prin care se caracterizează tipul dat. Mai mult, se expune teoria descompunerii şi reprezentării pentru teorii de torsiune.

Altă lucrare importantă a aceluiaşi autor este monografia [10]. Utilizând aceeaşi formă de abordare a torsiunilor prin module injective, autorul arată:

1) clasele de module asociate teoriilor de torsiune (în total - 20 clase);

2) functorii definiţi de teoriile de torsiune (printre care şi functorul de localizare);

3) proprietăţile mulţimii R-tors privită ca latice completă;

4) tipuri speciale de teorii de torsiune şi descrierea lor;

5) caracterizarea inelelor prin teorii de torsiune.

Mai amintim o lucrare importantă a lui J. Golan [11] despre topologii liniare în inele. Aceste topologii nu sunt altceva decât filtrele preradicale, definite mai sus (în lucrare ele sunt numite filtre (topologizante)). Astfel, lucrarea de fapt este consacrată studiului *pretorsiunilor* (r) în limbajul filtrelor respective ($\mathcal{E}_r$). Mulţimea filtrelor R-fil inelului R se transformă în latice şi se arată proprietăţile de bază ale ei, în particular se descriu atomii şi coatomii ei. Mulţimea R-fil se cercetează şi din alt punct de vedere, fiind considerată ca semiinel. Pentru scopurile noastre prezintă interes operaţia din R-fil, numită *înmulţire* ($K \cdot K'$). Se arată o serie de proprietăţi ale ei în combinaţie cu operaţiile laticeale din R-fil. Mai mult, pe baza operaţiei de înmulţire se defineşte în R-fil o operaţie nouă, numită *rest la dreapta* (right residual) $(K')^{-1}K$, fiind unicul filtru minimal K'' din R-fil cu proprietatea $K' \cdot K'' \geq K$. În expunerea ce urmează vom arăta relaţia acestei noţiuni cu operaţiile noi, care vor fi definite şi cercetate.

Menţionăm în continuare, că într-o serie de lucrări [27; 28], [70 – 77] A. I . Caşu a abordat variate probleme din teoria radicalilor în module. Anume, în cartea [27] sunt expuse atât bazele acestei teorii, cât şi unele întrebări speciale, legate de localizări şi colocalizări, subcategorii Giraud, triade etc.

În monografia [28] se cercetează efectul unor functori asupra torsiunilor, localizărilor şi laticelor de submodule. Cu acest scop se analizează două construcţii importante din teoria modulelor: situaţia de adjuncţie şi contextul Morita, utilizând functorii asociaţi acestor situaţii.

În lucrările [70 – 73] se definesc şi se cercetează patru operaţii (directe) în laticea submodulelor $\mathbb{L}(M)$ a unui modul $M \in R$-Mod, utilizând preradicalii asociaţi perechilor de forma $N \subseteq M$, unde $N \in \mathbb{L}(M)$, cât şi operaţiile $(\cdot)$ şi $(\#)$ din $\mathbb{PR}$. Mai mult, pe baza acestor operaţii se obţin patru operaţii inverse în $\mathbb{L}(M)$, dintre care două sunt operaţii parţiale.

Articolul de sinteză [74] totalizează rezultatele autorului referitoare la teoria radicalilor în module.

Expunem în continuare rezultatele unor cercetători mexicani (Francisco Raggi, Jose Rios Montes, Hugo Rincon, Carlos Signoret şi alţii), care au publicat o serie de articole, consacrate cercetării *laticei preradicalilor* unei categorii de module ([92 – 96]).

De exemplu, în lucrarea [92] se arată că această latice este atomică şi coatomică, se descriu atomii şi coatomii ei. Mai mult, se caracterizează în termenii preradicalilor câteva clase de inele (simple artiniene, semisimple artiniene, V-inele).

În articolul [93] se definesc câţiva preradicali asociaţi preradicalui dat: anulatorul, egalizatorul, coegalizatorul şi totalizatorul în termenii produsului şi coprodusului preradicalilor. Cu aceste instrumente se introduc mai multe partiţii în laticea („mare") a preradicalilor şi se studiază unele clase de echivalenţă ale lor. De asemenea, autorii arată aplicaţii ce clasifică inelele.

În lucrarea [94] se arată câţiva operatori în laticea preradicalilor: pseudocomplementul, anulatorul şi totalizatorul, cât şi relaţiile dintre ei. Utilizând aceşti operatori se arată caracterizările V-inelelor, inelelor ce sunt o sumă directă finită de anvelope injective a modulelor simple, şi a inelelor care în afară de ultima condiţie au proprietatea că fiecare pereche de module simple are legături omologice.

Articolul [95] conţine rezultate despre tipuri noi de preradicali: primi, $\wedge$-primi şi ireductibili, iar articolul [96] conţine rezultate despre preradicali: coprimi, $\vee$-coprimi şi coireductibili. Aceste rezultate la fel se aplică la descrierea unor clase de inele.

Tematica tezei posedă un ecou suficient de bine accentuat în literatura de specialitate. Într-adevăr, structura laticeală a clasei preradicalilor a fost intens cercetată în ultimii ani, în special în lucrările [32 – 35; 74 – 77; 97 – 101].

Toate cele patru operaţii clasice din clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ categoriei R-modulelor stângi R-Mod sunt frecvent utilizate în lucrările recente referitoare la proprietăţile acestei clase, la caracterizarea prin preradicali a unor clase de inele, cât şi în multe alte cazuri.

1.3. Concluzii la capitolul 1

Primul capitol constă din două paragrafe. În primul paragraf sunt date noţiunile de bază şi este făcută o analiză amplă a domeniului teoriei radicalilor, ce ţine de tema tezei de doctorat. În paragraful doi este făcută o analiză succintă a materialelor ştiinţifice în domeniu, descriind pe scurt cercetările şi rezultatele din teoria radicalilor în module.

Problema de cercetare pusă în această lucrare, constă în elaborarea unor construcţii speciale în teoria radicalilor în categorii de module, şi anume, introducerea şi studierea a noi operaţii în clasa preradicalilor unei categorii de module, în scopul aprofundării instrumentale şi completării metodelor de cercetare în acest domeniu.

Scopul principal al lucrării constă în introducerea şi studierea unor operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module. Pentru realizarea acestui scop au fost stabilite următoarele obiective:

1. Introducerea unor operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module;

2. Determinarea proprietăţilor principale ale acestor operaţii;

3. Identificarea proprietăţilor preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării acestor construcţii;

4. Cercetarea unor cazuri particulare ale operaţiilor definite şi legăturilor dintre preradicalii obţinuţi;

5. Evidenţierea relaţiilor dintre noile operaţii şi unele noţiuni şi construcţii cunoscute din teoria radicalilor;

6. Studierea comportamentului acestor operaţii în cazul unor preradicali de tip special.

2. CÂTUL STÂNG ÎN RAPORT CU REUNIUNEA

În acest capitol se defineşte şi se cercetează o nouă operaţie în clasa $\mathbb{PR}$ a preradicalilor categoriei R-modulelor stângi R-Mod. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în lucrările [66], [129] şi [133].

2.1. Definiţia şi proprietăţile principale ale câtului stâng în raport cu reuniunea

Proprietatea de distributivitate a produsului în raport cu reuniunea ne permite de a defini o operaţie nouă în clasa preradicalilor, şi anume, inversa la stânga a produsului în raport cu reuniunea.

Definiţia 2.1. *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Vom numi* ***cât stâng în raport cu reuniunea al lui*** r ***pe*** s *cel mai mare preradical dintre preradicalii* $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ *cu proprietatea* $r_\alpha \cdot s \leq r$. *Vom nota acest preradical prin* $r \mathbin{\vee\!/.} s$.

Vom spune, că r este *numărătorul*, iar s *numitorul* câtului stâng $r \mathbin{\vee\!/.} s$.

Acum vom arăta existenţa şi reprezentarea câtului stâng în raport cu reuniunea.

Lema 2.1 *Câtul stâng* $r \mathbin{\vee\!/.} s$ *există pentru orice pereche de preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi el poate fi reprezentat în forma* $r \mathbin{\vee\!/.} s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot s \leq r \}$.

Demonstraţie. Întrucât avem $0 \cdot s = 0 \leq r$, conchidem că familia de preradicali $\{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot s \leq r \}$ nu este vidă. Din proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu reuniunea, obţinem $\left(\bigvee\limits_{r_\alpha \cdot s \leq r} r_\alpha \right) \cdot s = \bigvee\limits_{r_\alpha \cdot s \leq r} (r_\alpha \cdot s)$. Având $r_\alpha \cdot s \leq r$ pentru orice preradical r_α, urmează relaţia $\bigvee\limits_{r_\alpha \cdot s \leq r} (r_\alpha \cdot s) \leq r$, adică $\left(\bigvee\limits_{r_\alpha \cdot s \leq r} r_\alpha \right) \cdot s \leq r$. Deci preradicalul $\bigvee\limits_{r_\alpha \cdot s \leq r} r_\alpha$ este unul dintre preradicalii r_α, mai mult, din construcţia lui este clar că el este cel mai mare preradical dintre preradicalii r_α cu proprietatea $r_\alpha \cdot s \leq r$. Prin urmare $\vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot s \leq r \} = r \mathbin{\vee\!/.} s$. □

Din demonstraţia Lemei 2.1 rezultă următoarea relaţie $(r \mathbin{\vee\!/.} s) \cdot s \leq r$, pe care o vom utiliza des în continuare.

Lema 2.2 *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *avem* $r \mathbin{\vee\!/.} s \geq r$.

Demonstraţie. Deoarece $r \cdot s \leq r$ şi din Lema 2.1 $r \mathbin{\vee\!/.} s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot s \leq r \}$, urmează că preradicalul r este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $r \leq \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot s \leq r \}$, adică $r \leq r \mathbin{\vee\!/.} s$. □

Următoarele două afirmaţii arată legătura dintre câtul stâng în raport cu reuniunea şi relaţia de ordine $(\leq)$ din clasa $\mathbb{PR}$.

Propoziţia 2.3 *(Monotonie la numărător) Dacă* $r_1, r_2 \in \mathbb{PR}$ *şi* $r_1 \leq r_2$, *atunci* $r_1 \mathbin{\vee\!\!/\!.} s \leq r_2 \mathbin{\vee\!\!/\!.} s$ *pentru orice preradical* $s \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. Conform Lemei 2.1 avem relaţiile $r_1 \mathbin{\vee\!\!/\!.} s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \leq r_1 \}$ şi $r_2 \mathbin{\vee\!\!/\!.} s = \vee \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \cdot s \leq r_2 \right\}$. Din condiţiile $r_1 \leq r_2$ şi $r_\alpha \cdot s \leq r_1$ rezultă că $r_\alpha \cdot s \leq r_2$, ceea ce înseamnă că preradicalul r_α este unul dintre preradicalii r'_β. Aceasta implică relaţia $\vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \leq r_1 \} \leq \vee \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \cdot s \leq r_2 \right\}$, prin urmare $r_1 \mathbin{\vee\!\!/\!.} s \leq r_2 \mathbin{\vee\!\!/\!.} s$. $\square$

Propoziţia 2.4 *(Antimonotonie la numitor) Dacă* $s_1, s_2 \in \mathbb{PR}$ *şi* $s_1 \leq s_2$, *atunci* $r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s_1 \geq r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s_2$ *pentru orice preradical* $r \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. Conform Lemei 2.1 avem relaţiile $r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s_1 = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s_1 \leq r \}$ şi $r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s_2 = \vee \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \cdot s_2 \leq r \right\}$. Fie $s_1 \leq s_2$. Atunci utilizând proprietatea de monotonie a produsului preradicalilor, obţinem $r'_\beta \cdot s_1 \leq r'_\beta \cdot s_2$, însă dacă $r'_\beta \cdot s_2 \leq r$, urmează $r'_\beta \cdot s_1 \leq r$. Aceasta înseamnă că fiecare preradical r'_β este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică $\vee \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \cdot s_2 \leq r \right\} \leq \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s_1 \leq r \}$, adică $r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s_1 \geq r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s_2$. $\square$

Următorul rezultat este foarte important, deoarece el poate fi considerat ca o altă definiţie a câtului stâng în raport cu reuniunea şi va fi des utilizat în cercetările ce urmează.

Teorema 2.5 *Pentru orice preradicali* $r, s, t \in \mathbb{PR}$ *are loc relaţia:*

$$r \geq t \cdot s \Leftrightarrow r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s \geq t.$$

Demonstraţie. $(\Rightarrow)$ Conform Lemei 2.1 $r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \leq r \}$. Fie $t \cdot s \leq r$. Aceasta înseamnă că preradicalul t este unul dintre preradicalii r_α, de unde conchidem că $t \leq \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \leq r \}$, adică $t \leq r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s$.

$(\Leftarrow)$ Fie $t \leq r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s$. Aplicând proprietatea de monotonie a produsului preradicalilor, obţinem $t \cdot s \leq (r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s) \cdot s$, dar din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea $(r \mathbin{\vee\!\!/\!.} s) \cdot s \leq r$, prin urmare $t \cdot s \leq r$. $\square$

În continuare vom arăta unele proprietăţi ale câtului stâng în raport cu reuniunea.

Propoziţia 2.6 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci* $(r \cdot s) \curlyvee\!\!/.\, s \geq r$.

Demonstraţie. Conform Lemmei 2.1 avem $(r \cdot s) \curlyvee\!\!/.\, s = \vee\{t_\alpha \in \mathbb{PR} \mid t_\alpha \cdot s \leq r \cdot s\}$. Deoarece $r \cdot s \leq r \cdot s$, conchidem că preradicalul r este unul dintre preradicalii t_α, prin urmare $r \leq \vee\{t_\alpha \in \mathbb{PR} \mid t_\alpha \cdot s \leq r \cdot s\}$, adică $r \leq (r \cdot s) \curlyvee\!\!/.\, s$. □

Propoziţia 2.7 *Pentru orice preradicali* $r, s, t \in \mathbb{PR}$ *următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $(r \curlyvee\!\!/.\, s) \curlyvee\!\!/.\, t = r \curlyvee\!\!/.\, (t \cdot s)$;

2) $(r \cdot s) \curlyvee\!\!/.\, t \geq r \cdot (s \curlyvee\!\!/.\, t)$.

Demonstraţie. 1) Conform Lemei 2.1 avem relaţiile $r \curlyvee\!\!/.\, s = \vee\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \leq r\}$, $(r \curlyvee\!\!/.\, s) \curlyvee\!\!/.\, t = \vee\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot t \leq r \curlyvee\!\!/.\, s\}$ şi $r \curlyvee\!\!/.\, (t \cdot s) = \vee\{r'_\gamma \in \mathbb{PR} \mid r'_\gamma \cdot (t \cdot s) \leq r\}$.

($\leq$) Fie $t_\beta \cdot t \leq r \curlyvee\!\!/.\, s$. Utilizând proprietatea de monotonie a produsului preradicalilor, obţinem $(t_\beta \cdot t) \cdot s \leq (r \curlyvee\!\!/.\, s) \cdot s$. Din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea avem $(r \curlyvee\!\!/.\, s) \cdot s \leq r$, prin urmare $(t_\beta \cdot t) \cdot s \leq r$. Deoarece produsul preradicalilor este asociativ, urmează că $t_\beta \cdot (t \cdot s) \leq r$, ceea ce înseamnă că preradicalul t_β este unul dintre preradicalii r'_γ, prin urmare $\vee\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot t \leq r \curlyvee\!\!/.\, s\} \leq \vee\{r'_\gamma \in \mathbb{PR} \mid r'_\gamma \cdot (t \cdot s) \leq r\}$, adică $(r \curlyvee\!\!/.\, s) \curlyvee\!\!/.\, t \leq r \curlyvee\!\!/.\, (t \cdot s)$.

($\geq$) Fie $r'_\gamma \cdot (t \cdot s) \leq r$. Atunci deoarece produsul preradicalilor este asociativ, avem $(r'_\gamma \cdot t) \cdot s \leq r$, prin urmare fiecare preradical de forma $r'_\gamma \cdot t$ este unul dintre preradicalii r_α. Aceasta implică relaţia $(r'_\gamma \cdot t) \leq \vee\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \leq r\}$, adică $(r'_\gamma \cdot t) \leq r \curlyvee\!\!/.\, s$, ceea ce înseamnă că fiecare preradical r'_γ este unul dintre preradicalii t_β, de unde conchidem $\vee\{r'_\gamma \in \mathbb{PR} \mid r'_\gamma \cdot (t \cdot s) \leq r\} \leq \vee\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot s \leq r \curlyvee\!\!/.\, s\}$, adică $r \curlyvee\!\!/.\, (t \cdot s) \leq (r \curlyvee\!\!/.\, s) \curlyvee\!\!/.\, t$.

2) Din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea avem relaţia $s \geq (s \curlyvee\!\!/.\, t) \cdot t$. Utilizând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale produsului preradicalilor, obţinem $r \cdot s \geq r \cdot [(s \curlyvee\!\!/.\, t) \cdot t] = [r \cdot (s \curlyvee\!\!/.\, t)] \cdot t$. Aplicând Teorema 2.5 la relaţia $r \cdot s \geq [r \cdot (s \curlyvee\!\!/.\, t)] \cdot t$ avem $(r \cdot s) \curlyvee\!\!/.\, t \geq r \cdot (s \curlyvee\!\!/.\, t)$. □

Propoziţia 2.8 *Pentru orice preradicali* $r, s, t \in \mathbb{PR}$ *următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $(r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} t) \mathbin{{}^{\vee}\!/.} (s \mathbin{{}^{\vee}\!/.} t) \geq r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s$;

2) $(r \cdot t) \mathbin{{}^{\vee}\!/.} (s \cdot t) \geq r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s$.

Demonstraţie. 1) Conform Teoremei 2.5 relaţia din această afirmaţie este echivalentă cu relaţia $r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} t \geq (r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot (s \mathbin{{}^{\vee}\!/.} t)$, pe care o vom demonstra.

Din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea urmează relaţiile $r \geq (r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot s$ şi $s \geq (s \mathbin{{}^{\vee}\!/.} t) \cdot t$. Utilizând proprietatea de monotonie a produsului preradicalilor, obţinem $r \geq (r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot s \geq (r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot [(s \mathbin{{}^{\vee}\!/.} t) \cdot t]$, însă deoarece produsul preradicalilor posedă proprietatea de asociativitate, rezultă că $r \geq [(r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot (s \mathbin{{}^{\vee}\!/.} t)] \cdot t$. Aplicând Teorema 2.5, obţinem $r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} t \geq (r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot (s \mathbin{{}^{\vee}\!/.} t)$.

2) Din Teorema 2.5 urmează că relaţia din această afirmaţie este echivalentă cu relaţia $r \cdot t \geq (r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot (s \cdot t)$, pe care o vom demonstra.

Din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea avem $r \geq (r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot s$. Utilizând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale produsului preradicalilor, obţinem relaţia $r \cdot t \geq [(r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot s] \cdot t = (r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot (s \cdot t)$. $\square$

Acum vom indica relaţiile dintre câtul stâng în raport cu reuniunea şi operaţiile laticeale „$\wedge$" şi „$\vee$" din $\mathbb{PR}$.

Teorema 2.9 *(Distributivitatea câtului stâng* $r \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s$ *în raport cu intersecţia) Fie* $s \in \mathbb{PR}$. *Atunci pentru orice familie de preradicali* $\{r_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *următoarea relaţie este adevărată:*

$$\left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \right) \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s = \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s).$$

Demonstraţie. ($\geq$) Din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea avem relaţia $r_\alpha \geq (r_\alpha \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, de unde urmează că $\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \geq \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} [(r_\alpha \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \cdot s]$. Aplicând proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu intersecţia, obţinem $\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \geq \left[\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s) \right] \cdot s$, de unde utilizând Teorema 2.5, avem următoarea relaţie $\left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \right) \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s \geq \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{{}^{\vee}\!/.} s)$.

$(\leq)$ Conform Lemei 2.1 avem $\left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \swarrow\!\!\cdot\, s = \vee\left\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot s \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right\}$ şi $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \swarrow\!\!\cdot\, s) = \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \left(\bigvee\limits_{r'_\gamma\cdot s\leq r_\alpha} r'_\gamma\right)$.

Fie $t_\beta\cdot s \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha$. Deoarece $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq r_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, urmează că $t_\beta\cdot s \leq r_\alpha$, deci fiecare preradical t_β este unul dintre preradicalii r'_γ. Aceasta implică relaţia $\vee\left\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot s \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right\} \leq \vee\{r'_\gamma \in \mathbb{PR} \mid r'_\gamma \cdot s \leq r_\alpha\}$, care are loc pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, prin urmare $\vee\left\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot s \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right\} \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (\vee\{r'_\gamma \in \mathbb{PR} \mid r'_\gamma \cdot s \leq r_\alpha\})$, ceea ce înseamnă că $\left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \swarrow\!\!\cdot\, s \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \swarrow\!\!\cdot\, s)$. □

Propoziţia 2.10 *În clasa* $\mathbb{PR}$ *următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $\left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \swarrow\!\!\cdot\, s \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \swarrow\!\!\cdot\, s)$;

2) $r \swarrow\!\!\cdot \left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \swarrow\!\!\cdot\, s_\alpha)$;

3) $r \swarrow\!\!\cdot \left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \swarrow\!\!\cdot\, s_\alpha)$.

Demonstraţie. 1) Din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea avem relaţia $r_\alpha \geq (r_\alpha \swarrow\!\!\cdot\, s)\cdot s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, prin urmare $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} [(r_\alpha \swarrow\!\!\cdot\, s)\cdot s]$. Utilizând proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu reuniunea, avem $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \geq \left[\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \swarrow\!\!\cdot\, s)\right]\cdot s$, de unde aplicând Teorema 2.5, obţinem relaţia $\left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \swarrow\!\!\cdot\, s \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \swarrow\!\!\cdot\, s)$.

2) Pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$ avem $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha \leq s_\alpha$. Utilizând proprietatea de antimonotonie la numitor a câtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem $r \swarrow\!\!\cdot \left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq r \swarrow\!\!\cdot\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, prin urmare $r \swarrow\!\!\cdot \left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \swarrow\!\!\cdot\, s_\alpha)$.

3) Pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$ avem relaţia $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha \geq s_\alpha$. Utilizând proprietatea de antimonotonie la numitor a câtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem relaţia $r \swarrow\!\!\cdot \left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq r \swarrow\!\!\cdot\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce implică următoarea relaţie $r \swarrow\!\!\cdot \left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \swarrow\!\!\cdot\, s_\alpha)$. □

2.2. Cazurile particulare ale câtului stâng în raport cu reuniunea

În acest compartiment vom cerceta unele cazuri particulare ale câtului stâng în raport cu reuniunea $r \vee\!/.\, s$ şi legătura lor cu unele noţiuni şi construcţii din laticea completă („mare”) $\mathbb{PR}$.

Propoziţia 2.11 *Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r \geq s$;

2) $r \vee\!/.\, s = 1$.

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2) Fie $r \geq s$. Deoarece avem $1 \cdot s = s$, urmează că $r \geq 1 \cdot s$, de unde aplicând Teorema 2.5, obţinem relaţia $r \vee\!/.\, s \geq 1$. Însă $r \vee\!/.\, s \leq 1$, prin urmare avem $r \vee\!/.\, s = 1$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r \vee\!/.\, s = 1$. Din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea avem relaţia $(r \vee\!/.\, s) \cdot s \leq r$, deci $1 \cdot s \leq r$, adică $s \leq r$. □

Definiţia 2.2. ([93], pag. 204) ***Anulatorul*** *preradicalului $r \in \mathbb{PR}$ este preradicalul:*

$$a(r) = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot r = 0 \} .$$

Propoziţia 2.12 *Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Atunci:*

1) $0 \vee\!/.\, s = a(s)$;

2) $r \vee\!/.\, 1 = r$.

Demonstraţie. Conform Lemei 2.1 obţinem:

1) $0 \vee\!/.\, s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot s \leq 0 \} = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot s = 0 \} = a(s)$;

2) $r \vee\!/.\, 1 = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot 1 \leq r \} = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \leq r \} = r$. □

Utilizând Propoziţiile 2.11 şi 2.12, găsim următoarele cazuri particulare:

(1) $0 \vee\!/.\, 0 = a(0) = 1$;

(2) $r \vee\!/.\, r = 1$ pentru orice $r \in \mathbb{PR}$;

(3) $1 \vee\!/.\, s = 1$ pentru orice $s \in \mathbb{PR}$;

(4) $1 \mathbin{\dot{\curlyvee}} 1 = 1$.

De asemenea, conform Propoziţiei 2.11, obţinem $(r \mathbin{\dot{\curlyvee}} r) \cdot r = 1 \cdot r = r$ pentru orice preradical $r \in \mathbb{PR}$.

Mai mult, distributivitatea produsului preradicalilor în raport cu reuniunea implică următoarea relaţie:

$$a\,(s) \cdot s = \left(\bigvee_{r_\alpha \cdot s = 0} r_\alpha \right) \cdot s = \bigvee_{r_\alpha \cdot s = 0} (r_\alpha \cdot s) = 0$$

pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

Acum vom aminti unele noţiuni şi rezultate referitoare la laticea $\mathbb{PR}$.

Definiţia 2.3. ([94], pag. 253) ***Pseudocomplementul*** *preradicalului* r *din* $\mathbb{PR}$ *este un preradical* $r^{\perp} \in \mathbb{PR}$*, care posedă proprietăţile:*

1) $r \wedge r^{\perp} = 0$*;*

2) *Dacă* $s \in \mathbb{PR}$ *este aşa încât* $s > r^{\perp}$*, atunci* $r \wedge s \neq 0$.

Această noţiune este definită şi în monografia [10] (pag.280) pentru torsiuni.

Lema 2.13 ([94], pag.254) *Orice preradical* $r \in \mathbb{PR}$ *posedă un unic pseudocomplement* $r^{\perp}$ *astfel încât, dacă* $s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r \wedge s = 0$*, atunci* $s \leq r^{\perp}$*.* $\square$

Definiţia 2.4. ***Suplementul*** *preradicalului* $r \in \mathbb{PR}$ *este un preradical* $r^* \in \mathbb{PR}$*, care posedă proprietăţile:*

1) $r \vee r^* = 1$*;*

2) *Dacă* $s \in \mathbb{PR}$ *este aşa încât* $s < r^*$*, atunci* $r \vee s \neq 1$.

Această noţiune este definită în monografia [10] (pag. 72) pentru submodule.

Lema 2.14 *Fie preradicalul* $r \in \mathbb{PR}$ *posedă suplementul* r^**. Dacă* $s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r \vee s = 1$*, atunci* $s \geq r^*$*.* $\square$

Lema 2.15 ([2], pag. 36; [92], pag. 1537) *Pentru orice preradicali* $r, s, t \in \mathbb{PR}$ *sunt adevărate afirmaţiile:*

1) $(r \cdot s) \,\#\, t \geq (r \,\#\, t) \cdot (s \,\#\, t)$;

2) $(r \,\#\, s) \cdot t \leq (r \cdot t) \,\#\, (s \cdot t)$. $\square$

În continuare vom cerceta relaţiile dintre anulatorul unui preradical şi aşa construcţii din laticea completă („mare”) $\mathbb{PR}$, ca pseudocomplementul şi suplementul preradicalului respectiv.

Propoziţia 2.16 *Pentru orice preradical* $s \in \mathbb{PR}$ *avem* $a(s) \geq s^{\perp}$.

Demonstraţie. Prin definiţie anulatorul preradicalului s este preradicalul $a(s) = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s = 0 \}$. Pseudocomplementul $s^{\perp}$ al preradicalului s prin definiţie are proprietatea $s^{\perp} \wedge s = 0$. Deoarece $s^{\perp} \cdot s \leq s^{\perp} \wedge s$, obţinem $s^{\perp} \cdot s = 0$. Aceasta înseamnă că preradicalul $s^{\perp}$ este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $s^{\perp} \leq \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s = 0 \}$, adică $s^{\perp} \leq a(s)$. $\square$

Mai mult, din monotonia la numărător a câtului stâng în raport cu reuniunea, avem $r \,{}^{\vee}\!/.\, s \geq 0 \,{}^{\vee}\!/.\, s = a(s)$, prin urmare $r \,{}^{\vee}\!/.\, s \geq s^{\perp}$.

Propoziţia 2.17 *Fie* $s \in \mathbb{PR}$ *şi* s *posedă suplementul* s^*. *Atunci* $a(s) \leq s^*$.

Demonstraţie. Din definiţie $a(s) = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s = 0 \}$. Suplementul s^* al preradicalului s prin definiţie are proprietatea $s^* \vee s = 1$. Deoarece $s \,\#\, s^* \geq s \vee s^* = s^* \vee s$, obţinem $s \,\#\, s^* = 1$. Din cele de mai sus avem că $a(s) \cdot s = 0$, prin urmare $s^* = 0 \,\#\, s^* = (a(s) \cdot s) \,\#\, s^*$. Conform afirmaţiei 1 din Lema 2.15 avem $(a(s) \cdot s) \,\#\, s^* \geq (a(s) \,\#\, s^*) \cdot (s \,\#\, s^*)$, adică $(a(s) \cdot s) \,\#\, s^* \geq (a(s) \,\#\, s^*) \cdot 1 = a(s) \,\#\, s^*$. Aceasta înseamnă că $s^* \geq a(s) \,\#\, s^*$, însă $a(s) \,\#\, s^* \geq a(s)$ şi de aceea $s^* \geq a(s)$. $\square$

Mai mult, din demonstraţia Propoziţiei 2.14, avem relaţia $s^* \geq a(s) \,\#\, s^*$, dar $a(s) \,\#\, s^* \geq s^*$, prin urmare $s^* = a(s) \,\#\, s^*$.

2.3. Comportamentul câtului stâng în raport cu reuniunea în cazul unor tipuri speciale de preradicali

În acest paragraf preventiv vom arăta condiţiile necesare pentru a avea egalitate în unele proprietăţi ale câtului stâng în raport cu reuniunea, apoi vom arăta cum se comportă câtul stâng în raport cu reuniunea în cazul când numărătorul lui este preradical prim, $\wedge$ - prim sau ireductibil.

Următoarele două afirmaţii arată când are loc egalitatea în unele proprietăţi ale câtului stâng în raport cu reuniunea (vezi Propoziţia 2.6).

Propoziţia 2.18 *Fie preradicalii* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r = (r \cdot s) \mathbin{\vee\!/\!.} s$.

2) $r = t \mathbin{\vee\!/\!.} s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2) Fie $r = (r \cdot s) \mathbin{\vee\!/\!.} s$. Atunci $r = t \mathbin{\vee\!/\!.} s$ pentru $t = r \cdot s$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r = t \mathbin{\vee\!/\!.} s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea avem $(t \mathbin{\vee\!/\!.} s) \cdot s \leq t$. Utilizând proprietatea de monotonie la numărător a câtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem $[(t \mathbin{\vee\!/\!.} s) \cdot s] \mathbin{\vee\!/\!.} s \leq t \mathbin{\vee\!/\!.} s$. Însă conform Propoziţiei 2.6 $[(t \mathbin{\vee\!/\!.} s) \cdot s] \mathbin{\vee\!/\!.} s \geq t \mathbin{\vee\!/\!.} s$, prin urmare $[(t \mathbin{\vee\!/\!.} s) \cdot s] \mathbin{\vee\!/\!.} s = t \mathbin{\vee\!/\!.} s$. Deoarece $t \mathbin{\vee\!/\!.} s = r$, avem $(r \cdot s) \mathbin{\vee\!/\!.} s = r$. □

Propoziţia 2.19 *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r = (r \mathbin{\vee\!/\!.} s) \cdot s$.

2) $r = t \cdot s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2) Fie $r = (r \mathbin{\vee\!/\!.} s) \cdot s$. Atunci $r = t \cdot s$ pentru $t = r \mathbin{\vee\!/\!.} s$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r = t \cdot s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Din Propoziţia 2.6 avem $(t \cdot s) \mathbin{\vee\!/\!.} s \geq t$. Utilizând proprietatea de monotonie a produsului preradicalilor, obţinem relaţia $[(t \cdot s) \mathbin{\vee\!/\!.} s] \cdot s \geq t \cdot s$. Însă din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea

avem $[(t \cdot s) \curlyvee\!/\, s] \cdot s \leq t \cdot s$, prin urmare $[(t \cdot s) \curlyvee\!/\, s] \cdot s = t \cdot s$. Deoarece $t \cdot s = r$, urmează $(r \curlyvee\!/\, s) \cdot s = r$. $\square$

Acum vom cerceta comportarea câtului stâng în raport cu reuniunea în cazul unor preradicali de tip special (preradicali primi, $\wedge$-primi, ireductibili).

Definiţia 2.5. ([95], pag. 454) *Preradicalul $r \in \mathbb{PR}$ se numeşte **prim**, dacă $r \neq 1$ şi pentru orice $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \cdot t_2 \leq r$ urmează $t_1 \leq r$ sau $t_2 \leq r$.*

Propoziţia 2.20 *Preradicalul r este prim dacă şi numai dacă $r \curlyvee\!/\, s = 1$ sau $r \curlyvee\!/\, s = r$ pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.*

Demonstraţie. ($\Rightarrow$) Fie $r \neq 1$. Din definiţia câtului stâng în raport cu reuniunea avem $(r \curlyvee\!/\, s) \cdot s \leq r$ şi dacă preradicalul r este prim, atunci $r \curlyvee\!/\, s \leq r$ sau $s \leq r$. Dacă $r \curlyvee\!/\, s \leq r$, atunci deoarece din Lema 2.2 avem $r \curlyvee\!/\, s \geq r$, urmează că $r \curlyvee\!/\, s = r$. Dacă $s \leq r$, atunci conform Propoziţiei 2.11 obţinem $r \curlyvee\!/\, s = 1$.

($\Leftarrow$) Fie $t_1 \cdot t_2 \leq r$ pentru preradicalii t_1, $t_2 \in \mathbb{PR}$. Aplicând Teorema 2.5, obţinem $t_1 \leq r \curlyvee\!/\, t_2$. Pentru preradicalul t_2 conform condiţiei acestei propoziţii avem $r \curlyvee\!/\, t_2 = 1$ sau $r \curlyvee\!/\, t_2 = r$. Dacă $r \curlyvee\!/\, t_2 = 1$, atunci conform Propoziţiei 2.11 urmează că $t_2 \leq r$. Dacă $r \curlyvee\!/\, t_2 = r$, atunci $t_1 \leq r \curlyvee\!/\, t_2 = r$.

Deci pentru orice preradicali t_1, $t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \cdot t_2 \leq r$ avem relaţia $t_1 \leq r$ sau relaţia $t_2 \leq r$, ceea ce înseamnă că preradicalul r este prim. $\square$

Definiţia 2.6. ([95], pag. 462) *Preradicalul $r \in \mathbb{PR}$ se numeşte $\wedge$-**prim**, dacă pentru orice $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \wedge t_2 \leq r$ urmează $t_1 \leq r$ sau $t_2 \leq r$.*

Propoziţia 2.21 *Dacă preradicalul r este $\wedge$-prim, atunci câtul stâng $r \curlyvee\!/\, s$ este un preradical $\wedge$-prim pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.*

Demonstraţie. Presupunem că are loc relaţia $t_1 \wedge t_2 \leq r \curlyvee\!/\, s$ pentru preradicalii t_1, $t_2 \in \mathbb{PR}$. Atunci aplicând Teorema 2.5, obţinem $(t_1 \wedge t_2) \cdot s \leq r$. Utilizând proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu intersecţia, avem relaţia $(t_1 \cdot s) \wedge (t_2 \cdot s) \leq r$. Dacă preradicalul r este $\wedge$-prim, atunci urmează că $t_1 \cdot s \leq r$

sau $t_2 \cdot s \leq r$, de unde aplicând ambelor relaţii Teorema 2.5, obţinem $t_1 \leq r \curlyvee\!\!/\, s$ sau $t_2 \leq r \curlyvee\!\!/\, s$.

Deci, pentru orice preradicali $t_1,\, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \wedge t_2 \leq r \curlyvee\!\!/\, s$ avem relaţia $t_1 \leq r \curlyvee\!\!/\, s$ sau relaţia $t_2 \leq r \curlyvee\!\!/\, s$, ceea ce înseamnă că câtul stâng $r \curlyvee\!\!/\, s$ este un preradical $\wedge$ - prim. $\square$

Definiţia 2.7. ([95], pag. 462) *Preradicalul* $r \in \mathbb{PR}$ *se numeşte* ***ireductibil****, dacă pentru orice* $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ *cu proprietatea* $t_1 \wedge t_2 = r$ *urmează* $t_1 = r$ *sau* $t_2 = r$.

Propoziţia 2.22 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r = t \cdot s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$. *Dacă preradicalul* r *este ireductibil, atunci câtul stâng* $r \curlyvee\!\!/\, s$ *este un preradical ireductibil.*

Demonstraţie. Fie pentru preradicalii $t_1,\, t_2 \in \mathbb{PR}$ avem $t_1 \wedge t_2 = r \curlyvee\!\!/\, s$. Dacă $r = t \cdot s$ pentru un preradical t, atunci conform Propoziţiei 2.19 $r = (r \curlyvee\!\!/\, s) \cdot s$, prin urmare $r = (t_1 \wedge t_2) \cdot s$. Utilizând proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu intersecţia, obţinem $r = (t_1 \cdot s) \wedge (t_2 \cdot s)$. Dacă preradicalul r este ireductibil, atunci $t_1 \cdot s = r$ sau $t_2 \cdot s = r$.

Fie $t_1 \cdot s = r$. Aplicând Teorema 2.5, avem $t_1 \leq r \curlyvee\!\!/\, s$. Însă deoarece $t_1 \wedge t_2 = r \curlyvee\!\!/\, s$, urmează că $t_1 \geq r \curlyvee\!\!/\, s$, prin urmare $t_1 = r \curlyvee\!\!/\, s$.

Fie $t_2 \cdot s = r$. Utilizând Teorema 2.5, obţinem relaţia $t_2 \leq r \curlyvee\!\!/\, s$, dar deoarece $t_1 \wedge t_2 = r \curlyvee\!\!/\, s$, rezultă că $t_2 \geq r \curlyvee\!\!/\, s$, prin urmare $t_2 = r \curlyvee\!\!/\, s$.

Deci, pentru orice preradicali $t_1,\, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \wedge t_2 = r \curlyvee\!\!/\, s$ avem relaţia $t_1 = r \curlyvee\!\!/\, s$ sau relaţia $t_2 = r \curlyvee\!\!/\, s$, ceea ce înseamnă că preradicalul $r \curlyvee\!\!/\, s$ este ireductibil. $\square$

În continuare mai arătăm încă două proprietăţi ale câtului stâng în raport cu reuniunea.

Propoziţia 2.23 *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $r \curlyvee\!\!/\, s = (r \wedge s) \curlyvee\!\!/\, s$;

2) $(r \curlyvee\!\!/\, s) \cdot s \leq r \wedge s$.

Demonstraţie. 1) Conform proprietăţii de distributivitate a câtului stâng în raport cu reuniunea faţă de intersecţie avem relaţia $(r \wedge s) \mathbin{\vee\!\!/.} s = (r \mathbin{\vee\!\!/.} s) \wedge (s \mathbin{\vee\!\!/.} s)$, însă $s \mathbin{\vee\!\!/.} s = 1$, prin urmare $(r \wedge s) \mathbin{\vee\!\!/.} s = (r \mathbin{\vee\!\!/.} s) \wedge 1 = r \mathbin{\vee\!\!/.} s$.

2) Din afirmaţia 1) a acestei propoziţii avem $r \mathbin{\vee\!\!/.} s = (r \wedge s) \mathbin{\vee\!\!/.} s$, unde utilizând proprietatea de monotonie la numărător a produsului preradicalilor, obţinem relaţia $(r \mathbin{\vee\!\!/.} s) \cdot s = ((r \wedge s) \mathbin{\vee\!\!/.} s) \cdot s$. Conform definiţiei câtului stâng în raport cu reuniunea avem $((r \wedge s) \mathbin{\vee\!\!/.} s) \cdot s \leq r \wedge s$, prin urmare $(r \mathbin{\vee\!\!/.} s) \cdot s \leq r \wedge s$. □

Mai mult, deoarece $r \cdot s \leq r \wedge s$, utilizând monotonia la numărător a câtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem:

$$(r \cdot s) \mathbin{\vee\!\!/.} s \leq (r \wedge s) \mathbin{\vee\!\!/.} s = r \mathbin{\vee\!\!/.} s.$$

Următoarea afirmaţie precizează aranjarea preradicalilor obţinuţi cu ajutorul operaţiei cercetate.

Corolarul 2.24

1) Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ au loc următoarele relaţii:

$$r \cdot s \leq (r \mathbin{\vee\!\!/.} s) \cdot s \leq r \wedge s \leq r \leq (r \cdot s) \mathbin{\vee\!\!/.} s \leq r \mathbin{\vee\!\!/.} s;$$

2) Dacă r este o pretorsiune, atunci

$$r \cdot s = (r \mathbin{\vee\!\!/.} s) \cdot s = r \wedge s \leq r \leq (r \cdot s) \mathbin{\vee\!\!/.} s = r \mathbin{\vee\!\!/.} s$$

pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$. □

2.4. Concluzii la capitolul 2

În **capitolul doi** a fost definită şi cercetată o operaţie nouă în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, **câtul stâng în raport cu reuniunea**. Sunt arătate proprietăţile principale ale ei şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul efectuării acestei operaţii. A fost determinată compatibilitatea noii operaţii cu operaţiile laticeale din laticea completă („mare") $\mathbb{PR}$ (intersecţia şi reuniunea preradicalilor). Sunt stabilite relaţiile dintre ea şi unele noţiuni şi construcţii din laticea completă („mare") $\mathbb{PR}$. Este descrisă comportarea operaţiei noi în cazul unor preradicali de tip special (preradicali primi, $\wedge$- primi, ireductibili). De asemenea, sunt studiate unele cazuri particulare ale acestei operaţii.

3. COCÂTUL STÂNG ÎN RAPORT CU INTERSECŢIA

În acest capitol se introduce şi se studiază o nouă operaţie în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod, care este duală operaţiei definite în capitolul 2. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în lucrările [67], [68], [130] şi [133].

3.1. Definiţia şi proprietăţile principale ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia

Proprietatea de distributivitate a coprodusului în raport cu intersecţia ne permite să definim o operaţie nouă în clasa preradicalilor, şi anume, inversa la stânga a coprodusului în raport cu intersecţia. În acest compartiment se arată proprietăţile de bază ale ei şi relaţiile dintre această operaţie şi operaţiile laticeale din clasa $\mathbb{PR}$.

Definiţia 3.1. *Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Vom numi **cocât stâng în raport cu intersecţia al lui** r **pe** s cel mai mic preradical dintre preradicalii $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $r_\alpha \,\#\, s \geq r$. Vom nota acest preradical prin $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s$.*

Vom spune, că preradicalul r este *numărătorul*, iar preradicalul s este *numitorul* cocâtului stâng $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s$.

Arătăm acum existenţa şi forma de reprezentare a cocâtului stâng în raport cu intersecţia pentru orice pereche de preradicali.

Lema 3.1 *Cocâtul stâng $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s$ există pentru orice pereche de preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ şi el poate fi reprezentat în forma $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \geq r \}$.*

Demonstraţie. Deoarece $1 \,\#\, s = 1$ şi $1 \geq r$ urmează $1 \,\#\, s \geq r$, ceea ce înseamnă că familia de preradicali $\{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \geq r \}$ nu este vidă. Conform proprietăţii de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu intersecţia avem relaţia $\left(\underset{r_\alpha \# s \geq r}{\wedge} r_\alpha \right) \# \, s = \underset{r_\alpha \# s \geq r}{\wedge} (r_\alpha \,\#\, s)$. Întrucât $r_\alpha \,\#\, s \geq r$ pentru orice preradical r_α, rezultă că $\underset{r_\alpha \# s \geq r}{\wedge} (r_\alpha \,\#\, s) \geq r$, prin urmare $\left(\underset{r_\alpha \# s \geq r}{\wedge} r_\alpha \right) \# \, s \geq r$. Aceasta înseamnă că preradicalul $\underset{r_\alpha \# s \geq r}{\wedge} r_\alpha$ este unul dintre preradicalii r_α, mai mult, din construcţia preradicalului $\bigwedge\limits_{r_\alpha \,\#\, s \,\geq\, r} r_\alpha$ este clar că el este cel mai mic preradical dintre preradicalii r_α cu proprietatea $r_\alpha \,\#\, s \geq r$. Prin urmare $\wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \geq r \} = r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$. $\square$

Mai mult, din demonstraţia Lemei 3.1 găsim următoarea relaţie $(r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \,\#\, s \geq r$, care va fi des utilizată pe parcursul acestui capitol.

Lema 3.2 *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *avem* $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq r$.

Demonstraţie. Din Lema 3.1 $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \geq r \}$. Deoarece $r \,\#\, s \geq r$, conchidem că preradicalul r este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $r \geq \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \geq r \}$, adică $r \geq r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$. $\square$

Acum vom indica legătura dintre cocâtul stâng în raport cu intersecţia şi relaţia de ordine $(\leq)$ din clasa $\mathbb{PR}$.

Propoziţia 3.3 *(Monotonie la numărător) Dacă* $r_1, r_2 \in \mathbb{PR}$ *şi* $r_1 \leq r_2$, *atunci* $r_1 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq r_2 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ *pentru orice preradical* $s \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. Conform Lemei 3.1 avem relaţiile $r_1 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \geq r_1 \}$ şi $r_2 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = \wedge \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \,\#\, s \geq r_2 \right\}$. Dacă $r_1 \leq r_2$ şi $r'_\beta \,\#\, s \geq r_2$, atunci urmează $r'_\beta \,\#\, s \geq r_1$, ceea ce înseamnă că fiecare preradical r'_β este unul dintre preradicalii r_α. Aceasta implică relaţia $\wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \geq r_1 \} \leq \wedge \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \,\#\, s \geq r_2 \right\}$, adică avem $r_1 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq r_2 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$. $\square$

Propoziţia 3.4 *(Antimonotonie la numitor) Dacă* $s_1, s_2 \in \mathbb{PR}$ *şi* $s_1 \leq s_2$, *atunci* $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_1 \geq r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_2$ *pentru orice preradical* $r \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. Conform Lemei 3.1 avem relaţiile $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_1 = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s_1 \geq r \}$ şi $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_2 = \wedge \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \,\#\, s_2 \geq r \right\}$. Dacă $s_1 \leq s_2$, atunci conform proprietăţii de monotonie a coprodusului preradicalilor, obţinem $r_\alpha \,\#\, s_1 \leq r_\alpha \,\#\, s_2$. Din relaţia $r_\alpha \,\#\, s_1 \geq r$ urmează $r_\alpha \,\#\, s_2 \geq r$. Prin urmare, fiecare preradical r_α este unul dintre preradicalii r'_β, ceea ce implică $\wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s_1 \geq r \} \geq \wedge \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \,\#\, s_2 \geq r \right\}$, adică $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_1 \geq r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_2$. $\square$

Afirmaţia ce urmează poate fi privită ca o altă definiţie a cocâtului stâng în raport cu intersecţia $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ şi va fi des folosită în cercetările ce urmează pe parcursul acestui capitol.

Teorema 3.5 *Pentru orice preradicali* $r, s, t \in \mathbb{PR}$ *are loc relaţia:*

$$r \leq t \,\#\, s \Leftrightarrow r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s \leq t.$$

Demonstraţie. ($\Rightarrow$) Din Lemma 3.1 $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s = \wedge\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \geq r\}$. Fie $t \,\#\, s \geq r$. Aceasta înseamnă că preradicalul t este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $t \geq \wedge\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \geq r\}$. Deci $t \geq r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s$.

($\Leftarrow$) Fie $t \geq r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s$. Utilizând proprietatea de monotonie a coprodusului preradicalilor, obţinem $t \,\#\, s \geq (r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s) \,\#\, s$. Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţia $(r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s) \,\#\, s \geq r$, prin urmare $t \,\#\, s \geq r$. □

În continuare vom arăta unele proprietăţi de bază ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia.

Propoziţia 3.6 *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *are loc relaţia:*

$$(r \,\#\, s) \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s \leq r.$$.

Demonstraţie. Conform Lemma 3.1 câtul stâng $(r \,\#\, s) \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s$ poate fi reprezentat în forma: $(r \,\#\, s) \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s = \wedge\{t_\alpha \in \mathbb{PR} \mid t_\alpha \,\#\, s \geq r \,\#\, s\}$. Avem $r \,\#\, s \geq r \,\#\, s$. Acest lucru înseamnă că preradicalul r este unul dintre preradicalii t_α, ceea ce implică relaţia $r \geq \wedge\{t_\alpha \in \mathbb{PR} \mid t_\alpha \,\#\, s \leq r \,\#\, s\}$, adică avem $r \geq (r \,\#\, s) \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s$. □

Propoziţia 3.7 *Pentru orice preradicali* $r, s, t \in \mathbb{PR}$ *următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $(r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s) \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, t = r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, (t \,\#\, s)$;

2) $(r \,\#\, s) \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, t \leq r \,\#\, (s \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, t)$.

Demonstraţie. 1) Conform Lemei 3.1 $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, (t \,\#\, s) = \wedge\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, (t \,\#\, s) \geq r\}$ şi $(r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s) \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, t = \wedge\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \,\#\, t \geq r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s\}$.

($\leq$) Fie $r_\alpha \,\#\, (t \,\#\, s) \geq r$. Utilizând proprietatea de asociativitate a coprodusului preradicalilor avem $(r_\alpha \,\#\, t) \,\#\, s \geq r$. Aplicând Teorema 3.5, obţinem $r_\alpha \,\#\, t \geq r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s$, prin urmare fiecare preradical r_α este unul dintre preradicalii t_β, ceea ce implică relaţia $\wedge\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, (t \,\#\, s) \geq r\} \geq \wedge\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \,\#\, t \geq r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s\}$, adică avem relaţia $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, (t \,\#\, s) \geq (r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s) \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, t$.

($\geq$) Fie $t_\beta \# t \geq r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s$. Utilizând proprietatea de monotonie a coprodusului preradicalilor, obţinem $(t_\beta \# t) \# s \geq (r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# s$, dar conform definiţiei cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţia $(r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# s \geq r$, prin urmare $(t_\beta \# t) \# s \geq r$. Aplicând proprietatea de asociativitate a coprodusului preradicalilor, obţinem relaţia $t_\beta \# (t \# s) \geq r$, ceea ce arată că fiecare preradical t_β este unul dintre preradicalii r_α, de unde urmează relaţia $\wedge \{ t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \# t \geq r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s \} \geq \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# (t \# s) \geq r \}$. Prin urmare avem $(r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t \geq r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, (t \# s)$.

2) Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem $s \leq (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t) \# t$, de unde utilizând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale coprodusului preradicalilor, obţinem $r \# s \leq r \# [(s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t) \# t] = [r \# (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t)] \# t$. Aplicând Teorema 3.5 la relaţia $r \# s \leq [r \# (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t)] \# t$ avem $(r \# s) \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t \leq r \# (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t)$. □

Propoziţia 3.8 *Pentru orice preradicali $r, s, t \in \mathbb{PR}$ următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $(r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t) \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t) \leq r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s$ *[sau* $(r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t) \geq r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t$*];*

2) $(r \# t) \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, (s \# t) \leq r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s$ *[sau* $r \# t \leq (r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# (s \# t)$*].*

Demonstraţie. 1) Conform Teoremei 3.5 relaţiile din această afirmaţie sunt echivalente. Demonstrăm a doua relaţie.

Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţiile $r \leq (r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# s$ şi $s \leq (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t) \# t$, prin urmare, utilizând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale preradicalilor, obţinem $r \leq (r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# s \leq (r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# [(s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t) \# t] = [(r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t)] \# t$. Aplicând Teorema 3.5 la relaţia $r \leq [(r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t)] \# t$ avem relaţia $r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t \leq (r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# (s \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, t)$.

2) Conform Teoremei 3.5 relaţiile din această afirmaţie sunt echivalente. Acum demonstrăm a doua relaţie.

Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţia $r \leq (r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# s$. Utilizând proprietatea de monotonie la numărător a coprodusului preradicalilor, obţinem $r \# t \leq [(r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# s] \# t$, şi deoarece coprodusul preradicalilor posedă proprietatea de asociativitate, urmează că $r \# t \leq (r \,{}^{\frown}\!\!/_{\#}\, s) \# (s \# t)$. □

Următoarele afirmaţii indică legătura cocâtului stâng în raport cu intersecţia cu operaţiile laticeale din clasa $\mathbb{PR}$.

Teorema 3.9 *(Distributivitatea cocâtului stâng $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ în raport cu reuniunea) Fie $s \in \mathbb{PR}$. Atunci pentru orice familie de preradicali $\{r_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ următoarea relaţie este adevărată:*

$$\left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s).$$

Demonstraţie. $(\geq)$ Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$ avem $r_\alpha \leq (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \,\#\, s$, ceea ce implică relaţia $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} [(r_\alpha \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \,\#\, s\,]$. Folosind proprietatea de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu reuniunea, obţinem $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq \left[\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s)\right] \# \, s$, unde aplicând acum Teorema 3.5, avem relaţia $\left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s)$.

$(\geq)$ Conform Lemei 3.1 avem $\left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = \wedge \left\{ t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \,\#\, s \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \right\}$ şi $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) = \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \left(\bigwedge\limits_{r'_\gamma \,\#\, s \,\geq\, r_\alpha} r'_\gamma\right)$.

Fie $t_\beta \,\#\, s \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha$. Deoarece $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \geq r_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, urmează relaţia $t_\beta \,\#\, s \geq r_\alpha$, prin urmare fiecare dintre preradicalii t_β este unul dintre preradicalii r'_γ. Aceast fapt implică relaţia $\wedge \left\{ t_\beta \in \mathbb{PR} \mid \ t_\beta \,\#\, s \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \right\} \geq \wedge \{ r'_\gamma \in \mathbb{PR} \mid r'_\gamma \,\#\, s \ \geq \ r_\alpha\}$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, de unde în concluzie avem $\wedge \left\{ t_\beta \in \mathbb{PR} \mid \ t_\beta \,\#\, s \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \right\} \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (\wedge \{ r'_\gamma \in \mathbb{PR} \mid r'_\gamma \,\#\, s \ \geq \ r_\alpha\})$. Prin urmare, avem următoarea relaţie $\left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s)$. □

Propoziţia 3.10 *În clasa $\mathbb{PR}$ următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $\left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s)$;

2) $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#} \left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_\alpha)$;

3) $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#} \left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_\alpha)$.

Demonstraţie. 1) Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţia $r_\alpha \leq (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s) \# s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, de unde urmează $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} [(r_\alpha \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s) \# s]$. Utilizând proprietatea de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu intersecţia, obţinem $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq \left[\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s)\right] \# s$, şi aplicând acestei relaţii Teorema 3.5 avem $\left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s)$.

2) Pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$ avem $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha \leq s_\alpha$. Utilizând proprietatea de antimonotonie la numitor a cocâtului stâng în raport cu intersecţia, obţinem $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, \left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce implică relaţia $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, \left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s_\alpha)$.

3) Pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$ avem $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha \geq s_\alpha$. Utilizând proprietatea de antimonotonie la numitor a cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, \left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, de unde urmează $r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, \left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \,{}^{\wedge}\!\!/_{\#}\, s_\alpha)$. $\square$

3.2. Cazurile particulare ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia

În acest compartiment vom cerceta unele cazuri particulare ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ şi vom arăta legătura unui caz particular al acestui cocât cu unele noţiuni şi construcţii din laticea completă („mare”) $\mathbb{PR}$, aşa ca, pseudocomplementul şi suplementul unui preradical.

Propoziţia 3.11 *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r \leq s$;

2) $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = 0$.

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2) Fie avem relaţia $r \leq s$. Deoarece $0 \# s = s$, urmează că $r \leq 0 \# s$, unde utilizând Teorema 3.5, obţinem relaţia $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq 0$, prin urmare avem $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = 0$. Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţia $(r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s \geq r$, prin urmare $0 \# s \geq r$. Întrucât avem $0 \# s = s$, urmează că $s \geq r$. □

Definiţia 3.2. ([93], pag. 204) ***Totalizatorul*** *preradicalului* r *este preradicalul:*

$$t(r) = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# r = 1 \} .$$

Propoziţia 3.12 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci:*

1) $1 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = t(s)$;

2) $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, 0 = r$.

Demonstraţie. Conform Lemei 3.1 obţinem:

1) $1 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \geq 1 \} = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s = 1 \} = t(s)$;

2) $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, 0 = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# 0 \geq r \} = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \geq r \} = r$. □

Utilizând Propoziţiile 3.11 şi 3.12, găsim următoarele cazuri particulare ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea:

(1) $0 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, 0 = 0$;

(2) $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, r = 0$ pentru orice $r \in \mathbb{PR}$;

(3) $s \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, 1 = 0$ pentru orice $s \in \mathbb{PR}$;

(4) $1 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, 1 = t\,(1) = 0$.

De asemenea, conform Propoziţiei 3.11 obţinem $(r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, r) \# r = 0 \# r = r$ pentru orice preradical $r \in \mathbb{PR}$.

Mai mult, folosind proprietatea de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu intersecţia, obţinem următoarea relaţie:

$$t\,(s) \# s = \left(\bigwedge_{r_\alpha \# s = 1} r_\alpha \right) \# s = \bigwedge_{r_\alpha \# s = 1} (r_\alpha \# s) = 1$$

pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$.

Următoarele două afirmaţii arată legătura dintre totalizatorul unui preradical şi unele construcţii din laticea completă („mare”) $\mathbb{PR}$, şi anume, pseudocomplement şi suplement al preradicalului respectiv.

Amintim, *pseudocomplement* al preradicalului $r \in \mathbb{PR}$ este un preradical $r^\perp \in \mathbb{PR}$, care posedă proprietăţile:

1) $r \wedge r^\perp = 0$;

2) Dacă $s \in \mathbb{PR}$ este aşa încât $s > r^\perp$, atunci $r \wedge s \neq 0$.

Propoziţia 3.13 *Pentru orice preradical* $s \in \mathbb{PR}$ *avem* $t\,(s) \geq s^\perp$.

Demonstraţie. Prin definiţie totalizatorul are forma $t\,(s) = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s = 1 \}$. Pseudocomplementul $s^\perp$ al lui s prin definiţie are proprietatea $s \wedge s^\perp = 0$. Deoarece $s \cdot s^\perp \leq s \wedge s^\perp$, urmează $s \cdot s^\perp \leq 0$, adică $s \cdot s^\perp = 0$. Din cele de mai sus avem $t\,(s) \# s = 1$, deci $s^\perp = 1 \cdot s^\perp = (t\,(s) \# s) \cdot s^\perp$. Conform afirmaţiei 2 a Lemei 2.15 urmează relaţia $(t\,(s) \# s) \cdot s^\perp \leq \left(t\,(s) \cdot s^\perp\right) \# \left(s \cdot s^\perp\right)$, însă $\left(t\,(s) \cdot s^\perp\right) \# \left(s \cdot s^\perp\right) = \left(t\,(s) \cdot s^\perp\right) \# 0 = t\,(s) \cdot s^\perp$, prin urmare $(t\,(s) \# s) \cdot s^\perp \leq t\,(s) \cdot s^\perp$. Din acestea găsim că $s^\perp \leq t\,(s) \cdot s^\perp$, dar $t\,(s) \cdot s^\perp \leq t\,(s)$, deci $s^\perp \leq t\,(s)$. $\square$

Mai mult, din demonstraţia Propoziţiei 3.13 avem relaţia $s^\perp \leq t\,(s) \cdot s^\perp$, însă $s^\perp \geq t\,(s) \cdot s^\perp$, prin urmare $s^\perp = t\,(s) \cdot s^\perp$.

Amintim, *suplement* al preradicalului $r \in \mathbb{PR}$ este un preradical $r^* \in \mathbb{PR}$, care posedă proprietăţile:

1) $r \vee r^* = 1$;

2) Dacă $s \in \mathbb{PR}$ este aşa încât $s < r^*$, atunci $r \vee s \neq 1$.

Propoziţia 3.14 *Dacă preradicalul* $s \in \mathbb{PR}$ *posedă suplementul* s^**, atunci* $t\,(s) \leq s^*$.

Demonstraţie. Din definiţie $t\,(s) = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s = 1 \}$. Suplementul s^* al preradicalului s conform definiţiei are proprietatea $s \vee s^* = 1$. Deoarece $s^* \# s \geq s^* \vee s = s \vee s^* = 1$, obţinem $s^* \# s \geq 1$, deci $s^* \# s = 1$. Prin urmare avem că preradicalul s^* este unul dintre preradicalii r_α, de unde $s^* \geq \wedge \{ r_\alpha \mid r_\alpha \# s = 1 \}$, adică $s^* \geq t\,(s)$. $\square$

Mai mult, deoarece $r \leq 1$, utilizând proprietatea de monotonie la numărător a cocâtului stâng în raport cu intersecţia, obţinem $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq 1 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$, însă $1 \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = t\,(s)$, deci $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq t\,(s)$, prin urmare $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq s^*$.

3.3. Comportamentul cocâtului stâng în raport cu intersecţia în cazul unor tipuri speciale de preradicali

În acest paragraf vom arăta mai întâi condiţiile necesare pentru a avea egalitate în unele proprietăţi ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia, apoi vom indica cum se comportă cocâtul stâng în raport cu intersecţia în cazul când numărătorul lui este un preradical coprim, $\vee$ - coprim sau coireductibil.

Următoarele două afirmaţii arată când are loc egalitatea în unele proprietăţi ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia (vezi Propoziţia 3.6).

Propoziţia 3.15 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r = (r \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$.

2) $r = t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2) Dacă $r = (r \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$, atunci $r = t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ pentru $t = r \# s$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r = t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia $(t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s \geq t$. Utilizând monotonia la numărător a cocâtului stâng în raport cu intersecţia, obţinem $[(t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s] \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \geq t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$. Însă conform Propoziţiei 3.6 avem $[(t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s] \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$, prin urmare $[(t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s] \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$. Deoarece $t \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = r$, obţinem $(r \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = r$. □

Propoziţia 3.16 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r = (r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s$.

2) $r = t \# s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2) Dacă $r = (r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s$, atunci $r = t \# s$ pentru $t = r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r = t \# s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Din Propoziţia 3.6 avem $(t \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq t$. Utilizând monotonia coprodusului preradicalilor, obţinem relaţia $[(t \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s] \# s \leq t \# s$. Însă conform definiţiei cocâtului stâng în raport cu intersecţia $[(t \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s] \# s \geq t \# s$, prin urmare $[(t \# s) \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s] \# s = t \# s$. Deoarece $t \# s = r$, avem relaţia $(r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s = r$. □

În următoarele afirmaţii vom arăta comportarea cocâtului stâng în raport cu intersecţia în cazul unor tipuri speciale de preradicali, şi anume, pentru preradicali coprimi, $\vee$ - coprimi şi coireductibili.

Definiţia 3.3. ([96], pag. 56) *Preradicalul* $r \in \mathbb{PR}$ *se numeşte* ***coprim****, dacă* $r \neq 0$ *şi pentru orice* $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ *cu proprietatea* $t_1 \# t_2 \geq r$ *urmează* $t_1 \geq r$ *sau* $t_2 \geq r$ *.*

Propoziţia 3.17 *Preradicalul* r *este coprim dacă şi numai dacă* $r /_{\#} s = 0$ *sau* $r /_{\#} s = r$ *pentru orice preradical* $s \in \mathbb{PR}$*.*

Demonstraţie. ($\Rightarrow$) Fie $r \neq 0$. Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţia $(r /_{\#} s) \# s \geq r$, şi dacă preradicalul r este coprim, atunci conform Definiţiei 3.3 urmează că $r /_{\#} s \geq r$ sau $s \geq r$. Dacă $r /_{\#} s \geq r$, atunci deoarece din Lema 3.2 avem $r /_{\#} s \leq r$ urmează că $r /_{\#} s = r$. Dacă $s \geq r$, atunci conform afirmaţiei Propoziţiei 3.11 avem $r /_{\#} s = 0$.

($\Leftarrow$) Fie $t_1 \# t_2 \geq r$ pentru preradicalii t_1, $t_2 \in \mathbb{PR}$. Utilizând Teorema 3.5, obţinem $t_1 \geq r /_{\#} t_2$. Pentru preradicalul t_2 conform condiţiei acestei propoziţii avem $r /_{\#} t_2 = 0$ sau $r /_{\#} t_2 = r$. Dacă $r /_{\#} t_2 = 0$, atunci conform Propoziţiei 3.11 rezultă că $t_2 \geq r$. Dacă $r /_{\#} t_2 = r$, atunci $t_1 \geq r /_{\#} t_2 = r$.

Deci pentru orice preradicali t_1, $t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \# t_2 \geq r$ avem $t_1 \geq r$ sau $t_2 \geq r$, ceea ce înseamnă că preradicalul r este coprim. $\square$

Definiţia 3.4. ([96], pag. 65) *Preradicalul* $r \in \mathbb{PR}$ *se numeşte* $\vee$***-coprim****, dacă pentru orice* $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ *cu proprietatea* $t_1 \vee t_2 \geq r$ *urmează* $t_1 \geq r$ *sau* $t_2 \geq r$ *.*

Propoziţia 3.18 *Dacă preradicalul* r *este* $\vee$ *- coprim, atunci cocâtul stâng* $r /_{\#} s$ *este un preradical* $\vee$ *- coprim pentru orice preradical* $s \in \mathbb{PR}$*.*

Demonstraţie. Presupunem, că are loc relaţia $t_1 \vee t_2 \geq r /_{\#} s$ pentru preradicalii t_1, $t_2 \in \mathbb{PR}$. Atunci, utilizând Teorema 3.5, obţinem $(t_1 \vee t_2) \# s \geq r$. Aplicând proprietatea de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu reuniunea, avem relaţia $(t_1 \# s) \vee (t_2 \# s) \geq r$. Dacă preradicalul r este $\vee$ - coprim, atunci conform

Definiţiei 3.4 urmează că $t_1 \# s \geq r$ sau $t_2 \# s \geq r$. Aplicând acestor relaţii Teorema 3.5, obţinem $t_1 \geq r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$ sau $t_2 \geq r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$.

Deci, pentru orice preradicali $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \vee t_2 \geq r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$ avem una din relaţiile $t_1 \geq r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$ sau $t_2 \geq r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$, ceea ce înseamnă că preradicalul $r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$ este $\vee$ - coprim. $\square$

Definiţia 3.5. ([96], pag. 65) *Preradicalul* $r \in \mathbb{PR}$ *se numeşte* ***coireductibil****, dacă pentru orice* $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ *cu proprietatea* $t_1 \vee t_2 = r$ *urmează* $t_1 = r$ *sau* $t_2 = r$.

Propoziţia 3.19 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r = t \# s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$*. Dacă preradicalul* r *este coireductibil, atunci preradicalul* $r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$ *este coireductibil.*

Demonstraţie. Fie pentru preradicalii $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ avem relaţia $t_1 \vee t_2 = r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$. Dacă $r = t \# s$ pentru un preradical t, atunci conform Propoziţiei 3.16 $r = (r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s) \# s$, prin urmare $r = (t_1 \vee t_2) \# s$. Utilizând proprietatea de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu reuniunea, obţinem $r = (t_1 \# s) \vee (t_2 \# s)$, şi dacă preradicalul r este coireductibil, atunci $t_1 \# s = r$ sau $t_2 \# s = r$.

Fie $t_1 \# s = r$. Atunci aplicând Teorema 3.5, obţinem $t_1 \geq r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$. Însă deoarece $t_1 \vee t_2 = r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$, rezultă că $t_1 \leq r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$, prin urmare $t_1 = r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$.

Fie $t_2 \# s = r$. Atunci în mod analog ca şi mai sus obţinem $t_2 = r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$.

Deci, pentru orice preradicali $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \vee t_2 = r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$ avem relaţia $t_1 = r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$ sau relaţia $t_2 = r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$, ceea ce înseamnă că preradicalul $r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$ este coireductibil. $\square$

Demonstrăm în continuare încă două proprietăţi ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia.

Propoziţia 3.20 *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s = (r \vee s) \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s$;

2) $(r \mathbin{{}^{\wedge}\!/_{\#}} s) \# s \geq r \vee s$.

Demonstraţie. 1) Din proprietatea de distributivitate a cocâtului stâng în raport cu intersecţia faţă de reuniune urmează $(r \vee s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = (r\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \vee (s\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s)$. Deoarece $s\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = 0$, obţinem $(r \vee s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = (r\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \vee 0 = r\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$.

2) Din afirmaţia 1 a acestei propoziţii avem relaţia $r\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = (r \vee s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$. Utilizând proprietatea de monotonie la numărător a coprodusului preradicalilor, obţinem că $(r\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s = ((r \vee s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s$. Conform definiţiei cocâtului stâng în raport cu intersecţia avem $((r \vee s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s \geq r \vee s$, prin urmare $(r\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \# s \geq r \vee s$. □

Mai mult, deoarece $r \# s \geq r \vee s$, aplicând monotonia cocâtului stâng în raport cu intersecţia la numărător, avem $(r \# s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \geq (r \vee s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ şi conform Propoziţiei 3.20 obţinem $(r \# s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \geq r\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$.

Următoarea afirmaţie precizează aranjarea preradicalilor obţinuţi cu ajutorul cocâtului stâng în raport cu intersecţia.

Corolarul 3.21

1) Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ au loc următoarele relaţii:

$$r\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq (r \# s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq r \leq r \vee s \leq (r\, {}^{\wedge}\!/_{\#} s) \# s \leq r \# s;$$

2) Dacă preradicalul r este coereditar, atunci

$$r\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s = (r \# s)\, {}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq r \leq r \vee s = (r\, {}^{\wedge}\!/_{\#} s) \# s = r \# s$$

pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$. □

3.4. Cocâtul stâng în raport cu intersecţia pentru pretorsiuni

În acest compartiment vom considera un caz particular al preradicalilor, şi anume, pretorsiunile (preradicalii ereditari) ale categoriei R-Mod. Vom arăta că pentru pretorsiuni, cocâtul stâng în raport cu intersecţia coincide cu operaţia *restul drept* (right residual) introdusă şi studiată de J. S. Golan ([11], pag. 44) în termenii filtrelor preradicale ale inelului R cu unitate.

Este bine cunoscută descrierea pretorsiunilor prin filtre preradicale [2; 11; 27; ...].

Amintim, definiţia şi rezultatele principale necesare.

Definiţia 3.6. *Numim **filtru preradical** mulţimea idealelor stângi* $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{L}({}_RR)$, *care satisface următoarele condiţii:*

(a_1) *Dacă* $I \in \mathcal{E}$ *şi* $a \in R$, *atunci* $(I : a) = \{x \in R \mid xa \in I\} \in \mathcal{E}$;

(a_2) *Dacă* $I \in \mathcal{E}$ *şi* $I \subseteq J$, $J \in \mathbb{L}({}_RR)$, *atunci* $J \in \mathcal{E}$;

(a_3) *Dacă* $I, J \in \mathcal{E}$, *atunci* $I \cap J \in \mathcal{E}$.

Există o bijecţie monotonă între pretorsiunile categoriei R-Mod şi filtrele preradicale ale laticei $\mathbb{L}({}_RR)$ definită prin aplicaţiile:

$$r \rightsquigarrow \mathcal{E}_r, \quad \mathcal{E}_r = \{I \in \mathbb{L}({}_RR) \mid r(R/I) = R/I\};$$

$$\mathcal{E} \rightsquigarrow r_{_\mathcal{E}}, \quad r_{_\mathcal{E}}(M) = \{m \in M \mid (0 : m) \in \mathcal{E}\} \text{ ([2; 27])}.$$

Mulţimea tuturor pretorsiunilor $\mathbb{PT}$ şi mulţimea tuturor filtrelor preradicale $\mathbb{PF}$ a laticei $\mathbb{L}({}_RR)$ pot fi considerate ca latice complete şi aplicaţiile indicate mai sus determină un izomorfism între aceste latice: $\mathbb{PT} \cong \mathbb{PF}$.

Menţionăm, că în laticea $\mathbb{PT}$ produsul a două pretorsiuni $r \cdot s$ coincide cu intersecţia lor $r \wedge s$, iar coprodusul a două pretorsiuni r şi s este definit prin regula $[(r \# s)(M)]/s(M) = r(M/s(M))$, $M \in R$-Mod.

În mod similar se introduce în laticea $\mathbb{PF}$ noţiunea de coprodus a două filtre preradicale:

$$\mathcal{E}_r \# \mathcal{E}_s = \{I \in \mathbb{L}({}_RR) \mid \exists\, H \in \mathcal{E}_r,\ I \subseteq H \text{ astfel încît } (I : a) \in \mathcal{E}_s, \forall a \in H\}.$$

Deci avem laticele izomorfe $\mathbb{PT}(\wedge, \vee, \#)$ şi $\mathbb{PF}(\bigwedge, \bigvee, \#)$ ce satisfac următoarele proprietăţi:

$$\mathcal{E}_{\underset{\alpha\in\mathfrak{A}}{\wedge} r_\alpha} = \bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{E}_{r_\alpha}; \qquad \mathcal{E}_{\underset{\alpha\in\mathfrak{A}}{\vee} r_\alpha} = \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{E}_{r_\alpha}.$$

Acum reamintim câteva noţiuni şi rezultate din monografia [11], unde pretorsiunile sunt cercetate din punct de vedere al filtrelor preradicale asociate. În [11] $\mathbb{PF}$ este notată prin $R-fil$ şi operaţia *înmulţirea* (*multiplication*) în $R-fil$ este definită prin regula:

$$KK' = \{I \in \mathbb{L}({}_R R) \,|\, \exists\, H \in K', \text{ astfel încît } I \subseteq H \text{ şi } (I:a) \in K, \forall a \in H\},$$

unde $K, K' \in R-fil$.

Este uşor de arătat că în notaţiile noastre avem $\mathcal{E}_s\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_r \# \mathcal{E}_s$ pentru orice $r, s \in \mathbb{PT}$. Toate proprietăţile operaţiei „înmulţirea" pot fi uşor traduse în limbajul coprodusului, în special asociativitatea şi distributivitatea:

$$\mathcal{E}_1 \# (\mathcal{E}_2 \# \mathcal{E}_3) = (\mathcal{E}_1 \# \mathcal{E}_2) \# \mathcal{E}_3; \quad (\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{E}_{r_\alpha}) \# \mathcal{E} = \bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} (\mathcal{E}_{r_\alpha} \# \mathcal{E}).$$

Utilizând „înmulţirea" (*multiplication*) KK' pentru filtrele preradicale, în [11] (pag. 44) este definită operaţia *rest drept* (*right residual*) $K'^{-1}K$ al lui K pe K' ca cel mai mic unic filtru preradical K'' din $R-fil$ care satisface condiţia $K'K'' \supseteq K$. În baza proprietăţii de distributivitate acest filtru preradical există întotdeauna şi este egal cu $\bigcap\{K'' \,|\, K'K'' \supseteq K\}$. În monografia [11] (pag. 45-54) sunt arătate o serie de proprietăţi ale acestei operaţii.

Traducând în notaţiile noastre şi făcând modificările necesare (înmulţirea în coprodus) obţinem următoarele afirmaţii.

Definiţia 3.7. *Fie* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{PF}$. *Vom numi* ***cocât stâng în raport cu intersecţia a lui*** $\mathcal{E}_1$ ***pe*** $\mathcal{E}_2$ *cel mai mic filtru preradical* $\mathcal{E} \in \mathbb{PF}$ *cu proprietatea* $\mathcal{E} \# \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}_1$ *sau* $\bigwedge\{\mathcal{E} \in \mathbb{PF} \,|\, \mathcal{E} \# \mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}_1\}$.

Proprietatea de distributivitate a coprodusului filtrelor preradicale în raport cu intersecţia asigură existenţa acestui cocât stâng. Vom nota acest filtru preradical prin $\mathcal{E}_1 {}^{\wedge}\!/_{\#}\, \mathcal{E}_2$.

Acum vom arăta că acest filtru preradical coincide cu filtrul preradical al pretorsiunii $r_{\mathcal{E}_1} {}^{\wedge}\!/_{\#}\, r_{\mathcal{E}_2}$.

Lema 3.22 *Dacă* $r,\ s \in \mathbb{PT}$, *atunci* $\mathcal{E}_{r \,\#\, s} = \mathcal{E}_r \,\#\, \mathcal{E}_s$.

Demonstraţie. Mai întâi vom specifica expresiile pretorsiunilor determinate prin filtrele preradicale indicate, utilizând faptul că $r(M) = \{m \in M \mid (0 : m) \in \mathcal{E}_r\}$ pentru orice $r \in \mathbb{PT}$ şi $M \in R$- Mod.

Filtrul preradical $\mathcal{E}_{r \,\#\, s}$ este determinat de pretorsiunea $r \,\#\, s$ şi $(r \,\#\, s)(M) = \{m \in M \,|\, (m + s(M)) \in r(M/s(M))\}$. Însă deoarece $r(M/s(M)) = \{x + s(M) \,|\, x \in M$ şi $(0 : (x + s(M))) \in \mathcal{E}_r\} = \{x + s(M) \,|\, x \in M$ şi $(s(M) : x) \in \mathcal{E}_r\}$, urmează că $(r \,\#\, s)(M) = \{m \in M \,|\, (s(M) : m) \in \mathcal{E}_r\}$.

Vom nota prin t pretorsiunea categoriei R- Mod definită de filtrul preradical $\mathcal{E}_r \,\#\, \mathcal{E}_s$, deci pentru orice $M \in R$- Mod avem $t(M) = \{m \in M \,|\, (0 : m) \in \mathcal{E}_r \,\#\, \mathcal{E}_s\} = \{m \in M \,|\, \exists H \in \mathcal{E}_r,\ (0 : m) \subseteq H$ astfel încât $((0 : m) : a) \in \mathcal{E}_s, \forall a \in H\}$, adică $t(M) = \{m \in M \,|\, \exists H \in \mathcal{E}_r,\ (0 : m) \subseteq H$ astfel încât $(0 : am) \in \mathcal{E}_s,\ \forall a \in H\}$.

Acum vom demonstra afirmaţia din lemă.

$(\subseteq)$ Este suficient de arătat că $r \,\#\, s \leq t$.

Dacă $m \in (r \,\#\, s)(M)$ pentru orice $M \in R$- Mod, atunci $H = (s(M) : m) \in \mathcal{E}_r$ şi $(0 : m) \subseteq (s(M) : m) = H$. Deci dacă $a \in H$, atunci $am \in s(M)$, adică $(0 : am) \in \mathcal{E}_s$, ceea ce înseamnă că $m \in t(M)$. Prin urmare $(r \,\#\, s)(M) \subseteq t(M)$ pentru orice $M \in R$- Mod, adică $r \,\#\, s \leq t$, ceea ce implică $\mathcal{E}_{r \,\#\, s} \subseteq \mathcal{E}_r \,\#\, \mathcal{E}_s$.

$(\supseteq)$ Verificăm relaţia $t \leq r \,\#\, s$.

Fie $M \in R$- Mod şi $m \in t(M)$. Atunci există $H \in \mathcal{E}_r$ astfel încât $(0 : m) \subseteq H$ şi $(0 : am) \in \mathcal{E}_s, \forall a \in H$. Deoarece $a \in H$, urmează $(0 : am) \in \mathcal{E}_s$, deci $am \in s(M)$, adică $a \in (s(M) : m)$, prin urmare $H \subseteq (s(M) : m)$. Conform definiţiei filtrului preradical (condiţia (a_2)), deoarece $H \in \mathcal{E}_r$ avem $(s(M) : m) \in \mathcal{E}_r$, ceea ce înseamnă că $m \in (r \,\#\, s)(M)$. Aceasta implică $t(M) \subseteq (r \,\#\, s)(M)$ pentru orice $M \in R$- Mod, prin urmare $t \leq r \,\#\, s$ şi deci $\mathcal{E}_r \,\#\, \mathcal{E}_s \subseteq \mathcal{E}_{r \,\#\, s}$. $\square$

Teorema 3.23 *Pentru orice pretorsiuni* $r,\ s \in \mathbb{PT}$ *avem:*

$$\mathcal{E}_{r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s} = \mathcal{E}_r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, \mathcal{E}_s.$$

Demonstraţie. $(\supseteq)$ Prin definiţie $\mathcal{E}_r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, \mathcal{E}_s = \bigwedge\{\mathcal{E} \in \mathbb{PF} \,|\, \mathcal{E} \,\#\, \mathcal{E}_s \supseteq \mathcal{E}_r\}$, adică $\mathcal{E}_r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, \mathcal{E}_s$ este cel mai mic filtru preradical $\mathcal{E}$ cu proprietatea $\mathcal{E} \,\#\, \mathcal{E}_s \supseteq \mathcal{E}_r$. Conform Lemei

3.22 avem relaţia $\mathcal{E}_{r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s} \,\#\, \mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{(r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \,\#\, s}$, din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia pentru preradicali $(r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \,\#\, s \geq r$, de unde urmează $\mathcal{E}_{(r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s) \,\#\, s} \supseteq \mathcal{E}_r$, de aceea obţinem relaţia $\mathcal{E}_{r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s} \,\#\, \mathcal{E}_s \supseteq \mathcal{E}_r$. Deci $\mathcal{E}_{r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s}$ este unul dintre filtrele preradicale $\mathcal{E}$ cu proprietatea $\mathcal{E} \,\#\, \mathcal{E}_s \supseteq \mathcal{E}_r$ şi cum $\mathcal{E}_r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, \mathcal{E}_s$ este cel mai mic filtru preradical cu aşa proprietate, conchidem că $\mathcal{E}_{r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s} \supseteq \mathcal{E}_r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, \mathcal{E}_s$.

$(\subseteq)$ Fie $\mathcal{E}_t$ este filtrul preradical definit de pretorsiunea $t \in \mathbb{PT}$ cu proprietatea $\mathcal{E}_t \,\#\, \mathcal{E}_s \supseteq \mathcal{E}_r$. Conform Lemei 3.22 avem $\mathcal{E}_{t \,\#\, s} \supseteq \mathcal{E}_r$, de unde urmează $t \,\#\, s \geq r$. Din definiţia cocâtului stâng în raport cu intersecţia pentru preradicali, rezultă că $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s$ este cea mai mică pretorsiune h cu proprietatea $h \,\#\, s \geq r$, prin urmare $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s \leq t$, de unde $\mathcal{E}_{r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s} \subseteq \mathcal{E}_t$. Deci $\mathcal{E}_{r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s}$ este cel mai mic filtru preradical $\mathcal{E}$ cu proprietatea $\mathcal{E} \,\#\, \mathcal{E}_s \supseteq \mathcal{E}_r$, prin urmare $\mathcal{E}_{r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s} \subseteq \mathcal{E}_r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, \mathcal{E}_s$. $\square$

Această afirmaţie arată, că toate rezultatele obţinute pentru operaţia cocâtul stâng în raport cu intersecţia pentru preradicali în acest capitol, sunt valabile şi pentru operaţia cocâtul stâng în raport cu intersecţia pentru filtre preradicale (pretorsiuni), care şi reprezintă operaţia *rest drept* definită şi studiată de Golan în [11]. Ca urmare, *restul drept* poate fi privit ca un caz particular al operaţiei cercetate în acest capitol.

3.5. Concluzii la capitolul 3

În **capitolul trei** a fost introdusă şi investigată o operaţie nouă în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, **cocâtul stâng în raport cu intersecţia**. Această operaţie este o operaţie duală operaţiei definite în capitolul doi. Sunt determinate proprietăţile principale ale ei şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul acestei operaţii. Este stabilită compatibilitatea cocâtului stâng în raport cu intersecţia cu operaţiile laticeale din laticea completă („mare") $\mathbb{PR}$. Sunt arătate relaţiile dintre operaţia definită şi unele noţiuni şi construcţii din laticea completă („mare") $\mathbb{PR}$. Este descrisă comportarea noii operaţii în cazul unor preradicali de tip special (preradicali coprimi, $\vee$-coprimi, coireductibili) şi sunt studiate unele cazuri particulare ale acestei operaţii.

Mai mult, în paragraful patru este arătat că operaţia „rest drept" (right residual) definită şi cercetată de J. S. Golan în monografia „Linear topologies on a ring" ([11]) pentru filtre preradicale, poate fi tratată ca un caz particular al operaţiei cocâtul stâng în raport cu intersecţia definită pentru preradicali în acest capitol.

4. CÂTUL STÂNG ÎN RAPORT CU INTERSECŢIA

În acest capitol se defineşte şi se cercetează o nouă operaţie în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod. Spre deosebire de operaţiile definite în capitolele 2 şi 3 această operaţie este parţială (în sens că nu există pentru orice pereche de preradicali). Rezultatele acestui capitol au fost publicate în lucrările [69], [131] şi [133].

4.1. Definiţia şi proprietăţile principale ale câtului stâng în raport cu intersecţia

Proprietatea de distributivitate a produsului în raport cu intersecţia permite să definim o operaţie nouă în clasa preradicalilor, şi anume, inversa la stânga a produsului în raport cu intersecţia. În acest paragraf se arată proprietăţile principale ale ei şi legătura ei cu operaţiile laticeale din clasa $\mathbb{PR}$.

Definiţia 4.1. *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Vom numi* ***cât stâng în raport cu intersecţia al lui*** r ***pe*** s *cel mai mic preradical dintre preradicalii* $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ *cu proprietatea* $r_\alpha \cdot s \geq r$. *Vom nota acest preradical prin* $r \ {}^{\wedge}\!/. \ s$.

Vom spune, că r este *numărătorul*, iar s *numitorul* câtului stâng $r \ {}^{\wedge}\!/. \ s$.

Acum vom arăta existenţa şi forma de reprezentare a câtului stâng în raport cu intersecţia.

Lema 4.1 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Câtul stâng* $r \ {}^{\wedge}\!/. \ s$ *există dacă şi numai dacă* $r \leq s$ *şi el poate fi reprezentat în forma:*

$$r \ {}^{\wedge}\!/. \ s = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \geq r \}.$$

Demonstraţie. ($\Rightarrow$) Dacă există câtul stâng $r \ {}^{\wedge}\!/. \ s$, atunci există cel puţin un preradical $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ care posedă proprietatea $r_\alpha \cdot s \geq r$. Întrucât $1 \geq r_\alpha$, conform proprietăţii de monotonie a produsului preradicalilor avem $1 \cdot s \geq r_\alpha \cdot s$, dar $1 \cdot s = s$, prin urmare $s \geq r_\alpha \cdot s$. Deci urmează $s \geq r$.

($\Leftarrow$) Fie $r \leq s$. Deoarece $1 \cdot s = s$, urmează că $1 \cdot s \geq r$. Prin urmare familia de preradicali $\{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \geq r \}$ nu este vidă, ceea ce permite să considerăm preradicalul $\wedge \{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \geq r\}$. Conform proprietăţii de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu intersecţia, obţinem $\left(\bigwedge\limits_{r_\alpha \cdot s \geq r} r_\alpha\right) \cdot s = \bigwedge\limits_{r_\alpha \cdot s \geq r} (r_\alpha \cdot s)$. Deoarece $r_\alpha \cdot s \geq r$ pentru orice r_α, urmează că $\bigwedge\limits_{r_\alpha \cdot s \geq r} (r_\alpha \cdot s) \geq r$, prin urmare $\left(\bigwedge\limits_{r_\alpha \cdot s \geq r} r_\alpha\right) \cdot s \geq r$, ceea ce înseamnă că preradicalul $\bigwedge\limits_{r_\alpha \cdot s \geq r} r_\alpha$ este unul dintre preradicalii r_α. Din construcţia preradicalului $\bigwedge\limits_{r_\alpha \cdot s \geq r} r_\alpha$ este clar că el este cel mai mic preradical din $\mathbb{PR}$ cu proprietatea $r_\alpha \cdot s \geq r$. Prin urmare conchidem că $\wedge \{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \geq r\} = r \curlyvee. \, s$. $\square$

Mai mult, din demonstraţia Lemei 4.1 rezultă relaţia $(r \curlyvee. \, s) \cdot s \geq r$, pe care o vom folosi des în continuare.

Lema 4.2 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r \leq s$. *Atunci* $r \curlyvee. \, s \geq r$.

Demonstraţie. Condiţia $r \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $r \curlyvee. \, s$.

Deoarece $r \curlyvee. \, s \geq (r \curlyvee. \, s) \cdot s$, iar din definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia avem $(r \curlyvee. \, s) \cdot s \geq r$, urmează că $r \curlyvee. \, s \geq r$. $\square$

Următoarele două afirmaţii arată legătura dintre câtul stâng în raport cu intersecţia şi relaţia de ordine $(\leq)$ din clasa $\mathbb{PR}$.

Propoziţia 4.3 *(Monotonie la numărător) Fie* $r_1, r_2 \in \mathbb{PR}$ *şi* $r_1 \leq r_2$. *Atunci pentru orice preradical* $s \geq r_2$, *avem* $r_1 \curlyvee. \, s \leq r_2 \curlyvee. \, s$.

Demonstraţie. Deoarece $r_1 \leq r_2 \leq s$ conform Lemei 4.1 există câturile stângi $r_1 \curlyvee. \, s$ şi $r_2 \curlyvee. \, s$, şi ele pot fi reprezentate sub forma: $r_1 \curlyvee. \, s = \wedge \{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \geq r_1\}$, $r_2 \curlyvee. \, s = \wedge \left\{r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \cdot s \geq r_2\right\}$.

Dacă avem $r_1 \leq r_2$ şi $r'_\beta \cdot s \geq r_2$, atunci $r'_\beta \cdot s \geq r_1$. Deci fiecare preradical r'_β este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $\wedge \{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \geq r_1\} \leq \wedge \left\{r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \cdot s \geq r_2\right\}$, adică $r_1 \curlyvee. \, s \leq r_2 \curlyvee. \, s$. $\square$

Propoziţia 4.4 *(Antimonotonie la numitor) Fie* $s_1, s_2 \in \mathbb{PR}$ *şi* $s_1 \leq s_2$. *Atunci pentru orice preradical* $r \leq s_1$, *avem* $r \curlyvee. \, s_1 \geq r \curlyvee. \, s_2$.

Demonstraţie. Deoarece $r \leq s_1 \leq s_2$ conform Lemei 4.1 există câturile stângi $r \,/\!\!\cdot\, s_1$ şi $r \,/\!\!\cdot\, s_2$, , şi ele pot fi reprezentate sub forma: $r \,/\!\!\cdot\, s_1 = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s_1 \geq r \}$, $r \,/\!\!\cdot\, s_2 = \wedge \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \cdot s_2 \geq r \right\}$.

Fie $r_\alpha \cdot s_1 \geq r$. Dacă $s_1 \leq s_2$, atunci conform proprietăţii de monotonie a produsului preradicalilor, avem $r_\alpha \cdot s_1 \leq r_\alpha \cdot s_2$, însă $r_\alpha \cdot s_1 \geq r$, prin urmare $r_\alpha \cdot s_2 \geq r$. Aceasta înseamnă că fiecare preradical r_α este unul dintre preradicalii r'_β, ceea ce implică relaţia $\wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s_1 \geq r \} \geq \wedge \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \cdot s_2 \geq r \right\}$, adică avem $r \,/\!\!\cdot\, s_1 \geq r \,/\!\!\cdot\, s_2$. □

Rezultatul următoarei afirmaţii este destul de valoros, deoarece el poate fi considerat ca o altă definiţie a câtului stâng în raport cu intersecţia şi va fi frecvent utilizat în cercetările ce urmează.

Teorema 4.5 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r \leq s$. *Atunci pentru orice* $t \in \mathbb{PR}$ *avem:*

$$r \leq t \cdot s \Leftrightarrow r \,/\!\!\cdot\, s \leq t.$$

Demonstraţie. Fie $r \leq s$. Atunci conform Lemei 4.1 există câtul stâng $r \,/\!\!\cdot\, s$ şi $r \,/\!\!\cdot\, s = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \geq r \}$.

$(\Rightarrow)$ Fie $t \cdot s \geq r$. Aceasta înseamnă că preradicalul t este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $t \geq \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot s \geq r \}$, adică $t \geq r \,/\!\!\cdot\, s$.

$(\Leftarrow)$ Fie $r \,/\!\!\cdot\, s \leq t$. Atunci conform proprietăţii de monotonie a produsului preradicalilor, obţinem $(r \,/\!\!\cdot\, s) \cdot s \leq t \cdot s$, însă din definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia, avem $(r \,/\!\!\cdot\, s) \cdot s \geq r$, prin urmare $t \cdot s \geq r$. □

În continuare vom indica unele proprietăţi de bază ale câtului stâng în raport cu intersecţia.

Propoziţia 4.6 *Pentru orice* $r, s \in \mathbb{PR}$ *avem:*

$$(r \cdot s) \,/\!\!\cdot\, s \leq r.$$

Demonstraţie. Deoarece $r \cdot s \leq s$, atunci conform Lemei 4.1 există câtul stâng $(r \cdot s) \,/\!\!\cdot\, s$ şi $(r \cdot s) \,/\!\!\cdot\, s = \wedge \{ t_\alpha \in \mathbb{PR} \mid t_\alpha \cdot s \geq r \cdot s \}$.

Întrucât avem $r \cdot s \geq r \cdot s$, urmează că preradical r este unul dintre preradicalii t_α, ceea ce implică relaţia $r \geq \wedge\{t_\alpha \in \mathbb{PR} \mid t_\alpha \cdot s \geq r \cdot s\}$. Prin urmare, avem că $r \geq (r \cdot s) \% s$. $\square$

Propoziţia 4.7 *Fie $r, s \in \mathbb{PR}$. Atunci următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $(r \% s) \% t = r \% (t \cdot s)$ *pentru orice preradical t cu proprietatea $t \cdot s \geq r$;*

2) $(r \cdot s) \% t \leq r \cdot (s \% t)$ *pentru orice preradical $t \geq s$.*

Demonstraţie. 1) Condiţia $r \leq t \cdot s$ asigură existenţa câtului stâng $r \% (t \cdot s)$. În acest caz, deoarece $t \cdot s \leq s$, obţinem relaţia $r \leq s$, ceea ce implică existenţa câtului stâng $r \% s$. Mai mult, din Teorema 4.5 avem $t \cdot s \geq r \Leftrightarrow r \% s \leq t$, ceea ce asigură existenţa câtului stâng $(r \% s) \% t$. Conform Lemei 4.1, următoarele câturi stângi pot fi reprezentate în forma: $r \% (t \cdot s) = \wedge\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot (t \cdot s) \geq r\}$ şi $(r \% s) \% t = \wedge\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot t \geq r \% s\}$.

$(\leq)$ Fie $r_\alpha \cdot (t \cdot s) \geq r$. Utilizând proprietatea de asociativitate a produsului preradicalilor, obţinem $(r_\alpha \cdot t) \cdot s \geq r$, însă prin definiţie câtul stâng $r \% s$ este cel mai mic preradical cu aşa proprietate, prin urmare $r_\alpha \cdot t \geq r \% s$. Aceasta înseamnă că fiecare preradical r_α este unul dintre preradicalii t_β, ceea ce implică faptul că pentru fiecare preradical r_α avem $r_\alpha \geq \wedge\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot t \geq r \% s\}$ pentru orice α. Prin urmare $\wedge\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot (t \cdot s) \geq r\} \geq \wedge\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot t \geq r \% s\}$, adică $r \% (t \cdot s) \geq (r \% s) \% t$.

$(\geq)$ Fie $t_\beta \cdot t \geq r \% s$. Utilizând proprietăţile de asociativitate şi de monotonie ale produsului preradicalilor, obţinem $t_\beta \cdot (t \cdot s) = (t_\beta \cdot t) \cdot s \geq (r \% s) \cdot s$, din definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia avem $(r \% s) \cdot s \geq r$, prin urmare $t_\beta \cdot (t \cdot s) \geq r$. Aceasta arată că fiecare preradical t_β este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $\wedge\{t_\beta \in \mathbb{PR} \mid t_\beta \cdot t \geq r \% s\} \geq \wedge\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot (t \cdot s) \geq r\}$, adică $(r \% s) \% t \geq r \% (t \cdot s)$.

2) Relaţia $s \leq t$ asigură existenţa câtului stâng $s \% t$ şi deoarece $r \cdot s \leq s$, avem $r \cdot s \leq t$, deci există câtul stâng $(r \cdot s) \% t$.

Din definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţia $s \leq (s \% t) \cdot t$. Utilizând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale produsului preradicalilor, obţinem $r \cdot s \leq r \cdot [(s \gamma\!. \, t) \cdot t\,] = [\,r \cdot (s \gamma\!. \, t)] \cdot t$. Aplicând Teorema 4.5 la relaţia $r \cdot s \leq [\,r \cdot (s \gamma\!. \, t)] \cdot t$, avem $(r \cdot s) \gamma\!. \, t \leq r \cdot (s \gamma\!. \, t)$. $\square$

Propoziţia 4.8 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r \leq s$. *Atunci sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1) $(r \gamma\!. \, t) \gamma\!. \, (s \gamma\!. \, t) \leq r \gamma\!. \, s$ *[sau* $(r \gamma\!. \, s) \cdot (s \gamma\!. \, t) \geq r \gamma\!. \, t$*] pentru orice preradical* $t \geq s$;

2) $(r \cdot t) \gamma\!. \, (s \cdot t) \leq r \gamma\!. \, s$ *[sau* $r \cdot t \leq (r \gamma\!. \, s) \cdot (s \cdot t)$*] pentru orice preradical* $t \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. 1) Condiţiile $r \leq s$ şi $s \leq t$ asigură existenţa câturilor stângi $r \gamma\!. \, s$ şi $s \gamma\!. \, t$. În acest caz, întrucât $r \leq s$ şi $s \leq t$, avem $r \leq t$, deci există câtul stâng $r \gamma\!. \, t$. Mai mult, deoarece $r \leq s$, conform proprietăţii de monotonie la numărător a câtului stâng în raport cu intersecţia, rezultă că $r \gamma\!. \, t \leq s \gamma\!. \, t$, ceea ce asigură existenţa câtului stâng $(r \gamma\!. \, t) \gamma\!. \, (s \gamma\!. \, t)$.

Conform Teoremei 4.5 relaţiile din această afirmaţie sunt echivalente. Demonstrăm a doua relaţie.

Din definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţiile $r \leq (r \gamma\!. \, s) \cdot s$ şi $s \leq (s \gamma\!. \, t) \cdot t$. Utilizând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale produsului preradicalilor, obţinem $r \leq (r \gamma\!. \, s) \cdot s \leq (r \gamma\!. \, s) \cdot [(s \gamma\!. \, t) \cdot t\,] = [(r \gamma\!. \, s) \cdot (s \gamma\!. \, t)] \cdot t$. Aplicând Teorema 4.5 la relaţia $r \leq [(r \gamma\!. \, s) \cdot (s \gamma\!. \, t)] \cdot t$ avem relaţia $r \gamma\!. \, t \leq (r \gamma\!. \, s) \cdot (s \gamma\!. \, t)$.

2) Condiţia $r \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $r \gamma\!. \, s$. Mai mult, din proprietatea de monotonie a produsului preradicalilor, avem $r \cdot t \leq s \cdot t$ pentru orice $t \in \mathbb{PR}$, deci există câtul stâng $(r \cdot t) \gamma\!. \, (s \cdot t)$.

Conform Teoremei 4.5 relaţiile din această afirmaţie sunt echivalente. Demonstrăm a doua relaţie.

Din definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia $r \leq (r \gamma\!. \, s) \cdot s$, prin urmare, aplicând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale produsului preradicalilor, obţinem $r \cdot t \leq [(r \gamma\!. \, s) \cdot s\,] \cdot t = (r \gamma\!. \, s) \cdot (s \cdot t)$. $\square$

Acum vom indica relaţiile dintre câtul stâng în raport cu intersecţia şi operaţiile laticeale din $\mathbb{PR}$ (reuniunea şi intersecţia).

Teorema 4.9 *(Distributivitatea câtului stâng* $r \mathbin{/\!.} s$ *în raport cu reuniunea) Fie* $s \in \mathbb{PR}$*. Atunci pentru orice familie de preradicali* $\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \leq s,\, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *următoarea relaţie este adevărată:*

$$\left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \mathbin{/\!.} s = \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{/\!.} s).$$

Demonstraţie. Relaţiile $r_\alpha \leq s$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ asigură existenţa câturilor stângi $r_\alpha \mathbin{/\!.} s$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Însă în acest caz, urmează $\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq s$, ceea ce implică existenţa câtului stâng $\left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \mathbin{/\!.} s$.

($\leq$) Din definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia $r_\alpha \leq (r_\alpha \mathbin{/\!.} s) \cdot s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce implică $\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} [(r_\alpha \mathbin{/\!.} s) \cdot s\,]$. Utilizând proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu reuniunea, obţinem relaţia $\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq \left[\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{/\!.} s)\right] \cdot s$, unde aplicând Teorema 4.5 urmează că $\left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \mathbin{/\!.} s \leq \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{/\!.} s)$.

($\geq$) Conform Lemei 4.1 avem $\left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \mathbin{/\!.} s = \wedge \left\{ t_\beta \in \mathbb{PR} \,|\, t_\beta \cdot s \geq \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \right\}$ şi $r_\alpha \mathbin{/\!.} s = \wedge \{ r'_\gamma \in \mathbb{PR} \,|\, r'_\gamma \cdot s \geq r_\alpha \}$.

Fie $t_\beta \cdot s \geq \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha$. Deoarece $\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \geq r_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, urmează că $t_\beta \cdot s \geq r_\alpha$, ceea ce înseamnă că fiecare preradical t_β este unul dintre preradicalii r'_γ. Aceasta implică relaţia $\wedge \left\{ t_\beta \in \mathbb{PR} \,|\, t_\beta \cdot s \geq \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \right\} \geq \wedge \{ r'_\gamma \in \mathbb{PR} \,|\, r'_\gamma \cdot s \geq r_\alpha \}$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, adică $\left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \mathbin{/\!.} s \geq r_\alpha \mathbin{/\!.} s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, de unde urmează relaţia $\left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \mathbin{/\!.} s \geq \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{/\!.} s)$. $\square$

Propoziţia 4.10 *În clasa* $\mathbb{PR}$ *următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $\left(\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \mathbin{/\!.} s \leq \bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \mathbin{/\!.} s)$, *unde* $r_\alpha \leq s$ *pentru orice* $\alpha \in \mathfrak{A}$*;*

2) $r \mathbin{/\!.} \left(\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq \bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \mathbin{/\!.} s_\alpha)$, *unde* $r \leq s_\alpha$ *pentru orice* $\alpha \in \mathfrak{A}$*;*

3) $r \mathbin{/\!.} \left(\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq \bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \mathbin{/\!.} s_\alpha)$, *unde* $r \leq s_\alpha$ *pentru orice* $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Demonstraţie. 1) Condiţiile $r_\alpha \leq s,\ \alpha \in \mathfrak{A}$ asigură existenţa câturilor stângi $r_\alpha \,\%\, s$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Dar în acest caz, avem $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq s$, ceea ce implică existenţa câtului stâng $\left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \%\, s$.

Din definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţia $r_\alpha \leq (r_\alpha \,\%\, s)\cdot s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce implică $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} [(r_\alpha \,\%\, s)\cdot s]$. Utilizând acum proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu intersecţia, obţinem $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha \leq \left[\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,\%\, s)\right]\cdot s$, de unde aplicând Teoremei 4.5, avem relaţia $\left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} r_\alpha\right) \%\, s \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r_\alpha \,\%\, s)$.

2) Condiţiile $r \leq s_\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}$ asigură existenţa câturilor stângi $r \,\%\, s_\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}$. Însă în acest caz urmează că $r \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha$, ceea ce implică existenţa câtului stâng $r \,\%\left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right)$.

Pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$ avem $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha \leq s_\alpha$. Utilizând proprietatea de antimonotonie la numitor a câtului stâng în raport cu intersecţia, obţinem $r \,\%\left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq r \,\%\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce implică relaţia $r \,\%\left(\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \,\%\, s_\alpha)$.

3) Condiţiile $r \leq s_\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}$ asigură existenţa câturilor stângi $r \,\%\, s_\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}$. Mai mult, în acest caz avem $r \leq \bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha$, ceea ce implică existenţa câtului stâng $r \,\%\left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right)$.

Pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$ avem $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha \geq s_\alpha$. Aplicând proprietatea de antimonotonie la numitor a câtului stâng în raport cu intersecţia, obţinem $r \,\%\left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq r \,\%\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, de unde rezultă $r \,\%\left(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (r \,\%\, s_\alpha)$. $\square$

4.2. Cazurile particulare ale câtului stâng în raport cu intersecţia

În acest compartiment vom cerceta cazurile particulare ale câtului stâng în raport cu intersecţia $r \curlyvee\!. \, s$.

Definiţia 4.2. ([93], pag. 204) ***Egalizatorul*** *preradicalului* r *este preradicalul*

$$e(r) = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot r = r \}.$$

Propoziţia 4.11 *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $r \curlyvee\!. \, r = e(r)$*;*

2) $r \curlyvee\!. \, 1 = r$*;*

3) $0 \curlyvee\!. \, s = 0$.

Demonstraţie. Utilizând definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia, obţinem:

1) $r \curlyvee\!. \, r = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot r \geq r \} = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot r = r \} = e(r)$;

2) $r \curlyvee\!. \, 1 = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot 1 \geq r \} = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \geq r \} = r$;

3) $0 \curlyvee\!. \, s = \wedge \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \,|\, r_\alpha \cdot s \geq 0 \} = \wedge \{ r_\alpha \,|\, r_\alpha \in \mathbb{PR} \} = 0$. □

Din Propoziţia 4.11 avem următoarele cazuri particulare:

(1) $0 \curlyvee\!. \, 0 = 0$; (2) $1 \curlyvee\!. \, 1 = 1$.

Aplicând proprietatea de antimonotonie la numitor a câtului stâng în raport cu intersecţia la relaţia $r \leq s \leq 1$, obţinem $r \curlyvee\!. \, r \geq r \curlyvee\!. \, s \geq r \curlyvee\!. \, 1$, adică avem $r \leq r \curlyvee\!. \, s \leq e(r)$.

Mai mult, proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu intersecţia implică $e(r) \cdot r = \left(\underset{r_\alpha \cdot r = r}{\wedge} r_\alpha \right) \cdot r = \underset{r_\alpha \cdot r = r}{\wedge} (r_\alpha \cdot r) = r$ pentru orice $r \in \mathbb{PR}$.

Următoarea afirmaţie arată unele proprietăţi ale egalizatorului.

Propoziţia 4.12 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r \leq s$. *Atunci:*

1) $e(r) \cdot (r \curlyvee\!. \, s) = r \curlyvee\!. \, s$*;*

2) $\quad (r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \cdot e(s) = r \curlyvee\!\!\cdot\, s;$

3) $\quad (r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \curlyvee\!\!\cdot\, e(s) = r \curlyvee\!\!\cdot\, s.$

Demonstraţie. Condiţia $r \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $r \curlyvee\!\!\cdot\, s$.

1) Avem $e(r) \cdot (r \curlyvee\!\!\cdot\, s) = (r \curlyvee\!\!\cdot\, r) \cdot (r \curlyvee\!\!\cdot\, s)$. Aplicând afirmaţia 1 a Propoziţiei 4.8, obţinem relaţia $(r \curlyvee\!\!\cdot\, r) \cdot (r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \geq r \curlyvee\!\!\cdot\, s$, însă deoarece $(r \curlyvee\!\!\cdot\, r) \cdot (r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \leq r \curlyvee\!\!\cdot\, s$, urmează că $e(r) \cdot (r \curlyvee\!\!\cdot\, s) = r \curlyvee\!\!\cdot\, s$.

2) Avem $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \cdot e(s) = (r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \cdot (s \curlyvee\!\!\cdot\, s)$. Conform afirmaţiei 1 a Propoziţiei 4.8, obţinem relaţia $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \cdot (s \curlyvee\!\!\cdot\, s) \geq r \curlyvee\!\!\cdot\, s$, dar deoarece $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \cdot (s \curlyvee\!\!\cdot\, s) \leq r \curlyvee\!\!\cdot\, s$, urmează că $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \cdot e(s) = r \curlyvee\!\!\cdot\, s$.

3) Deoarece $r \leq s$, aplicând proprietatea de monotonie la numărător a câtului stâng în raport cu intersecţia, obţinem $r \curlyvee\!\!\cdot\, s \leq s \curlyvee\!\!\cdot\, s$, ceea ce asigură existenţa câtului stâng $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \curlyvee\!\!\cdot\, (s \curlyvee\!\!\cdot\, s)$, adică a câtului stâng $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \curlyvee\!\!\cdot\, e(s)$.

Avem $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \curlyvee\!\!\cdot\, e(s) = (r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \curlyvee\!\!\cdot\, (s \curlyvee\!\!\cdot\, s)$. Utilizând afirmaţia 1 a Propoziţiei 4.8, obţinem $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \curlyvee\!\!\cdot\, (s \curlyvee\!\!\cdot\, s) \leq r \curlyvee\!\!\cdot\, s$, însă conform Lemei 4.2 $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \curlyvee\!\!\cdot\, (s \curlyvee\!\!\cdot\, s) \geq r \curlyvee\!\!\cdot\, s$, prin urmare avem $(r \curlyvee\!\!\cdot\, s) \curlyvee\!\!\cdot\, e(s) = r \curlyvee\!\!\cdot\, s$. □

În continuare vom considera cazul preradicalilor idempotenţi.

Remarca 4.13 ([93], pag. 204) *Pentru orice preradical* $r \in \mathbb{PR}$ *egalizatorul său* $e(r)$ *este un preradical idempotent.*

Demonstraţie. Avem $e(r) \cdot e(r) = (r \curlyvee\!\!\cdot\, r) \cdot (r \curlyvee\!\!\cdot\, r)$. Conform afirmaţiei 1 a Propoziţiei 4.8, obţinem relaţia $(r \curlyvee\!\!\cdot\, r) \cdot (r \curlyvee\!\!\cdot\, r) \geq r \curlyvee\!\!\cdot\, r$, însă $(r \curlyvee\!\!\cdot\, r) \cdot (r \curlyvee\!\!\cdot\, r) \leq r \curlyvee\!\!\cdot\, r$, prin urmare avem $e(r) \cdot e(r) = e(r)$, adică $e(r)$ este un preradical idempotent. □

Propoziţia 4.14 *Preradicalul* $r \in \mathbb{PR}$ *este idempotent dacă şi numai dacă* $e(r) = r$.

Demonstraţie. $(\Rightarrow)$ Din Definiţia 4.2 avem $e(r) = \wedge\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot r = r\}$. Dacă r este un preradical idempotent, atunci $r \cdot r = r$, ceea ce înseamnă că preradicalul r este unul dintre preradicalii r_α. Aceasta implică $r \geq \wedge\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \cdot r = r\}$, adică $r \geq e(r)$, însă de mai sus $e(r) \geq r$, prin urmare $e(r) = r$.

($\Leftarrow$) Fie $e(r) = r$. Atunci $r \cdot r = e(r) \cdot r$. Însă mai sus am arătat că $e(r) \cdot r = r$, prin urmare $r \cdot r = r$, adică preradicalul r este idempotent. $\square$

Mai mult, deoarece $r \leq r \mathbin{/\!\!.} s \leq e(r)$, dacă preradicalul r este idempotent, atunci $r \mathbin{/\!\!.} s = r$ pentru orice preradical $s \geq r$.

Propoziţia 4.15 *Fie* $r \in \mathbb{PR}$ *şi* s *este un preradical idempotent. Atunci:*

1) $r \mathbin{/\!\!.} s \leq s$ *pentru* $r \leq s$;

2) $(r \mathbin{/\!\!.} s) \cdot s = r \mathbin{/\!\!.} s$ *pentru* $r \leq s$;

3) $(r \mathbin{/\!\!.} s) \mathbin{/\!\!.} s = r \mathbin{/\!\!.} s$ *pentru* $r \leq s$;

4) $(r \cdot s) \mathbin{/\!\!.} s = r \cdot s$.

Demonstraţie. 1) Condiţia $r \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $r \mathbin{/\!\!.} s$.

Fie $r \leq s$. Aplicând proprietatea de monotonie la numărător a câtului stâng în raport cu intersecţia, obţinem $r \mathbin{/\!\!.} s \leq s \mathbin{/\!\!.} s$. Dacă preradicalul s este idempotent, atunci $s \mathbin{/\!\!.} s = s$, prin urmare $r \mathbin{/\!\!.} s \leq s$.

2) Condiţia $r \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $r \mathbin{/\!\!.} s$.

Fie s este un preradical idempotent. Utilizând Propoziţia 4.14, obţinem relaţia $(r \mathbin{/\!\!.} s) \cdot s = (r \mathbin{/\!\!.} s) \cdot e(s)$. Din afirmaţia 2 a Propoziţiei 4.12 $(r \mathbin{/\!\!.} s) \cdot e(s) = r \mathbin{/\!\!.} s$, prin urmare $(r \mathbin{/\!\!.} s) \cdot s = r \mathbin{/\!\!.} s$.

3) Condiţia $r \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $r \mathbin{/\!\!.} s$. Mai mult, conform afirmaţiei 1 din această propoziţie, dacă preradicalul s este idempotent avem relaţia $r \mathbin{/\!\!.} s \leq s$, ceea ce implică existenţa câtului stâng $(r \mathbin{/\!\!.} s) \mathbin{/\!\!.} s$.

Conform afirmaţiei 1 din Propoziţia 4.7, obţinem $(r \mathbin{/\!\!.} s) \mathbin{/\!\!.} s = r \mathbin{/\!\!.} (s \cdot s)$. Dacă s este un preradical idempotent, atunci $(r \mathbin{/\!\!.} s) \mathbin{/\!\!.} s = r \mathbin{/\!\!.} s$.

4) Deoarece $r \cdot s \leq s$, urmează că există câtul stâng $(r \cdot s) \mathbin{/\!\!.} s$.

Conform afirmaţiei 2 din Propoziţia 4.7, obţinem $(r \cdot s) \mathbin{/\!\!.} s \leq r \cdot (s \mathbin{/\!\!.} s)$. Dacă s este un preradical idempotent, atunci $(r \cdot s) \mathbin{/\!\!.} s \leq r \cdot s$. Însă conform Lemei 4.2 $(r \cdot s) \mathbin{/\!\!.} s \geq r \cdot s$, prin urmare $(r \cdot s) \mathbin{/\!\!.} s = r \cdot s$. $\square$

4.3. Comportamentul câtului stâng în raport cu intersecţia în cazul unor tipuri speciale de preradicali

Mai întâi arătăm când are loc egalitatea în unele proprietăţi ale câtului stâng în raport cu intersecţia (vezi Propoziţia 4.6).

Propoziţia 4.16 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r = (r \cdot s) \curlyvee. s$.

2) $r = t \curlyvee. s$ *pentru un preradical* $t \leq s$.

Demonstraţie. Condiţia $t \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $t \curlyvee. s$. Deoarece $r \cdot s \leq s$, urmează că există câtul stâng $(r \cdot s) \curlyvee. s$.

1) $\Rightarrow$ 2) Dacă $r = (r \cdot s) \curlyvee. s$, atunci $r = t \curlyvee. s$ pentru $t = r \cdot s$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r = t \curlyvee. s$ pentru un preradical $t \leq s$. Din definiţia câtului stâng în raport cu intersecţia avem relaţia $(t \curlyvee. s) \cdot s \geq t$. Utilizând proprietatea de monotonie la numărător a câtului stâng în raport cu intersecţia, obţinem $[(t \curlyvee. s) \cdot s] \curlyvee. s \geq t \curlyvee. s$. Însă conform Propoziţiei 4.6 $[(t \curlyvee. s) \cdot s] \curlyvee. s \leq t \curlyvee. s$, prin urmare avem relaţia $[(t \curlyvee. s) \cdot s] \curlyvee. s = t \curlyvee. s$. Deoarece $t \curlyvee. s = r$, urmează $(r \cdot s) \curlyvee. s = r$. □

Propoziţia 4.17 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r = (r \curlyvee. s) \cdot s$ *pentru* $r \leq s$.

2) $r = t \cdot s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. Condiţia $r \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $r \curlyvee. s$.

1) $\Rightarrow$ 2) Dacă $r = (r \curlyvee. s) \cdot s$, atunci $r = t \cdot s$ pentru $t = r \curlyvee. s$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r = t \cdot s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Din Propoziţia 4.6 avem relaţia $(t \cdot s) \curlyvee. s \leq t$. Aplicând proprietatea de monotonie a produsului preradicalilor, obţinem $[(t \cdot s) \curlyvee. s] \cdot s \leq t \cdot s$. Însă conform definiţiei câtului stâng în raport cu intersecţia $[(t \cdot s) \curlyvee. s] \cdot s \geq t \cdot s$, prin urmare $[(t \cdot s) \curlyvee. s] \cdot s = t \cdot s$. Deoarece $t \cdot s = r$, urmează relaţia $(r \curlyvee. s) \cdot s = r$. □

În continuare vom cerceta comportarea câtului stâng în raport cu intersecţia în cazul unor preradicali de tip special (preradicali primi, $\wedge$-primi, ireductibili).

Propoziţia 4.18 *Dacă preradicalul r este coprim, atunci câtul stâng $r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ este un preradical coprim pentru orice preradical $s \geq r$.*

Demonstraţie. Condiţia $r \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $r \,\backslash\!\!/\!.\, s$.

Fie preradicalul $r \neq 0$ este coprim şi $t_1 \# t_2 \geq r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ pentru preradicalii $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$. Aplicând Teorema 4.5 la relaţia $r \,\backslash\!\!/\!.\, s \leq t_1 \# t_2$, obţinem $r \leq (t_1 \# t_2) \cdot s$. Conform Lemei 2.15 avem relaţia $(t_1 \# t_2) \cdot s \leq (t_1 \cdot s) \# (t_2 \cdot s)$, prin urmare $r \leq (t_1 \cdot s) \# (t_2 \cdot s)$. Deoarece r este coprim, urmează că $r \leq t_1 \cdot s$ sau $r \leq t_2 \cdot s$. Aplicând Teorema 4.5 ambelor relaţii, obţinem $r \,\backslash\!\!/\!.\, s \leq t_1$ sau $r \,\backslash\!\!/\!.\, s \leq t_2$.

Deci pentru orice preradicali $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \# t_2 \geq r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ avem una din relaţiile $t_1 \geq r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ sau $t_2 \geq r \,\backslash\!\!/\!.\, s$, ceea ce înseamnă că preradicalul $r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ este coprim. □

Mai mult, conform Propoziţiei 4.18 dacă preradicalul r este coprim, atunci şi egalizatorul său $e\,(r)$ este un preradical coprim ([96], pag. 56).

Propoziţia 4.19 *Dacă preradicalul r este $\vee$-coprim, atunci câtul stâng $r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ este un preradical $\vee$-coprim pentru orice preradical $s \geq r$.*

Demonstraţie. Condiţia $r \leq s$ asigură existenţa câtului stâng $r \,\backslash\!\!/\!.\, s$.

Fie preradicalul r este $\vee$-coprim şi $t_1 \vee t_2 \geq r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ pentru preradicalii $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$. Aplicând Teorema 4.5 la relaţia $r \,\backslash\!\!/\!.\, s \leq t_1 \vee t_2$, obţinem $r \leq (t_1 \vee t_2) \cdot s$. Utilizând proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu reuniunea urmează că $r \leq (t_1 \cdot s) \vee (t_2 \cdot s)$. Deoarece preradicalul r este $\vee$-coprim, rezultă că $r \leq t_1 \cdot s$ sau $r \leq t_2 \cdot s$. Aplicând Teorema 4.5 ambelor relaţii, obţinem $r \,\backslash\!\!/\!.\, s \leq t_1$ sau $r \,\backslash\!\!/\!.\, s \leq t_2$.

Deci pentru orice preradicali $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \vee t_2 \geq r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ avem una din relaţiile $t_1 \geq r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ sau $t_2 \geq r \,\backslash\!\!/\!.\, s$, ceea ce înseamnă că preradicalul $r \,\backslash\!\!/\!.\, s$ este $\vee$-coprim. □

Mai mult, conform Propoziţiei 4.19 dacă preradicalul r este $\vee$-coprim, atunci şi egalizatorul său $e\,(r)$ este un preradical $\vee$-coprim ([96], pag. 66).

Propoziţia 4.20 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r = t \cdot s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$. *Dacă preradicalul* r *este coireductibil, atunci câtul stâng* $r \,/\!\!\cdot\, s$ *este un preradical coireductibil.*

Demonstraţie. Din condiţia $r = t \cdot s$ urmează că $r \leq s$, ceea ce asigură existenţa câtului stâng $r \,/\!\!\cdot\, s$.

Fie preradicalul r este coireductibil şi $r \,/\!\!\cdot\, s = t_1 \vee t_2$ pentru preradicalii $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$. Deoarece $r = t \cdot s$ pentru un preradical t, atunci conform Propoziţiei 4.17 avem relaţia $r = (r \,/\!\!\cdot\, s) \cdot s$, prin urmare $r = (t_1 \vee t_2) \cdot s$. Utilizând proprietatea de distributivitate a produsului preradicalilor în raport cu reuniunea, obţinem $r = (t_1 \cdot s) \vee (t_2 \cdot s)$. Deoarece preradicalul r este coireductibil, urmează că $t_1 \cdot s = r$ sau $t_2 \cdot s = r$.

Dacă $t_1 \cdot s = r$, atunci conform Teoremei 4.5, obţinem $t_1 \geq r \,/\!\!\cdot\, s$. Însă $t_1 \leq t_1 \vee t_2 = r \,/\!\!\cdot\, s$, prin urmare $t_1 = r \,/\!\!\cdot\, s$.

Dacă $t_2 \cdot s = r$, atunci în mod similar obţinem $t_2 = r \,/\!\!\cdot\, s$.

Deci pentru orice preradicali $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \vee t_2 = r \,/\!\!\cdot\, s$ avem relaţia $t_1 = r \,/\!\!\cdot\, s$ sau relaţia $t_2 = r \,/\!\!\cdot\, s$, ceea ce înseamnă că preradicalul $r \,/\!\!\cdot\, s$ este coireductibil. □

Mai mult, conform Propoziţiei 4.20 dacă preradicalul r este coireductibil, atunci şi egalizatorul său $e(r)$ este un preradical coireductibil ([96], pag.66).

Următoarea afirmaţie precizează aranjarea preradicalilor obţinuţi cu ajutorul operaţiei cercetate.

Corolarul 4.21

(1) *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *cu proprietatea* $r \leq s$ *au loc următoarele relaţii:*

$$r \cdot s \leq (r \cdot s) \,/\!\!\cdot\, s \leq r \leq (r \,/\!\!\cdot\, s) \cdot s \leq r \,/\!\!\cdot\, s;$$

(2) *Dacă preradicalul* s *este idempotent, atunci*

$$r \cdot s = (r \cdot s) \,/\!\!\cdot\, s \leq r \leq (r \,/\!\!\cdot\, s) \cdot s = r \,/\!\!\cdot\, s \leq s$$

pentru orice preradical $r \leq s$. □

4.4. Concluzii la capitolul 4

În **capitolul patru** a fost definită şi cercetată o operaţie nouă în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, **câtul stâng în raport cu intersecţia**. Spre deosebire de operaţiile definite şi cercetate în capitolele doi şi trei această operaţie este parţială, în sens că ea nu există pentru orice pereche de preradicali. Este indicat criteriul de existenţă al ei. Sunt arătate proprietăţile principale ale operaţiei definite şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul acestei operaţii. A fost determinată compatibilitatea noii operaţii cu operaţiile laticeale din laticea completă („mare") $\mathbb{PR}$ (intersecţia şi reuniunea preradicalilor). Este descris comportamentul acestei operaţii în cazul unor preradicali de tip special (preradicali idempotenţi, coprimi, $\vee$-coprimi, coireductibili). De asemenea, sunt studiate unele cazuri particulare ale operaţiei cercetate în acest capitol.

5. COCÂTUL STÂNG ÎN RAPORT CU REUNIUNEA

În acest capitol se defineşte şi se cercetează o nouă operaţie în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod. Ea este duală operaţiei definite şi studiate în capitolul patru. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în lucrările [69], [132] şi [133].

5.1. Definiţia şi proprietăţile principale ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea

Proprietatea de distributivitate a coprodusului în raport cu reuniunea ne permite de a defini o operaţie nouă în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$, şi anume, inversa la stânga a coprodusului în raport cu reuniunea. În acest compartiment se arată proprietăţile de bază ale ei şi legătura operaţiei definite cu cele laticeale din laticea completă („mare") $\mathbb{PR}$.

Definiţia 5.1. *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Vom numi* ***cocât stâng în raport cu reuniunea al lui*** r ***pe*** s *cel mai mare preradical dintre preradicalii* $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ *cu proprietatea* $r_\alpha \# s \leq r$. *Vom nota acest preradical prin* $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Vom spune, că r este *numărătorul*, iar s *numitorul* cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Acum vom determina existenţa şi forma de reprezentare a cocâtului stâng în raport cu reuniunea.

Lema 5.1 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Cocâtul stâng* $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ *există dacă şi numai dacă* $r \geq s$ *şi el poate fi reprezentat în forma* $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \vee \{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r\}$.

Demonstraţie. $(\Rightarrow)$ Presupunem că există cocâtul stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. Atunci există cel puţin un preradical $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ care posedă proprietatea $r_\alpha \# s \leq r$. Deoarece avem că $0 \leq r_\alpha$, conform proprietăţii de monotonie a coprodusului preradicalilor, rezultă că $0 \# s \leq r_\alpha \# s$, însă întrucât $0 \# s = s$, urmează $s \leq r_\alpha \# s$. Prin urmare, obţinem relaţia $s \leq r$.

$(\Leftarrow)$ Fie $r \geq s$. Deoarece $0 \# s = s$, urmează că $0 \# s \leq r$, prin urmare familia de preradicali $\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r\}$ nu este vidă. Deci putem considera preradicalul

$\vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r \}$. Utilizând proprietatea de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu reuniunea, obţinem $\left(\bigvee\limits_{r_\alpha \# s \leq r} r_\alpha \right) \# s = \bigvee\limits_{r_\alpha \# s \leq r} (r_\alpha \# s)$, însă deoarece $r_\alpha \# s \leq r$ pentru orice preradical r_α rezultă că $\bigvee\limits_{r_\alpha \# s \leq r} (r_\alpha \# s) \leq r$, prin urmare avem relaţia $\left(\bigvee\limits_{r_\alpha \# s \leq r} r_\alpha \right) \# s \leq r$. Mai mult, din construcţia preradicalului $\bigvee\limits_{r_\alpha \# s \leq r} r_\alpha$ este clar că el este cel mai mare preradical din clasa $\mathbb{PR}$ cu proprietatea $r_\alpha \# s \leq r$. Prin urmare $\vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r \} = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. $\square$

Din demonstraţia Lemei 5.1 conchidem următoarea relaţie $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \leq r$, pe care o vom întrebuinţa adesea pe parcursul acestui capitol.

Lema 5.2 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r \geq s$. *Atunci* $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r$.

Demonstraţie. Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Deoarece $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s$, iar din definiţia cocâtului stâng în raport cu reuniunea avem $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \leq r$, urmează $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r$. $\square$

Următoarele două afirmaţii arată legătura dintre cocâtul stâng în raport cu reuniunea şi relaţia de ordine $(\leq)$ din clasa $\mathbb{PR}$.

Propoziţia 5.3 *(Monotonie la numărător) Fie* $r_1, r_2 \in \mathbb{PR}$ *şi* $r_1 \leq r_2$. *Atunci pentru orice preradical* $s \leq r_1$ *avem* $r_1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r_2 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Demonstraţie. Deoarece $s \leq r_1 \leq r_2$, conform Lemei 5.1 există cocâturile stângi $r_1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, $r_2 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ şi $r_1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r_1 \}$, $r_2 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \vee \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \# s \leq r_2 \right\}$.

Din condiţiile $r_1 \leq r_2$ şi $r_\alpha \# s \leq r_1$ urmează relaţia $r_\alpha \# s \leq r_2$. Aceasta înseamnă că fiecare preradical r_α este unul dintre preradicalii r'_β, ceea ce implică relaţia $\vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r_1 \} \leq \vee \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \# s \leq r_2 \right\}$, prin urmare avem $r_1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r_2 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. $\square$

Propoziţia 5.4 *(Antimonotonie la numitor) Fie* $s_1, s_2 \in \mathbb{PR}$ *şi* $s_1 \leq s_2$. *Atunci pentru orice preradical* $r \geq s_2$ *avem* $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_1 \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_2$.

Demonstraţie. Deoarece $r \geq s_2 \geq s_1$, conform Lemei 5.1 există cocâturile stângi $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_1$, $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_2$ şi $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_1 = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s_1 \leq r \}$, $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_2 = \vee \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \# s_2 \leq r \right\}$.

Fie $s_1 \leq s_2$. Utilizând proprietatea de monotonie a coprodusului preradicalilor, obţinem $r'_\beta \# s_1 \leq r'_\beta \# s_2$, însă dacă $r'_\beta \# s_2 \leq r$, urmează $r'_\beta \# s_1 \leq r$. Aceasta înseamnă că fiecare preradical r'_β este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $\vee \left\{ r'_\beta \in \mathbb{PR} \,\middle|\, r'_\beta \# s_2 \leq r \right\} \leq \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s_1 \leq r \}$, prin urmare avem că $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_2 \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_1$. □

Următorul rezultat poate servi ca o altă definiţie a cocâtului stâng în raport cu reuniunea.

Teorema 5.5 *Fie $r, s \in \mathbb{PR}$ şi $r \geq s$. Atunci pentru orice preradical $t \in \mathbb{PR}$ avem:*

$$r \geq t \# s \Leftrightarrow r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq t.$$

Demonstraţie. Fie $r \geq s$. Atunci conform Lemei 5.1 există cocâtul stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ şi $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r \}$.

($\Rightarrow$) Fie $t \# s \leq r$. Aceasta înseamnă că preradicalul t este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $t \leq \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r \}$, adică $t \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

($\Leftarrow$) Fie $t \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. Utilizând proprietatea de monotonie a coprodusului preradicalilor, obţinem $t \# s \leq (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s$. Din definiţia cocâtului stâng în raport cu reuniunea avem $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \leq r$, prin urmare $t \# s \leq r$. □

Afirmaţiile ce urmează reprezintă unele proprietăţi ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea.

Propoziţia 5.6 *Pentru orice preradicali $r, s \in \mathbb{PR}$ avem:*

$$(r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq r.$$

Demonstraţie. Deoarece $r \# s \geq s$, conform Lemei 5.1 există câtul stâng $(r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ şi $(r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r \# s \}$.

Avem $r \# s \leq r \# s$. Acest fapt înseamnă că preradicalul r este unul dintre preradicalii r_α, ceea ce implică relaţia $r \leq \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \# s \leq r \# s \}$, prin urmare $r \leq (r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. □

Propoziţia 5.7 *Fie* $r, s, t \in \mathbb{PR}$. *Atunci următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $(r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t \;=\; r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, (t \,\#\, s)$ *pentru* $r \geq t \,\#\, s$;

2) $(r \,\#\, s) \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t \;\geq\; r \,\#\, (s \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t)$ *pentru* $s \geq t$.

Demonstraţie. 1) Condiţia $r \geq t \,\#\, s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, (t \,\#\, s)$. În acest caz, deoarece $t \,\#\, s \geq s$ rezultă că $r \geq s$, deci există cocâtul stâng $r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s$. Mai mult, din Teorema 5.5 $t \,\#\, s \leq r \Leftrightarrow r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s \geq t$, ceea ce asigură existenţa cocâtului stâng $(r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t$. Conform Lemei 5.1 avem $r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s = \vee \{ r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, s \leq r \}$, $r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, (t \,\#\, s) = \vee \{ s_\beta \in \mathbb{PR} \mid s_\beta \,\#\, (t \,\#\, s) \leq r \}$ şi $(r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t = \vee \{ t_\gamma \in \mathbb{PR} \mid t_\gamma \,\#\, t \leq r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s \}$.

($\leq$) Fie $t_\gamma \,\#\, t \leq r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s$. Utilizând proprietatea de monotonie a coprodusului preradicalilor, obţinem relaţia $(t_\gamma \,\#\, t) \,\#\, s \leq (r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s) \,\#\, s$, iar din definiţia cocâtului stâng în raport cu reuniunea avem $(r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s) \,\#\, s \leq r$, prin urmare $(t_\gamma \,\#\, t) \,\#\, s \leq r$. Conform proprietăţii de asociativitate a coprodusului preradicalilor, urmează că $t_\gamma \,\#\, (t \,\#\, s) \leq r$, ceea ce înseamnă că fiecare preradical t_γ este unul dintre preradicalii s_β. Acest fapt implică relaţia $\vee \{ t_\gamma \in \mathbb{PR} \mid t_\gamma \,\#\, t \leq r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s \} \leq \vee \{ s_\beta \in \mathbb{PR} \mid s_\beta \,\#\, (t \,\#\, s) \leq r \}$, adică $(r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t \;\leq\; r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, (t \,\#\, s)$.

($\geq$) Fie $s_\beta \,\#\, (t \,\#\, s) \;\leq\; r$. Utilizând proprietatea de asociativitate a coprodusului preradicalilor, obţinem relaţia $(s_\beta \,\#\, t) \,\#\, s \;\leq\; r$, însă $r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s$ este cel mai mare preradical dintre preradicalii $r_\alpha \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $r_\alpha \,\#\, s \;\leq\; r$, prin urmare $s_\beta \,\#\, t \leq r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s$. Aceasta înseamnă că preradicalul s_β este unul dintre preradicalii t_γ, ceea ce implică relaţia $\vee \{ s_\beta \in \mathbb{PR} \mid s_\beta \,\#\, (t \,\#\, s) \leq r \} \;\leq\; \vee \{ t_\gamma \in \mathbb{PR} \mid t_\gamma \,\#\, t \leq r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s \}$, adică $r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, (t \,\#\, s) \leq (r \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t$.

2) Condiţia $s \geq t$ asigură existenţa cocâtului stâng $s \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t$. Mai mult, deoarece avem $r \,\#\, s \geq s$ urmează relaţia $r \,\#\, s \geq t$, ceea ce asigură existenţa cocâtului stâng $(r \,\#\, s) \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t$.

Din definiţia cocâtului stâng în raport cu reuniunea avem $s \geq (s \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t) \,\#\, t$. Utilizând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale coprodusului preradicalilor, obţinem $r \,\#\, s \;\geq\; r \,\#\, [(s \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t) \,\#\, t] \;=\; [r \,\#\, (s \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t)] \,\#\, t$. Aplicând Teorema 5.5 la relaţia $r \,\#\, s \geq [r \,\#\, (s \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t)] \,\#\, t$ avem $(r \,\#\, s) \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t \;\geq\; r \,\#\, (s \,{}^{\vee}\!\!/_{\#}\, t)$. □

Propoziţia 5.8 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r \geq s$. *Atunci următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t) \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ *sau* $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t) \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t$ *pentru orice preradical* $t \leq s$;

2) $(r \# t) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \# t) \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ *sau* $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# (s \# t) \leq r \# t$ *pentru orice preradical* $t \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. 1) Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. În acest caz, dacă $t \leq s$, atunci $r \geq t$, prin urmare există cocâturile stângi $s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t$ şi $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t$. Mai mult, deoarece $r \geq s$, conform proprietăţii de monotonie la numărător a cocâtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t \geq s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t$, ceea ce asigură existenţa cocâtului stâng $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t)$.

Conform Teoremei 5.5 relaţiile din această afirmaţie sunt echivalente. Demonstrăm a doua relaţie.

Din definiţia cocâtului stâng în raport cu reuniunea avem $r \geq (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s$ şi $s \geq (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t) \# t$. Utilizând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale coprodusului preradicalilor, obţinem $r \geq (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \geq (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# [(s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t) \# t\,] = [(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t)] \# t$. Aplicând Teorema 5.5 la relaţia $r \geq [(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t)] \# t$ avem următorul rezultat $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t \geq (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, t)$.

2) Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. Mai mult, conform proprietaţii de monotonie a coprodusului preradicalilor avem $r \# t \geq s \# t$ pentru orice preradical $t \in \mathbb{PR}$, ceea ce implică existenţa cocâtului stâng $(r \# t) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \# t)$.

Conform Teoremei 5.5 relaţiile din această afirmaţie sunt echivalente. Demonstrăm a doua relaţie.

Din definiţia cocâtului stâng în raport cu reuniunea avem $r \geq (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s$. Utilizând proprietăţile de monotonie şi de asociativitate ale coprodusului preradicalilor, obţinem $r \# t \geq [(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s\,] \# t = (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# (s \# t)$. □

Următoarele afirmaţii arată legătura dintre cocâtul stâng în raport cu reuniunea şi operaţiile laticeale din clasa $\mathbb{PR}$.

Teorema 5.9 *(Distributivitatea câtului stâng $r\,{}^{\vee}\!/_{\#}\,s$ în raport cu intersecţia) Pentru orice preradical $s \in \mathbb{PR}$ şi orice familie de preradicali $\{r_\alpha \in \mathbb{PR} | \, r_\alpha \geq s, \, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ este adevărată următoarea afirmaţie:*

$$\left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s).$$

Demonstraţie. Relaţiile $r_\alpha \geq s, \, \alpha \in \mathfrak{A}$ asigură existenţa cocâturilor stângi $r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$. Însă în acest caz avem $\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \geq s$, deci există cocâtul stâng $\left(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

($\leq$) Conform Lemei 5.1 avem $\left(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \vee \left\{ t_\beta \in \mathbb{PR} \, | \; t_\beta \# s \leq \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \right\}$ şi $r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \vee \{ r'_\gamma \in \mathbb{PR} \, | \, r'_\gamma \# s \; \leq \; r_\alpha \}$.

Fie $t_\beta \# s \; \leq \; \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha$. Deoarece avem relaţia $\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \; \leq \; r_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, urmează că $t_\beta \# s \leq r_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce înseamnă că fiecare preradical t_β este unul dintre preradicalii r'_γ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$. Acest fapt implică relaţia $\vee \left\{ t_\beta \in \mathbb{PR} \, | \; t_\beta \# s \leq \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \right\} \; \leq \; \vee \{ r'_\gamma \in \mathbb{PR} \, | \, r'_\gamma \# s \; \leq \; r_\alpha \}$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, de unde urmează $\vee \left\{ t_\beta \in \mathbb{PR} \, | \; t_\beta \# s \leq \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \right\} \leq \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (\vee \{ r'_\gamma \in \mathbb{PR} \, | \, r'_\gamma \# s \; \leq \; r_\alpha \})$, adică avem $\left(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)$.

($\geq$) Din definiţia cocâtului stâng în raport cu reuniunea avem $r_\alpha \geq (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce implică relaţia $\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \; \geq \; \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} [(r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s]$. Conform proprietăţii de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu intersecţia, rezultă că $\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \; \geq \; \left[\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \right] \# s$ şi de unde aplicând Teorema 5.5, obţinem relaţia $\left(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)$. □

Propoziţia 5.10 *În clasa $\mathbb{PR}$ următoarele relaţii sunt adevărate:*

1) $\left(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq \bigvee\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)$ *pentru* $r_\alpha \geq s, \, \alpha \in \mathfrak{A}$*;*

2) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\! \left(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq \bigvee\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_\alpha)$ *pentru* $r \geq s_\alpha, \, \alpha \in \mathfrak{A}$*;*

3) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\! \left(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_\alpha)$ *pentru* $r \geq s_\alpha, \, \alpha \in \mathfrak{A}$.

Demonstraţie. 1) Condiţiile $r_\alpha \geq s$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ asigură existenţa cocâturilor stângi $r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. În acest caz avem $\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \geq s$, deci există cocâtul stâng $\left(\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Din definiţia cocâtului stâng în raport cu reuniunea avem $r_\alpha \geq (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,\#\, s$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce implică relaţia $\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \geq \bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} [(r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,\#\, s]$. Conform proprietăţii de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu reuniunea, rezultă că $\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha \geq \left[\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)\right] \# \, s$ şi de unde aplicând Teorema 5.5, obţinem relaţia $\left(\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} r_\alpha\right) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq \bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r_\alpha \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)$.

2) Condiţiile $r \geq s_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ asigură existenţa cocâturilor stângi $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$. Mai mult, în acest caz $r \geq \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha$, ceea ce implică existenţa cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#} \left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha\right)$.

Deoarece $\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha \leq s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, utilizând proprietatea de antimonotonie la numitor a cocâtului stâng în raport cu reuniunea, avem $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#} \left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce implică relaţia $r \,{}^{\wedge}\!/_{\#} \left(\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha\right) \geq \bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r \,{}^{\wedge}\!/_{\#}\, s_\alpha)$.

3) Condiţiile $r \geq s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$ asigură existenţa cocâturilor stângi $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$. În acest caz avem $r \geq \bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha$, ceea ce implică existenţa cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#} \left(\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha\right)$.

Pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$ avem $\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha \geq s_\alpha$. Utilizând proprietatea de antimonotonie la numitor a cocâtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem $r \,{}^{\vee}\!/_{\#} \left(\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_\alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathfrak{A}$, ceea ce implică relaţia $r \,{}^{\vee}\!/_{\#} \left(\bigvee_{\alpha \in \mathfrak{A}} s_\alpha\right) \leq \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s_\alpha)$. $\square$

5.2. Cazurile particulare ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea

În acest paragraf vom studia unele cazuri particulare ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Definiţia 5.2. ([93], pag. 204) ***Coegalizatorul*** *preradicalului* r *este preradicalul*

$$c\,(r) = \vee\,\{\,r_\alpha \in \mathbb{PR}\,|\,r_\alpha \# r = r\}.$$

Propoziţia 5.11 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci:*

1) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r = c\,(r)$;

2) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, 0 = r$;

3) $1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = 1$.

Demonstraţie. Conform definiţiei cocâtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem:

1) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r = \vee\,\{\,r_\alpha \in \mathbb{PR}\,|\; r_\alpha \# r \leq r\} = \vee\,\{\,r_\alpha \in \mathbb{PR}\,|\; r_\alpha \# r = r\} = c\,(r)$;

2) $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, 0 = \vee\,\{\,r_\alpha \in \mathbb{PR}\,|\; r_\alpha \# 0 \leq r\} = \vee\,\{\,r_\alpha \in \mathbb{PR}\,|\; r_\alpha \leq r\} = r$;

3) $1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = \vee\,\{\,r_\alpha \in \mathbb{PR}\,|\; r_\alpha \# s \leq 1\} = \vee\,\{\,r_\alpha\,|\; r_\alpha \in \mathbb{PR}\} = 1$. □

Din Propoziţia 5.11 avem următoarele cazuri particulare:

(1) $0 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, 0 = 0$; (2) $1 \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, 1 = 1$.

Dacă avem $r \geq s \geq 0$, aplicând proprietatea de antimonotonie la numitor a cocâtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, 0$, prin urmare avem $c\,(r) \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r$.

Mai mult, conform proprietaţii de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu reuniunea, obţinem:

$$c\,(r) \# r = \left(\bigvee_{r_\alpha \# r = r} r_\alpha \right) \# r = \bigvee_{r_\alpha \# r = r} (r_\alpha \# r) = r$$

pentru preradical $r \in \mathbb{PR}$.

Acum vom arăta unele proprietăţi ale coegalizatorului.

Propoziţia 5.12 *Dacă* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r \geq s$, *atunci:*

1) $c\,(r) \# \,(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$;

2) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# c\,(s) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$;

3) $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, c\,(s) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Demonstraţie. Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

1) Avem $c\,(r) \,\#\, (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) = (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) \,\#\, (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)$. Aplicând afirmaţia 1 a Propoziţiei 5.8, obţinem $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) \,\#\, (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, dar deoarece $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) \,\#\, (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, urmează că $c\,(r) \,\#\, (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

2) Avem $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,\#\, c\,(s) = (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,\#\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)$. Aplicând afirmaţia 1 a Propoziţiei 5.8, obţinem $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,\#\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, însă deoarece $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,\#\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, urmează că $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,\#\, c\,(s) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

3) Deoarece $r \geq s$, aplicând proprietatea de monotonie la numărător a cocâtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, ceea ce asigură existenţa cocâtului stâng $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)$, adică a cocâtului stâng $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, c\,(s)$.

Avem $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, c\,(s) = (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s)$. Utilizând afirmaţia 1 a Propoziţiei 5.8, obţinem $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, însă conform Lemei 5.2 $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, (s \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, prin urmare $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, c\,(s) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. $\square$

În continuare considerăm cazul proprietăţii unui preradical de a fi *radical.*

Remarca 5.13 ([93], pag. 204) *Pentru orice preradical* $r \in \mathbb{PR}$ *coegalizatorul său* $c\,(r)$ *este un radical.*

Demonstraţie. Avem $c\,(r) \,\#\, c\,(r) = (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) \,\#\, (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r)$. Aplicând afirmaţia 1 a Propoziţiei 5.8, obţinem $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) \,\#\, (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r$, dar deoarece $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) \,\#\, (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r$, urmează că $(r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) \,\#\, (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r) = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, r$, adică $c\,(r) \,\#\, c\,(r) = c\,(r)$. Aceasta înseamnă că preradicalul $c\,(r)$ este un radical. $\square$

Propoziţia 5.14 *Preradicalul* r *este un radical dacă şi numai dacă* $c\,(r) = r$.

Demonstraţie. $(\Rightarrow)$ Prin definiţie coegalizatorul preradicalului r are forma $c\,(r) = \vee\,\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, r = r\}$. Fie preradicalul r este un radical, adică $r \,\#\, r = r$, ceea ce înseamnă că preradicalul r este unul dintre preradicalii r_α. Acest fapt implică relaţia $r \leq \vee\,\{r_\alpha \in \mathbb{PR} \mid r_\alpha \,\#\, r = r\}$, adică $r \leq c\,(r)$, însă am arătat mai sus că $c\,(r) \leq r$, prin urmare $c\,(r) = r$.

$(\Leftarrow)$ Fie $c\,(r) = r$. Atunci $r \,\#\, r = c\,(r) \,\#\, r$, dar mai sus am arătat că $c\,(r) \,\#\, r = r$, prin urmare $r \,\#\, r = r$, ceea ce înseamnă că preradicalul r este un radical. $\square$

Mai mult, deoarece $c\,(r) \leq r \check{/}_{\#}\, s \leq r$, dacă preradicalul r este un radical, atunci $r \check{/}_{\#}\, s = r$ pentru orice preradical $s \leq r$.

Propoziţia 5.15 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* s *este un radical. Atunci:*

1) $r \check{/}_{\#}\, s \geq s$ *pentru* $r \geq s$;

2) $(r \check{/}_{\#}\, s) \# s = r \check{/}_{\#}\, s$ *pentru* $r \geq s$;

3) $(r \check{/}_{\#}\, s) \check{/}_{\#}\, s = r \check{/}_{\#}\, s$ *pentru* $r \geq s$;

4) $(r \# s) \check{/}_{\#}\, s = r \# s$.

Demonstraţie. 1) Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \check{/}_{\#}\, s$.

Deoarece $r \geq s$, utilizând proprietatea de monotonie la numărător a cocâtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem relaţia $r \check{/}_{\#}\, s \geq s \check{/}_{\#}\, s$, adică $r \check{/}_{\#}\, s \geq c\,(s)$. Dacă preradicalul s este un radical, atunci conform Propoziţiei 5.14 urmează $r \,\gamma.\, s \geq s$.

2) Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \check{/}_{\#}\, s$.

Dacă preradicalul s este un radical, atunci conform Propoziţiei 5.14 urmează relaţia $(r \check{/}_{\#}\, s) \# s = (r \check{/}_{\#}\, s) \# c\,(s)$, însă din Propoziţia 5.12 avem $(r \check{/}_{\#}\, s) \# c\,(s) = r \check{/}_{\#}\, s$, prin urmare $(r \check{/}_{\#}\, s) \# s = r \check{/}_{\#}\, s$.

3) Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \check{/}_{\#}\, s$. Mai mult, din afirmaţia 1 a acestei propoziţii urmează că $r \check{/}_{\#}\, s \geq s$, ceea ce implică existenţa cocâtului stâng $(r \check{/}_{\#}\, s) \check{/}_{\#}\, s$.

Conform afirmaţiei 1 a Propoziţiei 5.7 avem $(r \check{/}_{\#}\, s) \check{/}_{\#}\, s = r \check{/}_{\#}\, (s \# s)$. Dacă s este un radical, atunci $(r \check{/}_{\#}\, s) \check{/}_{\#}\, s = r \check{/}_{\#}\, s$.

4) Deoarece $r \# s \geq s$, urmează că există cocâtul stâng $(r \# s) \check{/}_{\#}\, s$.

Conform afirmaţiei 2 a Propoziţiei 5.7, obţinem $(r \# s) \check{/}_{\#}\, s \geq r \# (s \check{/}_{\#}\, s)$. Dacă s este un radical, atunci $(r \# s) \check{/}_{\#}\, s \geq r \# s$. Însă din Lemma 5.2 avem $(r \# s) \check{/}_{\#}\, s \leq r \# s$, prin urmare $(r \# s) \check{/}_{\#}\, s = r \# s$. $\square$

5.3. Comportamentul cocâtului stâng în raport cu reuniunea în cazul unor tipuri speciale de preradicali

Următoarele două afirmaţii arată când are loc egalitatea în unele proprietăţi ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea (vezi Propoziţia 5.6).

Propoziţia 5.16 *Fie preradicalii* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r = (r \# s) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

2) $r = t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ *pentru un preradical* $t \geq s$.

Demonstraţie. Condiţia $t \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. Deoarece $r \# s \geq s$, urmează că există cocâtul stâng $(r \# s) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

1) $\Rightarrow$ 2) Fie $r = (r \# s) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. Atunci $r = t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ pentru $t = r \# s$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r = t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ pentru un preradical $t \geq s$. Din definiţia cocâtului stâng în raport cu reuniunea avem $(t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \leq t$. Aplicând proprietatea de monotonie la numărător a cocâtului stâng în raport cu reuniunea, obţinem relaţia $[(t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s] {}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, însă conform Propoziţiei 5.6 urmează $[(t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s] {}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, prin urmare $[(t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s] {}^{\vee}\!/_{\#}\, s = t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$. Deoarece $t {}^{\vee}\!/_{\#}\, s = r$ avem $(r \# s) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s = r$. □

Propoziţia 5.17 *Fie preradicalii* $r, s \in \mathbb{PR}$. *Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1) $r = (r {}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s$ *pentru* $r \geq s$.

2) $r = t \# s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$.

Demonstraţie. Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

1) $\Rightarrow$ 2) Fie $r = (r {}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s$. Atunci $r = t \# s$ pentru $t = r {}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $r = t \# s$ pentru un preradical $t \in \mathbb{PR}$. Din Propoziţia 5.6 avem relaţia $(t \# s) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq t$. Utilizând proprietatea de monotonie la numărător a coprodusului preradicalilor, obţinem $[(t \# s) {}^{\vee}\!/_{\#}\, s] \# s \geq t \# s$, însă conform definiţiei cocâtului stâng

în raport cu reuniunea $[(t \# s) \curlyvee_{\#} s] \# s \leq t \# s$, prin urmare $[(t \# s) \curlyvee_{\#} s] \# s = t \# s$. Deoarece $t \# s = r$ avem $(r \curlyvee_{\#} s) \# s = r$. $\square$

Acum vom arăta comportamentul cocâtului stâng în raport cu reuniunea în cazul unor preradicali de tip special (preradicali primi, $\wedge$ - primi, ireductibili).

Propoziţia 5.18 *Dacă preradicalul r este prim, atunci preradicalul $r \curlyvee_{\#} s$ este prim pentru orice preradical $s \leq r$.*

Demonstraţie. Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \curlyvee_{\#} s$.

Fie preradicalul $r \neq 1$ este prim şi $t_1 \cdot t_2 \leq r \curlyvee_{\#} s$ pentru preradicalii $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$. Conform Teoremei 5.5 urmează $r \geq (t_1 \cdot t_2) \# s$. Utilizând afirmaţia 1 a Lemei 2.15, obţinem $(t_1 \cdot t_2) \# s \geq (t_1 \# s) \cdot (t_2 \# s)$, prin urmare $r \geq (t_1 \# s) \cdot (t_2 \# s)$. Deoarece r este prim, urmează că $r \geq t_1 \# s$ sau $r \geq t_2 \# s$. Aplicând Teorema 5.5 ambelor relaţii, obţinem $r \curlyvee_{\#} s \geq t_1$ sau $r \curlyvee_{\#} s \geq t_2$.

Deci pentru orice preradicali $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \cdot t_2 \leq r \curlyvee_{\#} s$ avem una din relaţiile $t_1 \leq r \curlyvee_{\#} s$ sau $t_2 \leq r \curlyvee_{\#} s$, acest fapt şi înseamnă că preradicalul $r \curlyvee_{\#} s$ este prim. $\square$

Mai mult, conform Propoziţiei 5.18 dacă preradicalul r este prim, atunci şi coegalizatorul său $c(r)$ este un preradical prim ([95], pag. 454).

Propoziţia 5.19 *Dacă preradicalul r este $\wedge$-prim, atunci preradicalul $r \curlyvee_{\#} s$ este $\wedge$-prim pentru orice preradical $s \leq r$.*

Demonstraţie. Condiţia $r \geq s$ asigură existenţa cocâtului stâng $r \curlyvee_{\#} s$.

Fie preradicalul r este $\wedge$-prim şi $t_1 \wedge t_2 \leq r \curlyvee_{\#} s$ pentru preradicalii $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$. Conform Teoremei 5.5 urmează relaţia $r \geq (t_1 \wedge t_2) \# s$. Utilizând proprietatea de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu intersecţia, obţinem că $r \geq (t_1 \# s) \wedge (t_2 \# s)$. Deoarece preradicalul r este $\wedge$-prim, rezultă că $r \geq t_1 \# s$ sau $r \geq t_2 \# s$. Aplicând Teoremei 5.5 ambelor relaţii avem $r \curlyvee_{\#} s \geq t_1$ sau $r \curlyvee_{\#} s \geq t_2$.

Deci pentru orice preradicali $t_1, t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \wedge t_2 \leq r \curlyvee_{\#} s$ avem relaţia $t_1 \leq r \curlyvee_{\#} s$ sau relaţia $t_2 \leq r \curlyvee_{\#} s$, ceea ce înseamnă că preradicalul $r \curlyvee_{\#} s$ este $\wedge$-prim. $\square$

Mai mult, conform Propoziţiei 5.19 dacă preradicalul r este $\wedge$-prim, atunci şi coegalizatorul său $c(r)$ este un preradical $\wedge$-prim ([95], pag. 463).

Propoziţia 5.20 *Fie* $r, s \in \mathbb{PR}$ *şi* $r = t \# s$ *pentru un preradical* $t \in \mathbb{PR}$. *Dacă preradicalul* r *este ireductibil, atunci preradicalul* $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ *este ireductibil.*

Demonstraţie. Din condiţia $r = t \# s$ urmează $r \geq s$, ceea ce asigură existenţa cocâtului stâng $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$.

Fie preradicalul r este ireductibil şi avem $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = t_1 \wedge t_2$ pentru preradicalii t_1, $t_2 \in \mathbb{PR}$. Dacă $r = t \# s$ pentru un preradical t, atunci din Propoziţia 5.17 avem $r = (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s$, prin urmare $r = (t_1 \wedge t_2) \# s$. Utilizând proprietatea de distributivitate a coprodusului preradicalilor în raport cu intersecţia, obţinem $r = (t_1 \# s) \wedge (t_2 \# s)$. Deoarece preradicalul r este ireductibil, rezultă că $r = t_1 \# s$ sau $r = t_2 \# s$. Aplicând Teorema 5.5 ambelor relaţii urmează $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq t_1$ sau $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \geq t_2$. Însă $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = t_1 \wedge t_2$, ceea ce implică $t_1 \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ şi $t_2 \geq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, prin urmare obţinem $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = t_1$ sau $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = t_2$.

Deci pentru orice preradicali t_1, $t_2 \in \mathbb{PR}$ cu proprietatea $t_1 \wedge t_2 = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ avem una din relaţiile $t_1 = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ sau $t_2 = r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$, ceea ce înseamnă că preradicalul $r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s$ este ireductibil. $\square$

Mai mult, conform Propoziţiei 5.20 dacă preradicalul r este ireductibil, atunci şi coegalizatorul său $c(r)$ este un preradical ireductibil ([95], pag.463).

Următoarea afirmaţie indică aranjarea noilor preradicali obţinuţi cu ajutorul operaţiei studiate în acest capitol.

Corolarul 5.21

(1) *Pentru orice preradicali* $r, s \in \mathbb{PR}$ *cu proprietatea* $r \geq s$ *au loc următoarele relaţii:*

$$r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \leq r \leq (r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s \leq r \# s;$$

(2) *Dacă* s *este un radical, atunci:*

$$s \leq r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = (r \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s) \# s \leq r \leq (r \# s) \,{}^{\vee}\!/_{\#}\, s = r \# s$$

pentru orice preradical $r \geq s$. $\square$

5.4. Concluzii la capitolul 5

În **capitolul cinci** a fost definită şi cercetată o operaţie nouă în clasa preradicalilor $\mathbb{PR}$ a categoriei R-modulelor stângi R-Mod, şi anume, **cocâtul stâng în raport cu reuniunea**. Ea este duală operaţiei definite şi cercetate în capitolul patru. Este stabilit criteriul de existenţă al ei şi sunt arătate proprietăţile principale ale ei şi ale preradicalilor obţinuţi în rezultatul acestei operaţii. A fost determinată compatibilitatea operaţiei definite cu operaţiile laticeale din laticea completă „mare" $\mathbb{PR}$ (intersecţia şi reuniunea preradicalilor). Este descrisă comportarea noii operaţii în cazul unor preradicali de tip special (preradicali primi, $\wedge$- primi, ireductibili, radical). Mai mult, sunt studiate unele cazuri particulare ale operaţiei introduse în acest capitol.

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

Problema de bază a algebrei este studiul structurilor algebrice (grupuri, inele, câmpuri, module, latice, categorii etc.) şi a legăturilor dintre aceste structuri algebrice. Acest lucru poate fi efectuat numai cercetând legile generale ale operaţiilor din structurile algebrice respective. Prin urmare, având mai multe operaţii acest studiu poate fi făcut mai minuţios, mai amplu, mai efectiv.

În prezenta lucrare sunt introduse unele noi construcţii în teoria radicalilor în module, şi anume, sunt definite şi studiate patru operaţii noi în clasa preradicalilor unei categorii de module, ceea ce a condus la îmbogăţirea rezervei instrumentale de lucru în clasa preradicalilor unei categorii de module şi reprezintă scopul acestei lucrări.

Rezultatele principale elaborate în domeniul teoriei radicalilor unei categorii de module din această lucrare sunt noi. Cercetările realizate în lucrare se referă la obiectivele propuse pentru investigaţie şi ne permit să formulăm următoarele concluzii şi recomandări.

Concluzii generale:

1. Au fost definite şi studiate două operaţii noi **complete** (în sens că există pentru orice pereche de preradicali) în clasa preradicalilor unei categorii de module, şi anume, *câtul stâng în raport cu reuniunea* şi *cocâtul stâng în raport cu intersecţia*. Au fost determinate proprietăţile principale ale lor şi ale preradicalilor noi obţinuţi în rezultatul efectuării acestor construcţii. S-a arătat compatibilitatea operaţiilor noi definite cu cele laticeale din clasa $\mathbb{PR}$ (intersecţia şi reuniunea) ([66], [67], [129], [130], [133]).

2. Au fost cercetate unele cazuri particulare ale câtului stâng în raport cu reuniunea şi ale cocâtului stâng în raport cu intersecţia. S-au stabilit relaţiile dintre aceste operaţii noi şi unele noţiuni şi construcţii cunoscute din teoria radicalilor (pseudocomplement şi suplement). A fost descris comportamentul câtului stâng în raport cu reuniunea în cazul preradicalilor primi, $\wedge$-primi, ireductibili şi al cocâtului stâng în raport cu intersecţia în cazul preradicalilor coprimi, $\vee$-coprimi, coireductibili ([66], [67], [129], [130], [133]).

3. A fost demonstrat, că operaţia *rest drept*, introdusă şi studiată de J. Golan în monografia „Linear topologies on a ring” pentru filtre preradicale, reprezintă un caz particular al operaţiei *cocâtul stâng în raport cu intersecţia* definită şi cercetată în această lucrare în caz general pentru preradicali ([68]).

4. Au fost introduse şi cercetate două operaţii noi **parţiale** în clasa preradicalilor unei categorii de module, şi anume, *câtul stâng în raport cu intersecţia* şi *cocâtul stâng în raport cu reuniunea*. Au fost determinate criteriile de existenţă şi proprietăţile de

bază ale lor şi ale preradicalilor noi obţinuţi în rezultatul aplicării acestor construcţii. S-au stabilit relaţiile dintre aceste noi operaţii definite şi cele laticeale din clasa $\mathbb{PR}$ ([69], [131], [132], [133]).

5. Au fost determinate şi studiate unele cazuri particulare ale câtului stâng în raport cu intersecţia şi ale cocâtului stâng în raport cu reuniunea. A fost stabilit comportamentul câtului stâng în raport cu reuniunea în cazul preradicalilor primi, $\wedge$-primi, ireductibili, idempotenţi şi al cocâtului stâng în raport cu intersecţia în cazul preradicalilor coprimi, $\vee$-coprimi, coireductibili, radicalilor ([69], [131], [132], [133]).

Prin urmare toate obiectivele tezei sunt realizate.

Rezultatele autorului, care se referă la tema lucrării sunt publicate în [66 – 69; 129 – 133].

Teza propusă spre susţinere conţine soluţionarea completă a problemei introducerii şi cercetării unor noi operaţii în clasa preradicalilor unei categorii de module.

Recomandări:

1. Rezultatele tezei pot constitui conţinutul unor cursuri speciale pentru masteranzi şi doctoranzi de la specialităţile matematice şi pot servi drept suport pentru unele teze de licenţă şi masterat.

2. Rezultatele obţinute pot fi utilizate la studierea şi dezvoltarea de mai departe a teoriei radicalilor în module, la cercetarea problemelor de tip structural în teoria inelelor.

3. Aceste rezultate pot fi generalizate în alte cazuri: în clasa operatorilor de închidere, în categorii abeliene şi în alte tipuri de categorii.

BIBLIOGRAFIE

1. ANDERSON, F.W., FULLER, K.R. *Rings and categories of modules.* second ed. New York: Springer-Verlag, 1992. 378 p. ISBN 978-1-4612-4418-9.
2. BICAN, L., KEPKA, T., NEMEC, P. *Rings, modules and preradicals.* Lect. Notes in Pure and Appl. Math., vol. 75, New York: Marcel Dekker, 1982. 241 p. ISBN 978-0824715687.
3. CAŞU, A.I. *Introducere în teoria modulelor.* Chişinău: CEP USM, 2003. 154 p. ISBN 9975-70-259-7.
4. DIVINSKY, N.J. *Rings and radicals.* Univ. of Toronto Press, 1965. 160 p. ISBN 978-0045120031.
5. FAITH, C. *Algebra: rings, modules and categories I.* New York: Springer-Verlag, 1973. 568 p. ISBN 978-3-642-80634-6. (traducere în rusă în 1977)
6. FAITH, C. *Algebra: rings, modules and categories II.* New York: Springer-Verlag, 1976. 302 p. ISBN 978-3-642-65321-6. (traducere în rusă în 1979)
7. GABRIEL, P. *Des categories abeliennes.* In: Bull. Soc. Math. France, vol. 90, 1962, pp. 323-448.
8. GARDNER, B.J., WIEGANDT, R. *Radical Theory of Rings.* New York: Marcel Dekker, Inc., 2004. 408 p. ISBN 978-0824750336.
9. GOLAN, J.S. *Localization of noncommutative rings.* New York: Marcel Dekker, 1975. 352 p. ISBN 978-0824761981.
10. GOLAN, J.S. *Torsion theories.* New York: Longman Scientific and Technical, 1986. 651 p. ISBN 978-0470203675.
11. GOLAN, J.S. *Linear topologies on a ring: an overview.* New York: Longman Scientific and Technical, 1987. 104 p. ISBN 978-0582013131.
12. GUŢAN, M., GUŢAN, C., RADU, Gh., ŞTEFĂNESCU, M. *Preradicali şi teorii de torsiune.* Iaşi: Univ. „Al.I. Cuza”, 1986. 158 p.

13. HERRLICH, H., STRECKER, G.E. *Category theory* (an introduction). Berlin: Heldermann Verlag, 1979. 400 p. ISBN 978-3885380016.

14. HERSTEIN, I.N. *Noncommutative rings.* The Carus Math. Monographs. Mathematical Association of America, vol. 15, 1968. 199 p. ISBN 978-0883850008. (traducere în rusă în 1972)

15. LAMBEK, J. *Torsion theories, additive semantics and rings of quotients.* Lect. Notes in Math., vol. 117, Springer Berlin Heidelberg, 1971. 104 p. ISBN 978-3540053408.

16. MAC LANE, S. *Categories for the working Mathematician.* New York: Springer-Verlag, 1971. 262 p. ISBN 978-1-4612-9839-7.

17. MISINA, A.P., SKORNJAKOV, L.A. *Abelian groups and modules.* American Math. Soc., vol. 107 (series 2), Providence, Rhode Island, 1976. 160 p. ISBN 978-0821830574.

18. NĂSTĂSESCU, C. *Inele. Module. Categorii.* Bucureşti: Ed. Acad. RSR, 1976. 304 p.

19. POPESCU, N. *Categorii abeliene.* Bucureşti: Ed. Acad. RSR, 1971. 312 p.

20. POPESCU, N. *Abelian categories with applications to rings and modules.* London: Acad. Press., 1973. 467 p. ISBN 978-0125615501.

21. STENSTRÖM, B. *Rings and modules of quotients.* Lect. Notes in Math., vol. 237, New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971. 138 p. ISBN 978-3-540-37002-4.

22. STENSTRÖM, B., *Rings of quotients.* New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975. 309 p. ISBN 978-3540071174.

23. WISBAUER, R. *Foundations of module and ring theory.* Philadelfia: Gordon and Breach Sci. Publ., 1991. 606 p. ISBN 978-2881248054.

24. АНДРУНАКИЕВИЧ, В.А., РЯБУХИН, Ю.М. *Радикалы алгебр и структурная теория.* Москва: Изд-во Наука, 1979. 496 с.

25. ДЖЕКОБСОН, Н. *Строение колец*. Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 392 с.

26. КАШ, Ф. *Модули и кольца.* Москва: Изд-во Мир, 1981. 368 с.

27. КАШУ, А.И. *Радикалы и кручения в модулях.* Кишинёв: Штиинца, 1983. 156 с.

28. Кашу А.И., *Функторы и кручения в категории модулей.* Кишинёв: Изд-во Академии Наук РМ, 1997. 267 с.

29. ЛАМБЕК, И. *Кольца и модули.* Москва: Изд-во Мир, 1971. 280 с.

30. МИШИНА, А.П., СКОРНЯКОВ, Л.А. *Абелевы группы и модули.* Москва: Изд-во Наука, 1969. 95 с.

31. ЦАЛЕНКО, М.Ш., ШУЛЬГЕЙФЕР, Е.Г. *Основы теории категорий*, Изд-во Наука, Москва, 1974. 256 с.

32. ALBU, T., IOSIF, M. Lattice preradicals with applications to Grothendieck categories and torsion theories. In: *Journal of Algebra.* 2015, vol. 444, pp. 339-366. ISSN 0021-8693.

33. ALBU, T., IOSIF, M. Lattice preradicals versus module preradicals. In: *Ann. Univ. Buchar. Math.* 2015, Ser. 6 (LXIV), no. 1, pp. 19-34. ISSN 2067-9009.

34. ALBU, T., IOSIF, M. Modular C11 lattices and lattice preradicals. In: *Journal of Algebra and Its Applic.* 2017, vol. 16, no. 6, 19 p. ISSN 0219-4988.

35. ALBU, T., PEREZ, J.R., MONTES, J.R. The lattice structure of all lattice preradicals on modular complete lattices, and applications (I). In: *Bull. Math. de la Societe des Sc. Math. de Roumanie.* 2019, vol. 62, Issue 1, pp. 3-20. ISSN 1220-3874.

36. AMITSUR, S.A. A general theory of radicals, I. In: *Amer. Journal of Math.* 1952, vol. 74, pp. 774-786. ISSN 0002-9327.

37. AMITSUR, S.A. A general theory of radicals, II. In: *Amer. Journal of Math.* 1954, vol. 76, pp. 100-125. ISSN 0002-9327.

38. ARMENDARIZ, E.P., LEAVITT, W.G. The hereditary property in the lower radical construction. In: *Canad. Journal of Math.* 1968, vol. 20, pp. 474-476. ISSN 0008-414X.

39. BAER, R. Radicals ideals. In: *Amer. Journal of Math.* 1943, vol. 65, no. 4, pp. 537-568. ISSN 0002-9327.

40. BEACHY, J.A. Some aspects of noncommutative localization. In: *Lect. Notes Math.* 1976, vol. 545, pp. 2-31. ISSN 0075-8434.

41. BICAN, L. The lattice of radicals filters of a commutative noetherian ring. In: *Comment. Math. Univ. Carolinae*. 1971, vol. 12, pp. 53-59. ISSN 0010-2628.

42. BICAN, L. QF-3' modules and rings. In: *Comment. Math. Univ. Carolinae*. 1973, vol. 14, p. 295-303. ISSN 0010-2628.

43. BICAN, L. Preradicals and injectivity. In: *Pacific Journal Math.* 1975, vol. 56, pp. 367-372. ISSN 0030-8730.

44. BICAN, L. Kulikov's criterion for modules. In: *Journal Reine Angew. Math.* 1976, no. 288, pp. 154-159. ISSN 0075-4102.

45. BICAN, L. Corational extensions and pseudo-projective modules. In: *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1976, vol. 28, pp. 5-11. ISSN 0001-5954.

46. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. On rings with trivial torsion parts. In: *Bull. Austral. Math. Soc.* 1973, vol. 9, pp. 275-290. ISSN 0004-9727.

47. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. Preradicals. In: *Comment. Math. Univ. Carolinae*. 1974, vol. 15, pp. 75-83. ISSN 0010-2628.

48. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. Composition of preradicals. In: *Comment. Math. Univ. Carolinae*. 1974, vol. 15, pp. 393-405. ISSN 0010-2628.

49. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. Preradicals and change of rings. In: *Comment. Math. Univ. Carolinae*. 1975, vol. 16, pp. 201-217. ISSN 0010-2628.

50. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. Stable and costable preradicals. In: *Acta Univ. Carolinae Math. Phys.* 1975, vol. 16, pp. 63-69. ISSN 0001-7140.

51. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. Hereditary and cohereditary preradicals. In: *Czech. Math. Journal.* 1976, vol. 26, pp. 192-206. ISSN 0011-4642.

52. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. Centrally splitting radicals. In: *Comment. Math. Univ. Carolinae.* 1976, vol. 17, pp. 31-47. ISSN 0010-2628.

53. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. A note on test modules. In: *Comment. Math. Univ. Carolinae.* 1976, vol. 17, pp. 345-355. ISSN 0010-2628.

54. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. Generation of preradicals. In: *Czech. Math. Journal.* 1977, vol. 27, p. 155-166. ISSN 0011-4642.

55. BICAN, L., JAMBOR, P., KEPKA, T., NEMEC, P. Pseudoprojective modules. In: *Math. Slovaca.* 1979, vol. 29, pp. 106-115. ISSN 0025-5173.

56. BICAN, L., KEPKA, T. On stable rings. In: *Publ. Math. Debrecen.* 1975, vol. 22, pp. 235-244. ISSN 0033 - 3883.

57. BICAN, L., KEPKA, T., NEMEC, P. Torsion theories and homological dimensions. In: *Journal of Algebra.* 1975, vol. 35, pp. 99-122. ISSN 0021-8693.

58. BROWN, B., McCoy, N.H. The radical of a ring. In: *Duke Math. Journal.* 1948, vol. 15, nr. 2, pp. 495-499. ISSN 0012-7094.

59. CASTRO, J., RAGGI, F., RIOS, J., JOHN VAN DER BERG. On atomic dimension in module categories. In: *Commun. in Algebra.* 2005, vol. 33, pp. 4679-4692. ISSN 0092-7872.

60. DICKSON, S.E. A torsion theory for Abelian categories. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 1966, vol. 121, no. 1, pp. 223-235. ISSN 0002-9947.

61. GABRIEL, P., POPESCU, N. Caracterisation des categories abeliennes avec generateurs et limites inductives exactes. In: *C. R. Acad. Science Paris.* 1964, no. 258, 1964, p. 4188-4190. ISSN 0764-4442.

62. GARDNER, B.J. Some degeneracy and pathology in non-associative radical theory. In: *Ann. Univ. Sci. Budapest.* 1979/80, vol. 22-23, pp. 65-74. ISSN 0524-9007.

63. GARDNER, B.J. Radicals related to the Brown-McCoy radical in some varietes of algebras. In: *Journal of the Austral. Math. Soc. Ser.A.* 1979, vol. 28, pp. 283-294. ISSN 1446-7887.

64. GOLDMAN, O. Rings and modules of quotients. In: *Journal of Algebra.* 1969, vol. 13, no. 1, pp. 10-47. ISSN 0021-8693.

65. JANS, J.P. Some aspects of torsion. In: *Pacific Journal Math.* 1965, vol. 15, no. 4, pp. 1249-1259. ISSN 0030-8730.

66. **JARDAN, I.** On the inverse operations in the class of preradicals of a module category, I. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Mat.* 2017, vol. 83, no. 1, pp. 57-66. ISSN 1024-7696.

67. **JARDAN, I.** On the inverse operations in the class of preradicals of a module category, II. In: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Mat.* 2017, vol. 84, no. 2, pp. 77-86. ISSN 1024-7696.

68. **JARDAN, I.** Left coquotient wiht respect to meet in the case of pretorsions in R-Mod. In: *Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4*, June 28–July 2, 2017, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 95-98. ISBN 978-9975-71-915-5.

69. **JARDAN, I.** On partial inverse operations in the class of preradicals of modules. In: *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa.* 2019, vol. 27, no. 2, pp. 15-36. ISSN 1224-1784.

70. KASHU, A.I. Preradicals and characteristic submodules: connections and operations. In: *Algebra and Discrete Math.* 2010, vol. 9, no. 2, pp. 61-71. ISSN 1726-3255.

71. KASHU, A.I. On some operations in the lattice of submodules determined by preradicals. In: *Bul. Acad. Şt. Repub. Mold., Mat.* 2011, vol. 66, no. 2, pp. 5-16. ISSN 1024-7696.

72. KASHU, A.I. On inverse operations in the lattices of submodules. In: *Algebra and Discrete Math.* 2012, vol. 13, no. 2, pp. 273-288. ISSN 1726-3255.

73. KASHU, A.I. On partial inverse operations in the lattices of submodules. In: *Bul. Acad. Şt. Repub. Mold., Mat.* 2012, vol. 69, no. 2, pp. 59-73. ISSN 1024-7696.

74. KASHU, A.I. A survay of results on radicals and torsions in modules. In: *Algebra and Discrete Math.* 2016, vol. 21, no. 1, pp. 69-100. ISSN 1726-3255.

75. KASHU, A.I. Pretorsions in modules and associated closure operators. In: *Bul. Acad. Şt. Repub. Mold., Mat.* 2017, vol. 84, no. 2, pp. 24-41. ISSN 1024-7696.

76. KASHU, A.I. On some new characterizations of pretorsions of a module category. In: *Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4*, June 28–July 2, 2017, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 99-100. ISBN 978-9975-71-915-5.

77. KASHU, A.I. Morita contexts and closure operators in modules. In: *Bul. Acad. Şt. Repub. Mold., Mat.* 2019, vol. 89, no. 1, pp. 109-122. ISSN 1024-7696.

78. KATO, T. Duality between colocalization and localization. In: *Journal of Algebra.* 1978, vol. 55, no. 2, pp. 551-574. ISSN 0021-8693.

79. KÖTHE, G. Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist. In: *Math. Zeit.*. 1930, vol. 32, pp. 161-186. ISSN 0025-5874.

80. KURATA, Y. On an n-fold torsion theory in the category R_M. In: *Journal of Algebra.* 1972, vol. 22, pp. 559-572. ISSN 0021-8693.

81. LEVITZKI, J. On the radical of a general ring. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 1943, vol. 49, no. 6, pp. 462-466. ISSN 0273-0979.

82. MARANDA, J.M. Injective structures. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 1966, vol. 110, no. 1, pp. 98-135. ISSN 0002-9947.

83. MARKI, L., MLITZ, R., WIEGANDT, R. A general Kurosh-Amitsur radical theory. In: *Commun. in Algebra.* 1988, vol. 16, no. 2, pp. 249-305. ISSN 0092-7872.

84. MC Master, R.J. Cotorsion theories and colocalization. In: *Canadian Journal of Math.* 1975, vol. 27, no. 3, pp. 618-628. ISSN 0008-414X.

85. MORITA, K. Localizations in categories of modules I. In: *Math. Zeit.* 1970, vol. 114, pp. 121-144. ISSN 0025-5874.

86. MORITA, K. Localizations in categories of modules II. In: *Journal Reine Angew. Math.* 1970, vol. 242, pp. 163-169. ISSN 0075-4102.

87. MORITA, K. Localizations in categories of modules III. In: *Math. Zeit.* 1971, vol. 119, pp. 313-320. ISSN 0025-5874.

88. MORITA, K. Flat modules, injective modules and quotient rings. In: *Math. Zeit.* 1971, vol. 120, pp. 25-40. ISSN 0025-5874.

89. MORITA, K. Quotient rings. Ring theory. In: *Acad. Press, New York*. 1972, pp. 257-285.

90. MÜLLER, B.J. The quotient category of a Morita context. In: *Journal of Algebra*. 1974, vol. 28, no. 3, pp. 389-407. ISSN 0021-8693.

91. OHTAKE, K. Colocalization and localization. In: *Journal of Pure and Appl. Algebra*. 1977, vol. 11, no. 13, pp. 217-241. ISSN 0022-4049.

92. RAGGI, F., RIOS, J, RINCON, H., FERNANDEZ-ALONSO, R., SIGNORET, C. The lattice structure of preradicals. In: *Commun. in Algebra* 2002, vol. 30, no. 3, pp. 1533-1544. ISSN 0092-7872.

93. RAGGI, F., RIOS, J, RINCON, H., FERNANDEZ-ALONSO, R., SIGNORET, C. The lattice structure of preradicals II: partitions. In: *Journal of Algebra and Its Applications*. 2002, vol. 1, no. 2, pp. 201-214. ISSN 0219-4988.

94. RAGGI, F., RIOS, J, RINCON, H., FERNANDEZ-ALONSO, R., SIGNORET, C. The lattice structure of preradicals III: operators. In: *Journal of Pure and Applied Algebra*. 2004, vol. 190, pp. 251-265. ISSN 0022-4049.

95. RAGGI, F., RIOS, J, RINCON, H., FERNANDEZ-ALONSO, R., SIGNORET, C. Prime and irreducible preradicals. In: *Journal of Algebra and Its Applications*. 2005, vol. 4, no. 4, pp. 451-466. ISSN 0219-4988.

96. RAGGI, F., RIOS, J., WISBAUER, R. Coprime preradicals and modules. In: *Journal of Pure and Applied Algebra*. 2005, vol. 200, pp. 51-69. ISSN 0022-4049.

97. RAGGI, F., RIOS, J, RINCON, H., FERNANDEZ-ALONSO, R., GAVITO, S. Main modules and some characterizations of rings with global conditions on preradicals. In: *Journal of Algebra and Its Applications*. 2014, vol. 13, no. 2, 20 p. ISSN 0219-4988.

98. RINCON, H., SANDOVAL-MIRANDA, M.L.S., ZORRILLA-NORIEGA, M.G. Mappings between R-tors and other lattices. In: *Journal of Algebra and Its Applications*. 2017, vol. 16, no. 5. ISSN 0219-4988.

99. FERNANDEZ-ALONSO, R., HERBERA, D. Finite lattices of preradicals and finite representation type rings. In: *Intern. Electr. Journal of Algebra*. 2017, vol. 21, pp. 103-120. ISSN 1306-6048.

100. FERNANDEZ-ALONSO, R., MAGANA, J. Galois connections between lattices of preradicals induced by adjoint pairs between categories of modules. In: *Applied Categorical Structures*. 2016, vol. 24, no. 3, pp. 241-268. ISSN 0927-2852.

101. PARDO-GUERRA, S., RINCON, H., ZORRILLA-NORIEGA, M.G. Some isomorphic big lattices and some properties of lattice preradicals. In: *Journal of Algebra and Its Applications*. 2019, Online Ready. ISSN 0219-4988.

102. SMITH, P.F., VIOLA-PRIOLI, A.M., VIOLA-PRIOLI, J.E. Modules complemented with respect to a torsion theory. In: *Commun. in Algebra* 1997, vol. 25, no. 4, pp. 1307-1326. ISSN 0092-7872.

103. SULINSKI, A., ANDERSON, R., DIVINSKY, N. Lower radical properties for associative and alternative rings. In: *Journal of the London Math. Soc.* 1966, vol. 41, no. 1, pp. 417-424. ISSN 0024-6107.

104. TACHIKAWA, H. Localization and Artinian quotient rings. In: *Math. Zeit.* 1971, vol. 119, pp. 239–253. ISSN 0025-5874.

105. TEPLY, M.L. Some aspects of Goldie's torsion theory. In: *Pacific Journal Math.* 1969, vol. 29, no. 2, pp. 447-459. ISSN 0030-8730.

106. WALKER, C.L., WALKER, E.A. Quotient categories of modules. In: *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, September 13, 1965, New York: Springer-Verlag, California, pp. 404-420. ISBN 978-3540036395.

107. АНДРУНАКИЕВИЧ, В.А. Радикалы ассоциативных колец, I. В: *Математический сборник.* 1958, т. 44, №2, с. 179-212. ISSN 0368-8666.

108. АНДРУНАКИЕВИЧ, В.А. Радикалы ассоциативных колец, II. В: *Математический сборник.* 1961, т. 55, №3, с. 329-346. ISSN 0368-8666.

109. БОТНАРУ, Д.В. Относительные теории кручения категорий. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1984, вып. 76, с. 3-13.

110. БОТНАРУ, Д.В. Относительные теории кручения категорий отделимых равномерных пространств. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1985, вып. 85, с. 43-57.

111. БОТНАРУ, Д.В. Относительные теории кручения категорий отделимых локально выпуклых пространств. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1985, вып. 90, с. 28-40.

112. БОТНАРУ, Д.В. Факторизация относительных теорий кручения. В: *Исследования по общей алгебре, геометрии и их приложений.* Кишинёв: Штиинца. 1986, с. 19-26.

113. БУНУ, И.Д., ТЭБЫРЦЭ, Е.И. Решётка предкручений и классически полупростые кольца. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1979, вып. 49, с. 35-39.

114. БУНУ, И.Д. Кольца над которыми все предкручения идеальны. В: *Исследования по современной алгебре и геометрии.* Кишинёв: Штиинца. 1983, с. 12-15.

115. БУНУ, И.Д., ТЭБЫРЦЭ, Е.И. О дистрибутивности решётки предкручений. В: *Абелевы группы и модули.* Томск. 1984, с. 3-10.

116. ГОЯН, И.М., ТЭБЫРЦЭ, Е.И. Примарные идеалы и предкручения. В: *Исследования по общей алгебре, геометрии и их приложений.* Кишинёв: Штиинца. 1986, с. 47-50.

117. БУНУ, И.Д., ГОЯН, И.М., ТЭБЫРЦЭ, Е.И. Терциарные идеалы и предкручения. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1988, вып. 105, с. 40-44. ISBN 5-376-00456-2.

118. БУНУ, И.Д., ГОЯН, И.М., ТЭБЫРЦЭ, Е.И. О существенно артиновых слева кольцах. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1989, вып. 111, с. 51-54. ISBN 5-376-00083-4.

119. БУНУ, И.Д., ГОЯН, И.М., ТЭБЫРЦЭ, Е.И. Примальные идеалы и предкручения. В: *Известия Академии Наук МССР, Матем.* 1990, №3, с. 60-61. ISSN 0236-3089.

120. БУНУ, И.Д., ГОЯН, И.М., ТЭБЫРЦЭ, Е.И. О решётки кручений с единстенным коатомом. В: *Алгебраические структуры и геометрия.* Кишинёв: Штиинца. 1991, с. 29-30. ISBN 5-376-01101-1.

121. БУНУ, И.Д. О кольцах, над которыми решётка предкручений имеет коатом. В: *Фундаментальная и прикладная математика.* Москва. 1998, т. 4, вып. 1, с. 201-208. ISSN 1560-5159.

122. КУРОШ, А.Г. Радикалы колец и алгебр. В: *Математический сборник.* 1953, т. 33, №1, с. 13-26. ISSN 0368-8666.

123. ЛИВШИЦ, А.Х. Теоретико-категорные основы двойственности радикальности и полупростоты. В: *Сибирский математический журнал.* 1964, т. 5, №2, с. 319-336. ISSN 0037-4474.

124. РЯБУХИН, Ю.М. Радикалы в категориях. В: *Известия Академии Наук сер. физ.-мат. и техн. н.* 1964, №6, с. 58-74. ISSN 0236-3089.

125. ТЭБЫРЦЭ, Е.И. О булевости решётки кручений в модулях. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1973, вып. 8, №3, с. 92-105.

126. ТЭБЫРЦЭ, Е.И. О решётки кручений в модулях. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1975, вып. 10, №1, с. 225-235.

127. ТЭБЫРЦЭ, Е.И. О простых кручениях в категорий модулей. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1977, вып. 44, с. 104-108.

128. ТЭБЫРЦЭ, Е.И. Простые кручения и спектр кольца. В: *Математические исследования.* Кишинёв: Штиинца. 1980, вып. 56, №1, с. 132-137.

129. **JARDAN, I.** On left quotient with respect to join in the class of preradicals of a module category. In: *Abstracts of the International Conference Mathematics and Information Technologies: research and education MITRE2015*, July 2-5, 2015, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 51-52. ISBN 978-9975-71-678-9.

130. **JARDAN, I.** On a new operation in the class of preradicals of modules. In: *Abstracts of the International Conference Mathematics and Information Technologies: research and education MITRE2016*, June 22-26, 2016, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 38-39. ISBN 978-9975-71-794-6.

131. **JARDAN, I.** Left quotient with respect to meet for preradicals in modules. In: *Communications of the International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies MITI2018*, April 19-21, 2018, Balti, Republic of Moldova, pp. 47-48. ISBN 978-9975-3214-7-1.

132. **JARDAN, I.** Left coquotient with respect to join in the class of preradicals in modules. In: *Book of Abstracts of the* 26^{th} *Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM2018*, September 20-23, 2018, Chişinău, Republic of Moldova, pp. 95-96. ISBN 978-9975-76-247-2.

133. **JARDAN, I.** New operations in the class of preradicals of modules. In: *Abstracts of the International Conference Mathematics and Information Technologies: research and education MITRE2019*, June 24-26, 2019, Chisinau, Republic of Moldova, pp. 38-39. ISBN 978-9975-149-17-4.

DECLARAŢIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnatul, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări şi realizări ştiinţifice. Conştientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecinţele în conformitate cu legislaţia în vigoare.

Jardan Ion

Semnătura:

Data: 03 august 2020

CV-ul AUTORULUI

Nume: Jardan

Prenume: Ion

Data naşterii: 26.05.1979

Cetăţenia: Republica Moldova

Studii: superioare, magistratură la matematică.

1995-2002: Studii superioare de licenţă. Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică şi Informatică, specialitatea Matematică pură.

2002-2003: Studii de masterat la specialitatea Matematică la Universitatea de Stat din Moldova.

2004-2006: Studii de doctorat la specialitatea 111.03–Logică matematică, Algebră şi Teoria Numerelor la Institutul de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Moldovei.

Activitatea profesională: lector universitar la departamentul Matematica al Universităţii Tehnice a Moldovei şi cercetător ştiinţific stagiar în laboratorul Algebră şi Topologie al Institutului de Matematică şi Informatică „Vladimir Andrunachievici".

Domeniile de cercetare ştiinţifică: Teoria inelelor şi modulelor, radicali în categorii de module.

Participări la foruri ştiinţifice naţionale şi internaţionale:

– The 5^{th} International Conference „Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2015)", 2-5 iulie, Chişinău, Moldova, 2015;

– The 6^{th} International Conference „Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2016)", 22-26 iunie, Chişinău, Moldova, 2016;

– Seminarul ştiinţifico-metodic „prof. Petre Osmătescu – 80", Noiembrie 19, UTM, Chişinău, Moldova, 2016;

– The 4^{th} Conference of „Mathematical Society of the Republic of Moldova (Proceedings CMSM4)", 25 iunie-2 iulie, Chişinău, Moldova, 2017;

– The International Conference on „Mathematics, Informatics and Technologies dedicated to the ilustrous scientist Valentin Belousov (MITI 2018)", 19-21 aprilie, Bălţi, Moldova, 2018;

– The 26^{th} Conference on „Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2018)”, 20-23 septembrie, Chişinău, Moldova, 2018;

– The 7^{th} International Conference „Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2019)”, Chişinău, Moldova, 2019.

Lucrări ştiinţifice publicate: Articole ştiinţifice - 4; Materiale ale comunicărilor ştiinţifice 6.

Cunoaşterea limbilor

româna – limbă maternă

rusa – avansat

franceza – mediu

engleza – elementar

Date de contact:

tel. serv. 0 22 73 81 13; tel. mob. 069 56 39 04;

e-mail: ion.jardan@mate.utm.md; jordanion79@gmail.com;

adresa: mun. Chişinău, bul. Mircea cel Bătrîn 12/1, ap.20.