MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII
UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
CONSORȚIUL ACADEMIC: INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ "VLADIMIR ANDRUNACHIEVICI", UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL (CU SEDIUL LA CHIȘINĂU), UNIVERSITATEA DE STAT "ALECU RUSSO" DIN BĂLȚI

Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 512.548

DIDURIC NATALIA

MORFISMELE ŞI PROPRIETĂŢILE SISTEMELOR ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIŢII DE TIP MOUFANG

111.03 LOGICĂ MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Rezumatul tezei de doctor în științe matematice

CHIŞINĂU, 2021

Teza a fost elaborată în cadrul Școlii Doctorale Matematica și Știința Informației, Universitatea de Stat din Moldova, Consorțiul Academic: Institutul de Matematică și Informatică “Vladimir Andrunachievici”, Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chișinău), Universitatea de Stat “Alecu Russo” din Bălți.

Componența comisiei de susținere publică a tezei de doctor în științe matematice:

1. **Gaindric Constantin, președinte**, dr. hab., membru corespondent al AȘM, IMI VA;
2. **Petic Mircea, secretar**, dr., conf. cercet. IMI VA;
3. **Șcerbacov Victor, conducător științific**, dr. hab., cercet. șt. princip., IMI VA;
4. **Arnautov Vladimir, referent oficial**, academician, dr. hab., prof. univ., IMI VA;
5. **Sârbu Parascovia, referent oficial**, dr., conf. univ., USM;
6. **Dudek Wieslaw A., referent oficial**, dr. hab., prof. univ., Wroclaw University of Science and Technology;
7. **Ursu Vasile, referent oficial**, dr. hab., conf. univ., UTM.

Susținerea va avea loc la **25 iunie 2021, ora 14.00** în ședința comisiei pentru susținere a tezei de doctor în științe matematice Institutul de Matematică și Informatică “Vladimir Andrunachievici” (str. Academiei, 5).

Teza și rezumatul pot fi consultate la Biblioteca Națională a Republicii Moldova (Chișinău, str. 31 august 1989, 78A), la Biblioteca Academiei de Științe a Moldovei (Chișinău, str. Academiei, 5A) și pe site-ul ANACEC (www.anacec.md).

Rezumatul a fost expediat la 24.05.2021.

Secretar,

Petic Mircea, dr., conf. cercet. ________________

Conducător științific,

Șcerbacov Victor, dr. hab., cercet. șt. princip. ________________

Autor,

Diduric Natalia ________________

CUPRINS

1. CUVINTE – CHEIE

Cuvinte–cheie: cvazigrup, buclă, grup, grupoid, izotop, automorfism, unitate la stânga, unitate la dreapta, pseudoautomorfism, cvazigrup Bol la stânga (la dreapta), cvazigrup Moufang, WA-cvazigrup, CI-cvazigrup, i-cvazigrup, cvazigrup medial, cvazigrup Neumann, cvazigrup tranzitiv la stânga, G-proprietăţi.

2. SCOPUL ȘI OBIECTIVELE CERCETĂRII

Actualitatea și importanța problemei abordate. Teoria cvazigrupurilor își ia începutul în anii 20–30 ai secolului XX, după publicarea lucrărilor fundamentale ale lui David Hilbert, la sfârșitul secolului XIX, care țin de axiomatizarea matematicii și, în particular, de axiomatizarea geometriei, apariția lucrărilor referitoare la diferite sisteme de axiome, în general la sistemele de axiome ale diverselor geometrii, inclusiv geometriei euclidiene, geometriei proiective, geometriei Lobacevschi, în dimensiunile 2 și 3.

Însuși termenul „cvazigrup" a apărut în lucrarea lui Ruth Moufang [1] consacrată problemelor coordinatizării planurilor proiective. Putem afirma, de asemenea, că termenul "cvazigrup" a apărut în studiul independenței axiomelor planului proiectiv.

În lucrările sale Moufang prin cvazigrup percepea obiectul, care acum este numit buclă Moufang. În termeni moderni, ea a definit bucla Moufang ca o IP-buclă $(Q,\cdot)$ cu "asociativitate slabă".

Peste doi ani după apariția lucrărilor Moufang a fost publicată o lucrare importantă la tema cvazigrupurilor de Gerrit Bol (1937), și anume "Gewebe und Gruppen". Bol a abordat noțiunea de cvazigrup din punct de vedere geometric. El construiește trei noi configurații U1, U2, U3 și pune întrebarea dacă închiderea acestor trei figuri implică asociativitatea. El răspunde la această întrebare negativ și arată că cele trei figuri U împreună implică numai legea $a\,[b\,(cb)] = [(ab)\,c]\,b$, care este tocmai una din identitățile Moufang. Pentru a demonstra acest lucru, Bol indică un exemplu construit de către Zassenhaus. Acesta a fost, de fapt, primul exemplu de buclă neasociativă comutativă Moufang. Mai mult, Bol explică semnificația algebrică a fiecărei dintre figurile U, că U1 și U2 corespund unor legi care sunt numite în prezent identitățile Bol la dreapta și Bol la stânga, respectiv: $a\,((bc)\,b) = ((ab)\,c)\,b$ și $(b\,(cb))\,a = b\,(c\,(ba))$. În scurt timp Zassenhaus a construit și primul exemplu de buclă Bol la dreapta.

Cvazigrupurile au multiple aplicții în statistică (teoria planificării experimentului) [2], teoria ecuațiilor diferențiale, geometria diferențială [3], geometria hiperbolică [4], fizică [5], teoria codurilor [6], criptografie [7].

Pentru cvazigrupuri, în special cele legate de combinatorică, au fost determinate și activ cercetate diferite transformări (morfisme), printre care de menționat: izomorfismele, automorfismele, izotopiile, autotopiile, izostrofiile, autostrofiile, izotopiile generalizate. Automorfismele și grupurile automorfismelor buclelor au fost cercetate de către A.A. Albert încă în primele lucrări ce țin de teoria cvazigrupurilor [8].

Aproape toate clasele bine cunoscute (clasice) de cvazigrupuri și bucle posedă proprietăți de inversabilitate. Cel mai des aceste cvazigrupuri posedă una din proprietățile IP, LIP, RIP, WIP sau CI.

IP- și LIP- buclele au fost definite în lucrarea lui R. Moufang [1]. WIP-buclele – în lucrarea lui R. Baer [9], iar CI-buclele au fost definite de către Rafael Artzy în [10]. V.D. Belousov și B.V. Țurkan au definit și au studiat CI-cvazigrupurile în [11].

Problema importantă abordată în lucrare ține de cercetarea proprietăților sistemelor algebrice neasociative cu identități de tip Bol-Moufang și aflarea relațiilor dintre aceste subclase și clasele principale Moufang și Bol, aplicând morfismele.

Scopul și obiectivele tezei. Scopul lucrării constă în cercetarea morfismelor și proprietăţilor sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective:

(1) cercetarea relațiilor WA-, CI-cvazigrupurilor, tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.;
(2) cercetarea existenței unității în cvazigrupuri cu fiecare dintre cele 60 de identități de tip Bol-Moufang enumerate în lucrarea [12];
(3) cercetarea morfismelor, proprietăților și relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri noi definite în lucrare (i-cvazigrupuri și WIP-cvazigrupuri generalizate);
(4) cercetarea G-proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

3. METODOLOGIA CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Construcțiile și metodele de demonstrație se bazează pe aplicarea noțiunilor de cvazigrup, parastrof, unități locale, izotopii, autotopii, nuclee, pseudoatomorfisme, G-proprietăți.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică constau în obținerea rezultatelor noi de ordin teoretic. Toate rezultatele prezentate în teză sunt noi şi originale. Au fost cercetate diverse clase de cvazigrupuri ($WA-, CI -$cvazigrupuri, cvazigrupuri tranzitive la stânga, Neumann ș.a.). Au fost introduse și cercetate două clase noi de cvazigrupuri (WIP-cvazigrupuri generalizate, i-cvazigrupuri). Au fost cercetate clase de cvazigrupuri izotope grupurilor. Sunt descrise proprietăţile unor clase de cvazigrupuri inversabile. Au fost cercetate conexiuni între clasele de cvazigrupuri studiate și cvazigrupurile clasice Moufang, Bol ș.a. Sunt determinate formele generale ale automorfismelor, pseudoautomorfismelor și cvaziautomorfismelor acestor cvazigrupuri.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în aplicarea relațiilor de tipul morfismelor la cercetarea proprietăților și existenței unității în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele studiate de cvazigrupuri.

Importanța teoretică și valoarea aplicativă a lucrării este determinată de obţinerea unor rezultate noi în cercetarea sistemelor neasociative cu identități de tip Bol-Moufang. Lucrarea poartă un caracter teoretic. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în predarea cursurilor de specialitate pentru studenții, masteranzii și doctoranzii de la specialitățile de matematică.

Aprobarea rezultatelor. Rezultatele științifice obținute au fost expuse și aprobate în cadrul Sesiunii speciale a Seminarului "Algebră și Logică matematică", dedicate memoriei Profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică și Informatică "Vladimir Andrunachievici" al Academiei de Științe a Moldovei. Rezultatele principale incluse în teză au fost prezentate la următoarele conferințe științifice:

- The 25rd Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017, September 14–17, 2017, Iași.
- International conference on mathematics, informathics and information technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, 19-21 april, 2018 Bălţi.
- The 26^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018, September 20-23, 2018, Chişinău.
- International conference Mathematics&Information technologies: research and education, MITRE-2019, Moldova, State University, June 24 2019, Chișinău.
- LOOPS 2019 Conference, Budapest University of Technology and Economics, July 7-July 11, 2019, Hungary.
- The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55), September 30, 2019.
- "Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători": Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a 6-a, Chișinău, 15 iunie 2017.
- The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4, June 28 – July 2, 2017 Chișinău.

- "Tendinţe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători": Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a VII-a Chișinău, 15 iunie 2018.

Publicațiile la tema tezei. În total 16 lucrări științifice, cuprinzând 6 articole în reviste recenzate de specialitate [13], [14], [15], [16], [17], [18] (2 articole fără coautori) și 10 rezumate la conferințe științifice [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], (7 rezumate fără coautori).

Structura tezei și volumul tezei. Teza este scrisă în limba română şi conţine: introducere, patru capitole, concluzii generale şi recomandări, Bibliografie cu 98 titluri. Volumul tezei constă din 95 pagini (inclusiv 86 pagini de text de bază).

4. SINTEZA CAPITOLELOR

Structura tezei este reprezentată în patru capitole, care conțin rezultatele teoretice obținute în cercetarea proprietăţilor sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Bol-Moufang.

În introducere este formulată actualitatea și importanța problemei abordate, sunt menționate obiectivele, noutatea științifică și originalitatea tezei. Problema științifică studiată subliniază importanța teoretică și aplicativă a lucrării. Este prezentată o scurtă analiză a problemelor și publicațiilor la tema tezei. Această secțiune se încheie cu un rezumat al conținutului lucrării.

Primul Capitol – Analiza situației în domeniul sistemelor algebrice neasociative cu condiţii de tip Moufang al tezei, format din șase paragrafe, poartă un caracter introductiv. În acest capitol sunt analizate conceptele algebrice fundamentale. Se prezintă rezultate cunoscute importante pentru cercetările ulterioare.

În cel de al **doilea Capitol - Despre unele clase de cvazigrupuri cu proprietăți de inversabilitate ($WA-, OWIP-, CI-$cvazigrupuri)** s-au cercetat două clase cunoscute de cvazigrupuri cu proprietate inversă; s-a introdus o clasă nouă de cvazigrupuri, o generalizare a WIP-cvazigrupurilor. Capitolul conține șapte paragrafe în care sunt realizate obiectivele 1 și 3. Rezultatele acestui capitol au fost publicate în [19], [22], [14], [15], [23].

Primele trei paragrafe redau rezultatele obținute în cercetarea WA-cvazigrupurilor.
Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitățile $xx \cdot yz = xy \cdot xz$ și $xy \cdot zz = xz \cdot yz$ se numește *WA-cvazigrup* sau *cvazigrup semimedial* (pe scurt: SM-cvazigrup) (vezi [29]).

Orice buclă, izotopă WA-cvazigrupului, dat fiind buclă comutativă Moufang [30], s-au demonstrat următoarele:

Lema 2.1.2. Orice WA-cvazigrup cu unitate la stânga este cvazigrup Bol la stânga.

Lema 2.1.3. Orice WA-cvazigrup cu unitate la dreapta este cvazigrup Bol la dreapta.

Lema 2.1.4. Orice WA-cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu proprietate inversă la stânga (la dreapta) este cvazigrup Bol la stânga (la dreapta).

Din Lema 2.1.4. și 1.5.1. rezultă Corolarul 2.1.2..

Corolarul 2.1.2. Orice WA-cvazigrup, care este IP-cvazigrup, este cvazigrup Moufang.

Cercetând operațiile derivate pentru WA-cvazigrupul $(Q,\cdot)$, s-a obținut Teorema 2.1.2.

Teorema 2.1.2. Fie $(Q,\cdot)$ este WA-cvazigrup. Atunci:

(i) operația derivată la dreapta pentru $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga,

(ii) operația derivată la stânga $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la dreapta.

Paragraful patru al tezei este dedicat automorfismelor WA-cvazigrupurilor, permutărilor interne ca automorfisme în raport cu unitatea la stânga și în raport cu element arbitrar:

Lema 2.2.2. În WA-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f permutările interne $L_{x,y}, R_{x,y}$ și T_x în raport cu elementul f sunt automorfisme ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Теорема 2.2.1. În WA-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f permutările interne $L_{x,y}, R_{x,y}$ și T_x față de $a \in Q$ sunt automorfisme în $(Q,\cdot)$ dacă și numai dacă $a \in N_l$ și se îndeplinește următoarea identitate $xy \cdot a = xf \cdot ya$.

Au fost cercetate pseudoautomorfismele. Cunoaștem că cvazigrupul cu pseudoautomorfism la dreapta are de asemenea unitate la stânga (vezi [31]).

Lema 2.3.1. În WA-cvazigrupul cu unitate la stânga f translația R_a este pseudoautomorfism la dreapta dacă și numai dacă translația L_a este pseudoautomorfism la dreapta și $a^2 = f$.

În paragraful cinci al lucrări s-au cercetat proprietățile unei clase noi de cvazigrupuri introdusă de către Florea I. A. și autoarea tezei și anume $OWIP$-cvazigrupuri.

Buclele cu proprietate inversă slăbită detaliat au fost cercetate de către Osborne [32]. Tot în această sursă sunt demonstrate și alte proprietăți ale *WIP*-buclelor.

Definiția 2.4.1. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *$OWIP$-cvazigrup*, dacă în $(Q,\cdot)$ are loc egalitatea

$$x \cdot I(y \cdot \alpha x) = Iy, \tag{2.24}$$

pentru orice $x, y \in Q$, unde I și α sunt careva permutări ale mulțimii Q.

Din identitatea (2.24), aplicând proprietățile permutărilor pentru această clasă de cvazigrupuri, s-a obținut o identitate nouă (2.25):

Lema 2.4.1. În $OWIP$-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc egalitatea

$$I^{-1}(xz) \cdot \alpha x = I^{-1}z, \tag{2.25}$$

pentru orice $x, z \in Q$.

Aplicând (2.25) s-a obținut condiția necesară și suficientă când $OWIP$-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este izotop al LIP-buclei $(Q,\circ)$. Vedem Teorema 2.4.1.

Teorema 2.4.1. $OWIP$-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este izotop al LIP-buclei $(Q,\circ)$, unde

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y, xy = R_a x \circ L_b y \quad (2.26)$$

dacă și numai dacă în $(Q,\cdot)$ are loc următoarea egalitate

$$b \cdot I(I^{-1}(by) \cdot x) = R_{e_b}^{-1}\big(b \cdot I(I^{-1}b \cdot x)\big) \cdot y, \quad (2.27)$$

unde $be_b = b,\ R_{e_b}v = ve_b$.

Pentru cazul, când orice buclă $(Q,\circ)$, izotopă $OWIP$-cvazigrupului $(Q,\cdot)$, este LIP-buclă, în cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc identitatea:

$$z \cdot I(I^{-1}(zy) \cdot x) = R_{e_z}^{-1}\big(z \cdot I(I^{-1}z \cdot x)\big) \cdot y, \quad (2.28)$$

pentru orice $x, y, z \in Q$ unde I este permutare a mulțimii $Q, ze_z = z, R_{e_z}t = te_z$.

Lema 2.4.2. Dacă în cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc identitatea (2.28), atunci în $(Q,\cdot)$ este adevărată identitatea

$$z \cdot I(y \cdot \alpha z) = Iy, \quad (2.29)$$

pentru orice $z, y \in Q$, unde α este aplicația mulțimii Q în sine. Iar dacă α este permutare, atunci $(Q,\cdot)$ este $OWIP$-cvazigrup.

Prin analogie se prezintă și rezultatele la dreapta.

În ultimele două paragrafe ale acestui capitol sunt prezentate rezultatele obținute la cercetarea CI-cvazigrupurilor.

CI-bucle sunt obiecte clasice ale teoriei cvazigrupurilor. Această clasă de bucle a fost definită de către Rafael Artzy [10]. V.D. Belousov și B.V. Țurkan au definit CI-cvazigrupurile în [11]. Unele aplicații ale CI-cvazigrupurilor în criptologie sunt prezentate în [33].

Bucla $(Q,\cdot)$, ce satisface una din identitățile echivalente $x \cdot yJx = y, xy \cdot Jx = y$, unde J este o bijecție a mulțimii Q astfel încât $x \cdot Jx = 1$, se numește *CI-buclă*. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea $xy \cdot Jx = y$, unde J este o aplicație a mulțimii Q în Q, se numește *CI-cvazigrup*.

Observăm, că în acest caz aplicația J este permutarea mulțimii Q. În orice CI-cvazigrup permutarea J este unică ([11], Lema 2.25).

Grupoidul $(Q,\cdot)$ cu identitatea $xy \cdot I_r x = y$, unde I_r este aplicația mulțimii Q în sine, se numește *CI-grupoid la stânga*. Grupoidul $(Q,\cdot)$ cu identitatea $I_l x \cdot yx = y$, unde I_l aplicația mulțimii Q în sine, se numește *CI-grupoid la dreapta*. Grupoidul $(Q,\cdot)$ cu ambele identități se numește *CI-grupoid*.

În articolul de bază [11] sunt dovedite următoarele afirmații: orice CI-grupoid este cvazigrup; în CI-cvazigrup identitățile CI-grupoidului la dreapta și la stânga sunt echivalente; orice CI-grupoid la stânga este cvazigrup la stânga.

Din rezultatele obținute de către Chidwelli și Șcerbacov urmează, că CI-grupoidul la stânga, în care aplicația I_r este bijectivă, este CI-cvazigrup. Orice CI-grupoid finit la stânga este CI-cvazigrup [34].

Rezultatul principal al acestui paragraf este reflectat în următoarea teoremă:

Teorema 2.5.1. Orice CI-grupoid la stânga $(Q,\cdot)$ este CI-cvazigrup.

E clar, că este adevărată teorema similară pentru orice CI-grupoid la dreapta.

Cercetând izotopii acestor cvazigrupuri am obținut următoarele propoziții:

Propoziția 2.6.1. CI-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este izotop al grupului $(Q,\circ)$, cu izotopia (2.26) dacă și numai dacă în $(Q,\cdot)$ are loc

$$\Big(x\big(y(zu)\big)\Big) \cdot v = y \cdot \big((xz \cdot v) \cdot u\big), \tag{2.36}$$

pentru orice $x, y, z, u, v \in Q$.

Dacă în cvazigrupul arbitrar $(Q,\cdot)$ se îndeplinește identitatea (2.36), $(Q,\cdot)$ este CI-cvazigrup?

Propoziția 2.6.2. Dacă în cvazigrupul arbitrar $(Q,\cdot)$ are loc identitatea (2.36), atunci $(Q,\cdot)$ este CI-cvazigrup.

Propoziția 2.6.3. Dacă orice buclă $(Q,\circ)$, izotopă CI-cvazigrupului $(Q,\cdot)$, este comutativă, atunci cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este medial, iar $(Q,\circ)$ este grup abelian.

Propoziția 2.6.4. Bucla $(Q,\circ)$, izotopă CI-cvazigrupului $(Q,\cdot)$, unde izotopia este dată de egalitatea (2.26), va fi CI-buclă dacă și numai dacă în $(Q,\cdot)$ are loc

$$(x \cdot by)a = (x \cdot ba)y, \tag{2.41}$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Studiind cvazigrupul $(Q,\cdot)$, în care egalitatea (2.41) are loc $\forall a, b, x, y \in Q$, obținem:

Propoziția 2.6.5. Orice cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu identitatea

$$(x \cdot yz)t = (x \cdot yt)z, \tag{2.44}$$

$\forall x, y, z, t \in Q$ este CI-cvazigrup și medial.

În al **treilea Capitol – Despre o clasă de i-cvazigrupuri. Unitățile în cvazigrupurile de tip Bol-Moufang,** format din șase paragrafe, sunt realizate obiectivele 2 și 3. Rezultatele sunt publicate în [13], [27], [24], [28], [18].

În acest capitol s-a cercetat o clasă nouă de cvazigrupuri numită i-cvazigrupuri introdusă de către primul aspirant al lui V.D. Belousov, I.A. Florea și autoarea tezei.

În primul paragraf al acestui capitol s-a cercetat distributantul i-cvazigrupurilor. *Distributantul* D al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ este format din toate elementele d ale mulțimii Q astfel încât $(x \cdot y) \cdot d = (x \cdot d) \cdot (y \cdot d), d \cdot (x \cdot y) = (d \cdot x) \cdot (d \cdot y)$ pentru orice $x, y \in Q$.

Definiția 3.1.2. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *i-cvazigrup*, dacă în $(Q,\cdot)$ are loc identitatea

$x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x),$ (3.1)

unde $x, y, z \in Q$.

Rezultatele obținute sunt formulate în următoarele teoreme:

Teorema 3.1.1. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este RIP-cvazigrup, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și distributantul $D = \{f\}$.

Teorema 3.1.2. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este izotop grupului abelian, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang, cvazigrup medial și distributantul $D = \{f\}$.

Teorema 3.1.3. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu distributant nevid D este izotop buclei Bol la stânga, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga.

Teorema 3.1.4. i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu distributant nevid D este cvazigrup Bol la stânga dacă și numai dacă în $(Q,\cdot)$ are loc egalitatea

$xa \cdot xy = xx \cdot ay,$ (3.6)

pentru orice $x, y \in Q$, unde $a \in D$, a este element fixat.

S-au cercetat relațiile i-cvazigrupurilor cu alte clase de cvazigrupuri, aplicând diferite condiții. Rezultatele obținute sunt redate în următoarele propoziții:

Propoziția 3.2.1. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este idempotent, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga. Mai mult, în acest caz $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Stein la dreapta, care este distributiv la stânga și miezul cvazigrupului Bol la stânga de asemenea este i-cvazigrup.

Propoziția 3.2.2. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are unitate la dreapta e, atunci $(Q,\cdot)$ este buclă Moufang în care $x^2y = yx^2$ pentru orice $x, y \in Q$.

Propoziția 3.2.3. Orice i-cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este cvazigrup cu proprietate inversă la stânga și izotop LIP-buclei $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = R_f^{-1}x \cdot y$.

Propoziția 3.2.4. Dacă în i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc $x^2 = f$ pentru orice $x \in Q$, unde f este element fixat, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și izotop al unui grup abelian.

Propoziția 3.2.5. i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este cvazigrup Moufang dacă și numai dacă R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

În paragraful al treilea al acestui capitol s-au cercetat i-cvazigrupurile ce satisfac următoarelor trei legi:

$x \cdot xz = xx \cdot z$ (*legea alternativă la stânga*), (3.19)

$zx \cdot x = z \cdot xx$ (*legea alternativă la dreapta*), (3.20)

$xy \cdot x = x \cdot yx$ (*legea de elasticitate*). (3.21)

Au loc Propozițiile 3.3.1.-3.3.4.. Evidențiem:

Propoziția 3.3.3. În orice i-cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu identitatea de elasticitate (3.20) mulțimea tuturor unităților locale formează un subcvazigrup Bol la stânga.

Propoziția 3.3.4. i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este cvazigrup Moufang dacă și numai dacă în $(Q,\cdot)$ are loc egalitatea:

$$zx \cdot x = zf \cdot xx, \qquad (3.26)$$

pentru orice $x, z \in Q$.

Au fost cercetate pseudoautomorfismele acestei clase de cvazigrupuri. Aplicând unele condiții s-au obținut rezultatele, redate în următoarele 3 propoziții:

Propoziția 3.4.1. Dacă permutarea α a mulțimii Q a i-cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este pseudoautomorfism la dreapta al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu companionul k, atunci k este un element Bol la stânga.

A fost construit exemplu de pseudoautomorfism al i-cvazigrupului: Exemplul 3.4.1..

Propoziția 3.4.2. Dacă în i-cazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f translațiile L_a și R_b sunt pseudo-automorfisme la dreapta cu companionul k, atunci $a = e_k f, b = e_k$, unde $ke_k = k$.

Propoziția 3.4.3. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este izotop grupului abelian, atunci L_a și R_b,unde $a = e_k f, b = e_k$, sunt pseudoautomorfisme la dreapta ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu companionul k.

În penultimul paragraf al acestui capitol s-au cercetat 60 de identități de tip Bol-Moufang, la existența unității la dreapta, la stânga, medii. S-a folosit lista celor 60 de identități de tip Bol-Moufang, cercetate în [35]. A se vedea Tabela 3.1. [36].

Există și alte definiții ale identităților de tip Bol-Moufang și, prin urmare, alte clasificări ale acestor identități [37], [38].

Reformulând titlul articolului lui Gagola «Cum și de ce buclele Moufang se comportă ca și grupul» putem afirma, că cvazigrupurile cu identitățile Bol-Moufang «se comportă ca și grupul». Aceasta este una dintre cauzele, de ce s-au cercetat aceste clase de cvazigrupuri.

Amintim, că parastroful (12) al grupoidului $(G,\cdot)$ este grupoidul $(G,*)$, care în operația " $*$ " se primește după următoarea regulă:

$$x * y = y \cdot x. \qquad (3.44)$$

Clar, că pentru orice grupoid $(G,\cdot)$ există grupoidul lui parastrofic (12) $(G,*)$.

Presupunem, că identitatea F este adevărată în grupoidul $(G,\cdot)$. Atunci putem obține identitatea parastrofică (12) (F^*) a identității F, care trece operația " $\cdot$ " în operația " $*$ " și schimbă ordinea variabilelor folosind regula (3.44).

Remarca 3.5.1. În cazul cvazigrupului, prin analogie pentru identitatea parastrofică (12), pot fi determinate alte identități parastrofice.

Tabela 3.1. Unitățile în cvazigrupurile cu identități de tip Bol-Moufang

Numele	Denumirea	identitatea	f	e	buclă	grup
F_1		$xy \cdot zx = (xy \cdot z)x$	+	+	+	+
F_2	Moufang medie	$xy \cdot zx = (x \cdot yz)x$	+	+	+	-
F_3		$xy \cdot zx = x(y \cdot zx)$	+	+	+	+
F_4	Moufang medie	$xy \cdot zx = x(yz \cdot x)$	+	+	+	-
F_5		$(xy \cdot z)x = (x \cdot yz)x$	+	+	+	+
F_6	Identitate extra	$(xy \cdot z)x = x(y \cdot zx)$	+	+	+	-
F_7		$(xy \cdot z)x = x(yz \cdot x)$	+	-	-	-
F_8		$(x \cdot yz)x = x(y \cdot zx)$	-	+	-	-
F_9		$(x \cdot yz)x = x(yz \cdot x)$	-	-	-	-
F_{10}		$x(y \cdot zx) = x(yz \cdot x)$	+	+	+	+
F_{11}		$xy \cdot xz = (xy \cdot x)z$	+	+	+	+
F_{12}		$xy \cdot xz = (x \cdot yx)z$	+	+	+	+
F_{13}	Identitate extra	$xy \cdot xz = x(yx \cdot z)$	+	+	+	-
F_{14}		$xy \cdot xz = x(y \cdot xz)$	+	+	+	+
F_{15}		$(xy \cdot x)z = (x \cdot yx)z$	-	-	-	-
F_{16}		$(xy \cdot x)z = x(yx \cdot z)$	+	-	-	-
F_{17}	Moufang la stânga	$(xy \cdot x)z = x(y \cdot xz)$	+	+	+	-
F_{18}		$(x \cdot yx)z = x(yx \cdot z)$	+	+	+	+
F_{19}	Bol la stânga	$(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$	-	+	-	-
F_{20}		$x(yx \cdot z) = x(y \cdot xz)$	+	+	+	+
F_{21}		$yx \cdot zx = (yx \cdot z)x$	+	+	+	+
F_{22}	Identitate extra	$yx \cdot zx = (y \cdot xz)x$	+	+	+	-
F_{23}		$yx \cdot zx = y(xz \cdot x)$	+	+	+	+
F_{24}		$yx \cdot zx = y(x \cdot zx)$	+	+	+	+
F_{25}		$(yx \cdot z)x = (y \cdot xz)x$	+	+	+	+

F_{26}	Bol la dreapta	$(yx \cdot z)x = y(xz \cdot x)$	+	-	-	-
F_{27}	Moufang la drepta	$(yx \cdot z)x = y(x \cdot zx)$	+	+	+	-
F_{28}		$(y \cdot xz)x = y(xz \cdot x)$	+	+	+	+
F_{29}		$(y \cdot xz)x = y(x \cdot zx)$	-	+	-	-
F_{30}		$y(xz \cdot x) = y(x \cdot zx)$	-	-	-	-
F_{31}		$yx \cdot xz = (yx \cdot x)z$	+	+	+	+
F_{32}		$yx \cdot xz = (y \cdot xx)z$	+	+	+	+
F_{33}		$yx \cdot xz = y(xx \cdot z)$	+	+	+	+
F_{34}		$yx \cdot xz = y(x \cdot xz)$	+	+	+	+
F_{35}		$(yx \cdot x)z = (y \cdot xx)z$	-	+	-	-
F_{36}	RC-identitate	$(yx \cdot x)z = y(xx \cdot z)$	+	-	-	-
F_{37}	C-identitate	$(yx \cdot x)z = y(x \cdot xz)$	-	-	-	-
F_{38}		$(y \cdot xx)z = y(xx \cdot z)$	+	+	+	-
F_{39}	LC-identitate	$(y \cdot xx)z = y(x \cdot xz)$	-	+	-	-
F_{40}		$y(xx \cdot z) = y(x \cdot xz)$	+	-	-	-
F_{41}	LC-identitate	$xx \cdot yz = (x \cdot xy)z$	+	+	+	-
F_{42}		$xx \cdot yz = (xx \cdot y)z$	+	-	-	-
F_{43}		$xx \cdot yz = x(x \cdot yz)$	+	-	-	-
F_{44}		$xx \cdot yz = x(xy \cdot z)$	+	-	-	-
F_{45}		$(x \cdot xy)z = (xx \cdot y)z$	+	-	-	-
F_{46}	LC-identitate	$(x \cdot xy)z = x(x \cdot yz)$	-	-	-	-
F_{47}		$(x \cdot xy)z = x(xy \cdot z)$	+	+	+	+
F_{48}	LC-identitate	$(xx \cdot y)z = x(x \cdot yz)$	+	-	-	-
F_{49}		$(xx \cdot y)z = x(xy \cdot z)$	+	-	-	-
F_{50}		$x(x \cdot yz) = x(xy \cdot z)$	+	+	+	+
F_{51}		$yz \cdot xx = (yz \cdot x)x$	-	+	-	-
F_{52}		$yz \cdot xx = (y \cdot zx)x$	-	+	-	-
F_{53}	RC-identitate	$yz \cdot xx = y(zx \cdot x)$	+	+	+	-
F_{54}		$yz \cdot xx = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-
F_{55}		$(yz \cdot x)x = (y \cdot zx)x$	+	+	+	+
F_{56}	RC-identitate	$(yz \cdot x)x = y(zx \cdot x)$	-	-	-	-

F_{57}	RC-identitate	$(yz \cdot x)x = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-
F_{58}		$(y \cdot zx)x = y(zx \cdot x)$	+	+	+	+
F_{59}		$(y \cdot zx)x = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-
F_{60}		$y(zx \cdot x) = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-

Este evident, că identitatea F este adevărată în grupoidul $(G,\cdot)$ dacă și numai dacă în grupoidul $(Q,*)$ identitatea F^* este adevărată.

Evidențiem Teorema 3.5.1., în baza căreia s-au demonstrat afirmațiile pentru identitățile parastrofice (12) ale cvazigrupurilor cercetate.

Teorema 3.5.1. [36]. $(F_1)^* = F_3, (F_2)^* = F_4, (F_5)^* = F_{10}, (F_6)^* = F_6, (F_7)^* = F_8, (F_9)^* = F_9,$
$(F_{11})^* = F_{24}, (F_{12})^* = F_{23}, (F_{13})^* = F_{22}, (F_{14})^* = F_{21}, (F_{15})^* = F_{30}, (F_{16})^* = F_{29},$
$(F_{17})^* = F_{27}, (F_{18})^* = F_{28}, (F_{19})^* = F_{26}, (F_{20})^* = F_{25}, (F_{31})^* = F_{34}, (F_{32})^* = F_{33},$
$(F_{35})^* = F_{40}, (F_{36})^* = F_{39}, (F_{37})^* = F_{37}, (F_{38})^* = F_{38}, (F_{41})^* = F_{53}, (F_{42})^* = F_{54},$
$(F_{43})^* = F_{51}, (F_{44})^* = F_{52}, (F_{45})^* = F_{60}, (F_{46})^* = F_{56}, (F_{47})^* = F_{58}, (F_{48})^* = F_{57},$
$(F_{49})^* = F_{59}, (F_{50})^* = F_{55}.$

Ținând cont de Lema 3.5.1. și 3.5.4., soluționăm problema existenței unității în identitățile de tip Bol-Moufang.

Evidențiem unele teoreme și corolaruri:

Teorema 3.5.6. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_7 $(xy \cdot z)x = x(yz \cdot x)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Corolarul 3.5.2. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identittatea F_8 $(x \cdot yz)x = x(y \cdot zx)$ are unitate la dreapta și nu are unitate la stânga.

Teorema 3.5.7. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_9 $(x \cdot yz)x = x(yz \cdot x)$ nu are unitate nici la stânga nici la dreapta.

Teorema 3.5.9. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu indentitatea F_{12} $xy \cdot xz = (x \cdot yx)z$ este grup.

Corolarul 3.5.4. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{23} $yx \cdot zx = y(xz \cdot x)$ este grup.

Teorema 3.5.21. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{36} $(RC\ identitate)$ $(yx \cdot x)z = y(xx \cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Corolarul 3.5.16. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{39} $(LC\ identitate)$ $(y \cdot xx)z = y(x \cdot xz)$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Teorema 3.5.24. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{41} $(LC\ identitate)$ $xx \cdot yz = (x \cdot xy)z$ este buclă.

Corolarul 3.5.17. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{53} $(RC\ identitate)$ $yz \cdot xx = y(zx \cdot x)$ este buclă.

Astfel este rezolvat obiectivul 2.

În **Capitolul patru – Cvazigrupuri tranzitive la stânga. Cvazigrupuri Neumann și Schweizer** – sunt reflectate rezultatele publicate în lucrările: [20], [21], [25], [26], [16], [17]. În acest capitol sunt realizate obiectivele, care se referă la cercetarea G-proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann și la cercetarea relațiilor acestor cvazigrupuri cu cvazigrupele Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a. clase de cvazigrupuri.

Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *cvazigrup tranzitiv la stânga*, dacă în acest cvazigrup are loc identitatea $xy \cdot xz = yz$. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *cvazigrup Neumann*, dacă în $(Q,\cdot)$ are loc identitatea $x \cdot (yz \cdot yx) = z$.

În paragrafele 4.1.-4.5. sunt formulate rezultatele obținute la cercetarea cvazigrupurilor tranzitive la stânga și anume: despre relația acestor cvazigrupuri cu alte clase de cvazigrupuri, despre nucleu, despre morfizme, despre G-proprietăți.

În paragrafele 4.6.-4.8. sunt formulate rezultatele obținute pentru cvazigrupele Neumann.

Ambele clase sunt izotope grupului. Urmează teoremele:

Teorema 4.1.1. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(G,\circ)$ poate fi căpătat din grupul $(G,+)$ (nu neapărat comutativ) folosind următoarea construcție

$$x \circ y = -x + y = Ix + y, \tag{4.2}$$

unde $x + Ix = 0$ pentru toți $x, y \in G$.

Teorema 4.6.3. Orice cvazigrup Neumann este izotop grupului abelian $(Q,+)$ de forma $x \cdot y = x - y$.

Cercetând nucleele acestor cvazigrupuri s-a obținut: pentru cvazigrupurile tranzitive la stânga nucleul la stânga este subgrup normal al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, constituit din elemente de ordin doi, aflate în centrul grupului $(Q,+)$; pentru cvazigrupurile Neumann, nucleul la dreapta conține astfel de elemente ale mulțimii Q, încât $a = -a$.

Din cercetarea autotopiilor și cvaziautomorfismelor s-au obținut formele lor. Cercetarea G-proprietățile acestor cvazigrupuri a constatat că orice cvazigrup Neumann $(Q,\cdot)$ este GA-cvazigrup (Teorema 4.8.1.); pentru cvazigrupul tranzitiv la stânga este formulată condiția necesară și suficientă ca el să fie GA-cvazigrup (Corolarul 4.5.1.).

Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea $yz \cdot yx = xz$ se numește *cvazigrup Schweizer.*

Rezultatul important:

Teorema 4.6.5. Orice cvazigrup Schweizer $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Neumann și invers.

Mulțumiri. Exprim sinceră recunoștință conducătorului științific *Victor Alexeevici Șcerbacov* pentru determinarea domeniului și formularea obiectivelor de cercetare, pentru cunoștințele pe care le-am căpătat pe parcursul celor patru ani de doctorantură și pentru ajutorul pe care mi l-a oferit în realizarea publicațiilor și scrierea tezei.

Cu deosebită considerație și recunoștință aduc mulțumiri profesorului, candidatului în științe fizico-matematice, *Ivan Arhipovici Florea,* care a ghidat primii mei pași în teoria cvazigrupurilor, primele cercetări ale diferitor clase de cvazigrupuri. Publicațiile Dumnealui servindu-mi ca repere ale următoarelor cercetări.

Exprim recunoștință directorului școlii doctorale Matematică și Știința Informației, academicianului $\boxed{Mitrofan\ Mihailovici\ Cioban}$, pentru răbdare, indrumare și încurajare.

5. CONCLUZII GENERALE

Cercetările efectuate în teza de doctor "Morfismele şi proprietăţile sistemelor algebrice neasociative cu condiţii de tip Moufang" corespund în totalitate scopului și obiectivelor stabilite în introducere.

Clasa cvazigrupurilor conține cea a grupurilor (orice grup este un cvazigrup), domeniu care a cunoscut o evoluție extraordinară în secolul XX și continuă să se dezvolte rapid în prezent. Noțiunea de cvazigrup este mai generală ca cea de grup, deci se regăsește ca echivalent algebric într-un spectru mai larg de probleme ale mediului în care existăm și necesită abordări specifice, care lipsesc în teoria grupurilor.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în aplicarea relațiilor de tipul morfismelor la cercetarea proprietăților și existenței unității în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang, ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele de cvazigrupuri studiate.

Rezultatele principale ale tezei sunt noi. Analizând rezultatele obținute putem evidenția următoarele concluzii generale:

1. S-a stabilit că orice WA-cvazigrup, care este un IP-cvazigrup, este un cvazigrup Moufang; S-a dovedit că în WA-cvazigrupul cu unitate la stânga permutările interne în raport cu unitatea sunt automorfisme ale cvazigrupului; pentru permutările interne în raport cu elementul $a \in Q$ s-a găsit condiția necesară și suficientă când sunt automorfisme [14];
2. Cercetând WIP-cvazigrupurile generalizate s-a găsit condiția când acest cvazigrup este izotop unei LIP-bucle. Presupunând, că orice buclă izotopă unui $OWIP$-cvazigrup este o LIP-buclă, s-a obținut o identitate nouă în acest cvazigrup. A fost găsită relația dintre $OWIP$-cvazigrupuri cu identitatea dată și cvazigrupurile Bol la stânga (la dreapta) [22];
3. S-a demonstrat că orice CI-grupoid la stânga este un CI-cvazigrup [19], [15];

4. A fost definită și studiată noțiunea de i-cvazigrup, relațiile lor cu alte clase de cvazigrupuri. S-a demonstrat că i-cvazigrupurile idempotente sunt cvazigrupuri Bol la stânga, Stein la dreapta, distributive la stânga [13], [24];
5. A fost soluționată problema existenței unității (la stânga, la dreapta, medie) în cvasigrupuri cu identitățile de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea Extra loops II, de F. Fenyves (1969). În lucrare este prezentat tabelul cu datele privind existența unității pentru fiecare dintre cele 60 de identități [18], [27];
6. S-a demonstrat că noțiunea de cvazigrup Neumann coincide cu cea de cvazigrup Schweizer [20], [21], [26], [16].

Teza propusă spre susținere utilizează relații de tip morfisme la cercetarea proprietăților și existenței unităților în sisteme algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang, ce conduc la descrierea noilor relații importante dintre clasele de cvazigrupuri, conține soluționarea completă a problemei existenței unității în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang.

Recomandări:

1. Soluționarea problemei existenței unității pentru fiecare dintre cele 60 de cvazigrupuri ce satisfac identități de tip Bol-Moufang poate fi utilizată în cercetarea cvazigrupurilor cu identități de tip Bol-Moufang.
2. Rezultatul care demonstrează că orice CI-grupoid este un CI-cvazigrup deschide noi posibilități în cercetarea CI-cvazigrupurilor.
3. În teză sunt definite două clase noi de cvazigrupuri: i-cvazigrupurile și $OWIP$-cvazigrupurile. În lucrare sunt cercetate unele proprietăți ale acestor clase de cvazigrupuri, însă teoria generală a lor urmează a fi elaborată.
4. Rezultatele obținute pot fi aplicate la elaborarea unor cursuri opționale pentru masteranzi și doctoranzi.

BIBLIOGRAFIE

[1] R. MOUFANG, Zur Structur von Alternativ Korpern, *Mathematische Annalen,* vol. 110, pp. 416-430, 1935. ISSN 0025-5831

[2] K. KISHEN, On the construction of latin and hyper-graceo-latin cubes and hypercubes, *J. Ind. Soc. Agric. Statisr.,* no. 2, pp. 20-48, 1950. ISSN 0019-6363

[3] O. CHEIN, H. PFLUGFELDER and J. SMITH, Quasigroups and loops: Theory and applications, *Helderman Verlag,* 1990. ISBN-10: 3885380080

[4] A. A. UNGAR, The hyperbolic triangle centroid, *Comment. Math. Univ. Carolin.,* vol. 45, no. 2, pp. 355-370, 2004. ISSN 0010-2628

[5] A. I. NESTEROV and L. V. SABININ, Non-associative geometry and discrete structure of spacetime, *Math. Univ. Carolin.,* vol. 41, no. 2, pp. 347-357, 2000. ISSN 0010-2628

[6] J. D. H. SMITH, Loop transversals to linear codes, *J. Combin. Inform. System Sci.,* vol. 17, pp. 1-8, 1992. ISSN 0250-9628

[7] J. DENES and A. D. KEEDWELL, Latin squares and their applications, *Akademiai Kiado, Budapest,* 1974. ISBN 9780122093500

[8] A. A. ALBERT, Quasigroups, *Transactions of the American Mathematical Society,* vol. 54, no. 1, pp. 507-519, 1943. ISSN 0002-9947

[9] R. BAER, Nets and groups, *Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 46, pp. 110-141, 1939. ISSN 0002-9947

[10] R. ARTZY, On loops with a special property, *Proc. Amer. Math. Soc.,* no. 6, pp. 448-453, 1955. ISSN 0002-9939

[11] В. Д. БЕЛОУСОВ и Б. В. ЦУРКАН, Скрещенно-обратимые квазигруппы (CI-квазигруппы), *Изв. Выш. Учебн. Завед. Математика.,* т. 82(3), pp. 21-27, 1969. 0021-3446 (print)

[12] F. FENYVES, Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type, *Publ. Math. Debrecen,* no. 16, pp. 187-192, 1969. ISSN 0033-3883

[13] **N. N. DIDURIK** and I. A. FLORJA, Some properties of i-quasigroups, *Quasigroups and Related Systems,* vol. 28, no. 2, pp. 183-194, 2020. ISSN (Print) 1561-2848

[14] **N. N. DIDURIK** and I. A. FLORJA, A note on left loops with WA-property, *Quasigroups and Related Systems,* vol. 24, no. 2, pp. 186-196, 2016. ISSN(Print) 1561-2848

[15] **N. N. DIDURIK** and V. A. SHCHERBACOV, On definition of CI-quasigroup, *Romai Journal*, vol. 13, no. 2, pp. 55-58, 2017. ISSN(Print) 1841-5512

[16] **N. DIDURIK**, Some properties of Neumann quasigroups, 2018. [Online]. Available: https://arxiv.org/pdf/1809.07095.pdf.

[17] **N. DIDURIK**, Some properties of left-transitive quasigroups, *Buletinul academiei de științe a republicii Moldova,* vol. 87, no. 2, pp. 85-94, 2018. ISSN: 1024-7696

[18] **N. DIDURIK** and V. SHCHERBACOV, Units in quasigroups with classical Bol-Moufang type identities, *Comment. Math. Univ. Carolin.,* vol. 61, no. 4, pp. 427-435, 2020. ISSN 0010-2628

[19] **N. DIDURIC**, CI-quasigrupuri, în "*Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători": Conferința Științifică a Doctoranzilor*, Chișinău, 2017, pp. 25-29. ISBN 978-9975-108-66-9

[20] **N. DIDURIC**, Despre unele proprietăți ale quasigrupurilor cu identitatea lui Neumann, in "*Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători": Conferința Științifică a Doctoranzilor*, Chișinău, 2018, pp. 11-14. ISBN 978-9975-108-66-9

[21] **N. DIDURIK**, A-pseudo-automorfismele quasigrupurilor tranzitive la stânga, in *International conference on mathematics, informathics and information tehnologies dedicated to the illustrious scietist Valentin Belousov*, Bălți, 2017, pp. 39-40. ISBN 978-9975-3214-7-1

[22] **N. DIDURIK**, Generalized WIP-quasigroups, in *The Fourth Conferece of Mathematical of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4*, Chișinău, 2017, pp. 67-70. ISBN 978-9975-71-915-5

[23] **N. N. DIDURIK** and V. A. SHCHERBACOV, On definition of CI-quasigroups, in *The 25rd Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM*, Iași, 2017, p. 87. ISSN 2038-0909

[24] **N. DIDURIK**, i-Quasigroups, in *International conference Mathematics&Information technologies: research and education, MITRE-2019*, Chișinău, 2019, pp. 26-27.

[25] **N. DIDURIK**, On left-transitive quasigroups, in *The 25rd Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM*, Iași, 2017, p. 86.

[26] **N. DIDURIK**, Some properties of Neumann quasigroups, in *The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018*, Chișinău, 2018, p. 93.

[27] **N. DIDURIK** and V. A. SCHERBACOV, Units in quasigroups with non-classical Bol-Moufang type identities, in *The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55)*, Chișinău, 2019 pp. 57-60.

[28] **N. DIDURIK** and V. SCHERBACOV, Units in quasigroups with Bol-Moufang type of identities, in *LOOPS Conference Budapest University of Technology and Economics*, Hungary, 2019, p. 49.

[29] V. A. SHCHERBACOV, On the structure of left and right F-, SM- and E-quasigroups, *J. Gen. Lie Theory Appl.*, no. 3, pp. 197-259, 2009. ISSN 1736-5279

[30] К. К. ЩУКИН, Действие группы на квазигруппе, Кишинев: Государственный университет, 1985.

[31] H. O. PFLUGFELDR, Quasigroups and Loops: Introduction, Berlin: Heldermann Verlag, 1990. ISBN 3-88538-007-2

[32] M. OSBORN, Loops with the weak inverse property, *Pacif. J. Math.*, vol. 10, no. 1, pp. 295-304, 1960. ISSN 0030-8730

[33] A. D. KEEDWELL, Crossed-inverse quasigroups with long inverse cycles and applications to cryptography, *Australas. J. Combin*, vol. 20, pp. 241-250, 1999. ISSN 1034-4942

[34] R. H. BRUCK, A Survey of Binary Systems, *Springer Verlag*, 1971. ISBN 978-3-662-43119-1

[35] T. G. JAYEOLA, E. ILOJIDE, M. O. OLATINWO and F. SMARANDACHE, On the Classification of BolMoufang Type of Some Varieties of Quasi Neutrosophic Triplet Loop (Fenyves BCI-Algebras), in *Symmetry*, 2018. ISSN 2073-8994

[36] G. HOROSH, V. SHCHERBACOV, A. TCACHENCO and T. YATSKO, On some groupoids with Bol-Moufang type identities, 2019. [Online]. Available: arxiv.org.1904.v1.

[37] R. AKHTAR, A. ARP, M. KAMINSKI, J. VAN EXEL, D. VERNON and C. WASHINGTON, The varieties of Bol-Moufang quasigroups defined by a single operation, *Quasigroups Related Systems,* vol. 20(1), pp. 1-10, 2012. ISSN(Print) 1561-2848

[38] B. COTE, B. HARVILL, M. HUHN and A. KIRCHMAN, Classification of loops of generalized Bol-Moufang type, *Quasigruops Related Systems,* vol. 19(2), pp. 193-206, 2011. ISSN(Print) 1561-2848

ADNOTARE

La teza “**Morfismele şi proprietăţile sistemelor algebrice neasociative cu condiţii de tip Moufang**”, înaintată de către Diduric Natalia pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţe matematice la specialitatea 111.03 - Logică Matematică, Algebră şi Teoria Numerelor.

Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Moldova, Chişinău, anul 2021.

Structura tezei: teza este scrisă în limba română şi conţine introducere, patru capitole, concluzii generale şi recomandări, 98 titluri bibliografice, 95 pagini (inclusiv 86 pagini de text de bază). Rezultatele obţinute sunt publicate în 16 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte-cheie: cvazigrup, buclă, grup, grupoid, izotop, automorfism, unitate la stânga, unitate la dreapta, pseudoautomorfism, cvazigrup Bol la stânga (la dreapta), cvazigrup Moufang, WA-cvazigrup, CI-cvazigrup, i-cvazigrup, cvazigrup medial, cvazigrup Neumann, cvazigrup tranzitiv, G-proprietăţi.

Domeniul de studiu al tezei: algebră, în special, teoria cvazigrupurilor cu identităţi, inclusiv identităţile de tip Bol-Moufang, proprietăţile sistemelor algebrice neasociative.

Scopul şi obiectivele lucrării. Scopul lucrării este cercetarea proprietăţilor sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Bol-Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective: cercetarea relațiilor WA-, CI-cvazigrupurilor, cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, Bol la dreapta ș.a.; cercetarea existenței unității în cvazigrupurile cu fiecare dintre cele 60 de identități de tip Bol-Moufang, enumerate în [12]; cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri noi definite în lucrare (i-cvazigrupuri și $OWIP$-cvazigrupuri); cercetarea G-proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică constă în obţinerea rezultatelor noi de ordin teoretic. Toate rezultatele prezentate în teză sunt noi şi originale. Au fost cercetate diverse clase de cvazigrupuri (WA-, CI-cvazigrupuri, cvazigrupuri tranzitive la stânga, Neumann ș.a.). Au fost introduse şi cercetate două clase noi de cvazigrupuri (WIP-cvazigrupuri generalizate, i-cvazigrupuri). Au fost cercetate clase de cvazigrupuri izotope grupurilor. Sunt descrise proprietăţile unor clase de cvazigrupuri inversabile. Au fost cercetate conexiuni între clasele de cvazigrupuri studiate și cvazigrupurile clasice Moufang, Bol ș.a. Sunt determinate formele generale ale automorfismelor, pseudoautomorfismelor și cvaziautomorfismelor acestor cvazigrupuri.

SUMMARY

In the thesis “**Morphisms and properties of non-associative algebraic systems with Moufang type conditions**”, submitted by Diduric Natalia for obtaining the title of doctor in mathematical sciences in the specialty 111.03 - Mathematical Logic, Algebra and Number Theory. The thesis was developed at the State University of Moldova, Chisinau, 2021.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and contains an introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, 98 bibliographic titles, 95 pages (including 86 pages of basic text). The obtained results are published in 16 scientific papers.

Keywords: quasigroup, loop, group, groupoid, isotope, automorphism, left unit, right unit, pseudo-automorphism, left Bol (right) quasigroup, Moufang quasigrup, WA-quasigroup, CI-quasigroup, i-quasigroup, medial quasigroup, Neumann quasigroup, transitivity, G-properties.

Thesis field of study: algebra, in spesial, the theory of quasigroups with identities including Bol-Moufang-type identities, properties of non-associative algebraic systems.

The purpose and objectives of the paper. The aim of the paper is to investigate the properties of non-associative algebraic systems with Bol-Moufang type identities. To achieve this goal, the following objectives have been defined: research on the relations of WA-, CI-quasi-groups, transitive on the left and Neuman with the quasigroups Moufang, Bol on the left, on the right, etc .; research of quasigroups with any of the 60 classical Bol-Moufang identities listed in [12] at the existence of the unit; research of morphisms, properties, relationships with other classes of quasigroups of newly defined quasigroups (i-quasigroups and WIP- generalized quasigroups); research on the G-properties of left transitive quasigroups and Neumann.

Scientific novelty and originality consist in obtaining new theoretical results. All the results presented in the thesis are new and original. Diverse classes of quasigroups known earlier (WA-, CI -quasigroups, transitive left quasigroups, Neumann, etc.) were researched. Two new classes of quasigroups were introduced and researched (i-quasigroups, WIP-generalized quasigroups). Isotope group quasigroup classes were investigated. The properties of some classes of invertible quasigroups were described. Connections between the studied quasigroup classes and the classical quasigroups Moufang, Bol, etc. were investigated. The general forms of the automorphisms, pseudoautomorphisms and quasitomorphisms of these quasigroups were determined.

MORFISMELE ŞI PROPRIETĂŢILE SISTEMELOR ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIŢII DE TIP MOUFANG

111.03 LOGICĂ MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Rezumatul tezei de doctor în științe matematice

Aprobat spre tipar: 18.05.21	Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset.	Tiraj 30 ex.
Coli de tipar: 1,6	Comanda nr. 1

Or. Tiraspol, str. 25 Octombrie, 107, MD-3300, Moldova.