

**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII
UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
CONSORTIUL ACADEMIC: INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ȘI
INFORMATICĂ “VLADIMIR ANDRUNACHIEVICI”, UNIVERSITATEA
DE STAT DIN TIRASPOL (CU SEDIUL LA CHIȘINĂU),
UNIVERSITATEA DE STAT “ALECU RUSSO” DIN BĂLȚI**

Cu titlul de manuscris

C.Z.U: 512.548

DIDURIC NATALIA

**MORFISMELE ȘI PROPRIETĂȚILE SISTEMELOR
ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIȚII DE TIP
MOUFANG**

**111.03 LOGICĂ MATEMATICĂ,
ALGEBRĂ ȘI TEORIA NUMERELOR**

Teză de doctor

Autorul:

Diduric Natalia

Conducător științific:

Șcerbacov Victor, doctor habilitat

CHIȘINĂU, 2021

CUPRINS

ADNOTARE	4
SUMMARY	5
INTRODUCERE	6
1. ANALIZA SITUAȚIEI ÎN DOMENIUL SISTEMELOR ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIȚII DE TIP MOUFANG	11
1.1. Grupoizi. Definițiile cvazigrupului și buclei	11
1.2. Operațiile inverse ale cvazigrupului (parastrofii)	12
1.3. Proprietățile cvazigrupurilor. Noțiuni generale.	13
1.4. Cvazigrupuri cu proprietate inversă la stânga (<i>LIP</i> -cvazigrupuri). Cvazigrupuri cu proprietate inversă la dreapta (<i>RIP</i> -cvazigrupuri).	17
1.5. Cvazigrupul Bol la stânga. Cvazigrupul Bol la dreapta. Bucle Moufang.....	18
1.6. Concluzii la capitolul 1	20
2. DESPRE UNELE CLASE DE CVAZIGRUPURI CU PROPRIETĂȚI DE INVERSABILITATE (<i>WA</i>–, <i>OWIP</i>–, <i>CI</i> –CVAZIGRUPURI).....	21
2.1. Proprietățile <i>WA</i> -buclelor la stânga.....	21
2.2. Automorfismele <i>WA</i> -buclelor la stânga	25
2.3. Pseudoautomorfisme și subbucle.....	28
2.4. <i>WIP</i> -cvazigrupuri generalizate (<i>OWIP</i> -cvazigrupuri).....	29
2.5. Despre definirea <i>CI</i> -cvazigrupurilor	31
2.6. Izotopii <i>CI</i> -cvazigrupului.....	33
2.7. Concluzii la capitolul 2	36
3. DESPRE O CLASĂ DE <i>i</i>-CVAZIGRUPURI. UNITĂȚILE ÎN CVAZIGRUPURILE DE TIP BOL-MOUFANG	38
3.1. <i>i</i> -cvazigrupuri cu distributant nevid.....	38
3.2. Relația <i>i</i> -cvazigrupurilor cu alte cvazigrupuri	43
3.3. <i>i</i> -cvazigrupuri cu identități alternative și de elasticitate	46
3.4. Pseudoautomorfisme ale <i>i</i> -cvazigrupurilor.....	51
3.5. Unitățile în cvazigrupurile cu identități de tip Bol-Moufang	52

3.6. Concluzii la capitolul 3	67
4. CVAZIGRUPURI TRANZITIVE LA STÂNGA. CVAZIGRUPURI NEUMANN ȘI SCHWEIZER	69
4.1. Proprietățile de bază ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga	69
4.2. Cvazigrupuri tranzitive la stânga și alte clase de cvazigrupuri.....	71
4.3. Nucleul cvazigrupurilor tranzitive la stânga	73
4.4. Despre morfismele cvazigrupurilor tranzitive la stânga	74
4.5. G -proprietăți ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga	75
4.6. Rezultatele de bază ale cvazigrupurilor Neumann.....	77
4.7. Pseudoautorfisme, cvaziautomorfisme ale cvazigrupului Neumann	80
4.8. G -proprietăți ale cvazigrupului Neumann.....	82
4.9. Concluzii la capitolul 4	83
CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI	84
BIBLIOGRAFIE	86
DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII	95
CV-ul AUTOAREI	96

ADNOTARE

La teza “**Morfismele și proprietățile sistemelor algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang**”, înaintată de către Diduric Natalia pentru obținerea titlului de doctor în științe matematice la specialitatea 111.03 - Logică Matematică, Algebră și Teoria Numerelor.

Teza a fost elaborată la Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, anul 2021.

Structura tezei: teza este scrisă în limba română și conține introducere, patru capitole, concluzii generale și recomandări, 98 titluri bibliografice, 95 pagini (inclusiv 86 pagini de text de bază). Rezultatele obținute sunt publicate în 16 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: cvazigrup, buclă, grup, grupoid, izotop, automorfism, unitate la stânga, unitate la dreapta, pseudoautomorfism, cvazigrup Bol la stânga (la dreapta), cvazigrup Moufang, WA -cvazigrup, CI -cvazigrup, i -cvazigrup, cvazigrup medial, cvazigrup Neumann, cvazigrup tranzitiv, G -proprietăți.

Domeniul de studiu al tezei: algebră, în special, teoria cvazigrupurilor cu identități, inclusiv identitățile de tip Bol-Moufang, proprietățile sistemelor algebrice neasociative.

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul lucrării este cercetarea proprietăților sistemelor algebrice neasociative cu identități de tip Bol-Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective: cercetarea relațiilor WA -, CI -cvazigrupurilor, cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, Bol la dreapta ș.a.; cercetarea existenței unității în cvazigrupurile cu fiecare dintre cele 60 de identități de tip Bol-Moufang, enumerate în [1]; cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri noi definite în lucrare (i -cvazigrupuri și $OWIP$ -cvazigrupuri); cercetarea G -proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

Noutatea și originalitatea științifică constă în obținerea rezultatelor noi de ordin teoretic. Toate rezultatele prezentate în teză sunt noi și originale. Au fost cercetate diverse clase de cvazigrupuri (WA -, CI -cvazigrupuri, cvazigrupuri tranzitive la stânga, Neumann ș.a.). Au fost introduse și cercetate două clase noi de cvazigrupuri (WIP -cvazigrupuri generalizate, i -cvazigrupuri). Au fost cercetate clase de cvazigrupuri izotope grupurilor. Sunt descrise proprietățile unor clase de cvazigrupuri inversabile. Au fost cercetate conexiuni între clasele de cvazigrupuri studiate și cvazigrupurile clasice Moufang, Bol ș.a. Sunt determinate formele generale ale automorfismelor, pseudoautomorfismelor și cvaziautomorfismelor acestor cvazigrupuri.

SUMMARY

In the thesis “**Morphisms and properties of non-associative algebraic systems with Moufang type conditions**”, submitted by Diduric Natalia for obtaining the title of doctor in mathematical sciences in the specialty 111.03 - Mathematical Logic, Algebra and Number Theory. The thesis was developed at the State University of Moldova, Chisinau, 2021.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and contains an introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, 98 bibliographic titles, 95 pages (including 86 pages of basic text). The obtained results are published in 16 scientific papers.

Keywords: quasigroup, loop, group, groupoid, isotope, automorphism, left unit, right unit, pseudo-automorphism, left Bol (right) quasigroup, Moufang quasigroup, *WA*-quasigroup, *CI*-quasigroup, *i*-quasigroup, medial quasigroup, Neumann quasigroup, transitivity, *G*-properties.

Thesis field of study: algebra, in special, the theory of quasigroups with identities including Bol-Moufang-type identities, properties of non-associative algebraic systems.

The purpose and objectives of the paper. The aim of the paper is to investigate the properties of non-associative algebraic systems with Bol-Moufang type identities. To achieve this goal, the following objectives have been defined: research on the relations of *WA*-, *CI*-quasigroups, transitive on the left and Neuman with the quasigroups Moufang, Bol on the left, on the right, etc .; research of quasigroups with any of the 60 classical Bol-Moufang identities listed in [1] at the existence of the unit; research of morphisms, properties, relationships with other classes of quasigroups of newly defined quasigroups (*i*-quasigroups and *WIP*- generalized quasigroups); research on the *G*-properties of left transitive quasigroups and Neumann.

Scientific novelty and originality consist in obtaining new theoretical results. All the results presented in the thesis are new and original. Diverse classes of quasigroups known earlier (*WA*-, *CI* -quasigroups, transitive left quasigroups, Neumann, etc.) were researched. Two new classes of quasigroups were introduced and researched (*i*-quasigroups, *WIP*-generalized quasigroups). Isotope group quasigroup classes were investigated. The properties of some classes of invertible quasigroups were described. Connections between the studied quasigroup classes and the classical quasigroups Moufang, Bol, etc. were investigated. The general forms of the automorphisms, pseudoautomorphisms and quasitomorphisms of these quasigroups were determined.

INTRODUCERE

Teza prezintă rezultatele teoretice ale studiului morfismelor și proprietăților sistemelor algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în criptografie.

Teoria cvazigrupurilor își ia începutul în anii 20–30 ai secolului XX, după publicarea lucrărilor fundamentale ale lui David Hilbert, la sfârșitul secolului XIX, care țin de axiomatizarea matematicii și, în particular, de axiomatizarea geometriei, apariția lucrărilor referitoare la diferite sisteme de axiome, în general la sistemele de axiome ale diverselor geometrii, inclusiv geometriei euclidiene, geometriei proiective, geometriei Lobachevski, în dimensiunile 2 și 3.

Însuși termenul „cvazigrup” a apărut în lucrarea lui Ruth Moufang [2] consacrată problemelor coordinatizării planurilor proiective. Putem afirma, de asemenea, că termenul „cvazigrup” a apărut în studiul independenței axiomelor planului proiectiv.

În lucrările sale Moufang prin cvazigrup percepea obiectul, care acum este numit buclă Moufang. În termeni moderni, ea a definit bucla Moufang ca o *IP*-buclă $(Q, \cdot)$ cu “asociativitate slabă”.

Însăși Moufang a cercetat *IP*-buclele, care satisfac identitatea $a(c \cdot ab) = (ac \cdot a)b$ (“Quasi-gruppe Q^* ”) sau identitatea $(ab)(ca) = a((bc)a)$ (“Quasi-gruppe Q^{**} ”), unde $a, b, c \in Q$ [2].

Identitățile menționate mai sus poartă numele de identitatea Moufang la stânga și identitatea Moufang medie, respectiv.

Peste doi ani după apariția lucrărilor Moufang a fost publicată o lucrare importantă la tema cvazigrupurilor de Gerrit Bol (1937), și anume “Gewebe und Gruppen”. Bol a abordat noțiunea de cvazigrup din punct de vedere geometric. El construiește trei noi configurații U_1 , U_2 , U_3 și pune întrebarea dacă închiderea acestor trei figuri implică asociativitatea. El răspunde la această întrebare negativ și arată că cele trei figuri U împreună implică numai legea $a[b(cb)] = [(ab)c]b$, care este tocmai una din identitățile Moufang. Pentru a demonstra acest lucru, Bol indică un exemplu construit de către Zassenhaus. Acesta a fost, de fapt, primul exemplu de buclă neasociativă comutativă Moufang. Mai mult, Bol explică semnificația algebrică a fiecărei dintre figurile U , că U_1 și U_2 corespund unor legi care sunt numite în prezent identitățile Bol la dreapta și Bol la stânga, respectiv: $a((bc)b) = ((ab)c)b$ și $(b(cb))a = b(c(ba))$. În scurt timp Zassenhaus a construit și primul exemplu de buclă Bol la dreapta.

Bol a demonstrat, de asemenea, următoarele proprietăți implicate de U :

U_1 . Proprietatea inversă la dreapta: $(dc)c' = d$;

U2. Proprietatea inversă la stânga: $a'(ab) = b$;

U3. Legea inversă antiautomorfică: $(ab)' = b'a'$.

Bol arată, că împreună, U1 și U2 implică U3, iar când toate cele trei configurații sunt închise, se obține cvazigrupul Moufang. În particular Bol arată că cvazigrupul Moufang satisface legea flexibilității: $b(cb) = (bc)b$ [3]. Astfel, Bol obține că o buclă este Moufang dacă și numai dacă ea este atât Bol la dreapta cât și la stânga.

Mai târziu (1937) A. C. Sușchevici a definit cvazigrupurile mediale (abeliene) ([4], p. 157). Menționăm și lucrările lui A. A. Albert ([5], [6]), D. Medoch [7], K. Toyoda [8], R. H. Bruck [9], R. Baer ([10], [11]).

În prezent, teoria cvazigrupurilor, teoria pătratelor latine și teoria rețelelor se dezvoltă destul de intens. Și, deși fiecare dintre aceste teorii are propriile realizări, sarcini și probleme, ele până acum se dezvoltă, intersectându-se și completându-se.

Cvazigrupurile au multiple aplicări în statistică (teoria planificării experimentului) [12], teoria ecuațiilor diferențiale [13], geometria diferențială [13], geometria hiperbolică [14], fizică [15], teoria codurilor [16], criptografie [17].

Pentru cvazigrupuri, în special cele legate de combinatorică, au fost determinate și activ cercetate diferite transformări (morfisme), printre care de menționat: izomorfismele, automorfismele, izotopiile, autotopiile, izostrofiile, autostrofiile, izotopiile generalizate. Automorfismele și grupurile automorfismelor buclilor au fost cercetate de către A.A. Albert încă în primele lucrări ce țin de teoria cvazigrupurilor [5], [6].

Aproape toate clasele bine cunoscute (clasice) de cvazigrupuri și bucle posedă proprietăți de inversabilitate. Cel mai des aceste cvazigrupuri posedă una din proprietățile *IP*, *LIP*, *RIP*, *WIP* sau *CI*.

IP- și *LIP*- buclele au fost definite în lucrarea lui R. Moufang [2], *WIP*-buclele – în lucrarea lui R. Baer [10], iar *CI*-buclele au fost definite de către Rafael Artzy în [18]. V.D. Belousov și B.V. Țurcan au definit și studiat *CI*-cvazigrupurile în [19].

Clasa tuturor cvazigrupurilor este vastă. Ele sunt studiate cu ajutorul identităților pe care le verifică, nucleului, unor proprietăți (universale), evidențiind clase separate de cvazigrupuri. Cele 60 de identități de tip Bol-Moufang enumerate în lucrarea [1] includ identitățile Bol la stânga, Bol la dreapta și cele trei identități Moufang. Aceste identități reprezintă o formă mai slabă a legii asociative, iar în cazul buclilor, unele dintre ele implică asociativitatea. Lucrările publicate de R. Moufang, G. Bol, R. X. Bruck, V. D. Belousov, C. Kunen, S. Gagola III, J.D. Philips ș. a. sunt dedicate cercetării cvazigrupurilor și buclilor cu identități de tip Bol-Moufang [2], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29].

Problema importantă abordată în lucrare ține de cercetarea proprietăților sistemelor algebrice neasociative cu identități de tip Bol-Moufang și aflarea relațiilor dintre aceste subclase și clasele principale Moufang și Bol, aplicând morfismele. Bibliografia referitoare la aceste probleme este vastă. Menționăm doar câteva lucrări în această direcție [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [25]. Acest aspect determină **actualitatea și importanța problemei abordate**.

Scopul și obiectivele tezei. Scopul lucrării constă în cercetarea morfismelor și proprietăților sistemelor algebrice neasociative cu identități de tip Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective:

- (1) cercetarea relațiilor WA -, CI -cvazigrupurilor, tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.;
- (2) cercetarea existenței unității în cvazigrupuri cu fiecare dintre cele 60 de identități de tip Bol-Moufang enumerate în lucrarea [1];
- (3) cercetarea morfismelor, proprietăților și relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri noi definite în lucrare (i -cvazigrupuri și WIP -cvazigrupuri generalizate);
- (4) cercetarea G -proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

Problema științifică importantă soluționată constă în aplicarea relațiilor de tipul morfismelor la cercetarea proprietăților și existenței unității în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele studiate de cvazigrupuri.

Importanța teoretică și valoarea aplicativă a lucrării este determinată de obținerea unor rezultate noi în cercetarea sistemelor neasociative cu identități de tip Bol-Moufang. Lucrarea poartă un caracter teoretic. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în predarea cursurilor de specialitate pentru studenții, masteranzii și doctoranzii de la specialitățile de matematică.

Aprobarea rezultatelor. Rezultatele științifice obținute au fost expuse și aprobate în cadrul Sesiunii speciale a Seminarului “Algebră și Logică matematică”, dedicate memoriei Profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică și Informatică “Vladimir Andrunachievici” al Academiei de Științe a Moldovei. Rezultatele principale incluse în teză au fost prezentate la următoarele conferințe științifice:

- The 25rd Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017, September 14–17, 2017, Iași.
- International conference on mathematics, informathics and information technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, 19-21 april, 2018, Bălți.

- The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018, September 20-23, 2018, Chişinău.
- International conference Mathematics&Information technologies: research and education, MITRE-2019 Moldova State University, June 24 2019, Chişinău.
- LOOPS 2019 Conference Budapest University of Technology and Economics, July 7-July 11, 2019, Hungary.
- The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55), September 30, 2019.
- «Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători»: Conferinţa Ştiinţifică a Doctoranzilor (cu participare internaţională), ediţia a 6-a, Chişinău, 15 iunie 2017.
- The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4, June 28 – July 2, 2017 Chişinău.
- «Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători»: Conferinţa Ştiinţifică a Doctoranzilor (cu participare internaţională), ediţia a VII-a Chişinău, 15 iunie 2018.

Publicaţii la tema tezei. În total 16 publicaţii ştiinţifice, cuprinzând 6 articole în reviste recenzate de specialitate (2 articole fără coautori) şi 10 rezumate la conferinţe ştiinţifice (7 rezumate fără coautori).

Sumarul compartimentelor tezei. Structura tezei este reprezentată în patru capitole, care conţin rezultatele teoretice obţinute în cercetarea proprietăţilor sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Bol-Moufang. De asemenea, teza conţine o adnotare în limbile engleză şi română, introducere, concluzii generale şi recomandări, Bibliografie cu 98 de titluri.

În introducere este formulată actualitatea şi importanţa problemei abordate, sunt menţionate obiectivele, noutatea ştiinţifică şi originalitatea tezei. Problema ştiinţifică studiată subliniază importanţa teoretică şi aplicativă a lucrării. Este prezentată o scurtă analiză a problemelor şi publicaţiilor la tema tezei. Această secţiune se încheie cu un rezumat al conţinutului lucrării.

Primul capitol al tezei poartă un caracter introductiv şi are ca scop prezentarea situaţiei actuale în domeniul sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Bol-Moufang. Conţine noţiunile şi teoremele de bază, necesare pentru expunerea lucrării.

În cel de-al **doilea capitol**, sunt studiate WA -cvazigrupurile, WIP -cvazigrupurile generalizate și CI -cvazigrupurile. Toate aceste cvazigrupuri au proprietăți de inversabilitate. S-a demonstrat că orice CI -grupoid este un CI -cvazigrup. În acest capitol sunt introduse și studiate WIP -cvazigrupurile generalizate ($OWIP$ -cvazigrupurile).

În **capitolul trei** sunt introduse și cercetate i -cvazigrupurile – o nouă clasă de cvazigrupuri. Această noțiune a fost definită de către autorea tezei în publicațiile comune cu I. A. Florea. În caz general i -cvazigrupurile nu au proprietăți de inversabilitate. În teză sunt studiate i -cvazigrupuri înzestrate suplimentar cu unele proprietăți de inversabilitate.

K. Kunen a studiat existența unității (la stânga, la dreapta, medii) în cvazigrupuri cu anumite identități [36]. Problema cercetării existenței unității în cvazigrupuri cu identități este formulată și în monografia lui V.D. Belousov [21] (problema nr. 18, p. 217). În acest capitol este soluționată problema existenței unității în cvazigrupurile care satisfac fiecare dintre cele 60 de identități de tip Bol-Moufang enumerate în [1].

În **capitolul patru** sunt studiate cvazigrupurile tranzitive la stânga și cvazigrupurile Neumann. Atât cvazigrupurile tranzitive cât și cele Neumann sunt izotope grupurilor abeliene. Au fost studiate nucleeele, G -proprietatea și diverse morfisme ale cvazigrupurilor indicate. Rezultatul principal al acestei părți a disertației arată că noțiunea de cvazigrup Neumann coincide cu cea de cvazigrup Schweizer.

Secțiunea **Concluzii generale și recomandări** prezintă concluziile generale ale autoarei cu privire la rezultatele obținute în cadrul tezei. Concluziile sunt prezentate sub formă de rezultate obținute și sunt urmate de recomandările autoarei cu privire la modul în care aceste rezultate pot fi aplicate în diverse domenii științifice, precum și în cercetări potențiale.

Mulțumiri mentorilor științifici:

Exprim sinceră recunoștință conducătorului științific *Victor Alexeevici Șcerbacov* pentru determinarea domeniului și formularea obiectivelor de cercetare, pentru cunoștințele pe care le-am căpătat pe parcursul celor patru ani de doctorantură și pentru ajutorul pe care mi l-a oferit în realizarea publicațiilor și scrierea tezei.

Cu deosebită considerație și recunoștință aduc mulțumiri profesorului, candidatului în științe fizico-matematice, *Ivan Arhipovici Florea*, care a ghidat primii mei pași în teoria cvazigrupurilor, primele cercetări ale diferitor clase de cvazigrupuri. Publicațiile Dumnealui servindu-mi ca repere ale următoarelor cercetări.

Exprim recunoștință directorului școlii doctorale Matematică și Știința Informației, academicianului Mitrofan Mihailovici Cioban, pentru răbdare, îndrumare și încurajare.

1. ANALIZA SITUAȚIEI ÎN DOMENIUL SISTEMELOR ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIȚII DE TIP MOUFANG

În acest capitol se realizează o analiză a conceptelor algebrice fundamentale. Se face o sinteză a situației în domeniul cercetării. Un ingredient foarte important al matematicii este creativitatea, capacitatea de a formula definiții utile, care vor duce la rezultate interesante.

O noțiune foarte importantă a algebrei generale este noțiunea de operație algebrică sau pur și simplu operație.

Fie dată o mulțime nevidă Q , finită sau infinită; elementele mulțimii Q notăm cu litere mici latine: $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$. Prin mulțimea Q la puterea n înțelegem mulțimea Q^n , formată din toate n -uplele posibile ordonate $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ elementelor din Q . Atunci *operație n -ară* A , definită pe mulțimea Q , vom numi aplicația mulțimii Q^n în mulțimea Q . Dacă n -uplei $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i se pune cu aceasta în corespondență elementul b (ce aparține deasemeni Q), atunci scriem $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$. Numărul n se numește *aritatea* operației A . Dacă $n = 2$, atunci operația A se numește *binară*: $A(a_1, a_2) = b$. Dacă $n = 1$, atunci operația A se numește *unară*: $A(a_1) = b$. Se pot precăuta operații și de “aritate” infinită și zero. Mulțimea Q cu mulțimea de operații Ω , precum operațiile din Ω pot fi de orice aritate, se numește *algebră universală* sau pur și simplu *algebră*, ea se notează $Q(\Omega)$.

Pe noi ne vor interesa numai operațiile binare. Operațiile, definite pe mulțimea Q , uneori vom nota cu litere mari latine $A, B, C, \dots$. Deseori vom nota operațiile ca produs obișnuit, adică nu vom scrie $A(a, b) = c$, dar $ab = c$, sau, dacă va fi nevoie, vom folosi și alte semne pentru operație: $\bullet, \Delta, *, \circ$ și a.m.d., de exemplu $a \bullet b = c, a\Delta b = c$ și a.m.d.

1.1. Grupoizi. Definițiile cvazigrupului și buclei

O mulțime nevidă Q cu o operație binară A se numește *grupoid* și se notează (Q, A) . Dacă operația este notată cu un simbol, de exemplu cu „ $\cdot$ ” sau „ $\circ$ ”, vom scrie $(Q, \cdot)$ sau, respectiv $(Q, \circ)$. Prin urmare pe mulțimea Q sunt definiți atâția grupoizi câte operații algebrice există pe această mulțime. Vom considera că două operații A și B , definite pe o mulțime Q , coincid dacă $A(a, b) = B(a, b)$, pentru orice $a, b \in Q$. Numărul elementelor din mulțimea Q se numește *ordinul grupoidului* (Q, A) .

Definiția 1.1.1. Grupoidul binar $(Q, \circ)$ se numește *cvazigrup*, dacă pentru orice pereche ordonată $(a, b) \in Q^2$ există soluțiile unice $x, y \in Q$ pentru ecuațiile $x \circ a = b$ și $a \circ y = b$ [21].

Adesea această definiție este numită *ecuațională*. Această definiție este echivalentă următoare: grupoidul (Q, A) se numește *cvazigrup*, dacă prin oricare două elemente din egalitatea $A(a, b) = c$ se determină univoc al treilea.

Mai este și altă definiție a cvazigrupului pe care o vom prezenta mai jos. Introducerea standardă în teoria cvazigrupurilor este dată în [21], [38], [39], [40].

Fie $(Q, \cdot)$ un cvazigrup.

Definiția 1.1.2. Elementul $i \in Q$ este *idempotent* în $(Q, \cdot)$ atunci, când $i \cdot i = i$.

Elementul $f \in Q$ este *unitate la stânga* în $(Q, \cdot)$ atunci, când $f \cdot x = x$ pentru orice $x \in Q$.

Elementul $e \in Q$ este *unitate la dreapta* în $(Q, \cdot)$ atunci, când $x \cdot e = x$ pentru orice $x \in Q$.

Elementul $e \in Q$ este (bilaterală) *unitate* în $(Q, \cdot)$ atunci, când este unitate și la stânga și la dreapta.

Elementul $m \in Q$ este *unitate medie* în $(Q, \cdot)$ atunci, când $x \cdot x = m$ pentru orice $x \in Q$.

Definiția 1.1.3. Cvazigrupul este *bucă la stânga (la dreapta)*, dacă are unitate la stânga (la dreapta). Cvazigrupul este *bucă*, dacă are unitate la dreapta și unitate la stânga.

1.2. Operațiile inverse ale cvazigrupului (parastrofii)

Fie dat cvazigrupul (Q, A) . Ecuația $A(a, x) = b$ este rezolvabilă univoc. Această ecuație definește o operație algebrică binară $A^{-1}(a, b) = x$, A^{-1} este *operația inversă la dreapta* pentru A . Ne convingem, că (Q, A^{-1}) este cvazigrup, adică ecuațiile $A^{-1}(x, a) = b$ și $A^{-1}(a, y) = b$ sunt rezolvabile univoc. Într-adevăr, $a = A(x, b)$ este rezolvabilă univoc, adică $A(c, b) = a$ de unde $A^{-1}(c, a) = b$. Soluție a ecuației $A^{-1}(a, y) = b$ este $A(a, b)$. Analog ecuația $A(y, a) = b$ definește o operație nouă ${}^{-1}A$ numită *operația inversă la stânga* pentru A . Analog se demonstrează, că $(Q, {}^{-1}A)$ este cvazigrup. Operația A se numește *inversabilă* dacă ea este inversabilă la dreapta și la stânga.

Argumentând, analog avem următoarele operații ale cvazigrupului ${}^{-1}(A^{-1}), ({}^{-1}A)^{-1}, A^*$, unde $A^* = ({}^{-1}(A^{-1}))^{-1} = {}^{-1}(({}^{-1}A)^{-1})$ și $A^*(x, y) = A(y, x)$. Alte operații noi ale cvazigrupului nu sunt.

Dacă operația cvazigrupului este notată cu “ $\cdot$ ” atunci

$$ab = c \Leftrightarrow a \backslash c = b \Leftrightarrow c / b = a$$

și $(\cdot)^{-1} = (\backslash), {}^{-1}(\cdot) = (/)$.

Următoarea definiție se numește definiția *existențială* a cvazigrupului.

Definiția 1.2.1. (vezi [41], [37]) Grupoidul $(Q, \cdot)$ se numește *cvazigrup*, dacă în această mulțime Q există operațiile “ $\backslash$ ” și “ $/$ ” astfel, că în algebra $(Q, \cdot, \backslash, /)$ se îndeplinesc identitățile

$$x \cdot (x \backslash y) = y, \tag{1.1}$$

$$(y/x) \cdot x = y, \quad (1.2)$$

$$x \setminus (x \cdot y) = y, \quad (1.3)$$

$$(y \cdot x)/x = y. \quad (1.4)$$

În orice cvazigrup $(Q, \cdot, \setminus, /)$ următoarele identități sunt adevărate:

$$x/(y \setminus x) = y, \quad (1.5)$$

$$(x/y) \setminus x = y. \quad (1.6)$$

Fiecărei inversări a cvazigrupului A îi corespunde o permutare de gradul trei. Cvazigrupurile $A, A^{-1}, {}^{-1}A, {}^{-1}(A^{-1}), ({}^{-1}A)^{-1}, A^*$ se numesc *parastrofii cvazigrupului A* , iar trecerea de la A la unul dintre aceste șase cvazigrupuri se numește *parastrofie*.

1. $A(x_1, x_2) = x_3 \Leftrightarrow$
2. $A^{(12)}(x_2, x_1) = x_3 \Leftrightarrow$
3. $A^{(13)}(x_3, x_2) = x_1 \Leftrightarrow$
4. $A^{(23)}(x_1, x_3) = x_2 \Leftrightarrow$
5. $A^{(123)}(x_2, x_3) = x_1 \Leftrightarrow$
6. $A^{(132)}(x_3, x_1) = x_2$

Vezi în [21], [42].

Observați, că cazul 5 și 6 este parastrof (12) al cazului 3 și respectiv 4 [40].

Notă 1.2.1. Conceptul de parastrofie, în special parastrofia (12), poate fi extins pentru grupoizi.

1.3. Proprietățile cvazigrupurilor. Noțiuni generale.

În acest paragraf o să prezentăm noțiunile, proprietățile și teoremele principale care ne interesează în cazul diferitelor clase de cvazigrupuri.

Fie dat cvazigrupul $(Q, \cdot)$.

1° Unitățile locale ale cvazigrupului.

Ecuția $a \cdot x = a$ este rezolvabilă univoc, $a \cdot e_a = a$, e_a este *unitatea locală la dreapta* a elementului a . Soluția f_a ecuației $y \cdot a = a$ vom numi *unitate locală la stânga* a elementului a . Dacă în cvazigrup $e_a = e_b$, atunci cvazigrupul $(Q, \circ)$ are unitate la dreapta e , $x \cdot e = x, \forall x \in Q$.

Analog avem cvazigrup cu unitate la stânga, dacă $f_a = f_b, \forall a, b \in Q$.

Se cunoaște, că în orice grupoid $(Q, \circ)$, dacă este unitate la stânga f și unitate la dreapta e , atunci ele sunt egale $f = e$.

2° Elemente inverse.

Fie $Q(\cdot)$ o buclă cu unitatea e . Elementele inverse la dreapta și la stânga pentru x se determină prin identitățile $xx^{-1} = e, {}^{-1}xx = e$ corespunzător [21].

3° Translațiile.

Aplicațiile $R_a: x \rightarrow xa$ și $L_a: x \rightarrow ax$ se numesc *translații la dreapta și la stânga* (corespunzător) față de elementul a . Ele, evident, sunt permutări ale mulțimii Q (aplicații reciproc univoce Q în sine).

Propoziția 1.3.1. Dacă $(Q, \cdot)$ este un grup, atunci translațiile sale posedă proprietățile:

- (i) $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}, R_a^{-1} = R_{a^{-1}}, \forall a \in Q,$
- (ii) $L_a R_b = R_b L_a, \forall a, b \in Q,$
- (iii) $L_a L_b = L_{ab}, R_a R_b = R_{ba}, \forall a, b \in Q.$

Din propoziția dată rezultă importanța noțiunii de izotopie.

4° Izotopia.

Fie două operații binare „ $\circ$ ” și „ $\cdot$ ”, definite pe mulțimea Q .

Definiția 1.3.1. Operația „ $\circ$ ” se numește *izotopă* operației „ $\cdot$ ”, sau *izotop* al operației „ $\cdot$ ”, dacă există tripleta de permutări α, β, γ mulțimii Q astfel, încât

$$\gamma(x \circ y) = \alpha x \cdot \beta y, \quad (1.7)$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Definiția 1.3.2. Tripleta ordonată $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ vom numi *izotopie*.

α - componenta la stânga, β - component la dreapta, γ - componenta principală a izotopiei T .

Dacă $\alpha = \beta = \gamma$, atunci izotopia se transformă în izomorfism $\gamma(x \circ y) = \gamma x \cdot \gamma y$, γ este *izomorfism*. Izotopia de forma $T = (\alpha, \beta, \varepsilon)$, unde ε este substituție identică, $\varepsilon(x) = x, \forall x \in Q$ se numește *principală*.

Teorema 1.3.1. Orice izotop $(Q, \circ)$ al cvazigrupului $(Q, \cdot)$ este de asemenea cvazigrup.

Notăm prin G mulțimea tuturor tripletelor de permutări definite pe mulțimea Q a cvazigrupului $(Q, \cdot)$,

$$G = \{T = (\alpha, \beta, \gamma)\}.$$

Produsul izotopiilor T_1 și T_2 este izotopia $T = T_1 T_2 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \gamma_1 \gamma_2)$.

Teorema 1.3.2. Mulțimea tuturor izotopiilor, definite pe mulțimea Q cvazigrupului $(Q, \cdot)$ formează grup față de produsul introdus.

Dacă cvazigrupul $(Q, \circ)$ este izotop cvazigrupului $(Q, \cdot)$, atunci pentru a simplifica scrierea ne învoim să scriem $(\circ) = (\cdot)^T$, unde $T = (\alpha, \beta, \gamma)$.

- (i) dacă $(\circ) = (\cdot)^T$ atunci $(\cdot) = (\circ)^{T^{-1}}$.

$$(ii) ((\cdot)^T)^{T_1} = (\cdot)^{TT_1}.$$

(iii) dacă cvazigrupul $(Q, \circ)$ este izotop cvazigrupului $(Q, \cdot)$, atunci $(Q, \circ)$ este izomorf cu un izotop principal al cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

(iv) fiecare cvazigrup este izotop căreiva bucle.

Pentru grupuri noțiunea de izotopie se reduce la cea de izomorfism. Aceasta rezultă din următoarea teoremă:

Teorema (Albert) 1.3.3. Dacă bucla $(Q, \circ)$ este izotopă grupului $(Q, \cdot)$, atunci ea însăși este grup, izomorf grupului [21].

În anii 40 ai secolului XX s-a demonstrat că cvazigrupurile ce verifică identitatea $xy \cdot uv = xu \cdot yv$ (cvazigrupurile mediale), sunt izotope unor grupuri abeliene și a fost caracterizată această izotopie (este vorba de cunoscuta teoremă Toyoda [21], [38], [39]).

Teorema (Toyoda) 1.3.4. Fie (Q, A) un cvazigrup medial. Atunci există un grup abelian $(Q, +)$ astfel încât operația A are forma:

$$A(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) + c,$$

unde $\varphi, \psi \in \text{Aut } Q(+)$, $\varphi\psi = \psi\varphi$ și c este un element fixat din Q .

Deși teorema dată este numită des “Teorema lui Toyoda”, ea a fost demonstrată independent, aproximativ în aceeași perioadă de trei autori: Toyoda (1941), Murdoch (1941) [7] și Bruck (1944) [9].

5° Autotopiile cvazigrupurilor. Cvaziautomorfisme.

Un rol semnificativ în teoria cvazigrupurilor îl joacă noțiunea de autotopie.

Definiția 1.3.3. Tripleta ordonată $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ de permutări ale mulțimii Q se numește *autotopie* a cvazigrupului $(Q, \cdot)$, dacă $\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y) = x \cdot y$ pentru oricare $x, y \in Q$.

Noțiunea de autotopie este caz particular al izotopiei. În particular, autotopia de forma $(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha$ va fi *automorfism*.

Toate autotopiile cvazigrupului formează grup față de înmulțirea autotopiilor. Componentele tuturor autotopiilor cvazigrupului cu același nume de asemenea formează grup. Dacă permutarea φ este componentă a unei autotopii T , atunci o vom numi *autotopică*.

Componenta principală a autotopiei T a cvazigrupului $Q(\cdot)$ se numește *cvaziautomorfism* al cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Cu alte cuvinte, permutarea γ mulțimii Q se numește *cvaziautomorfism* al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, dacă există alte două permutări α și β mulțimii Q , astfel, încât $\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y$, adică $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ este autotopia cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

6° Nuclee ale cvazigrupului.

Definiția 1.3.4. (vezi [21], [39], [43]) Nucleele la stânga N_l , mediu N_m și la dreapta N_r ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$ se definesc în felul următor:

$$\begin{aligned} N_l &= \{a \in Q \mid a \cdot xy = ax \cdot y\}, \\ N_m &= \{a \in Q \mid xa \cdot y = x \cdot ay\}, \\ N_r &= \{a \in Q \mid xy \cdot a = x \cdot ya\}, \forall x, y \in Q. \end{aligned}$$

Au loc următoarele teoreme:

Teorema 1.3.3. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are nucleu la stânga $N_l \neq \emptyset$ dacă și numai dacă $(Q, \cdot)$ are unitate la stânga f .

Analog are loc teorema pentru nucleul la dreapta.

Teorema 1.3.4. Nucleul mediu $N_m \neq \emptyset$, dacă și numai dacă $(Q, \cdot)$ este buclă, adică are unitate $xe = ex = x$.

Teorema 1.3.5. Fiecare nucleu nevid N_l , N_m și N_r este subgrup al cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

7° Permutări regulate. Permutarea $\lambda(\rho)$ se numește *permutare regulată la stânga (la dreapta)* a buclei $(Q, \cdot)$, dacă $\lambda(xy) = \lambda x \cdot y$ ($\rho(xy) = x \cdot \rho y$), $\forall x, y \in Q$. Permutarea φ se numește *medie regulată*, dacă există așa permutare φ^* , că $\varphi x \cdot y = x \cdot \varphi^* y$, $\forall x, y \in Q$. Setul tuturor permutărilor regulate la stânga, la dreapta și medii $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ sunt grupuri. Toate permutările regulate cvazigrupului $(Q, \cdot)$ sunt autotopice, așa cum $U_\lambda = (\lambda, 1, \lambda)$, $V_\rho = (1, \rho, \rho)$, $W_\varphi = (\varphi, \varphi^{*-1}, 1)$ sunt autotopiile lui $(Q, \cdot)$.

8° Pseudoautomorfisme.

Alte permutări autotopice importante, ca și permutările regulate la dreapta și la stânga sunt pseudoautomorfisme ale cvazigrupului [38].

Definiția 1.3.5. Bijeția θ a mulțimii Q se numește *pseudoautomorfism la dreapta* al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, dacă există măcar un element $c \in Q$ astfel, încât $\theta x \cdot (\theta y \cdot c) = \theta(x \cdot y) \cdot c$ pentru toți $x, y \in Q$, adică

$$(\theta, R_c \theta, R_c \theta) \tag{1.8}$$

este autotopia cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Elementul c se numește companionul lui θ .

Bijeția θ a mulțimii Q se numește *pseudoautomorfism la stânga* al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, dacă există măcar un element $c \in Q$ astfel, încât $(c \cdot \theta x) \cdot \theta y = c \cdot \theta(x \cdot y)$ pentru toți $x, y \in Q$, adică

$$(L_c \theta, \theta, L_c \theta) \tag{1.9}$$

este autotopia cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Elementul c se numește companionul lui θ [21].

Dacă θ este pseudouatomorfism la dreapta și la stânga, atunci θ se numește *pseudoautomorfism*.

Existența pseudoautomorfismelor la dreapta (la stânga) în cvazigrupul (Q, A) presupune existența unității la stânga (la dreapta). Se știe, că dacă cvazigrupul are pseudoautomorfism netrivial la stânga și la dreapta, atunci este buclă [21], [39].

1.4. Cvazigrupuri cu proprietate inversă la stânga (*LIP*-cvazigrupuri). Cvazigrupuri cu proprietate inversă la dreapta (*RIP*-cvazigrupuri).

Definiția 1.4.1. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește cu *proprietate inversă la stânga*, dacă există aplicația $I_l: Q \rightarrow Q$ astfel, încât se îndeplinește egalitatea $I_l x \cdot xy = y$ sau ${}^{-1}x \cdot xy = y, \forall x, y \in Q$.

Teorema 1.4.1. În orice *LIP*-cvazigrup $(Q, \cdot)$ au loc:

1. $I_l^2 = \varepsilon$, adică ${}^{-1}({}^{-1}x) = x$, ε este permutarea identică.
2. $x({}^{-1}xy) = y$,
3. ${}^{-1}xx = e_x$, unde $xe_x = x$,
4. $L_x^{-1} = L_{{}^{-1}x}$, unde $L_x y = xy$,
5. I_l este permutare (bijecție).

Definiția 1.4.2. Elementul b al cvazigrupului arbitrar $(Q, \cdot)$ se numește *element Bol la stânga*, dacă se îndeplinește egalitatea

$$b(x \cdot by) = R_{e_b}^{-1}(b \cdot xb)y, \quad (1.10)$$

$\forall x, y \in Q$ unde $R_{e_b}x = xe_b, be_b = b$.

Scriem (1.10) cu ajutorul translațiilor $L_b(x \cdot L_b y) = R_{e_b}^{-1}L_b R_b x \cdot y$ sau $L_b(xy) = R_{e_b}^{-1}L_b R_b x \cdot L_b^{-1}y$. Am obținut autotopia $T = (R_{e_b}^{-1}L_b R_b, L_b^{-1}, L_b)$.

Teorema 1.4.2. În orice cvazigrup $(Q, \cdot)$, dacă $T = (\alpha, L_b^{-1}, L_b)$ este autotopie, atunci b este element Bol la stânga.

Mulțimea tuturor autotopiilor alcătuiește grup față de înmulțirea autotopiilor.

Teorema 1.4.3. Dacă în *LIP*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$, $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ este autotopie, atunci și $T_1 = (I_l \alpha I_l, \gamma, \beta)$ de asemenea este autotopie.

Teorema 1.4.4. Dacă *LIP*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are unitate la stânga f și $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ este autotopie, atunci $\alpha f = b$, unde b este elementul Bol la stânga.

Teorema 1.4.5. Bucla $(Q, \circ)$, izotopă *LIP*-cvazigrupului $(Q, \cdot)$, unde izotopia este următoarea:

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y \quad (1.11)$$

va fi de asemenea *LIP*-buclă dacă și numai dacă elementul b este element Bol la stânga.

Analog se definesc *RIP*-cvazigrupurile.

Definiția 1.4.3. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește *RIP-cvazigrup*, dacă există aplicația $I_r: Q \rightarrow Q$ astfel, încât se îndeplinește egalitatea $yx \cdot I_r x = y$ sau $yx \cdot x^{-1} = y$.

Teorema 1.4.6. În orice *RIP-cvazigrup* $(Q, \cdot)$ are loc:

1. $(x^{-1})^{-1} = x$, adică $I_r^2 = \varepsilon$, ε este permutare identică,
2. I_r este permutare, adică I_r este bijectie,
3. $yx^{-1} \cdot x = y$,
4. $xx^{-1} = f_x$, unde $f_x x = x$.
5. $R_x^{-1} = R_{x^{-1}}$.

Definiția 1.4.4. Elementul $a \in Q$ se numește *element Bol la dreapta* al cvazigrupului arbitrar $(Q, \cdot)$, dacă se îndeplinește egalitatea:

$$(za \cdot y)a = z \cdot L_{fa}^{-1}(ay \cdot a). \quad (1.12)$$

Scriem egalitatea (1.12) cu ajutorul translațiilor $R_a(R_a z \cdot y) = z \cdot L_{fa}^{-1} R_a L_a y$ sau $R_a(zy) = R_a^{-1} z \cdot L_{fa}^{-1} R_a L_a y$. Am obținut autotopia $(R_a^{-1}, L_{fa}^{-1} R_a L_a, R_a)$.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 1.4.7. În orice cvazigrup $(Q, \cdot)$, dacă $T = (R_a^{-1}, \beta, R_a)$ este autotopie, atunci a este element Bol la dreapta.

Cvazigrupul $(Q, \cdot)$, care este *RIP-* și *LIP-cvazigrup* se numește *IP-cvazigrup*.

Definiția 1.4.5. Elementul Moufang la stânga se definește de identitatea

$$a(x \cdot ay) = (a \cdot x f_a) a \cdot y, \quad (1.13)$$

elementul Moufang la dreapta de identitatea

$$(ya \cdot x)a = y \cdot a(e_a x \cdot a). \quad (1.14)$$

Teorema 1.4.8. În *IP-cvazigrupul* $(Q, \cdot)$ elementele Bol și Moufang sunt echivalente.

1.5. Cvazigrupul Bol la stânga. Cvazigrupul Bol la dreapta. Buclă Moufang.

Fie *LIP-cvazigrupul* $(Q, \cdot)$, care are proprietatea, că orice buclă, izotopă cvazigrupului $(Q, \cdot)$ este de asemenea *LIP-buclă*. Astfel ajungem la noțiunea de cvazigrup Bol la stânga.

Definiția 1.5.1. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$, în care se îndeplinește egalitatea:

$$x(y \cdot xz) = R_{e_x}^{-1}(x \cdot yx) \cdot z, \forall x, y \in Q, \quad (1.15)$$

se numește *cvazigrup Bol la stânga*.

Analog avem: cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește *cvazigrup Bol la dreapta*, dacă se îndeplinește egalitatea:

$$(zx \cdot y)x = z \cdot L_{f_x}^{-1}(xy \cdot x). \quad (1.16)$$

Teorema 1.5.1. Orice cvazigrup Bol la stânga $(Q, \cdot)$ este *LIP-cvazigrup*.

Teorema 1.5.2. Orice buclă $(Q, \circ)$, izotopă cvazigrupului Bol la stânga $(Q, \cdot)$, este buclă Bol la stânga, adică în $(Q, \circ)$ are loc identitatea:

$$x \circ (y \circ (x \circ z)) = (x \circ (y \circ x)) \circ z. \quad (1.17)$$

Teoreme similare au loc pentru cvazigrupurile Bol la dreapta.

Definiția 1.5.2. (vezi [21]) Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește *cvazigrup Moufang*, dacă în $(Q, \cdot)$ se îndeplinesc următoarele identități

$$(xy \cdot z)y = x(y(e_y z \cdot y)), \quad (1.18)$$

$$y(x \cdot yz) = ((y \cdot x f_y)y)z \quad (1.19)$$

unde $ye_y = y = f_y y$.

În teza sa de doctor (IM AN MSSR, 1965) I.A. Florea a demonstrat, că identitățile (1.18) și (1.19) sunt echivalente, din această cauză se poate defini cvazigrupul Moufang ca cvazigrup, ce satisface numai unei din aceste identități.

Definiția 1.5.3. (vezi [44]) Bucla $(Q, \cdot)$ se numește *buclă Moufang*, dacă în ea se îndeplinesc una din identitățile

$$(zx \cdot y)x = z(y \cdot yx), \quad (1.20)$$

$$x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z. \quad (1.21)$$

În cercetarea cvazigrupurilor cu identități de tip Bol-Moufang vom avea nevoie de următoarele două leme. Prima demonstrată de către I.A. Florea în teza sa de doctor, a doua este demonstrată în cartea lui Belousov [21].

Lema 1.5.1. Cvazigrupul Bol la stânga și cvazigrupul Bol la dreapta sunt cvazigrup Moufang.

Lema 1.5.2. Bucla, izotopă cvazigrupului Moufang, este *IP*-buclă.

Definiția 1.5.4. Bucla comutativă $(Q, \cdot)$ cu identitatea $xx \cdot yz = xy \cdot xz$ se numește *buclă comutativă Moufang*.

Reformulând titlul articolului lui Gagola «Cum și de ce buclele Moufang se comportă ca și grupul» [24] se poate de spus, că cvazigrupurile cu identitățile Bol-Moufang «se comportă ca și grupul». Aceasta este una dintre cauzele, de ce cercetăm aceste clase de cvazigrupuri. Atrageți atenția, informația despre unitățile la dreapta și la stânga în orice cvazigrup cu identitatea de tip Bol-Moufang poate fi găsită în [21], [45], [46], [36], [47].

În [22] sunt enumerate identitățile de tip Bol-Moufang, la realizarea căror în cvazigrupuri sunt bucle. Aceste identități sunt folosite la cercetarea buclelor triplete [48]. În [25], [27], [29] sunt cercetate varietățile cvazigrupurilor, definite de identitățile Bol-Moufang. În [26] sunt cercetate identitățile Bol-Moufang generalizate. Sunt cercetate buclele Bol-Moufang cu subgrup cu indice 2 [28]. În [35] se studiază existența unității în grupoizi cu identități Bol-Moufang.

1.6. Concluzii la capitolul 1

În Capitolul 1 au fost cercetate reperele teoretice ale problemei în cauză. S-au relevat noțiunile și rezultatele generale din teoria cvazigrupurilor, servind ca temelia realizării scopului și obiectivelor lucrării.

Scopul lucrării este de a cerceta morfismele și proprietățile sistemelor algebrice neasocia-tive cu identități de tip Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective:

- (1) cercetarea relațiilor WA -, CI -cvazigrupurilor, tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.;
- (2) cercetarea existenței unității în cvazigrupurilor cu fiecare dintre cele 60 de identități de tip Bol-Moufang enumerate în lucrarea [1];
- (3) cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri noi definite în lucrare (i -cvazigrupuri și WIP -cvazigrupuri generalizate);
- (4) cercetarea G -proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

În baza analizei situației actuale în teoria cvazigrupurilor binare formulăm următoarele concluzii:

1. Cercetările efectuate denotă opiniile, că aproape toate clasele de cvazigrupuri și bucle posedă proprietate inversă. Cel mai des aceste cvazigrupuri posedă una dintre cele 3 proprietăți de inversabilitate, și anume: inversabilitate la stânga (LIP), la dreapta (RIP), și bilaterală (IP).
2. O problemă actuală este: pentru ce identități în cvazigrupul $(Q, \cdot)$ urmează, că $(Q, \cdot)$ este buclă [21].
3. Izotopia, fiind un concept important al teoriei cvazigrupurilor ne dă o posibilitate de a cerceta clasele de cvazigrupuri, trecând cu ajutorul izotopiei la buclă. Uneori bucla este grup, iar proprietățile grupului sunt cunoscute și cu ajutorul grupului, buclei cercetăm proprietățile cvazigrupului dat. Valoarea izotopiei pentru cvazigrupuri urmează din următoarea teoremă simplă: *orice cvazigrup este izotop unei bucle*. Pentru grupuri conceptul de izotopie nu joacă un rol semnificativ, am văzut din **Teorema (Albert) 1.3.3.**

2. DESPRE UNELE CLASE DE CVAZIGRUPURI CU PROPRIETĂȚI DE INVERSABILITATE (*WA*-, *OWIP*-, *CI* -CVAZIGRUPURI)

Deseori cercetăm cvazigrupurile și buclele din punct de vedere al apropierii lor de grupuri. În grup un rol mare îl joacă și proprietatea de inversabilitate, care se exprimă în felul următor: pentru orice element x există elementul invers x^{-1} astfel, încât se îndeplinește egalitatea $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, și de aici pe baza legii asociative avem $x^{-1}(xy) = y$, $(yx)x^{-1} = y$. Aceste egalități pot fi luate ca definiție a unei clase foarte largi de cvazigrupuri și bucle. Multe dintre clasele de cvazigrupuri și bucle, intens studiate până în prezent, au proprietăți de “inversabilitate”. Printre cele mai cunoscute clase de cvazigrupuri (bucle) cu proprietăți de inversabilitate sunt *IP*-, *LIP*-, *RIP*-, *WIP*- și *CI*-cvazigrupurile ș.a. În capitolul dat s-au cercetat *WA*-, *CI*-cvazigrupurile și o clasă de cvazigrupuri nouă definită *WIP*-cvazigrupuri generalizate (*OWIP*-cvazigrupuri).

2.1. Proprietățile *WA*-buclelor la stânga

În acest paragraf s-a demonstrat, că orice *WA*-cvazigrup este cvazigrup Bol la stânga și la dreapta, adică cvazigrup Moufang. S-au cercetat operațiile derivate la dreapta și la stânga ale acestui cvazigrup. Este construit un exemplu de asemenea cvazigrup.

Definiția 2.1.1. (vezi [49], [50]) Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitățile

$$xx \cdot yz = xy \cdot xz \text{ și } xy \cdot zz = xz \cdot yz \quad (2.1)$$

se numește *WA*-cvazigrup sau *cvazigrup semimedial* (pe scurt: *SM*-cvazigrup) (vezi [51], [52]).

Identitățile (2.1) nu sunt echivalente.

Exemplu 2.1.1. Cvazigrupul $(Q, *)$ satisface numai identităților (2.1).

*	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	3	2	5	4
2	2	4	0	5	1	3
3	3	4	2	5	0	1
4	4	3	5	1	4	0
5	5	3	4	1	2	0

Lema 2.1.1. În orice *WA*-cvazigrup au loc următoarele identități:

$$x^2 \backslash (yz) = (x \backslash y)(x \backslash z), \quad (2.2)$$

$$(yz)/x^2 = (y/x)(z/x), \quad (2.3)$$

$$x(y \setminus z) = (xy) \setminus (x^2 z), \quad (2.4)$$

$$(y/z)x = (yx^2)/(zx), \quad (2.5)$$

unde $xy = z \Leftrightarrow x \setminus z = y \Leftrightarrow z/y = x$.

Demonstrație. (2.2). Știm că există astfel element z' , încât $x^2 \setminus yz' = (x \setminus y)(x \setminus z)$.

Noi trebuie să demonstrăm, că $z' = z$. Din definiția operației $\setminus$ avem:

$$yz' = x^2((x \setminus y)(x \setminus z)) \stackrel{(2.1)}{\cong} x(x \setminus y) \cdot x(x \setminus z) \stackrel{(1.1)}{\cong} yz.$$

Prin urmare, $z' = z$.

(2.3). Știm că există astfel element z' , încât $yz'/x^2 = (y/x)(z/x)$. Noi trebuie să demonstrăm, că $z' = z$. Din definiția operației $/$ avem:

$$yz' = (y/x)(z/x) \cdot x^2 \stackrel{(2.1)}{\cong} (y/x)x \cdot (z/x)x \stackrel{(1.2)}{\cong} yz.$$

Prin urmare, $z' = z$.

(2.4). Știm că există astfel element z' , încât $x(y \setminus z) = (xy) \setminus (x^2 z')$. Noi trebuie să demonstrăm, că $z' = z$. Avem

$$x^2 z' = (xy) \cdot x(y \setminus z) \stackrel{(2.1)}{\cong} x^2 \cdot y(y \setminus z) \stackrel{(1.1)}{\cong} x^2 z.$$

Prin urmare, $z' = z$.

(2.5). Știm că există astfel element y' , încât $(y/z)x = (y'x^2)/(zx)$. Trebuie să demonstrăm, că $y' = y$. Ca și în cazurile precedente

$$y'x^2 = (y/z)x \cdot (zx) \stackrel{(2.1)}{\cong} (y/z)z \cdot x^2 \stackrel{(1.2)}{\cong} yx^2.$$

Prin urmare, $y' = y$. □

Din definițiile 2.1.1. și 1.5.3. urmează, că orice buclă comutativă Moufang este WA -cvazigrup.

Teorema 2.1.1. (vezi [53], [50], [52]) Orice buclă, izotopă WA -cvazigrupului, este buclă comutativă Moufang.

Lema 2.1.2. Orice WA -cvazigrup cu unitate la stânga este cvazigrup Bol la stânga.

Demonstrație. Dacă f este unitate la stânga a cvazigrupului $(Q, \cdot)$, atunci $ff = f$, $L_f x = x$ pentru toți $x \in Q$ și $L_f = \varepsilon$. Din Teorema 2.1.1. urmează că izotopul de forma

$$x \circ y = R_f^{-1} x \cdot L_f^{-1} y = R_f^{-1} x \cdot y \quad (2.6)$$

cvazigrupului $(Q, \circ)$ este buclă comutativă Moufang. Orice buclă comutativă Moufang $(Q, \circ)$ este IP -buclă, adică există așa permutare I

$$Ix \circ (x \circ y) = (y \circ x) \circ Ix = y \quad (2.7)$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Trecând în ecuația (2.7) la operația " $\cdot$ " obținem $R_f^{-1}Ix \cdot (R_f^{-1}x \cdot y) = y$, $R_f^{-1}IR_fx \cdot (x \cdot y) = y$. Prin urmare, $I_lx \cdot (x \cdot y) = y$ pentru

$$I_l = R_f^{-1}IR_f. \quad (2.8)$$

În așa mod $(Q, \cdot)$ este *LIP*-cvazigrup. Aceasta după rezultatele din [54] arată, că $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga. $\square$

Corolar 2.1.1. Dacă f este unitate la stânga a *WA*-cvazigrupului $(Q, \cdot)$, atunci translația R_f este automorfism al $(Q, \cdot)$, și automorfism al buclei comutative Moufang $(Q, \circ)$ definită de (2.6).

Demonstrație. Faptul, că $R_f \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ urmează din (2.1) și egalitatea $ff = f$. Mai departe, folosind formula (2.6), avem: $R_f(x \circ y) = R_fx \circ R_fy$, $R_f(R_f^{-1}x \cdot y) = R_f^{-1}R_fx \cdot R_fy$, $x \cdot R_fy = x \cdot R_fy$. Prin urmare $R_fI = IR_f$, și (2.8) capătă forma $I_l = I$. $\square$

Lema 2.1.3. Orice *WA*-cvazigrup cu unitate la dreapta este cvazigrup Bol la dreapta.

Demonstrație. Fie izotopul $(Q, \circ)$ *WA*-cvazigrupului $(Q, \cdot)$ este:

$$x \circ y = x \cdot L_e^{-1}y,$$

unde e este unitate la dreapta pentru $(Q, \cdot)$. După Teorema 2.1.1., $(Q, \circ)$ este buclă comutativă Moufang. Fie 1 este unitate în $(Q, \circ)$ și I permutare în Q astfel, încât $x \circ Ix = 1$ pentru orice $x \in Q$. Așa cum $(y \circ x) \circ Ix = y$ pentru orice $x, y \in Q$, avem $y = (y \circ x) \circ Ix = (y \cdot L_e^{-1}x) \cdot L_e^{-1}Ix$. Prin urmare, $(y \cdot x) \cdot L_e^{-1}IL_ex = y$, de aici $(y \cdot x) \cdot \rho x = y$ pentru $\rho = L_e^{-1}IL_e$. Așadar, $(Q, \cdot)$ este *RIP*-cvazigrup. Aceasta după rezultatele din [54] înseamnă, că $(Q, \cdot)$ este cvazigrupul Bol la dreapta. $\square$

Lema 2.1.4. Orice *WA*-cvazigrup $(Q, \cdot)$ cu proprietate inversă la stânga (la dreapta) este cvazigrup Bol la stânga (la dreapta).

Demonstrație. Așa cum *WA*-cvazigrupul cu proprietate inversă la stânga este *LIP*-cvazigrup, demonstrația acestei leme este foarte asemănătoare cu demonstrația Lemei 2.1.2.

Pentru *WA*-cvazigrupuri cu proprietate inversă la dreapta demonstrația este similară. $\square$

Corolarul 2.1.2. Orice *WA*-cvazigrup, care este *IP*-cvazigrup, este cvazigrup Moufang.

Demonstrație. Demonstrația urmează din Lema 2.1.4. și Lema 1.5.1. $\square$

Definiția 2.1.2. (vezi [21]) Izotopia de forma

$$x \circ y = L_a^{-1}(L_ax \cdot y) \quad (2.9)$$

se numește *operație derivată la dreapta* pentru $(Q, \cdot)$, generată de elementul a .

Izotopia de forma

$$x \circ y = R_a^{-1}(x \cdot R_ay) \quad (2.10)$$

se numește *operație derivată la stânga* pentru $(Q, \cdot)$ generată de elementul a .

Noțiunea de operații derivate este introdusă în [55], [56].

Teorema 2.1.2. Fie $(Q, \cdot)$ este WA -cvazigrup. Atunci:

- (i) operația derivată la dreapta pentru $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga,
- (ii) operația derivată la stânga pentru $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la dreapta.

Demonstrație. (i). Din (2.9) urmează, că cvazigrupul $(Q, \circ)$ are unitate la stânga, și anume, $f = e_a$, unde $ae_a = a$. De fapt, $e_a \circ y = L_a^{-1}(L_a e_a \cdot y) = L_a^{-1}L_a y = y$. În particular $f \circ f = f$.

Fie următorul izotop al cvazigrupului $(Q, \circ)$:

$$x + y = (R_f^\circ)^{-1} x \circ y, \quad (2.11)$$

unde $R_f^\circ x = x \circ f$. Atunci $(Q, +)$ este buclă cu unitatea f .

Într-adevăr, $f + y = (R_f^\circ)^{-1} f \circ y = f \circ y = y$, așa cum, dacă $(R_f^\circ)^{-1} f = z$, atunci $f = (R_f^\circ)z$, $f = z \circ f$. Dar, așa cum am menționat deja, $f \circ f = f$, prin urmare, $z = f$. Mai departe avem $x + f = (R_f^\circ)^{-1} x \circ f = R_f^\circ(R_f^\circ)^{-1} x = x$.

Folosind (2.9), noi putem scrie (2.11) în felul următor:

$$x + y = L_a^{-1} \left(L_a (R_f^\circ)^{-1} x \cdot y \right).$$

Astfel, bucla $(Q, +)$ este izotop al WA -cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Conform Teoremei 2.1.1. printre buclele izotope WA -cvazigrupului $(Q, \cdot)$ există buclă comutativă Moufang. Amintim, că orice buclă, izotopă buclei Moufang, este buclă Moufang (vezi [21]). Din această cauză $(Q, +)$ este buclă Moufang.

Demonstrația va fi completă, dacă vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \circ)$ este LIP -cvazigrup. Din $x^{-1} + (x + y) = y$, folosind (2.11), vom obține $(R_f^\circ)^{-1} x^{-1} \circ ((R_f^\circ)^{-1} x \circ y) = y$. Acum, notând $(R_f^\circ)^{-1} x^{-1}$ prin αx și $(R_f^\circ)^{-1} x$ prin βx , vom obține două permutări α, β ale mulțimii Q , și posibilitatea de a scrie ultima ecuație sub o formă mai convenabilă $\alpha x \circ (\beta x \circ y) = y$, care este echivalentă cu $\alpha \beta^{-1} x \circ (x \circ y) = y$. Ultima arată, că $(Q, \circ)$ este LIP -cvazigrup. Aceasta termină demonstrația (i).

(ii). Din (2.10) urmează, că cvazigrupul $(Q, \circ)$ are unitate la dreapta $e = f_a$, unde $f_a a = a$. De fapt, $x \circ f_a = R_a^{-1}(x \cdot R_a f_a) = R_a^{-1}(x \cdot a) = x$.

Fie următorul izotop al cvazigrupului (buclei la dreapta) $(Q, \circ)$:

$$x + y = x \circ (L_e^\circ)^{-1} y, \quad (2.12)$$

unde $L_e^\circ x = e \circ x$. Atunci $(Q, +)$ este buclă cu unitatea e . Demonstrația e similară demonstrației în (i), și noi o omitem.

Din (2.12), folosind (2.10), avem

$$x + y = R_a^{-1}(x \cdot R_a(L_e^\circ)^{-1}y).$$

Similar, ca și în (i), noi putem demonstra, că $(Q, +)$ este buclă Moufang. Mai departe, din $(y + x) + x^{-1} = y$, folosind (2.12), avem $(y \circ (L_e^\circ)^{-1}x) \circ (L_e^\circ)^{-1}x^{-1} = y$. Aceasta arată, că $(Q, \circ)$ este *RIP*-cvazigrup. $\square$

2.2. Automorfismele *WA*-buclelor la stânga

Acest paragraf este dedicat automorfismelor *WA*-cvazigrupurilor, permutărilor interne ca automorfisme în raport cu unitatea la stânga și în raport cu element arbitrar.

Începem cu un lucru, care este un folclor al cvazigrupurilor:

Lema 2.2.1. În autotopia de cvazigrup oricare două componente determină în mod unic a treia.

Elementele grupului $I_h(Q, \cdot) = \{\alpha \in M(Q, \cdot) \mid \alpha h = h\}$, unde $M(Q, \cdot)$ este grup, generat de toate translațiile cvazigrupului $(Q, \cdot)$ la stânga și la dreapta, se numesc aplicații interne pentru $(Q, \cdot)$ în raport cu elementul $h \in Q$ (vezi [21]). Belousov a demonstrat (vezi [21]), că grupul $I_h(Q, \cdot)$ este generat de toate permutările de forma:

$$L_{x,y} = L_{x \circ y}^{-1} L_x L_y, \text{ unde } (x \circ y)h = x \cdot y h,$$

$$R_{x,y} = R_{x \bullet y}^{-1} R_y R_x, \text{ unde } h(x \bullet y) = h x \cdot y,$$

$$T_x = L_{\sigma x}^{-1} R_x, \text{ unde } \sigma = R_h^{-1} L_h.$$

Lema 2.2.2. În *WA*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f permutările interne $L_{x,y}$, $R_{x,y}$ și T_x în raport cu elementul f sunt automorfisme ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Demonstrație. În cazul nostru $L_{x,y} = L_{x \circ y}^{-1} L_x L_y$, unde $x \circ y = R_f^{-1}(x \cdot R_f y) = R_f^{-1} x \cdot y$, după Corolarul 2.1.1. Prin urmare

$$L_{x,y} = L_{R_f^{-1}x \cdot y}^{-1} L_x L_y. \quad (2.13)$$

Mai mult decât atât, $x \cdot y = f x \cdot y = f(x \bullet y) = x \bullet y$ are loc

$$R_{x,y} = R_{x \bullet y}^{-1} R_y R_x. \quad (2.14)$$

Așa cum $\sigma x = R_f^{-1} L_f x = R_f^{-1} x$, avem $T_x = L_{R_f^{-1}x}^{-1} R_x$. Astfel

$$L_{x,y} f = R_{x,y} f = T_x f = f. \quad (2.15)$$

Din (2.1) urmează, că pentru orice $a \in Q$ fixat, următoarele triplete (L_a, L_a, L_{a^2}) și (R_a, R_a, R_{a^2}) , inversele lor și componente diferite – produsul lor sunt autotopii în $(Q, \cdot)$. Prin urmare

$$\left(L_{R_f^{-1}x \cdot y}^{-1}, L_{R_f^{-1}x \cdot y}^{-1}, L_{(R_f^{-1}x \cdot y)^2}^{-1} \right) (L_x, L_x, L_{x^2}) (L_y, L_y, L_{y^2}) =$$

$$= \left(L_{x,y}, L_{x,y}, L_{(R_f^{-1}x \cdot y)}^{-1} \right)^2 L_{x^2} L_{y^2} \quad (2.16)$$

Aceasta înseamnă, că

$$L_{x,y} f \cdot L_{x,y} z = L_{(R_f^{-1}x \cdot y)}^{-1} L_{x^2} L_{y^2} (f \cdot z), \quad (2.17)$$

de unde, folosind (2.15), avem

$$L_{x,y} z = L_{(R_f^{-1}x \cdot y)}^{-1} L_{x^2} L_{y^2} z \quad (2.18)$$

pentru orice $x, y, z \in Q$. Aceasta împreună cu (2.16), arată, că $L_{x,y}$ este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Analog din

$$\left(R_{x \cdot y}^{-1}, R_{x \cdot y}^{-1}, R_{(x \cdot y)^2}^{-1} \right) (R_y, R_y, R_{y^2}) (R_x, R_x, R_{x^2}) = \left(R_{x,y}, R_{x,y}, R_{(x \cdot y)^2}^{-1} R_{y^2} R_{x^2} \right) \quad (2.19)$$

și

$$\left(L_{R_f^{-1}x}^{-1}, L_{R_f^{-1}x}^{-1}, L_{(R_f^{-1}x)^2}^{-1} \right) (R_x, R_x, R_{x^2}) = \left(T_x, T_x, L_{(R_f^{-1}x)^2}^{-1} R_{x^2} \right) \quad (2.20)$$

de aici rezultă, că $R_{x,y}$ și T_x sunt automorfisme pentru cvazigrup $(Q, \cdot)$. □

Corolarul 2.2.1. În orice WA -cvazigrup cu unitate la stânga avem

$$L_{x,y} = L_{x^2,y^2}, R_{x,y} = R_{x^2,y^2}, T_x = T_{x^2}.$$

Demonstrație. Presupunând $y = z$ în (2.1), avem

$$(xy)^2 = x^2 \cdot y^2. \quad (2.21)$$

Din (2.13) și (2.18) urmează, că identitatea $L_{x,y} = L_{x^2,y^2}$ va fi demonstrată, dacă vom demonstra, că $(R_f^{-1}x \cdot y)^2 = R_f^{-1}x^2 \cdot y^2$. Aceasta urmează din (2.21) și faptul, că R_f (și inversa lui) sunt automorfisme în $(Q, \cdot)$ (vezi Corolarul 2.1.1.). De fapt, $(R_f^{-1}x)^2 = R_f^{-1}x \cdot R_f^{-1}x = R_f^{-1}(x \cdot x) = R_f^{-1}x^2$. Precum $R_{x,y} = R_{(x \cdot y)^2}^{-1} R_{y^2} R_{x^2}$, după (2.19), din (2.14) și (2.21) obținem $R_{x,y} = R_{x^2,y^2}$.

Identitatea a treia se demonstrează similar. □

Definiție 2.2.1. (vezi [57], [39]) Fie $(Q, \cdot)$ un grupoid. Elementul $a \in Q$ se numește *element nuclear la stânga* în $(Q, \cdot)$, dacă $L_{ax} = L_a L_x$ pentru orice $x \in Q$. Mulțimea tuturor elementelor nucleare la stânga în $(Q, \cdot)$ se numește nucleu la stânga $(Q, \cdot)$ și se notează N_l .

Este bine cunoscut (vezi [21], [44]), că în cvazigrup mulțimea N_l formează subgrup.

Teorema 2.2.1. În WA -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f permutările interne $L_{x,y}, R_{x,y}$ și T_x față de $a \in Q$ sunt automorfisme în $(Q, \cdot)$ dacă și numai dacă $a \in N_l$ și se îndeplinește următoarea identitate $xy \cdot a = xf \cdot ya$.

Demonstrație. În acest caz $L_{x,y} = L_{x \circ y}^{-1} L_x L_y$, unde $x \circ y = R_a^{-1}(x \cdot R_a y)$, $R_{x,y} = R_{x \bullet y}^{-1} R_y R_x$, unde $ax \cdot y = a(x \bullet y)$ și $T_x = L_{\sigma x}^{-1} R_x$, unde $\sigma x = R_a^{-1} L_a x$.

Astfel, ca și în demonstrația Lemei 2.2.2. (identitățile (2.16), (2.17), și (2.18)), putem demonstra, că $L_{x,y}, R_{x,y}$ și T_x sunt automorfisme pentru $(Q, \cdot)$. Atunci $L_{x \circ y}^{-1} L_x L_y f = f$, adică $L_x L_y f = L_{x \circ y} f$. Deci, $x \cdot y f = L_{x \circ y} f = R_a^{-1}(x \cdot R_a y) f$, de unde obținem $R_f^{-1}(x \cdot y f) = R_a^{-1}(x \cdot R_a y)$. Deoarece R_f^{-1} este automorfism al $(Q, \cdot)$ (Corolarul 2.1.1.), din ultima identitate obținem $R_f^{-1} x \cdot y = R_a^{-1}(x \cdot R_a y)$, deoarece și, $xy = R_a^{-1}(R_f x \cdot R_a y)$. Astfel, $xy \cdot a = xf \cdot ya$ pentru orice $x, y \in Q$.

Mai mult decât atât, $R_{x \bullet y}^{-1} R_y R_x f = f$ este $R_y R_x f = R_{x \bullet y} f$. Prin urmare $xy = x \bullet y$ și $ax \cdot y = a(x \bullet y) = a \cdot xy$ pentru toți $x, y \in Q$. Deci $a \in N_l$.

Afirmația inversă este evidentă. □

Lema 2.2.3. Permutarea $L_a R_a$ este automorfism al WA -cvazigrupului $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f dacă și numai dacă $a^2 = f$.

Demonstrație. Deoarece

$$(L_a, L_a, L_{a^2})(R_a, R_a, R_{a^2}) = (L_a R_a, L_a R_a, L_{a^2} R_{a^2}) \quad (2.22)$$

este autotopie în $(Q, \cdot)$, avem

$$L_a R_a f \cdot L_a R_a y = L_{a^2} R_{a^2} y \quad (2.23)$$

pentru orice $y \in Q$. Această autotopie este automorfism dacă și numai dacă $L_{a^2} R_{a^2} = L_a R_a$.

Ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $L_a R_a f = f$, adică, dacă și numai dacă $a^2 = f$. □

Corolarul 2.2.2. Fie $(Q, \cdot)$ este WA -cvazigrup cu unitate la stânga f . Dacă $a^2 = f$, atunci $L_a R_a = L_{a^2} R_{a^2} = R_f$.

Demonstrație. Din (2.22) și faptul, că $L_a R_a$ este automorfism pentru $(Q, \cdot)$ urmează $L_a R_a = L_{a^2} R_{a^2}$. Din (2.23), $L_a R_a f = f$ și $a^2 = f$ avem $L_a R_a = R_f$. □

Lema 2.2.4. Permutarea $L_{a^2} R_a$ este automorfism al WA -cvazigrupului $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f dacă și numai dacă $a^2 \cdot a = f$.

Demonstrație. Este clar, că

$$(L_{a^2}, L_{a^2}, L_{(a^2)^2})(R_a, R_a, R_{a^2}) = (L_{a^2} R_a, L_{a^2} R_a, L_{(a^2)^2} R_{a^2})$$

este autotopie a cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Prin urmare $L_{a^2} R_a f \cdot L_{a^2} R_a y = L_{(a^2)^2} R_{a^2} y$ are loc pentru

orice $y \in Q$. Această autotopie este automorfism dacă și numai dacă $L_{(a^2)^2} R_{a^2} = L_{a^2} R_a$, adică

dacă și numai dacă $L_{a^2} R_a f = f$. Ultima condiție este echivalentă cu $a^2 \cdot a = f$. □

2.3. Pseudoautomorfisme și subbucle

Noțiunea de pseudoautomorfism o avem în primul capitol al lucrării (vezi [21]). Cvazigrupul cu pseudoautomorfism la dreapta are de asemenea unitate la stânga (vezi [39]).

Lema 2.3.1. În WA -cvazigrupul cu unitate la stânga f translația R_a este pseudoautomorfism la dreapta dacă și numai dacă translația L_a este pseudoautomorfism la dreapta și $a^2 = f$.

Demonstrație. Presupunem, că R_a este pseudoautomorfism la dreapta cu companionul k , adică cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are autotopia $(L_k R_a, R_a, L_k R_a)$. Conform Lemei 2.2.3., $L_a R_a$, unde $a^2 = f$, este automorfism pentru $(Q, \cdot)$.

Prin urmare

$$(L_k R_a, R_a, L_k R_a)(L_a R_a, L_a R_a, L_a R_a)^{-1} = (L_k L_a^{-1}, L_a^{-1}, L_k L_a^{-1})$$

este, de asemenea, o autotopie pentru $(Q, \cdot)$. Ultima înseamnă, că L_a^{-1} este pseudoautomorfism la dreapta pentru $(Q, \cdot)$. Așa cum mulțimea tuturor pseudoautomorfismelor la dreapta în $(Q, \cdot)$ alcătuiește grup (vezi [21]), L_a de asemenea este pseudoautomorfism la dreapta pentru $(Q, \cdot)$.

Afirmația inversă este evidentă. □

Lema 2.3.2. Fie $(H, \cdot)$ un subcvazigrup al WA -cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Atunci $(aH, \cdot)$ este subcvazigrup pentru $(Q, \cdot)$ pentru orice $a = a^2$.

Demonstrație. Conform (2.1) avem $ah_1 \cdot ah_2 = a^2 \cdot h_1 h_2 = a \cdot h_1 h_2 \in aH$. Astfel, mulțimea aH este închisă față de operația de cvazigrup.

Ecuția $ah_1 \cdot x = ah_2$, unde $h_1, h_2 \in H$, are unica soluție $x \in Q$. E evident, că $x = ax'$ pentru careva $x' \in Q$. În așa mod, $ah_1 \cdot ax' = a \cdot h_1 x' = ah_2$. Prin urmare $h_1 x' = h_2$, și deci, $x' \in H$. Atunci $x = ax' \in aH$.

Similar vom demonstra, că ecuația $y \cdot ah_1 = ah_2$ are soluție în aH . □

Lema 2.3.3. Fie $(Q, \cdot)$ este WA -cvazigrup cu unitate la stânga f și $(Q, \circ)$ este buclă definită în (2.6).

Dacă $(Q, \cdot)$ satisface proprietăților inverse, atunci:

- (i) $R_f^2 = \varepsilon$, unde ε permutare identică,
- (ii) $I_l = I, I_r = IR_f$ pentru $I_l x \cdot xy = y, xy \cdot I_r y = x, Ix \circ (x \circ y) = y$,
- (iii) I_l și I_r sunt automorfisme ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$ și buclei $(Q, \circ)$,
- (iv) $I_l I_r = R_f, I_l I_r = I_r I_l$.

Demonstrație. (i). De fapt, $I_l f = I_r f = f$. Astfel $xf \cdot f = x$ pentru toți $x \in Q$. Așa dar, $R_f^2 = \varepsilon$.

(ii). Deoarece $x \circ y \stackrel{(2.6)}{=} R_f^{-1} x \cdot y = R_f x \cdot y$, după (i), R_f este automorfism în $(Q, \cdot)$ și corespunde buclei comutative Moufang $(Q, \circ)$ (Teorema 2.1.1. și Corolarul 2.1.1.).

Trecem acum la ecuația $I_l x(x \cdot y) = y$ și folosim operația buclei “ $\circ$ ”, avem $R_f I_l x \circ (R_f x \circ y) = y$. Astfel $R_f I_l R_f^{-1} x \circ (x \circ y) = y$. Prin urmare, $I = R_f I_l R_f^{-1}$ și $I_l = R_f^{-1} I R_f = I$, deoarece în $(Q, \circ)$ automorfismele R_f și I comutează.

Analog, trecând în ecuația $(x \cdot y) I_r y = x$ după operația buclei “ $\circ$ ”, obținem $R_f (R_f x \circ y) \circ I_r y = x$. Astfel, $(x \circ R_f y) \circ I_r y = x$ și $(x \circ y) \circ I_r R_f^{-1} y = x$. Deci, $I = I_r R_f^{-1}$ și $I_r = I R_f$.

(iii). Este corolar pentru (ii) și (iii).

(iv). Deoarece $I = I_l$ și $I_r = I R_f$, avem $I_l I_r = I^2 R_f = R_f$. Analog, $I_r I_l = I R_f I = R_f$. $\square$

2.4. WIP-cvazigrupuri generalizate (OWIP-cvazigrupuri)

Cvazigrupul $L(+)$ are proprietate inversabilă slabă ($L(+)$ este WIP-cvazigrup), dacă $x + I(x + y) = Iy$ pentru orice $x, y \in L$ și careva permutare a mulțimii L [10], [11], [58].

Buclele cu proprietate inversă slabă detaliat au fost cercetate de către Osborne [59]. În particular, în [59] este construit exemplu de WIP-bucă, care este G -bucă. Tot în această sursă sunt demonstrate și alte proprietăți ale WIP-buclelor.

În acest paragraf s-au cercetat careva proprietăți ale WIP-cvazigrupurilor generalizate. Este o clasă nouă de cvazigrupuri introdusă de către Florea I. A. și autoarea tezei.

Definiția 2.4.1. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește OWIP-cvazigrup, dacă în $(Q, \cdot)$ are loc egalitatea

$$x \cdot I(y \cdot \alpha x) = Iy, \quad (2.24)$$

pentru orice $x, y \in Q$, unde I și α careva permutări ale mulțimii Q .

Următorul cvazigrup este OWIP-cvazigrup, însă nu este WIP-cvazigrup.

Exemplul 2.4.1. Avem $I = (0 \ 1), \alpha = (1 \ 2)$.

*	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

Lema 2.4.1. În OWIP-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are loc egalitatea

$$I^{-1}(xz) \cdot \alpha x = I^{-1}z, \quad (2.25)$$

pentru orice $x, z \in Q$.

Demonstrație. Din (2.24) avem $I^{-1}(x \cdot I(y \cdot \alpha x)) = y, I^{-1}(x \cdot I(y \cdot \alpha x)) \cdot \alpha x = y \cdot \alpha x,$

$$I^{-1}(xz) \cdot \alpha x = I^{-1}z, \text{ unde } y \cdot \alpha x = I^{-1}z. \quad \square$$

Teorema 2.4.1. OWIP-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este izotop al LIP-buclei $(Q, \circ)$, unde

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y, xy = R_ax \circ L_by \quad (2.26)$$

dacă și numai dacă în $(Q, \cdot)$ are loc următoarea egalitate

$$b \cdot I(I^{-1}(by) \cdot x) = R_{e_b}^{-1}(b \cdot I(I^{-1}b \cdot x)) \cdot y, \quad (2.27)$$

unde $be_b = b$, $R_{e_b}v = ve_b$.

Demonstrație. Fie $(Q, \circ)$ este *LIP*-bucă, adică în $(Q, \circ)$ are loc următoarea egalitate:

$I_l x \circ (x \circ y) = y$. Folosind (2.26) avem $R_a^{-1}I_l x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) = y$. Aplicăm I^{-1} asupra ambelor părți ale ultimii egalități și obținem $I^{-1}(R_a^{-1}I_l x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y)) = I^{-1}y$. Înmulțim ultima egalitate din dreapta cu expresia $\alpha R_a^{-1}I_l x$ și avem $I^{-1}(R_a^{-1}I_l x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y)) \cdot \alpha R_a^{-1}I_l x = I^{-1}y \cdot \alpha R_a^{-1}I_l x$. Din egalitatea (2.25) obținem $I^{-1}L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) = I^{-1}y \cdot \alpha R_a^{-1}I_l x$. Mai departe efectuăm următoarele substituții $x \rightarrow R_ax, y \rightarrow L_by$, obținem $I^{-1}L_b^{-1}(xy) = I^{-1}L_by \cdot \alpha R_a^{-1}I_l R_ax$.

Dacă $y = e_b$, unde $be_b = b$, atunci $I^{-1}L_b^{-1}R_{e_b}x = L_{I^{-1}b}\alpha R_a^{-1}I_l R_ax$, $\alpha R_a^{-1}I_l R_ax = L_{I^{-1}b}^{-1}I^{-1}L_b^{-1}R_{e_b}x$, $I^{-1}L_b^{-1}(xy) = I^{-1}L_by \cdot L_{I^{-1}b}^{-1}I^{-1}L_b^{-1}R_{e_b}x$, $R_{e_b}^{-1}L_b I L_{I^{-1}b}x \cdot y = L_b I(I^{-1}L_by \cdot x)$, $R_{e_b}^{-1}(b \cdot I(I^{-1}b \cdot x)) \cdot y = b \cdot I(I^{-1}(by) \cdot x)$ obținem (2.27).

Invers. Fie (2.27) are loc. Atunci avem $L_b I(I^{-1}L_by \cdot x) = \varphi x \cdot y$, unde $\varphi x = R_{e_b}^{-1}L_b I L_{I^{-1}b}x$. Mai putem scrie $I^{-1}L_by \cdot \varphi^{-1}x = I^{-1}L_b^{-1}(xy)$, $I^{-1}y \cdot \varphi^{-1}R_a^{-1}x = I^{-1}L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y)$.

Prin urmare următoarea egalitate este adevărată:

$$\begin{aligned} I^{-1}\left(\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y)\right) \cdot \alpha(\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x) &\stackrel{(2.25)}{=} I^{-1}L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) = \\ &= I^{-1}y \cdot \varphi^{-1}R_a^{-1}x \end{aligned}$$

$I^{-1}\left(\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y)\right) = I^{-1}y$, $R_a^{-1}(R_a\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x) \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) = y$, $R_a\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x \circ (x \circ y) = y$, $I_l x \circ (x \circ y) = y$, unde $I_l = R_a\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}$. $\square$

Cercetăm cazul, când orice buclă $(Q, \circ)$, izotopă *OWIP*-cvazigrupului $(Q, \cdot)$, este *LIP*-bucă. În acest caz în cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are loc următoarea identitate:

$$z \cdot I(I^{-1}(zy) \cdot x) = R_{e_z}^{-1}(z \cdot I(I^{-1}z \cdot x)) \cdot y, \quad (2.28)$$

pentru orice $x, y, z \in Q$ unde I este permutare a mulțimii Q , $ze_z = z$, $R_{e_z}t = te_z$.

Lema 2.4.2. Dacă în cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are loc identitatea (2.28), atunci în $(Q, \cdot)$ este adevărată identitatea

$$z \cdot I(y \cdot \alpha z) = Iy, \quad (2.29)$$

pentru orice $z, y \in Q$, unde α este aplicația mulțimii Q în sine. Iar dacă α este permutare, atunci $(Q, \cdot)$ este *OWIP*-cvazigrup.

Demonstrație. Ecuația $I(I^{-1}c \cdot x) = e_c$, unde $ce_c = c$ are soluție unică. Într-adevăr,

$x = (IL_{I^{-1}c})^{-1}e_c = L_{I^{-1}c}^{-1}I^{-1}e_c = \alpha c$. Dacă înlocuim în (2.28) $x = L_{I^{-1}z}^{-1}I^{-1}e_z = \alpha z$, atunci $I(I^{-1}(zy) \cdot \alpha z) = y, z \cdot I(I^{-1}(zy) \cdot \alpha z) = zy$, unde $t = I^{-1}(zy)$. $\square$

Teorema 2.4.2. Orice buclă $(Q, \circ)$, izotopă cvazigrupului $(Q, \cdot)$ cu identitatea (2.28), este buclă Bol la stânga [11].

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm acel fapt pentru bucla $(Q, \circ)$, unde izotopia are forma (2.26).

Din (2.28) și (2.26) avem $R_a z \circ L_b I(R_a I^{-1}(R_a z \circ L_b y) \circ L_b x) = R_a R_{e_z}^{-1}(z \cdot I(I^{-1}z \cdot x)) \circ L_b y$. Dacă $L_b y = e$, unde e este unitatea buclei $(Q, \circ)$, $e = ba$, atunci avem $R_a z \circ L_b I(R_a I^{-1}(R_a z \circ L_b y) \circ L_b x) = (R_a z \circ L_b I(R_a I^{-1}R_a z \circ L_b x)) \circ L_b y$. Facem următoarele substituții: $z \rightarrow R_a^{-1}z, y \rightarrow L_b^{-1}y, x \rightarrow L_b^{-1}x$, și avem $z \circ L_b I(R_a I^{-1}(z \circ y) \circ x) = (z \circ L_b I(R_a I^{-1}z \circ x)) \circ y$. Dacă $z = e$, apoi obținem $L_b I(R_a I^{-1}y \circ x) = \varphi x \circ y$, unde $\varphi x = L_b I(R_a I^{-1}e \circ x)$, φ este permutare a mulțimii Q . Prin urmare obținem următoarea identitate: $z \circ (\varphi x \circ (z \circ y)) = (z \circ (\varphi x \circ z)) \circ y$ sau $z \circ (x \circ (z \circ y)) = (z \circ (x \circ z)) \circ y, \forall x, y, z \in Q$. Am obținut, că $(Q, \circ)$ este buclă Bol la stînga. $\square$

Corolarul 2.4.1. Dacă cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea (2.28) este *LIP*-cvazigrup, atunci $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stînga.

Analog se prezintă și rezultatele la dreapta. Unele rezultate ale acestei lucrări sunt publicate în [60].

2.5. Despre definirea *CI*-cvazigrupurilor

CI-bucle au fost definite de către Rafael Artzy [18]. În [18] se demonstrează, că J este un automorfism al buclei $(Q, \cdot)$. V. D. Belousov și B. V. Tırkan au definit *CI*-cvazigrupurile în [19]. Unele aplicații ale *CI*-cvazigrupurilor în criptologie sunt prezentate în [61], [34].

Definiția 2.5.1. Bucla $(Q, \cdot)$, ce satisface una din identitățile echivalente $x \cdot y J x = y, xy \cdot J x = y$, unde J este o bijecție a mulțimii Q astfel încât $x \cdot J x = 1$, se numește *CI-buclă*.

În [18] este demonstrat, că J este automorfism al buclei $(Q, \cdot)$.

Definiția 2.5.2. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $xy \cdot J x = y$, unde J este o aplicație a mulțimii Q în Q , se numește *CI-cvazigrup* [21].

Observăm, că în acest caz aplicația J este permutare a mulțimii Q [21]. În orice *CI*-cvazigrup permutarea J este unică ([19], Lema 2.25).

Definiția 2.5.3. [21] Grupoidul $(Q, \cdot)$ cu identitatea

$$xy \cdot I_r x = y, \quad (2.30)$$

unde I_r este aplicația mulțimii Q în sine, se numește *CI-grupoid la stânga*.

Grupoidul $(Q, \cdot)$ cu identitatea

$$I_l x \cdot yx = y, \quad (2.31)$$

unde I_l este aplicația mulțimii Q în sine, se numește *CI-grupoid la dreapta*.

Grupoidul $(Q, \cdot)$ cu ambele identități (2.30) și (2.31) se numește *CI-grupoid* [38].

În articolul fundamental [19] sunt dovedite următoarele fapte: orice *CI-grupoid* este cvazigrup, în *CI-cvazigrup* identitățile (2.30) și (2.31) sunt echivalente, orice *CI-grupoid la stânga* este cvazigrup la stânga.

Din rezultatele lui Chidwelli și Șcerbacov (vezi, de exemplu, ([34], Propoziția 3.28) urmează, că *CI-grupoidul la stânga*, în care aplicația I_r este bijectivă, este *CI-cvazigrup*.

Orice *CI-grupoid finit la stânga* este *CI-cvazigrup* [38].

Exemplu 2.5.1. *Cvazigrupul $(Q, *)$ este CI-cvazigrup*

*	0	1	2	3	4	5
0	3	4	5	1	0	2
1	5	3	4	2	1	0
2	4	5	3	0	2	1
3	2	0	1	3	5	4
4	0	1	2	5	4	3
5	1	2	0	4	3	5

Lema 2.5.1. Orice *CI-grupoid la stânga* este cvazigrup la stânga [21].

Demonstrație. Demonstrăm, că în *CI-grupoidul la stânga* $(Q, \cdot)$ ecuația

$$a \cdot x = b \quad (2.32)$$

are unica soluție. Din ecuația (2.32) avem $ax \cdot I_r a = b \cdot I_r a$, $x = b \cdot I_r a$. Dacă înlocuim ultima expresie în (2.32), atunci vom obține următoarea egalitate:

$$a \cdot bI_r a = b. \quad (2.33)$$

Unicitatea. Presupunem, că există două soluții ale ecuației (2.32), fie, x_1 și x_2 . Atunci $ax_1 = ax_2$, $ax_1 \cdot I_r a = ax_2 \cdot I_r a$ și din (2.30) obținem, că $x_1 = x_2$.

Prin urmare orice translație la stânga L_x a grupoidului $(Q, \cdot)$ este aplicație bijectivă. $\square$

Notăm prin $\mathcal{L}$ setul tuturor translațiilor la stânga ale *CI-grupoidului* $(Q, \cdot)$ și prin $\mathcal{R}$ mulțimea tuturor translațiilor de forma $R_{J_r x}$ ale *CI-grupoidului* $(Q, \cdot)$.

Lema 2.5.2. Există bijecție între mulțimea Q și mulțimea $\mathcal{R}$, aplicația J_r este bijectivă și $J_r Q = Q$.

Demonstrație. Putem scrie identitatea (2.30) în următoarea formă:

$$R_{J_r x} L_x = \varepsilon. \quad (2.34)$$

Din egalitatea (2.34) și Lema 2.5.1. urmează, că aplicația $R_{J_r d}$ este bijecția mulțimii Q pentru orice element fixat $d \in Q$. Există bijecție între mulțimea Q și mulțimea $\mathcal{L}$ tuturor translațiilor la stânga ale grupoidului $(Q, \cdot)$. Și anume $x \leftrightarrow L_x, Q \leftrightarrow \mathcal{L}$.

Din egalitatea (2.34) urmează, că există bijecție între mulțimea $\mathcal{L}$ și mulțimea $\mathcal{R}$ pentru toate translațiile (bijecții) de forma $R_{J_r x}$, și anume $L_x \leftrightarrow R_{J_r x}, \mathcal{L} \leftrightarrow \mathcal{R}$.

Prin urmare, există bijecție între mulțimea Q și mulțimea $\mathcal{R}$, aplicația J_r este bijectivă și $J_r Q = Q$. □

Teorema 2.5.1. Orice CI -grupoid la stânga $(Q, \cdot)$ este CI -cvazigrup.

Demonstrație. Având în vedere Lema 2.5.1., noi trebuie să demonstrăm numai, că în CI -grupoidul la stânga $(Q, \cdot)$ ecuația

$$y \cdot a = b \quad (2.35)$$

are unica soluție pentru orice elemente fixate $a, b \in Q$. Folosind limbajul translațiilor, scriem ecuația (2.35) în următoarea formă: $R_a y = b$. Astfel există translația la dreapta pentru orice $a \in Q$. După Lema 2.5.2. aplicația R_a este bijecție. Atunci $y = R_a^{-1} b$.

Prin urmare orice CI -grupoid la stânga $(Q, \cdot)$ este CI -cvazigrup. □

Este clar, că este adevărată teorema similară pentru orice CI -grupoid la dreapta.

Remarcă. Teorema 2.5.1. poate fi demonstrată, folosind Lema 2.5.1., 2.5.2. și Propoziția 3.28 din [19].

2.6. Izotopii CI -cvazigrupului

Propoziția 2.6.1. CI -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este izotop al grupului $(Q, \circ)$, cu izotopia (2.26) dacă și numai dacă în $(Q, \cdot)$ are loc

$$\left(x(y(zu)) \right) \cdot v = y \cdot ((xz \cdot v) \cdot u), \quad (2.36)$$

pentru orice $x, y, z, u, v \in Q$.

Demonstrație. Fie $(Q, \circ)$ din (2.26) este grup, adică în $(Q, \circ)$ are loc legea asociativă

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z). \quad (2.37)$$

Atunci din (2.37) și (2.26) avem $R_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot L_b^{-1}z = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}z)$. Efectuăm următoarele substituții $x \rightarrow R_a x, y \rightarrow L_b y, z \rightarrow L_b z$ și obținem

$$R_a^{-1}(xy) \cdot z = x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}L_b y \cdot z). \quad (2.38)$$

Din $xy \cdot Jx = y$ avem $R_{Jx} L_x = \varepsilon$, unde ε este permutarea identică a mulțimii Q . Am obținut

$$L_x^{-1} = R_{Jx}, R_x^{-1} = L_{J^{-1}x} \quad (2.39)$$

Folosim (2.39) în (2.38)

$$(J^{-1}a \cdot (x \cdot (y \cdot Jb))) \cdot z = x \cdot ((J^{-1}a \cdot y) \cdot z) \cdot Jb. \quad (2.40)$$

Deoarece bucla, izotopă grupului, este de asemenea grup, atunci egalitatea (2.40) are loc în $(Q, \cdot), \forall a, b, x, y, z \in Q$, adică în $(Q, \cdot)$ are loc identitatea (2.36).

Invers. Fie în $(Q, \cdot)$ are loc (2.36). Trecem de la operația “ $\cdot$ ” la operația “ $\circ$ ”, folosind (2.26):

$$R_a(x(yzu)) \circ L_b v = R_a y \circ L_b(R_a(R_a(R_a x \circ L_b z) \circ L_b v) \circ L_b u).$$

Dacă $L_b v = e$, unde e este unitatea buclei $(Q, \circ)$, atunci avem $(R_a y \circ L_b(R_a^2(R_a x \circ L_b z) \circ L_b v) \circ L_b u)) \circ L_b v = R_a y \circ L_b(R_a(R_a(R_a x \circ L_b z) \circ L_b v) \circ L_b u)$. Simplificăm ultima egalitate $(y \circ L_b(R_a^2(x \circ z) \circ u)) \circ v = y \circ L_b(R_a(R_a(x \circ z) \circ v) \circ u)$.

Dacă $y = e$, avem $(y \circ L_b(R_a^2(x \circ z) \circ u)) \circ v = y \circ (L_b(R_a^2(x \circ z) \circ u) \circ v), (y \circ t) \circ v = y \circ (t \circ v)$, unde $t = L_b(R_a^2(x \circ z) \circ u)$. Am obținut, că $(Q, \circ)$ este grup. $\square$

Exemple 2.6.1.

1. Cvazigrupul $(Q, *)$ este CI-cvazigrup în care nu are loc identitatea (2.36). Aici $J = (0 \ 1)(3 \ 4)$

*	0	1	2	3	4
0	2	4	1	3	0
1	3	2	0	1	4
2	1	0	2	4	3
3	0	3	4	2	1
4	4	1	3	0	2

2. Următorul cvazigrup este CI-cvazigrup în care are loc identitatea (2.36). Avem $J = (0)(1)(2)(3)(4)$

*	0	1	2	3	4
0	0	2	1	4	3
1	2	3	0	1	4
2	1	0	4	3	2
3	4	1	3	2	0
4	3	4	2	0	1

Se pune întrebarea, dacă în cvazigrupul arbitrar $(Q, \cdot)$ se îndeplinește identitatea (2.36), este oare $(Q, \cdot)$ *CI*-cvazigrup?

Propoziția 2.6.2. Dacă în cvazigrupul arbitrar $(Q, \cdot)$ are loc identitatea (2.36), atunci $(Q, \cdot)$ este *CI*-cvazigrup.

Demonstrație. Înlocuim în (2.36) $z = y, u = y^{-1}$, unde $yy^{-1} = e_y$, și obținem $xy \cdot v = y \cdot ((xy \cdot v)y^{-1})$ sau $t = y(ty^{-1})$, unde $t = xy \cdot v$.

Din $t = y(ty^{-1})$ urmează $ty^{-1} = (y(ty^{-1}))y^{-1}$, $x = (yx) \cdot y^{-1}$, unde $x = ty^{-1}$. Avem $x = (yx) \cdot Jy$, unde $y^{-1} = Jy$, $(Q, \cdot)$ este *CI*-cvazigrup. $\square$

Propoziția 2.6.3. Dacă orice buclă $(Q, \circ)$, izotopă *CI*-cvazigrupului $(Q, \cdot)$, este comutativă, atunci cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este medial, iar $(Q, \circ)$ este grup abelian.

Demonstrație. Este suficient de precăutat izotopul $(Q, \circ)$, unde izotopia este dată de egalitatea (2.26). Fie $(Q, \circ)$ este buclă comutativă, adică este dat $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in Q$. Atunci avem $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y = R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x$. Acum folosim (2.39) și obținem $L_{J^{-1}a}x \cdot R_{Jb}y = L_{J^{-1}a}y \cdot R_{Jb}x$ sau $(J^{-1}a \cdot x)(y \cdot Jb) = (J^{-1}a \cdot y)(x \cdot Jb)$. Ultima egalitate are loc $\forall a, b, x, y \in Q$. Prin urmare $(Q, \cdot)$ este cvazigrup medial, iar $(Q, \circ)$ este grup abelian (pe baza Teoremei lui Toyoda) [21]. $\square$

Propoziția 2.6.4. Bucla $(Q, \circ)$, izotopă *CI*-cvazigrupului $(Q, \cdot)$, unde izotopia este dată de egalitatea (2.26), va fi *CI*-buclă dacă și numai dacă în $(Q, \cdot)$ are loc

$$(x \cdot by)a = (x \cdot ba)y, \quad (2.41)$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Demonstrație. Fie $(Q, \circ)$ este *CI*-buclă, adică în $(Q, \circ)$ are loc $(x \circ y) \circ x^{-1} = y$, unde $x \circ x^{-1} = e$, e este unitatea buclei $(Q, \circ)$, unde $e = ba, x^{-1} = J'x$. Atunci avem

$$R_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot L_b^{-1}x^{-1} = y. \quad (2.42)$$

În orice *CI*-cvazigrup $(Q, \cdot)$ are loc $J^{-1}x(yx) = y$. Într-adevăr, avem $(xy)Jx = y$, $x(xy \cdot Jx) = xy$, $x(z \cdot Jx) = z$, unde $z = xy$, de unde avem

$$J^{-1}x(zx) = z. \quad (2.43)$$

Înmulțim din stânga (2.42) cu $J^{-1}L_b^{-1}x^{-1}$ și obținem pe baza (2.43):

$R_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) = J^{-1}L_b^{-1}x^{-1} \cdot y$ sau $R_a^{-1}(xy) = J^{-1}L_b^{-1}J'R_ax \cdot L_by$. Fie $y = e_b$, unde $be_b = b$. Atunci avem $R_a^{-1}(xy) = R_b^{-1}R_a^{-1}R_{e_b}x \cdot L_by$, $R_{e_b}^{-1}R_aR_bx \cdot y = R_a(x \cdot L_by) = (x \cdot by)a$. Dacă $y = a$, avem $(x \cdot ba)y = (x \cdot by)a$.

Invers. Este dat (2.41) sau $R_a(x \cdot L_by) = R_{ba}x \cdot y$, sau $xy = R_a^{-1}(R_{ba}x \cdot L_b^{-1}y)$, $(xy)Jx = R_a^{-1}(R_{ba}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot Jx$, de unde urmează $y = R_a^{-1}(R_{ba}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot Jx$. În ultima egalitate trecem la

operația “ $\circ$ ”, folosind (2.26): $R_a^{-1}(R_a^{-1}R_aR_{ba}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot L_b^{-1}L_bJx = y$, $(x \circ y) \circ J'x = y$, unde $J' = L_bJ R_{ba}^{-1}R_a^{-1}$. $\square$

Acum trecem la studiul cvazigrupului $(Q, \cdot)$, în care egalitatea (2.41) are loc $\forall a, b, x, y \in Q$.

Propoziția 2.6.5. Orice cvazigrup $(Q, \cdot)$ cu identitatea

$$(x \cdot yz)t = (x \cdot yt)z, \quad (2.44)$$

$\forall x, y, z, t \in Q$ este *CI*-cvazigrup și medial.

Demonstrație. În orice cvazigrup $(Q, \cdot)$ ecuația $ax = e_a$, unde $ae_a = a$, este rezolvabilă și soluția depinde numai de a . Avem $a \cdot I(a) = e_a$, unde I este aplicația Q în Q . În (2.44) substituim $y = x$, $t = I(x)$, unde $x \cdot I(x) = e_x$, avem $(x \cdot xz)I(x) = xz$ sau $(xv)I(x) = v$, unde $v = xz$, $\forall v, x \in Q$. Am obținut $(Q, \cdot)$ este *CI*-cvazigrup.

Mai departe luăm în considerare bucla $(Q, \circ)$, izotopă cvazigrupului $(Q, \cdot)$, unde izotopia este dată prin egalitatea (2.26). În egalitatea (2.44) trecem de la operația “ $\cdot$ ” la operația “ $\circ$ ”, folosind (2.26): $R_a(R_ax \circ L_b(R_ay \circ L_bz)) \circ L_bt = R_a(x \cdot yt) \circ L_bz$. Dacă $L_bz = e$, e este unitatea buclei $(Q, \circ)$, atunci avem $R_a(R_ax \circ L_b(R_ay \circ L_bz)) \circ L_bt = (R_a(R_ax \circ L_bR_ay) \circ L_bt) \circ L_bz$. Efectuăm substituțiile $x \rightarrow R_a^{-1}x$, $y \rightarrow R_a^{-1}y$, $z \rightarrow L_b^{-1}z$, $t \rightarrow L_b^{-1}t$ și obținem $R_a(x \circ L_b(y \circ z)) \circ t = (R_a(x \circ L_by) \circ t) \circ z$. Dacă $t = e$, avem $(R_a(x \circ L_by) \circ z) \circ t = (R_a(x \circ L_by) \circ t) \circ z$. Notăm $R_a(x \circ L_by) = v$ avem $(v \circ z) \circ t = (v \circ t) \circ z$. Dacă $v = e$, atunci avem $z \circ t = t \circ z$, $\forall z, t \in Q$. $(Q, \circ)$ este buclă comutativă.

Mai departe urmează $(z \circ v) \circ t = z \circ (v \circ t)$. Am obținut, că $(Q, \circ)$ este grup abelian. Faptul, că $(Q, \cdot)$ este cvazigrup medial, urmează din Propoziția 2.6.3. și Teorema lui Albert [21]. $\square$

2.7. Concluzii la capitolul 2

În Capitolul 2 sunt cercetate cvazigrupurile cu proprietăți de inversabilitate și anume *WA*- și *CI*-cvazigrupuri. S-a definit o clasă nouă de cvazigrupuri *OWIP*-cvazigrupuri, o generalizare pentru *WIP*-cvazigrupuri.

În baza cercetărilor efectuate în Capitolul 2 și a rezultatelor obținute putem formula următoarele concluzii:

1. S-a obținut că orice *WA*-cvazigrup, care este *IP*-cvazigrup, este cvazigrup Moufang. S-a demonstrat că în *WA*-cvazigrup operația derivată la dreapta este cvazigrup Bol la stânga; operația derivată la stânga este cvazigrup Bol la dreapta. S-a demonstrat că în *WA*-cvazigrup cu unitate la stânga permutările interne în raport cu unitatea sunt automorfisme

ale cvazigrupului. Sunt date condiții necesare și suficiente când în WA -cvazigrupul cu unitate la stânga permutările interne sunt automorfisme în raport cu elementul $a \in Q$ [62].

2. S-a găsit condiția când $OWIP$ -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este izotop al LIP -buclei $(Q, \circ)$. Presupunând, că orice izotop al buclei $OWIP$ -cvazigrupului este LIP -bucă, am obținut o identitate nouă în acest cvazigrup. Pentru care s-a găsit legătura cu cvazigrupul Bol la stânga (la dreapta) [63].
3. S-a demonstrat că orice CI -grupoid la stânga $(Q, \cdot)$ este CI -cvazigrup. S-a găsit condiția necesară și suficientă (identitatea 2.36) când CI -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este izotop grupului $(Q, \circ)$. Cercetând un cvazigrup arbitrar cu identitatea 2.36 s-a demonstrat că este CI -cvazigrup. Presupunând că orice buclă izotopă CI -cvazigrupului este comutativă, obținem că cvazigrupul este medial, iar bucla este grup abelian;
S-a obținut identitatea 2.41 pentru care bucla $(Q, \circ)$, izotopă CI -cvazigrupului $(Q, \cdot)$, este CI -bucă. Cercetând cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea 2.41 $\forall a, b, x, y \in Q$ s-a demonstrat că este CI -cvazigrup și medial [64], [65], [66].

În acest capitol sunt realizate obiectivele, care se referă la cercetarea relațiilor WA -, CI -cvazigrupurilor cu cvazigrupele Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a. și la cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite (anume $OWIP$ -cvazigrupuri).

Rezultatele expuse în Capitolul 2 au fost publicate în [64], [63], [65], [62], [66].

3. DESPRE O CLASĂ DE i -CVAZIGRUPURI. UNITĂȚILE ÎN CVAZIGRUPURILE DE TIP BOL-MOUFANG

În acest capitol s-a cercetat o clasă nouă de cvazigrupuri numită i -cvazigrupuri introdusă de către primul aspirant al lui V. D. Belousov, I. A. Florea împreună cu autoarea tezei. S-a descris relația dintre unele tipuri de cvazigrupuri care conțin unitate la stânga cu cvazigrupurile Bol și Moufang (în sensul lui Belousov) și sunt caracterizate anumite pseudoautomorfisme ale acestor cvazigrupuri.

Ultimul paragraf al acestui capitol este dedicat cercetării a 60 de identități de tip Bol-Moufang, la existența unității la dreapta, la stânga, medii. Identitatea, bazată pe o operație algebrică, este de tip Bol-Moufang, dacă «ambele părți ale identității conțin aceleași trei litere diferite, luate în aceeași ordine, însă una dintre ele se întâlnește de două ori pe fiecare parte a identității» [1]. S-a folosit lista celor 60 de identități de tip Bol-Moufang, cercetate în [48]. Vedeți Tabela 3.1 mai jos [35].

Există și alte definiții ale identităților de tip Bol-Moufang și, prin urmare, alte clasificări ale acestor identități [29], [26].

3.1. i -cvazigrupuri cu distributant nevid

În acest paragraf s-a cercetat distributantul i -cvazigrupurilor. Începem cu definiția distributantului:

Definiția 3.1.1. Distributantul D al cvazigrupului $(Q, \cdot)$ este format din toate elementele d ale mulțimii Q astfel încât $(x \cdot y) \cdot d = (x \cdot d) \cdot (y \cdot d)$, $d \cdot (x \cdot y) = (d \cdot x) \cdot (d \cdot y)$ pentru orice $x, y \in Q$ [67].

Definiția 3.1.2. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește i -cvazigrup, dacă în $(Q, \cdot)$ are loc identitatea

$$x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x), \quad (3.1)$$

unde $x, y, z \in Q$.

Exemplul 3.1.1. Exemple de i -cvazigrupuri.

1. Fie $(C, +, \cdot)$ inelul numerelor complexe. Fie $x \circ y = ix - y$, pentru orice $x, y \in C$ și element fixat $i^2 = -1$. Atunci $(C, \circ)$ este i -cvazigrup.
2. Orice grup $(G, \cdot)$ în care elementele de forma x^2 se află în centrul lui, este i -cvazigrup.
3. O buclă comutativă Moufang este un i -cvazigrup. De asemenea, un cvazigrup Bol la stânga este un i -cvazigrup.
4. Există patru i -cvazigrupuri induse de grupul Z_5 :

$$x \cdot_1 y = (x + y)(\text{mod} 5), \quad x \cdot_2 y = (2x + 4y)(\text{mod} 5),$$

$$x \cdot {}_3y = (3x + 4y)(\text{mod}5), \quad x \cdot {}_4y = (4x + y)(\text{mod}5)$$

și cinci i -cvazigrupuri cu unitate care nu sunt induse de Z_5 :

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	5	4	1
3	3	5	4	2	1
4	4	1	2	5	3
5	5	4	1	3	2

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	1	5	3
3	3	1	5	2	4
4	4	5	2	3	1
5	5	3	4	1	2

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	5	3	1
3	3	5	2	1	4
4	4	3	1	5	2
5	5	1	4	2	3

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	5	1	3	4
3	3	1	4	5	2
4	4	3	5	2	1
5	5	4	2	1	3

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	5	4	1	3
3	3	4	2	5	1
4	4	1	5	3	2
5	5	3	1	2	4

Remarcă 3.1.1. Translația R_f , unde f este unitate la stânga a cvazigrupului $(Q, \cdot)$, este notată prin R . Într-un i -cvazigrup cu unitate la stânga $R^2 = \varepsilon$ (translația identică) și $R^{-1} = R$.

Teorema 3.1.1. Dacă i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este RIP -cvazigrup, atunci $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și distributantul $D = \{f\}$.

Demonstrație. Din egalitatea (3.1) pentru $y = x$ avem

$$x^2z = zx \cdot x \quad (3.2)$$

pentru toți $x, z \in Q$.

Din egalitatea $yx \cdot x^{-1} = y$ și (3.2) avem $(x^2z)x^{-1} \cdot x^{-1} = z$. Atunci

$$x^{-2}(x^2z) = z, \quad (3.3)$$

pentru toți $x, z \in Q$.

Din (3.1), (3.3) și (3.2) obținem $(x(x^{-2}) \cdot z) = x^{-2}(x^2z) = z$. Atunci avem

$$x(x(x^{-2}) \cdot z) = x(I_l x \cdot z) = z, \quad (3.4)$$

unde $I_l x = x \cdot x^{-2}$. În (3.4) facem substituția $z \rightarrow xz$ și obținem $I_l x \cdot xz = z$. Am obținut, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este IP -cvazigrup, unde $I_l x \cdot xy = y$ și $yx \cdot I_r x = y$.

Mai departe demonstrăm existența unității la stânga f . Avem $ye_y \cdot e_y^{-1} = y$, $ye_y^{-1} = y$, $e_y^{-1} = e_y$. Am obținut $ze_y \cdot e_y^{-1} = ze_y \cdot e_y = e_y^2 z = z$, $e_y^2 = f$, $fz = z$ pentru orice $z \in Q$. Din

egalitatea $fy \cdot y^{-1} = f$ avem $yy^{-1} = f, y^{-1} = {}^{-1}yf$, sau $I_r y = R_f I_l y, I_r = R_f I_l$, atunci $I_r I_l = R, (I_r I_l)^{-1} = R^{-1} = R$ și $I_r I_l = I_l I_r$.

În orice IP -cvazigrup are loc ${}^{-1}((xy)^{-1}) = {}^{-1}({}^{-1}y \cdot {}^{-1}x) = ({}^{-1}x)^{-1} \cdot ({}^{-1}y)^{-1}$, $I_l I_r(xy) = I_r I_l x \cdot I_r I_l y$. Am obținut autotopia $T = (I_r I_l, I_r I_l, I_l I_r) = (R, R, R)$, unde R este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, adică $(xy)f = xf \cdot yf$. Deci, distributantul $D = \{f\}$.

Rămâne să demonstrăm, că $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang, adică are loc identitatea $x(y \cdot xz) = ((x \cdot yf)x)z$ (știm că acest cvazigrup are unitate la stânga f). Pentru aceasta este destul să demonstrăm, că în $(Q, \cdot)$ are loc autotopia $T = (R_x L_x R_f, L_x^{-1}, L_x)$.

Din egalitatea $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ avem autotopia $T_1 = (L_x^{-1}, R_x^2, L_x)$ și $(x(xy \cdot z))^{-1} = (y(zx \cdot x))^{-1}$, ${}^{-1}(xy \cdot z) \cdot {}^{-1}x = {}^{-1}(zx \cdot x) \cdot {}^{-1}y$, $(z^{-1}(xy)^{-1}) \cdot {}^{-1}x = (x^{-1}(zx)^{-1})^{-1} \cdot {}^{-1}y$.

Am obținut

$$z^{-1}({}^{-1}y \cdot {}^{-1}x) \cdot {}^{-1}x = (x^{-1} \cdot ({}^{-1}x \cdot {}^{-1}z)) \cdot {}^{-1}y. \quad (3.5)$$

Având în vedere egalitățile $I_l^2 = I_r^2 = \varepsilon, R_f^2 = \varepsilon, R_f = I_r I_l = I_l I_r$, efectuăm în (3.5) următoarele substituții $z \rightarrow z^{-1}, y \rightarrow y^{-1}, x \rightarrow x^{-1}$ și obținem $(z(yx)) \cdot x = (Rx \cdot (x \cdot Rz)) \cdot y$. Avem o nouă autotopie $T_2 = (L_{xf} L_x R, R_x^{-1}, R_x)$. Atunci $T_3 = T_2 T_1 = (\alpha, R_x, R_x L_x)$, unde $\alpha = L_{xf} L_x R L_x^{-1}$. Deoarece $(Q, \cdot)$ este IP -cvazigrup, atunci avem autotopia $T_4 = (R_x L_x, I_r R_x I_r, \alpha)$, unde $I_r R_x I_r y = (y^{-1} \cdot x)^{-1} = {}^{-1}x \cdot {}^{-1}(y^{-1}) = L_x^{-1} R y$, $I_r R_x I_r = L_x^{-1} R = L_{-1x} R$, $T_4 = (R_x L_x, L_{-1x} R, \alpha)$. Așadar, avem $\alpha(yz) = (xy \cdot x) \cdot {}^{-1}x(zf)$. Dacă $y = x^{-1}$, unde $xx^{-1} = f$, atunci avem $\alpha(x^{-1} \cdot z) = zf$, $\alpha L_{x^{-1}} = R, \alpha = R L_{x^{-1}}^{-1} = R L_{-1(x^{-1})} = R L_{xf}$, unde $R L_{xf} z = R(xf \cdot z) = x \cdot Rz = L_x R z, \alpha = L_x R$, $T_4 = (R_x L_x, L_x^{-1} R, L_x R)$. Deoarece R este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, obținem, în definitive autotopia $T = T_4 \cdot (R_f, R_f, R_f) = (R_x L_x R_f, L_x^{-1}, L_x)$.

□

Teorema 3.1.2. Dacă i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f este izotop grupului abelian, atunci $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang medial și distributantul $D = \{f\}$.

Demonstrație. Cercetăm izotopul $(Q, \circ)$, unde $x \circ y = R^{-1}x \cdot y = Rx \cdot y = xf \cdot y$, $(Q, \circ)$ este grup abelian cu unitatea f . Din $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ avem $Rx \circ (R(Rx \circ y) \circ z) = Ry \circ (R(Rz \circ x) \circ x)$. Dacă $z = f$, atunci $Rx \circ R(Rx \circ y) = Ry \circ (Rx \circ x), R(Rx \circ y) = Ry \circ x, R(x \circ y) = Rx \circ Ry$. Am obținut, că R este automorfism al grupului abelian $(Q, \circ)$ și cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Prin urmare, distributantul $D = \{f\}$.

Mai departe din $(y \circ x) \circ x^{-1} = y$ urmează $R(Ry \cdot x) \cdot x^{-1} = y$ și $(y \cdot Rx) \cdot x^{-1} = y$. Am obținut, că $(Q, \cdot)$ este *RIP*-cvazigrup și pe baza Teoremei 3.1.1. cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang. Rămâne să demonstrăm că $(Q, \cdot)$ este cvazigrup medial. Fie are loc $xy \cdot uv = xu \cdot yv'$. Trebuie să demonstrăm, că $v = v'$. Avem $R(Rx \circ y) \circ (Ru \circ v) = R(Rx \circ u) \circ (Ry \circ v')$, $x \circ Ry \circ Ru \circ v = x \circ Ru \circ Ry \circ v'$, $v = v'$. $\square$

Teorema 3.1.3. Dacă *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu distributant nevid D este izotop buclei Bol la stânga, atunci $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga.

Demonstrație. Fie $a \in D$. Atunci are loc $a(xy) = (ax) \cdot (ay)$, $(xy)a = (xa) \cdot (ya)$ pentru toți $x, y \in Q$. Am obținut că L_a și R_a sunt automorfisme ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$ și $a^2 = a$, $L_a R_a = R_a L_a$, $R_a L_a^{-1} = L_a^{-1} R_a$, $R_a^{-1} L_a = L_a R_a^{-1}$. Mai departe avem $a(ay \cdot a) = y((aa)a)$, $a(a(ya)) = ya$, pentru orice $y \in Q$, $a(az) = z$, unde $z = ya$. Am obținut $L_a^2 = \varepsilon$, $L_a = L_a^{-1}$.

Acum fie izotopul $(Q, \circ)$, unde $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y$, $(Q, \circ)$ este bucla Bol la dreapta cu unitatea $e = a$. Din $^{-1}x \circ (x \circ y) = y$ avem $R_a^{-1}({}^{-1}x) \cdot L_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y) = y$, $R_a^{-1}Ix \cdot L_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y) = R_a^{-1}Ix \cdot (L_a R_a^{-1}x \cdot L_a^2 y) = y$, $R_a^{-1}IR_a L_a x(xy) = y$, $I_l x(xy) = y$, unde $I_l = R_a^{-1}IR_a L_a$.

Am obținut, că *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este *LIP*-cvazigrup și este izotop buclei Bol la stânga, de unde urmează, că $(Q, \cdot)$ este cvazigrupul Bol la stânga. $\square$

Teorema 3.1.4. *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu distributant nevid D este cvazigrup Bol la stânga dacă și numai dacă în $(Q, \cdot)$ are loc egalitatea

$$xa \cdot xy = xx \cdot ay, \quad (3.6)$$

pentru orice $x, y \in Q$, unde $a \in D$, a este element fixat.

Demonstrație. Este dat $a(xy) = ax \cdot ay$, $(xy)a = xa \cdot ya$. De unde, în particular, obținem $ax \cdot a = a \cdot xa$, $R_a L_a = L_a R_a$, $a^2 = a$, L_a , R_a este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$ și buclei $(Q, \circ)$, unde $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y$. Acum folosim identitatea *i*-cvazigrupului $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$. Înlocuind $x = z = a$, avem $a(at) = t$, $\forall t \in Q$, unde $t = ya$, $L_a^2 = \varepsilon$, unde ε este permutarea identică a mulțimii Q . Mai departe avem $a(aa \cdot z) = a(za \cdot a)$, $L_a = R_a^2$.

Pentru simplificarea scrierii, ne învoim $L_a = L$, $R_a = R$. În egalitatea $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ trecem de la operația “ $\cdot$ ” la operația “ $\circ$ ”, folosind $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y = R^{-1}x \cdot L^{-1}y$, $xy = Rx \circ Ly$.

Avem $Rx \circ L(R(Rx \circ Ly) \circ Lz) = Ry \circ L(R(Rz \circ Lx) \circ Lx)$, $Rx \circ ((LR^2x \circ LRLy) \circ L^2z) = Ry \circ ((LR^2z \circ LRLx) \circ L^2x)$. Acum folosim următoarea egalitate $L = R^2$, $L^2 = \varepsilon$ și

obținem $Rx \circ ((x \circ Ry) \circ z) = Ry \circ ((z \circ Rx) \circ x)$. Efectuăm substituția $y \rightarrow R^{-1}y$ și obținem identitatea:

$$Rx \circ ((x \circ y) \circ z) = y \circ ((z \circ Rx) \circ x). \quad (3.7)$$

Dacă $y = Rx$, atunci obținem $(x \circ Rx) \circ z = (z \circ Rx) \circ x$, $Rx \circ ((x \circ y) \circ z) = y \circ ((x \circ Rx) \circ z)$. Dacă $y = x^{-1}$, unde $x \circ x^{-1} = e = a$, e este unitatea buclei $(Q, \circ)$, atunci avem

$$Rx \circ z = x^{-1} \circ ((x \circ Rx) \circ z). \quad (3.8)$$

Din (3.6) avem $R^2x \circ L(Rx \circ Ly) = R(Rx \circ Lx) \circ L^2y$, $Lx \circ (LRx \circ L^2y) = (R^2x \circ RLx) \circ L^2y$.

Efectuăm substituția $x \rightarrow Lx$ și obținem

$$x \circ (Rx \circ y) = (x \circ Rx) \circ y. \quad (3.9)$$

Din (3.8) și (3.9) avem

$$Rx \circ z = x^{-1} \circ (x \circ (Rx \circ z)), \quad t = x^{-1} \circ (x \circ t), \quad (3.10)$$

unde $t = Rx \circ z, x, z \in Q$. În egalitatea (3.10) trecem de la operația “ $\circ$ ” la operația “ $\cdot$ ” și obținem $t = R^{-1}x^{-1} \cdot L^{-1}(R^{-1}x \cdot L^{-1}t) = R^{-1}x^{-1} \cdot (L^{-1}R^{-1}x \cdot t) = R^{-1}IRLx \cdot (xt) = I_l x(xt)$, unde $I_l = R^{-1}IRL$. Avem, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este *LIP*-cvazigrup.

Acum demonstrăm, că bucla $(Q, \circ)$ este inversabilă și la dreapta, adică $(Q, \circ)$ este *IP*-bucă. În (3.7) substituim $y = e$, unde e este unitatea buclei $(Q, \circ)$ și obținem

$$Rx \circ (x \circ z) = (z \circ Rx) \circ x \quad (3.11)$$

În (3.7) substituim $z = e$, avem

$$Rx \circ (x \circ y) = y \circ (Rx \circ x) \quad (3.12)$$

Din (3.11) și (3.12) avem

$$(z \circ Rx) \circ x = z \circ (Rx \circ x). \quad (3.13)$$

Din (3.13) și (3.7) obținem egalitatea $Rx \circ ((x \circ y) \circ z) = y \circ (z \circ (Rx \circ x))$. Dacă $z = y^{-1}$, atunci avem $(x \circ y) \circ y^{-1} = x$, $\forall x, y \in Q$, $(Q, \circ)$ este *IP*-bucă.

Mai departe demonstrăm, că $(Q, \circ)$ este buclă Moufang în care $(Rx \circ x) \circ y = y \circ (Rx \circ x)$, $\forall x, y \in Q$. Din $Rx \circ ((x \circ y) \circ z) = y \circ ((z \circ Rx) \circ x)$ obținem autotopia T_1 buclei $(Q, \circ)$, unde $T_1 = (L_x^{-1}, R_x R_{Rx}, L_{Rx})$. Mai departe avem $(Rx \circ ((x \circ y) \circ z))^{-1} = (y \circ ((z \circ Rx) \circ x))^{-1}$, $((x \circ y) \circ z)^{-1} \circ (Rx)^{-1} = ((z \circ Rx) \circ x)^{-1} \circ y^{-1}$, $(z^{-1} \circ (x \circ y)^{-1}) \circ (Rx)^{-1} = (x^{-1} \circ (z \circ Rx)^{-1}) \circ y^{-1}$ și

$$(z^{-1} \circ (y^{-1} \circ x^{-1})) \circ (Rx)^{-1} = (x^{-1} \circ ((Rx)^{-1} \circ z^{-1})) \circ y^{-1}. \quad (3.14)$$

Din $x \circ x^{-1} = e$ avem $Rx \circ Rx^{-1} = Re = e$, $Rx^{-1} = (Rx)^{-1}$. În egalitatea (3.14) facem substituțiile $x \rightarrow x^{-1}, y \rightarrow y^{-1}, z \rightarrow z^{-1}$ și obținem egalitatea $(z \circ (y \circ x)) \circ Rx = (x \circ (Rx \circ$

$z)) \circ y$, și avem o nouă autotopie T_2 a buclei $(Q, \circ)$, unde $T_2 = (L_x L_{Rx}, R_x^{-1}, R_{Rx})$. Mai departe avem autotopia $T_3 = T_1 T_2 = (L_{Rx}, R_x R_{Rx} R_x^{-1}, L_{Rx} R_{Rx}) = (L_{Rx}, \alpha, L_{Rx} R_{Rx})$, unde $\alpha = R_x R_{Rx} R_x^{-1}$.

Am obținut egalitatea $L_{Rx} R_{Rx}(y \circ z) = L_{Rx} y \circ \alpha z$. Dacă $y = e$, atunci $\alpha = R_{Rx}$, $T_3 = (L_{Rx}, R_{Rx}, L_{Rx} R_{Rx})$. În T_3 efectuăm substituția $x \rightarrow R^{-1}x$ și avem $T_3 = (L_x, R_x, L_x R_x)$. Deoarece bucla $(Q, \circ)$ este *IP*-bucă, atunci mai avem încă autotopia $T_4 = (L_x R_x, I R_x I, L_x) = (L_x R_x, L_x^{-1}, L_x)$. Am obținut identitatea Bol la stânga $x \circ (y \circ (x \circ z)) = (x \circ (y \circ x)) \circ z$. Deoarece $(Q, \circ)$ este *IP*-bucă, atunci $(Q, \circ)$ este bucla Moufang.

Acum demonstrăm egalitatea $(Rx \circ x) \circ y = y \circ (Rx \circ x)$, $\forall x, y \in Q$. În egalitatea (3.7) substituim $y = Rx$ și obținem $(x \circ Rx) \circ z = z \circ (Rx \circ x)$. Dacă $z = e$, atunci avem $x \circ Rx = Rx \circ x$, $(Rx \circ x) \circ z = z \circ (Rx \circ x)$. Definitiv am obținut, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este inversabil la stânga și este izotop buclei Moufang $(Q, \circ)$.

Pe baza rezultatelor din [54] avem, că $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga.

Invers. Fie $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga. Atunci $(Q, \cdot)$ este inversabil la stânga, adică are loc $l_l x \cdot xy = y$, $Rl_l x \circ L(Rx \circ Ly) = y$, $Rl_l x \circ (LRx \circ y) = y$, $Rl_l R^{-1}L^{-1}x \circ (x \circ y) = y$. Am obținut, că și bucla $(Q, \circ)$ este inversabilă la stânga. Pe baza (3.8), avem $Rx \circ z = x^{-1} \circ ((x \circ Rx) \circ z) = x^{-1} \circ (x \circ (Rx \circ z))$, $(x \circ Rx) \circ z = x \circ (Rx \circ z)$, $R^{-1}(R^{-1}x \cdot L^{-1}Rx) \cdot L^{-1}z = R^{-1}x \cdot L^{-1}(x \cdot L^{-1}z)$, $(R^{-2}x \cdot L^{-1}x) \cdot z = R^{-1}x \cdot (L^{-1}x \cdot L^{-1}z)$, $(Lx \cdot Lx) \cdot Lz = R^{-1}x \cdot (Lx \cdot z)$, $xx \cdot az = R^{-1}Lx \cdot xz$, $xx \cdot az = xa \cdot xz$. $\square$

3.2. Relația *i*-cvazigrupurilor cu alte cvazigrupuri

Introducem noțiunea de miez al cvazigrupului Bol la stânga. Miez al cvazigrupului Bol la stânga $(Q, \cdot)$ numim grupoidul $(Q, +)$ definit în felul următor $x + y = R_{e_x}^{-1}(x \cdot {}^{-1}yx)$, unde ${}^{-1}yy = e_y$, $ye_y = y$. Pentru bucla Bol la stânga această noțiune a fost introdusă de către V. D. Belousov.

Propoziția 3.2.1. Dacă *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este idempotent, atunci $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga. Mai mult, în acest caz $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Stein la dreapta, care este distributiv la stânga și miezul cvazigrupului Bol la stânga de asemenea este *i*-cvazigrup [68].

Demonstrație. Fie că în *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ fiecare element este idempotent, adică $x^2 = x$. Atunci din (3.1) avem $xz = zx \cdot x$. Am obținut identitatea lui Stein la dreapta.

Înmulțim din dreapta egalitatea Stein la dreapta la x și obținem $xz \cdot x = (zx \cdot x)x = x \cdot zx$. Am obținut legea de elasticitate $xz \cdot x = x \cdot zx$.

Mai departe avem $x(xy \cdot x) = y(x^2 \cdot x) = yx, x(x \cdot yx) = yx$. Substituim $yx = z$ și avem $x(xz) = z$ pentru orice $x, z \in Q$. Atunci $(Q, \cdot)$ este *LIP*-cvazigrup și $L_x^2 = \varepsilon$, unde ε este permutare identică. Din $x(xy \cdot z) = y(x^2z) = y \cdot xz$, pentru $y \rightarrow xy$ avem $x((x \cdot xy)z) = xy \cdot xz, x(yz) = xy \cdot xz$. Atunci $(Q, \cdot)$ este cvazigrup distributiv la stânga, L_x este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Acum ne convingem, că în $(Q, \cdot)$ are loc identitatea Bol la stânga $x(y \cdot xz) = R_{e_x}^{-1}(x \cdot yx) \cdot z$.

$$A = x(y \cdot xz) = xy \cdot x(xz) = xy \cdot z, B = R_{e_x}^{-1}(x \cdot yx) \cdot z = R_x^{-1}(xy \cdot x) \cdot z = xy \cdot z.$$

Am obținut, că $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga.

Trecem la cercetarea miezului $(Q, +)$ al cvazigrupului Bol la stânga $(Q, \cdot)$:

$$x + y = R_{e_x}^{-1}(x \cdot {}^{-1}yx) = R_x^{-1}(x \cdot yx) = R_x^{-1}(xy \cdot x) = xy.$$

Am obținut $" + " = " \cdot "$. □

Remarcă 3.2.1. Dacă *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$, în care $x^2 = x$, este izotop buclei comutative, atunci $(Q, \cdot)$ este distributiv la stânga, iar bucla $(Q, \circ)$ este buclă Moufang comutativă [69], unde $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y$.

Remarcă 3.2.2. Orice buclă $(Q, \circ)$, izotopă *i*-cvazigrupului $(Q, \cdot)$, unde $x^2 = x$, este buclă Bol la stânga [54].

Dacă cercetăm izotopul $(Q, \circ)$, unde $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y$, atunci din $x(xy) = y$, obținem $R_ax \circ L_a(R_ax \circ L_ay) = y, x \circ L_a(x \circ L_ay) = y$. Dacă $y = e = a$, atunci avem $x \circ L_ax = e, L_ax \circ x = e, L_ax = {}^{-1}x$, unde L_a este automorfism și al buclei $(Q, \circ)$. Dacă bucla $(Q, \circ)$ este inversabilă la dreapta, atunci $(Q, \circ)$ este buclă Moufang comutativă, iar $(Q, \cdot)$ este cvazigrup distributiv.

Propoziția 3.2.2. Dacă *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are unitate la dreapta e , atunci $(Q, \cdot)$ este buclă Moufang în care $x^2y = yx^2$ pentru orice $x, y \in Q$.

Demonstrație. Fie $(Q, \cdot)$ are unitate la dreapta $xe = x$ pentru toți $x \in Q$. În egalitatea $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ substituim $x = y = e, e(ee \cdot z) = e(ze \cdot e), e(ez) = ez, et = t$ pentru toți $t \in Q$, unde $t = ez$. Am obținut, că $(Q, \cdot)$ este buclă, unde $x \cdot xz = zx \cdot x$.

Acum demonstrăm, că bucla $(Q, \cdot)$ este inversabilă la stânga. Avem ${}^{-1}yy = e, {}^{-1}y({}^{-1}yy \cdot z) = y(z{}^{-1}y \cdot {}^{-1}y), {}^{-1}yz = y({}^{-1}y \cdot {}^{-1}yz), t = y({}^{-1}yt)$, unde $t{}^{-1} = yz$. Efectuăm substituția $t \rightarrow yt$ și obținem $yt = y({}^{-1}y \cdot yt), t = {}^{-1}y \cdot yt$. Avem, că $(Q, \cdot)$ este *LIP*-bucă.

Mai departe demonstrăm, că $(Q, \cdot)$ este *RIP*-bucă. Avem $x(xe \cdot z) = e(zx \cdot x), x \cdot xz = zx \cdot x = x^2z$. Pe de altă parte avem $x(xy \cdot e) = y(ex \cdot x) = yx^2, x \cdot xy = yx^2$. Am obținut, că în bucla $(Q, \cdot)$ are loc egalitatea $x^2y = yx^2$ pentru orice $x, y \in Q$. Atunci putem scrie $x(xy \cdot z) = y(x^2z) = y(zx^2), xy \cdot z = {}^{-1}x(y \cdot zx^2)$. Dacă $z = {}^{-1}y$, atunci obținem $xy \cdot {}^{-1}y = {}^{-1}x(y \cdot {}^{-1}yx^2) = {}^{-1}x(xx) = x$. Avem egalitatea $xy \cdot {}^{-1}y = x$, adică bucla $(Q, \cdot)$ este *RIP*-bucă.

Definitiv am obținut, că $I_l x \cdot xy = y, yx \cdot I_r x = y$, unde $I_l = I_r$ și $(Q, \cdot)$ este *IP*-bucă. Pe baza Teoremei 3.1.1. $(Q, \cdot)$ este buclă Moufang. $\square$

Propoziția 3.2.3. Orice *i*-cvazigrup $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f este cvazigrup cu proprietate inversă la stânga și izotop *LIP*-buclei $(Q, \circ)$, unde $x \circ y = R_f^{-1}x \cdot y$.

Demonstrație. Din $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ pentru $x = y$, obținem $x^2z = zx \cdot x$. Dacă $z = f$, atunci avem $x^2f = x^2$, pentru orice $x \in Q$.

Acum cercetăm identitatea $x^2(x^2y \cdot z) = y(zx^2 \cdot x^2)$ și substituim $y = f$. Avem $x^2(x^2z) = zx^2 \cdot x^2, x^2(x^2y \cdot z) = y(x^2 \cdot x^2z)$. Fie $x^2 \cdot (x^2)^{-1} = f$. Atunci obținem $x^2z = (x^2)^{-1}(x^2 \cdot x^2z), t = (x^2)^{-1}(x^2t)$ pentru orice $x, t \in Q$, unde $t = x^2z$. Mai departe avem $x((x \cdot (x^2)^{-1}) \cdot z) = (x^2)^{-1}(x^2z) = z, x(I_l x \cdot z) = z$, unde $I_l x = x \cdot (x^2)^{-1}$. Am obținut, că $(Q, \cdot)$ este *LIP*-cvazigrup.

Acum cercetăm izotopul $(Q, \circ)$, unde $x \circ y = R_f^{-1}x \cdot y$. Am obținut, că $(Q, \circ)$ este buclă cu unitate f . Din $I_l x \cdot xy = y$ urmează $R_f I_l x \circ (R_f x \circ y) = y, R_f I_l R_f^{-1}x \circ (x \circ y) = y$. Atunci $(Q, \circ)$ este *LIP* -bucă. $\square$

Propoziția 3.2.4. Dacă în *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are loc $x^2 = f$ pentru orice $x \in Q$, unde f este element fixat, atunci $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și izotop al unui grup abelian.

Demonstrație. Din $x^2z = zx \cdot x$ avem $fz = zx \cdot x$ pentru orice $x, z \in Q$. În particular, avem $fz = ze_z \cdot e_z = z$, unde f este unitate la stânga. Am obținut identitatea $zx \cdot x = z, R_x^2 = \varepsilon, R_x = R_x^{-1}, R_f = R_f^{-1}$, $(Q, \cdot)$ este *RIP*-cvazigrup și, pe baza Teoremei 3.1.1., cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang.

Din $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x) = yz$, dacă $y = f$, avem $x(xf \cdot z) = z, I_l = R_f$. Din $x(xy \cdot z) = yz$ urmează egalitatea $xy \cdot z = xf \cdot yz, xy \cdot f = xf \cdot yf, D = \{f\}$ și $R_f = I_l$ este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$ și buclei $(Q, \circ)$, unde $x \circ y = R_f^{-1}x \cdot y, xy = Rx \circ y$ (Propoziția 3.2.3.) Din $xy \cdot z = xf \cdot yz$ avem $R(Rx \circ y) \circ z = x \circ (Ry \circ z), (x \circ Ry) \circ z = x \circ (Ry \circ z), (Q, \circ)$ este grup.

Ne convingem, că $(Q, \circ)$ este grup abelian. Din $I_l x \cdot xy = R_f x \cdot xy = y$ urmează $x \circ (Rx \circ y) = y$. Dacă $y = f$, atunci obținem $x \circ Rx = f, Rx = x^{-1} = Ix$ și $R = I$ este automorfism al grupului. Prin urmare, $(Q, \circ)$ este grup abelian. $\square$

Propoziția 3.2.5. i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f este cvazigrup Moufang dacă și numai dacă R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Demonstrație. Fie R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, adică are loc egalitatea

$$xy \cdot f = xf \cdot yf \quad (3.15)$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Fie $y \cdot y^{-1} = f$. Pe baza Propoziției 3.2.3., cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este inversabil la stânga, adică are loc egalitatea

$$^{-1}x \cdot xy = y \text{ sau } I_l x \cdot xy = y. \quad (3.16)$$

Din $^{-1}y \cdot (^{-1}y)^{-1} = f$ și (3.17) obținem $(^{-1}y)^{-1} = yf, I_r I_l = R_f$. Deoarece $R_f^2 = \varepsilon, I_l^2 = \varepsilon$, atunci avem $I_r = R_f I_l, y^{-1} = (^{-1}y)f$.

$$y^{-1} = ^{-1}y \cdot f \quad (3.17)$$

Din egalitățile (3.15) și (3.17) obținem $(x \cdot ^{-1}y)f = xf \cdot ^{-1}yf, x((x \cdot ^{-1}y) \cdot f) = x(xf \cdot y^{-1}), ^{-1}y(fx \cdot x) = f(x^2 y^{-1}), ^{-1}yx^2 = x^2 y^{-1}$.

Mai departe avem $x^2 = y(x^2 \cdot y^{-1}), x = ^{-1}x(y(x^2 \cdot y^{-1}))$. Acum putem scrie $x(xy \cdot y^{-1}) = y(x^2 \cdot y^{-1}), xy \cdot y^{-1} = ^{-1}x(y(x^2 y^{-1})) = x$. Am obținut $xy \cdot y^{-1} = x$ pentru orice $x, y \in Q$, adică $(Q, \cdot)$ este cvazigrup inversabil la dreapta. Pe baza Teoremei 3.1.1. $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang.

Invers. Fie că $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang. Atunci, în particular, $(Q, \cdot)$ este și cvazigrup Bol la dreapta, adică are loc identitatea $(zx \cdot y)x = z \cdot L_{fa}^{-1}(xy \cdot x) = z \cdot L_f^{-1}(xy \cdot x) = z(xy \cdot x)$. În particular, $(zf \cdot y)f = z(fy \cdot f) = z(yf)$. Facem substituția $z \rightarrow zf$ și obținem $(zy)f = zf \cdot yf$, R_f este automorfism. $\square$

3.3. i -cvazigrupuri cu identități alternative și de elasticitate

Cunoaștem, că cea mai cercetată clasă de bucle neasociative este clasa de bucle Moufang. Avem în primul capitol definiția buclei Moufang cu identitățile (1.18) și (1.19). Cunoaștem, că orice buclă Moufang este IP -buclă ([21], Teorema 5.6). În afară de aceasta, în bucla Moufang sunt adevărate identitățile:

$$x \cdot xz = xx \cdot z \text{ (legea alternativă la stânga)}, \quad (3.18)$$

$$zx \cdot x = z \cdot xx \text{ (legea alternativă la dreapta)}, \quad (3.19)$$

$$xy \cdot x = x \cdot yx \text{ (legea de elasticitate)}. \quad (3.20)$$

Identitățile (3.18) și (3.19) urmează din identitățile buclei Moufang pentru $y = 1$, iar (3.20) din (1.19) pentru $z = 1$.

În paragraful dat s-au cercetat i -cvazigrupurile cu aceste trei legi. Au loc următoarele propoziții:

Propoziția 3.3.1. Dacă în i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are loc legea alternativă la stânga (3.18), atunci $(Q, \cdot)$ este buclă Moufang, unde $x^2y = yx^2$ pentru orice $x, y \in Q$.

Demonstrație. Avem:

1. $f_y \cdot f_y y = f_y^2 y, y = f_y^2 y, f_y^2 = f_y$, pentru orice $y \in Q$,
2. $f_y \cdot f_y z = f_y^2 z, f_y \cdot f_y z = f_y z, f_y t = t$, pentru orice $y, t \in Q, f t = t$,
3. $x(xf \cdot y) = f(x^2 y) = x^2 y = x(xy), xf \cdot y = xy, xf = x$, pentru orice $x \in Q, f$ este unitatea buclei $(Q, \cdot)$.

Pe baza Propoziției 3.2.2. avem că $(Q, \cdot)$ este buclă Moufang și $x^2y = yx^2$ pentru orice $x, y \in Q$. □

Propoziția 3.3.2. Dacă în i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are loc legea alternativă la dreapta (3.19), atunci $(Q, \cdot)$ este buclă Moufang în care $x^2y = yx^2$.

Demonstrație. Avem:

1. $ye_y \cdot e_y = y(e_y^2), y = ye_y^2, e_y^2 = e_y$, pentru orice $y \in Q$,
2. $ze_y \cdot e_y = z(e_y^2) = ze_y, te_y = t$, pentru orice $t \in Q, e_y = e, xe = x$.

Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are unitate la dreapta și, pe baza Propoziției 3.2.2., $(Q, \cdot)$ este buclă Moufang și $x^2y = yx^2$ pentru orice $x, y \in Q$. □

Propoziția 3.3.3. În orice i -cvazigrup $(Q, \cdot)$ cu identitatea de elasticitate (3.20) mulțimea tuturor unităților locale formează un subcvazigrup Bol la stânga [54].

Demonstrație. Din (3.20) avem $xe_x \cdot x = x \cdot e_x x, x = e_x x$,

$$e_x = f_x, \quad \forall x \in Q. \quad (3.21)$$

Din (3.1) și (3.20), obținem $xx \cdot z = zx \cdot x, e_z e_z \cdot z = ze_z \cdot e_z, e_z^2 z = z, e_z^2 = f_z = e_z$,

$$e_z^2 = e_z, \quad \forall z \in Q \quad (3.22)$$

Din (3.1) și (3.22), obținem $e_x(e_x y \cdot e_x) = y(e_x e_x \cdot e_x) = ye_x, e_x(e_x \cdot ye_x) = ye_x, e_x(e_x t) = t$,

$$e_x(e_x t) = t, \quad \forall x, t \in Q. \quad (3.23)$$

Din (3.1) și (3.23), obținem $e_x(e_x y \cdot z) = y(e_x^2 z) = y \cdot e_x z$,

$$e_x(yz) = e_x y \cdot e_x z, \quad \forall x, y, z \in Q. \quad (3.24)$$

Din (3.24) avem $e_x(ye_y) = e_x y \cdot e_x e_y$,

$$e_x \cdot e_y = e_{e_{xy}}, \forall x, y \in Q. \quad (3.25)$$

Fie M mulțimea tuturor unităților locale ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$, adică

$$M = \{e_x \in Q \mid x e_x = x\}, \forall x \in Q.$$

Din (3.25) urmează, că M este închisă față de operația de cvazigrup „ $\cdot$ ”, adică $\forall e_x, e_y \in M, (e_x \cdot e_y \in M)$. Pentru ca $(M, \cdot)$ să fie subcvazigrup este suficient să demonstrăm, că soluțiile ecuațiilor $e_a x = e_b, y \cdot e_a = e_b, \forall e_a, e_b \in M$ aparțin M .

Fie $e_a \cdot c = e_b$. Atunci avem $c = e_a \cdot e_b \in M$. Fie $d e_a = e_b$. Atunci analog obținem $(d e_a) e_a = e_b e_a, e_a^2 d = e_b e_a, e_a d = e_b \cdot e_a, d = e_a (e_b \cdot e_a) \in M$. Avem, că $(M, \cdot)$ este subcvazigrup al i -cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Ne rămâne să demonstrăm, că în subcvazigrupul $(M, \cdot)$ are loc identitatea Bol la stânga:

$$x(y \cdot xz) = R_{e_x}^{-1}(xy \cdot x) \cdot z, \forall x, y, z \in M.$$

Pentru orice $x, y, z \in M$ are loc $x^2 = x, e_x = x, x(xy) = y, x(yz) = xy \cdot xz$. Din această cauză obținem $A = x(y \cdot xz) = xy \cdot (x \cdot xz) = xy \cdot z; B = R_{e_x}^{-1}(xy \cdot x) \cdot z = R_x^{-1}(xy \cdot x) \cdot z = xy \cdot z$. Am obținut $A = B$. $\square$

Propoziția 3.3.4. i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f este cvazigrup Moufang dacă și numai dacă în $(Q, \cdot)$ are loc egalitatea:

$$zx \cdot x = zf \cdot xx, \quad (3.26)$$

pentru orice $x, z \in Q$.

Demonstrație. Scriem identitatea de bază a i -cvazigrupului $(Q, \cdot)$

$$x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x), \quad (3.27)$$

$\forall x, y, z \in Q$.

Dacă $x = y$, atunci

$$xx \cdot z = zx \cdot x. \quad (3.28)$$

Dacă $x = f$, unde $fx = x, \forall x \in Q$, atunci obținem $z = zf \cdot f, R_f^2 = \varepsilon, \varepsilon$ este permutarea identică a mulțimii $Q, R_f = R_f^{-1}$. Dacă în (3.28) $z = f$, atunci obținem $xx \cdot f = xx$.

$$x^2 f = x^2, \forall x \in Q. \quad (3.29)$$

Fie $(Q, \circ)$ este buclă, izotopă cvazigrupului $(Q, \cdot)$ cu izotopia

$$x \circ y = R_f^{-1} x \cdot y = R_f x \cdot y, xy = R_f x \circ y. \quad (3.30)$$

Bucla $(Q, \circ)$ are unitate f . Pentru a simplifica scrierea, convenim să notăm $R_f = R$. Fie dat (3.26), atunci din (3.26) și (3.28) obținem

$$zf \cdot xx = xx \cdot z \quad (3.31)$$

$\forall x, z \in Q$.

Din (3.31), (3.30) și (3.29) avem $z \circ (Rx \circ x) = R(xx) \circ z = xx \circ z = (Rx \circ x) \circ z$.

$$z \circ (Rx \circ x) = (Rx \circ x) \circ z, \quad (3.32)$$

$\forall x, z \in Q$.

În $(Q, \cdot)$ are loc $x^2(x^2y \cdot z) = y(x^2x^2 \cdot z)$. Dacă $y = f$, atunci

$$x^2(x^2z) = x^2x^2 \cdot z, \quad (3.33)$$

$\forall x, z \in Q$.

Mai departe demonstrăm, că $(Q, \cdot)$ este inversabil la stânga. Avem $x^2(x^2(x^2)^{-1} \cdot z) = (x^2)^{-1}(x^2x^2 \cdot z) = (x^2)^{-1}(x^2 \cdot x^2z)$, unde $x^2(x^2)^{-1} = f$. Am obținut egalitatea $x^2z = (x^2)^{-1}(x^2 \cdot x^2z)$,

$$t = (x^2)^{-1}(x^2t), \quad (3.34)$$

$\forall x, t \in Q$, unde $t = x^2z$.

Definitiv avem $x(x(x^2)^{-1} \cdot z) = (x^2)^{-1}(x^2z) = z$. Facem substituția $z \rightarrow xz$ și obținem $x(x^2)^{-1} \cdot xz = z$, $I_l x \cdot xz = z$, unde $I_l x = x(x^2)^{-1}$. Am obținut, că i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este inversabil la stânga.

În egalitatea $I_l x \cdot xy = y$ trecem de la operația „ $\cdot$ ” a cvazigrupului $(Q, \cdot)$ la operația „ $\circ$ ” a buclei $(Q, \circ)$ din (3.30) și obținem $RI_l x \circ (Rx \circ y) = y$, $RI_l R^{-1}x \circ (x \circ y) = y$. Avem, că $(Q, \circ)$ este buclă inversabilă la stânga. În egalitatea (3.27) de la operația “ $\cdot$ ” trecem la operația “ $\circ$ ”:

$$\begin{aligned} Rx \circ (R(Rx \circ y) \circ z) &= Ry \circ (Rx^2 \circ z) = Ry \circ (x^2 \circ z) = Ry \circ ((Rx \circ x) \circ z) = \\ &= Ry \circ (z \circ (Rx \circ x)). \end{aligned}$$

Am obținut

$$Rx \circ (R(Rx \circ y) \circ z) = Ry \circ (z \circ (Rx \circ x)), \forall x, y, z \in Q. \quad (3.35)$$

Dacă în egalitatea (3.35) $y = e = f$, atunci avem $Rx \circ (x \circ z) = z \circ (Rx \circ x)$. Dacă în egalitatea (3.35) $z = e$, atunci avem $Rx \circ R(Rx \circ y) = Ry \circ (Rx \circ x) = (Rx \circ x) \circ Ry = Rx \circ (x \circ Ry)$, $R(Rx \circ y) = x \circ Ry$, $R(x \circ y) = Rx \circ Ry$, R este automorfism al buclei $(Q, \circ)$ și cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Acum egalitatea (3.35) putem scrie că

$$Rx \circ ((x \circ y) \circ z) = y \circ (Rx \circ (x \circ z)). \quad (3.36)$$

Dacă $z = y^{-1}$, unde $y^{-1} \circ (y \circ z) = z$, obținem $(x \circ y) \circ y^{-1} = x$ și $(Q, \circ)$ este IP -bucă.

Mai departe demonstrăm, că $(Q, \circ)$ este buclă Moufang. Din egalitatea (3.36) avem autotopia T_1 buclei $(Q, \circ)$, unde $T_1 = (L_x^{-1}, R_x R_{Rx}, L_{Rx})$. Într-adevăr, avem

$$L_{Rx}(L_x y \circ z) = y \circ R_x R_{Rx} z, y \rightarrow L_x^{-1} y, L_{Rx}(y \circ z) = L_x^{-1} y \circ R_x R_{Rx} z, T_1 = (L_x^{-1}, R_x R_{Rx}, L_{Rx}).$$

În plus, avem $\left(Rx \circ ((x \circ y) \circ z)\right)^{-1} = \left(y \circ ((z \circ Rx) \circ x)\right)^{-1}$, $((x \circ y) \circ z)^{-1} \circ (Rx)^{-1} = ((z \circ Rx) \circ x)^{-1} \circ y^{-1}$, $(z^{-1} \circ (x \circ y)^{-1}) \circ (Rx)^{-1} = (x^{-1} \circ (z \circ Rx)^{-1}) \circ y^{-1}$, $(z^{-1} \circ (y^{-1} \circ x^{-1})) \circ (Rx)^{-1} = (x^{-1} \circ ((Rx)^{-1} \circ z^{-1})) \circ y^{-1}$.

Am obținut o autotopie nouă T_2 a buclei $(Q, \circ)$, unde $T_2 = (L_x^{-1}L_{Rx}^{-1}, R_x, R_{Rx}^{-1})$. Acum cercetăm autotopia T_3 , unde $T_3 = T_2^{-1}T_1 = (L_{Rx}, R_{Rx}, R_{Rx}L_{Rx})$. În T_3 efectuăm substituția $x \rightarrow Rx$, unde $R^2 = \varepsilon$, și obținem $T_4 = (L_x, R_x, R_xL_x)$.

Deoarece $(Q, \circ)$ este *IP*-bucă, atunci mai avem și autotopia T_5 , unde $T_5 = (R_xL_x, IR_xI, L_x) = (R_xL_x, L_x^{-1}, L_x)$, adică am obținut $L_x(y \circ z) = R_xL_xy \circ L_x^{-1}z$, $x \circ (y \circ (x \circ z)) = ((x \circ y) \circ x) \circ z$. Am obținut identitatea Moufang.

Ne vom convinge, că și cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este *IP*-cvazigrup, adică ne mai rămâne să demonstrăm, că $(Q, \cdot)$ este inversabil la dreapta. Avem $x^{-1} \circ (x \circ y) = (y \circ x) \circ x^{-1} = y$, $R(R \cdot x) \cdot x^{-1} = (R^2y \cdot Rx) \cdot x^{-1} = (y \cdot Rx)x^{-1} = y$.

Definitiv avem, că *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este *IP*-cvazigrup și-i izotop buclei Moufang. Pe baza rezultatelor din [70] urmează, că $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang.

Invers. Fie $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang și demonstrăm, că are loc identitatea (3.26).

În particular, în cvazigrupul Moufang $(Q, \cdot)$ are loc a doua identitate Bol $(zx \cdot y)x = z \cdot L_{fx}^{-1}(xy \cdot x) = z(xy \cdot x)$. Dacă $x = f$, atunci avem $(zf \cdot y)f = z \cdot yf$. Facem substituția $z \rightarrow zf$ și obținem $(zy)f = zf \cdot yf$, R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$ și buclei $(Q, \circ)$. Din această cauză din identitatea $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ în cvazigrupul $(Q, \cdot)$ obținem în $(Q, \circ)$ identitatea

$$Rx \circ ((x \circ y) \circ z) = y \circ ((z \circ Rx) \circ x). \quad (3.37)$$

Dacă $y = Rx$, atunci

$$(x \circ Rx) \circ z = (z \circ Rx) \circ x, \forall x, z \in Q. \quad (3.38)$$

În (3.37) înlocuim $z = e = f$ și avem $Rx \circ (x \circ y) = y \circ (Rx \circ x)$. Am obținut

$$z \circ (Rx \circ x) = Rx \circ (x \circ z), \forall x, z \in Q. \quad (3.39)$$

În (3.37) punem $y = e$ și avem $Rx \circ (x \circ z) = (z \circ Rx) \circ x$,

$$(z \circ Rx) \circ x = Rx \circ (x \circ z), \forall x, z \in Q. \quad (3.40)$$

Din (3.38), (3.39), (3.40) avem

$$z \circ (Rx \circ x) = (Rx \circ x) \circ z, \quad x \circ Rx = Rx \circ x, \quad (3.41)$$

$$Rz \cdot (R^2x \cdot x) = R(R^2x \cdot x) \cdot z, \quad zf \cdot xx = xx \cdot z = zx \cdot x. \quad (3.42)$$

□

3.4. Pseudoautomorfisme ale i -cvazigrupurilor

Propoziția 3.4.1. Dacă permutarea α a mulțimii Q a i -cvazigrupului $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f este pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului $(Q, \cdot)$ cu companionul k , atunci k este un element Bol la stânga.

Demonstrație. Este dat: $k \cdot \alpha(xy) = (k \cdot \alpha x) \cdot \alpha y$. Dacă $\alpha x = e_k$, atunci avem $\alpha(\alpha^{-1}e_k \cdot y) = \alpha y$, $\alpha^{-1}e_k \cdot y = y$, $\alpha^{-1}e_k = f$, $e_k = \alpha f$. Mai departe observăm, că este dată autotopia T_1 cvazigrupului $(K, \cdot)$, unde $T_1 = (L_k \alpha, \alpha, L_k \alpha)$. Pe baza Propoziției 3.3.3. i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f este inversabil la stânga, din această cauză mai avem autotopiile T_2 și T_3 , unde $T_2 = (I_l L_k \alpha I_l, L_k \alpha, \alpha)$, $T_3 = T_2 T_1^{-1} = (\gamma, L_k, L_k^{-1})$. Aflăm permutarea γ . Avem $L_k^{-1}(yz) = \gamma y \cdot L_k z$. Dacă $z = e_k$, atunci obținem $R_k^{-1} L_k^{-1} R_{e_k} = \gamma$. Avem autotopia $T_4 = (R_k^{-1} L_k^{-1} R_{e_k}, L_k, L_k^{-1})^{-1} = (R_{e_k}^{-1} L_k R_k, L_k^{-1}, L_k)$, k este elementul Bol la stânga, $k(x \cdot ky) = R_{e_k}^{-1}(k \cdot xk) \cdot y$, $\forall x, y \in Q$. $\square$

Exemplul 3.4.1. Fie $Q(+, \cdot)$ câmpul numerelor raționale. Definim o operație nouă " $\circ$ ", $x \circ y = -x + y$. Atunci $(Q, \circ)$ este i -cvazigrup cu unitate la stânga $f = 0$. Translația la stânga L_a a cvazigrupului $(Q, \circ)$, este pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului $(Q, \circ)$ cu companionul $k = -\frac{a}{2}$. Pe baza propoziției demonstrate, cvazigrupul $(Q, \circ)$ este cvazigrup Bol la stânga.

Propoziția 3.4.2. Dacă în i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f translațiile L_a și R_b sunt pseudoautomorfisme la stânga cu companionul k , atunci $a = e_k f$, $b = e_k$, unde $k e_k = k$.

Demonstrație. Fie $k \cdot L_a(xy) = (k \cdot L_a x) \cdot L_a y$, $k(a \cdot xy) = (k \cdot ax) \cdot ay$. Dacă $x = f$, atunci obținem $k = k \cdot af$, $af = e_k$, $af \cdot f = e_k f$, $a = e_k f$. Fie $k \cdot R_b(xy) = (k \cdot R_b x) \cdot R_b y$, $k(xy \cdot b) = (k \cdot xb) \cdot yb$. Dacă $x = f$, atunci avem $k = kb$, $b = e_k$. $\square$

Propoziția 3.4.3. Dacă i -cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f este izotop grupului abelian, atunci L_a și R_b , unde $a = e_k f$, $b = e_k$, sunt pseudoautomorfisme la stânga ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$ cu companionul k .

Demonstrație. Cercetăm izotopul $(Q, \circ)$ i -cvazigrupului $(Q, \cdot)$, cu izotopia:

$$x \circ y = R_f^{-1} x \cdot y, \quad (3.43)$$

$\forall x, y \in Q$. $(Q, \circ)$ este buclă cu unitatea f . De unde urmează, că $(Q, \circ)$ este grup abelian.

Ne convingem, că are loc $k \cdot L_{e_k f}(xy) = (k \cdot L_{e_k f} x) \cdot L_{e_k f} y$, $k(e_k f \cdot xy) = (k \cdot (e_k f \cdot x)) \cdot (e_k f \cdot y)$. Din (3.43) avem $A = k(e_k f \cdot xy) = Rk \circ (R^2 e_k \circ (Rx \circ y)) = kf \circ (e_k \circ (Rx \circ y))$, și $B = (k \cdot (e_k f \cdot x)) \cdot (e_k f \cdot y) = R(Rk \circ (e_k \circ x)) \circ (e_k \circ y) = k \circ e_k f \circ x f \circ e_k \circ y$.

Ne convingem, că are loc $kf = k \circ e_k f$ pe baza, că R_f este automorfism al grupului abelian $(Q, \circ)$ și $R^2 = \varepsilon$. $R(kf) = k$, $R(k \circ e_k f) = Rk \circ R^2 e_k = k \cdot e_k = k$. Am obținut $A = B$.

Acum ne convingem, că are loc $k \cdot R_{e_k}(xy) = (k \cdot R_{e_k}x) \cdot R_{e_k}y$, $k(xy \cdot e_k) = (k \cdot x e_k) \cdot (y e_k)$. Din (3.43) avem $A = k(xy \cdot e_k) = kf \circ (R(Rx \circ y) \circ e_k) = kf \circ x \circ Ry \circ e_k$, $B = (k \cdot x e_k) \cdot (y e_k) = R(Rk \circ Rx \circ e_k) \circ Ry \circ e_k = k \circ x \circ e_k f \circ Ry \circ e_k$, $A = B$. $\square$

3.5. Unitățile în cvazigrupurile cu identități de tip Bol-Moufang

În acest paragraf cercetăm cvazigrupurile cu identitatea de tip Bol-Moufang dacă posedă sau nu unitate la dreapta sau la stânga.

În unele cazuri am folosit Prover9 [71] și Mace4 [72] pentru unele demonstrații și pentru a construi contraexemple.

Amintim, că parastroful (12) al grupoidului $(G, \cdot)$ este grupoidul $(G, *)$, care în operația " $*$ " se primește după următoarea regulă:

$$x * y = y \cdot x. \quad (3.44)$$

Clar, că pentru orice grupoid $(G, \cdot)$ există grupoidul lui parastrofic (12) $(G, *)$.

Tabela lui Cayley a grupoidului $(G, *)$ este o simetrizare a tabelii Cayley a grupoidului $(G, \cdot)$ față de diagonal principal. Evidențiem, că pentru orice cvazigrup binar există și parastrofii lui [21], [39], [40].

Presupunem, că identitatea F este adevărată în grupoidul $(G, \cdot)$. Atunci noi putem obține identitatea parastrofică (12) (F^*) a identității F, care trece operația " $\cdot$ " în operația " $*$ " și schimbă ordinea variabilelor folosind regula (3.44).

Remarca 3.5.1. În cazul cvazigrupului, analog pentru identitatea parastrofică (12), pot fi determinate alte identități parastrofice.

Tabela 3.1. Unitățile în cvazigrupurile cu identități de tip Bol-Moufang

Numele	Denumirea	identitatea	f	e	buclă	grup
F_1		$xy \cdot zx = (xy \cdot z)x$	+	+	+	+
F_2	Moufang medie	$xy \cdot zx = (x \cdot yz)x$	+	+	+	-
F_3		$xy \cdot zx = x(y \cdot zx)$	+	+	+	+
F_4	Moufang medie	$xy \cdot zx = x(yz \cdot x)$	+	+	+	-
F_5		$(xy \cdot z)x = (x \cdot yz)x$	+	+	+	+
F_6	Identitate extra	$(xy \cdot z)x = x(y \cdot zx)$	+	+	+	-

F_7		$(xy \cdot z)x = x(yz \cdot x)$	+	-	-	-
F_8		$(x \cdot yz)x = x(y \cdot zx)$	-	+	-	-
F_9		$(x \cdot yz)x = x(yz \cdot x)$	-	-	-	-
F_{10}		$x(y \cdot zx) = x(yz \cdot x)$	+	+	+	+
F_{11}		$xy \cdot xz = (xy \cdot x)z$	+	+	+	+
F_{12}		$xy \cdot xz = (x \cdot yx)z$	+	+	+	+
F_{13}	Identitate extra	$xy \cdot xz = x(yx \cdot z)$	+	+	+	-
F_{14}		$xy \cdot xz = x(y \cdot xz)$	+	+	+	+
F_{15}		$(xy \cdot x)z = (x \cdot yx)z$	-	-	-	-
F_{16}		$(xy \cdot x)z = x(yx \cdot z)$	+	-	-	-
F_{17}	Moufang la stânga	$(xy \cdot x)z = x(y \cdot xz)$	+	+	+	-
F_{18}		$(x \cdot yx)z = x(yx \cdot z)$	+	+	+	+
F_{19}	Bol la stânga	$(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$	-	+	-	-
F_{20}		$x(yx \cdot z) = x(y \cdot xz)$	+	+	+	+
F_{21}		$yx \cdot zx = (yx \cdot z)x$	+	+	+	+
F_{22}	Identitate extra	$yx \cdot zx = (y \cdot xz)x$	+	+	+	-
F_{23}		$yx \cdot zx = y(xz \cdot x)$	+	+	+	+
F_{24}		$yx \cdot zx = y(x \cdot zx)$	+	+	+	+
F_{25}		$(yx \cdot z)x = (y \cdot xz)x$	+	+	+	+
F_{26}	Bol la dreapta	$(yx \cdot z)x = y(xz \cdot x)$	+	-	-	-
F_{27}	Moufang la dreapta	$(yx \cdot z)x = y(x \cdot zx)$	+	+	+	-
F_{28}		$(y \cdot xz)x = y(xz \cdot x)$	+	+	+	+
F_{29}		$(y \cdot xz)x = y(x \cdot zx)$	-	+	-	-
F_{30}		$y(xz \cdot x) = y(x \cdot zx)$	-	-	-	-
F_{31}		$yx \cdot xz = (yx \cdot x)z$	+	+	+	+
F_{32}		$yx \cdot xz = (y \cdot xx)z$	+	+	+	+
F_{33}		$yx \cdot xz = y(xx \cdot z)$	+	+	+	+
F_{34}		$yx \cdot xz = y(x \cdot xz)$	+	+	+	+
F_{35}		$(yx \cdot x)z = (y \cdot xx)z$	-	+	-	-
F_{36}	RC-identitate	$(yx \cdot x)z = y(xx \cdot z)$	+	-	-	-

F_{37}	C -identitate	$(yx \cdot x)z = y(x \cdot xz)$	-	-	-	-
F_{38}		$(y \cdot xx)z = y(xx \cdot z)$	+	+	+	-
F_{39}	LC -identitate	$(y \cdot xx)z = y(x \cdot xz)$	-	+	-	-
F_{40}		$y(xx \cdot z) = y(x \cdot xz)$	+	-	-	-
F_{41}	LC -identitate	$xx \cdot yz = (x \cdot xy)z$	+	+	+	-
F_{42}		$xx \cdot yz = (xx \cdot y)z$	+	-	-	-
F_{43}		$xx \cdot yz = x(x \cdot yz)$	+	-	-	-
F_{44}		$xx \cdot yz = x(xy \cdot z)$	+	-	-	-
F_{45}		$(x \cdot xy)z = (xx \cdot y)z$	+	-	-	-
F_{46}	LC -identitate	$(x \cdot xy)z = x(x \cdot yz)$	-	-	-	-
F_{47}		$(x \cdot xy)z = x(xy \cdot z)$	+	+	+	+
F_{48}	LC -identitate	$(xx \cdot y)z = x(x \cdot yz)$	+	-	-	-
F_{49}		$(xx \cdot y)z = x(xy \cdot z)$	+	-	-	-
F_{50}		$x(x \cdot yz) = x(xy \cdot z)$	+	+	+	+
F_{51}		$yz \cdot xx = (yz \cdot x)x$	-	+	-	-
F_{52}		$yz \cdot xx = (y \cdot zx)x$	-	+	-	-
F_{53}	RC -identitate	$yz \cdot xx = y(zx \cdot x)$	+	+	+	-
F_{54}		$yz \cdot xx = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-
F_{55}		$(yz \cdot x)x = (y \cdot zx)x$	+	+	+	+
F_{56}	RC -identitate	$(yz \cdot x)x = y(zx \cdot x)$	-	-	-	-
F_{57}	RC -identitate	$(yz \cdot x)x = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-
F_{58}		$(y \cdot zx)x = y(zx \cdot x)$	+	+	+	+
F_{59}		$(y \cdot zx)x = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-
F_{60}		$y(zx \cdot x) = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-

Este evident, că identitatea F este adevărată în grupoidul $(G, \cdot)$ dacă și numai dacă în grupoidul $(Q, *)$ identitatea F^* este adevărată.

Teorema 3.5.1. [35]. $(F_1)^* = F_3, (F_2)^* = F_4, (F_5)^* = F_{10}, (F_6)^* = F_6, (F_7)^* = F_8, (F_9)^* = F_9,$
 $(F_{11})^* = F_{24}, (F_{12})^* = F_{23}, (F_{13})^* = F_{22}, (F_{14})^* = F_{21}, (F_{15})^* = F_{30}, (F_{16})^* = F_{29},$
 $(F_{17})^* = F_{27}, (F_{18})^* = F_{28}, (F_{19})^* = F_{26}, (F_{20})^* = F_{25}, (F_{31})^* = F_{34}, (F_{32})^* = F_{33},$
 $(F_{35})^* = F_{40}, (F_{36})^* = F_{39}, (F_{37})^* = F_{37}, (F_{38})^* = F_{38}, (F_{41})^* = F_{53}, (F_{42})^* = F_{54},$
 $(F_{43})^* = F_{51}, (F_{44})^* = F_{52}, (F_{45})^* = F_{60}, (F_{46})^* = F_{56}, (F_{47})^* = F_{58}, (F_{48})^* = F_{57},$
 $(F_{49})^* = F_{59}, (F_{50})^* = F_{55}.$

Uşor se vede, că orice grup satisface oricărei identităţi $F_1 - F_{60}$. Prin urmare, grupul ciclic Z_3 este contraexemplu pentru afirmaţia, că «există cvazigrup cu identitatea dintre identităţile $F_1 - F_{60}$, care are unitate medie».

Lema 3.5.1. Dacă cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are unitate la stânga (la dreapta), atunci parastroful (12) al cvazigrupului $(Q, \cdot)$ are unitate la dreapta (la stânga).

Lema 3.5.2. Dacă în cvazigrupul $(Q, \cdot)$ variabilele x şi y parcurg toată mulţimea Q ($x \neq y$), atunci $x \cdot y$ de asemenea parcurge toată mulţimea Q .

Demonstraţie. Dacă fixăm variabila x , de exemplu, $x = a, a \in Q$, atunci şi $a \cdot y$ parcurge toată mulţimea Q . Vedeţi, de asemenea, [40]. $\square$

Atrageţi atenţia, o altă situaţie, când $x = y$. Vedeţi, de exemplu, identitatea F_{42} , Teorema 3.5.25.

Lema 3.5.3. Dacă în cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are loc identitatea asociativă, atunci acest cvazigrup este grup.

Demonstraţie. Pentru a arăta cititorilor acestei lucrări metodele de demonstraţie, care au fost folosite în lucrarea dată, oferim dovezi bine cunoscute. Vedeţi, de exemplu, [73].

Aici folosim Lema 3.5.2. În identitatea de asociativitate $x \cdot yz = xy \cdot z$ înlocuim $x = f_y$ ($f_y y = y$). Atunci avem $f_y \cdot yz = yz$. Am obţinut, că f_y este unitate la stânga a cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

În identitatea de asociativitate $x \cdot yz = xy \cdot z$ substituim $z = e_y$ ($ye_y = y$). Atunci avem $xy = xy \cdot e_y$. Am obţinut, că e_y este unitate la dreapta a cvazigrupului $(Q, \cdot)$. $\square$

Lema 3.5.4. Dacă cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este grup, atunci cvazigrupul $(Q, \overset{(12)}{\curvearrowright})$ este grup.

Demonstraţie. Este un folclor matematic. $\square$

Teorema 3.5.2. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_1 este grup.

Demonstraţie. Aplicând Lema 3.5.2., putem scrie identitatea F_1 $xy \cdot zx = (xy \cdot z)x$ în forma $t \cdot zx = tz \cdot x$, unde $t = xy$. Obţinem identitatea asociativă. Conform Lemei 3.5.3 cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este buclă, precum este şi grup. Atunci cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este grup. $\square$

Corolarul 3.5.1. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_3 este grup.

Demonstraţie. Conform Teoremei 3.5.1. $F_3 = (F_1)^*$. $\square$

Teorema 3.5.3. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identităţile F_4 şi F_2 este buclă.

Demonstraţie. Faptul, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_4 este buclă, este demonstrat în [45], [47]. Restul urmează din Lema 3.5.1., deoarece după Teorema 3.5.1. $(F_2)^* = F_4$. $\square$

Este bine cunoscut, că există bucle neasociative Moufang [74].

Teorema 3.5.4. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitățile F_5 și F_{10} este grup.

Demonstrație. Cunoaștem, că orice cvazigrup $(Q, \cdot)$ posedă de proprietatea de reducere din dreapta și stânga [21], [39], [40]. Atunci din identitatea $(xy \cdot z)x = (x \cdot yz)x$ avem $xy \cdot z = x \cdot yz$. Ultimul urmează din Lema 3.5.3. $\square$

Teorema 3.5.5. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_6 $(xy \cdot z)x = x(y \cdot zx)$ (*identitate extra*) este buclă.

Demonstrație. Vezi [22]. $\square$

Există extra bucle neasociative [75].

Teorema 3.5.6. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_7 $(xy \cdot z)x = x(yz \cdot x)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Dacă facem substituția în identitatea F_7 $x = f_y$, atunci avem $yz \cdot f_y = f_y(yz \cdot f_y)$. Clar, că $(yz \cdot f_y)$ primește toate elementele mulțimii Q .

Următorul contraexemplu arată, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_7 nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

$\square$

Corolarul 3.5.2. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_8 $(x \cdot yz)x = x(y \cdot zx)$ are unitate la dreapta și nu are unitate la stânga.

Demonstrație. Demonstrația urmează din Teorema 3.5.6., Lema 3.5.1. și faptul, că $F_8 = (F_7)^*$ (Teorema 3.5.1.). $\square$

Teorema 3.5.7. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_9 $(x \cdot yz)x = x(yz \cdot x)$ nu are unitate nici la stânga nici la dreapta.

Demonstrație. Următorul cvazigrup $(Q, \cdot)$ satisface identității F_9 și nu are nici unitate la stânga și nici la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

$\square$

Teorema 3.5.8. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{11} $xy \cdot xz = (xy \cdot x)z$ este grup.

Demonstrație. Putem scrie identitatea $F_{11} \quad xy \cdot xz = (xy \cdot x)z$ în forma $t \cdot xz = tx \cdot z$, unde $t = xy$. Restul urmează din Lema 3.5.3. □

Corolarul 3.5.3. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{24} \quad yx \cdot zx = y(x \cdot zx)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{24} = (F_{11})^*$. □

Teorema 3.5.9. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{12} \quad xy \cdot xz = (x \cdot yx)z$ este grup.

Demonstrație. Dacă substituim în identitatea $F_{12} \quad x = f_z$, atunci $f_z y \cdot z = (f_z \cdot y f_z)z$. După substituție în ultima egalitate avem $y = y f_z$. Ultima egalitate înseamnă, că cvazigrupul cu identitatea F_{12} are unitate la dreapta.

Dacă introducem în identitatea $F_{12} \quad x = y = e$, atunci avem $ee \cdot ez = (e \cdot ee)z, e \cdot ez = ez$. Prin urmare, cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{12} are unitate la stânga, și, în sfârșit, acest cvazigrup este buclă.

Dacă substituim în identitatea $F_{12} \quad z = 1$, atunci avem

$$xy \cdot x = x \cdot yx. \quad (3.45)$$

Dacă aplicăm egalitatea (3.45) în egalitatea F_{12} , atunci avem

$$xy \cdot xz = (xy \cdot x)z. \quad (3.46)$$

Dacă notăm xy prin litera t , atunci putem scrie identitatea (3.46) în forma

$$t \cdot xz = tx \cdot z. \quad (3.47)$$

□

Corolarul 3.5.4. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{23} \quad yx \cdot zx = y(xz \cdot x)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{23} = (F_{12})^*$. □

Teorema 3.5.10. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{13} \quad xy \cdot xz = x(yx \cdot z)$ este buclă.

Demonstrație. Vezi [75]. □

Corolarul 3.5.5. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{22} \quad yx \cdot zx = (y \cdot xz)x$ este buclă.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{22} = (F_{13})^*$. □

Exemple de bucle neasociative cu identitățile F_{13} și F_{22} găsiți în [75].

Teorema 3.5.11. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{14} \quad xy \cdot xz = x(y \cdot xz)$ este grup.

Demonstrație. Putem substitui $t = xz$. Mai departe demonstrația este analoagă demonstrației Teoremei 3.5.8. □

Corolarul 3.5.6. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{21} \quad yx \cdot zx = (yx \cdot z)x$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{21} = (F_{14})^*$. □

Teorema 3.5.12. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{15} \quad (xy \cdot x)z = (x \cdot yx)z$ nu are nici unitate la dreapta și nici la stânga.

Demonstrație. Următorul cvazigrup $(Q, \cdot)$ satisface identității F_{15} și nu are unitate nici la stânga nici la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

□

Corolarul 3.5.7. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{30} $y(xz \cdot x) = y(x \cdot zx)$ nu are unitate la dreapta și la stânga.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{30} = (F_{15})^*$.

□

Teorema 3.5.13. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{16} $(xy \cdot x)z = x(yx \cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Dacă substituim în identitatea F_{16} $x = y, y = y \setminus x$, atunci avem $(y(y \setminus x) \cdot y)z = y((y \setminus x)y \cdot z)$ și după ce folosim identitatea (1.1) avem

$$xy \cdot z = y((y \setminus x)y \cdot z). \quad (3.48)$$

Aplicând operația „ $\setminus$ ” în egalitatea (3.48), vom obține

$$(y \setminus x)y \cdot z = y \setminus (xy \cdot z). \quad (3.49)$$

Dacă în egalitatea (3.49) notăm $xy = t$, atunci $x = t / y$,

$$(y \setminus (t / y))y \cdot z = y \setminus (t \cdot z). \quad (3.50)$$

Dacă în egalitatea (3.50) notăm $y = t$ și folosim identitatea (1.3), atunci avem

$$(y \setminus (y / y))y \cdot z = z. \quad (3.51)$$

Ultima egalitate arată, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are unitate la stânga.

Următorul cvazigrup satisface identității F_{16} și nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Corolarul 3.5.8. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{29} $(y \cdot xz)x = y(x \cdot zx)$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{29} = (F_{16})^*$.

□

Teorema 3.5.14. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{17} (*Moufang la stânga*) $(xy \cdot x)z = x(y \cdot xz)$ este buclă.

Demonstrație. Vedeți [36], [46], [47]. □

Corolarul 3.5.9. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{27} (*Moufang la dreapta*) $(yx \cdot z)x = y(x \cdot zx)$ este buclă.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{27} = (F_{17})^*$. □

Teorema 3.5.15. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{18} $(x \cdot yx)z = x(yx \cdot z)$ este grup.

Demonstrație. Notăm yx prin variabila t . Atunci identitatea F_{18} capătă forma $xt \cdot z = x \cdot tz$. Restul urmează din Lema 3.5.3. □

Corolarul 3.5.10. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{28} $(y \cdot xz)x = y(xz \cdot x)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{28} = (F_{18})^*$. □

Teorema 3.5.16. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{19} (*Bol la stânga*) $(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Demonstrație. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{19} nu are unitate la stânga.

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	2	1	0
2	0	2	1

Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{19} are unitate la dreapta. Dacă în identitatea $(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$ înlocuim $z = e_x$, atunci avem $(x \cdot yx)e_x = x \cdot yx$ pentru toți $x, y \in Q$ [40]. □

Corolarul 3.5.11. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{26} (*Bol la dreapta*) $(yx \cdot z)x = y(xz \cdot x)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{26} = (F_{19})^*$. □

Teorema 3.5.17. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{20} $x(yx \cdot z) = x(y \cdot xz)$ este grup.

Demonstrație. Dacă simplificăm din stânga în identitatea $x(yx \cdot z) = x(y \cdot xz)$, atunci avem $yx \cdot z = y \cdot xz$. Restul urmează din Lema 3.5.3. □

Corolarul 3.5.12. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{25} $(yx \cdot z)x = (y \cdot xz)x$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{25} = (F_{20})^*$. □

Teorema 3.5.18. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{31} $yx \cdot xz = (yx \cdot x)z$ este grup.

Demonstrație. Dacă notăm yx prin t , atunci din identitatea F_{31} obținem identitatea de asociativitate $t \cdot xz = tx \cdot z$. □

Corolarul 3.5.13. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{34} $yx \cdot xz = y(x \cdot xz)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{34} = (F_{31})^*$. □

Teorema 3.5.19. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{32} \ yx \cdot xz = (y \cdot xx)z$ este grup.

Demonstrație. Vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{32} are unitate la stânga. În identitatea $F_{32} \ yx \cdot xz = (y \cdot xx)z$ facem substituția $y \rightarrow x/(zz), x \rightarrow z, z \rightarrow y$ și obținem

$$((x/zz)zz)y = ((x/zz)z) \cdot zy, \quad (3.52)$$

și după aplicarea identității (1.2) avem

$$xy = ((x/zz)z) \cdot zy. \quad (3.53)$$

Dacă vom nota zy prin litera t , atunci $y = z \backslash t$. Și noi putem rescrie egalitatea (3.53) în forma

$$x(z \backslash t) = ((x/zz)z) \cdot t. \quad (3.54)$$

Dacă notăm în egalitatea (3.54) $x = z$, atunci avem

$$\stackrel{(1.1)}{x(x \backslash t)} \stackrel{\cong}{=} t = ((x/xx)x) \cdot t. \quad (3.55)$$

Am demonstrat, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{32} are unitate la stânga $f = ((x/xx)x)$.

Dacă substituim în identitatea $F_{32} \ x = e$, atunci avem

$$y \cdot ez = yz, ez = z, e = f. \quad (3.56)$$

Deoarece în cvazigrupul $(Q, \cdot)$ există unitate la stânga, atunci există de asemenea și unitate la dreapta.

Dacă în identitatea F_{32} notăm $z = e$, atunci avem

$$yx \cdot x = y \cdot xx. \quad (3.57)$$

Dacă aplicăm identitatea (3.57) la partea dreapta a identității F_{32} , atunci avem

$$yx \cdot xz = (yx \cdot x)z. \quad (3.58)$$

Pentru a demonstra, că cvazigrupul cu identitatea F_{32} este grup, putem nota în identitatea (3.58) yx prin litera t și să aplicăm Lemele 3.5.2. și 3.5.3. □

Corolarul 3.5.14. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{33} \ yx \cdot xz = y(xx \cdot z)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{33} = (F_{32})^*$. □

Teorema 3.5.20. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{35} \ (yx \cdot x)z = (y \cdot xx)z$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Demonstrație. Demonstrăm, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{35} are unitate la dreapta. În identitatea F_{35} simplificăm din dreapta și avem:

$$yx \cdot x = y \cdot xx. \quad (3.59)$$

Dacă în identitatea (3.59) notăm $yx = t$, atunci $t/x = y$. Folosind această substituție, noi putem rescrie identitatea (3.59) în felul următor:

$$tx = (t/x) \cdot xx. \quad (3.60)$$

Presupunem, că $x: = y \setminus x$ în identitatea F_{35} . Atunci avem:

$$(y(y \setminus x) \cdot (y \setminus x))z \stackrel{(1.1)}{\cong} (x \cdot (y \setminus x))z = (y \cdot (y \setminus x)(y \setminus x))z. \quad (3.61)$$

După simplificarea din dreapta în identitatea (3.61), avem:

$$x \cdot (y \setminus x) = y \cdot (y \setminus x)(y \setminus x). \quad (3.62)$$

Din identitatea (3.62) cu ajutorul operației diviziunii din dreapta " $\setminus$ " avem

$$(y \setminus x)(y \setminus x) = y \setminus (x \cdot (y \setminus x)). \quad (3.63)$$

Dacă înlocuim în identitatea (3.63) $x = y$, atunci avem:

$$(x \setminus x)(x \setminus x) = x \setminus (x(x \setminus x)) \stackrel{(1.1)}{\cong} x \setminus x. \quad (3.64)$$

În identitatea (3.60) fie $x: = z \setminus z$ pentru careva $z \in Q$. Atunci vom obține:

$$t(z \setminus z) = (t/(z \setminus z)) \cdot (z \setminus z)(z \setminus z) \stackrel{(3.64)}{\cong} (t/(z \setminus z)) \cdot (z \setminus z) \stackrel{(1.2)}{\cong} t. \quad (3.65)$$

Următorul exemplu demonstrează, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{35} nu are unitate la stânga.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	2	3	4	5
1	0	1	3	2	5	4
2	3	2	4	5	0	1
3	2	3	5	4	1	0
4	5	4	0	1	2	3
5	4	5	1	0	3	2

□

Corolarul 3.5.15. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{40} $y(xx \cdot z) = y(x \cdot xz)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{35} = (F_{40})^*$. □

Teorema 3.5.21. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{36} (*RC identitate*) $(yx \cdot x)z = y(xx \cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{36} are unitate la stânga. Dacă vom substitui $y: = f_x$ în identitatea $(yx \cdot x)z = y(xx \cdot z)$, atunci vom obține

$$(f_x x \cdot x)z = f_x(xx \cdot z), xx \cdot z = f_x(xx \cdot z). \quad (3.66)$$

Din egalitatea (3.66) urmează, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{36} are unitate la stânga.

Următorul exemplu demonstrează, că unitatea la dreapta nu există.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Corolarul 3.5.16. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{39} (*LC identitate*) $(y \cdot xx)z = y(x \cdot xz)$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{39} = (F_{36})^*$.

□

Teorema 3.5.22. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{37} (*C identitate*) $(yx \cdot x)z = y(x \cdot xz)$ nu are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Dăm exemplul necesar.

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

□

Teorema 3.5.23. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{38} $(y \cdot xx)z = y(xx \cdot z)$ este buclă.

Demonstrație. În identitatea F_{38} substituim $y := f_{xx}$. Atunci avem

$$(f_{xx} \cdot xx)z = f_{xx}(xx \cdot z), xx \cdot z = f_{xx}(xx \cdot z). \quad (3.67)$$

În cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{38} există unitate la stânga.

În identitatea F_{38} substituim $z := e_{xx}$. Atunci avem

$$(y \cdot xx)e_{xx} = y(xx \cdot e_{xx}), (y \cdot xx)e_{xx} = y \cdot xx. \quad (3.68)$$

Prin urmare în cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{38} există unitate la dreapta.

□

Următorul exemplu demonstrează, că cvazigrupul cu identitatea F_{38} nu este asociativ; buclă cu identitatea F_{38} fără proprietatea lui Lagrange.

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	3	4	2
2	2	4	0	1	3
3	3	2	4	0	1
4	4	3	1	2	0

Teorema 3.5.24. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{41} (*LC identitate*) $xx \cdot yz = (x \cdot xy)z$ este buclă.

Demonstrație. Vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{41} are unitate la stânga. În identitatea F_{41} vom substitui $y := e_x$. Atunci avem:

$$xx \cdot e_x z = (x \cdot x e_x)z, xx \cdot e_x z = xx \cdot z, e_x z = z. \quad (3.69)$$

Vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{41} are unitate la dreapta. În identitatea F_{41} vom substitui $y := f_x$. Atunci avem:

$$xx \cdot f_x z = (x \cdot x f_x)z, xx \cdot z = (x \cdot x f_x)z, xx = x \cdot x f_x, x = x f_x. \quad (3.70)$$

□

Următorul exemplu demonstrează, că bucla cu identitatea F_{41} nu este asociativă.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	3	5	2	4
2	2	5	0	4	1	3
3	3	4	1	0	5	2
4	4	3	5	2	0	1
5	5	2	4	1	3	0

Corolarul 3.5.17. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{53} (*RC identitate*) $yz \cdot xx = y(zx \cdot x)$ este buclă.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{53} = (F_{41})^*$. □

Teorema 3.5.25. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{42} $xx \cdot yz = (xx \cdot y)z$ este buclă la stânga.

Demonstrație. Vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{42} are unitate la stânga. În identitatea F_{42} vom substitui $y := e_{xx}$. Atunci avem:

$$xx \cdot e_{xx} z = (xx \cdot e_{xx})z, xx \cdot e_{xx} z = xx \cdot z, e_{xx} z = z. \quad (3.71)$$

Următorul exemplu demonstrează, că bucla la stânga cu identitatea F_{42} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Corolarul 3.5.18. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{54} $yz \cdot xx = y(z \cdot xx)$ este buclă la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{54} = (F_{42})^*$. □

Teorema 3.5.26. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{43} $xx \cdot yz = x(x \cdot yz)$ este buclă la stânga.

Demonstrație. Vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{43} are unitate la stânga. În identitatea F_{43} vom substitui $x = y = f_z$. Atunci avem:

$$f_z f_z \cdot f_z z = f_z(f_z \cdot f_z z), f_z f_z \cdot z = f_z z, f_z f_z = f_z. \quad (3.72)$$

Mai departe în identitatea F_{43} vom substitui $x = f_x$. Atunci avem:

$$f_x f_x \cdot yz = f_x(f_x \cdot yz), \text{ aplicând egalitatea (3.72),}$$

$$f_x \cdot yz = f_x(f_x \cdot yz), yz = f_x \cdot yz. \quad (3.73)$$

Următorul exemplu demonstrează, că bucla la stânga cu identitatea F_{43} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	3	2	5	4
1	0	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	0	1
3	3	2	5	4	1	0
4	4	5	0	1	2	3
5	5	4	1	0	3	2

□

Corolarul 3.5.19. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{51} $yz \cdot xx = (yz \cdot x)x$ este buclă la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{51} = (F_{43})^*$. □

Teorema 3.5.27. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{44} $xx \cdot yz = x(xy \cdot z)$ este buclă la stânga.

Demonstrație. Vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{44} are unitate la stânga. În identitatea F_{44} substituim $x = f_y$. Atunci avem:

$$f_y f_y \cdot yz = f_y(f_y y \cdot z), f_y f_y \cdot yz = f_y \cdot yz, f_y f_y = f_y. \quad (3.74)$$

Mai departe în identitatea F_{44} substituim $x = f_x$. Atunci avem:

$$f_x f_x \cdot yz = f_x(f_x y \cdot z), \text{ folosind egalitatea (3.74),}$$

$$f_x \cdot yz = f_x(f_x y \cdot z), yz = f_x y \cdot z, y = f_x y. \quad (3.75)$$

Următorul exemplu demonstrează, că bucla la stânga cu identitatea F_{44} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Teorema 3.5.28. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{45} $(x \cdot xy)z = (xx \cdot y)z$ este buclă la stânga.

Demonstrație. Vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{45} are unitate la stânga. În identitatea F_{45} simplificăm din dreapta. Atunci avem:

$$x \cdot xy = xx \cdot y. \quad (3.76)$$

În identitatea (3.76) substituim $x = f_y$ și obținem

$$f_y \cdot f_y y = f_y f_y \cdot y, f_y f_y = f_y. \quad (3.77)$$

Mai departe în identitatea (3.76) substituim $x = f_x$. Atunci avem:

$$f_x \cdot f_x y = f_x f_x \cdot y, \text{ folosind egalitatea (3.77),}$$

$$f_x \cdot f_x y = f_x y, f_x y = y. \quad (3.78)$$

Următorul exemplu demonstrează, că bucla la stânga cu identitatea F_{45} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	3	2	5	4
1	0	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	0	1
3	3	2	5	4	1	0
4	4	5	0	1	2	3
5	5	4	1	0	3	2

□

Corolarul 3.5.20. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{60} $y(zx \cdot x) = y(z \cdot xx)$ este buclă la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{60} = (F_{45})^*$. □

Teorema 3.5.29. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{46} (*LC identitate*) $(x \cdot xy)z = x(x \cdot yz)$ nu are unitate la stânga și la dreapta.

Demonstrație. Aducem exemplul necesar.

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

□

Corolarul 3.5.21. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{56} (*RC identitate*) $(yz \cdot x)x = y(zx \cdot x)$ nu are unitate la stânga și la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{56} = (F_{46})^*$. □

Teorema 3.5.30. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{47} (x \cdot xy)z = x(xy \cdot z)$ este grup.

Demonstrație. Dacă în identitatea F_{47} notăm xy prin variabila t , atunci obținem $xt \cdot z = x \cdot tz$. □

Corolarul 3.5.22. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{58} (y \cdot zx)x = y(zx \cdot x)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{58} = (F_{47})^*$. □

Teorema 3.5.31. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{48} (xx \cdot y)z = x(x \cdot yz)$ este buclă la stânga.

Demonstrație. Vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{48} are unitate la stânga. În identitatea F_{48} substituim $y = f_{yz}$. Atunci avem:

$$(f_{yz}f_{yz} \cdot y)z = f_{yz}(f_{yz} \cdot yz),$$

$$(f_{yz}f_{yz} \cdot y)z = yz, f_{yz}f_{yz} \cdot y = y. \quad (3.79)$$

Următorul exemplu demonstrează, că bucla la stânga cu identitatea F_{48} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	1	4	3	0	2
1	3	0	4	2	1
2	0	1	2	3	4
3	2	3	1	4	0
4	4	2	0	1	3

□

Corolarul 3.5.23. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{57} (yz \cdot x)x = y(z \cdot xx)$ este buclă la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{57} = (F_{48})^*$. □

Teorema 3.5.32. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $F_{49} (xx \cdot y)z = x(xy \cdot z)$ este buclă la stânga.

Demonstrație. Vom demonstra, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{49} are unitate la stânga. În identitatea F_{49} trecem $y \rightarrow (xx) \setminus y$. Atunci avem:

$$(xx \cdot (xx \setminus y))z \stackrel{(1.1)}{=} yz = x \left((x((xx) \setminus y)) \cdot z \right). \quad (3.80)$$

Mai departe aplicăm în egalitatea (3.80) diviziunea din dreapta " $\setminus$ ".

$$(x((xx) \setminus y))z = x \setminus (yz). \quad (3.81)$$

Dacă înlocuim în egalitatea (3.81) $x = y$, atunci avem:

$$(x((xx) \setminus x))z = x \setminus (xz) \stackrel{(1.3)}{=} z. \quad (3.82)$$

Următorul exemplu demonstrează, că bucla la stânga cu identitatea F_{49} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Corolarul 3.5.24. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{59} $(y \cdot zx)x = y(z \cdot xx)$ este buclă la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{59} = (F_{49})^*$.

□

Teorema 3.5.33. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{50} $x(x \cdot yz) = x(xy \cdot z)$ este grup.

Demonstrație. Dacă simplificăm din stânga în identitatea F_{50} , atunci avem asociativitatea $x \cdot yz = xy \cdot z$. Restul urmează din Lema 3.5.3.

□

Corolarul 3.5.25. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea F_{55} $(yz \cdot x)x = (y \cdot zx)x$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{55} = (F_{50})^*$.

□

3.6. Concluzii la capitolul 3

În Capitolul 3 s-a definit o clasă nouă de cvazigrupuri (*i*-cvazigrupuri) și au fost cercetate unele proprietăți ale acestei clase și relațiile cu alte clase de cvazigrupuri. A fost complet soluționată problema cercetării existenței unității în cvazigrupurile cu identități de tip Bol-Moufang enumerate în [1].

În baza cercetărilor efectuate în Capitolul 3 și a rezultatelor obținute putem formula următoarele concluzii:

1. Presupunând că *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este inversabil la dreapta s-a demonstrat că este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga și distributantul $D = \{f\}$. Presupunând că distributantul D *i*-cvazigrupului $(Q, \cdot)$ este nevid și $(Q, \cdot)$ este izotop buclei Bol la stânga s-a dovedit că $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga.

S-a găsit relația *i*-cvazigrupurilor cu alte cvazigrupuri: presupunând că *i*-cvazigrupul este idempotent s-a demonstrat că este cvazigrup Bol la stânga, cvazigrup Stein la dreapta, distributiv la stânga și miezul cvazigrupului Bol la stânga de asemenea este *i*-cvazigrup; s-a demonstrat că *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este buclă Moufang în care $x^2y = yx^2$ pentru orice $x, y \in Q$, presupunând că $(Q, \cdot)$ are unitate la dreapta e ; s-a demonstrat că *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și izotop grupului abelian, presupunând că $(Q, \cdot)$ este unipotent.

Cercetând *i*-cvazigrupurile cu legile alternative și legea de elasticitate s-au obținut următoarele: presupunând că în *i*-cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are loc legea alternativă la stânga (la

dreapta) s-a dovedit că $(Q, \cdot)$ este buclă Moufang, unde $x^2y = yx^2$ pentru orice $x, y \in Q$; s-a demonstrat că în orice i -cvazigrup $(Q, \cdot)$ cu identitatea de elasticitate mulțimea tuturor unităților locale formează subgrupul Bol la stânga.

Cercetând morfismele acestei clase: presupunând că substituția α a mulțimii Q i -cvazigrupului $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f este pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului $(Q, \cdot)$ cu companionul k s-a demonstrat că k este elementul Bol la stânga [76], [77].

2. În ultimul paragraf a fost soluționată problema existenței unității la dreapta, la stânga, medii pentru fiecare dintre cele 60 de cvazigrupuri ce satisfac identități de tip Bol-Moufang. Am obținut că (a vedea tabela 3.1):

cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu orice dintre identitățile $F_1, F_3, F_5, F_{10}, F_{11}, F_{14}, F_{18}, F_{20}, F_{21}, F_{24}, F_{25}, F_{28}, F_{31}, F_{32}, F_{33}, F_{34}, F_{47}, F_{50}, F_{55}, F_{58}$ este un grup; cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu orice dintre identitățile $F_7, F_{16}, F_{26}, F_{36}, F_{40}, F_{42}, F_{43}, F_{44}, F_{45}, F_{48}, F_{49}$ este buclă la stânga; cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu orice dintre identitățile $F_8, F_{19}, F_{29}, F_{35}, F_{39}, F_{51}, F_{52}, F_{54}, F_{57}, F_{59}, F_{60}$ este buclă la dreapta; cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu orice dintre identitățile $F_2, F_4, F_6, F_{13}, F_{17}, F_{22}, F_{27}, F_{38}, F_{41}, F_{53}$ este buclă; cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu orice dintre identitățile $F_9, F_{15}, F_{30}, F_{37}, F_{46}, F_{56}$ nu are unitate [78], [79], [80].

În acest capitol sunt realizate obiectivele, care se referă la cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite (anume i -cvazigrupuri) și la cercetarea cvazigrupurilor cu orice dintre cele 60 de identități clasice de tip Bol-Moufang enumerate în [1] la existența unității.

Rezultatele obținute în capitolul 3 sunt publicate în [76], [77], [79] [78], [80].

4. CVAZIGRUPURI TRANZITIVE LA STÂNGA. CVAZIGRUPURI NEUMANN ȘI SCHWEIZER

Dacă nucleul la stânga (față de un element k) coincide cu tot cvazigrupul $(Q, \cdot)$, atunci grupul permutărilor regulate la stânga este tranzitiv pe mulțimea Q . În legătură cu aceasta s-a introdus următoarea noțiune:

Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește $\mathcal{L}$ -tranzitiv, dacă grupul $\mathcal{L}$ al tuturor permutărilor regulate este tranzitiv pe mulțimea Q .

Analog se definește $\mathcal{R}$ - și Φ -tranzitiv. Exemplu simplu de cvazigrupuri tranzitive (adică $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{R}$ - sau Φ -tranzitive) poate servi grupul. Cvazigrupurile tranzitive sunt strâns legate cu grupurile, și anume are loc:

Teoremă. Orice buclă $(Q, \cdot)$, izotopă cvazigrupului tranzitiv (Q, A) , este grup.

S-a observat că pentru $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{R}$ -tranzitive afirmația inversă, în general vorbind, nu este adevărată. Deci, există cvazigrupuri tranzitive, diferite de grupuri.

În acest capitol sunt cercetate proprietățile cvazigrupurilor tranzitive la stânga (inclusiv autotopismele lor și pseudoautomorfismele), sunt stabilite conexiunile lor cu unele clase de cvazigrupuri. Sunt descrise GA-cvazigrupurile la dreapta tranzitive la stânga.

De asemenea s-a cercetat clasa de cvazigrupuri Neumann și anume proprietățile de bază, morfismele, G -proprietățile.

4.1. Proprietățile de bază ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga

În acest paragraf s-au cercetat proprietățile principale ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga. Este construit un exemplu de cvazigrupuri tranzitive.

Definiția 4.1.1. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește *cvazigrup tranzitiv la stânga*, dacă în acest cvazigrup are loc identitatea

$$xy \cdot xz = yz \quad (4.1)$$

Este în [81], [42].

În publicația [42] s-a demonstrat: dacă în cvazigrupul $(Q, \cdot)$ are loc asociativitatea $x \cdot yz = xy \cdot z$ (adică acest cvazigrup este grup), atunci parastrofii (23) și (132) acestui cvazigrup satisfac identității tranzitive la stânga (4.1), parastrofii (13) și (123) acestui cvazigrup satisfac identității tranzitive la dreapta (adică identității $yx \cdot zx = yz$).

În publicațiile [82], [33], [83], [84], [85] cvazigrupurile tranzitive la stânga se numesc cvazigrupuri Word. În [83] sunt prezentate argumentele principale de necesitate a cercetării cvazigrupurilor tranzitive la stânga. În această publicație se evidențiază, că Frobenius a folosit diviziunea la dreapta de grup în lucrările sale dedicate teoriei reprezentării grupurilor [86].

Din rezultatele publicațiilor menționate mai sus urmează următoarea teoremă.

Teorema 4.1.1. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(G, \circ)$ poate fi obținut din grupul $(G, +)$ (neapărat comutativ) folosind următoarea construcție

$$x \circ y = -x + y = Ix + y, \quad (4.2)$$

unde $x + Ix = 0$ pentru toți $x, y \in G$ [42].

Din Teorema 4.1.1. urmează, că orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q, \circ)$ este unipotent, adică există element fixat 0 al mulțimii Q astfel, încât $x \circ x = 0$ pentru toți $x \in Q$.

Remarca 4.1.1. Din Teorema 4.1.1. urmează, că cvazigrupul $(Q, \circ)$ este o aplicație izotopică a grupului $(Q, +)$ cu izotopia $(I, \varepsilon, \varepsilon)$.

Corolarul 4.1.1. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este comutativ dacă și numai dacă este grup abelian cu orice element diferit de 0 de ordin doi.

Demonstrație. Din comutativitate cu ajutorul egalității (4.2) avem $-x + y = -y + x$ pentru orice $x, y \in Q$. Prin urmare $-x = x, x + x = 0$ pentru toți $x \in Q$.

Invers. Este evident, că orice grup abelian, orice element, al cărui este de ordin doi (cu excepția lui 0), este tranzitiv la stânga. □

Următorul corolar ușor urmează și din Teorema 4.1.1.

Corolarul 4.1.2. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ are unitate la stânga, adică există astfel element $f \in Q$, încât $f \cdot x = x$ pentru toți $x \in Q$.

Demonstrație. Dacă de înlocuit în identitatea (4.1) $x = y$, atunci avem $xx \cdot xz = xz$. Prin urmare $f = x \cdot x$. □

Dacă folosim Teorema 4.1.1., atunci Corolarul 4.1.2. ia forma:

Remarca 4.1.2. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q, \circ)$ are unitate la stânga, și anume, elementul 0 este unitatea la stânga.

Demonstrație. Dacă punem în ecuația (4.2) $x = 0$, unde 0 este unitatea grupului $(Q, +)$, atunci $0 \circ y = -0 + y = y$ pentru orice $y \in Q$. □

Remarca 4.1.3. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este *LIP*-cvazigrup [81].

Demonstrație. În identitatea (4.1) substituim $y = f$, unde $fx = x$ pentru orice $x \in Q$, și obținem următoarea egalitate: $xf \cdot xz = fz$. Mai departe avem $xf \cdot xz = z$. Din ultima egalitate avem, că $R_f = I_l$. □

Corolarul 4.1.3. În cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ se îndeplinește următoarea egalitate: $R_f^{-1} = R_f$.

Demonstrație. Din Remarca 4.1.3. avem $R_f = I_l$. Atunci $R_f^{-1} = I_l^{-1}$. Însă în *LIP*-cvazigrupuri $I_l = I_l^{-1}$ [21], [40]. □

Teorema 4.1.2. Orice buclă, izotopă cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$, este grup [81].

Demonstrație. *Prima metodă.* Din Teorema 4.1.1. urmează, că orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ izotop grupului $(Q, +)$ de forma $x \circ y = Ix + y$, unde $x + Ix = 0$ pentru toți $x \in Q$. Prin urmare, printre izotopii buclei cvazigrupului $(Q, \cdot)$ există un grup.

Mai mult, din teorema lui Albert [21], [40] rezultă, că orice buclă, care este izotop al cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$, este grup.

A doua metodă. Cercetăm izotopul buclei cvazigrupului $(Q, \cdot)$ de forma

$$x + y = R_f^{-1}x \cdot L_f^{-1}y = xf \cdot y. \quad (4.4)$$

Am aplicat Corolarul 4.1.2 și Corolarul 4.1.3. Din Teorema 4.1.1. urmează, că acest izotop este grup.

Mai departe, din teorema lui Albert urmează, că orice buclă, care este izotop al cvazigrupului tranzitiv $(Q, \cdot)$, este grup. $\square$

Corolarul 4.1.4. În cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ și grupul izotop lui $(Q, +)$ (Teorema 4.1.1.) avem $R_f = I^+$.

Demonstrație. Demonstrația urmează din egalitățile (4.2) și (4.4). $\square$

În cvazigrupuri tranzitive la stânga identitatea cvazigrupului Bol la dreapta $(yx \cdot z)x = yL_{fx}^{-1}(xz \cdot x)$ se va transforma în identitatea buclei Bol la dreapta

$$(yx \cdot z)x = y(xz \cdot x), \quad (4.5)$$

deoarece orice cvazigrup tranzitiv la stânga are unitate la stânga f (Corolarul 4.1.2.).

Exemplul 4.1.1. Dăm un exemplu de cvazigrup tranzitiv la stânga. Este parastroful (23) grupului S_3 .

*	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	2	0	1	4	5	3
2	1	2	0	5	3	4
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	3	2	0	1
5	5	3	4	1	2	0

4.2. Cvazigrupuri tranzitive la stânga și alte clase de cvazigrupuri

Acum să cercetăm relația cvazigrupurilor tranzitive la stânga cu alte clase de cvazigrupuri. În altă formă următoarea teoremă este demonstrată în [81].

Teorema 4.2.1. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga.

Demonstrație. Cercetăm izotopul buclei cvazigrupului $(Q, \cdot)$ de forma

$$x \circ y = R_f^{-1}x \cdot L_f^{-1}y = xf \cdot y. \quad (4.6)$$

Din Teorema 4.1.2. urmează, că acest izotop este grup. Vom scrie partea stângă a egalității Bol la stânga în următoarea formă:

$$x(y \cdot xz) = R_fx \circ R_fy \circ R_fx \circ z. \quad (4.7)$$

Partea dreaptă poate fi transcrisă în forma: $R_{e_x}^{-1}(x \cdot yx) \cdot z = R_ft \circ z$, unde $t = R_{e_x}^{-1}(x \cdot yx)$. Atunci $x \cdot yx = R_{e_x}t = t \cdot e_x$. Trecând în ultima egalitate la operația “ $\circ$ ” avem $R_fx \circ R_fy \circ x = R_ft \circ e_x$,

$$R_fx \circ R_fy \circ x \circ (e_x)^{-1} = R_ft. \quad (4.8)$$

Din egalitatea $x \cdot e_x = x$ avem $R_fx \circ e_x = x$, $(e_x)^{-1} = x^{-1} \circ R_fx$. Dacă înlocuim în egalitatea (4.8) ultima egalitate, atunci avem $R_fx \circ R_fy \circ x \circ x^{-1} \circ R_fx = R_ft$, $R_fx \circ R_fy \circ R_fx = R_ft$. Prin urmare,

$$R_fx \circ R_fy \circ R_fx \circ z = R_ft \circ z. \quad (4.9)$$

Partea dreaptă a ecuației (4.7) coincide cu partea stângă a ecuației (4.9) ce și demonstrează teorema. $\square$

Propoziția 4.2.1. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este izotop grupului abelian dacă și numai dacă translația R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Demonstrație. Este ușor de verificat. $\square$

În [83] condițiile, când cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este izotop grupului abelian se dau cu ajutorul Teoremei 4.1.1 în următoarea formă:

Propoziția 4.2.2. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este izotop grupului abelian dacă și numai dacă permutarea $I, x + Ix = 0$ pentru orice $x \in Q$, este automorfism al grupului $(Q, +)$.

Demonstrație. Este ușor de verificat. $\square$

Lema 4.2.1. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ satisface următoarei identități (identității buclei Bol la dreapta)

$$(zx \cdot y)x = z(xy \cdot x) \quad (4.10)$$

dacă și numai dacă permutarea R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Demonstrație. Demonstrația urmează din egalitatea (4.6), aplicând calcule directe. $\square$

Remarca 4.2.1. Folosind egalitatea (4.2), putem scrie identitatea (4.10) în următoarea formă $-z - y = -y - z$. Din această egalitate urmează, că grupul $(Q, +)$ este comutativ și că permutarea $Ix = -x$ pentru orice $x \in Q$ este automorfism al grupului $(Q, +)$.

Propoziția 4.2.3. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Moufang [70] dacă și numai dacă translația R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Demonstrație. Se știe, că orice cvazigrup Bol la stânga și la dreapta este cvazigrup Moufang. Vedeți, de exemplu, ([44], p. 80). Mai departe urmează din Teorema 4.2.1 și Lema 4.2.1. $\square$

Definiția 4.2.1. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea $x \cdot yz = xy \cdot e_x z$, unde $x \cdot e_x = x$ pentru orice $x \in Q$, se numește *F-cvazigrup la stânga*.

Teorema 4.2.2. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este *F-cvazigrup la stânga* dacă și numai dacă translația R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Demonstrație. Clar, că, demonstrând această teoremă, putem utiliza orice abordare a cvazigrupurilor tranzitive la stânga și anume printre Teoremele 4.1.1. sau 4.1.2.

Aici vom aborda către Teorema 4.1.1. În acest caz din egalitatea $x \cdot e_x = x$ avem $e_x = 2x$ pentru orice $x \in Q$. Presupunem, că cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este *F-cvazigrup la stânga*. Atunci putem rescrie egalitatea *F-cvazigrupului la stânga* în forma

$$-x + (-y + z) = -(-x + y) + (-2x + z). \quad (4.11)$$

Mai departe, folosind proprietățile grupului, obținem

$$-x - y + z = -y + x - 2x + z, -x - y = -y - x. \quad (4.12)$$

Prin urmare, grupul $(Q, +)$ este comutativ și pentru a termina demonstrația se poate folosi Propoziția 4.2.1.

Invers. Presupunem, că în cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ translația R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Din Propoziția 4.2.1. grupul $(Q, +)$ este comutativ și identitatea (4.11) are loc.

$\square$

4.3. Nucleul cvazigrupurilor tranzitive la stânga

Acum să trecem la caracterizarea nucleului cvazigrupurilor tranzitive la stânga.

Teorema 4.3.1. Nucleul la stânga $(N_l, \cdot)$ al cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este subgrup normal al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, care constă din elemente de ordin doi, care se află în centrul grupului $(Q, +)$.

Demonstrație. E bine cunoscut [21], [39], că mulțimile N_l și N_r formează subgrupuri ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Folosind (4.2), putem rescrie egalitatea $a \cdot xy = ax \cdot y$ în următoarea formă $-a - x + y = -(-a + x) + y, -a - x = -x + a$. Dacă $x = 0$, atunci avem $-a = a, a + a = 0$. Aceasta înseamnă, că elementul a are ordin doi, elementul a se află în centrul $(Z, +)$ grupului $(Q, +)$, nucleul la stânga $(N_l, +)$ este subgrup normal abelian al grupului $(Q, +)$.

Din Remarca 4.1.1. și rezultatele despre congruențele normale ale cvazigrupurilor izotopi [13] urmează, că $(N_I, \cdot) \cong (Q, \cdot)$. $\square$

Teorema 4.3.2. Dacă cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ are nucleu la dreapta netrivial, atunci este grup comutativ cu toate elementele nenule de ordin doi.

Demonstrație. Folosind (4.2) putem rescrie egalitatea $x \cdot ya = xy \cdot a$ în următoarea formă $-x + (-y + a) = -(-x + y) + a$, $-x - y = -y + x$, $-y = x - y + x$, $-x = y + x - y$, $Ix = y + x - y$ pentru orice $x, y \in Q$.

Ultimul înseamnă, că permutarea I este automorfism al grupului $(Q, +)$, grupul $(Q, +)$ este comutativ. Din egalitatea $-x = y + x - y$ avem $-x = x$, $x + x = 0$. Ultimul înseamnă, că în grupul $(Q, +)$ toate elementele nenule au ordin doi. $\square$

Corolarul 4.3.1. Dacă cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este asociativ, atunci $(Q, \cdot)$ este grup abelian al cărui orice element (cu excepția unității sale) este de ordin doi.

Demonstrație. Demonstrația urmează din Teorema 4.3.1. În acest caz nucleul la stânga coincide cu cvazigrupul $(Q, \cdot)$. $\square$

4.4. Despre morfismele cvazigrupurilor tranzitive la stânga

În teoria cvazigrupurilor un rol semnificativ îl joacă și autotopiile. Dăm două forme ale oricărei autotopii a unui cvazigrup tranzitiv la stânga.

Următoarea teoremă pentru prima dată a fost demonstrată în [81]. Demonstrația noastră diferă de demonstrația dată în [81].

Teorema 4.4.1. Orice autotopie (α, β, γ) a cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ are forma

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (L_a, R_b, R_f L_a R_b) R_f \theta, \quad (4.13)$$

unde a, b elemente fixate ale mulțimii Q , θ este automorfism al $(Q, \cdot)$ și $(Q, +)$.

Demonstrație. Vom folosi identitatea (4.2) a cvazigrupului tranzitiv la stânga. Din Remarca 4.1.1. urmează, că cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ și grupul $(Q, +)$ sunt izotopi cu izotopia $(I, \varepsilon, \varepsilon)$. Deaceia grupurile autotopice ale acestor cvazigrupuri sunt izomorfe [38], [33], și formele autotopiilor sunt conjugate cu izotopia $(I, \varepsilon, \varepsilon)$.

Cunoaștem [21], [40], că orice autotopie a grupului $(Q, +)$ are următoarea formă $(L_a^+, R_b^+, L_a^+ R_b^+) \theta$, unde a, b elemente fixate ale mulțimii Q , θ este un automorfism al grupului $(Q, +)$. Din această cauză orice autotopie a cvazigrupului $(Q, \cdot)$ are forma

$$(I L_a^+ I, R_b^+, L_a^+ R_b^+) \theta. \quad (4.14)$$

Se știe, că dacă permutarea θ este un automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, atunci θ este un automorfism al oricărui parastrof al cvazigrupului dat [40]. Din (4.2) avem $L_x^- = I L_x^+, I L_x^- =$

$L_x^+, R_x^- = R_x^+ I, R_x^- I = R_x^+$ pentru orice $x \in Q$. Folosind faptul, că $I^2 = \varepsilon$ și $I = R_f^-$, putem rescrie (4.14) în următoarea formă

$$(L_a I, R_b^- I, I L_a^- R_b^- I) \theta = (L_a, R_b^-, R_f^- L_a^- R_b^-) R_f^- \theta, \quad (4.15)$$

unde θ este un automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$. $\square$

Lema 4.4.1. Grupele componentelor a doua și a treia grupului tuturor autotopiilor LIP -cvazigrupului coincid ([40], Lema 2.40. 1.).

Lema 4.4.2. Orice cvaziautomorfism al cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ are forma $R_b^- R_f^- \theta$.

Demonstrație. Din Remarca 4.1.3. urmează, că orice cvazigrup tranzitiv la stânga este LIP -cvazigrup. Restul urmează din Lema 4.4.1. și Teorema 4.4.1. $\square$

4.5. G -proprietăți ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga

Cunoaștem că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este G -cvazigrup la dreapta, dacă orice element al lui este companionul unui pseudoautomorfism la dreapta. Analog se definește G -cvazigrupul la stânga. Iar cvazigrupul care este în același timp și G -cvazigrup la dreapta și G -cvazigrup la stânga este G -cvazigrup. G -cvazigrupurile totdeauna au unitate, adică G -cvazigrupul este buclă. O să vorbim mai departe despre G -bucle.

Definiția 4.5.1. G -bucă este bucla, izomorfă tuturor izotopilor buclei (LP -izotopi) [38], [39].

Importanța cercetării pseudoautomorfismelor urmează din următoarea teoremă a lui V.D. Belousov.

Teorema 4.5.1. Bucă $(L, \cdot)$ este G -bucă dacă și numai dacă orice element $x \in L$ este companionul căruiva pseudoautomorfism la dreapta și căruiva la stânga $(L, \cdot)$ ([21], Teorema 3.8).

Rezultatele lui V.D. Belousov deschid calea către cercetarea G -proprietăților, adică către cercetarea G -buclelor și G -cvazigrupurilor. Există legătură dintre nucleele cvazigrupurilor și pseudoautomorfismele cvazigrupurilor ([21], p. 47).

Definiția 4.5.2. Bijeția α a mulțimii Q se numește A -pseudoautomorfism la dreapta al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, dacă există bijeția β a mulțimii Q astfel, încât tripleta (α, β, β) este o autotopie a cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Bijeția β a mulțimii Q se numește A -pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, dacă există bijeția α a mulțimii Q astfel, încât tripleta (α, β, α) este o autotopie a cvazigrupului $(Q, \cdot)$ ([40], Definiția 1.159).

Mulțimea tuturor primelor componente, a doua și a treia ale A -pseudoautomorfismului la dreapta (la stânga) cvazigrupului $(Q, \cdot)$, mulțimea A -pseudoautomorfismelor la dreapta (la stânga)

cvazigrupului $(Q, \cdot)$ formează grup față de operația de înmulțire ale acestor A -pseudoautomorfisme ca autotopii ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$ ([40], Teorema 1.161).

Vom nota grupurile enumerate mai sus, folosind litera Π cu indici diferiți în felul următor: ${}_1\Pi_l^A$, ${}_2\Pi_l^A$, ${}_3\Pi_l^A$, ${}_1\Pi_r^A$, ${}_2\Pi_r^A$ и ${}_3\Pi_r^A$. Litera A în colțul de sus din dreapta înseamnă, că este pseudoautomorfism autotopic. De exemplu, ${}_2\Pi_r^A$ înseamnă grupul componentelor a doua ale A -pseudoautomorfismelor la dreapta cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Următoarea propoziție arată, că în cazul «buclei» A -pseudoautomorfismele la dreapta și stânga se transformă în pseudoautomorfisme standarte.

Propoziția 4.5.1. În bucla la dreapta $(Q, \cdot)$ cu unitate la dreapta e , orice A -pseudoautomorfism la dreapta este pseudoautomorfism la dreapta.

În bucla la stânga $(Q, \cdot)$ cu unitate la stânga f , orice A -pseudoautomorfism la stânga este pseudoautomorfism la stânga ([40], Lema 1.165).

Definiția 4.5.3. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește *GA-cvazigrup la dreapta*, dacă grupul ${}_2\Pi_r^A$ (sau grupul ${}_3\Pi_r^A$) este tranzitiv în mulțimea Q .

Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește *GA-cvazigrup la stânga*, dacă grupul ${}_1\Pi_l^A$ (sau grupul ${}_3\Pi_l^A$) este tranzitiv în mulțimea Q .

GA-cvazigrupul la dreapta și la stânga se numește GA-cvazigrup.

Teorema 4.5.2. *Cazul 1.* Autotopia cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este A -pseudoautomorfism la dreapta dacă și numai dacă există elementul $a \in Q$ astfel, încât

$$R_f = L_a. \quad (4.16)$$

Cazul 2. Autotopia cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este A -pseudoautomorfism la stânga dacă și numai dacă are loc egalitatea

$$L_a = R_f L_a R_b \quad (4.17)$$

pentru careva fixați $a, b \in Q$.

Demonstrație. Demonstrația urmează din Corolarul 4.1.3. și Teorema 4.4.1. □

Teorema 4.5.3. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este *GA-cvazigrup la dreapta* dacă și numai dacă $(Q, \cdot)$ este grup abelian de ordin doi.

Demonstrație. $\Rightarrow$ Aici vom folosi egalitatea (4.2). Putem rescrie egalitatea (4.16) $R_f x = L_a x, x \cdot f = a \cdot x$ pentru orice $x \in Q$ în forma:

$$-x + f = -a + x. \quad (4.18)$$

Dacă punem $x = 0$ în egalitatea (4.18), atunci vom obține $f = -a, -f = f = a$. Prin urmare $a = f = 0$ (Corolarul 4.1.2., Remarca 4.1.2.).

Atunci egalitatea (4.18) o putem rescrie în forma $-x = x, x + x = 0$ pentru orice $x \in Q$. Astfel $x \cdot y = -x + y = x + y = y + x = -y + x = y \cdot x$. Am folosit un fapt binecunoscut [87], că orice grup, în care toate elementele nenule au ordin doi, este comutativ. Proprietățile cvazigrupurilor tranzitive la stânga sunt date în Corolarul 4.1.1.

$\Leftarrow$ Este evident. □

Corolarul 4.5.1. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este GA -cvazigrup dacă și numai dacă $(Q, \cdot)$ este grup abelian de ordin doi.

Demonstrație. Orice GA -cvazigrup este GA -cvazigrup la dreapta. □

Cvazigrupul prezentat în exemplul 4.1.1. nu satisface egalității (4.17). Atunci există cvazigrupuri tranzitive la stânga, care nu sunt GA -cvazigrupuri la dreapta sau la stânga. Cvazigrupul tranzitiv la stânga comutativ este GA -cvazigrup la dreapta. Ușor se vede, că acest cvazigrup de asemenea este G -bucă.

Propoziția 4.5.2. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ este simplu dacă și numai dacă grupul $(Q, +)$ este simplu.

Demonstrație. Din rezultatele ([40], Corolarul 1.308) și forma izotopiei (Remarca 4.1.1.) urmează, că mulțimea (rețele) congruențelor normale ale cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q, \cdot)$ și grupului corespunzător $(Q, +)$ sunt egale. □

4.6. Rezultatele de bază ale cvazigrupurilor Neumann

În acest paragraf s-au cercetat proprietățile de bază ale clasei de cvazigrupuri Neumann. Conceptele și definițiile de bază pot fi găsite în [21], [39], [40].

Definiția 4.6.1. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ se numește *cvazigrup Neumann*, dacă în $(Q, \cdot)$ are loc identitatea

$$x \cdot (yz \cdot yx) = z. \quad (4.19)$$

[88], [89], [90], ([42] p. 248).

În articolele [88], [42], [90] se evidențiază următorul rezultat.

Teorema 4.6.1. Dacă cvazigrupul $(Q, \cdot)$ satisface următoarea identitate

$$xy \cdot z = y \cdot zx, \quad (4.20)$$

atunci parastroful (13) al acestui cvazigrup satisface identității Neumann (4.19).

Observați că identitatea (4.20) are următoarea identitate ca și parastroful (13): $(x \cdot yz) \cdot xy = z$ ([90], p. 313), [91].

Teorema 4.6.2. Dacă cvazigrupul $(Q, \cdot)$ satisface identității (4.20), atunci acest cvazigrup este grup abelian.

Demonstrație. În identitatea (4.20) substituim $x = e_z$. Atunci avem $e_z y \cdot z = y \cdot z e_z = yz$. Prin urmare, elementul e_z este unitatea la stânga a cvazigrupului $(Q, \cdot)$, adică $e_z \cdot x = x$ pentru toți $x \in Q$. Fie $e_z = f$.

Să presupunem că în identitatea (4.20) $x = f$. Atunci $yz = y \cdot zf$ și după omitere $z = zf$. Prin urmare, elementul f este unitate a cvazigrupului $(Q, \cdot)$, adică cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este buclă. Dacă înlocuim în identitatea (4.20) $y = f$, atunci obținem că bucla $(Q, \cdot)$ este comutativă. Aplicând comutativitatea în (4.20) obținem o identitate asociativă $yz \cdot x = y \cdot zx$. $\square$

Teorema 4.6.3. Orice cvazigrup Neumann este izotop grupului abelian $(Q, +)$ de forma $x \cdot y = x - y$.

Demonstrație. Demonstrația rezultă din Teorema 4.6.1., Teorema 4.6.2. și următorul fapt ([44], p. 53): parastroful (13) $(Q, \cdot)$ al IP -buclei (este evident, că orice grup abelian $(Q, +)$ este IP -bucă) este izotop de forma $(\varepsilon, \rho, \varepsilon)$, adică $x \cdot y = x - y$, fiindcă în grupul abelian $\rho = I$, avem $x + Ix = 0$ pentru toți $x \in Q$. $\square$

Teorema 4.6.4. Orice autotopie a cvazigrupului Neumann are forma:

$$(L_a^+, L_{-b}^+, L_{a+b}^+) \theta, \quad (4.21)$$

unde $L_a^+, L_{-b}^+, L_{a+b}^+$ sunt translațiile grupului abelian $(Q, +)$, $\theta \in \text{Aut}(Q, +)$.

Demonstrație. Conform Teoremei 4.6.3. rezultă, că cvazigrupul $(Q, \cdot)$ este izotop grupului comutativ $(Q, +)$ de forma $(\varepsilon, I, \varepsilon)$, $I^2 = \varepsilon$, $I\theta = \theta I$ pentru orice $\theta \in \text{Aut}(Q, +)$.

Orice autotopie a grupului $(Q, +)$ are forma $(L_a^+, L_{-b}^+, L_{a+b}^+) \theta$, unde translațiile și automorfismul sunt la fel, ca și în formularea Teoremei 4.6.4. [21], [40].

Grupurile autotopice de cvazigrupuri izotopice sunt conjugate [21], [40]. Atunci noi avem:

$$(L_a^+ \theta, IL_b^+ \theta I, L_{a+b}^+ \theta), = (L_a^+, L_{-b}^+, L_{a+b}^+) \theta, \quad (4.22)$$

de unde $IL_b^+ \theta I = L_{-b}^+ \theta$. $\square$

Corolarul 4.6.1. În cvazigrupul Neumann $(Q, \cdot)$ $\text{Aut}(Q, \cdot) = \text{Aut}(Q, +)$.

Demonstrație. Automorfismul este o autotopie cu componente egale. Restul rezultă din Teorema 4.6.4. $\square$

Corolarul 4.6.2. Orice autotopie a cvazigrupului Neumann $(Q, \cdot)$ are forma:

$$(L_a, L_{Ib}, L_{a \cdot Ib}) \theta_1, \quad (4.23)$$

unde $L_a, L_{Ib}, L_{a \cdot Ib}$ sunt translațiile cvazigrupului $(Q, \cdot)$, $\theta_1 = I\theta \in \text{Aut}(Q, \cdot)$ [91].

Demonstrație. Pe baza Teoremei 4.6.3. avem $x \cdot y = x + Iy$, $x + y = x \cdot Iy$, $L_x^+ y = L_x^- Iy$. $\square$

Clar, că formele de autotopii arătate mai sus ale cvazigrupului Neumann $(Q, \cdot)$ nu sunt unice. În ([91], Teorema 7) este arătată următoarea formă a autotopiei

$$(L_s, L_t, L_s R_t^{-1}) \theta, \quad (4.24)$$

unde $\theta \in \text{Aut}(Q, \cdot)$, s, t sunt elemente fixate ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Enumerăm unele proprietăți ale cvazigrupului Neumann, demonstrate în [92], [91]. Acum putem folosi Teorema 4.6.3., demonstrând unele dintre ele.

Corolarul 4.6.3.

1. Orice cvazigrup Neumann $(Q, \cdot)$ este unipotent și are unitate la dreapta;
2. Orice buclă, izotopă cvazigrupului Neumann, este grup abelian;
3. Orice cvazigrup Neumann este cvazigrup medial;
4. Orice cvazigrup Neumann este cvazigrup Bol la stânga;
5. Orice cvazigrup Neumann este cvazigrup Moufang;
6. Miezul cvazigrupului Neumann este grupoid distributiv;
7. Nucleul la dreapta al cvazigrupului Neumann $(Q, \cdot)$ conține astfel de elemente ale mulțimii Q , încât $a = -a$.

Demonstrație. Putem aplica Teorema 4.6.3.

Cazul 6. Ținând cont de Teorema 4.6.3., noi putem scrie definiția miezului cvazigrupului Neumann în următoarea formă: $x \circ y = 2 \cdot x - y$, unde $(Q, +)$ este grup abelian.

Verificăm dacă grupoidul $(Q, \circ)$ este distributiv la dreapta. Putem scrie identitatea de distributivitate la dreapta $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$ în următoarea formă:

$$\text{partea stângă } (x \circ y) \circ z = 2(2x - y) - z = 4x - 2y - z;$$

$$\text{partea dreaptă } (x \circ z) \circ (y \circ z) = 2(2x - z) - (2y - z) = 4x - 2z - 2y + z = 4x - 2y - z.$$

Comparând părțile din dreapta ale acestor egalități, obținem rezultatul anunțat.

Demonstrația pentru distributivitatea de stânga este analoagă.

Identitatea $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$ primește forma:

$$\text{partea stângă } x \circ (y \circ z) = 2x - 2y + z;$$

$$\text{partea dreaptă } (x \circ y) \circ (x \circ z) = 2(2x - y) - (2x - z) = 4x - 2y - 2x + z = 2x - 2y + z.$$

Cazul 7. Avem $x \cdot (y \cdot a) = x - (y - a) = x - y + a$, $(x \cdot y) \cdot a = x - y - a$. □

Definiția 4.6.2. Cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu identitatea

$$yz \cdot yx = xz \tag{4.25}$$

se numește *cvazigrup Schweizer* ([90], p. 313).

Teorema 4.6.5. Orice cvazigrup Schweizer $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Neumann și invers.

Demonstrație. $\Rightarrow$ Vom folosi forma cvazigrupului Neumann (Teorema 4.6.3.). Atunci identitatea (4.25) capătă forma:

$$\text{partea stângă } yz \cdot yx = y - z - (y - x) = x - z;$$

$$\text{partea dreaptă } x \cdot z = x - z.$$

Atunci orice cvazigrup Schweizer este cvazigrup Neumann [92].

$\Leftarrow$ Vom demonstra, că din identitatea (4.25) urmează identitatea (4.19). Aici vom aplica identitatea Schweitzer în forma $yx \cdot yz = zx$. Dacă în această identitate facem substituția $x \rightarrow y \setminus x$, și aplicând identitatea $x \cdot (x \setminus y) = y$ (1.1) obținem următoarea identitate: $x \cdot yz = z \cdot (y \setminus x)$ sau, schimbând variabila $x \leftrightarrow z$ avem

$$x \cdot (y \setminus z) = z \cdot (yx). \quad (4.26)$$

Dacă în identitatea (4.26) punem $x = y, z \rightarrow x$ și folosim identitatea (1.1), atunci avem

$$y \cdot (y \setminus x) \stackrel{(1.1)}{=} x = x \cdot (yy). \quad (4.27)$$

Din identitatea (4.27) obținem, că elementul $e = yy$ este unitate la dreapta a cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Dacă punem $z = e$ în identitatea (4.25), atunci avem

$$y \cdot yx = x. \quad (4.28)$$

Dacă în identitatea (4.28) înlocuim partea stângă din (4.25) în forma $zx \cdot zy = yx$, atunci obținem identitatea lui Neumann în forma $x \cdot (zy \cdot zx) = y$.

Prin urmare, orice cvazigrup Neumann este cvazigrup Schweizer. $\square$

Corolarul 4.6.4. Orice cvazigrup Schweizer $(Q, \cdot)$ este izotop grupului abelian $(Q, +)$ de forma $x \cdot y = x - y$.

Demonstrație. Demonstrația rezultă din Teoremele 4.6.5. și 4.6.3. $\square$

4.7. Pseudoautorfisme, cvaziautomorfisme ale cvazigrupului Neumann

Cunoaștem că în teoria cvazigrupurilor un rol important îl joacă și noțiunea de autotopie care este dată în primul capitol. Alte permutări autotopice importante sunt pseudoautomorfisme ale cvazigrupului, introduse de către R. Bruck.

Teorema 4.7.1. În cvazigrupul $(Q, \cdot)$ cu unitate la dreapta e permutarea α a mulțimii Q va fi pseudoautomorfism la stânga, dacă și numai dacă există permutarea β , încât $T = (\alpha, \beta, \beta)$ este autotopie a cvazigrupului $(Q, \cdot)$.

Demonstrație. Fie (α, β, β) este o autotopie, atunci avem $\beta(xy) = \alpha x \cdot \beta y$. Dacă $y = e$, avem $\beta x = R_a \alpha x$, unde $\alpha = \beta e$. Am obținut autotopia $T = (\alpha, R_a \alpha, R_a \alpha)$, ceea ce înseamnă, că α este pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului cu companionul a .

Invers este evident. $\square$

Propoziția 4.7.1. Orice cvazigrup Neumann $(Q, \cdot)$ este G -cvazigrup la stânga, adică orice element $a \in Q$ este companionul căruiva pseudoautomorfism la stânga.

Demonstrație. Din [92] se cunoaște, că în cvazigrupul Neumann are loc:

$$x(yz \cdot yx) = z, xx = e, xe = x, x(y \cdot xz) = (x \cdot yx)z, {}^{-1}x = x, L_x^{-1} = L_x.$$

Prin urmare, în acest cvazigrup avem autotopia $T = (L_a R_a, L_a, L_a), \forall a \in Q$ și pe baza Teoremei 4.7.1 $\alpha = L_a R_a$ este pseudoautomorfism la stânga. Avem $L_a(xy) = \alpha x \cdot L_a y$. Dacă $y = e$, obținem $L_a x = R_a \alpha x, (\alpha, R_a \alpha, R_a \alpha)$. $\square$

Propoziția 4.7.2. În cvazigrupul Neumann $(Q, \cdot)$ orice cvaziautomorfism γ are forma

$$\gamma = R_a \gamma' = L_b \gamma'', \quad (4.29)$$

unde γ', γ'' sunt automorfisme ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$, iar b și a careva elemente din Q și invers, permutarea γ din (4.29) este cvaziautomorfism.

Demonstrație. Folosim rezultatele din [21], [92]:

1. În orice grup $(Q, \cdot)$ orice cvaziautomorfism γ are forma $\gamma = R_s \gamma_0 = L_k \gamma_1$, unde γ_1, γ_0 – automorfisme ale grupului $(Q, \cdot)$, k, s sunt elemente ale grupului.
2. Fie $(Q, \cdot)$ este cvazigrupul Neumann, atunci $(Q, \circ)$ este grup abelian, unde $x \circ y = x \cdot L_e y, x e = x, L_e$ este automorfism al cvazigrupului $(Q, \cdot)$ și grupului $(Q, \circ)$ și $x \circ L_e x = e, L_e = I, Ix = x^{-1}, e$ este unitate a grupului și unitate la dreapta a cvazigrupului.

Prin urmare putem scrie

$$x \circ y = x \cdot y^{-1}, xy = x \circ y^{-1}, y^{-1} = Iy. \quad (4.30)$$

Fie γ este cvaziautomorfism arbitrar al cvazigrupului Neumann $(Q, \cdot)$. Prin urmare există autotopia (α, β, γ) a cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Putem scrie $\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y, \gamma(x \circ y^{-1}) = \alpha x \circ I\beta y, \gamma(x \circ y) = \alpha x \circ I\beta Iy, (\alpha, I\beta I, \gamma)$ este autotopie a grupului $(Q, \circ)$ și γ este cvaziautomorfism al grupului $(Q, \circ)$. Așadar, am obținut

$$\gamma = R_s^\circ \gamma_0 = L_k^\circ \gamma_1, \quad (4.31)$$

unde R_s°, L_k° sunt translații ale grupului $(Q, \circ)$, iar γ_1, γ_0 sunt automorfisme ale grupului $(Q, \circ)$.

Ne convingem, că γ_1, γ_0 sunt automorfisme și ale cvazigrupului $(Q, \cdot)$. Într-adevăr, $\gamma_0(x \circ y) = \gamma_0 x \circ \gamma_0 y, \gamma_0(x \cdot Iy) = \gamma_0 x \cdot I\gamma_0 y, \gamma_0(xy) = \gamma_0 x \cdot I\gamma_0 Iy = \gamma_0 x \cdot \gamma_0 y$.

Acum aflăm R_s°, L_k° :

$$R_s^\circ x = x \circ s = x \cdot s^{-1} = R_{s^{-1}} x, R_s^\circ = R_{s^{-1}};$$

$$L_k^\circ x = k \circ x = k \cdot x^{-1} = L_k Ix, L_k^\circ = L_k I.$$

Din (4.31) urmează $\gamma = R_{s^{-1}} \gamma_0 = L_k I \gamma_1 = L_k \gamma'_0$. $\square$

Corolarul 4.7.1. Cvaziautomorfismul γ al cvazigrupului Neumann $(Q, \cdot)$ este automorfism dacă și numai dacă $\gamma e = e$, unde $x e = x$.

Într-adevăr, avem $\gamma e = R_{s^{-1}} \gamma_0 e = R_{s^{-1}} e = e s^{-1} = e$, de unde $s^{-1} = e, R_e = \varepsilon$, unde ε este permutare identică $\gamma = \gamma_0$.

4.8. G -proprietăți ale cvazigrupului Neumann

Analog ca și pentru cvazigrupurile tranzitive la stânga cercetăm G -proprietățile pentru cvazigrupurile Neumann. Definițiile necesare le avem în paragraful 4.5.

Observați, în cazul buclei, conceptul de A -pseudoautomorfism la dreapta din Definiția 4.5.2. este transformat în conceptul de pseudoautomorfism la stânga în sensul cărții lui V. D. Belousov ([21], p. 45) și este transformat în conceptul de pseudoautomorfism la dreapta în terminologia lui H. O. Pflugfelder [39]. Pentru cvazigrupurile, care au unitate la stânga (dreapta), rezultatul similar este demonstrat în ([91], Teorema 2).

Lema 4.8.1. *Cazul 1.* Autotopia cvazigrupului Neumann $(Q, \cdot)$ este A -pseudoautomorfism la dreapta dacă și numai dacă

$$a = -2b \quad (4.32)$$

pentru careva fixați $a, b \in Q$.

Cazul 2. Autotopia cvazigrupului Neumann $(Q, \cdot)$ este A -pseudoautomorfism la stânga dacă și numai dacă are loc egalitatea

$$b = 0 \quad (4.33)$$

pentru $b \in Q$ fixat.

Demonstrație. Dovada rezultă din Teorema 4.6.4. □

Teorema 4.8.1. Orice cvazigrup Neumann $(Q, \cdot)$ este GA -cvazigrup.

Demonstrație. Din Teoremele 4.6.4. și Lema 4.8.1. avem: orice A -pseudoautomorfism la dreapta al cvazigrupului Neumann $(Q, \cdot)$ are forma

$$(L_{-2b}^+, L_{-b}^+, L_{-b}^+) \theta, \quad (4.34)$$

pentru orice elemente $b \in Q$, unde L_{-2b}^+, L_{-b}^+ sunt translațiile grupului $(Q, +)$;

Orice A -pseudoautomorfism la stânga are forma

$$(L_a^+, \varepsilon, L_a^+) \theta. \quad (4.35)$$

pentru orice elemente $a \in Q$, unde L_a^+ este translația grupului $(Q, +)$.

Din egalitatea (4.34) și (4.35) rezultă, că grupurile ${}_3\Pi_r^A$ și ${}_3\Pi_l^A$ acționează tranzitiv pe mulțimea Q . Aceasta înseamnă, că orice cvazigrup Neumann $(Q, \cdot)$ este GA -cvazigrup. □

Observăm, că cvazigrupul Neumann este G -cvazigrup la stânga ([91], Teorema 3) în sensul lui V.D. Belousov [21]. Din ultimul rezultat rezultă, că cvazigrupul Neumann este GA -cvazigrup care nu este G -cvazigrup la dreapta în sensul lui V. D. Belousov.

4.9. Concluzii la capitolul 4

În Capitolul 4 s-au cercetat cvazigrupurile tranzitive la stânga și cvazigrupurile Neumann. Ambele clase sunt izotope grupului. S-au construit exemple de astfel de cvazigrupuri.

În baza cercetărilor efectuate în Capitolul 4 și a rezultatelor obținute putem formula următoarele concluzii:

1. Cercetând nucleele acestor cvazigrupuri am obținut: pentru cvazigrupurile tranzitive la stânga nucleul la stânga este subgrup normal al cvazigrupului $(Q, \cdot)$, care constă din elemente de ordin doi, care se află în centrul grupului $(Q, +)$; pentru cvazigrupurile Neumann nucleul la dreapta conține astfel de elemente ale mulțimii Q , încât $a = -a$ [93], [94].
2. Cercetând autotopiile și cvaziautomorfismele s-au obținut formele lor. Cercetând G -proprietățile acestor cvazigrupuri am obținut că orice cvazigrup Neumann $(Q, \cdot)$ este GA -cvazigrup; pentru cvazigrupul tranzitiv la stânga este dată condiția necesară și suficientă ca să fie GA -cvazigrup [95], [96], [97].
3. Rezultat important este că noțiunea de cvazigrup Neumann coincide cu cea de cvazigrup Schweizer:

Teorema 4.6.5. Orice cvazigrup Schweizer $(Q, \cdot)$ este cvazigrup Neumann și invers [98].

În acest capitol sunt realizate obiectivele, care se referă la cercetarea G -proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann și la cercetarea relațiilor acestor cvazigrupuri cu cvazigrupele Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.

Rezultatele obținute în acest capitol sunt publicate în [93], [95], [98], [96], [97], [94].

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Cercetările efectuate în teza de doctor “**Morfismele și proprietățile sistemelor algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang**” corespund în totalitate scopului și obiectivelor stabilite în introducere.

Clasa cvazigrupurilor conține cea a grupurilor (orice grup este un cvazigrup), domeniu care a cunoscut o evoluție extraordinară în secolul XX și continuă să se dezvolte rapid în prezent. Noțiunea de cvazigrup este mai generală ca cea de grup, deci se regăsește ca echivalent algebric într-un spectru mai larg de probleme ale mediului în care existăm și necesită abordări specifice, care lipsesc în teoria grupurilor.

Problema științifică importantă soluționată constă în aplicarea relațiilor de tipul morfismelor la cercetarea proprietăților și existenței unității în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang, ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele de cvazigrupuri studiate.

Rezultatele principale ale tezei sunt noi. Analizând rezultatele obținute putem evidenția următoarele concluzii generale:

1. S-a stabilit că orice WA -cvazigrup, care este un IP -cvazigrup, este un cvazigrup Moufang; S-a dovedit că în WA -cvazigrupul cu unitate la stânga permutările interne în raport cu unitatea sunt automorfisme ale cvazigrupului; pentru permutările interne în raport cu elementul $a \in Q$ s-a găsit condiția necesară și suficientă când sunt automorfisme [62];
2. Cercetând WIP -cvazigrupurile generalizate s-a găsit condiția când acest cvazigrup este izotop unei LIP -bucle. Presupunând, că orice buclă izotopă unui $OWIP$ -cvazigrup este o LIP -bucă, am obținut o identitate nouă în acest cvazigrup. A fost găsită relația dintre $OWIP$ -cvazigrupuri cu identitatea dată și cvazigrupurile Bol la stânga (la dreapta) [63];
3. S-a demonstrat că orice CI -grupoid la stânga este un CI -cvazigrup [64], [65];
4. A fost definită și studiată noțiunea de i -cvazigrup, relațiile lor cu alte clase de cvazigrupuri. S-a demonstrat că i -cvazigrupurile idempotente sunt cvazigrupuri Bol la stânga, Stein la dreapta, distributive la stânga [76], [77];
5. A fost soluționată problema existenței unității (la stânga, la dreapta, medie) în cvazigrupuri cu identitățile de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea Extra loops II, de F. Fenyves (1969). În lucrare este prezentat tabelul cu datele privind existența unității pentru fiecare dintre cele 60 de identități [78], [80];
6. S-a demonstrat că noțiunea de cvazigrup Neumann coincide cu cea de cvazigrup Schweizer [93], [95], [96], [98].

Rezultatele autoarei, care se referă la tema tezei sunt publicate în [64], [93], [95], [63], [76], [62], [65], [96], [78], [98], [77], [80], [94], [97], [66], [80], [78].

Teza propusă spre susținere utilizează relații de tip morfisme la cercetarea proprietăților și existenței unităților în sisteme algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang, ce conduc la descrierea noilor relații importante dintre clasele de cvazigrupuri, conține soluționarea completă a problemei existenței unității în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang.

Recomandări:

1. Soluționarea problemei existenței unității pentru fiecare dintre cele 60 de cvazigrupuri ce satisfac identități de tip Bol-Moufang poate fi utilizată în cercetarea cvazigrupurilor cu identități de tip Bol-Moufang.
2. Rezultatul care demonstrează că orice CI -grupoid este un CI -cvazigrup deschide noi posibilități în cercetarea CI -cvazigrupurilor.
3. În teză sunt definite două clase noi de cvazigrupuri: i -cvazigrupurile și $OWIP$ -cvazigrupurile. În lucrare sunt cercetate unele proprietăți ale acestor clase de cvazigrupuri, însă teoria generală a lor urmează a fi elaborată.
4. Rezultatele obținute pot fi aplicate la elaborarea unor cursuri opționale pentru masteranzi și doctoranzi.

BIBLIOGRAFIE

- [1] F. FENYVES, Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type, *Publ. Math. Debrecen*, no. 16, pp. 187-192, 1969. ISSN 0033-3883
- [2] R. MOUFANG, Zur Structur von Alternativ Korpern, *Math. Ann.*, vol. 110, pp. 416-430, 1935. ISSN 0025-5831
- [3] H. O. PFLUGFELDER, Historical notes on loop theory, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, vol. 41, no. 2, pp. 359-370, 2000. ISSN 0010-2628
- [4] А. К. СУШКЕВИЧ, Теория обобщенных групп, Киев: ОНТИ НКТП, 1937. 23-5-4
- [5] A. A. ALBERT, Quasigroups, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 54, no. 1, pp. 507-519, 1943. ISSN 0002-9947
- [6] A. A. ALBERT, Quaisgroups. II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 55, pp. 401-419, 1944. ISSN 0002-9947
- [7] D. G. MURDOCH, Structure of abelian quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 49, pp. 392-409, 1941. ISSN 0002-9947
- [8] K. TOYODA, On axioms of linear functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, vol. 17, pp. 221-227, 1941. ISSN 03609-9846
- [9] R. H. BRUCK, Some results in the theory of quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 55, pp. 19-52, 1944. ISSN 0002-9947
- [10] R. BAER, Nets and groups, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 46, pp. 110-141, 1939. ISSN 0002-9947
- [11] R. BAER, Nets and groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 47, no. 2, pp. 435-439, 1940. ISSN 0002-9947
- [12] K. KISHEN, On the construction of latin and hyper-graceo-latin cubes and hypercubes, *J. Ind. Soc. Agric. Statist.*, no. 2, pp. 20-48, 1950. ISSN 0019-6363

- [13] O. CHEIN, H. PFLUGFELDER and J. SMITH, Quasigroups and loops: Theory and applications, *Helderman Verlag*, 1990. ISBN-10: 3885380080
- [14] A. A. UNGAR, The hyperbolic triangle centroid, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, vol. 45, no. 2(2004), pp. 355-370. ISSN 0010-2628
- [15] A. I. NESTEROV and L. V. SABININ, Non-associative geometry and discrete structure of spacetime, *Math. Univ. Carolin.*, vol. 41, no. 2, pp. 347-357, 2000. ISSN 0010-2628
- [16] J. D. H. SMITH, Loop transversals to linear codes, *J. Combin. Inform. System Sci.*, vol. 17, pp. 1-8, 1992. ISSN 0250-9628
- [17] J. DENES and A. D. KEEDWELL, Latin squares and their applications, *Akademiai Kiado, Budapest*, 1974. ISBN 9780122093500
- [18] R. ARTZY, On loops with a special property, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 6, pp. 448-453, 1955. ISSN 0002-9939
- [19] В. Д. БЕЛОУСОВ и Б. В. ЦУРКАН, Скрещенно-обратимые квазигруппы (СИ-квазигруппы), *Изв. Выш. Учебн. Завед. Математика.*, т. 82(3), pp. 21-27, 1969. 0021-3446 (print)
- [20] R. H. BRUCK, Some theorems on Moufang loops, *Math. Z.*, vol. 73, pp. 59-78, 1960. ISSN 0025-5874
- [21] В. Д. БЕЛОУСОВ, Основы теории квазигрупп и луп, Москва: Наука, 1967. 449-66
- [22] K. KUNEN, Quasigroups, loops and associative laws, *J. Algebra*, vol. 185(1), pp. 194-204, 1996. ISSN (Print) 0021-8693
- [23] S. M. GAGOLA, Hall's theorem for Moufang loops, *J. Algebra*, vol. 323(12), pp. 3252-3262, 2010. ISSN (Print) 0021-8693
- [24] S. M. GAGOLA, How and why Moufang loops behave like groups, *Quasigroups Related Systems*, vol. 19(1), pp. 1-22, 2011. ISSN (Print) 1561-2848
- [25] J. D. PHILLIPS and P. VOJTECHOVSKY, The varieties of loops of Bol-Moufang type, *Algebra Universalis*, vol. 54(3), pp. 259-271, 2005. ISSN 0002-5240

- [26] B. COTE, B. HARVILL, M. HUH and A. KIRCHMAN, Classification of loops of generalized Bol-Moufang type, *Quasigroups Related Systems*, vol. 19(2), pp. 193-206, 2011. ISSN (Print) 1561-2848
- [27] J. D. PHILLIPS and P. J. M. VOJTĚCHOVSKÝ, The varieties of quasigroups of Bol-Moufang type: an equational reasoning approach, *J. Algebra*, vol. 293, no. 1, pp. 17-33, 2005. ISSN (Print) 0021-8693
- [28] M. K. KINYON, J. D. PHILLIPS and P. J. M. VOJTĚCHOVSKÝ, Loops of Bol-Moufang type with a subgroup of index two, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, no. 3, pp. 71-87, 2005. ISSN 1024-7696
- [29] R. AKHTAR, A. ARP, M. KAMINSKI, J. VAN EXEL, D. VERNON and C. WASHINGTON, The varieties of Bol-Moufang quasigroups defined by a single operation, *Quasigroups Related Systems*, vol. 20(1), pp. 1-10, 2012. ISSN (Print) 1561-2848
- [30] V. I. URSU, On the pre-ordering of automorphic loops and Moufang loops, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, vol. 64, no. 1, pp. 49-55, 2019. ISSN 0035-3965
- [31] P. N. SYRBU, On loops with universal elasticity, *Quasigroups Related Systems*, no. 3, pp. 41-54, 1996. ISSN (Print) 1561-2848
- [32] W. A. DUDEK and R. A. MONZO, The structure of idempotent translatable quasigroups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 43, no. 2, pp. 1603-1621, 2020. ISSN 0126-6705
- [33] S. K. CHATTERJEA, On Ward quasigroups, *Pure Math. Manuscript*, no. 6, pp. 31-34, 1987.
- [34] J. DENES and A. D. KEEDWELL, Some applications of non-associative algebraic systems in cryptology, *P.U.M.A.*, vol. 12(2), pp. 147-195, 2002. ISSN 1218-4586
- [35] G. HOROSH, V. SHCHERBACOV, A. TCACHENCO and T. YATSKO, On some groupoids with Bol-Moufang type identities, 2019. [Online]. Available: [arxiv.org.1904.v1](https://arxiv.org/abs/1904.01904).
- [36] V. I. IZBASH and V. SHCHERBACOV, On quasigroups with Moufang identity, in *In Abstracts of The Third International Conference in memory of M.I. Kargapolov (1928-1976)*, Krasnoyarsk, Russian Federation, 1993.

- [37] T. EVANS, Homomorphisms of non-associative systems, *J. London Math. Soc.*, vol. 24, pp. 254-260, 1949. ISSN 0024-6107
- [38] R. H. BRUCK, A Survey of Binary Systems, *Springer Verlag*, 1971. ISBN 978-3-662-43119-1
- [39] H. O. PFLUGFELDER, Quasigroups and Loops: Introduction, Berlin: Heldermann Verlag, 1990. ISBN 3-88538-007-2
- [40] V. A. SHCHERBACOV, Elements of Quasigroup Theory and Applications, Boca Raton: CRC Press, 2017. ISBN 9781315120058
- [41] G. BIRKHOFF, Lattice theory, *AMS Colloquium Publications*, p. 423, 1967. ISSN 0065-9258 (print)
- [42] S. K. STEIN, On the foundations of quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 85, pp. 228-256, 1957. ISSN: 0002-9947 (print)
- [43] P. SÂRBU, Teoria quasigrupurilor. Introducere, Chişinău, 2014. ISBN 978-94-017-9136-6
- [44] В. Д. БЕЛОУСОВ , *Элементы теории квазигрупп*, Кишинев: Кишиневский госуниверситет им. В. И. Ленина, 1981.
- [45] В. М. ГАЛКИН, Квазигруппы, *Алгебра, Топология, Геометрия*, т. 26, pp. 3-44, 1988.
- [46] K. KUNEN, Moufang quasigroups, *J. Algebra*, vol. 183, pp. 231-234, 1996. ISSN 0021-8693
- [47] V. A. SHCHERBACOV and V. I. IZBASH, On quasigroups with Moufang identity, *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold., Mat.*, no. (2), pp. 109-116, 1998. ISSN 1024-7696
- [48] T. G. JAYEOLA, E. ILOJIDE, M. O. OLATINWO and F. SMARANDACHE, On the Classification of BolMoufang Type of Some Varieties of Quasi Neutrosophic Triplet Loop (Fenyves BCI-Algebras), in *Symmetry*, 2018. ISSN 2073-8994
- [49] Т. КЕРКА, Quasigroups which satisfy certain generalized forms of the Abelian identity, *Casopis Pest. Mat.*, vol. 100, pp. 46-60, 1975. ISSN (Print) 0528-2195

- [50] Т. КЕРКА, A note on WA-quasigroups, *Acta Univ. Carolin. Math. Phis.*, vol. 19(2), pp. 61-62, 1978. ISSN 0001-7140
- [51] V. A. SHCHERBACOV, On the structure of left and right F-, SM- and E-quasigroups, *J. Gen. Lie Theory Appl.*, vol. 3, no. 3, pp. 197-259, 2009. ISSN 1736-5279
- [52] К. К. ЩУКИН, Действие группы на квазигруппе, Кишинев: Государственный университет, 1985.
- [53] А. М. ЧЕБАН, WA-квазигруппы, *Вестник Приднестровского Унив.*, № 7, pp. 31-34, 1997. ISSN: 1857-1174
- [54] И. А. ФЛОРЯ, Квазигруппы Бола, *Исследования по общей алгебре*, pp. 136-154, 1965.
- [55] В. Д. БЕЛОУСОВ, Производные операции и ассоциаторы в лупах, *Математический сборник*, т. 1, № 45(87), pp. 51-70, 1958. ISSN: 0368-8666 (print)
- [56] В. Д. БЕЛОУСОВ, Регулярные подстановки в квазигруппах, *Уч. зап. Бельцкого пед. ин-та.*, № 1, pp. 39-49, 1958.
- [57] G. N. GARRISON, Quasigroups, *Ann. Math.*, vol. 41, pp. 474-487, 1940. ISSN 0003-486X
- [58] А. С. БАСАРАБ, Лупы с слабым свойством обратимости, докт. дис. ИМ АН МССР, 1968.
- [59] M. OSBORN, Loops with the weak inverse property, *Pacif. J. Math.*, vol. 10, no. 1, pp. 295-304, 1960. ISSN 0030-8730
- [60] Н. Н. ДИДУРИК, Обобщенные WIP-квазигруппы, *Вестник Приднестровского Университета*, № 3 (45), pp. 68-72, 2013. ISSN: 1857-1174
- [61] A. D. KEEDWELL, Crossed-inverse quasigroups with long inverse cycles and applications to cryptography, *Australas. J. Combin.*, vol. 20, pp. 241-250, 1999. ISSN 1034-4942
- [62] N. N. DIDURIK and I. A. FLORYA, A note on left loops with WA-property, *Quasigroups and Related Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 186-196, 2016. ISSN (Print) 1561-2848

- [63] N. DIDURIK, Generalized WIP-quasigroups, in *The Fourth Conference of Mathematicians of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4*, Chişinău, 2017, pp. 67-70. ISBN 978-9975-71-915-5
- [64] N. DIDURIK, CI-quasigrupuri, în "*Tendențe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători*": *Conferința Științifică a Doctoranzilor*, Chişinău, 2017, pp. 25-29. ISBN 978-9975-108-66-9
- [65] N. N. DIDURIK and V. A. SHCHERBACOV, On definition of CI-quasigroup, *Romai Journal*, vol. 13, no. 2, pp. 55-58, 2017. ISSN (Print) 1841-5512
- [66] N. DIDURIK and V. SCHERBACOV, On definition of CI-quasigroup, in *The 25rd Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017*, Iași, 2017, p. 87. ISSN: 2038-0909
- [67] И. А. ФЛОРЕА, Квазигруппы с непустым дистрибутантом, *Исследования по общей алгебре*, 1968.
- [68] И. А. ФЛОРЕА и Н. Н. КРОЙТОР, Квазигруппы Стейна, *Вестник Приднестровского Университета. Серия физико-математических и технических наук*, № 3(39), pp. 63-71, 2011. ISSN: 1857-1174
- [69] В. Д. БЕЛОУСОВ и И. А. ФЛОРЕА, О леводистрибутивных квазигруппах, *Известия АН МССР*, № 7, 1965.
- [70] В. Д. БЕЛОУСОВ и И. А. ФЛОРЕА, Квазигруппы со свойством обратимости, *Известия Академии Наук МССР*, № 4, pp. 3-17, 1966.
- [71] W. MCCUNE, "Prover 9," University of New Mexico, 2007.
- [72] W. MCCUNE, "Mace 4," University of New Mexico, 2007.
- [73] А. Г. КУРОШ, Теория групп, Москва: Наука, 1967. ISBN 978-5-9221-1349-6
- [74] O. CHEIN and H. ORLIK-PFLUGFELDER, The smallest Moufang loop, *Arch. Math. (Basel)*, vol. 22, pp. 573-576, 1971. ISSN 0003-889X

- [75] M. K. KINYON and K. KUNEN, The structure of extra loops, *Quasigroups Related Systems*, vol. 12, pp. 39-60, 2004. ISSN (Print) 1561-2848
- [76] N. N. DIDURIK and I. A. FLORJA, Some properties of i-quasigroups, *Quasigroups and Related Systems*, vol. 28, no. 2, pp. 183-194, 2020. ISSN (Print) 1561-2848
- [77] N. DIDURIK, i-Quasigroups, in *International conference Mathematics&Information technologies: research and education, MITRE-2019*, Chişinău, 2019, pp. 26-27.
- [78] N. DIDURIK and V. A. SHCHERBACOV, Units in quasigroups with non-classical Bol-Moufang type identities, in *The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55)*, Chişinău, 2019, pp. 57-60.
- [79] V. SCHERBACOV and N. DIDURIK, Units in quasigroups with Bol-Moufang type of identities, in *Conference Budapest University of Technology and Economics, LOOPS-2019*, Hungary, 2019, p.49.
- [80] N. DIDURIK and V. SHCHERBACOV, Units in quasigroups with classical Bol-Moufang type identities, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, vol. 61, no. 4, pp. 427-435, 2020. ISSN 0010-2628
- [81] И. А. ФЛОРЯ, Связь левотранзитивных квазигрупп с квазигруппами Бола, *Сети и квазигруппы*, pp. 203-216, 1976.
- [82] J. M. CARDOSO and C. P. DA SILVA, On Ward quasigroups, *An. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza" Sect. I a Mat. (N.S.)*, vol. 24(2), pp. 231-233, 1978. ISSN: print 1221-8421
- [83] K. W. JOHNSON and P. VOJTECHOVSKY, Right division in groups, Dedekind-Frobenius group, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 75, pp. 121-136, 2005. ISSN 0025-5858
- [84] M. POLONIJO, A note on Ward quasigroups, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Ia,si Sect., I a Mat.*, vol. 32(2), pp. 5-10, 1986. ISSN: print 1221-8421
- [85] M. WARD, Postulates for the inverse operations in a group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 32(3), pp. 520-526, 1930. ISSN 0002-9947

- [86] G. FROBENIUS, *Über Gruppencharaktere*, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, pp. 985-1021, 1896.
- [87] М. И. КАРГАПОЛОВ и М. Ю. МЕРЗЛЯКОВ, *Основы теории групп*, Москва: Наука, 1977.
- [88] G. HIGMAN and B. H. NEUMANN, Groups as groupoids with one law, *Publ. Math. Debrecen*, no. 2, pp. 215-221, 1952. ISSN (Print) 0033-3883
- [89] A. SADE, Quasigroupes ob'eissant 'a certaines lois, *Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul*, vol. 22, pp. 151-184, 1957. ISSN 0367-7745
- [90] A. A. GVARAMIYA and M. M. GLUKHOV, A solution of the fundamental algorithmic problems in certain classes of quasigroups with identities, *Sibirsk. Mat. Zh.*, no. 10, pp. 297-317, 1969. ISSN 0037-4474
- [91] Н. Н. КРОЙТОР, Псевдоавтоморфизмы и квазиавтоморфизмы квазигрупп Неймана, *Вестник Приднестровского Университета*, № 32(3), pp. 44-47, 2008. ISSN: 1857-1174
- [92] Н. Н. КРОЙТОР, Квазигруппы Неймана, *Вестник Приднестровского Университета*, № 29(3), pp. 92-93, 2007. ISSN: 1857-1174
- [93] N. DIDURIC, Despre unele proprietăți ale quasigrupurilor cu identitatea lui Neumann, in *Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători. Conferința Științifică a Doctoranzilor*, Chișinău, 2018, pp. 11-14. ISBN 978-9975-108-66-9
- [94] N. DIDURIK, On left-transitive quasigroups, in *The 25rd Conferenca on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017*, Iași, 2017, p. 86.
- [95] N. DIDURIK, A-pseudo-automorfismele quasigrupurilor tranzitive la stânga, in *International conference on mathematics, informathics and information tehnologies dedicated to the illustrious scietist Valentin Belousov*, Bălți, 2017, pp.39-40. ISBN 978-9975-3214-7-1
- [96] N. DIDURIK, Some properties of Neumann quasigroups, in *The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018*, Chișinău, 2018, p.93.

- [97] N. DIDURIK, Some properties of left-transitive quasigroups, *Buletinul academiei de științe a republicii Moldova. Matematica*, vol. 87, no. 2, pp. 85-94, 2018. ISSN: 1024-7696
- [98] N. DIDURIK, Some properties of Neumann quasigroups, 2018. [Online]. Available: <https://arxiv.org/pdf/1809.07095.pdf>.

DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnatul, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.

Diduric Natalia

24.05.2021

CV-ul AUTOAREI

Nume: Diduric

Prenume: Natalia

Data nașterii: 13.01.1983

Cetățenia: Republica Moldova

Studii: superioare.

2000-2005: Studii superioare de licență. Universitatea de Stat Nistreană în num. lui T. G. Șevcenco din Tiraspol, Facultatea de Fizică și Matematică, specialitatea Matematica.

2016-2020: Studii de doctorat la specialitatea 111.03–Logică matematică, Algebră și Teoria Numerelor la Institutul de Matematică și Informatică “Vladimir Andrunachievici” al Academiei de Științe a Moldovei.

Activitatea profesională: lector universitar la departamentul Algebra, geometria și MPM al Universității de Stat Nistrene în num. lui T. G. Șevcenco din Tiraspol și cercetător științific în laboratorul Algebră și aplicațiile sale.

Domeniile de cercetare științifică: Teoria cvazigrupurilor.

Participări la foruri științifice (naționale și internaționale):

1. The 25rd Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017, September 14–17, 2017, Iași.
2. „Tendențe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători”: Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a 6-a, Chișinău, 15 iunie 2017.
3. The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4, June 28 – July 2, 2017, Chișinău.
4. Ședința specială a seminarului științific “Algebra și Logica Matematică”, consacrată prof. Valentin Belousov, Chișinău, 2018.
5. International conference on mathematics, informathics and information technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, 19-21 april, 2018 Bălți.
6. The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018, September 20-23, 2018, Chișinău.

7. “Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători”: Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a VII-a Chișinău, 15 iunie 2018.
8. Ședința specială a seminarului științific “Algebra și Logica Matematică”, consacrată prof. Valentin Belousov, Chișinău, 2019.
9. International conference Mathematics&Information technologies: research and education, MITRE-2019 Moldova State University, June 24, 2019, Chișinău.
10. LOOPS 2019 Conference Budapest University of Technology and Economics, July 7-July 11, 2019, Hungary.
11. The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55), September 30, 2019.

Lucrări științifice publicate:

Articole în reviste cotate SCOPUS sau de categoria B:

1. Didurik N., Florja I., *A note on left loops with WA-property*. Quasigroups and Related Systems, QRS v.24, n.2 (36), Institutul de Matematica si Informatica, Chisinau, 2016. pp. 186-196,
2. N.N. Didurik, V.A. Shcherbacov, *On definition of CI-quasigroup*. Romai Journal v.13, no.2(2017), pp. 55–58,
3. Didurik N., *Some properties of left-transitive quasigroups*. Buletinul academiei de științe a republicii Moldova. Matematica, 2(87), 2018, pp. 85–94,
4. Didurik N.N. and Florja I.A., *Some properties of i-quasigroups*. Quasigroups and Related Systems, vol. 28(2020) No. 2, pp. 183-194,
5. N. Didurik, V. Shcherbacov, *Units in quasigroups with classical Bol-Moufang type identities*. Comment. Math. Univ. Carolin. 61, 4 (2020), pp. 427-435.

Alte publicații: 1 articol pe arXiv.org, 10 teze la conferințe internaționale.

Cunoașterea limbilor: româna – limbă maternă, rusa – avansat, spaniola – mediu

Date de contact: tel. mob. 068578880; e-mail: natnikkr83@mail.ru; adresa: or. Tiraspol, str. 25 Octombrie, 128, MD-3300, Moldova.