MINISTERUL EDUCAŢIEI, CULTURII ŞI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA, INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ ”VLADIMIR ANDRUNACHIEVICI”

Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 517.925

TURUTA SILVIA

SISTEME DIFERENŢIALE CUBICE CU SINGULARITĂŢI REZONANTE

111.02 – ECUAŢII DIFERENŢIALE

Rezumatul
tezei de doctor în ştiinţe matematice

CHIŞINĂU, 2021

Teza a fost elaborată în laboratorul Ecuaţii Diferenţiale al Institutului de Matematică şi Informatică "V. Andrunachievici".

Conducători ştiinţifici: Şubă Alexandru, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar; **Romanovski Valery,** doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar (Slovenia).

Referenţi oficiali:

1. **Cozma Dumitru,** doctor habilitat în ştiinţe matematice, conf. univ., Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chişinău);

2. **Pricop Victor,** doctor în ştiinţe matematice, conf. univ., Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă".

Membri ai Consiliului ştiinţific specializat:

1. **Perjan Andrei,** dr.hab. în şt. fiz.-matem., prof. univ., Universitatea de Stat din Moldova, preşedinte al C.Ş.S.;

2. **Orlov Victor,** dr. în şt. fiz.-matem, Universitatea Tehnică a Moldovei, secretar ştiinţific al C.Ş.S.;

3. **Neagu Vasile,** dr.hab. în şt. fiz.-matem., prof. univ., Universitatea de Stat din Moldova;

4. **Popa Mihail,** dr.hab. în şt. fiz.-matem., prof. univ., Institutul de Matematică şi Informatică "V. Andrunachievici";

5. **Vulpe Nicolae,** dr.hab. în şt. fiz.-matem., prof. univ., m.c. al AŞM, Institutul de Matematică şi Informatică "V. Andrunachievici".

Susţinerea tezei va avea loc la 23 iulie 2021, ora 15^{00}, în şedinţa Consiliului ştiinţific specializat D 111.02-21-12 din cadrul Institutului de Matematică şi Informatică "V. Andrunachievici" (str. Academiei 5, sala 340, Chişinău, MD-2028, Republica Moldova).

Teza de doctor şi rezumatul pot fi consultate la Biblioteca Ştiinţifică Centrală "A. Lupan" a AŞM şi pe pagina web a ANACEC (www.cnaa.md).

Rezumatul a fost expediat la ________________ 2021.

Secretar ştiinţific al C.Ş.S., Orlov Victor, dr.

Conducători ştiinţifici:

Şubă Alexandru, dr. hab., prof. univ.

Romanovski Valery, dr. hab., prof. univ.

Autor Turuta Silvia

CUPRINS

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII 4

CONŢINUTUL TEZEI 8

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI 25

LISTA PUBLICAŢIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI 26

ADNOTARE (română, rusă, engleză)...29

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Teza de faţă ţine de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. În ea sunt studiate sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale ce au singularităţi rezonante şi drepte invariante.

Actualitatea temei. O bună parte din problemele importante ale fizicii, chimiei, ingineriei impun în formularea lor matematică calcularea unei funcţii care, împreună cu derivatele sale, satisface o relaţie dată. Acest tip de relaţii se numesc ecuaţii diferenţiale. Deoarece majoritatea fenomenelor şi proceselor din întreaga lume se modelează cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale, se justifică necesitatea dezvoltării teoriei acestora, precum şi necesitatea de a le clasifica. Un exemplu concret reprezintă sistemele de ecuaţii diferenţiale de tip Lotka-Volterra. Aceste sisteme au două drepte invariante şi descriu, odată cu trecerea timpului, interacţiunea dintre specii. La fel, ele descriu decurgerea unor reacţii chimice, interacţiunea gazelor din mediile subterane ş.a.

Evoluţia ecuaţiilor diferenţiale a fost în strânsă legătură cu dezvoltarea calculului integral. Au fost determinate familii de ecuaţii diferenţiale rezolvabile în cuadraturi (integrări). Isac Newton, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli şi Daniel Bernoulli se consideră primii matematicieni care au adus contribuţii notabile la dezvoltarea ecuaţiilor diferenţiale. Urmează J. Riccati, L. Euler, J. Lagrange. Secolul al XIX-lea se caracterizează prin cercetarea problemei de existenţă, unicitate şi comportare a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale. A. Cauchy, R. Lipschitz şi G. Peano au impus metoda liniilor poligonale (utilizată anterior şi de Euler) ca metodă eficientă de demonstrare a existenţei locale a soluţiei unei ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale.

Referitor la sistemele de ecuaţii diferenţiale, principalele probleme ale teoriei calitative a acestora constau în determinarea comportării curbelor integrale în vecinătatea punctelor singulare; în delimitarea centrului de focar; în existenţa, numărul şi poziţia reciprocă a ciclurilor limită; în calcularea integralelor prime.

Privitor la problema delimitării centrului de focar, pentru sistemele pătratice şi cubice, putem afirma că a fost tratată în lucrările lui H. Dulac, W. Kapteyn, M. Frommer, N. Saharnicov, I. Kukles, C. Sibirschi, A. Sadovskii, K. Malkin, I. Shirov, D. Boularas, M. Popa, N. Vulpe, D. Cozma, A. Şubă, H. Żołądek, R. Kooij şi alţii.

În lucrările matematicienilor A. Şubă şi D. Cozma este cercetată problema centrului pentru sistemul diferenţial cubic cu drepte invariante. În ele a fost complet rezolvată problema dată pentru sistemele cubice cu cel puţin trei drepte invariante afine distincte. Rezultate generale ce ţin de problema centrului pentru sistemele diferenţiale polinomiale se cunosc doar acele obţinute de H. Poincaré, A. Lyapunov, M. Popa şi V. Pricop. Primii doi echivalează problema enunţată cu problema de integrabilitate, iar ultimii doi evaluează numărul de mărimi focale necesare soluţionării ei.

Este cunoscut, că în partea finită a planului fazic, sistemul cubic nedegenerat de ecuaţii diferenţiale are cel mult opt drepte invariante. Din punct de vedere al teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale sistemele cubice cu şapte şi cu opt drepte invariante reale şi distincte au fost cercetate de către R. Lyubimova. J. Llibre şi N. Vulpe au cercetat sistemele diferenţiale cubice cu drepte invariante luând în considerare multiplicitatea lor. Sistemele cubice cu drepte invariante afine de multiplicitate paralelă totală egală cu şapte au fost studiate şi clasificate de A. Şubă, V. Repeşco şi V. Puţuntică, iar sistemele cubice ce conţin drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu cinci sau cu şase, şi al căror infinit este degenerat - de către A. Şubă şi V. Repeşco. Studiul calitativ al sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu drepte invariante de multiplicitate totală opt, considerând şi dreapta de la infinit, a fost efectuat de către N. Vulpe şi C. Bujac, iar pentru sistemele cubice cu şase drepte invariante reale de două şi de trei direcţii au fost obţinute formele canonice şi portretele fazice de V. Puţuntică şi A. Şubă.

Pentru sistemul cubic problema coexistenţei a dreptelor invariante distincte şi a punctelor critice de tip centru a fost studiată de către A. Şubă, D. Cozma ş.a.

În teza de faţă sunt continuate cercetările efectuate de A. Şubă şi D. Cozma referitoare la rezolvarea problemei de integrabilitate (sau, în cazul dat, a problemei centrului) a sistemelor cu puncte critice $(1 : -1)$ rezonante şi cu patru drepte invariante. La ei s-a presupus că dreptele sunt distincte, iar despre linia de la infinit nu se spune nimic. În lucrarea prezentă se completează investigaţiile profesorilor A. Şubă şi D. Cozma până la soluţionarea completă a problemei centrului pentru sistemele cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci. Mai exact, în teză problema centrului este rezolvată în cazurile când:

A) multiplicitatea totală a dreptelor invariante afine este patru şi cel puţin una dintre aceste drepte are multiplicitatea mai mare ca unu;

B) multiplicitatea dreptei de la infinit este mai mare ca unu, iar aceasta, împreună cu dreptele afine invariante, au multiplicitatea totală egală cu cinci.

Privitor la singularităţile $(1 : -2)$ rezonante în lucrarea de faţă

C) sunt studiate la integrabilitate sistemele cubice de tip Lotka-Volterra ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 6,7 (ţinându-se cont şi de dreapta de la infinit).

Scopul şi obiectivele lucrării. Scopul principal al lucrării constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu singularităţi rezonante ($(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$)

ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 4, 5, 6, 7 şi rezolvarea problemei de integrabilitate a acestora.

Realizarea acestui scop a fost însoţită de următoarele obiective:

– determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante reale pentru sistemul cubic cu singularităţi $(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$ rezonante;

– determinarea multiplicităţii maximale a liniei de la infinit pentru sistemul cubic cu singularităţi $(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$ rezonante;

– clasificarea sistemelor cubice cu singularităţi $(1 : -1)$ rezonante ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 4, 5 (inclusiv dreapta de la infinit);

– clasificarea sistemelor cubice de tip Lotka-Volterra cu singularităţi $(1 : -2)$ rezonante ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 6, 7 (inclusiv dreapta de la infinit);

– rezolvarea în clasele sistemelor cubice obţinute a problemei de integrabilitate.

Metodologia cercetării ştiinţifice. În lucrare au fost aplicate metodele teoriei calitative a sistemelor de ecuaţii diferenţiale şi metodele algebrei de calcul computaţional. Problema centrului pentru sistemele diferenţiale cubice ce posedă drepte invariante este cercetată prin folosirea metodei de integrabilitate Darboux.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. În această lucrare pentru prima dată sunt examinate cazurile când printre dreptele invariante afine ale sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu singularităţi rezonante sunt şi drepte multiple şi, totodată, se ia în considerare şi multiplicitatea liniei de la infinit. Investigaţiile s-au soldat cu următoarele rezultate:

– a fost determinată multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine şi a liniei de la infinit pentru sistemele cubice cu singularităţi (1:-1) şi (1:-2) rezonante;

– a fost efectuată clasificarea sistemelor cubice cu singularităţi (1:-1) şi (1:-2) rezonante şi o dreaptă invariantă reală sau linia de la infinit, de multiplicitate maximală;

– a fost efectuată clasificarea sistemelor cubice cu singularităţi (1:-1) şi (1:-2) rezonante ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 4, 5, 6, 7.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în rezolvarea completă a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci şi a problemei de clasificare şi integrabilitate a sistemelor cubice de tip Lotka-Volterra cu singularităţi $(1 : -2)$ rezonante şi cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală şase şi şapte.

Semnificaţia teoretică. În această teză pentru prima dată s-a formulat şi s-a rezolvat problema de determinare în clasa sistemelor diferenţiale cubice cu singularităţi $(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$ rezonante a multiplicităţii maximale a unei drepte invariante afine, a dreptei de la infinit; la fel s-a efectuat clasificarea acestor sisteme, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al sistemelor cubice ce posedă drepte invariante.

Valoarea aplicativă a lucrării. Această lucrare poartă un caracter teoretic, însă ea are şi largi perspective aplicative prin intersecţia sa cu familia de sisteme diferenţiale de tip Lotka-Volterra. Rezultatele obţinute pot fi incluse în programele cursurilor opţionale ţinute studenţilor şi masteranzilor facultăţilor de matematică şi fizică. La fel, ele se vor lua în considerare şi în studiul de mai departe al sistemelor diferenţiale polinomiale.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere:

– determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante reale pentru sistemul cubic cu singularităţi $(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$ rezonante;

– calcularea multiplicităţii maximale a dreptei de la infinit pentru sistemul cubic cu singularităţi $(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$ rezonante;

– clasificarea sistemelor cubice cu singularităţi $(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$ rezonante şi cu drepte invariante afine de multiplicitate totală 4, 6;

– clasificarea sistemelor cubice cu singularităţi $(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$ rezonante şi cu drepte invariante de multiplicitate totală 5, 7, luând în considerare şi dreapta de la infinit;

– soluţionarea completă a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci;

– rezolvarea problemei de integrabilitate pentru sistemele diferenţiale cubice de tip Lotka-Volterra cu singularităţi $(1 : -2)$ rezonante şi cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală şase şi şapte.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice.

Rezultatele obţinute în teză pot fi aplicate:

- la studierea sistemelor diferenţiale cubice ce posedă drepte invariante;

- la cercetarea anumitor modele matematice ce guvernează unele procese chimice, fizice, biologice, sociale ş.a.;

- ca subiecte pentru teme de teze de masterat şi pot servi ca bază a unor cursuri opţionale pentru masteranzi şi studenţii specialităţilor universitare de matematică.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele principale ale lucrării au fost prezentate în cadrul multor forumuri ştiinţifice: Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor: Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători, 2015, 2016, Chişinău; International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), 2015, 2016, 2019, Chişinău; Conferinţa ştiinţifică naţională cu participare internaţională, Învăţământul superior din Republica Moldova la 85 ani, 2015, Chişinău; Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), 2016 (Craiova), 2017 (Iaşi), 2019 (Târgovişte), România; The International Scientific Conferences: "Differential-Functional Equations and their Application" şi "Modern problems of Differential Equations and their application", 2016, 2020, Chernivtsi, Ukraine; Conferinţa Ştiinţifică internaţională: Perspectivele şi problemele integrării în Spaţiul European al Cercetării şi Educaţiei, Universitatea de Stat Bogdan Petriceicu Haşdeu din Cahul, 2019, Cahul, Republica Moldova; The Fifth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova IMCS-55, 2019, Chişinău; şi în cadrul seminarelor: seminarul dedicat profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică şi Informatică "V. Andrunachievici", 2016, Chişinău; seminarul "Ecuaţii Diferenţiale şi Algebre" din cadrul Universităţii de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chişinău), 2016, 2017, 2018, 2019, 2020;

Publicaţii la tema tezei. Rezultatele principale ale lucrării au fost prezentate în cadrul multor forumuri ştiinţifice din Moldova, România, Ucraina şi publicate în 18 lucrări: 6 articole ştiinţifice [1], [2], [3], [4], [5], [6] (2 articole fără coautor), 2 lucrări în materialele unor conferinţe ştiinţifice [7], [8] (o lucrare fără coautor) şi 10 teze ale comunicărilor la diferite conferinţe ştiinţifice [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18] (4 fără coautor).

Volumul şi structura tezei. Lucrarea este formată din introducere, patru capitole, bibliografie din 143 titluri, o figură şi 3 tabele. Volumul total este de 145 pagini (127 pagini de text de bază).

Cuvinte-cheie. Sistem diferenţial cubic, curbă algebrică invariantă, multiplicitate algebrică, singularitate rezonantă, problema centrului, integrabilitatea Darboux.

CONŢINUTUL TEZEI

În **Introducere** sunt prezentate rezultatele cercetărilor anterioare ce ţin de tema dată; se descrie importanţa şi actualitatea temei abordate, scopul şi obiectivele tezei, ipoteza şi metodele de cercetare; aprobarea rezultatelor şi sumarul compartimentelor tezei.

În **primul capitol** sunt enunţate rezultatele clasice şi recente ce ţin de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. Se face o analiză comparativă a situaţiei existente în domeniu, se formulează problema de cercetare şi direcţiile de soluţionare a ei.

Sistemele polinomiale diferenţiale şi, în special, sistemele de tip Lotka-Volterra, sunt intens cercetate de mai mulţi oameni de ştiinţă, deoarece au o aplicare amplă. Cea mai cunoscută aplicaţie fiind în teoria populaţiei, dar au aplicaţii largi şi în alte domenii cum ar fi: fizica lazerului, fizica plasmei, hidrodinamică, chimie, ecologie, sociologie, etc.

Cercetarea sistemelor diferenţiale polinomiale Lotka-Volterra cu singularităţi $(p:-q)$ rezonante este relativ nouă şi actuală. Pentru sistemul diferenţial pătratic şi cubic a fost complet rezolvată problema integrabilităţii atunci când singularitatea e $(1:-1)$ rezonantă în 1908 de Dulac H., în 1974 de Sadovski A. şi apoi în 2001 de Christopher C. şi Rousseau C. În cazul singularităţii $(1:-2)$ rezonante, studiul pentru sistemul diferenţial pătratic este complet efectuat în anul 1998 de către Fronville A., Sadovski A. şi Żołądek H. Ei au obţinut pentru sistemele examinate condiţiile necesare şi suficiente de integrabilitate (20 de cazuri).

În anul 2013 Ferćec B., Giné J., Liu Y., Romanovski G. determină condiţiile de integrabilitate pentru sistemul diferenţial Lotka-Volterra de gradul patru cu singularităţi $(1:-1)$ rezonante de forma

$$\dot{x} = x(1 - a_{30}x^3 - a_{21}x^2y - a_{12}xy^2 - a_{03}y^3),\ \ \dot{y} = -y(1 - b_{30}x^3 - b_{21}x^2y - b_{12}xy^2 - b_{03}y^3).$$

Menţionăm, că în lucrarea (teza) de faţă sunt supuse studiului sistemele diferenţiale cubice Lotka–Volterra cu singularităţi $(1:-2)$ rezonante.

La determinarea integralelor prime ale sistemelor polinomiale de ecuaţii diferenţiale un rol esenţial îl au curbele algebrice invariante.

Noţiunea de curbă algebrică invariantă a fost introdusă de Darboux în anul 1878 într-un studiu consacrat integrabilităţii ecuaţiilor diferenţiale polinomiale de ordinul întâi. Noţiunea dată poate fi uşor modificată şi potrivită pentru sistemele diferenţiale polinomiale $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$. Astfel, se spune că curba $f(x,y) = 0$, unde f este un polinom din $\mathbb{C}[x,y]$, este *o curbă algebrică invariantă* pentru sistemul diferenţial, dacă există un aşa polinom $K(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, numit cofactorul curbei invariante $f(x,y) = 0$, încât are loc identitatea $\mathbb{X}(f) \equiv f \cdot K$. În caz particular, dreapta $l \equiv \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ se numeşte invariantă, dacă $\alpha \cdot P(x,y) + \beta \cdot Q(x,y) \equiv l \cdot K$. Cu $\mathbb{X}$ s-a notat câmpul vectorial $\mathbb{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ asociat sistemului polinomial. Darboux a arătat, că integrabilitatea sistemelor polinomiale poate fi obţinută prin folosirea curbelor algebrice invariante. Ideea lui constă în construirea pentru sistemul diferenţial polinomial a integralei prime (a factorului integrant) de forma (numită şi forma Darboux) $\prod_{i=1}^{p} f_i^{\alpha_i}$, unde f_i sunt polinoamele ce definesc curbele algebrice invariante ale sistemului dat, iar α_i nişte numere complexe oarecare nu toate egale concomitent cu zero.

Metoda Darboux de integrare a fost dezvoltată şi extinsă asupra sistemelor diferenţiale polinomiale de ordin mai mare decât doi. Christopher C. în una din lucrările sale a scris despre integrabilitatea Darboux generalizată sau în sens generalizat, care se deosebeşte de cea prezentată de Darboux prin faptul că în componenţa integralei prime (sau a factorului integrant), împreună cu curbele algebrice invariante, fac parte şi funcţiile exponenţiale care sunt generate din curbele invariante multiple: $\prod_{i=1}^{p} f_i^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{s} exp(g_j/h_j)$. Aceste funcţii exponenţiale $exp(g_j/h_j)$ se numesc factori exponenţiali şi satisfac unei ecuaţii similare celei din cazul polinoamelor f_i ce definesc curbele algebrice invariante $f_i = 0$.

O nouă direcţie de dezvoltare a teoriei Darboux este examinarea, nu doar a curbelor algebrice invariante, dar şi a altor elemente sau caracteristici ale sistemului de ecuaţii diferenţiale, care duc la integrabilitatea Darboux. De exemplu, Şubă A. ia în considerare mărimile Lyapunov, iar Chavarriga J., Llibre J., Sotomayor J. - punctele singulare independente.

În teza de faţă sunt studiate relaţiile dintre dreptele invariante, mărimile Lyapunov şi integrabilitatea Darboux, care ne conduc la patru probleme importante:

Problema 1. Determinarea multiplicităţii algebrice maximale a unei drepte invariante afine şi a dreptei de la infinit în familia sistemelor diferenţiale cubice cu singularităţi de rezonanţa $(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$;

Problema 2. Clasificarea sistemelor diferenţiale cubice (Lotka-Volterra) cu singularităţi $(1 : -1)$ $((1 : -2))$ rezonante şi cu drepte invariante afine de multiplicitate totală patru (şase);

Problema 3. Clasificarea sistemelor diferenţiale cubice (Lotka-Volterra) cu singularităţi $(1 : -1)$ $((1 : -2))$ rezonante şi cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci (şapte);

Problema 4. Studierea integrabilităţii sistemelor cubice cu singularităţi $(1 : -1)$ şi $(1 : -2)$ rezonante şi cu drepte invariante de multiplicitate algebrică totală 4, 5, 6 şi 7.

Problemele formulate îşi găsesc rezolvarea completă în această lucrare.

În **capitolul II** al tezei cu titlul "Sistemele diferenţiale cubice cu singularităţi $(1 : -1)$ rezonante şi cu drepte invariante afine de multiplicitate algebrică totală patru", pentru sistemele cubice cu singularităţi $(1 : -1)$ rezonante **a)** s-a determinat multiplicitatea maximală a unei drepte invariante reale afine, **b)** sunt construite toate configuraţiile de drepte invariante posibile ce au multiplicitatea sumară patru, **c)** sunt stabilite familiile de sisteme ce realizează aceste configuraţii şi **d)** pentru fiecare dintre aceste familii este rezolvată problema de integrabilitate, **e)** soluţionându-se prin aceasta şi problema centrului. În toate cazurile se presupune că cel puţin o dreaptă invariantă, să zicem l_1, este multiplă, adică are multiplicitatea mai mare sau egală cu doi.

a) Multiplicitatea maximală a unei drepte invariante reale a sistemelor cubice cu punct critic monodromic.

Considerăm sistemul cubic real

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x, y), \ \gcd(P, Q) = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Definiţia 1. Vom spune că dreapta invariantă l_1 are multiplicitatea algebrică egală cu θ, dacă θ este cel mai mare număr natural astfel că l_1^θ divide $\mathbb{E} = P \cdot \mathbb{X}(Q) - Q \cdot \mathbb{X}(P)$.

De către noi se examinează doar multiplicitatea algebrică, deaceea, pentru prescurtare, deseori se omite cuvântul "algebrică".

Vom nota prin $m(l_1)$ multiplicitatea dreptei invariante l_1. Pentru sistemul (1) punctul critic $(0, 0)$ este monodromic sau, mai numit, şi focar slab. El este de tip centru, atunci şi numai atunci când toate mărimile Lyapunov $L_j, j = \overline{1, \infty}$ asociate lui sunt egale cu zero.

În următoarea teoremă este determinată multiplicitatea maximală a unei drepte invariante reale şi sunt aduse sistemele diferenţiale cubice de forma (1) ce realizează aceasta.

Teorema 1. *În clasa sistemelor cubice* (1) *multiplicitatea maximală a unei drepte invariante este patru. Cu exactitatea unei transformări centro-afine şi rescalarea timpului orice sistem cubic ce are o dreaptă invariantă de multiplicitatea patru poate fi scris sub una dintre următoarele trei forme:*

$$\dot{x} = (x-1)^2 y, \ \dot{y} = -x + 2x^2 - x^3 - dxy - qx^2y - 2y^2 + 2xy^2, \ d \neq 0; \tag{2}$$

$$\dot{x} = (x-1)y(x - fy - 1), \dot{y} = -x + 2x^2 - x^3 - y^2 + xy^2 - fy^3, \ f \neq 0; \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(x-1)((b-1)^2x^2 + (2b-3)fxy + fy(1+fy))/f, \\ \dot{y} &= -((b-1)^2x^2(b+2+x) + (b-1)^2fx(2+x)y + f^3y^3 \\ &\quad + f^2((x-1)^2x + (b-3x+2bx)y^2))/f^2, \ f(b-1) \neq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

b) Configuraţiile din drepte invariante afine de multiplicitate totală patru.

În Fig. 1 sunt aduse toate configuraţiile enunţate în titlul subsecţiunii. Ţinând cont de presupunerea că $m(l_1) \geq 2$, aceste configuraţii pot consta doar din una l_1, două l_1, l_2 sau trei l_1, l_2, l_3 drepte invariante afine a căror multiplicitate sumară este cel puţin patru: $m(l_1) \geq 4, m(l_1) + m(l_2) \geq 4$ şi $m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) \geq 4$.

c) Familiile de sisteme cubice de forma (1) **ce realizează configuraţiile din Fig.1.**

Sistemele ce realizează configuraţia a) din Fig. 1 au fost aduse în Teorema 1. La fel, în teză sunt obţinute şi sistemele ce realizează celelalte configuraţii. De exemplu, pentru configuraţia d) din Fig. 1 are loc:

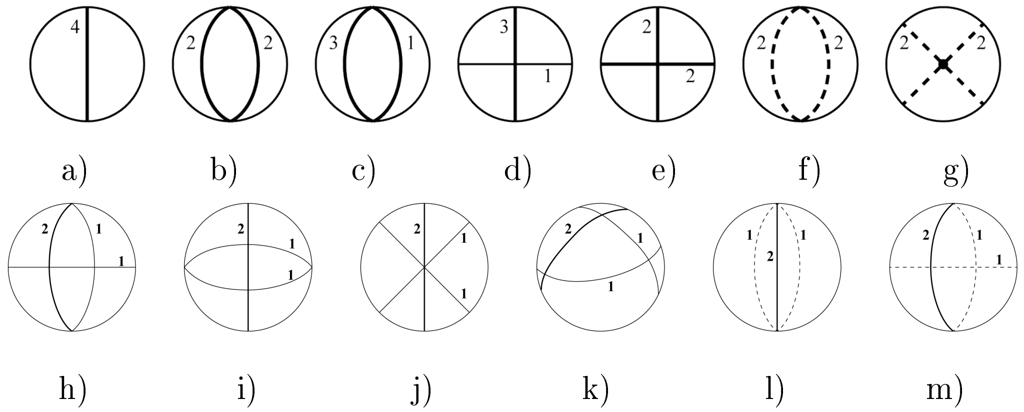

Fig. 1. Configuraţii de drepte invariante afine de multiplicitate totală patru.

Teorema 2. *Cu exactitatea unei transformări afine de coordonate şi rescalarea timpului orice sistem cubic cu punct critic monodromic şi cu două drepte invariante reale concurente $l_1, l_2, m(l_1) \geq 3$ poate fi scris sub una din următoarele patru forme:*

$$\dot{x} = (x-1)^2 y,\ \dot{y} = -x - gx^2 - dxy - y^2 + (g+1)x^3 - d(g+1)x^2y + xy^2,\ d \neq 0; \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} = {} & \tfrac{1}{2f(b-1)}(x-1)(2(1-b)fy - (b-1)(b^2-b\pm\Delta-f^2)x^2 \\
& + f(f^2-4+7b-3b^2\mp\Delta)xy - 2f^2(b-1)y^2), \\
\dot{y} = {} & \tfrac{1}{2f^2(b-1)}\Big(2f^2(1-b)x + (1-b)((b-1)(b^2-b\pm\Delta) - f^2(b+3))x^2 \\
& + f(1-b)(3b(b-1)\pm\Delta-f^2)xy + 2bf^2(1-b)y^2 + 2f^2(1-b)x^3 \\
& + f(b-1)(f^2\mp\Delta-(b-1)(b-2))x^2y + f^2(f^2\mp\Delta- \\
& (b-1)(3b-4))xy^2 + 2f^3(1-b)y^3\Big),
\end{aligned} \tag{6}$$

unde $\Delta = \sqrt{4f^2(1-b) + (f^2+b(b-1))^2}$;

$$\dot{x} = (1-x)y(1-x+fy),\ df \neq 0,\ \dot{y} = -x + 2x^2 - dxy - y^2 - x^3 + dx^2y + xy^2 - fy^3; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{x} = (1-x)(fy + (1-b)(b-c-3)x^2 + f(c+1)xy + f^2y^2)/f, \\
& \dot{y} = (f^2(c-b+3)x + (c-b+3)(cf^2 + (b-1)((b-2)(b-3) + 5c - 2bc \\
& \quad + c^2 - 2f^2))x^2 - f(2(1-b)(b-c-3)^2 + f^2(2b-c-4))xy - bf^2(b-c-3)y^2 \\
& \quad + (b-c-3)(2b-c-3)((b-1)(b-c-3) - f^2)x^3 + f(f^2(2b-c-4) \\
& \quad - (b-1)^2(b-c-3))x^2y - f^2(c+1)(b-c-3)xy^2 \\
& \quad - f^3(b-c-3)y^3)/(f^2(b-c-3)).
\end{aligned} \tag{8}$$

d) Integrabilitatea.

În această secţiune sunt studiate la integrabilitate toate sistemele diferenţiale cubice ce realizează configuraţiile din Fig. 1, adică pentru aceste sisteme sunt determinate condiţiile de existenţă şi construite integralele prime $F(x, y)$ sau factorii integranţi $\mu(x, y)$. Astfel, când prima mărime Lyapunov L_1 este egală cu zero pentru sistemele (2)-(8) avem respectiv:

Sistemul (2). $L_1 = -2q = 0 \Rightarrow$

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(x-1)^6}\exp\frac{d(-d+3dx+6y-6xy)}{6(x-1)^6}.$$

Sistemul (3). $L_1 = 0$,

$$F(x,y) = (x-1)^6 exp\frac{4-6x+2x^3+3y^2-3xy^2+2fy^3}{(1-x)^3}.$$

Sistemul (4). $L_1 = 0$,

$$F(x,y) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} f_4^{\alpha_4}, \tag{9}$$

unde $\alpha_1 = 2((b-1)^2+f^2), \alpha_2 = f(b+1), \alpha_3 = \alpha_4 = 1$, iar

$$f_1 \equiv x-1=0, f_2 = exp\frac{b+fy-1}{f(x-1)}, f_3 = exp\frac{(b-1)^2+2f(b-x)y+f^2y^2}{(x-1)^2}.$$

$$f_4 = exp[\frac{1}{3(x-1)^3}\cdot(3(1-b^2-2f^2)x+12(b^2+f^2-b)x^2$$

$$+(6b-3b^2-2b^3-6f^2-1)x^3-3f(1-b)y$$
$$-3f(1-3b+2b^2)x^2y+6f^2(1-b)xy^2-2f^3y^3)].$$

Sistemul (5). $L_1 = 0$,

$$F = \frac{(x-1)^{2(1-d^2-d^2g)}}{(x-dy-1)^{-2}}\exp\Big[\frac{(2d^2(3+2g)-2dy)(x-1)+d^2(2+g)}{(x-1)^2}\Big].$$

Sistemul (7). $L_1 = 0$,

$$F = (x-1)^{d+d^3-f}(1-x+dy)^{f-d}\exp\frac{d(2(1-x)(d^2+(d-f)y)+dfy^2)}{2(x-1)^2}.$$

Sistemele (6) *şi* (8). $L_1 = 0$. Aceste sisteme au integrala primă de forma (9). În cazul sistemului (6):

$$f_1 = x-1,\ f_2 = b-b^2-f^2 \mp \Delta + 2f^2x + 2fy - 2bfy,$$
$$f_3 = \exp((b-1+fy)/(x-1)),\ f_4 = \exp((b-1+fy)^2/(x-1)^2),$$

$$\alpha_1 = 2(b-1)(1-2b+b^2+f^2)(-b+b^2+f^2 \mp \Delta),\ \alpha_2 = -4(-1+b)^2f^2,$$
$$\alpha_3 = 2(b-1)((b-2)(b-1)(b^2-b \mp \Delta + 2f^2) + f^4 \mp f^2\Delta),$$
$$\alpha_4 = (b-1)^2(b(b-1) \mp \Delta) + f^2((b-1)(2b-3) + f^2 \mp \Delta).$$

iar în cazul sistemului (8):

$$
\begin{aligned}
&f_1 = x-1,\ f_2 = (b-c-3)(-1+(2b-c-3)x) - f(2b-c-4)y,\\
&f_3 = \exp((1-b-fy)/(x-1)),\ f_4 = \exp[((1-b)(3b-2c-5)(b-c-3)\\
&\quad +2f^2(2b-c-4) + 2((b-1)(b-c-3)(2b-c-3) - f^2(2b-c-4))x\\
&\quad +2f(b-1)(b-c-3)y + f^2(b-c-3)y^2)/(x-1)^2],\\
&\alpha_1 = -2((b-1)(b-c-3)(-61+95b-48b^2+8b^3-47c+48bc-12b^2c\\
&\qquad -12c^2+6bc^2-c^3) - f^2(2b-c-4)^3),\\
&\alpha_2 = 2(1-b)(b-c-3)^2,\ \alpha_3 = 2(1-b)(b-c-3)(2b-c-5)(2b-c-4),\\
&\alpha_4 = (2b-c-4)^2.
\end{aligned}
$$

e) Problema centrului.

Existenţa integralei prime sau a factorului integrant asigură existenţa centrului în punctul critic monodromic. Reieşind din acestea şi din cele expuse în subsecţiunea **d)**, avem:

Teorema 3. *Sistemele diferenţiale cubice de forma* (1) *cu una, două sau cu trei drepte invariante afine de multiplicitate totală patru, au în originea sistemului de coordonate punct critic de tip centru, atunci şi numai atunci când prima mărime Lyapunov, calculată în origine, se anulează.*

În **capitolul III** al tezei cu titlul ”Sistemele diferenţiale cubice cu singularităţi $(1:-1)$ rezonante şi cu drepte invariante de multiplicitate algebrică totală cinci, inclusiv dreapta de la infinit”, se parcurge o cale de investigare similară cu cea din capitolul II, cu unica deosebire, că la calcularea multiplicităţii sumare se ia în considerare şi multiplicitatea dreptei de la infinit care se presupune a fi nu mai mică ca doi.

a) Multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit a sistemelor cubice cu punct critic monodromic.

Considerăm sistemul cubic (1) pentru care infinitul este nedegenerat, adică $\kappa(x,y) = yP_3(x,y) - xQ_3(x,y) \not\equiv 0$, unde $P_3(x,y) = kx^3+mx^2y+pxy^2+ry^3$, $Q_3(x,y) = -(sx^3+qx^2y+nxy^2+ly^3)$. Notăm cu $l_\infty \equiv Z = 0$ dreapta de la infinit.

În următoarea teoremă se enunţă multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit şi sunt aduse condiţiile în care sistemele diferenţiale cubice de forma (1) realizează aceasta.

Teorema 4. *Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit* $l_\infty \equiv Z = 0$ *a sistemului* (1) *este egală cu cinci. Dreapta* l_∞ *are multiplicitatea algebrică cinci, dacă şi numai dacă se îndeplineşte una dintre următoarele şase serii de condiţii:*

$$a=b=c=f=g=k=l=0,\ m=n=p=r=s=0,\ q\neq 0; \tag{10}$$

$$b = c = 0,\ d = 2a,\ f = k = l = 0,\ m = n = p = q = r = 0,\ s = a^2,\ a \neq 0; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &b = -as/k,\ c = a(k^2 - s^2)/(ks),\ d = a(k^2 - s^2)/k^2,\\ &f = -a, g = as/k,\ l = -k,\ m = (2k^2 - s^2)/s,\ n = (k^2 - 2s^2)/s,\\ &p = k(k^2 - 2s^2)/s^2,\ q = (2k^2 - s^2)/k,\ r = -k^2/s; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &a = 0,\ b = -gk^2/s^2,\ c = -2gk^2/s^2,\ d = 0,\ f = -2gk^3/s^3,\ l = k^3/s^2,\\ &m = n = 3k^2/s,\ p = 3k^3/s^2,\ q = 3k,\ r = k^4/s^3,\ g^2k^2 - k^2s - s^3 = 0; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &b = -as/k,\ c = -2as/k,\ d = 2a,\ f = -a(k^2 + 2s^2)/s^2,\\ &g = (k^2 + a^2s)/(ak),\ l = k^3/s^2,\ m = n = 3k^2/s,\\ &p = 3k^3/s^2,\ q = 3k,\ r = k^4/s^3,\ k^4 - a^2k^2s - a^2s^3 = 0; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &b = -k(k^2 + a^2s + s^2 - agk)/(s(gk - as)),\ c = -2k(gk - 2as)/s^2,\\ &d = 2a,\ f = -k^2(2gk - 3as)/s^3,\ l = k^3/s^2,\ m = n = 3k^2/s,\\ &p = 3k^3/s^2,\ q = 3k,\ r = k^4/s^3,\ g^2k^2 - 2agks - k^2s + a^2s^2 - s^3 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

b) Configuraţiile de drepte invariante de multiplicitate totală cinci, inclusiv dreapta de la infinit.

Ţinând cont de presupunerea că $m(l_\infty) \geq 2$ şi că multiplicitatea sumară este cinci, e de ajuns ca configuraţiile examinate să conţină în partea finită a planului una l_1, două l_1, l_2 sau trei l_1, l_2, l_3 drepte invariante: $m(l_\infty) \geq 5, m(l_1)+m(l_\infty) \geq 5, m(l_1)+m(l_2)+m(l_\infty) \geq 5$ şi $m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) + m(l_\infty) \geq 5$ (vezi Fig. 2).

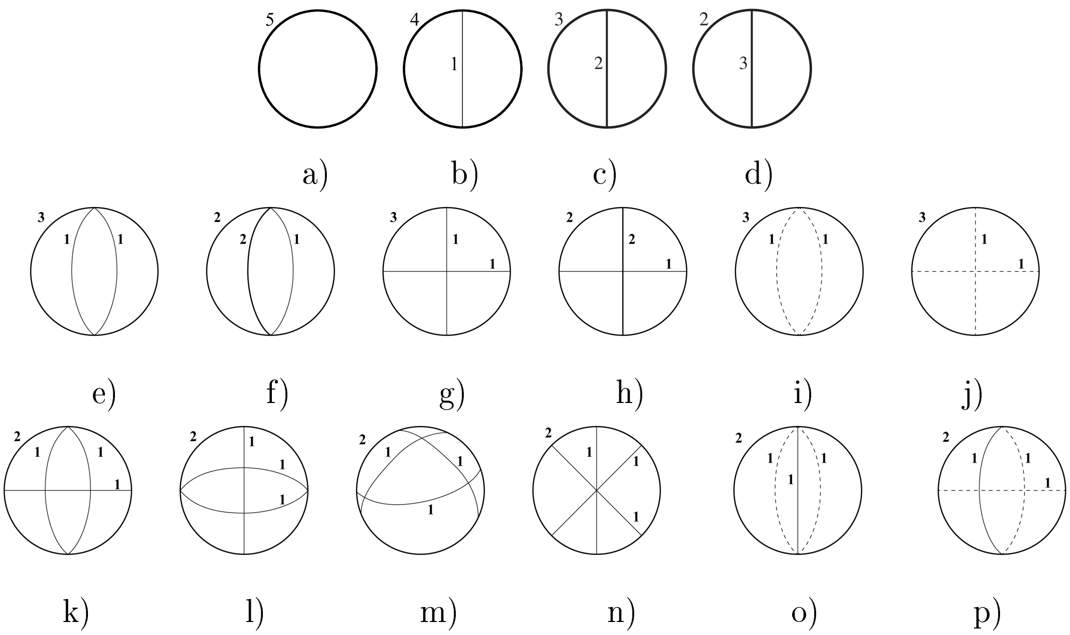

Fig. 2. Configuraţii de drepte invariante de multiplicitate totală cinci.

c) Familiile de sisteme cubice de forma (1) **ce realizează configuraţiile din Fig. 2.**

Sistemele ce realizează configuraţia a) din Fig. 2 au fost aduse în teorema 4. Unele familii de sisteme ce realizează configuraţii din Fig. 2 pot fi obţinute cu ajutorul unor transformări raţionale de coordonate din familiile ce descriu configuraţii din Fig. 1 sau chiar din Fig. 2. Aceste transformări sunt de forma

$$X = x/l_1, \quad Y = y/l_1, \tag{16}$$

unde l_1 e dreapta invariantă afină de cea mai mare multiplicitate în sistemul supus transformării. Astfel, familiile ce descriu configuraţiile b), e) şi h) din Fig. 2 se obţin respectiv din familiile de sisteme realizatoare a configuraţiilor a), d) şi e) din Fig. 1, iar cele ce descriu configuraţia d) din Fig. 2 se obţin din cele ataşate configuraţiei c) ale aceleiaşi figuri. De exemplu, ţinând cont că în sistemul (2) $l_1 = x - 1$, transformarea (16) reduce acest sistem la sistemul

$$\dot{X} = -Y(X-1), \quad \dot{Y} = -(X - dXY - Y^2 + (d+q)X^2Y$$

ce realizează configuraţia b) din Fig. 2 având dreapta de la infinit de multiplicitatea algebrică patru şi dreapta afină invariantă $X - 1 = 0$. Procedând în mod similar şi cu celelalte sisteme din teorema 1, cu exactitatea unei transformări afine şi rescalarea timpului obţinem toate sistemele ce realizează configuraţia b) din Fig. 2.

Familiile de sisteme cubice de forma (1) ce descriu celelalte configuraţii ale Fig. 2 sunt construite în mod direct. Astfel, pentru configuraţia c) din Fig. 2 avem:

Teorema 5. *Sistemele* (1) *au o dreaptă invariantă reală afină de multiplicitatea doi şi dreapta de la infinit* $Z = 0$ *de multiplicitatea cel puţin trei, dacă şi numai dacă se îndeplineşte una dintre următoarele treisprezece serii de condiţii:*

$$\begin{aligned} &a = c = f = k = l = m = p = r = 0,\, d = -2/B,\, g = -b(2 + b^2B^2),\\ &n = (1 + b^2B^2)/B^2,\, q = 2b(1 + b^2B^2)/B,\, s = b^2(1 + b^2B^2); \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &a = c = f = k = m = p = r = 0,\, d = -(b^4 - 16l^2)/(4bl),\\ &g = -b,\, n = -(b^4 - 8l^2)/(2b^2),\, q = (b^4 - 32l^2)/(16l),\, s = b^2/4; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &a = (\pm 2q^2s \pm 4s^3 + gq\sqrt{s(q^2+4s^2)})/(2s\sqrt{s(q^2+4s^2)}),\\ &b = q(\pm 2q^2s \pm 8s^3 + gq\sqrt{s(q^2+4s^2)})/(4s^2\sqrt{s(q^2+4s^2)}),\\ &c = q(\pm 2q^2s \pm 4s^3 + gq\sqrt{s(q^2+4s^2)})/(2s^2\sqrt{s(q^2+4s^2)}),\\ &d = (\pm q^2s \pm 4s^3 + gq\sqrt{s(q^2+4s^2)})/(s\sqrt{s(q^2+4s^2)}),\\ &f = q^2(\pm 2q^2s \pm 4s^3 + gq\sqrt{s(q^2+4s^2)})/(8s^3\sqrt{s(q^2+4s^2)}),\\ &n = q^2/(4s),\, k = l = m = p = r = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

$$a = b = c = 0,\ d = -2/\gamma,\ n = 1/\gamma^2,\ g = k = l = m = p = q = r = s = 0; \tag{20}$$

$$a = f = k = l = m = n = p = r = s = 0,\ b = -c,\ g = c,\ q \neq 0; \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &a = 0,\ b = -p\gamma,\ c = -2p\gamma,\ d = -2/\gamma,\ g = k = 0,\ n = 1/\gamma^2,\\ &l = p,\ m = q = 0,\ r = p^2\gamma^2,\ s = 0; \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &a = b = 0,\ c = -2/B,\ d = -2Bq,\ f = g = 0,\\ &k = l = 0,\ m = 1/B^2,\ n = p = r = s = 0,\ q \neq 0; \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &a = 2Br,\ b = 2A(B^2r - 1)/B,\ c = 2(A^2 - 1)Br/A,\\ &d = 2(1 - A^2)(B^2r - 1)/B,\ f = -2Br,\ m = (A^2 - 2)r,\\ &g = 2A(1 - B^2r)/B,\ k = Ar,\ l = A(1 - B^2r)/B^2,\\ &n = (2A^2 - 1)(B^2r - 1)/B^2,\ p = (1 - 2A^2)r/A,\\ &q = A(2 - A^2)(B^2r - 1)/B^2,\ s = A^2(1 - B^2r)/B^2; \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &a = -Au(ABu + A^3Bu \pm A^2 \pm 2), && b = (ABu \pm 1)(Bu + A^2Bu \mp A)/B,\\ &c = 2u(ABu + A^3Bu \pm 1), && d = -2(ABu \pm 1)(ABu + A^3Bu \pm 1)/B,\\ &f = -u(Bu + A^2Bu \mp A), && g = A(ABu \pm 1)(ABu + A^3Bu \pm 2 \pm A^2)/B,\\ &k = -A^2(1 + A^2)u(ABu \pm 1)/B, && l = -(1 + A^2)u(ABu \pm 1)/B,\\ &m = A(1 + A^2)u(3ABu \pm 2)/B, && n = (1 + A^2)(ABu \pm 1)(3ABu \pm 1)/B^2,\\ &p = -(1 + A^2)u(3ABu \pm 1)/B, && q = -A(1 + A^2)(ABu \pm 1)(3ABu \pm 2)/B^2,\\ &r = u^2(1 + A^2), && s = A^2(1 + A^2)(ABu \pm 1)^2/B^2; \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &a = -f,\ b = -g = s(1 + Bf)/(Bk),\ c = (Bfs^2 - k^2 - Bfk^2 - s^2)/(Bks),\\ &d = (Bfs^2 - 2k^2 - Bfk^2)/(Bk^2),\ l = -k,\ m = (2k^2 - s^2)/s,\\ &n = (k^2 - 2s^2)/s,\ p = k(k^2 - 2s^2)/s^2,\ q = (2k^2 - s^2)/k,\ r = -k^2/s; \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &b = (Ak - aABk - A^2s - aBs)/(AB(Ak + s)),\\ &c = 2(Ak + A^3k - aABk - aBs)/(AB(Ak + s)),\\ &d = 2(aB - 1)/B, f = (aABk + aBs - 2Ak - 2A^3k)/(A^2B(Ak + s)),\\ &g = (A^2 - aA^2B + AB^2k + B^2s)/(AB),\ l = k/A^2,\ m = k(Ak - 2s)/(As),\\ &n = (s - 2Ak)/A^2,\ p = k(s - 2Ak)/(A^2s),\ q = (Ak - 2s)/A,\\ &r = k^2/(A^2s),\ A^2B^2k^2 - A^2s - A^4s + 2AB^2ks + B^2s^2 = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

În sistemele de mai sus A şi B sunt parametri.

d) Integrabilitatea.

În această subsecţiune sunt studiate la integrabilitate toate sistemele diferenţiale cubice, ce realizează configuraţiile din Fig. 2, adică pentru aceste sisteme sunt determinate condiţiile de existenţă şi construite integralele prime $F(x,y)$ sau factorii integranţi $\mu(x,y)$. Astfel, pentru sistemele {(1),(10)}-{(1),(27)} din Teorema 4 avem:

Sistemul {(1),(10)} (respectiv, {(1),(12)}): $L_1 = -q/4 \neq 0$ (respectiv, $L_1 = (k^2 + s^2)^2/(4ks^2) \neq 0$) $\Rightarrow$ {(1),(10)} (respectiv, {(1),(12)}) are focar în $(0,0)$.

Sistemele {(1),(11)} şi {(1),(13)}-{(1),(15)}: $L_1 = 0$ şi au, respectiv, următoarele integrale prime:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= 6(x^2+y^2) + 4gx^3 + 12ax^2y + 3a^2x^4;\\
F(x,y) &= 6s^3(x^2+y^2) + 4g(sx-2ky)(sx+ky)^2 + 3(sx+ky)^4;\\
F(x,y) &= 6aks^3(x^2+y^2) + 4s^3(k^2+a^2s)x^3 + 12a^2s^3xy(kx-sy)\\
&\quad -4a^2ks(k^2+2s^2)y^3 + 3ak(sx+ky)^4;\\
F(x,y) &= 2(as-gk)(3s^3(x^2+y^2) + 2gs^3x^3 + 6as^3x^2y + 6aks^2xy^2 - 4gk^3y^3\\
&\quad +6ak^2sy^3) + 12ks^2(k^2+s^2)xy^2 - 3(gk-as)(sx+ky)^4.
\end{aligned}$$

Observaţia 1: Divergenţa câmpului vectorial asociat fiecărui dintre sistemele {(1),(11)}, {(1),(13)}- {(1),(15)} este identică zero, i.e. $\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \equiv 0$. În acest caz, sistemul (1) are integrala primă de forma unui polinom.

Pentru sistemele din Teorema 5 studiul la integrabilitatea Darboux ne dă următoarele:

Sistemul {(1),(17)}: $L_1 = 0$,

$$\mu(x,y) = 1/(-B + bBx + y)^2.$$

Sistemul {(1),(19)}: $L_1 = 0$,

$$\mu(x,y) = 1/(2\sqrt{s(q^2+4s^2)} \pm 2qsx \pm q^2y)^2.$$

Sistemele {(1),(24)}, {(1),(25)} şi {(1),(27)}: $L_1 = 0$ şi au factorul integrant

$$\mu(x,y) = 1/(-B - Ax + y)^2.$$

Sistemele {(1),(20)} şi {(1),(22)}: $L_1 = 0$ şi au factorul integrant

$$\mu(x,y) = 1/(y-\gamma)^2.$$

Sistemul {(1),(18)}: $L_1 = -(b^4 + 16l^2)/(64l) \neq 0$.

Sistemul {(1),(26)}: $L_1 = (k^2+s^2)^2/(4ks^2) \neq 0$.

Sistemele {(1),(21)} şi {(1),(23)}: $L_1 = -q/4, q \neq 0$.

Observaţia 2: Pentru un sistem diferenţial cubic (1) ce are dreapta de la infinit de multiplicitate algebrică cel puţin trei şi o dreaptă invariantă afină reală l_1 de multiplicitatea doi ori prima mărime Lyapunov L_1 este nenulă, ori el are factor integrant de forma $\mu(x,y) = 1/l_1^2$.

Din Observaţia 2, prin aplicarea transformării (16), se obţine afirmaţia din următoarea observaţie.

Observaţia 3: Pentru un sistem diferenţial cubic (1) ce are dreapta de la infinit de multiplicitate algebrică nu mai mică ca doi şi o dreaptă invariantă afină reală l_1 de multiplicitatea trei ori prima mărime Lyapunov L_1 este nenulă, ori el are factor integrant de forma $\mu(x,y) = 1/l_1^3$.

e) Problema centrului.

Ţinând cont de observaţiile din subsecţiunea **d)** şi de faptul că existenţa integralei prime sau a factorului integrant asigură pentru (1) existenţa în $(0,0)$ a centrului, obţinem următoarele trei afirmaţii:

Teorema 6. *Sistemele diferenţiale cubice* (1) *pentru care dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică cinci au centru în originea de coordonate* $(0,0)$, *dacă şi numai dacă divergenţa câmpului vectorial asociat acestor sisteme, este identică zero.*

Teorema 7. *Un sistem diferenţial cubic* (1) *ce are o dreaptă invariantă afină reală* l_1 *de multiplicitate algebrică doi (respectiv, trei) şi pentru care dreapta de la infinit e de multiplicitate cel puţin trei (respectiv, doi) are centru în originea de coordonate* $(0,0)$, *atunci şi numai atunci când pentru el funcţia* $\mu(x,y) = 1/l_1^2$ *(respectiv,* $\mu(x,y) = 1/l_1^3$*) este factor integrant.*

Privitor la problema centrului rezultatele principale ale capitolelor II şi III al tezei pot fi sumate în următoarea teoremă:

Teorema 8. *Sistemele diferenţiale cubice de forma* (1) *cu drepte invariante afine* l_j *şi cu dreapta de la infinit* l_∞ *ce verifică cel puţin unuia dintre seturile de inegalităţi:* $\{m(l_1) \geq 2, \sum m(l_j) \geq 4\}$ *ori* $\{m(l_\infty) \geq 2, \sum m(l_j) + m(l_\infty) \geq 5\}$, *au în originea sistemului de coordonate punct critic de tip centru, atunci şi numai atunci când prima mărime Lyapunov, calculată în origine, se anulează.*

În **capitolul IV**, întitulat "Sisteme cu singularităţi (1:-2) rezonante şi cu drepte invariante afine de multiplicitate algebrică totală şase şi şapte (inclusiv dreapta de la infinit)", sunt studiate sistemele diferenţiale cubice Lotka-Volterra cu singularităţi $(1 : -2)$ rezonante.

Considerăm sistemul cubic

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2) \equiv P(x,y), \\ \dot{y} = y(-2 + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2) \equiv Q(x,y), \ \gcd(P,Q) = 1, \end{cases} \tag{28}$$

unde x, y sunt variabile reale de t, iar a_{ij}, b_{ij} sunt coeficienţi reali.

Pentru această familie de sisteme, notată $SCLV(1:-2)$, în secţiunea 4.1 a tezei sunt determinate multiplicităţile algebrice maximale a unei drepte invariante afine şi a dreptei de la infinit. Are loc următoarea teoremă.

Teorema 9. *Pentru sistemul cubic Lotka-Volterra* (28) *sunt adevărate egalităţile:*

1) $m_a(x) = m_a(y) = 1$;

2) $m_a(x-\alpha-\beta i) = m_a(y-\alpha-\beta i) = m_a(\beta x - y + \alpha) = 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$;

3) $m_a(Z) = m_a(x-\beta) = m_a(y-\beta) = 3$, $\beta \in \mathbb{R}^*$;

unde $Z = 0$ *este dreapta de la infinit, iar prin* $m_a(l)$ *s-a notat multiplicitatea algebrică maximală a dreptei* $l = 0$.

Construirea configuraţiilor posibile ale dreptelor invariante de două, trei sau patru direcţii şi clasificarea sistemelor $SCLV(1:-2)$ ce posedă drepte invariante de astfel de direcţii şi de multiplicitate totală şase şi, respectiv, şapte, inclusiv dreapta de la infinit, este efectuată în secţiunile 4.2-4.5. La fel, sunt aduse integralele prime sau factorii integranţi ale sistemelor obţinute. Principalele rezultate sunt cuprinse în teoremele 10-12 şi tabelele 4.1-4.3. În ele cu $3(2)\mathbf{r}$ $(4(3)\mathbf{r})$ s-a notat două drepte paralele reale şi diferite, una dintre care este numărată de două (trei) ori, şi spunem că această dreaptă are multiplicitatea egală cu doi (trei). Prin $5(1,3)\mathbf{r}$ se notează trei drepte reale paralele şi diferite, una dintre care are multiplicitatea trei, iar prin $1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}$ este notat un triplet de drepte paralele distincte, una dintre care este reală şi două sunt complexe (nereale). Cu $(3\mathbf{r};\ 1\mathbf{r}+2\mathbf{c})$ s-a notat configuraţia ce constă din şase drepte afine de două direcţii: un triplet de drepte reale distincte paralele într-o direcţie; o dreaptă reală şi o pereche de drepte complexe (nereale) paralele în a doua direcţie. Prin $(1\mathbf{r};\ 5(2,2)\mathbf{r})$ este notată configuraţia a şase drepte de două direcţii ce constă din: o dreaptă reală (într-o direcţie) şi cinci drepte reale paralele, două dintre care au multiplicitatea doi fiecare (în a doua direcţie).

Teorema 10. *Sistemul cubic* (28) *are drepte invariante afine de două direcţii de multiplicitate algebrică totală şase, dacă şi numai dacă el are una dintre următoarele cincisprezece forme:*

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1),\ a \neq \{0,1\}, \dot{y} = y(y-1)(by+2),\ b \neq \{0,-2\}; \tag{29}$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1),\ a \neq \{0,1\}, \dot{y} = -2y(y-1)^2; \tag{30}$$

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \dot{y} = y(y-1)(cy+2),\ c \neq \{0,-2\}; \tag{31}$$

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \dot{y} = -2y(y-1)^2; \tag{32}$$

$$\dot{x} = x((2-c)y + 3cy^2 + 2)/2, \dot{y} = y(y-1)(cy+2),\ c \neq \{0,-2\}; \tag{33}$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1), \dot{y} = y(x + ax - 2),\ a \neq \{0,1\}; \tag{34}$$

$$\dot{x} = x((1+d)y^2 + 1), \dot{y} = y(y-1)(dy+2),\ d \neq \{0,-2\}; \tag{35}$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1), \dot{y} = y(-2 + 3x + (a-2)x^2),\ a \neq \{0,1\}; \tag{36}$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1),\ a \neq \{0,1\}, \dot{y} = y(py^2 + qy - 2),\ q^2 + 8p < 0; \tag{37}$$

$$\dot{x} = x(px^2 + qx + 1),\ q^2 - 4p < 0, \dot{y} = y(y-1)(cy+2),\ c \neq \{0,-2\}; \tag{38}$$

$$\dot{x} = x(px^2 + qx + 1),\ q^2 - 4p < 0, \dot{y} = y(ry^2 + sy - 2),\ s^2 + 8r < 0; \tag{39}$$

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \dot{y} = y(py^2 + qy - 2),\ q^2 + 8p < 0; \tag{40}$$

$$\dot{x} = x(px^2 + qx + 1),\ q^2 - 4p < 0, \dot{y} = -2y(y-1)^2; \tag{41}$$

$$\dot{x} = x(py^2 + qy + 2)/2, \dot{y} = y(py^2 + qy - 2),\ q^2 + 8p < 0; \tag{42}$$

$$\dot{x} = x(px^2 + qx + 1),\ q^2 - 4p < 0, \dot{y} = -y(2 + qx), \tag{43}$$

unde $a, b, c, d, q, p, r, s \in \mathbb{R}$. *Sistemele* (29)-(43) *sunt Darboux integrabile şi au, respectiv, următoarele integrale prime:*

(29): $F(x,y) = (x-1)^{\frac{2(2+b)}{(1-a)b}} x^{\frac{2(2+b)}{b}} (ax-1)^{\frac{2a(2+b)}{(a-1)b}} (y-1)^{\frac{2}{b}} y^{-\frac{2+b}{b}} (by+2)$;

(30): $F(x,y) = e^{\frac{a-1}{y-1}} x^{2-2a} (ax-1)^{2a} (y-1)^{a-1} y^{1-a} (x-1)^{-2}$;

(31): $F(x,y) = e^{\frac{2c+4}{x-1}} x^{-4-2c} (x-1)^{4+2c} (y-1)^2 y^{-2-c} (cy+2)^c$;

(32): $F(x,y) = e^{\frac{2}{1-x} + \frac{1}{1-y}} x^2 (x-1)^{-2} (y-1)^{-1} y$;

(33): $F(x,y) = e^{\frac{1}{2+cy} - \frac{5c+2c^2}{4(y-1)}} x^2 (y-1)^{\frac{c^2+5c-4}{2}} (cy+2) y$;

(34): $F(x,y) = e^{\frac{1}{ax-1} + \frac{3a-4a^2}{x-1}} x^2 (x-1)^{4a^2-6a-1} (ax-1) y$;

(35): $F(x,y) = x^2 y (dy+2)^{-\frac{2+d}{d}} (y-1)^{-2}$;

(36): $F(x,y) = x^2 y (ax-1)^{\frac{2-2a}{a}} (x-1)^{-1}$;

(37): $F(x,y) = (x-1)^{-\frac{1}{a}} x^{\frac{1-a}{a}} (ax-1) y^{\frac{1-a}{2a}} (y + \frac{q+\sqrt{\gamma}}{2p})^{(a-1)(\sqrt{\gamma}-q)\delta} (y + \frac{q-\sqrt{\gamma}}{2p})^{(a-1)(\sqrt{\gamma}+q)\beta}$,
unde $\gamma = q^2 + 8p$, $\delta = \frac{128p^3 - q^3\gamma\sqrt{\gamma} + q^3\sqrt[3]{\gamma}}{512ap^3\sqrt{\gamma}}$, $\beta = \frac{128p^3 + q^3\gamma\sqrt{\gamma} - q^3\sqrt[3]{\gamma}}{512ap^3\sqrt{\gamma}}$;

(38): $F(x,y) = (y-1)^{\frac{2}{c}} x^{\frac{-4-2c}{c}} (cy+2) y^{\frac{-2-c}{c}} (x + \frac{q+\sqrt{\lambda}}{2p})^{-(c+2)(\sqrt{\lambda}-q)\beta)} (x + \frac{q-\sqrt{\lambda}}{2p})^{(c+2)(\sqrt{\lambda}+q)\gamma)}$,
unde $\lambda = q^2 - 4p$, $\beta = \frac{-16p^3 + 4pq^3\sqrt{\lambda} - q^5\sqrt{\lambda} + q^3\sqrt[3]{\lambda}}{16cp^3\sqrt{\lambda}}$, $\gamma = \frac{16p^3 + 4pq^3\sqrt{\lambda} - q^5\sqrt{\lambda} + q^3\sqrt[3]{\lambda}}{16cp^3\sqrt{\lambda}}$;

(39): $F(x,y) = x^{-32p^3\lambda\delta} (x + \frac{q+\lambda}{2p})^{-(q-\lambda)(16p^3-\gamma)\delta} (2px + q - \lambda) y^{-16p^3\lambda\delta}$
$\cdot (y + \frac{s-\beta}{2r})^{-16p^3 s(q-\lambda)\delta + \beta/(s+\beta)} (2ry + s + \beta)/4pr$,
unde $\lambda = \sqrt{q^2 - 4p}$, $\beta = \sqrt{8r + s^2}$, $\gamma = q^3\lambda(4p - q^2 + \lambda^2)$, $\delta = 1/(q+\lambda)(16p^3 - \gamma)$;

(40): $F(x,y) = e^{\beta/(x-1)} (x-1)^{\beta} x^{-\beta} y^{-q\lambda+8p+q^2} (y + \frac{q+\lambda}{2p})^{q\lambda-4p-q^2} (y + \frac{q-\lambda}{2p})^{-4p}$,
unde $\lambda = \sqrt{8p + q^2}$, $\beta = 2q\lambda - 16p - 2q^2$;

(41): $F(x,y) = e^{\beta/(y-1)} (y-1)^{\beta} x^{-2\beta} y^{-\beta} (x + \frac{q+\lambda}{2p})^{q\lambda+\beta-q^2} (x + \frac{q-\lambda}{2p})^{4p}$, *unde* $\lambda = \sqrt{q^2 - 4p}$, $\beta = q\lambda - \lambda^2$;

(42): $F(x, y) = (py^2 + qy - 2)^{-2}x^2y/(16p^2)$;

(43): $F(x, y) = (px^2 + qx + 1)^{-1}x^2y$.

Teorema 11. *Sistemul cubic* (28) *are drepte invariante afine de trei direcţii de multiplicitate algebrică totală şase, dacă şi numai dacă el are una dintre următoarele treisprezece forme:*

$$\dot{x} = -x(x-1),\ \dot{y} = y(y-1)(2-x-y)\,; \tag{44}$$

$$\dot{x} = x(1 - axy + (1+d)y^2 + ax),\ \dot{y} = y(y-1)(dy+2); \tag{45}$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1),\ \dot{y} = y(-2 + 3x + dy + (a-2)x^2 - dxy); \tag{46}$$

$$\dot{x} = x(1 - 2fx + f^2x^2 + 2fxy + (1+c)y^2),\ \dot{y} = y(y-1)(2+cy); \tag{47}$$

$$\dot{x} = x(4f^2x^2 + 4c^2fxy + c^3(4+c)y^2 + 8cfx + 4c^2)/(4c^2),\ \dot{y} = y(y-1)(cy+2); \tag{48}$$

$$\begin{gathered}\dot{x} = x(x-1)(ax-1),\\ \dot{y} = -y(16a^2 - 24a^3x - 8a^3(1+2a)x^2 + 8afy - 8a^2fxy + f^2y^2)/(8a^2)\ ;\end{gathered} \tag{49}$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1),\ \dot{y} = -y(f^2y^2 - 8fxy + 8(2-a)x^2 - 24x + 8fy + 16)/8\,; \tag{50}$$

$$\dot{x} = x(f^2x^2 + 4fxy - 4y^2 - 4fx + 4)/4,\ \dot{y} = -2y(y-1)^2; \tag{51}$$

$$\dot{x} = x(x-1)^2,\ \dot{y} = -y(2b^2 - 3b^2x + b^2x^2 - 4by + 4bxy + 2y^2)/(b^2); \tag{52}$$

$$\dot{x} = x(x-1)((2+c)x-2)/2,\ \dot{y} = y(y-1)(4 - (4+c)x + 2cy)/2; \tag{53}$$

$$\begin{gathered}\dot{x} = x(x-1)(-2 + 2x - c)/(2+c),\\ \dot{y} = y(y-1)(4 + 2c - (4+c)x + 2cy + c^2y)/(2+c);\end{gathered} \tag{54}$$

$$\begin{gathered}\dot{x} = x(x-1)(ax-1),\\ \dot{y} = -y(18a - 9a(1+a)x + 6l(1+a)y - 9alxy + 2l^2y^2)/(9a)\ ;\end{gathered} \tag{55}$$

$$\dot{x} = x(x-1)^2,\ \dot{y} = -y(2b^2 - 2b^2x - 4by + 3bxy + 2y^2)/b^2\,, \tag{56}$$

unde $abcdf(a-1)(c+2)(d+2) \neq 0$ *şi* $a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$. *Sistemele* (44)-(56) *sunt Darboux integrabile şi au, respectiv, următoarele integrale prime (factori integranţi):*

(44): $F(x, y) = e^{xy/(y-1)}(x-1)(y-1)(x+y-1)^{-1}$;

(45): $F(x, y) = x^2y(dy+2)^{-\frac{2+d}{d}}(y - ax - 1)^{-2}$;

(46): $F(x, y) = x^2y(ax-1)^{\frac{2-2a}{a}}(dy + 2x - 2)^{-1}$;

(47): $F(x, y) = e^{2fx/(1-fx-y)}x^2y(2+cy)^{-(2+c)/c}(fx + y - 1)^{-2}$;

(48): $F(x, y) = e^{-8fx/(2c+2fx+c^2y)}x^4(y-1)^{-2-c}y^2)(2fx + c(2+cy))^{-4}$;

(49): $F(x, y) = -e^{fy/(4a(ax-1)-fy)}(x-1)^{2a-2}x^2y(4a - 4a^2x + fy)^{-1}$;

(50): $F(x,y) = e^{fy/(4x-fy-4)}x^2(ax-1)^{-2+2/a}y(4x-fy-4)^{-1}$;

(51): $F(x,y) = e^{2fx/(2-fx-2y)}x^2y(-2+fx+2y)^{-2}$;

(52): $F(x,y) = e^{y/(b(1-x)-y)}x^2y(b(x-1)+y)^{-1}$;

(53): $\mu(x,y) = (2x+cx-2)^{1/(2+c)}(y-1)^{-(1+c)/(2+c)}(2x+cx-cy-2)^{-(4+c)/(4+2c)}$
$\cdot x^{-2}y^{-3/2}(x-1)^{-1/2}$;

(54): $\mu(x,y) = (x-1)^{1/(2+c)}(y-1)^{-(1+c)/(2+c)}(2x-2-c)^{-1/2}x^{-2}y^{-3/2}$
$\cdot(2x-cy-2)^{-(4+c)/(4+2c)}$;

(55): $\mu(x,y) = (ax-1)^{1/(2-2a)}(3ax-ly-3)^{(2-a)/(2a-2)}(3ax-ly-3a)^{(1-2a)/(2a-2)}$
$\cdot x^{-2}y^{-3/2}(x-1)^{a/(2a-2)}$;

(56): $F(x,y) = e^{(1-x)/(b(y+b(x-1)))}x^{-2/b^2}y^{-1/b^2}(y+b(x-1))^{1/b^2}$.

Teorema 12. *Sistemul cubic* (28) *are drepte invariante afine de patru direcţii de multiplicitate algebrică totală şase, dacă şi numai dacă el are una dintre următoarele şase forme:*

$$\begin{gathered}\dot{x} = x(x-1)(ax-1),\\ \dot{y} = -\tfrac{y}{bg}y(2bg-3abgx-abg(1-2a)x^2-2(b+g)y+2a(b+g)xy+2y^2)\,;\end{gathered} \tag{57}$$

$$\begin{gathered}\dot{x} = x(x-1)(ax-1),\\ \dot{y} = y(-2ng+3ngx-ng(2-a)x^2+2(n-g)y-2(n-g)xy+2y^2)/(ng);\end{gathered} \tag{58}$$

$$\begin{gathered}\dot{x} = x(f+fsx+f^2sx+f^2s^2x^2-2y^2+fy^2)/f,\\ \dot{y} = (1-y)y(2f+fsx+f^2sx-2y)/f;\end{gathered} \tag{59}$$

$$\dot{x} = (x-1)^2x,\ \dot{y} = -y(2bg-3bgx+bgx^2-2(b+g)y+2(b+g)xy+2y^2))/bg\ ; \tag{60}$$

$$\dot{x} = x(1-mx-n^2x^2-mnx^2+mxy-y^2),\ \dot{y} = -2y(1-y)^2; \tag{61}$$

$$\begin{gathered}\dot{x} = x(4-2ndx-2dfx+nd^2fx^2-nd^2xy-d^2fxy+4dy^2+d^2y^2)/4,\\ \dot{y} = y(y-1)(2+dy),\end{gathered} \tag{62}$$

unde $am(a-1)(b-g)(n+g)(f-1)(n-f) \neq 0$ *şi* $a,b,d,f,g,n,m \in \mathbb{R}$. *Sistemele* (57)-(62) *sunt Darboux integrabile şi au, respectiv, următoarele integrale prime (factori integranţi):*

(57): $F(x,y) = (x-1)^{2(a-1)(b-g)/g}x^{-2+2b/g}y^{-1+b/g}(b(ax-1)+y)(g(ax-1)+y)^{-b/g}$
$\cdot 1/(b(g-b))$;

(58): $F(x,y) = (x-1)x^{-2-2n/g}(ax-1)(nx-y-b)y^{-1-n/g}(gx+y-g)^{n/g}$;

(59): $\mu(x,y) = (1+sx-y)^{f/2}(f+fsx-y)^{-(1+f)/2}(y-1)^{(1-f)/2}x^{-2}(1+fsx-y)^{-1/2}y^{-3/2}$;

(60): $F(x,y) = x^2(b-g)y^{b-g}(b(x-1)+y)^g(g(x-1)+y)^{-b}$;

(61): $F(x,y) = x^{2(2n+m)}(1+nx-y)^{-2n}y^{2n+m}((n+m)x+y-1)^{-2(n+m)}$;

(62): $F(x,y) = x^{2(n-f)}(y-1)^{-1/2(2+d)(n-f)}y^{n-f}(ndx-dy-2)^{-2n}(dfx-dy-2)^{2f}$.

Tabelul 4.1. Sistemele cubice (28) **cu drepte invariante de două direcţii şi de multiplicitate totală şapte, inclusiv dreapta de la infinit**

Configuraţii realizabile	Sistemul diferenţial cubic	Integrala primă (factor integrant) Darboux
(3r,2r; 2i)	$\dot{x} = x(x-1)(ax-1),$ $\dot{y} = y(y-1)(bx+cy+2),$ $a(a-1) \neq 0.$	$F(x,y) = (x-1)^2 x^{2a-2}(ax-1)^{-2a}$ $((y-1)/y)^{1-a}$.
(2r,3r; 2i)	$\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = y(y-1)(cy+2),$ $c(c+2) \neq 0.$	$F(x,y) = ((x-1)/x)^{-4-2c} y^{2+c}$ $(2+cy)^{-c}(y-1)^{-2}.$
(3(2)r,2r; 2i)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = 2y(y-1).$	$F(x,y) = \frac{\exp[2x/(1-x)]x^2 y}{(x-1)^2(y-1)}$
(3(2)r,1r; 3i)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = -2y.$	$F(x,y) = \frac{\exp[2x/(1-x)]x^2 y}{(x-1)^2}$
(2r,3(2)r; 2i)	**1)**$\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = -2y(1-y)^2;$ **2)**$\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = (2-x-2y)(y-1)y.$	**1)**$F(x,y) = \frac{Exp[y/(y-1)]x^2 y}{(x-1)^2(y-1)};$ **2)**$\mu(x,y) = Exp[(1-xy)/(2y-2)]$ $x^{-2}(x-1)^{-1/2}((y-1)y)^{-3/2}.$
(1r,4(3); 2i)	$\dot{x} = x(1+y^2), \quad \dot{y} = 2y(y-1).$	$F(x,y) = \frac{\exp[-y]x^2 y}{(y-1)^2}.$
(4(3),1r; 2i)	$\dot{x} = x(1-x), \quad \dot{y} = y(-2+3x-2x^2).$	$F(x,y) = \frac{\exp[-2x]x^2 y}{(x-1)}.$
(2r,1r+2c; 2i)	$\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = -2y(1-2ya+y^2(a^2+b^2)).$	$F(x,y) = \exp[2aarctg[yb/(1-ya)]]$ $(x-1)^{-4b}x^{-4b}y^{2b}((ya-1)^2+y^2b^2)^{-b}.$
(1r,1r+2c; 3i)	$\dot{x} = x,$ $\dot{y} = -2y(1-2y\alpha+y^2(\alpha^2+\beta^2)).$	$F(x,y) = \exp[2\alpha arctg[y\beta/$ $(1-y\alpha)]]x^{4\beta}y^{2\beta}((y\alpha-1)^2+y^2\beta^2)^{-\beta}.$
(1r+2c,2r; 2i)	$\dot{x} = x(1-2ax+a^2x^2+b^2x^2),$ $\dot{y} = 2y(y-1).$	$F(x,y) = \exp[2aarctg[bx/(1-ax)]]$ $x^{2b}y^{2b}(b^2x^2+(ax-1)^2)^{-b}(y-1)^{-b}y^b.$
(1r+2c,1r; 3i)	$\dot{x} = x(1-2ax+a^2x^2+b^2x^2),$ $\dot{y} = -2y.$	$F(x,y) = \exp[2aarctg[bx/(1-ax)]]$ $x^{2b}y^b(b^2x^2+(ax-1)^2)^{-b}.$

Tabelul 4.2. Sistemele cubice (28) **cu drepte invariante de trei direcţii şi de multiplicitate totală şapte, inclusiv dreapta de la infinit**

Configuraţii realizabile	Sistemul diferenţial cubic	Integrala primă (factor integrant) Darboux
(1r,1r,2r; 3i)	$\dot{x} = x(1+x+bx+bx^2+ay$ $+axy-2y^2),$ $\dot{y} = -y(2+x-bx^2-4y-axy+2y^2).$	$\mu(x,y) = \exp[(1+x)(1-a)/(2(1$ $+x-y))]x^{-2}y^{-3/2}(1+x-y)^{-1/2}.$

Tabelul 4.3. Sistemele cubice (28) **cu drepte invariante de patru direcţii şi de multiplicitate totală şapte, inclusiv dreapta de la infinit**

Configuraţii realizabile	Sistemul diferenţial cubic	Integrala primă (factor integrant) Darboux
(2r,1r,1r,1r; 2i)	$\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = y(-2as + 3asx - 2asx^2 - 2y^2$ $-2(a-s)y + 2(a+s)xy)/as.$	$\mu(x,y) = (x-1)/(x(ax-y-a)$ $(sx-y-s)y).$
(1r,2r,1r,1r; 2i)	$\dot{x} = x(1 - lx - s(l-s)x^2$ $+lxy + y^2),$ $\dot{y} = 2(y-1)y.$	$\mu(x,y) = (y-1)/(x(1+sx-y)y$ $(lx+sx+y-1)).$

CONCLUZII GENERALE ŞI RECOMANDĂRI

În lucrare, din punct de vedere al teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, au fost studiate sistemele cubice de ecuaţii diferenţiale cu singularităţi rezonante şi cu drepte invariante. Pentru aceste sisteme s-a rezolvat problema deosebirii centrului de focar, sau problema centrului – o problemă ce stă la baza teoriei calitative a sistemelor diferenţiale polinomiale.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în rezolvarea completă a problemei centrului pentru sistemele diferenţiale cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci şi a problemei de clasificare şi integrabilitate a sistemelor cubice de tip Lotka-Volterra cu singularităţi $(1:-2)$ rezonante şi cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală şase şi şapte.

Concluzii generale:

1. În teza de faţă pentru prima dată s-a pus şi s-a rezolvat problema de determinare în clasa sistemelor cubice cu singularităţi rezonante a multiplicităţii maximale a unei drepte invariante afine şi a dreptei de la infinit, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al sistemelor cubice cu drepte invariante (Cap. 2, 2.1; Cap. 3, 3.1; Cap. 4, 4.1);

2. Clasificarea sistemelor cubice cu singularităţi rezonante şi cu drepte invariante de multiplicitate algebrică totală 4, 5, 6, 7 reprezintă o continuare a studiului sistemelor cubice cu drepte invariante, efectuat anterior (Cap. 2, 2.3-2.5; Cap. 3, 3.2-3.6; Cap. 4, 4.3, 4.5);

3. Singularitatea $(1:-1)$ rezonantă a sistemelor cubice cu drepte invariante multiple a căror multiplicitate totală este patru (cazul afin) sau cinci (prin enumerarea dreptei de

la infinit) este de tip centru, dacă şi numai dacă se anulează prima mărime Lyapunov, fapt ce uşurează studiul calitativ al sistemelor diferenţiale polinomiale (Cap. 2, 2.2, 2.3.6, 2.4.5, 2.6; Cap. 3, 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.5.6, 3.6.3).

Rezultatele obţinute pentru sistemele diferenţiale cubice cu singularităţi rezonante formează un studiu fundamental în rezolvarea problemei centrului. Conform concluziilor enunţate putem **recomanda următoarele:**

- rezultatele ce se conţin în teză pot fi folosite la investigarea sistemelor diferenţiale polinomiale cu drepte invariante multiple;

- metodele elaborate, cum ar fi şi cea de reducere a cercetării configuraţiilor prin aplicarea transformărilor, pot fi folosite la studierea ulterioară a sistemelor diferenţiale polinomiale cu curbe algebrice invariante;

- cercetările efectuate pot fi utilizate în studiul calitativ al sistemelor diferenţiale polinomiale cu singularităţi rezonante, la investigarea diferitor modele matematice din fizică, chimie, biologie ş. a. care descriu anumite procese sociale şi naturale;

- rezultatele obţinute pot fi incluse în programele cursurilor opţionale ţinute studenţilor şi masteranzilor la facultăţile universitare cu profil real sau tehnic.

LISTA PUBLICAŢIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI

Articole în reviste:

1. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Cubic differential systems with a weak focus and a real invariant straight line of maximal algebraic multiplicity. In: *Acta et Commentationes, Ştiinţe Exacte şi ale Naturii.* Chişinău, 2017, vol. 4, nr. 2, pp. 119–130. ISSN 2537–6284.

2. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Solution of the problem of the center for cubic differential systems with the line at infinity and an affine real invariant straight line of total algebraic multiplicity five. In: *Bulletin of ASM. Mathematics.* 2019, vol. 90, nr. 2, pp. 13–40. ISSN 1024–7696.

3. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Classification of cubic differential systems with a monodromic critical point and multiple line at infinity. In: *The Scientific Journal of Cahul State University "B.P. Hasdeu"* Cahul, Republica Moldova. 2019, nr. 2(6), pp. 100–105. ISSN 2587–313X.

4. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Solution of the center problem for cubic differential systems with one or two affine invariant straight lines of total algebraic multiplicity four. In: *ROMAI J.* 2020, vol. 15, nr. 2, pp. 101-116. ISSN 1841–5512.

5. **TURUTA, S.** Lotka-Volterra cubic differential systems with (1:-2)-singularity and invariant affine straight lines of two directions of total algebraic multiplicity six. In: *Acta et Commentationes, Ştiinţe Exacte şi ale Naturii.* 2016, vol. 2, nr. 2, pp. 71–87. ISSN 2537–6284.

6. **TURUTA, S.** Solution of the problem of the center for cubic differential systems with three affine invariant straight lines of total algebraic multiplicity four. In: *Bulletin of ASM. Mathematics.* 2020, vol. 92, nr. 1, pp. 89–105. ISSN 1024–7696.

Articole în culegeri ştiinţifice:

7. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Center problem and classification of cubic differential systems with the line at infinity of multiplicity three and an invariant affine straight line of multiplicity two. In: *The Fifth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova IMCS-55*, September 28-October 1, 2019, Chişinău, pp. 150–153. ISBN 978–9975–68–378–4.

8. **TURUTA, S.** Darboux first integrals of Lotka-Volterra cubic differential systems with (1:-2)-singularity having invariant straight lines of two directions and total multiplicity six.In: *Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători.* 25 mai 2016, Chişinău, pp.314–317. ISBN 978–9975-993-83-4.

Teze în lucrările conferinţelor:

9. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Maximal algebraic multiplicity of an invariant straight line of Lotka-Volterra cubic systems with (1:-2)-singularity. In: *International Conference: Mathematics Information Technologies: Research and Education (MITRE 2015),* 2-5 iulie 2015, Chişinău. Abstracts, pp. 79-80. ISBN 978–9975–71–678–9.

10. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Integrability of Lotka-Volterra cubic systems with (1:-2)-singularity having six invariant straight lines of two directions. In: *International Conference: Mathematics Information Technologies: Research and Education (MITRE 2016),* 23-26 iunie 2016, Chişinău. Abstracts, pp. 65–66. ISBN 978–8875–71–794–6.

11. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Cubic differential systems with a weak focus and an affine real invariant straight line of maximal multiplicity. In: *Book of Abstracts of Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM)*, September 14-17, 2017, Iaşi, România. pp. 22–24. ISSN 2537–2688.

12. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Centers in cubic differential systems with an affine invariant straight line of multiplicity two and the line at infinity of multiplicity three. In: *Book of Abstracts of Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM)*, September 19–22, 2019, Valahia University of Targoviste, Romania. pp. 27. ISSN 2537–2688.

13. ŞUBĂ, A.,**TURUTA, S.** Centers in cubic differential systems with the line at infinity of maximal multiplicity. In: *International Conference: Mathematics Information Technologies: Research and Education (MITRE 2019),* Iunie 24-25, 2019, Chişinău. Abstracts, pp. 60–61. ISBN 978–9975–149–17–4.

14. ŞUBĂ, A., **TURUTA, S.** Problem of the center for cubic differential systems with invariant straight lines, including the line at infinity, of total multiplicity five. In: *International scientific conference "Modern problems of Differential Equations and their application", dedicated to the 100th anniversary of the professor S.D. Eidelman*, 16-19 September, 2020, Chernivtsi, Ucraina, p. 77.

15. **TURUTA, S.** Integrability of Lotka-Volterra cubic systems with (1:-2)-singularity and six invariant real straight lines of two directions. In: *Conferinţa ştiinţifică naţională cu participare internaţională. Invăţământul superior din Republica Moldova la 85 ani.* 24-25 Septembrie 2015, Chişinău pp. 51–53. ISBN 978–9975–76–159–8.

16. **TURUTA, S.** Lotka-Volterra cubic sistems with (1:-2)-singularity and six invariant straight lines of two directions. In: *Conferinţa ştiinţifică Internaţională a doctoranzilor Tendinţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători.* 10 martie, 2015, Chişinău, pp. 26. ISBN 978–9975–3036–4–4.

17. **TURUTA, S.** Daboux integrability of Lotka-Volterra cubic differential systems with 1:-2 resonant singularity and six straight lines of three directions. In: *Book of Abstracts of Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM),* Craiova, September 15–18, 2016, Romania, pp. 43–44. ISSN 2537–2688.

18. **TURUTA, S.** Classification of Lotka-Volterra cubic systems with 1:-2 singularity and straight lines of three directions and total multiplicity six. In: *International scientific conference Diferential-Functional equations and their application.* 28–30 September, 2016, Chernivtsi, pp. 138.

ADNOTARE

Turuta Silvia, “Sisteme diferenţiale cubice cu singularităţi rezonante”. Teză de doctor în ştiinţe matematice. Chişinău, 2021.

Structura tezei: teza constă din introducere, 4 capitole, concluzii generale şi recomandări, bibliografie din 143 titluri, o figură, 3 tabele, 127 pagini de text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 18 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte-cheie: sistem diferenţial cubic, curbă algebrică invariantă, multiplicitate algebrică, singularitate rezonantă, problema centrului, integrabilitatea Darboux.

Scopul lucrării: clasificarea şi integrabilitatea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu singularităţi rezonante ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 4, 5, 6 şi 7.

Obiectivele cercetării: determinarea multiplicităţii maximale a unei drepte invariante afine (a dreptei de la infinit) pentru sistemele diferenţiale cubice cu singularităţi rezonante; clasificarea sistemelor cubice cu singularităţi rezonante şi cu drepte invariante multiple; studierea problemei de integrabilitate Darboux pentru sistemele obţinute.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică constă în cercetarea pentru prima dată a sistemelor diferenţiale cubice ce conţin singularităţi rezonante şi drepte invariante multiple, ţinându-se cont şi de dreapta de la infinit. A fost efectuată clasificarea afină a sistemelor cubice cu singularităţi (1:-1) şi (1:-2) rezonante ce posedă drepte invariante.

Rezultatele obţinute care contribuie la soluţionarea unei probleme ştiinţifice importante sunt rezolvarea completă a problemei centrului pentru sistemele cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate algebrică totală cinci şi a problemei de integrabilitate a sistemelor cubice de tip Lotka-Volterra cu singularităţi $(1 : -2)$ rezonante şi drepte invariante de multiplicitate totală 6 şi 7 (inclusiv dreapta de la infinit.

Semnificaţia teoretică: rezultatele obţinute în teză sunt noi şi reprezintă o etapă semnificativă în studiul sistemelor cubice cu drepte invariante.

Implementarea rezultatelor ştiinţifice: rezultatele tezei pot fi folosite: în investigaţiile ulterioare ale sistemelor cubice cu curbe algebrice invariante, în calitate de suport pentru perfectarea cursurilor opţionale universitare şi post-universitare, în studiul diverselor modele matematice ce descriu unele fenomene din fizică, chimie, biologie, economie ş. a.

АННОТАЦИЯ

Турута Силвия, ”Кубические дифференциальные системы с резонансными особенностями”. Диссертация доктора математических наук. Кишинэу, 2021.

Структура работы: состоит из введения, 4-х глав, общих выводов и рекомендаций, 143 источников литературы, одна фигура, 3 таблицы, 127 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 18 научных работах.

Ключевые слова: Кубическая дифференциальная система, алгебраическая инвариантная кривая, алгебраическая кратность, проблема центра, резонансная особенность, интегрируемость Дарбу. Область исследования: качественная теория дифференциальных уравнений.

Объект исследования: кубическая система дифференциальных уравнений с резонансными особенностями.

Цель работы: классификация и интегрируемость кубических систем дифференциальных уравнений с резонансными особенностями, обладающими инвариантными прямыми полной кратности 4, 5, 6 и 7.

Задачи исследования: определение максимальной кратности аффинной инвариантной прямой (линии на бесконечности) для кубических дифференциальных систем с резонансными особенностями; классификация кубических систем с резонансными особенностями и кратными инвариантными прямыми; исследование проблемы интегрируемости Дарбу полученных систем.

Новизна и научная оригинальность состоит впервые в исследовании кубических дифференциальных систем, содержащих резонансные особенности и кратные инвариантные прямые с учетом линии на бесконечности. Аффинная классификация кубических систем с резонансными особенностями $(1:-1)$ и $(1:-2)$, обладающие инвариантными прямыми.

Полученные результаты которые способствует решению важной научной проблемы: полном решении задачи центра для кубических систем с кратными инвариантными прямыми (включая прямую на бесконечности) общей алгебраической кратности пять и проблемы интегрируемости кубических систем Лотки-Вольтерры с резонансными особенностями $(1:-2)$ и инвариантными прямыми общей кратности 6 и 7 (включая прямую на бесконечности).

Теоретическая значимость: результаты, полученные в диссертации, являются новыми и представляют собой важный этап в изучении кубических систем с инвариантными прямыми.

Внедрение научных результатов: Результаты диссертации могут быть использованы: в исследованиях кубических систем с инвариантными алгебраическими кривыми, при разработке факультативных университетских и послевузовских курсов, изучение различных моделей математики, описывающие некоторые явления в физике, химии, биологии, экономике и др.

ANNOTATION

Turuta Silvia, "Cubic differential systems with resonant singularities", doctoral thesis in mathematical sciences, Chişinău, 2020.

Thesis structure: introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, bibliography of 143 titles, one figure, 3 tables, 127 pages of basic text. The obtained results were published in 18 scientific papers.

Keywords: cubic differential system, invariant straight line, algebraic multiplicity, resonant singularity, center problem, Darboux integrability.

The purpose of the work: classification and integrability of cubic systems of differential equations with resonant singularities and with invariant straight lines of total multiplicity 4, 5, 6 and 7.

Objectives of the research: determination of the maximal multiplicity of an invariant straight line (of the line at infinity) for cubic differential systems with resonant singularities; classification of cubic systems with resonant singularities and with multiple invariant straight lines; studying the problem of Darboux integrability for the obtained systems.

Scientific novelty and originality consists in the investigation, for the first time, of cubic differential systems with resonant singularities and with multiple invariant straight lines, including the line at infinity. The affine classification of cubic systems with $(1:-1)$ and $(1:-2)$ resonant singularities and with invariant straight lines was realized.

The obtained results which contribute to solve some important scientific problem: the complete solution of the center's problem for the cubic systems with invariant straight lines (including the line at infinity) of total algebraic multiplicity five and of the integrability's problem for the Lotka-Volterra cubic systems with $(1:-2)$ resonant singularity and with invariant straight lines of total multiplicity 6 and 7 (including the line at infinity).

The theoretical significance: the obtained results in this thesis are new and are a significant phase of the study of the cubic systems with invariant straight lines.

Implementation of the scientific results: the results of this thesis can be used: in the further investigations of cubic systems with invariant algebraic curves, as a support for perfecting undergraduate and postgraduate optional courses, in the study of some mathematical models which describe some processes in physics, chemistry, biology, economy and others.

Turuta Silvia

SISTEME DIFERENŢIALE CUBICE CU SINGULARITĂŢI REZONANTE

111.02 – ECUAŢII DIFERENŢIALE

Rezumatul tezei de doctor în ştiinţe matematice

Aprobat spre tipar: 07.06.2021	Formatul hârtiei: 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset.	Tirajul: 50 ex.
Coli de tipar:	Comanda nr.

Tipografia U.P.S. “ Ion Creangă”, str. I. Creangă, nr.1, MD 2069