

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII
AL REPUBLICII MOLDOVA
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
"VLADIMIR ANDRUNACHIEVICI"

Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 517.925

TURUTA SILVIA

SISTEME DIFERENȚIALE CUBICE CU
SINGULARITĂȚI REZONANTE

111.02 – ECUAȚII DIFERENȚIALE

Teză de doctor în științe matematice

Conducători științifici:

Șubă Alexandru,

doctor habilitat în științe fizico-
matematice, profesor universitar



Romanovski Valery,

doctor habilitat în științe fizico-
matematice, profesor universitar
(Slovenia)

Autorul:

Turuta Silvia

CHIȘINĂU, 2021

© Turuta Silvia, 2021

CUPRINS

ADNOTARE (română, rusă, engleză)	5
INTRODUCERE	8
1 SINGULARITĂȚI REZONANTE, CURBE ALGEBRICE INVARIANTE ȘI INTEGRABILITATEA SISTEMELOR DIFERENȚIALE POLINOMIALE.	16
1.1 Starea actuală a studiului problemei de integrabilitate pentru sistemele polinomiale cu singularități rezonante	16
1.2 Importanța curbelor algebrice invariante în studiul integrabilității sistemelor diferențiale polinomiale.	19
1.3 Multiplicitatea curbelor algebrice invariante pentru sistemele diferențiale polinomiale	29
1.4 Numărul de drepte invariante ce poate fi admis de un sistem diferențial polinomial	31
1.5 Concluzii la capitolul unu	33
2 SISTEMELE DIFERENȚIALE CUBICE CU SINGULARITĂȚI $(1 : -1)$ REZONANTE ȘI CU DREPTE INVARIANTE AFINE DE MULTIPLICITATE TOTALĂ PATRU.	34
2.1 Clasificarea sistemelor cubice cu focar slab și cu o dreaptă invariantă reală multiplă.	36
2.2 Integrabilitatea sistemelor (2.27), (2.28), (2.29).	41
2.3 Sistemele cubice (2.6) cu două drepte invariante afine $l_1, l_2, m(l_1) + m(l_2) \geq 4$	42
2.4 Sistemele cubice cu focar slab și cu trei drepte invariante reale $l_1, l_2, l_3, m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) \geq 4$	50
2.5 Sistemele cubice cu punct critic monodromic și trei drepte invariante $l_1, l_2, l_3, m(l_3) \geq 2, m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) \geq 4$, unde l_1, l_2 sunt complexe și l_3 este reală.	59
2.6 Concluzii la capitolul doi.	65
3 SISTEMELE DIFERENȚIALE CUBICE CU SINGULARITĂȚI $(1 : -1)$ REZONANTE ȘI CU DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE TOTALĂ CINCI, INCLUSIV DREAPTA DE LA INFINIT.	67

3.1	Sistemele cubice cu punct critic monodromic nedegenerat și dreapta de la infinit $l_\infty = 0$ de multiplicitatea $m(l_\infty) \geq 5$	67
3.2	Sistemele cubice (2.6) ce au dreapta de la infinit $l_\infty \equiv Z = 0$ și o dreaptă reală afină invariantă l_1 de multiplicitățile $m(l_\infty) \geq 4, m(l_1) \geq 1$	76
3.3	Sistemele cubice (2.6) ce au dreapta de la infinit și o dreaptă reală afină invariantă l_1 de multiplicitățile $m(l_\infty) \geq 3, m(l_1) \geq 2$	77
3.4	Sistemele cubice (2.6) ce au dreapta de la infinit și o dreaptă reală afină invariantă l_1 de multiplicitățile $m(l_\infty) \geq 2, m(l_1) \geq 3$	86
3.5	Sistemele cubice cu focar fin și două drepte invariante afine l_1, l_2 , pentru care $m(l_1) + m(l_2) + m(l_\infty) \geq 5$	86
3.6	Sistemele cubice cu focar fin și trei drepte invariante afine l_1, l_2, l_3 , pentru care $m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) + m(l_\infty) \geq 5$	93
3.7	Concluzii la capitolul trei.	102
4	SISTEME DIFERENȚIALE CUBICE CU SINGULARITĂȚI (1:-2) REZONANTE ȘI CU DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE TOTALĂ ȘASE ȘI ȘAPTE (INCLUSIV DREAPTA DE LA INFINIT).	104
4.1	Multiplicitatea algebrică maximală a dreptelor $x = a, y = a, a \in \mathbb{C}$ și $Z = 0$	107
4.2	Configurații posibile ale dreptelor invariante de două direcții de multiplicitate totală șase.	113
4.3	Clasificarea sistemelor cubice (4.1) cu drepte invariante de multiplicitate totală șase și de două direcții.	115
4.4	Configurații ale dreptelor invariante de trei și patru direcții de multiplicitatea totală șase.	119
4.5	Clasificarea sistemelor cubice (4.1) cu drepte invariante de multiplicitate totală șapte, inclusiv dreapta de la infinit.	120
4.6	Concluzii la capitolul patru.	122
	CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI	125
	BIBLIOGRAFIE	128
	DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII	143
	CV-ul AUTORULUI	144

ADNOTARE

Turuta Silvia, “Sisteme diferențiale cubice cu singularități rezonante”.

Teză de doctor în științe matematice. Chișinău, 2021.

Structura tezei: teza constă din introducere, 4 capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie din 143 titluri, o figură, 3 tabele, 127 pagini de text de bază. Rezultatele obținute sunt publicate în 18 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: sistem diferențial cubic, curbă algebrică invariantă, multiplicitate algebrică, singularitate rezonantă, problema centrului, integrabilitatea Darboux.

Scopul lucrării: clasificarea și integrabilitatea sistemelor cubice de ecuații diferențiale cu singularități rezonante ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 4, 5, 6 și 7.

Obiectivele cercetării: determinarea multiplicității maxime a unei drepte invariante afine (a dreptei de la infinit) pentru sistemele diferențiale cubice cu singularități rezonante; clasificarea sistemelor cubice cu singularități rezonante și cu drepte invariante multiple; studierea problemei de integrabilitate Darboux pentru sistemele obținute.

Noutatea și originalitatea științifică constă în cercetarea pentru prima dată a sistemelor diferențiale cubice ce conțin singularități rezonante și drepte invariante multiple, ținându-se cont și de dreapta de la infinit. A fost efectuată clasificarea afină a sistemelor cubice cu singularități $(1:-1)$ și $(1:-2)$ rezonante ce posedă drepte invariante.

Rezultatele obținute care contribuie la soluționarea unei probleme științifice importante sunt rezolvarea completă a problemei centrului pentru sistemele cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate algebrică totală cinci și a problemei de integrabilitate a sistemelor cubice de tip Lotka-Volterra cu singularități $(1:-2)$ rezonante și drepte invariante de multiplicitate totală 6 și 7 (inclusiv dreapta de la infinit).

Semnificația teoretică: rezultatele obținute în teză sunt noi și reprezintă o etapă semnificativă în studiul sistemelor cubice cu drepte invariante.

Implementarea rezultatelor științifice: rezultatele tezei pot fi folosite: în investigațiile ulterioare ale sistemelor cubice cu curbe algebrice invariante, în calitate de suport pentru perfectarea cursurilor opționale universitare și post-universitare, în studiul diverselor modele matematice ce descriu unele fenomene din fizică, chimie, biologie, economie ș. a.

АННОТАЦИЯ

Турута Силвия, "Кубические дифференциальные системы с резонансными особенностями". Диссертация доктора математических наук. Кишинэу, 2021.

Структура работы: состоит из введения, 4-х глав, общих выводов и рекомендаций, 143 источников литературы, одна фигура, 3 таблицы, 127 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 18 научных работах.

Ключевые слова: Кубическая дифференциальная система, алгебраическая инвариантная кривая, алгебраическая кратность, проблема центра, резонансная особенность, интегрируемость Дарбу. Область исследования: качественная теория дифференциальных уравнений.

Объект исследования: кубическая система дифференциальных уравнений с резонансными особенностями.

Цель работы: классификация и интегрируемость кубических систем дифференциальных уравнений с резонансными особенностями, обладающими инвариантными прямыми полной кратности 4, 5, 6 и 7.

Задачи исследования: определение максимальной кратности аффинной инвариантной прямой (линии на бесконечности) для кубических дифференциальных систем с резонансными особенностями; классификация кубических систем с резонансными особенностями и кратными инвариантными прямыми; исследование проблемы интегрируемости Дарбу полученных систем.

Новизна и научная оригинальность состоит впервые в исследовании кубических дифференциальных систем, содержащих резонансные особенности и кратные инвариантные прямые с учетом линии на бесконечности. Аффинная классификация кубических систем с резонансными особенностями $(1 : -1)$ и $(1 : -2)$, обладающие инвариантными прямыми.

Полученные результаты которые способствует решению важной научной проблемы: полном решении задачи центра для кубических систем с кратными инвариантными прямыми (включая прямую на бесконечности) общей алгебраической кратности пять и проблемы интегрируемости кубических систем Лотки-Вольтерры с резонансными особенностями $(1 : -2)$ и инвариантными прямыми общей кратности 6 и 7 (включая прямую на бесконечности).

Теоретическая значимость: результаты, полученные в диссертации, являются новыми и представляют собой важный этап в изучении кубических систем с инвариантными прямыми.

Внедрение научных результатов: Результаты диссертации могут быть использованы: в исследованиях кубических систем с инвариантными алгебраическими кривыми, при разработке факультативных университетских и послевузовских курсов, изучение различных моделей математики, описывающая некоторые явления в физике, химии, биологии, экономике и др.

ANNOTATION

Turuta Silvia, “Cubic differential systems with resonant singularities”.

Doctoral thesis in mathematical sciences. Chişinău, 2021.

Thesis structure: introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, bibliography of 143 titles, one figure, 3 tables, 127 pages of basic text. The obtained results were published in 18 scientific papers.

Keywords: cubic differential system, invariant straight line, algebraic multiplicity, resonant singularity, center problem, Darboux integrability.

The purpose of the work: classification and integrability of cubic systems of differential equations with resonant singularities and with invariant straight lines of total multiplicity 4, 5, 6 and 7.

Objectives of the research: determination of the maximal multiplicity of an invariant straight line (of the line at infinity) for cubic differential systems with resonant singularities; classification of cubic systems with resonant singularities and with multiple invariant straight lines; studying the problem of Darboux integrability for the obtained systems.

Scientific novelty and originality consists in the investigation, for the first time, of cubic differential systems with resonant singularities and with multiple invariant straight lines, including the line at infinity. The affine classification of cubic systems with $(1 : -1)$ and $(1 : -2)$ resonant singularities and with invariant straight lines was realized.

The obtained results which contribute to solve some important scientific problem: the complete solution of the center’s problem for the cubic systems with invariant straight lines (including the line at infinity) of total algebraic multiplicity five and of the integrability’s problem for the Lotka-Volterra cubic systems with $(1 : -2)$ resonant singularity and with invariant straight lines of total multiplicity 6 and 7 (including the line at infinity).

The theoretical significance: the obtained results in this thesis are new and are a significant phase of the study of the cubic systems with invariant straight lines.

Implementation of the scientific results: the results of this thesis can be used: in the further investigations of cubic systems with invariant algebraic curves, as a support for perfecting undergraduate and postgraduate optional courses, in the study of some mathematical models which describe some processes in physics, chemistry, biology, economy and others.

INTRODUCERE

Teza de față ține de teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. În ea sunt studiate sistemele cubice de ecuații diferențiale ce au singularități rezonante și drepte invariante.

Actualitatea și importanța problemei abordate.

O bună parte din problemele importante ale fizicii, chimiei, ingineriei impun în formularea lor matematică calcularea unei funcții care, împreună cu derivatele sale, satisface o relație dată. Acest tip de relații se numesc ecuații diferențiale. Deoarece majoritatea fenomenelor și proceselor din întreaga lume se modelează cu ajutorul ecuațiilor diferențiale, se justifică necesitatea dezvoltării teoriei acestora, precum și necesitatea de a le clasifica. Un exemplu concret reprezintă sistemele de ecuații diferențiale de tip Lotka-Volterra. Aceste sisteme au două drepte invariante și descriu, odată cu trecerea timpului, interacțiunea dintre specii. La fel, ele descriu decurgerea unor reacții chimice ș.a.

Evoluția ecuațiilor diferențiale a fost în strânsă legătură cu dezvoltarea calculului integral. Au fost determinate familii de ecuații diferențiale rezolvabile în cuadraturi (integrări). Isac Newton, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli și Daniel Bernoulli se consideră primii matematicieni care au adus contribuții notabile la dezvoltarea ecuațiilor diferențiale. Urmează J. Riccati, L. Euler, J. Lagrange. Secolul al XIX-lea se caracterizează prin cercetarea problemei de existență, unicitate și comportare a soluțiilor ecuațiilor diferențiale. A. Cauchy, R. Lipschitz și G. Peano au impus metoda liniilor poligonale (utilizată anterior și de Euler) ca metodă eficientă de demonstrare a existenței locale a soluției unei ecuații diferențiale cu condiții inițiale.

Studiile inițiale asupra ecuațiilor diferențiale au avut ca obiectiv existența soluțiilor sau aproximarea acestora, mai exact determinarea explicită a soluțiilor atunci când acest lucru este posibil. H. Poincaré (1854–1912) și J.C. Maxwell (1831–1879) au contribuit la determinarea soluțiilor prin studiul lor asupra stabilității mișcării corpurilor cerești, apoi în a doua jumătate a secolului al XIX-lea matematicianul rus A.M. Lyapunov (1857–1918), în teza sa de doctorat, susținută în 1892, a definit principalele noțiuni de stabilitate, astfel punând bazele teoriei moderne a stabilității soluțiilor. Un salt calitativ în abordarea ecuațiilor diferențiale a avut loc în secolul al XX-lea prin introducerea unor metode noi precum cea a gradului topologic, teoria bifurcațiilor etc. Astfel, s-au obținut rezultate notabile în studiul ecuațiilor diferențiale în spații infinit dimensionale .

Referitor la sistemele de ecuații diferențiale, principalele probleme ale teoriei calitative

a acestora constau în determinarea comportării curbelor integrale în vecinătatea punctelor singulare; în delimitarea centrului de focar; în existența, numărul și poziția reciprocă a ciclurilor limită; în calcularea integralelor prime.

Personalitățile remarcabile, care au studiat comportarea traiectoriilor în vecinătatea punctelor singulare, precum și clasificarea acestor puncte, sunt H. Poincaré, A. Lyapunov, I. Bendixon, M. Frommer, H. Dulac. Procedeele și metodele folosite de acești matematicieni și-au găsit continuitatea în lucrările lui A. Andronov, E. Leontovich, I. Gordon și A. Mayer în [1], iar mai târziu, în a lui J. Argemi, H. Forster, S. Lefschitz, F. Takens, V. Arnold, L. Pontryagin, N. Bautin, F. Dumortier, A. Andreev, A. Bruno ș.a.

Privitor la problema delimitării centrului de focar, pentru sistemele pătratice și cubice, putem afirma că a fost tratată în lucrările lui H. Dulac, W. Kapteyn, M. Frommer, N. Saharnicov, I. Kukles, C. Sibirschi, A. Sadovskii, K. Malkin, I. Shirov, D. Boularas, M. Popa, N. Vulpe, D. Cozma, A. Șubă, H. Żoładek, R. Kooij și alții.

În lucrările [38], [39], [40], [105], [107], A. Șubă și D. Cozma au cercetat problema centrului pentru sistemul diferențial cubic cu drepte invariante. În ele a fost complet rezolvată problema dată pentru sistemele cubice cu cel puțin trei drepte invariante. Rezultate generale ce țin de problema centrului pentru sistemele diferențiale polinomiale se cunosc doar acele obținute de H. Poincaré, A. Lyapunov, M. Popa și V. Pricop. Primii doi echivalează problema enunțată cu problema de integrabilitate, iar ultimii doi [77] evaluează numărul de mărimi focale necesare soluționării ei.

În ceea ce privește numărul și poziția reciprocă a ciclurilor limită ale sistemelor polinomiale de ecuații diferențiale, menționăm lucrările matematicienilor N. Bautin, L. Cherkas, W. Coppel, W. van Horssen, J. Reyn, F. Dumortier, R. Roussarie, C. Rousseau, V. Gaiko, L. Gilevici, V. Amelkin, N. Lukășevici, A. Sadovskii, A. Zegeling, R. Kooij, Suo Guagilan, Sun Jifang, Ye Yanqian, A. Grini și alții.

Metoda principală de integrare a sistemelor polinomiale de ecuații diferențiale este metoda Darboux, care constă în construirea integralei prime utilizând curbele algebrice invariante. Această metodă este dezvoltată în lucrările lui J. Chavarriga, J. Llibre, J. Sotomayor, C. Christopher, J. Pereira, D. Schlomiuk, R. Kooij. În lucrările acestor cercetători, la determinarea integralei prime, s-au luat în vedere nu doar curbele algebrice invariante, dar și funcțiile exponențiale invariante, precum și punctele singulare independente.

Cercetătorii W. Buchel, A. Berlinski, J. Reyn, R. Kooij, P. de Jager, J. Artes, J. Llibre,

T. Date, N. Vulpe, D. Schlomiuk, D. Cozma, A. Şubă, V. Puţuntică, V. Repeşco, A. Cima, B. Colla ş. a. au efectuat clasificarea topologică a sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale şi au construit portretele de fază corespunzătoare. La studierea sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu curbe algebrice invariante şi, mai ales, cu drepte invariante, au contribuit J. Artes, B. Grünbaum, J. Llibre, C. Christopher, J. Pereira, T. Druzhkova, J. H. Grace, A. Young, R. Lyubimova, M. Popa, C. Sibirschi, D. Schlomiuk, N. Vulpe, J. Sokulski, Zhang Xiang, R. Kooij, D. Cozma, A. Şubă, V. Puţuntică, V. Repeşco, C. Bujac,

Este cunoscut, că în partea finită a planului fazic, sistemul cubic nedegenerat de ecuaţii diferenţiale are cel mult opt drepte invariante. Cercetarea calitativă a sistemelor cubice cu exact şapte şi a celor cu exact opt drepte invariante reale şi distincte a fost efectuată de R. Lyubimova în [71]. J. Llibre şi N. Vulpe în lucrarea [72] au cercetat sistemele diferenţiale cubice cu drepte invariante luând în considerare multiplicitatea dreptelor invariante şi dreapta de la infinit. Sistemele cubice cu drepte invariante afine de multiplicitate paralelă totală egală cu şapte au fost studiate şi clasificate de A. Şubă, V. Repeşco şi V. Puţuntică în [109] şi [110], iar sistemele cubice ce conţin drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu cinci sau cu şase, şi al căror infinit este degenerat - de către A. Şubă şi V. Repeşco în [83]. Studiul calitativ al sistemelor cubice de ecuaţii diferenţiale cu drepte invariante de multiplicitate totală opt, considerând şi dreapta de la infinit, a fost efectuat de către N. Vulpe şi C. Bujac ([8], [9], [11], [12]), iar pentru sistemele cubice cu şase drepte invariante reale de două şi de trei direcţii au fost obţinute formele canonice şi portretele fazice (V. Puţuntică şi A. Şubă în [81, 82]).

Pentru sistemul cubic problema existenţei a dreptelor invariante distincte şi a punctelor critice de tip centru a fost studiată în [38], [39], [102], [105], [106], [107].

În teza de faţă sunt continuate cercetările efectuate de A. Şubă şi D. Cozma referitoare la rezolvarea problemei de integrabilitate (sau, în cazul dat, a problemei centrului) a sistemelor cu puncte critice $(1 : -1)$ rezonante şi cu patru drepte invariante. La ei s-a presupus că dreptele sunt distincte, iar despre linia de la infinit nu se spune nimic. În lucrarea prezentă se completează investigaţiile profesorilor A. Şubă şi D. Cozma până la soluţionarea completă a problemei centrului pentru sistemele cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci. Mai exact, în teză problema centrului este rezolvată în cazurile când:

A) multiplicitatea totală a dreptelor invariante afine este patru şi cel puţin una dintre

aceste drepte are multiplicitatea mai mare ca unu;

B) multiplicitatea dreptei de la infinit este mai mare ca unu, iar aceasta, împreună cu dreptele afine invariante, au multiplicitatea totală egală cu cinci.

Privitor la singularitățile $(1 : -2)$ rezonante în lucrarea de față

C) sunt studiate la integrabilitate sistemele cubice de tip Lotka-Volterra ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 6, 7 (ținându-se cont și de dreapta de la infinit).

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul principal al lucrării constă în clasificarea sistemelor cubice de ecuații diferențiale cu singularități rezonante $((1 : -1)$ și $(1 : -2))$ ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 4, 5, 6, 7 și rezolvarea problemei de integrabilitate a acestora.

Realizarea acestui scop a fost însoțită de următoarele obiective:

- determinarea multiplicității maxime a unei drepte invariante reale pentru sistemul cubic cu singularități $(1 : -1)$ și $(1 : -2)$ rezonante;
- determinarea multiplicității maxime a liniei de la infinit pentru sistemul cubic cu singularități $(1 : -1)$ și $(1 : -2)$ rezonante;
- clasificarea sistemelor cubice cu singularități $(1 : -1)$ rezonante ce posedă drepte invariante de multiplicitate algebrică totală 4, 5 (inclusiv dreapta de la infinit);
- clasificarea sistemelor cubice de tip Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -2)$ rezonante ce posedă drepte invariante de multiplicitate algebrică totală 6, 7 (inclusiv dreapta de la infinit);
- rezolvarea în clasele sistemelor cubice obținute a problemei de integrabilitate.

Ipoteza de cercetare. Pentru sistemul cubic de ecuații diferențiale cu singularități $(1 : -1)$ și $(1 : -2)$ rezonante ce posedă drepte invariante de multiplicitate algebrică totală 4, 5 (inclusiv dreapta de la infinit), și, respectiv, 6, 7 (inclusiv dreapta de la infinit), problema centrului va fi rezolvată dacă: se va construi toate configurațiile posibile de drepte invariante, considerând și multiplicitățile lor; se va aplica metoda Darboux de integrabilitate și se vor analiza mărimile focale.

Metodologia cercetării științifice. În lucrare au fost aplicate metodele teoriei calitative a sistemelor de ecuații diferențiale și metodele algebrei de calcul computațional. Problema centrului pentru sistemele diferențiale cubice ce posedă drepte invariante este cercetată prin folosirea metodei de integrabilitate Darboux.

Noutatea și originalitatea științifică. În această lucrare pentru prima dată sunt

examinează cazurile când printre dreptele invariante afine ale sistemelor cubice de ecuații diferențiale sunt și drepte multiple și, totodată, se ia în considerare și multiplicitatea liniei de la infinit. Investigațiile s-au soldat cu următoarele rezultate:

- a fost determinată multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine și a liniei de la infinit pentru sistemele cubice cu singularități $(1:-1)$ și $(1:-2)$ rezonante;
- a fost efectuată clasificarea sistemelor cubice cu singularități $(1:-1)$ rezonante și o dreaptă invariantă reală sau linia de la infinit, de multiplicitate maximală;
- a fost efectuată clasificarea sistemelor cubice cu singularități $(1:-1)$ și $(1:-2)$ rezonante ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală 4, 5, 6, 7.

Problema științifică importantă soluționată constă în rezolvarea completă a problemei centrului pentru sistemele diferențiale cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci și a problemei de clasificare și integrabilitate a sistemelor cubice de tip Lotka-Volterra cu singularități $(1:-2)$ rezonante și cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală șase și șapte.

Semnificația teoretică. În această teză pentru prima dată s-a formulat și s-a rezolvat problema de determinare în clasa sistemelor diferențiale cubice cu singularități $(1:-1)$ și $(1:-2)$ rezonante a multiplicității maxime a unei drepte invariante afine, a dreptei de la infinit; la fel s-a efectuat clasificarea acestor sisteme, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al sistemelor cubice ce posedă drepte invariante.

Valoarea aplicativă a lucrării. Această lucrare poartă un caracter teoretic, însă ea are și largi perspective aplicative prin intersecția sa cu familia de sisteme diferențiale de tip Lotka-Volterra. Rezultatele obținute pot fi incluse în programele cursurilor opționale ținute studenților și masteranzilor facultăților de matematică și fizică. La fel, ele se vor lua în considerație și în studiul de mai departe al sistemelor diferențiale polinomiale.

Rezultatele științifice principale înaintate spre susținere:

- determinarea multiplicității maxime a unei drepte invariante reale pentru sistemul cubic cu singularități $(1:-1)$ și $(1:-2)$ rezonante;
- calcularea multiplicității maxime a dreptei de la infinit pentru sistemul cubic cu singularități $(1:-1)$ și $(1:-2)$ rezonante;
- clasificarea sistemelor cubice cu singularități $(1:-1)$ și $(1:-2)$ rezonante și cu drepte invariante afine de multiplicitate totală 4, 6;
- clasificarea sistemelor cubice cu singularități $(1:-1)$ și $(1:-2)$ rezonante și cu drepte

invariante de multiplicitate totală 5, 7, luând în considerare și dreapta de la infinit;

- soluționarea completă a problemei centrului pentru sistemele diferențiale cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci;

- rezolvarea problemei de integrabilitate pentru sistemele diferențiale cubice de tip Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -2)$ rezonante și cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală șase și șapte.

Implementarea rezultatelor științifice.

Rezultatele obținute în teză pot fi aplicate:

- la studierea sistemelor diferențiale cubice ce posedă drepte invariante;
- la cercetarea anumitor modele matematice ce guvernează unele procese chimice, fizice, biologice, sociale ș.a.;
- ca subiecte pentru teme de teze de masterat și pot servi ca bază a unor cursuri opționale pentru masteranzi și studenții specialităților universitare de matematică.

Aprobarea rezultatelor științifice. Rezultatele principale ale lucrării au fost raportate și aprobate la:

- Conferința științifică Internațională a doctoranzilor: Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători, 10 martie, 2015, Chișinău;
- International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), July 2-5, 2015, Chișinău;
- Conferința științifică națională cu participare internațională. Învățământul superior din Republica Moldova la 85 ani, 24-25 septembrie 2015, Chișinău;
- Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), September 15-18, 2016, Craiova, Romania;
- The International Scientific Conference: Differential-Functional Equations and their Application, September 28-30, 2016, Chernivtsi, Ukraine;
- Conferința științifică Internațională a doctoranzilor: Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători, 25 mai, 2016, Chișinău;
- International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), June 23-26, 2016, Chișinău;
- Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), September 14-17, 2017, Iași, Romania;
- Conferința Științifică internațională: Perspectivele și problemele integrării în Spațiul

European al Cercetării și Educației, Universitatea de Stat "Bogdan Petriceicu Hașdeu" din Cahul, 6 iunie 2019, Cahul. Republica Moldova;

– International Conference: Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE), June 24-25, 2019, Chișinău;

– Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM), September 19-22, 2019, Targoviste, Romania;

– The Fifth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova IMCS-55, September 28-October 1, 2019, Chișinău;

– The International scientific conference "Modern problems of Differential Equations and their application", September 16-19, 2020, Chernivtsi, Ukraine;

– seminarul dedicat profesorului A. Belousov, Institutul de Matematică și Informatică "Vladimir Andrunachievici", 19 februarie 2016, Chișinău;

– seminarul "Ecuatii Diferențiale și Algebre" din cadrul Universității de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chișinău): 2016, 2017, 2018, 2019, 2020;

Publicații. Rezultatele principale ale lucrării au fost prezentate în cadrul multor forumuri științifice din Moldova, România, Ucraina și publicate în 18 lucrări: 6 articole științifice [114], [116], [118], [121], [132], [133] (2 articole fără coautor), 2 lucrări în materialele unor conferințe științifice ([120] [130]) (o lucrare fără coautor) și 10 teze ale comunicărilor la diferite conferințe științifice [111], [112], [113], [115], [119], [122], [127], [128], [129], [131] (4 fără coautor).

Volumul și structura tezei. Teza este scrisă în limba română și constă din: introducere, 4 capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie (143 titluri), 127 pagini text de bază, adnotarea în limbile română, rusă și engleză.

Cuvinte-cheie: sistem diferențial cubic, curbă algebrică invariantă, multiplicitate algebrică, singularitate rezonantă, problema centrului, integrabilitatea Darboux.

Domeniul de studiu: teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, integrabilitatea sistemelor diferențiale polinomiale.

Sumarul capitolelor tezei:

În **primul capitol**, format din cinci secțiuni, sunt enunțate rezultatele clasice și recente ce țin de teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. Se face o analiză comparativă a situației existente în domeniu, se formulează problema de cercetare și direcțiile de soluționare a ei.

În **capitolul II**, format din șapte secțiuni, pentru sistemele cubice cu singularități ($1 : -1$)

rezonante, notate $SC(1 : -1)$, este determinată multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine reale. Folosind grupul afin de transformări al planului de faze și rescalarea timpului este efectuată clasificarea sistemelor $SC(1 : -1)$ cu una, două, trei drepte invariante distincte reale și complexe de multiplicitate totală patru. Pentru fiecare clasă obținută este adusă integrala primă Darboux sau factorul integrant Darboux.

În **capitolul III**, format din șapte secțiuni, pentru sistemele $SC(1 : -1)$ este calculată multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit. În presupunerea că această dreaptă este multiplă, adică multiplicitatea algebrică a ei e mai mare ca unu, este efectuată clasificarea sistemelor $SC(1 : -1)$ ce posedă drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci și este rezolvată problema de integrabilitate.

În **capitolul IV**, format din șase secțiuni, sunt studiate sistemele diferențiale cubice de tip Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -2)$ rezonante, notate $SCLV(1 : -2)$. Pentru această familie de sisteme este determinată multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine, cât și a dreptei de la infinit. Este efectuată clasificarea sistemelor $SCLV(1 : -2)$ ce posedă drepte invariante de multiplicitate totală șase și, respectiv, șapte, inclusiv dreapta de la infinit. Sunt aduse integralele prime sau factorii integranți.

La final, sunt expuse concluziile generale și recomandări.

1. SINGULARITĂȚI REZONANTE, CURBE ALGEBRICE INVARIANTE ȘI INTEGRABILITATEA SISTEMELOR DIFERENȚIALE POLINOMIALE.

Sistemele polinomiale diferențiale și, în special, sistemele de tip Lotka-Volterra, sunt intens cercetate de mai mulți oameni de știință, deoarece au o aplicare amplă. Cea mai cunoscută aplicație fiind în teoria populației, dar au aplicații largi și în alte domenii cum ar fi: fizica laserului, fizica plasmei, hidrodinamică, chimie, ecologie, sociologie, etc.

Capitolul dat conține rezultatele clasice și recente ale teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale folosite în această teză. Se face o analiză comparativă a situației existente în domeniu, se formulează problema de cercetare și direcțiile de soluționare a ei.

1.1. Starea actuală a studiului problemei de integrabilitate pentru sistemele polinomiale cu singularități rezonante

Pentru început, ne vom referi la unele sisteme diferențiale cu singularități de diferite rezonanțe ce au fost supuse cercetării până la ziua de astăzi. După cum s-a menționat și mai sus, de un viu interes se bucură sistemul introdus de Lotka și Volterra, ce apare în chimie și ecologie, și care reprezintă modelul a două specii din natură ce interacționează între ele. Acest sistem este utilizat pe scara largă în matematica aplicată și într-o mare varietate de subiecte fizice, cum ar fi fizica laserului, fizica plasmei, rețelele neuronale, hidrodinamică, etc [17].

Cercetarea sistemelor diferențiale polinomiale Lotka-Volterra cu singularități $(p : -q)$ rezonante este relativ nouă și actuală. Pentru sistemul diferențial pătratic și cubic a fost complet rezolvată problema integrabilității atunci când singularitatea e $(1 : -1)$ rezonantă în 1908 de Dulac H. [51], în 1974 de Sadovski A. [91] și apoi în 2001 de Christopher C. și Rousseau C. [28]. În cazul singularității $(1 : -2)$ rezonante, studiul pentru sistemul diferențial pătratic este complet efectuat în anul 1998 de către Fronville A., Sadovski A. și Zoladek H. [54], unde sunt aduse condițiile necesare și suficiente de integrabilitate (20 de cazuri). În lucrarea [32], publicată în anul 2000, Christopher C., Mardesic P. și Rousseau C. obțin

condițiile necesare și suficiente de integrabilitate în $\mathbb{C}^2$ pentru sistemul pătratic de aceeași rezonanță $(1 : -2)$ (15 cazuri). Iar în cazul rezonanței $(1 : -3)$, problema integrabilității este complet rezolvată în 2013 de către Dukarić M., Ferčes B. și Giné J. [49].

În anul 2002 Gravel S. și Thibault P. au determinat condițiile de integrabilitate și liniarizare pentru sistemul Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -\lambda)$ rezonante, pentru $\lambda = p/2$, și $\lambda = 2/p$, $p \in \mathbb{N}^*$ [59]. Apoi, în 2003 Liu C., Chen G. și Li C. determină condițiile suficiente de integrabilitate a sistemelor cubice Lotka-Volterra cu singularități $(3 : -q)$ rezonante de forma

$$\dot{x} = 3x + ax^2 + bxy, \quad \dot{y} = -qy + cxy + dy^2.$$

Mai exact, pentru rezonanțele $(3 : -4)$ și $(3 : -5)$ s-au determinat condițiile necesare și suficiente de integrabilitate a acestor sisteme [69].

Un an mai târziu Christopher C. și Rousseau C., au studiat liniarizarea, normalizarea și integrabilitatea sistemelor

$$\dot{x} = x(1 + ax + by), \quad \dot{y} = y(-\lambda + cx + dy),$$

pentru $\lambda = p/q$, $p + q \leq 12$ și $\lambda = n/2, 2/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ [29].

În lucrarea [58], publicată în anul 2009, Giné J. și Romanovski V.G. prezintă condițiile necesare și suficiente pentru ca sistemul complex Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - a_{40}x^4 - a_{31}x^3y - a_{22}x^2y^2 - a_{13}xy^3 - a_{04}y^4), \\ \dot{y} &= -y(1 - b_{40}x^4 - b_{31}x^3y - b_{22}x^2y^2 - b_{13}xy^3 - b_{04}y^4), \end{aligned}$$

să aibă centru în originea de coordonate $(0,0)$, adică să aibă integrală primă de forma $\Psi(x, y) = xy + \sum_{j+k \geq 3} \psi_{j-1, k-1} x^j y^k$. Cazul real a fost studiat în [20] de către Chavarriga J. și Giné J.

Pentru sistemul

$$\dot{x} = x(1 - a_{20}x^2 - a_{11}xy - a_{02}y^2), \quad \dot{y} = y(-q + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2),$$

în anul 2012, Chen X., Giné J., Romanovski V.G. și Shafer D.S. determină condițiile necesare pentru ca acest sistem să admită integrală primă de forma $\Phi(x, y) = x^q y + \dots$ în vecinătatea originii care este punct critic $(1 : -q)$ rezonant. Sunt obținute condiții necesare și suficiente de integrabilitate pentru q impar, $q \leq 9$ (vezi [23]).

Integrabilitatea sistemelor Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -(3q - 1))$ rezonante este investigată de Liu C., Chen G. și Chen G. în lucrarea *Integrability of Lotka-Volterra type systems of degree 4*, publicată în 2012, [70]. În această lucrare, prin studierea primelor două

mărimi $\mathfrak{z}a$, se obțin câteva condiții suficiente de integrabilitate și unele condiții necesare pentru sistemului Lotka-Volterra de gradul 4

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 + P) = x(1 + a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3), \\ \dot{y} &= y(-\lambda + Q) = y(-\lambda + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3),\end{aligned}$$

unde $\lambda \geq 2$ este un număr întreg.

Pentru obținerea condițiilor de centru ei calculează mărimile $\mathfrak{z}a$, asemănătoare cu mărimile focale Lyapunov-Poincaré. Mai întâi, calculează termenii succesivi din seria Taylor atribuită integralei prime, după care numerele $\mathfrak{z}a$ Λ_k : $H = x^qy^p + \dots$, $\dot{H} = \sum \Lambda_k(x^qy^p)^{k+1}$. Numerele $\mathfrak{z}a$ Λ_k sunt polinoame în coeficienții sistemului și ele se calculează cu ajutorul unui algoritm, pentru P și Q concreți. În această familie de sisteme, pentru singularitățile $(1 : -2)$, $(1 : -5)$ și $(1 : -8)$ rezonante, se obțin condițiile necesare și suficiente de integrabilitate.

În anul 2013 Feréec B., Giné J., Liu Y., Romanovski G. în [52] determină condițiile de integrabilitate pentru sistemul diferențial Lotka-Volterra de gradul patru cu singularități $(1 : -1)$ rezonante de forma

$$\dot{x} = x(1 - a_{30}x^3 - a_{21}x^2y - a_{12}xy^2 - a_{03}y^3), \quad \dot{y} = -y(1 - b_{30}x^3 - b_{21}x^2y - b_{12}xy^2 - b_{03}y^3),$$

iar Dolićanin D., Giné J., Oliveira R. și Romanovski V., pentru sistemul cubic diferențial Lotka-Volterra cu singularități $(2 : -3)$ rezonante de forma

$$\dot{x} = x(2 - a_{20}x^2 - a_{11}xy - a_{02}y^2), \quad \dot{y} = y(-3 + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2),$$

aduc condițiile pentru care acest tip de sistem, cu $a_{11} = 1$ și b_{11} arbitrar, admite integrală primă de forma $\phi(x, y) = x^3y^2 \dots$ în vecinătatea punctului $(0, 0)$ [48]. Acest sistem a fost studiat și în [55], unde autorii Giné J., Christopher C., Preřern M., Romanovski V.G. și Shcheglova N.L. s-au limitat la cazurile unde ambii sau doar unul dintre coeficienții a_{11} și b_{11} sunt zero, sau ambii egali cu unu.

Sistemul cubic complex Lotka-Volterra este studiat în lucrarea [50] de către Dukaric și Giné, în 2016, unde sunt obținute condiții necesare de integrabilitate cu câteva restricții asupra parametrilor. Utilizând diferite metode, suficiența este demonstrată pentru toate condițiile, cu excepția unei singure condiții.

Alte rezultate ce țin de integrabilitatea și liniarizarea sistemelor Lotka-Volterra cu singularități $(p : -q)$ rezonante pot fi găsite în lucrările [57], [56], [60], [86], [136].

Menționăm că în lucrarea de față sunt supuse studiului sistemele diferențiale cubice Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -2)$ rezonante.

1.2. Importanța curbelor algebrice invariante în studiul integrabilității sistemelor diferențiale polinomiale.

La determinarea integralelor prime ale sistemelor polinomiale de ecuații diferențiale un rol esențial îl au curbele algebrice invariante.

Noțiunea de curbă algebrică invariantă a fost introdusă de Darboux în anul 1878 în lucrarea [45] consacrată integrabilității ecuațiilor diferențiale polinomiale de ordinul întâi. Noțiunea dată poate fi ușor modificată și potrivită pentru sistemele diferențiale polinomiale $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$. Conform [45], o curbă algebrică $f(x, y) = 0$, unde f este un polinom din $\mathbb{C}[x, y]$, este o *curbă algebrică invariantă* pentru sistemul diferențial, dacă există un așa polinom $K(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, numit cofactorul curbei invariante $f(x, y) = 0$, încât are loc identitatea $\mathbb{X}(f) \equiv fK$. Cu $\mathbb{X}$ s-a notat câmpul vectorial $\mathbb{X} = (P, Q)$ asociat sistemului polinomial.

Darboux a demonstrat că problema de integrabilitate a sistemelor polinomiale poate fi rezolvată utilizând curbele algebrice invariante. Concepția sa de bază consta în construirea pentru sistemul diferențial polinomial a integralei prime (a factorului integrant) de forma, numită forma Darboux, $\prod_{i=1}^p f_i^{\alpha_i}$, unde f_i sunt polinoamele prin intermediul cărora se definesc curbele algebrice invariante ale sistemului dat, iar α_i sunt niște numere complexe oarecare. În particular, el a arătat că dacă un sistem diferențial polinomial de gradul n are p curbe algebrice invariante $f_i = 0$, cofactorii cărora K_i verifică, pentru niște numere oarecare $\alpha_i \in \mathbb{C}$, nu toate egale cu zero, și $\rho \in \{0, 1\}$, relația

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i K_i + \rho \operatorname{div}(P, Q) = 0,$$

atunci sistemul are integrală primă ($\rho = 0$) sau factor integrant ($\rho = 1$) de formă Darboux. Cu $\operatorname{div}(P, Q)$ s-a notat divergența sistemului.

Tot în lucrarea [45], Darboux a demonstrat că dacă sistemul admite cel puțin $p \geq n(n+1)/2$ curbe algebrice invariante, atunci acest sistem are factor integrant de forma $\mu = \prod_{i=1}^p f_i^{\alpha_i}$, iar dacă $p \geq [n(n+1)/2] + 1$, atunci sistemul polinomial are integrală primă de forma $F = \prod_{i=1}^p f_i^{\alpha_i}$. Iar în [61], Jouanolou J. a demonstrat că în cazul $p \geq [n(n+1)/2] + 2$ sistemul are integrală primă rațională, adică constantele α_i sunt numere întregi.

Metoda Darboux de integrare a fost dezvoltată și extinsă asupra sistemelor diferențiale polinomiale de ordin mai mare decât doi. Christopher C., în lucrarea sa [26] a scris despre integrabilitatea Darboux generalizată sau în sens generalizat, care se deosebește de cea prezentată în [45] prin faptul că în componența integralei prime (sau a factorului integrant),

împreună cu curbele algebrice invariante, fac parte și funcțiile exponențiale care sunt generate din curbele invariante multiple: $\prod_{i=1}^p f_i^{\alpha_i} \prod_{j=1}^s \exp(g_j/h_j)$. Aceste funcții exponențiale $\exp(g_j/h_j)$ se numesc factori exponențiali și satisfac unei ecuații similare celei din cazul polinoamelor f_i ce definesc curbele algebrice invariante $f_i = 0$.

O nouă direcție de dezvoltare a teoriei Darboux este examinarea, nu doar a curbelor algebrice invariante, dar și alte elemente sau caracteristici ale sistemului de ecuații diferențiale, care duc la integrabilitatea Darboux. De exemplu, Șubă A. în lucrarea [104] ia în considerare mărimile Lyapunov, iar Chavarriga J., Llibre J., Sotomayor J. în [22] - punctele singulare independente.

Se știe că dacă un sistem diferențial cubic posedă șase drepte invariante distincte, acest sistem, în caz general, are factor integrant format din aceste drepte, iar dacă sistemul diferențial cubic are cel puțin șapte drepte invariante distincte, atunci sistemul are integrală primă de tip Darboux. Rezultă că sistemele diferențiale cubice ce au un număr maximal de drepte invariante și ale căror forme canonice au fost aduse în [72] de către Llibre J. și Vulpe N., în [7] de către Bujac C., sunt integrabile. La fel și sistemele cubice ce au drepte invariante de multiplicitate totală opt, investigate de Bujac C. în [9], sunt integrabile. Problema integrabilității a unei subfamilii a acestor sisteme, mai exact, a acelor sisteme cubice cu drepte invariante afine de multiplicitate paralelă șapte, a fost soluționată mai devreme în [109], [110] de către Șubă A., Repesco V. și Puțuntică V.

În [135] Vacaraș O. clasifică sistemele cubice cu cel mult trei drepte invariante (enumerându-se și dreapta de la infinit) de multiplicitate maximală. Se arată, că sistemele cubice ce posedă o dreaptă invariantă afină de multiplicitate maximală ($m(l) = 7$), sistemele cubice ce au dreapta de la infinit de multiplicitate maximală ($m(Z = 0) = 7$), cât și sistemele cubice cu două drepte invariante distincte de multiplicitate maximală sunt integrabile.

În general, în teoria calitativă a sistemelor diferențiale polinomiale reale bidimensionale sunt considerate următoarele trei probleme principale: problema determinării integralelor prime, a ciclurilor limită și problema deosebirii centrului de focar.

Problema determinării integralelor prime. Pentru sistemele diferențiale polinomiale o metodă de construire a integralei prime, des utilizată și despre care s-a vorbit mai sus, este metoda lui Darboux, ce constă în construirea integralei prime sau a factorului integrant cu ajutorul curbelor algebrice invariante, în particular, cu ajutorul dreptelor invariante.

Astfel, una dintre preocupările principale ale cercetătorilor din țarăși de peste hotare

reprezintă determinarea condițiilor de existență a dreptelor invariante. Matematicienii din țara noastră, precum M. Popa și C. Sibirschi au stabilit condițiile centroafin-invariante de existență a dreptelor invariante omogene (în lucrările [76], [78]) și condițiile de existență a dreptelor invariante neomogene (în [79], [96]) pentru unele sisteme polinomiale de ecuații diferențiale. În [79] autorii admit că sistemele pătratice examinate au cel puțin un punct singular de tip focar sau centru (focar slab (weak focus), focar fin (fine focus) sau punct critic monodromic (monodromic critical point) (Schlomiuk [95], Christopher și Li [27])). În lucrările [37], [38], autorii A. Șubă și D. Cozma obțin condițiile de existență a patru drepte invariante neomogene pentru sistemele cubice cu punct critic monodromic.

Metoda lui Darboux de integrare a sistemelor diferențiale polinomiale își găsește dezvoltarea și aplicabilitatea în lucrările autorilor H. Poincaré , J. Chavarriga, J. Llibre, J. Sotomayor, C. Christopher, J. Pereira, D. Schlomiuk, A. Șubă, D. Cozma ș.a. În aceste lucrări, la formarea integralei prime, se iau în vedere nu doar curbele algebrice invariante, dar și factorii exponențiali, punctele singulare independente și mărimile Lyapunov.

Integrabilitatea sistemelor diferențiale polinomiale cu puncte singulare de tip centru și cu un anumit număr de soluții algebrice a fost examinată în lucrările: Șubă [104], Kooij și Christopher [66], Chavarriga, Giacomini, Giné [19], Christopher, Llibre, Pantazi și Zhang [30], Ferčec, Giné, Yirong și Romanovski [52], Giné și Romanovski [58], Cao, Llibre și Zhang [18], Dukaric și Giné [50].

În teza de față sunt aduse condițiile pentru care sistemele cubice cu singularități $(1 : -1)$ rezonante admit o dreaptă invariantă de multiplicitate algebrică mai mică sau egală cu patru, precum și dreapta de la infinit de multiplicitate algebrică mai mică sau egală cu cinci.

Problema determinării ciclurilor limită. Problema a 16-a a lui Hilbert, mai exact partea a doua a acestei probleme, constă în determinarea numărului maximal de cicluri limită și localizarea acestora pentru clasa de sisteme diferențiale polinomiale de gradul n .

La studierea existenței ciclurilor limită și a numărului maxim al acestora, pentru sistemele diferențiale polinomiale, mai mulți oameni de știință au luat în considerare dacă sistemele cercetate posedă sau nu curbe algebrice invariante. Mai exact, Bautin N. în [4] a demonstrat că sistemul pătratic cu două drepte invariante reale nu are cicluri limită; iar Suo G. și Chen Y. în [124] au arătat că sistemul pătratic ce posedă două drepte invariante complexe reciproc conjugate poate avea nu mai mult de un ciclu limită. La fel, nu mai mult de un ciclu limită poate avea sistemul pătratic cu o dreaptă invariantă, conform lucrărilor [24],[25], [89], ale

cercetătorilor Cherkas L. și Rychkov G. .

Problema determinării ciclurilor limită pentru sistemele diferențiale cubice a fost studiată:

- de Dai G., Wo S. în [42], în care se arată că sistemul cubic cu cinci drepte invariante reale nu are cicluri limită;

- de Kooij R. în lucrările [63], [64] demonstrează că sistemul cubic ce posedă patru drepte invariante reale sau cu două reale și două complexe conjugate poate avea nu mai mult de un ciclu limită;

- în aceeași lucrare, în [64], Kooij R. confirmă că sistemul cubic ce are patru drepte invariante complexe conjugate poate avea două cicluri limită;

- sistemul cubic cu patru drepte invariante neomogene (cu coeficienți complecși), conform lucrării [38], a căror autori sunt Cozma D., Șubă A., poate avea cel mult un ciclu limită;

- pentru o clasă de sisteme cubice ce posedă o dreapta invariantă în [137] de către Xiea X. și Zhan Q. a fost stabilită unicitatea ciclului limită;

- sistemul polinomial cu cel puțin $(n - 1)(n + 1)/2$ drepte invariante n-are cicluri limită este arătat în [125] de către Suo G. și Sun J. (având în vedere că numărul maxim de drepte este cel mult $3n - 1$, acest rezultat este valabil doar pentru $n \leq 5$);

- Zoladek H. în lucrarea [143] a arătat că există sisteme cubice cu 11 cicluri limită care pot fi bifurcate dintr-un punct singular de tip centru;

- Yu P. și Han M. în lucrarea [139] au adus un exemplu de sistem cubic cu 12 cicluri limită de amplitudine mică.

În lucrarea [65], Kooij R. studiază problema existenței ciclurilor limită pentru un alt sistem, mai exact pentru sistemul polinomial de ecuații diferențiale de gradul n ce posedă $n + 1$ drepte invariante. Ciclicitatea punctului singular de tip centru sau focar, pentru unele clase de sisteme diferențiale cubice, a fost examinată și în lucrările: Zoladek [142], Bothmer și Kroker [6], Yu și Han [139], Romanovski și Shafer [87], Levandovskyy, Pfister și Romanovski [67], Li, Liu și Yang [68], Ferčec și Mahdi [53], ș.a. Astfel, în prezent se cunoaște că numărul de cicluri limită este mai mare sau egal cu 12. Numărul de cicluri limită ce pot fi bifurcate dintr-un punct singular monodromic, pentru sistemele polinomiale de ecuații diferențiale, depinde nu doar de existența curbelor algebrice invariante dar și de pozițiile relative ale acestor curbe.

Noțiuni de centre. Considerăm sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y). \quad (1.1)$$

Fie că pentru (1.1) punctul $M(x_0, y_0)$ este punct staționar, i. e. $X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0$, și presupunem că într-o vecinătate a lui membrii din dreapta a sistemului (1.1) satisfac condițiilor de existență și unicitate a soluțiilor. Sunt posibile două cazuri: ori punctul $M(x_0, y_0)$ are o vecinătate ce nu conține în sine nici o traiectorie închisă ce-l înconjoară, ori așa vecinătate nu-i posibil de a o construi. În ultimul caz, este evident, că fiecare vecinătate a punctului $M(x_0, y_0)$ va conține în sine o infinitate de traiectorii ce-l înconjoară. Această totalitate de traiectorii poate (sau nu) să acopere o vecinătate a lui $M(x_0, y_0)$. Cele expuse mai sus ne aduc la noțiunile de centru Poincaré și de centru Bendixon.

Definiția 1.2.1. (*Poincaré*). *Dacă există o așa vecinătate a punctului staționar $M(x_0, y_0)$ încât prin fiecare punct al ei trece o traiectorie închisă ce înconjoară $M(x_0, y_0)$, atunci acest punct se numește centru (în sensul Poincaré).*

Cel mai simplu exemplu de sistem cu centru Poincaré este sistemul $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ (aici și mai departe $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$). Traietoriile lui sunt cercuri concentrice ce înconjoară originea de coordonate și acoperă mulțimea $R^2 \setminus (0, 0)$.

Următorul sistem

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \quad (1.2)$$

are focar în originea de coordonate. Aceasta se determină ușor, dacă efectuăm transformarea $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg(y/x)$: $\dot{\rho} = \rho^3$, $\dot{\varphi} = 1$.

Sistemul

$$\dot{x} = -y + y(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + x(x^2 + y^2) \quad (1.3)$$

are centru Poincaré în originea de coordonate deoarece pentru câmpul vectorial, definit de el, axele de coordonate sunt și axe de simetrie.

Definiția 1.2.2. (*Bendixon*). *Dacă fiecare vecinătate a punctului staționar $M(x_0, y_0)$ conține în sine traiectorii închise ce înconjoară $M(x_0, y_0)$, atunci acest punct se numește centru (în sensul Bendixon).*

Se observă, că în cazul definiției de centru Bendixon, traiectoriile închise nu sunt obligate să acopere o vecinătate a punctului staționar $M(x_0, y_0)$. Astfel, apare problema: când ambele definiții sunt echivalente? Sau altfel spus: căror condiții trebuie să satisfacă membrii din dreapta ai sistemului pentru ca punctul staționar ce este centru după Bendixon să fie în mod necesar și centru Poincaré?

Dulac a demonstrat că dacă membrii din dreapta ai sistemului (1.1) sunt funcții olo-

morfe într-o vecinătate oarecare a punctului staționar $M(x_0, y_0)$, atunci ambele definiții sunt echivalente, i.e. din existența unui număr infinit de traiectorii închise ce înconjoară punctul $M(x_0, y_0)$ și se contractează către el, urmează că traiectoriile de acest tip acoperă și o vecinătate a lui $M(x_0, y_0)$. Dacă membrii din dreapta X și Y ai sistemului (1.1) nu sunt olomorfi, atunci, în caz general, centru Bendixon poate și să nu fie centru Poincaré. Sistemul

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2)^3 \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2)^3 \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

are închise doar traiectoriile $x^2 + y^2 = 1/(k\pi)$ (k -număr natural).

În continuare vom cere ca membrii din dreapta ai sistemului (1.1) să fie olomorfi într-o vecinătate oarecare a punctului staționar $M(x_0, y_0)$. Cu ajutorul unei translații aducem punctul $M(x_0, y_0)$ în originea de coordonate. Sistemul (1.1) poate fi scris astfel

$$\frac{dx}{dt} = b_{10}x + b_{01}y + B(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = c_{10}x + c_{01}y + C(x, y), \quad (1.4)$$

unde $B(x, y)$ și $C(x, y)$ sunt funcții olomorfe într-o vecinătate oarecare a originii $O(0, 0)$ ce nu conțin termeni liberi și liniari. Notăm λ_1 și λ_2 soluțiile ecuației caracteristice $\lambda^2 - \lambda spA + detA = 0$, unde $spA = b_{10} + c_{01}$, $detA = b_{10}c_{01} - b_{01}c_{10}$.

Fie $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$, $Im\lambda_1 = -Im\lambda_2 \neq 0$, adică rădăcinile λ_1 și λ_2 sunt pur imaginare și conjugate. În acest caz, originea de coordonate $O(0, 0)$ este, pentru sistemul (1.1), ori centru ori focar (Lyapunov) (vezi exemplele (1.2), (1.3)). Apare problema deosebirii lor, adică determinării acelor condiții asupra membrilor din dreapta ce ne-ar spune când $O(0, 0)$ este centru și când $O(0, 0)$ este focar. Lyapunov a demonstrat că punctul $O(0, 0)$ este centru pentru (1.4), atunci și numai atunci, când într-o vecinătate a lui sistemul (1.4) are integrală primă olomorfă ce nu depinde de t ($F(x, y) = const$). Să menționăm că așa integrală are și sistemul $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ ($xy = const.$), chiar dacă pentru el $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ ($O(0, 0)$ -șa). Am ajuns la definiția de centru în sens Dulac.

Definiția 1.2.3. (*Dulac*). Dacă într-o vecinătate a punctului staționar $O(0, 0)$ sistemul (1.1) are integrală olomorfă ce nu depinde de t , atunci acest punct se numește **centru în sensul lui Dulac**. Dacă pe lângă acestea, rădăcinile λ_1 , λ_2 ale ecuației caracteristice sunt reale și de semn opus iar raportul λ_1/λ_2 este rațional, atunci $O(0, 0)$ se numește **centru-șa**. În cazul $\lambda_1 = -\lambda_2$ vom vorbi de punct **centru-șa simplu**.

Să observăm, că din condițiile de existență a centrului în sensul lui Poincaré în $O(0, 0)$, ușor pot fi obținute condițiile de existență a centrului-șa simplu și invers. Într-adevăr, dacă

rădăcinile λ_1 și λ_2 ale ecuației caracteristice sunt pur imaginare, atunci printr-o transformare liniară nedegenerată a coordonatelor și reparametrizarea timpului sistemul (1.4) se aduce la forma

$$\frac{dx}{dt} = y + \dots, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \dots \quad (1.5)$$

Dacă $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda \neq 0$, sistemul (1.4) poate fi adus la forma $\frac{dx}{dt} = \lambda x + \dots$, $\frac{dy}{dt} = -\lambda y + \dots$. Substituția $\lambda t = \tau$ ne dă

$$\frac{dx}{d\tau} = x + \dots, \quad \frac{dy}{d\tau} = -y + \dots \quad (1.6)$$

Folosind în (1.6) transformările $x = \xi + i\eta$, $y = \xi - i\eta$ obținem $\frac{d\xi}{d\tau} = i\eta + \dots$, $\frac{d\eta}{d\tau} = -i\xi + \dots$, iar după substituția $i\tau = \theta$ avem definitiv

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \eta + \dots, \quad \frac{d\eta}{d\theta} = -\xi + \dots \quad (1.7)$$

Sistemele (1.5) și (1.7) coincid ca formă. Parcurgând lanțul de transformări într-o direcție sau alta, putem ca din condițiile de existență a centrului Poincaré să obținem condițiile de existență a centrului-șa simplu și invers.

Pentru sistemul pătratic și pentru sistemul cu neliniarități cubice, condițiile necesare și suficiente de existență în originea de coordonate $O(0,0)$ a centrului-șa simplu au fost obținute în lucrările lui Sadovschi [90], [91] și Sibirschi [98]-[100].

Problema deosebirii centrului de focar. Una dintre problemele esențiale ale teoriei calitative a sistemelor polinomiale de ecuații diferențiale, ce ține de determinarea comportării curbelor integrale în vecinătatea punctelor singulare izolate, este problema deosebirii centrului de focar. Astfel, dacă rădăcinile ecuației caracteristice asociate punctului singular $O(0,0)$ sunt imaginare, atunci acest punct poate fi de tip centru sau de tip focar (punct singular monodromic). Această problemă, numită și problema centrului, constă în determinarea condițiilor asupra coeficienților membrilor din dreapta a sistemului polinomial de ecuații diferențiale ce garantează faptul că punctul singular este de tip centru.

Problema centrului pentru sistemul pătratic a fost rezolvată pentru prima dată de H. Dulac [51], pentru sistemul cubic simetric – de C. Sibirschi [97], dar pentru sistemului cubic al caror membri din dreapta conțin neliniarități de gradul doi și de gradul trei, această problemă nu este rezolvată definitiv.

Pentru investigarea problemei centrului, cercetătorii s-au folosit de următoarele metode:

- metoda de determinare a condițiilor invariante de existență a centrului elaborată de academicianul C.S. Sibirschi;

- metoda elaborată de profesorul N. Vulpe utilizată în procesul de clasificare topologică centro-afin invariante a sistemelor diferențiale polinomiale ce au centru;
- metoda de determinare a numărului de elemente ale bazei idealului Bautin, prin aplicarea algeberelor Lie, elaborată de profesorul M. Popa;
- metoda de determinare a cuplurilor centrice aplicată de profesorii A. Șubă și D. Cozma, de exemplu în [105].

În lucrările [38], [39], [40], [105], [107], A. Șubă și D. Cozma au cercetat problema centrului pentru sistemul diferențial cubic cu drepte invariante pe care au rezolvat-o complet pentru sistemele cu cel puțin trei drepte invariante.

Pentru sistemul cubic problema existenței a dreptelor invariante distincte și a punctului critic de tip centru a fost studiată în [38], [39], [102], [105], [106], [107]. În aceste lucrări s-a considerat sistemul

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv p(x, y), \\ \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv q(x, y), \quad \gcd(p, q) = 1. \end{cases} \quad (1.8)$$

Originea de coordonate $(0, 0)$ este centru pentru (1.8), dacă și numai dacă $L_j = 0$, $j = \overline{1, \infty}$, unde mărimile L_j , $j = \overline{1, \infty}$, sunt polinoame în coeficienții sistemului (1.8), numite *mărimile Lyapunov*. Conform teoremei de bază a lui Hilbert există așa un număr natural N astfel încât, sistemul infinit polinomial $\{L_j = 0, j = \overline{1, \infty}\}$ este echivalent cu sistemul finit $\{L_j = 0, j = \overline{1, N}\}$. Cu N_0 notăm cel mai mic N .

Astfel, pentru sistemul cubic (1.8) s-a demonstrat, că dacă el are

- patru drepte invariante neomogene, i.e. drepte de forma $1 + \alpha_j x + \beta_j y = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, atunci $N_0 = 1$ [39];
- două drepte invariante neomogene și două omogene ($y \pm ix = 0$), atunci $N_0 = 2$ [39];
- trei drepte invariante de poziție generică, atunci $N_0 = 3$ [107];
- un fascicol din trei drepte invariante sau trei drepte invariante, două dintre care sunt paralele, atunci $N_0 = 5$ [102], [106];
- două drepte invariante omogene și una neomogenă, atunci $N_0 = 7$ [105].

În lucrarea de față sunt continuate cercetările efectuate de A. Șubă și D. Cozma, prin examinarea cazurilor când printre dreptele invariante examinate sunt și drepte invariante multiple. Mai mult ca atât, în investigațiile din teză se ia în considerare și multiplicitatea liniei de la infinit.

Condițiile necesare și suficiente ca un punct singular ce are rădăcinile ecuației caracteristi-

ce pur imaginare să fie centru au fost obținute și în următoarele cazuri particulare: pentru sistemele cubice cu infinitul degenerat (Kompel [62], Șubă [103], Chavarriga și Gine [21]), pentru sistemele cubice cu membrii din dreapta de o anumită formă (Daniliuk și Șubă [43], [44], Romanovski și Șubă [88], Lloyd, Pearson și Romanovski [73]); pentru un sistem cubic ce conține nouă parametri și care poate fi redus prin transformări la un sistem de tip Lienard (Bondar și Sadovskii [5], Sadovskii și Shcheglova [92]).

Problema centrului a fost rezolvată pentru sistemele cubice cu două drepte invariante omogene și o conică invariantă; pentru sistemele cubice cu două drepte paralele invariante și o conică invariantă de către Cozma în [33] ([34]); precum și pentru sistemul cubic cu două drepte invariante paralele și o cubică invariantă de către Cozma și Matei în [36]. Cozma D. și Dascalescu A. a rezolvat problema centrului pentru familia de sisteme diferențiale cubice cu două drepte invariante paralele și o cubică invariantă ireductibilă ([35], [46], [47]).

Studiul calitativ al sistemelor diferențiale cu drepte invariante și clasificarea lor.

În anul 2006 J. Llibre și N. Vulpe au determinat condițiile afin-invariante necesare și suficiente de realizare a 23 configurații de drepte invariante. Astfel, au fost clasificate sistemele cubice cu un număr maxim de drepte invariante, luând în considerare și multiplicitățile acestor drepte (vezi [72]). Zece ani mai târziu, Bujac C. în lucrarea [7] prezintă o clasă de sisteme cubice cu aceleași caracteristici omisă în [72].

În același an, 2016, toți cei trei cercetători menționați mai sus, publică lucrarea [10], în care aduc portretele fazice și rezolvă problema de integrabilitate pentru sistemele ce posedă un număr maxim de drepte invariante.

Clasificarea și studiul calitativ al sistemelor cubice de ecuații diferențiale cu șase și cu șapte drepte invariante, ținându-se cont de numărul de direcții al acestor drepte, a fost efectuată de V. Puțuntică și A. Șubă în [80], [81], [82]. Sistemele cubice cu drepte invariante de multiplicitate paralelă egală cu șapte, au fost studiate și clasificate de A. Șubă, V. Repeșco și V. Puțuntică în [109], [110], iar sistemele cubice ce posedă drepte invariante de multiplicitate paralelă egală cu cinci sau cu șase, și al căror infinit este degenerat - de către V. Repeșco și A. Șubă.

O clasificare a sistemelor cubice diferențiale cu drepte invariante reale (reale și complexe) de o direcție având multiplicitatea totală cel puțin șapte, inclusiv dreapta de la infinit, o aduce V. Repeșco în lucrarea [84] ([85]). S-au obținut 26 (34) sisteme cubice ce posedă aceste caracteristici.

De clasificarea sistemelor cubice cu drepte invariante s-au ocupat și C. Bujac și N. Vulpe în lucrările [8], [9], [11], [12], [13], [14]. Ei au obținut 51 de configurații de drepte invariante de multiplicitate totală egală cu opt și pentru toate aceste configurații au determinat condițiile necesare și suficiente de obținere ale lor, au construit formele canonice, precum și perturbările formelor canonice. A. Șubă împreună cu discipolii săi, ținând cont de multiplicitatea paralelă a dreptelor invariante, au clasificat sistemele cubice cu patru puncte singulare la infinit, obținând 17 configurații dintre cele 51 obținute de C. Bujac și N. Vulpe.

C. Bujac și N. Vulpe, împreună cu Dana Schlomiuk, continuă clasificarea sistemelor cubice de multiplicitate totală șapte, inclusiv infinitul, în lucrarea [16]. Această clasificare conține 14 configurații de drepte invariante de tipul $(2, 2, 1, 1)$ (două perechi de drepte paralele plus două drepte de patru direcții), și 8 sisteme canonice care au configurațiile date.

Sistemele cubice cu șase drepte reale invariante de două și trei direcții au fost studiate de Puțuntică V. în [81] și [82]. Sistemele cu drepte invariante de multiplicitate totală șapte, considerând și dreapta de la infinit, și cu patru puncte reale la infinit au fost examinate de Bujac C., Schlomiuk D. și Vulpe N. în [15]. În lucrarea [135] Vacaraș O. a studiat sistemele cubice cu drepte invariante multiple, unde au fost clasificate sistemele cubice cu două și cu trei drepte invariante (enumerând și dreapta de la infinit) de multiplicitate maximală.

În această teză sunt studiate sistemele cubice cu singularități rezonante și cu drepte invariante multiple. Mai exact, în clasa sistemelor cubice cu singularități $(1 : -1)$ rezonante, este:

- efectuată clasificarea sistemelor cubice cu o dreaptă invariantă reală de multiplicitate maximală;
- efectuată clasificarea sistemelor cubice cu drepte invariante afine de multiplicitate algebrică totală patru;
- efectuată clasificarea sistemelor cubice cu dreapta de la infinit multiplă;
- efectuată clasificarea sistemelor cubice cu drepte invariante de multiplicitate algebrică totală cinci (luând în considerare și dreapta de la infinit),

iar pentru clasa sistemelor cubice de tip Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -2)$ rezonante este:

- determinată multiplicitatea maximală a unei drepte invariante afine și a dreptei de la infinit;
- efectuată clasificarea sistemelor cubice cu drepte invariante de două, trei și patru direcții

de multiplicitate totală șase;

– efectuată clasificarea sistemelor cubice cu drepte invariante de două, trei și patru direcții de multiplicitate totală șapte, inclusiv dreapta de la infinit.

La fel, în teză se arată, că următoarele cinci clase de sisteme, și anume: sistemele cubice $(1 : -1)$ rezonante ce posedă o dreaptă invariantă afină de multiplicitate maximală ($m(l) = 4$); sistemele cubice $(1 : -1)$ rezonante, pentru care dreapta de la infinit e de multiplicitate maximală ($m(l_\infty) = 5$); sistemele cubice $(1 : -1)$ rezonante cu drepte invariante de multiplicitate algebrică totală cinci (inclusiv și dreapta de la infinit); precum și sistemele cubice de tip Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -2)$ rezonante cu drepte invariante de multiplicitate algebrică totală șase; sistemele cubice de tip Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -2)$ rezonante cu drepte invariante de multiplicitate algebrică totală șapte (inclusiv dreapta de la infinit), sunt integrabile.

1.3. Multiplicitatea curbelor algebrice invariante pentru sistemele diferențiale polinomiale

Noțiunea de multiplicitate a unei curbe algebrice invariante a fost introdusă prin eforturile a mai mulți cercetători. În mai multe lucrări științifice se găsesc diferite tipuri de multiplicități: multiplicitate algebrică, multiplicitate integrabilă, multiplicitate infinitezimală, multiplicitate geometrică, multiplicitate olonomică, multiplicitate paralelă.

În lucrarea [31], autorii C. Christopher, J.Llibre și J.V. Pereira au definit multiplicitatea infinitezimală a curbelor algebrice invariante, și au arătat echivalența acestei definiții cu definițiile altor multiplicități existente în lucrare, cum ar fi cea integrabilă, algebrică, geometrică și olonomică. Definiția multiplicității infinitezimale presupune că existența unei curbe multiple necesită și anumite informații infinitezimale despre ea.

Definiția de multiplicitate geometrică a unei curbe invariante este adusă în lucrarea [93] de D. Schlomiuk pentru clase de câmpuri vectoriale fixate. Spre deosebire de lucrarea [31], în care este prezentat un mod efectiv de a calcula multiplicitatea infinitezimală, în lucrarea [93] nu este nici-o modalitate eficientă de a calcula multiplicitatea geometrică.

Multiplicitatea integrabilă este definită prin intermediul factorilor exponențiali asociați unei curbe algebrice invariante $f = 0$. Conform [31], se spune, că o curbă invariantă $f = 0$ are *multiplicitatea integrabilă* k , dacă această curbă generează $k - 1$ factori exponențiali de forma $\exp(g_j/f^j)$, unde $j = 1, \dots, k-1$, $\deg(g_j) \leq j\deg(f)$, și fiecare g_j nu este multiplu pentru f . Acești factori exponențiali pot fi folosiți la construcția integralei prime sau a factorului

integrant de tip Darboux.

Multiplicitatea algebrică este dată cu ajutorul curbelor exactice care au fost introduse de Pereira în 2001 [31]. O caracteristică importantă a acestor curbe constă în faptul că ele pot fi calculate direct din determinantul unei matrici. Se spune că curba algebrică invariantă $f = 0$ are multiplicitatea algebrică egală cu k , dacă k este cel mai mare număr natural astfel că f^k divide determinantul dat și, prin urmare, multiplicitatea algebrică este efectiv calculabilă.

Din punct de vedere geometric, autorii lucrării [31] afirmă, că o curbă are multiplicitatea geometrică k , dacă există așa mici perturbații ale câmpului vectorial încât noile câmpuri posedă exact k curbe algebrice invariante distincte ce bifurcă din curba $f = 0$.

În lucrările cercetătorilor N. Vulpe, J. Llibre și C. Bujac, la studierea sistemelor cubice cu drepte invariante de multiplicitate totală nouă și respectiv opt s-a ținut cont de multiplicitatea geometrică dată de D. Schlomiuk. Iar în lucrările cercetătorilor A. Șubă, V. Puțuntică și V. Repeșco întâlnim noțiunea de multiplicitate paralelă. Ei consideră că o dreaptă invariantă $f(x, y) = 0$ are *multiplicitatea paralelă* k , dacă k este cel mai mare număr natural pentru care există un așa polinom $R(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ încât are loc identitatea $\mathbb{X}(f) = f^k R(x, y)$.

În articolele [109], [110] Șubă A., Repeșco V. și Puțuntică V. au studiat sistemele cubice cu drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu șapte, iar în [83] Repeșco V. investighează sistemele cubice cu infinitul degenerat ce posedă drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu șase.

În lucrarea [31] s-a demonstrat, că în unele ipoteze generice, există o echivalență între tipurile de multiplicități. Astfel, ținându-se cont de [31], în [135] pentru sistemul cubic se determină mai întâi multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine, apoi și multiplicitățile ei infinitezimale, integrabile și geometrice. În această lucrare se arată în mod special că există o echivalență naturală între punctul de vedere algebric și punctul de vedere geometric, referitor la multiplicitatea unei curbe invariante.

În teza de față se va determina multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte afine, cât și a dreptei de la infinit, utilizându-se o metodă eficientă aplicată și în [135], iar în unele cazuri se va vorbi și despre multiplicitatea paralelă a acestor drepte. În dependență de multiplicitățile algebrice obținute ale dreptelor, în capitolele ce urmează, se construiesc configurațiile posibile de drepte ce pot fi admise de sistemul diferențial cubic cercetat.

1.4. Numărul de drepte invariante ce poate fi admis de un sistem diferențial polinomial

Investigarea sistemelor diferențiale polinomiale cu drepte invariante nu este completă, chiar dacă acestea formează cea mai simplă clasă în mulțimea curbelor algebrice invariante.

Sistemul diferențial polinomial poate avea ori un număr infinit, finit sau vid de drepte invariante. În lucrarea de față vom examina doar sistemele ce posedă un număr finit de drepte invariante.

În clasa sistemelor diferențiale polinomiale $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ de gradul n , unde $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sunt polinoame cu coeficienți reali în x și y , iar $n = \max(\deg P, \deg Q)$, numărul maximal de drepte invariante îl vom nota cu $\alpha(n)$, iar numărul maximal de direcții al dreptelor invariante cu $\beta(n)$.

În anul 1980 matematicienii care se ocupau de studierea sistemelor polinomiale de ecuații diferențiale cum ar fi Zhang Xikang, Ye Yanqian au înaintat o ipoteză referitoare la estimarea numărului de drepte invariante în lucrările [140], [138]. Conform acestei ipoteze pentru sistemele polinomiale de ecuații diferențiale de gradul n numărul maximal posibil de drepte invariante $\alpha(n)$ pentru n număr par este egal cu $2n + 1$, iar pentru n - impar este egal cu $2n + 2$.

Zhang Xikang în lucrarea [140], în 1993, demonstrează această ipoteza în cazurile $n = 3$ și $n = 4$. În demonstrațiile aduse s-a comis o neexactitate, considerând că $\beta(n) \leq n + 1$. Eroarea a fost corectată de Zhang Xikang împreună cu Ye Yanqian în 1998 [141].

De problema existenței dreptelor invariante pentru sistemele polinomiale s-a ocupat și J. Sotkolski, în lucrarea [101], demonstrând și el în 1996 că pentru $n = 4$ numărul maximal de drepte invariante reale distincte este 9, adică ipoteza este justă.

J. C. Artés, B. Grünbaum și J. Llibre în [3] au arătat că ipoteza anunțată mai sus nu este justă pentru $n > 4$. Mai exact, au demonstrat că $\alpha(5) = 14$ și au adus contraexemple pentru $n \in \{6, 7, \dots, 20\}$. Mai mult ca atât, pentru dreptele invariante afine au demonstrat, că dacă n este număr par, atunci $2n + 1 \leq \alpha(n) \leq 3n - 1$, iar dacă n este impar, atunci $2n + 2 \leq \alpha(n) \leq 3n - 1$.

J. C. Artés, și J. Llibre în [2] au stabilit între numărul maximal de drepte invariante $\alpha(n)$ și numărul maximal de direcții $\beta(n)$ al dreptelor invariante o relație, dată de egalitatea $\beta(n) = \alpha(n - 1) + 1$. Ținând cont că $\alpha(2) = 5$ și $\alpha(3) = 8$, încă odată ne convingem, că inegalitatea $\beta(n) \leq n + 1$, folosită de Zhang Xikang în cercetările sale, nu este justă.

Pentru sistemele diferențiale polinomiale de gradul n numărul maximal de drepte invariante, incluzând dreapta de la infinit și multiplicitățile lor, este $3n$. Numărul dat este atins, dacă se iau în considerație dreptele invariante reale și complexe ale sistemului polinomial. Acest fapt este confirmat și de exemplul profesorului J. Llibre (comunicare privată): $\dot{x} = x^n$, $\dot{y} = y^n$, $n \geq 2$. Sistemul dat posedă dreptele invariante afine: $x = 0$, $y = 0$, fiecare de multiplicitatea n , dreapta $x - y = 0$ și dreptele complexe $x - \delta_j y = 0$, $j = \overline{1, n-2}$, unde δ_j sunt rădăcinile de ordinul n din unu și distincte de 1.

În clasa sistemelor cubice de ecuații diferențiale ce posedă un număr finit de drepte invariante, ținându-se cont de dreapta de la infinit, numărul maximal al acestora este egal cu nouă. Clasificarea completă a sistemelor cubice ce posedă un număr maximal de drepte invariante, adică nouă, a fost efectuată de J. Llibre și N. Vulpe în [72].

Pentru sistemele cubice infinitul reprezintă o dreaptă invariantă nesingulară atunci când expresia $C_3(x, y) = yP_3(x, y) - xQ_3(x, y) \neq 0$. În cazul când $C_3(x, y) \equiv 0$ infinitul este degenerat, adică constă doar din puncte singulare. Conform lucrării [108], autori Șubă A. și Repeșco V., sistemele cubice cu infinitul degenerat posedă cel mult șase drepte invariante. În [83] Repeșco V. a efectuat clasificarea sistemelor cubice cu infinitul degenerat ce au drepte invariante de multiplicitate paralelă totală șase.

Dai Guoren în [41], deasemenea, a cercetat sistemele polinomiale cu drepte invariante. El a estimat numărul de drepte invariante ce au pantele diferite pentru $n \geq 3$, precum și numărul celor paralele în cazul $n \geq 2$.

Calcularea numărului de drepte invariante a sistemelor polinomiale diferențiale care verifică anumite condiții este o problemă actuală. V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho și D.S. Ushkho au arătat că câmpul vectorial polinomial de gradul n , $n \geq 3$, ce posedă un fascicol din $n + 1$ drepte invariante și un n -tuplu de drepte reciproc paralele nu poate avea mai mult de $2n + 1$ ($2n + 2$) drepte invariante afine, dacă n este par (impar), adică pentru această clasă de câmpuri vectoriale are loc ipoteza, enunțată mai sus [126].

Menționăm, că în teza de față sunt investigate sistemele cubice cu infinitul nedegenerat care admit drepte invariante de multiplicitățile 4, 5 (inclusiv și dreapta de la infinit), 6 și 7 (inclusiv și dreapta de la infinit).

1.5. Concluzii la capitolul unu

În primul capitol sunt descrise principalele rezultate ce țin de sistemele diferențiale polinomiale cu singularități rezonante, de sistemele diferențiale polinomiale ce posedă drepte invariante și este menționat aportul mai multor matematicieni la dezvoltarea teoriei calitative a sistemelor examinate. Făcând o analiză a situației în domeniul studierii sistemelor polinomiale diferențiale, putem menționa, că cercetarea acestor sisteme este cu atât mai dificilă cu cât numărul de drepte invariante este mai mic și gradul polinoamelor ce formează membrii din dreaptă ai sistemului este mai mare.

În această lucrare este continuată cercetarea integrabilității sistemelor cubice cu singularități rezonante și cu drepte invariante de multiplicitate totală patru, cinci (inclusiv dreapta de la infinit), șase și șapte (inclusiv dreapta de la infinit) prin folosirea metodei Darboux de integrare.

Teza a fost ghidată de următorul scop: clasificarea și integrarea sistemelor cubice de ecuații diferențiale cu singularități $(1 : -1)$ și $(1 : -2)$ rezonante și care au un anumit număr de drepte invariante. Sistemele cu $(1 : -2)$ rezonante se presupun a fi de tip Lotka-Volterra.

Conform scopului propus au fost trasate următoarele obiective prioritare ale cercetării:

- determinarea multiplicității maxime a unei drepte invariante pentru sistemul diferențial cubic cu singularități $(1 : -1)$ și $(1 : -2)$ rezonante;
- determinarea multiplicității maxime a dreptei de la infinit pentru sistemul diferențial cubic cu singularități $(1 : -1)$ și $(1 : -2)$ rezonante;
- clasificarea sistemelor diferențiale cubice cu singularități $(1 : -1)$ rezonante cu drepte invariante afine de multiplicitate totală patru;
- clasificarea sistemelor diferențiale cubice cu singularități $(1 : -1)$ rezonante cu drepte invariante de multiplicitate totală cinci, enumerând și dreapta de la infinit;
- clasificarea sistemelor diferențiale cubice cu singularități $(1 : -2)$ rezonante cu drepte invariante de multiplicitate totală șase de două, trei și patru direcții;
- clasificarea sistemelor diferențiale cubice cu singularități $(1 : -2)$ rezonante cu drepte invariante de multiplicitate totală șapte de două, trei și patru direcții, inclusiv și dreapta de la infinit.

2. SISTEMELE DIFERENȚIALE CUBICE CU SINGULARITĂȚI (1 : -1) REZONANTE ȘI CU DREPTE INVARIANTE AFINE DE MULTIPlicitate TOTALĂ PATRU.

Considerăm sistemul polinomial de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad \gcd(P, Q) = 1 \quad (2.1)$$

$P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$, și câmpul vectorial $\mathbb{X} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ asociat sistemului (2.1). Cu $\gcd(P, Q)$ s-a notat cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q .

Fie $n = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Dacă $n = 2$ ($n = 3$) atunci sistemul (2.1) se numește pătratic (cubic).

Vom spune că curba $f(x, y) = 0$, $f \in \mathbb{C}[x, y]$ (funcția $f = \exp(g/h)$, $g, h \in \mathbb{C}[x, y]$) este o curbă algebrică invariantă (un factor exponențial) pentru sistemul (2.1), dacă există un așa polinom $K_f \in \mathbb{C}[x, y]$, $\deg(K) \leq n - 1$ încât în x și y are loc identitatea

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot P(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot Q(x, y) \equiv f(x, y) \cdot K_f(x, y). \quad (2.2)$$

Polinomul $K_f(x, y)$ se numește *cofactorul* curbei algebrice invariante (factorului exponențial) f . Dacă m este cel mai mare număr natural astfel încât f^m divide $\mathbb{X}(f)$, atunci se zice că f are *multiplicitatea paralelă* egală cu m . În cazul $\deg(f) = 1$, i. e. $f(x, y) \equiv \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, curba f se numește *dreaptă invariantă*.

Se spune că curba algebrică invariantă $f(x, y) = 0$ de gradul d are pentru sistemul (2.1) *multiplicitatea algebrică* egală cu m , dacă m este cel mai mare număr natural astfel că f^m împarte $E_d(\mathbb{X})$, unde

$$E_d(\mathbb{X}) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ \mathbb{X}(v_1) & \mathbb{X}(v_2) & \dots & \mathbb{X}(v_l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{X}^{l-1}(v_1) & \mathbb{X}^{l-1}(v_2) & \dots & \mathbb{X}^{l-1}(v_l) \end{pmatrix},$$

și $v_1, v_2, \dots, v_j$ este o bază a mulțimii polinoamelor de gradul d : $\mathbb{C}_d[x, y]$ (vezi [31]). Dacă

$d = 1$, adică în cazul dreptelor invariante, putem lua $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = y$, și $E_1(\mathbb{X})$ se scrie astfel: $E_1(\mathbb{X}) = P \cdot \mathbb{X}(Q) - Q \cdot \mathbb{X}(P)$.

Polinomul $E_d(\mathbb{X})$ are în x și y gradul $d(d+1)(d+2)[8+3(d+3)(n-1)]/24$ (vezi [75]). În cazul sistemelor cubice ($n = 3$) și a dreptelor invariante ($d = 1$) avem $\deg(E_1(\mathbb{X})) = 8$.

Fie D un domeniu din $\mathbb{R}^2$ și $F \in C^1(D, \mathbb{R})$ ($\mu \in C^1(D, \mathbb{R})$). Funcția $F(x, y)$ ($\mu(x, y)$) se numește *integrală primă* (*factor integrant*) pentru sistemul (2.1), dacă în D are loc identitatea

$$P(x, y) \frac{\partial F}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0$$

$$(P(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv -(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})\mu(x, y)).$$

Fie $f_1, \dots, f_r$ ($f_{r+1} = \exp \frac{g_{r+1}}{h_{r+1}}, \dots, f_s = \exp \frac{g_s}{h_s}$) niște curbe algebrice invariante (factori exponențiali ai) ale lui (2.1). Dacă sistemul (2.1) are integrală primă (factor integrant) de forma

$$F(x, y) = \prod_{j=1}^s f_j^{\alpha_j} \quad (\mu(x, y) = \prod_{j=1}^s f_j^{\alpha_j}), \quad (2.3)$$

unde $\alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, s, |\alpha_1| + \dots + |\alpha_s| \neq 0$, atunci se spune că el este *Darboux integrabil* (privitor la teoria Darboux referitoare la sistemele polinomiale de ecuații diferențiale a se vedea [94]). Darboux [45] a demonstrat că sistemul (2.1) ce posedă împreună cel puțin $s \geq n(n+1)/2$ curbe algebrice invariante și factori exponențiali este Darboux integrabil.

Ușor se poate arăta că funcția $F(x, y)$ ($\mu(x, y)$) din (2.3) este pentru sistemul (2.1) o integrală primă (un factor integrant), dacă și numai dacă are loc în x și y , identitatea

$$\alpha_1 K_{f_1} + \alpha_2 K_{f_2} + \dots + \alpha_s K_{f_s} \equiv 0 \quad (2.4)$$

$$(\alpha_1 K_{f_1} + \alpha_2 K_{f_2} + \dots + \alpha_s K_{f_s} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0), \quad (2.5)$$

unde $K_{f_j}, j = 1, 2, \dots, s$, sunt cofactorii respectivi ai curbelor algebrice invariante $f_j, j = 1, \dots, r$, și ai factorilor exponențiali $f_j, j = r+1, \dots, s$.

În acest capitol sunt examinate sistemele de forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x, y), \quad \gcd(P, Q) = 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

În dependență de valorile parametrilor sistemului (2.6) pentru el originea sistemului de coordonate $(0, 0)$ este punct singular ori de tip centru, ori de tip focar. Acest punct singular are rădăcinile ecuației caracteristice pur imaginare și este numit focar slab sau punct critic monodromic. Apare problema determinării acelor condiții asupra coeficienților lui (2.6) ce ne

asigură existența centrului în $(0, 0)$. Problema dată se numește *problema deosebirii centrului de focar* sau, pe scurt, *problema centrului*.

Conform [74] sistemul (2.6) are în originea de coordonate $(0, 0)$ centru, dacă și numai dacă el are într-o vecinătate a lui $(0, 0)$ o integrală primă $F(x, y)$ analitică, i.e. $F \in \mathbb{C}^\omega$. La fel, sistemul (2.6) are în $(0, 0)$ centru, atunci și numai atunci când el are factor integrant de forma $\mu(x, y) = 1 + \sum \mu_j(x, y)$, $\mu \in \mathbb{C}^\omega$.

Se poate arăta că există o așa serie formală $F(x, y) = \sum F_j(x, y)$ încât derivata ei în puterea sistemului (2.6) reprezintă o combinație liniară a polinoamelor $\{(x^2 + y^2)^j\}_{j=2}^\infty$, i. e. $\frac{dF}{dt} = \sum_{j=2}^\infty L_{j-1}(x^2 + y^2)^j$. Mărimile $L_j, j = \overline{1, \infty}$ sunt polinoame de coeficienții sistemului (2.6) și se numesc mărimile Lyapunov. De exemplu, prima mărime Lyapunov pentru (2.6) arată astfel: $L_1 = (-ac + bd + 2bf - cf - 2ag + dg + 3k - 3l + p - q)/4$.

Sistemul (2.6) are în originea de coordonate $(0, 0)$ centru, dacă și numai dacă toate mărimile Lyapunov se anulează, adică $L_j = 0, j = \overline{1, \infty}$. În acest caz funcția $F(x, y)$ este o integrală primă a lui (2.6).

În acest capitol vor fi clasificate sistemele cubice (2.6) ce au drepte invariante afine de multiplicitate algebrică totală patru. La fel, pentru fiecare clasă se va rezolva problema centrului. Mai exact, va fi demonstrată următoarea teoremă:

Teorema 2.0.1. *Pentru ca punctul singular $(0, 0)$ al sistemului diferențial cubic (2.6) cu drepte invariante afine de multiplicitate algebrică totală patru să fie de tip centru este necesar și suficient ca să se anuleze prima mărime Lyapunov ($L_1 = 0$).*

2.1. Clasificarea sistemelor cubice cu focar slab și cu o dreaptă invariantă reală multiplă.

Fie (2.1) un sistem diferențial cubic ($n = 3$) pentru care punctul (x_0, y_0) este singular ($P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$) de tip focar slab, adică rădăcinile λ_1 și λ_2 ale ecuației caracteristice $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, unde $\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)$ și $\Delta = P'_x(x_0, y_0)Q'_y(x_0, y_0) - P'_y(x_0, y_0) \cdot Q'_x(x_0, y_0)$, sunt pur imaginare, i.e. $\lambda_{1,2} = \beta i, \beta \in \mathbb{R}^*, i^2 = -1$.

Fie că sistemul (2.6) are o dreaptă invariantă reală l . Printr-o transformare de forma

$$x \rightarrow \nu \cdot (x \cos \varphi + y \sin \varphi), \quad y \rightarrow \nu \cdot (y \cos \varphi - x \sin \varphi), \quad \nu \neq 0 \quad (2.7)$$

putem face ca dreapta l să fie descrisă de ecuația $x = 1$. Astfel, $k = -a, m = -c - 1, p = -f, r = 0$

și (2.6) este redus la sistemul

$$\dot{x} = (1-x)(y + ax^2 + xy + cxy + fy^2), \dot{y} = -x - gx^2 - sx^3 - dxy - qxy^2 - by^2 - nxy^2 - ly^3. \quad (2.8)$$

Notăm $\sigma(x, y) = E_1(\mathbb{X})/(x-1)$, $H_2(y) = \sigma(x, y)|_{x=1}$, $H_3(y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}|_{x=1}$ și $H_4(y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}|_{x=1}$, unde $\mathbb{X}$ este câmpul vectorial asociat sistemului (2.8).

Lema 2.1.1. *Dreapta invariantă $x-1=0$ a sistemului (2.8) are multiplicitatea nu mai mică ca 2, dacă și numai dacă are loc cel puțin una dintre următoarele patru serii de condiții:*

$$a = 0, c = -2, f = 0; \quad (2.9)$$

$$a = f = l = 0, n = 2 - b + c, s = -1 - g, c + 2 \neq 0; \quad (2.10)$$

$$a = 0, l = f, q = (-4 + 2b - 4c + bc - c^2 - df + 2n + cn)/f, s = -1 - g; \quad (2.11)$$

$$l = f, n = (2a - ab + ac + f + fg + fs)/a, q = (2 + a^2 + c - ad + 2g + cg + 2s + cs)/a. \quad (2.12)$$

Demonstrație. Pentru ca dreapta invariantă $x=1$ a sistemului (2.8) să aibă multiplicitatea nu mai mică ca doi este necesar și suficient ca $H_2(y) \equiv 0$. Avem $H_2(y) = H_{21}(y)H_{22}(y)$, unde $H_{21}(y) = 1 + g + s + (d+q)y + (b+n)y^2 + ly^3$, și $H_{22}(y) = 2 + a^2 + c - ad + 2g + cg - aq + 2s + cs + 4ay - 2aby + 2acy + 2fy + 2fgy - 2any + 2fsy + 4y^2 - 2by^2 + 4cy^2 - bcy^2 + c^2y^2 + 2afy^2 + dfy^2 - 3aly^2 - 2ny^2 - cny^2 + fgy^2 + 4fy^3 + 2cfy^3 - 4ly^3 - 2cly^3 + f^2y^4 - fly^4$. Dacă $H_{21}(y) \equiv 0$, i.e. $l = 0, n = -b, q = -d, s = -1 - g$, atunci sistemul (2.8) este degenerat, adică $\deg(\gcd(P, Q)) > 0$.

Ușor se verifică faptul că în cazul sistemului (2.8) identitatea $H_{22}(y) \equiv 0$ este echivalentă cu sistemul de egalități

$$\begin{aligned} (c+2)(1+g+s) + a(a-d-q) &= 0, a(c+2) - a(n+b) + f(1+g+s) = 0, \\ (c+2)(c+2-b-n) + f(2a+d+q) - 3al &= 0, (c+2)(f-l) = 0, f(f-l) = 0, \end{aligned}$$

și are loc dacă se verifică cel puțin una dintre seriile de condiții (2.9)-(2.12). $\square$

Lema 2.1.2. *Dreapta invariantă $x-1=0$ a sistemului (2.8) are multiplicitatea nu mai mică ca 3, dacă și numai dacă are loc cel puțin una dintre următoarele opt serii de condiții:*

$$a = f = l = 0, c = -2, n = -b, s = -1 - g; \quad (2.13)$$

$$a = f = l = 0, b = 1, d = -q(c+3), g = -2, n = c+1, s = 1, q(c+2) \neq 0; \quad (2.14)$$

$$a = 0, b = 1, g = (2d + cd - 2f)/f, l = f, n = c+1, q = -d, s = (f - 2d - cd)/f, c \neq -2; \quad (2.15)$$

$$b = 1, c = -2, f = 0, g = ad - 2, l = 0, n = -1, q = a - d, s = 1; \quad (2.16)$$

$$b = 1, d = (3 + c)(2 + g)/a, f = 0, l = 0, n = 1 + c, q = (a^2 - g - 2)/a, s = 1, c \neq -2; \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} b = 1, d = a(3 + c)/(2 + c), f = 0, l = 0, n = 1 + c, q = a(1 + c)/(2 + c), \\ s = (a^2 - (2 + c)(1 + g))/(2 + c), a^2 - (2 + c)(2 + g) \neq 0; \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$d = (b - 1)(c + 3)/f, g = (ab - a - 2f)/f, l = f, n = c + 1, q = (1 - b + af)/f, s = 1; \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} a = (b - 1)(3 - b + c)/f, q = ((-1 + b)(5 - b + 2c) - df)/f, \\ g = ((3 - b + c)(4 - 5b + b^2 + c - bc + df) - 2f^2)/f^2, l = f, \\ n = 1 + c, s = (f^2 + (3 - b + c)(-3 + 3b - c + bc - df))/f^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Demonstrație. În fiecare dintre cazurile (2.9)-(2.12) vom rezolva în raport cu y identitatea $H_3(y) \equiv 0$.

Cazul (2.9). În condițiile (2.9), $H_3(y)$ are forma $H_3(y) = -H_{21}(y)H_{31}(y)$, unde $H_{31}(y) = 1 + g + s - by^2 - ny^2 - 2ly^3$. Deoarece $H_{21}(y) \neq 0$ vom cere ca să aibă loc identitatea $H_{31}(y) \equiv 0$ care ne conduce la seria de condiții (2.13).

Cazul (2.10). Polinomul $H_3(y)$ arată astfel: $H_3(y) = (c + 2)yH_{32}(y)$, unde $H_{32}(y) = -(g + 2)(d + q) + (-2d + bd - 4q + bq - cq)y^2 + 2(b - 1)(2 + c)y^3$. În acest caz identitatea $H_3(y) \equiv 0$ este echivalentă cu identitatea $H_{32}(y) \equiv 0$, care are loc în fiecare dintre următoarele două seturi de condiții: **a)** $b = 1, d = -q(c + 3), g = -2$; **b)** $b = 1, d = 0, q = 0$.

Seria de condiții (2.10) împreună cu cele din a) ne dau condițiile (2.14), iar împreună cu b) ne conduce la condițiile

$$a = d = f = l = q = 0, b = 1, n = 1 + c, s = -1 - g. \quad (2.21)$$

Cazul (2.11). Avem $H_3(y) = \frac{1}{f}y(2 + c + fy)H_{33}(y)$, unde $H_{33}(y) = -(c + 2)(g + 2)(b - 1 + n - c - 1) - 2f(g + 2)(b - 1 + n - c - 1)y + ((b - c - 3)((b - 1)(3 + c) - df) - f^2(g + 2) + (n - c - 1)(-10 + 4b - 6c + bc - c^2 - df + n - 1 - c))y^2 - 2(2 + c)f(n - c - 1)y^3 - f^2(n - c - 1)y^4$.

Identitatea $H_{33}(y) \equiv 0$ are loc dacă se verifică cel puțin una dintre următoarele trei seturi de condiții:

$$\begin{aligned} a) \quad & b = 1, g = (2d + cd - 2f)/f, n = 1 + c; \quad b) \quad d = (b - 1)(3 + c)/f, g = -2, n = 1 + c; \\ c) \quad & b = c + 3, g = -2, n = c + 1. \end{aligned}$$

Adăugând la ele (2.11), obținem respectiv (2.15) și seriile de condiții:

$$a = 0, d = (b - 1)(3 + c)/f, g = -2, l = f, n = 1 + c, q = (1 - b)/f, s = 1; \quad (2.22)$$

$$a = 0, b = 3 + c, g = -2, l = f, n = 1 + c, q = ((c + 2)^2 - df)/f, s = 1. \quad (2.23)$$

Cazul (2.12). În acest caz $H_3(y) = \frac{1}{a^2}(a + 2y + cy + fy^2)H_{34}(y)$, unde $H_{34}(y) = -a((2 + g)((3 + c)(2 + g) - ad) + (s - 1)((4 + c)(2 + g) + a^2 - ad + s - 1)) + a[2a(ad + (b - c - 4)(1 + g + s)) - 2f(2 + g)(1 + g + s)]y + [a(b - 1)(3a^2 + (2 + c)(1 + g + s)) + f((g + 2)(g + 2 - 3a^2 - ad) + (s - 1)(s - 1 + 2(g + 2) - 2a^2 - ad)) + a(2 + c)(ad - (c + 3)(1 + g + s))]y^2 + 2a(2 + c)[a(b - 1) - f(s + g + 1)]y^3 + af[a(b - 1) - f(s + g + 1)]y^4.$

Identitatea $H_{34}(y) \equiv 0$ are loc dacă:

- a) $b = 1, c = -2, f = 0, g = ad - 2, s = 1$; b) $b = 1, d = (3 + c)(2 + g)/a, f = 0, s = 1$;
- c) $b = 1, d = a(3 + c)/(2 + c), f = 0, s = (a^2 - (2 + c)(1 + g))/(2 + c)$;
- d) $d = (b - 1)(c + 3)/f, g = (a(b - 1) - 2f)/f, s = 1$;
- e) $a = (b - 1)(3 - b + c)/f, g = (-2f^2 + (3 - b + c)((b - 1)(-4 + b - c) + df))/f^2,$
 $s = (((3 - b + c)((-1 + b)(3 + c) - df) + f^2))/f^2.$

Egalitățile a)-e), împreună cu cele din (2.12), ne conduc la condițiile (2.16)-(2.20), respectiv.

Menționăm că seria de condiții (2.21) (respectiv (2.22);(2.23)), se conține în seria de condiții (2.18)(respectiv (2.19); (2.20)). $\square$

Lema 2.1.3. *Dreapta invariantă $x - 1 = 0$ a sistemului (2.8) are multiplicitatea nu mai mică ca 4, dacă și numai dacă are loc cel puțin una dintre următoarele trei serii de condiții:*

$$a = f = l = 0, b = 2, c = g = n = -2, s = 1; \quad (2.24)$$

$$a = d = 0, b = 1, c = g = -2, l = f, n = -1, s = 1, q = 0; \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} a &= (b - 1)^2/f, c = 2b - 4, d = 2(b - 1)^2/f, g = ((b - 2)(b - 1)^2 - 2f^2)/f^2, \\ l &= f, n = 2b - 3, q = (b - 1)^2/f, s = ((b - 1)^2 + f^2)/f^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Demonstrație. Vom cere ca în fiecare dintre seriile de condiții (2.13)-(2.20) să aibă loc în raport cu y identitatea $H_4(y) \equiv 0$.

Condițiile (2.13). În aceste condiții $H_4(y)$ arată astfel: $H_4(y) = (d + q)yH_{41}(y)$, unde $H_{41}(y) = 2 + g + (2 - b)y^2$. Dacă $d + q = 0$, atunci sistemul $\{(2.8), (2.13)\}$ este degenerat, iar dacă $H_{41}(y) \equiv 0$, obținem seria de condiții (2.24).

Condițiile (2.14). În cazul dat $H_4(y) = -(c + 2)^2y(q + y + 2qy^2)$. Evident, $H_4(y) \neq 0$. Prin urmare, dreapta invariantă $x = 1$ nu poate avea multiplicitatea algebrică mai mare ca trei.

Condițiile (2.15). Polinomul $H_4(y)$ are forma: $H_4(y) = (c + 2 + fy)((c + 2)^2 d^2 + 2(c + 2)d^2 fy + f((c + 2)(3d + cd - f) + d^2 f)y^2 + 2(c + 2)df^2 y^3 + df^3 y^4)/f^2$. Ușor se observă, că $H_4(y) \neq 0$.

Condițiile (2.16). Avem $H_4(y) = a^2(-2 + d^2 + 3dy) \equiv 0 \implies a = 0 \implies \deg(\gcd(P, Q)) > 0$.

Condițiile (2.17). În aceste condiții $H_4(y) = -\frac{1}{a}(a + 2y + cy)(2a^2 - (g + 2)(4 + c + g) + a(c + 2 - 3(g + 2))y - 2(c + 2)(g + 2)y^2) \neq 0$.

Condițiile (2.18). Avem $H_4(y) = (c + 2)((g + 2)^2 + ((g + 2)(c + 3) - c - 2)y^2) + a/(2 + c)(-4a - 3ac - ag - acg + 16y - 2a^2 y + 12cy - 2a^2 cy + 2c^2 y + 12gy + 10cgy + 2c^2 gy + 4ay^2 - ac^2 y^2) + 2a(c + 2)y^3 \neq 0$.

Condițiile (2.19). Polinomul $H_4(y)$ arată astfel: $H_4(y) = \frac{1}{f^2}(a + 2y + cy + fy^2)H_{42}(y)$, unde $H_{42}(y) = (b - 1)(-a + ab + 2f + cf) - 2af^2 + f((b - 1)(3a + 2f) - f(c + 2))y - (b - 1)(-5 + b - 2c)fy^2 + (b - 1)f^2 y^3$. Deoarece $f \neq 0$, identitatea $H_{42}(y) \equiv 0$ are loc atunci și numai atunci când au loc egalitățile $a = 0$, $b = 1$, $c = -2$, care, împreună cu (2.19), ne dau (2.25).

Condițiile (2.20). Polinomul $H_4(y)$ are forma: $H_4(y) = \frac{1}{f^4}(3 - b + c + fy)H_{43}(y)$, unde

$$\begin{aligned} H_{43}(y) = & f\alpha(b + \beta - 1)(f\alpha\beta + (b - 1)((b - 1)(b - 2) + f\alpha - 3\beta + b\beta)) - (b - 1)^2\beta(f^2 \\ & + (b - 2)(b + \beta - 1)) + 2f[f\alpha(b + \beta - 1)(f\alpha + (b - 1)(2b + \beta - 3)) - (b - 1)\beta(f^2 \\ & + (b - 1)(b + \beta - 1))]y + f^2[f\alpha((b - 1)(6b - 7) + f\alpha - 5\beta + 6b\beta + \beta^2) \\ & - \beta(f^2 + (b - 1)(b + \beta))]y^2 + 2f^4\alpha[2(b - 1) + \beta]y^3 + f^5\alpha y^4, \end{aligned}$$

$\alpha = d - (b - 1)(c + 2)/f$, $\beta = c - 2b + 4$. În cazul dat identitatea $H_4(y) \equiv 0$ este echivalentă cu identitatea $H_{43}(y) \equiv 0$, care are loc dacă $\alpha = \beta = 0$, adică $c = 2b - 4$, $d = 2(b - 1)^2/f$. Aceste egalități, împreună cu (2.20), ne dau seria de condiții (2.26). $\square$

Lema 2.1.4. *În clasa sistemelor cubice cu focar slab multiplicitatea maximală a unei drepte invariante nu este mai mare ca 4. Cu exactitatea unei transformări centro-afine și rescalarea timpului orice sistem cubic cu focar slab și cu o dreaptă invariantă de multiplicitatea 4 poate fi scris sub una dintre următoarele 3 forme:*

$$\dot{x} = (x - 1)^2 y, \quad \dot{y} = -x + 2x^2 - x^3 - dxy - qx^2 y - 2y^2 + 2xy^2, \quad d \neq 0; \quad (2.27)$$

$$\dot{x} = (x - 1)y(x - fy - 1), \quad \dot{y} = -x + 2x^2 - x^3 - y^2 + xy^2 - fy^3, \quad f \neq 0; \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -(x - 1)((b - 1)^2 x^2 + (2b - 3)fx y + fy(1 + fy))/f, \\ \dot{y} = & -((b - 1)^2 x^2(b + 2 + x) + (b - 1)^2 fx(2 + x)y + f^3 y^3 \\ & + f^2((x - 1)^2 x + (b - 3x + 2bx)y^2))/f^2, \quad f(b - 1) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Demonstrație. În condițiile (2.24) (respectiv, (2.25), (2.26)) sistemul (2.8) capătă forma (2.27) (respectiv, (2.28), (2.29)). Pentru fiecare dintre aceste sisteme polinomul $E_1(\mathbb{X})$ arată astfel: $E_1(\mathbb{X}) = (x-1)^4(A_0(y) + A_1(y)(x-1))$.

În cazul (2.24) avem $A_0(y) = -y(d+q+(d+2q)y^2-2y^3)$; în cazul (2.25): $A_0(y) = -f^2y^4$, iar în cazul (2.26):

$$A_0(y) = \frac{1}{f^4}(1-b-fy)((b-1)^2(8b-5b^2+b^3-3f^2+bf^2-4) + (b-1)f(12b-11b^2+3b^3-5f^2+3bf^2-4)y + 3(b-1)f^2((b-1)^2+f^2)y^2 + f^3((b-1)^2+f^2)y^3).$$

În toate cazurile $A_0(y) \neq 0$. $\square$

2.2. Integrabilitatea sistemelor (2.27), (2.28), (2.29).

Sistemul (2.27). Acest sistem are dreapta invariantă $f_1 \equiv x-1=0$ și factorii exponențiali: $f_2 = \exp[1/(x-1)]$; $f_3 = \exp[(d+q+2y-2xy)/(x-1)^2]$; $f_4 = \exp[(-d-4q+3dx+6qx+6y-6xy)/(x-1)^3]$, care au respectiv cofactorii $K_{f_1}(x, y) = y(x-1)$, $K_{f_2}(x, y) = -y$, $K_{f_3}(x, y) = 2(-x+dy+qy+x^2+qxy-y^2)$, $K_{f_4}(x, y) = 6(x+qy)$.

Pentru (2.27) prima mărime Lyapunov arată astfel: $L_1 = -2q$. Dacă $q \neq 0$, atunci $(0, 0)$ este focar și sistemul (2.27) nu este integrabil în $(0, 0)$, adică nu există o așa vecinătate a lui $(0, 0)$ în care (2.27) ar avea integrală primă analitică (factor integrant analitic) ce nu depinde de t , i.e. de forma $F(x, y)$ ($\mu(x, y)$). În cazul $q = 0$ avem factor integrant de forma

$$\mu(x, y) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} f_4^{\alpha_4}, \quad (2.30)$$

unde $\alpha_1 = -6$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = d/6$, adică $\mu(x, y) = \frac{1}{(x-1)^6} \exp \frac{d(-d+3dx+6y-6xy)}{6(x-1)^6}$. Prin urmare, în cazul dat punctul singular $(0, 0)$ este centru pentru (2.27).

Sistemul (2.28). Avem dreapta invariantă $f_1 \equiv x-1=0$, factorii exponențiali

$$f_2 = \exp \frac{y}{x-1}, f_3 = \exp \frac{y^2}{(x-1)^2}, f_4 = \exp \frac{2-3x+x^3+fy^3}{(x-1)^3}$$

și cofactorii $K_{f_1}(x, y) = y(x-fy-1)$, $K_{f_2}(x, y) = -x(x-1)$, $K_{f_3}(x, y) = -2xy$, $K_{f_4}(x, y) = -3y(1+fy)$. Pentru acești cofactori identitatea (2.4) are loc dacă $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = -2$. Așa dar, sistemul are integrala primă

$$F(x, y) = (x-1)^6 \exp \frac{4-6x+2x^3+3y^2-3xy^2+2fy^3}{(1-x)^3}$$

și deci, în $(0, 0)$ avem centru.

Sistemul (2.29). Sistemul dat are dreapta invariantă $f_1 \equiv x - 1 = 0$, factorii exponențiali

$$f_2 = \exp \frac{b + fy - 1}{f(x-1)}, f_3 = \exp \frac{(b-1)^2 + 2f(b-x)y + f^2y^2}{(x-1)^2},$$

$$f_4 = \exp \left[\frac{1}{3(x-1)^3} \cdot (3(1-b^2-2f^2)x + 12(b^2+f^2-b)x^2 + (6b-3b^2-2b^3-6f^2-1)x^3 - 3f(1-b)y - 3f(1-3b+2b^2)x^2y + 6f^2(1-b)xy^2 - 2f^3y^3) \right]$$

și cofactorii

$$K_{f_1}(x, y) = -\frac{fy + (b-1)^2x^2 + (2b-3)fxy + f^2y^2}{f},$$

$$K_{f_2}(x, y) = \frac{f^2x + fy - (b-1)^2x^2 - f^2x^2 - bfy}{f^2},$$

$$K_{f_3}(x, y) = \frac{2(-bf^2x + (b-1)^2(fy + x^2) + f^2x^2 - f((b-1)^2 + f^2)xy)}{f},$$

$$K_{f_4}(x, y) = \frac{1}{f}((b-1)f^2x + f(b^2 + 2f^2 - 1)y + ((b-1)^2 + f^2)((b-1)x(2bx - x + 4fy) + 2f^2y^2))$$

și integrala primă $F(x, y) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} f_4^{\alpha_4}$, unde $\alpha_1 = 2((b-1)^2 + f^2)$, $\alpha_2 = f(b+1)$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

Din cele expuse mai sus rezultă că pentru sistemul diferențial cubic (2.6) cu o dreaptă invariantă afină și reală de multiplicitate algebrică patru are loc teorema 2.0.1.

2.3. Sistemele cubice (2.6) cu două drepte invariante afine l_1, l_2 , $m(l_1) + m(l_2) \geq 4$.

2.3.1. Dreptele sunt reale și paralele.

Fie $l_1, l_2 \in \mathbb{R}[x, y]$, $l_1 \parallel l_2$. Fără a diminua generalitatea putem considera $l_1 = x - 1$, adică (2.6) are forma (2.8). Astfel $l_2 = x - \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\alpha \neq 0; 1$.

Dreapta l_2 este invariantă pentru sistemul (2.8) dacă

$$a = f = 0, \alpha = -1/(c+1), c \neq -2. \quad (2.31)$$

Luând în considerare (2.31) și Lemele 2.1.2 și 2.1.1 obținem, respectiv, următoarele două leme.

Lema 2.3.1. *Printr-o transformare afină și rescalarea timpului orice sistem cubic cu focar fin și cu două drepte invariante reale afine distincte și paralele l_1, l_2 , $m(l_1) \geq 3$, poate fi scris sub una dintre următoarele două forme:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(x-1)(1+x+cx)y, \quad c \notin \{-2; -1\}, \\ \dot{y} &= -x + 2x^2 - x^3 + 3qxy + cqxy - qx^2y - y^2 - xy^2 - cxy^2, \quad q \neq 0; \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x-1)(1+x+cx)y, \quad c \notin \{-2; -1\}, \\ \dot{y} &= -x - gx^2 + x^3 + gx^3 - y^2 - xy^2 - cxy^2, \quad g \neq -2.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Lema 2.3.2. *Orice sistem cubic cu focar fin și două drepte invariante reale distincte și paralele l_1, l_2 , $m(l_1) \geq 2$, $m(l_2) \geq 2$, printr-o transformare afină și rescalarea timpului poate fi scris sub următoarea formă:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x-1)(1+x+cx)y, \quad c \notin \{-2; -1\}, \\ \dot{y} &= -x - cx^2 + x^3 + cx^3 - dxy - qx^2y + cy^2 - 2xy^2 - 2cxy^2.\end{aligned}\tag{2.34}$$

2.3.2. Dreptele sunt reale și concurente.

Considerăm $l_1 \equiv x - 1 = 0$. Dreapta $l_2 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ este dreaptă invariantă pentru sistemul (2.8), dacă $\varphi(x) \equiv 0$, unde $\varphi(x) = \left(A \cdot P(x, y) + B \cdot Q(x, y) \right) \Big|_{y=Ax+B}$.

Lema 2.3.3. *Printr-o transformare afină și rescalarea timpului orice sistem cubic cu focar fin și două drepte invariante afine reale distincte și concurente l_1, l_2 , $m(l_1) \geq 3$ poate fi scris sub una dintre următoarele patru forme:*

$$\dot{x} = (x-1)^2y, \quad \dot{y} = -x - gx^2 - dxy - y^2 + (g+1)x^3 - d(g+1)x^2y + xy^2, \quad d \neq 0;\tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2f(b-1)}(x-1)(2(1-b)fy - (b-1)(b^2 - b \pm \Delta - f^2)x^2 \\ &\quad + f(f^2 - 4 + 7b - 3b^2 \mp \Delta)xy - 2f^2(b-1)y^2), \\ \dot{y} &= \frac{1}{2f^2(b-1)}\left(2f^2(1-b)x + (1-b)((b-1)(b^2 - b \pm \Delta) - f^2(b+3))x^2 \right. \\ &\quad + f(1-b)(3b(b-1) \pm \Delta - f^2)xy + 2bf^2(1-b)y^2 + 2f^2(1-b)x^3 + f(b-1) \\ &\quad \cdot (f^2 \mp \Delta - (b-1)(b-2))x^2y + f^2(f^2 \mp \Delta - (b-1)(3b-4))xy^2 + 2f^3(1-b)y^3\Big),\end{aligned}\tag{2.36}$$

unde $\Delta = \sqrt{4f^2(1-b) + (f^2 + b(b-1))^2}$;

$$\dot{x} = (1-x)y(1-x+fy), \quad df \neq 0, \quad \dot{y} = -x + 2x^2 - dxy - y^2 - x^3 + dx^2y + xy^2 - fy^3;\tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1-x)(fy + (1-b)(b-c-3)x^2 + f(c+1)xy + f^2y^2)/f, \\ \dot{y} &= (f^2(c-b+3)x + (c-b+3)(cf^2 + (b-1)((b-2)(b-3) + 5c - 2bc + c^2 - 2f^2))x^2 \\ &\quad - f(2(1-b)(b-c-3)^2 + f^2(2b-c-4))xy - bf^2(b-c-3)y^2 + (b-c-3) \\ &\quad \cdot (2b-c-3)((b-1)(b-c-3) - f^2)x^3 + f(f^2(2b-c-4) - (b-1)^2 \\ &\quad \cdot (b-c-3))x^2y - f^2(c+1)(b-c-3)xy^2 - f^3(b-c-3)y^3)/(f^2(b-c-3)).\end{aligned}\tag{2.38}$$

Demonstrație. În condițiile (2.13) avem

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -B(A+bB) + (-1 - A^2 + 2AB - 2AbB + bB^2 - Bd)x + (2A^2 - \\ &\quad A^2b - AB + 2AbB - Ad - g - Bq)x^2 + (1 - A^2 + A^2b + g - Aq)x^3 \equiv 0 \Rightarrow \\ &\quad \{b = 1, q = d(1+g)\} \Rightarrow (2.35) \text{ și } l_2 = 1 - x + dy.\end{aligned}$$

În fiecare dintre condițiile (2.14), (2.16)-(2.18) polinomul $\varphi(x)$ are forma $\varphi(x) = -B(B + A) + \psi(x)$, $\psi(0) = 0$. Luând în considerare $B \neq 0$, identitatea $\varphi(x) \equiv 0$ ne oferă $B = -A$. Astfel, în condițiile (2.14), (2.16)-(2.18), respectiv, avem

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -(1 + 3Aq + Acq)x + (2 + 4Aq + Acq)x^2 - (1 + Aq)x^3; \\ \psi(x) &= (Ad - 1)x + (2 - ad - 2Ad)x^2 + (Ad - 1)x^3; \\ \psi(x) &= -((a - 6A - 2Ac - 3Ag - Acg)x + (8A + 2Ac + ag + 4Ag + Acg)x^2 \\ &\quad + (a - 2A - Ag)x^3)/a; \\ \psi(x) &= (-2 + 3aA - c + aAc)x - (4aA + aAc + 2g + cg)x^2 \\ &\quad + (2 - a^2 + aA + c + 2g + cg)x^3/(c + 2).\end{aligned}$$

În cazul condițiilor (2.14) și (2.16) identitatea $\psi(x) \equiv 0$ ne oferă $\deg(\gcd(P, Q)) > 0$, iar în cazul condițiilor (2.17) și (2.18) este ușor de arătat că $\psi(x) \not\equiv 0$.

În condițiile (2.15) avem

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -B(A + B)(1 + Bf) - ((A + B)(A + B + Bc + 2ABf) + 1 + Bd)x - (d(c + 2) + df(A - B) \\ &\quad - 2f + A(A + B)f(1 + c + Af))x^2/f + (d(c + 2) - f + Adf)x^3/f.\end{aligned}$$

Dacă $B = -A$, atunci $\psi(x) \not\equiv 0$, iar dacă $B = -1/f$, atunci $\deg(\gcd(P, Q)) > 0$. Fie că se realizează condițiile (2.19). Avem

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -B(A + bB + fB(A + B) - ((b - 1)(c + 3)B + B(A + B)f(c + 2Af) \\ &\quad + f(1 + A^2 + 2AbB + B^2))x/f - ((b - 1)(a + 3A - B + Ac) + f(A + B)(a + Ac + A^2f) \\ &\quad + f(A^2b + AB - 2))x^2/f + ((b - 1)A - f)x^3/f \equiv 0 \Rightarrow A = f/(b - 1) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= B((b - 1)(b + Bf)B + f(1 + Bf))/(1 - b) - ((b - 1)^3(c + 3)B \\ &\quad + f(b - 1)^2(1 + c)B^2 + 2f^3(b - 1)B^2 + f(f^2 + (b - 1)^2) \\ &\quad + f^2(b - 1)(2b + c)B + 2f^4B)x/(f(b - 1)^2) - (f^5 + (b - 1)^4(a - B) \\ &\quad + f(b - 1)^3(1 + aB + c) + f^2(b - 1)^2(a + B + Bc) \\ &\quad + f^3(b - 1)(b + c + Bf))x^2/(f(b - 1)^3) \equiv 0 \Rightarrow \\ &\quad \{a = -(b - b^2 + f^2 \pm \Delta)/(2f), c = (6 - 9b + 3b^2 - f^2 \mp \Delta)/(2(b - 1)), \\ &\quad B = (b - b^2 - f^2 \pm \Delta)/(2f(b - 1))\} \Rightarrow (2.36).\end{aligned}$$

În condițiile (2.20) polinomul $\varphi(x)$ are forma $\varphi(x) = -BEq_0 - Eq_1x - Eq_2x^2/f^2 - Eq_3x^3/f^3$,

unde

$$\begin{aligned}
Eq_0 &= A(1 + Bf) + B(b + Bf); \\
Eq_1 &= 1 + A^2 + 2AbB + B^2 + Bd + B(A + B)(c + 2Af); \\
Eq_2 &= (3 - b + c)((b - 1)(b - c - 4) + df) + Af((b - 1)(3 - b + c) + df) - 2f^2 \\
&\quad + Bf((b - 1)(5 - b + 2c) - df) + A^2(b + c)f^2 + AB(1 + c)f^2 + A^2(A + B)f^3; \\
Eq_3 &= f^2 + (3 - b + c)((b - 1)(c + 3) - df) + Af(b - 1)(c + 2) - Adf^2.
\end{aligned}$$

Dacă $B = -1/f$, atunci $\{Eq_0 = 0, Eq_3 = 0\} \Rightarrow \{b = 1, A = -(d(c + 2) - f)/(df)\} \Rightarrow \{Eq_1 = 0, Eq_2 = 0\} \Rightarrow \{d = f\} \Rightarrow \deg(\gcd(P, Q)) > 0$.

Fie $B \neq -1/f$. Atunci $\{Eq_0 = 0, Eq_1 = 0\} \Rightarrow \{A = -B(b + Bf)/(1 + Bf), d = (-1 - 2fB + ((b - 1)(1 + b + c) - f^2)B^2 + f(b - 1)(c + 2)B^3)/(B(1 + Bf)^2)\} \Rightarrow \{Eq_2 = -Eq_{21}Eq_{22}/(B(1 + Bf)^2), Eq_3 = Eq_{21}Eq_{31}/(B(1 + Bf)^3), \text{ unde } Eq_{21} = b - c - 3 + Bf(2b - c - 4), Eq_{22} = B((b - 1)(b - c - 4) - f^2) - f, Eq_{31} = (b - 1)B(1 - b + (b - c - 4)(1 + Bf)) - f(1 + Bf)^2\}$.

Fie $Eq_{22} = 0, Eq_{31} = 0$. Din ecuația $Eq_{22} = 0$ exprimăm B , înlocuim în Eq_{31} și obținem $Eq_{31} = f(b - 1)^2/((b - 1)(4 - b + c) + f^2) \neq 0$. Prin urmare, în condițiile $f(1 + Bf) \neq 0$ sistemul $\{Eq_{22} = 0, Eq_{31} = 0\}$ nu este compatibil.

Fie acum $Eq_{21} = 0$. Dacă $c = 2b - 4$, atunci $\{b = 1, d = -1/B\}$ sau $\{b = 1, B = -1/d\} \Rightarrow$ sistemul (2.37), care are dreapta invariantă $1 - x + dy = 0$. Presupunem $c - 2b + 4 \neq 0$. Atunci $Eq_{21} = 0 \Rightarrow \{B = (c - b + 3)/((2b - c - 4)f), d = f(2b - c - 4)/(b - c - 3)\} \Rightarrow$ sistemul (2.38) care are dreapta invariantă $(b - c - 3)(-1 + (2b - c - 3)x) - f(2b - c - 4)y = 0$. $\square$

În mod similar lemei 2.3.3 se demonstrează și următoarea leamnă:

Lema 2.3.4. *Printr-o transformare afină și rescalarea timpului, orice sistem cubic cu focar fin și cu două drepte invariante reale și concurente, ambele de multiplicitatea cel puțin doi l_1, l_2 , $m(l_1) = m(l_2) \geq 2$, poate fi scris sub una dintre următoarele șapte forme:*

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y(x - 1)^2, \\
\dot{y} &= -(B^2x + AB(2 + (A + B)^2)x^2 - 2Bxy + A^2(1 + (A + B)^2)x^3 \\
&\quad - AB y^2 - 2A(1 + (A + B)^2)x^2y + (1 + A^2 + 2AB)xy^2)/B^2;
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y(x - 1)(x - 1 - fy), \\
\dot{y} &= -(x - 2x^2 + x^3 + y^2 - xy^2 + fy^3) - xy(2Bx + y - 2B)/B^2;
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (1-x)(y+ax^2+(2aA-1)xy+aA^2y^2) \\
\dot{y} &= -x - ((a-A+aA^2-2A^3)x^2 + Ay(a+A+aA^2)(2x+Ay) \\
&\quad + A^3x^3 + A(a-2A+aA^2)x^2y + A^2(2a-A+2aA^2)xy^2 \\
&\quad + aA^3(1+A^2)y^3)/(A(1+A^2));
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (x-1)^2y, \\
\dot{y} &= -(B^2x+2ABx^2+B((A+B)(2A+B)-2)xy-B(2A+B)y^2 \\
&\quad + A^2x^3 + A(A(A+B)-2)x^2y - (A^2+(A+B)^2-1)xy^2 \\
&\quad + (A+B)y^3)/B^2, \quad A+B \neq 0;
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (1-x)y(1-x+f^2x+fy), \quad f \neq 0 \\
\dot{y} &= -(x-2x^2+fx y+y^2+x^3-fx^2y+(f^2-1)xy^2+fy^3);
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (x-1)(-B^2y+B(1+Bf)x^2+(B^2+B^3f+B^4f^2-1)xy-B^2fy^2)/B^2 \\
\dot{y} &= -x - (B^3f(3+Bf)x^2+B(2+Bf)(-1+B^3f+B^4f^2)xy \\
&\quad -B^3f(2+Bf)y^2-B^3fx^3-B^2f(1+B^2+B^3f)x^2y \\
&\quad + (1-B^4f^2)xy^2+B^2fy^3)/B^2;
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y(x-1)^2, \\
\dot{y} &= -(B^2x+2ABx^2+2B(A^2+AB-1)xy-2AB y^2+A^2x^3 \\
&\quad -A(2-A^2+B^2)x^2y+(1-2A^2)xy^2+Ay^3)/B^2, \quad A \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

2.3.3. Dreptele sunt complexe și paralele.

Printr-o transformare (2.7) putem considera dreapta invariată l_1 descrisă de ecuația $l_1 = x - \alpha - i$ și sistemul (2.6) de forma

$$\dot{x} = y[(x-\alpha)^2+1]/(\alpha^2+1), \quad \dot{y} = -(x+gx^2+dxy+by^2+sx^3+qx^2y+nxy^2+ly^3). \tag{2.46}$$

Pentru (2.46) dreapta l_1 are multiplicitatea algebrică doi, dacă

$$\left((1+\alpha^2)^2 E_1(\mathbb{X}) / (1+(x-\alpha)^2) \right) \Big|_{x=\alpha+i} = f_1(y)f_2(y) \equiv 0,$$

unde

$$\begin{aligned}
f_1(y) &= -g + \alpha - 3s\alpha + g\alpha^2 + s\alpha^3 + (-q + d\alpha + q\alpha^2)y + (b + n\alpha)y^2 + ly^3 \\
&\quad + i(1 - s + 2g\alpha + 3s\alpha^2 + (d + 2q\alpha)y + ny^2), \\
f_2(y) &= -(1 + \alpha^2)(-g + \alpha - 3s\alpha + g\alpha^2 + s\alpha^3) + (b + n\alpha)(1 + \alpha^2)y^2 + 2l(1 + \alpha^2)y^3 \\
&\quad + i(-(1 + \alpha^2)(1 - s + 2g\alpha + 3s\alpha^2) + (2 + n + n\alpha^2)y^2).
\end{aligned}$$

Luând în considerare faptul că sistemul (2.46) este real, avem

$$\begin{aligned} f_1(y) \equiv 0 &\Rightarrow \{Re(f_1(y)) \equiv 0, Im(f_1(y)) \equiv 0\} \Rightarrow \{b = d = l = n = q = 0, \\ g = -2\alpha s = -2\alpha/(1 + \alpha^2)\} &\Rightarrow \deg(\gcd(P, Q)) > 0. \end{aligned}$$

Identitatea $f_2(y) \equiv 0$ se realizează dacă $l = 0$, $b = -g = (2\alpha)/(1 + \alpha^2)$, $s = -n/2 = 1/(1 + \alpha^2)$.

În aceste condiții, (2.46) arată astfel

$$\dot{x} = \frac{y(1+(x-\alpha)^2)}{1+\alpha^2}, \quad \dot{y} = -\frac{(1+\alpha^2)x-2\alpha x^2+d(1+\alpha^2)xy+2\alpha y^2+x^3+q(1+\alpha^2)x^2y-2xy^2}{1+\alpha^2}. \quad (2.47)$$

Dreapta $l_2 = \overline{l_1} = x - \alpha + i$ este invariantă pentru sistemul (2.47) și are multiplicitatea algebrică doi.

2.3.4. Dreptele sunt complexe omogene.

În acest caz dreptele $l_{1,2}$ sunt drepte invariante pentru (2.6) dacă sunt descrise de ecuațiile $y \mp ix = 0$ și dacă se realizează condițiile

$$f = a + d, \quad g = b + c, \quad q = l - k + p, \quad s = m + n - r. \quad (2.48)$$

În aceste condiții polinomul $E_1(\mathbb{X})$ pentru sistemul (2.6) are forma $E_1(\mathbb{X}) = -l_1 l_2 (1 + \nu(x, y))$, unde $\nu(0, 0) = 0$. Este evident că l_1 (l_2), i.e. $y - ix$ ($y + ix$), nu divide $1 + \nu(x, y)$ și, prin urmare, multiplicitatea algebrică a dreptei invariante l_1 (l_2) nu este mai mare decât unu.

2.3.5. Dreptele sunt complexe neomogene și concurente.

Fie $l_{1,2} \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{R}[x, y]$, $l_2 = \overline{l_1}$ și $l_1 \nparallel l_2$. Printr-o transformare de forma (2.7) putem face ca dreapta l_1 (l_2) să fie descrisă de ecuația $y - (\alpha + \beta i)x - 1 = 0$, $\beta \neq 0$ ($y - (\alpha - \beta i)x - 1 = 0$, $\beta \neq 0$), i.e. putem face ca dreptele l_1 și l_2 să treacă prin punctul $(0, 1)$. Dreptele $l_{1,2}$ sunt drepte invariante pentru (2.6), dacă și numai dacă se realizează următoarele condiții

$$\begin{aligned} k &= g - 2\alpha + 2a\alpha, \quad l = -b, \quad m = 2 - a + d + 2c\alpha - 3\alpha^2 + \beta^2, \\ n &= -1 - d - 2\alpha^2 - f\alpha^2 - 2\beta^2 - f\beta^2, \quad p = b - c + 4\alpha + 2f\alpha, \\ q &= -g - c\alpha^2 + 2\alpha^3 - c\beta^2 + 2\alpha\beta^2, \quad r = -1 - f, \quad s = -(-1 + a)(\alpha^2 + \beta^2), \end{aligned} \quad (2.49)$$

i.e. dacă sistemul (2.6) are forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + (2 - a + d + 2c\alpha - 3\alpha^2 + \beta^2)x^2y + (g - 2\alpha + 2a\alpha)x^3 \\ &\quad + (b - c + 4\alpha + 2f\alpha)xy^2 - (f + 1)y^3, \\ \dot{y} &= -x - gx^2 - dxy - by^2 + (g + (c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2))x^2y + (a - 1)(\alpha^2 + \beta^2)x^3 \\ &\quad + (1 + d + (f + 2)(\alpha^2 + \beta^2))xy^2 + by^3, \quad \beta \neq 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Pentru sistemul (2.50) avem $\left(E_1(\mathbb{X})/(l_1 l_2)\right)\Big|_{y=(\alpha+i\beta)x+1} = g_1(x)g_2(x)$, unde

$$\begin{aligned} g_1(x) &= b + (f+2)(\alpha - i\beta) + (2+d+2b\alpha + c\alpha + 2\alpha^2 + 2f\alpha^2 + 4\beta^2 + 2f\beta^2 + i\beta(2b - c + 2\alpha))x \\ &\quad + (g + a\alpha + d\alpha + b\alpha^2 - b\beta^2 + (c + f\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) + i\beta(2 - a + d + 2b\alpha + (2+f)(\alpha^2 + \beta^2)))x^2, \\ g_2(x) &= (f+2)(b + \alpha(f+2) + i\beta(f+2)) + 2(b + (f+2)(\alpha + i\beta))(c + \alpha + 2f\alpha + i\beta(3 + 2f))x \\ &\quad - ((f+2)(g - (\alpha + i\beta)(1 + 2a + d + (\alpha + i\beta)(6b + 6c - 17\alpha - 7i\beta)) - 6(\alpha + i\beta)^3(f+2)) \\ &\quad - b(3(a-1) + 5(\alpha + i\beta)(c - 3\alpha - i\beta)) - (c - 3\alpha - i\beta)(2 + d + c\alpha - 2\alpha^2 + 2\beta^2 + i\beta(c - 4\alpha)))x^2 \\ &\quad + x^3(a - 1 + c\alpha + \alpha^2(f-1) - \beta^2(f+1) + i\beta(c + 2f\alpha))(2(2 + d + c\alpha + 2b\alpha + 2(f+1)(\alpha^2 - \beta^2) \\ &\quad + i\beta(2b + c + 4\alpha + 4f\alpha)) + x(g + \alpha(a + d) + (b + c + f\alpha)(\alpha^2 - \beta^2) - 2f\alpha\beta^2 \\ &\quad + i\beta(a + d + 2b\alpha + 2c\alpha + 3f\alpha^2 - f\beta^2))). \end{aligned}$$

Dacă $g_1(x) \equiv 0$, atunci $\deg(\gcd(P, Q)) > 0$, i.e. sistemul (2.50) este degenerat. Identitatea $g_2(x) \equiv 0$ invocă două serii de egalități: $\{a - 2 = b = f + 2 = g = 0, d = -(16 + c^2 + 16\beta^2)/8, \alpha = c/4\}$ și $\{a = (16 - c^2 - 16\beta^2)/16, b = 0, d = -(16 + c^2 + 16\beta^2)/8, f = -2, \alpha = c/4\}$. Din acestea și (2.49) obținem următoarea leamnă:

Lema 2.3.5. *Printr-o transformare afină și rescalarea timpului orice sistem cubic cu focar fin și două drepte invariante distincte complexe și concurente $l_1, l_2, l_2 = \overline{l_1}, m(l_{1,2}) \geq 2$, poate fi scris sub una dintre următoarele două forme:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (16y + 32x^2 + 16cxy - 32y^2 + 8cx^3 + (-32 + 3c^2 - 16\beta^2)x^2y - 16cxy^2 + 16y^3)/16, \\ \dot{y} &= -x(32 - 4(16 + c^2 + 16\beta^2)y - 2(c^2 + 16\beta^2)x^2 \\ &\quad - c(c^2 + 16\beta^2)xy + 4(8 + c^2 + 16\beta^2)y^2)/32, \beta \neq 0; \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (32y + 2(16 - c^2 - 16\beta^2)x^2 + 32cxy - 64y^2 - c(c^2 + 16\beta^2)x^3 \\ &\quad + 8(c^2 - 4)x^2y - 32cxy^2 + 32y^3)/32, \\ \dot{y} &= -x(256 + 256gx - 32(16 + c^2 + 16\beta^2)y + (c^2 + 16\beta^2)^2x^2 \\ &\quad - 8c(c^2 + 16\beta^2)xy + 32(8 + c^2 + 16\beta^2)y^2)/256, \beta \neq 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.3.6. Integrabilitatea sistemelor (2.32)-(2.45), (2.47), (2.51), (2.52).

Sistemul (2.32). Avem $L_1 \equiv (c+2)q/4 = 0 \Rightarrow q = 0$. Sistemul $\{(2.32), q = 0\}$ are integrala primă

$$F(x, y) = (x-1)^{2(1+c)}(1+x+cx)^2 \exp\left[\frac{-(c+1)(2+c)y^2}{(x-1)^2}\right].$$

Sistemul (2.33) are integrala primă

$$F(x, y) = \frac{(x-1)^{2(1+c)(4+c+3g+cg)}}{(1+x+cx)^{2(c-g)}} \exp\left[\frac{(1+c)(2+c)(-2(2+g)(x-1)+(2+c)y^2)}{(x-1)^2}\right].$$

Sistemul (2.34) are factorul integrant

$$\mu(x, y) = (x-1)^{\frac{cd^2}{(c+2)^3}-3} (1+x+cx)^{-3-\frac{cd^2}{(c+2)^3}} \exp\left[\frac{d(2d+cdx+(c+2)^2y)}{(2+c)^2(x-1)(1+x+cx)}\right].$$

iar *Sistemele* (2.39), (2.40) și (2.41) au factor integrant de forma $\mu(x, y) = 1/(l_1^2 l_2^2)$, unde $l_1 = x - 1$ și $l_2 = Ax - y + B$ (respectiv, $l_2 = Bx + y - B$, $l_2 = A^2x - Ay - A^2 - 1$).

Sistemul (2.35) are integrala primă

$$F = \frac{(x-1)^{2(1-d^2-d^2g)}}{(x-dy-1)^{-2}} \exp\left[\frac{(2d^2(3+2g)-2dy)(x-1)+d^2(2+g)}{(x-1)^2}\right].$$

Sistemele (2.36) au integrala primă de forma (??), unde

$$f_1 = x - 1, \quad f_2 = b - b^2 - f^2 \mp \Delta + 2f^2x + 2fy - 2bfy,$$

$$f_3 = \exp((b-1+fy)/(x-1)), \quad f_4 = \exp((b-1+fy)^2/(x-1)^2),$$

$$\alpha_1 = 2(b-1)(1-2b+b^2+f^2)(-b+b^2+f^2 \mp \Delta), \quad \alpha_2 = -4(-1+b)^2f^2,$$

$$\alpha_3 = 2(b-1)((b-2)(b-1)(b^2-b \mp \Delta + 2f^2) + f^4 \mp f^2\Delta),$$

$$\alpha_4 = (b-1)^2(b(b-1) \mp \Delta) + f^2((b-1)(2b-3) + f^2 \mp \Delta).$$

Sistemul (2.37) are integrala primă

$$F = (x-1)^{d+d^3-f} (1-x+dy)^{f-d} \exp \frac{d(2(1-x)(d^2+(d-f)y)+dfy^2)}{2(x-1)^2}.$$

Sistemul (2.38) are integrala primă de forma (??), unde

$$f_1 = x - 1, \quad f_2 = (b-c-3)(-1+(2b-c-3)x) - f(2b-c-4)y,$$

$$f_3 = \exp((1-b-fy)/(x-1)), \quad f_4 = \exp[(((1-b)(3b-2c-5)(b-c-3) + 2f^2(2b-c-4) + 2((b-1)(b-c-3)(2b-c-3) - f^2(2b-c-4))x + 2f(b-1)(b-c-3)y + f^2(b-c-3)y^2)/(x-1)^2],$$

$$\alpha_1 = -2((b-1)(b-c-3)(-61+95b-48b^2+8b^3-47c+48bc-12b^2c - 12c^2+6bc^2-c^3) - f^2(2b-c-4)^3),$$

$$\alpha_2 = 2(1-b)(b-c-3)^2, \quad \alpha_3 = 2(1-b)(b-c-3)(2b-c-5)(2b-c-4),$$

$$\alpha_4 = (2b-c-4)^2.$$

Sistemul (2.47). Egalitatea $L_1 = 0$ invocă $q = 0$ și sistemul $\{(2.47), q = 0\}$ are factorul integrant de forma Darboux (2.30), unde $f_{1,2} = x - \alpha \mp i$, $f_{3,4} = \exp\left[\frac{d(1+\alpha^2)^2 - d\alpha(1+\alpha^2)x - 2y}{x - \alpha \mp i}\right]$, $\alpha_{1,2} = -3 \pm$

$$id^2\alpha(1 + \alpha^2)^2/4, \alpha_{3,4} = \mp id(1 + \alpha^2)/4 \text{ sau } \mu(x, y) = (1 + (x - \alpha)^2)^{-3} \cdot \exp\left[-\frac{d(1+\alpha^2)(-d(1+\alpha^2)^2+d\alpha(1+\alpha^2)x+2y)}{2(1+(x-\alpha)^2)} + \frac{1}{4}d^2\alpha(1 + \alpha^2)^2 \operatorname{tg} \frac{2(x-\alpha)}{1+(x-\alpha)^2}\right].$$

Pentru *Sistemele* (2.42) și (2.43) avem respectiv $L_1 = -2(A + B)(1 + (A + B)^2)/B^2 \neq 0$, $L_1 = -2f^3 \neq 0$, și prin urmare, punctul singular $(0, 0)$ este focar.

Sistemele (2.44), (2.45) și (2.51). Dacă pentru fiecare dintre aceste sisteme prima mărime Lyapunov L_1 se anulează atunci, respectiv, avem: $1 + B^3f + B^4f^2 = 0$, $1 + A^2 - B^2 = 0$, $c = 0$ și următorii factori integranți:

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= (x - 1)^{-2}(B^2fx - y + B)^{-2}, \\ \mu(x, y) &= \frac{1}{(x-1)^3(y-Ax-B)^3} \exp\left[(A + B)^2((x - 1)^{-1} + B(y - Ax - B)^{-1})\right], \\ \mu(x, y) &= (16 - 32y + 16y^2 + 16x^2\beta^2)^{-3} \exp\left[\frac{2(1-y)\beta^2}{1-2y+y^2+x^2\beta^2}\right]. \end{aligned}$$

Sistemul (2.52) are integrala primă Darboux $F(x, y) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \exp\left[\frac{8\beta h}{f_1 f_2}\right]$ sau

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (16 + 8cx + c^2x^2 - 32y - 8cxy + 16y^2 + 16x^2\beta^2)^{128\beta^3} \\ &\times \exp\left[2(16c + c^3 - 64g + 48c\beta^2) \arctan\left[\frac{4x\beta}{4y-cx-4}\right] + \frac{8\beta h}{f_1 f_2}\right], \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} f_1 &= 4y - (c + 4i\beta)x - 4, \quad f_2 = \overline{f_1}, \quad \alpha_{1,2} = -(4 + cx - 4y \pm 4\beta ix), \\ h &= 512\beta^2 + 4(16c + c^3 + 80c\beta^2 - 64g)x - 512\beta^2y + \\ &((c^2 + 16\beta^2)(16 + c^2 + 16\beta^2) - 64cg)x^2 - 4(16c + c^3 - 64g + 16c\beta^2)xy. \end{aligned}$$

2.4. Sistemele cubice cu focar slab și cu trei drepte invariante reale l_1, l_2, l_3 , $m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) \geq 4$.

2.4.1. Dreptele $l_{1,2,3}$ sunt reale, $m(l_1) \geq 2$, l_1 și l_2 sunt paralele.

Fără a restrânge generalitatea, considerăm $l_1 = x - 1$, $m(l_1) \geq 2$ și $l_2 = x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Luând în considerare Lema 2.1.1 și (2.31) obținem că dreptele $l_{1,2}$ sunt invariante și $m(l_1) \geq 2$, dacă și numai dacă coeficienții sistemului cubic (2.6) satisfac seriile de condiții (2.10), i.e. sistemul (2.6) are forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(1 - x)(1 + x + cx), \quad c \notin \{-2; -1\}, \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 - (g + 1)x^3 + qx^2y + (c - b + 2)xy^2). \end{aligned} \tag{2.53}$$

Dreapta l_3 este descrisă de ecuația de forma $y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ și este invariantă pentru (2.53), dacă și numai dacă se realizează cel puțin una dintre următoarele patru serii de condiții: **1)** $b = 1$, $q = d(g + 1)$, $d \neq 0$ ($l_3 = 1 - x + dy$); **2)** $d = c + 3$, $g = -b - 1$, $q = -1$, $b - 1 \neq 0$ ($l_3 = 1 - bx + (1 - b)y$); **3)** $d = -c - 3$, $g = -b - 1$, $q = 1$, $b - 1 \neq 0$ ($l_3 = 1 - bx + (b - 1)y$); **4)** $b = (2 + c)(2 + c + dq + q^2)/((2 + c - d - q)(2 + c + d + q))$, $g = -(8 + 8c + 2c^2 - d^2 + cdq + q^2 + cq^2)/((2 + c - d - q)(2 + c + d + q))$, $(d + q)(d + 3q + cq) \neq 0$ ($l_3 = (2 + c - d - q)(2 + c + d + q) - (2 + c)((2 + c + dq + q^2)x + (d + 3q + cq)y)$). Conform acestor serii, sistemul (2.53) poate fi exprimat astfel, respectiv:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(1 - x)(1 + x + cx), \quad d(c + 1)(c + 2) \neq 0, \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + y^2 - (g + 1)x^3 + d(g + 1)x^2y + (c + 1)xy^2); \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(1 - x)(1 + x + cx), \quad (b - 1)(c + 1)(c + 2) \neq 0, \\ \dot{y} &= -(x - (b + 1)x^2 + (c + 3)xy + by^2 + bx^3 - x^2y + (b + c + 2)xy^2); \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(1 - x)(1 + x + cx), \quad (b - 1)(c + 1)(c + 2) \neq 0, \\ \dot{y} &= -(x - (b + 1)x^2 - (c + 3)xy + by^2 + bx^3 + x^2y + (c - b + 2)xy^2); \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(1 - x)(1 + x + cx), \quad (c + 1)(c + 2)(d + q)(d + 3q + cq) \neq 0, \\ \dot{y} &= -((2 + c - d - q)(2 + c + d + q)x(1 + dy + qxy) + (c + 2)(2 + c + dq + q^2)(x^3 + y^2) + ((d + q)(d - q - cq) - 2(c + 2)^2)x^2 + (c + 2)(2 + 3c + c^2 - d^2 - 3dq - 2q^2)xy^2)/((c + 2)^2 - (d + q)^2). \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.4.2. Dreptele $l_{1,2,3}$ sunt reale, $m(l_1) \geq 2$, l_2 și l_3 sunt paralele.

Considerăm $l_1 = x - 1$, $m(l_1) \geq 2$ și dreapta l_2 (l_3) descrisă de ecuația $y - Ax - B_2 = 0$, $B_2 \neq 0$ ($y - Ax - B_3 = 0$, $B_3(B_3 - B_2) \neq 0$). Pentru fiecare din sistemele $\{(2.8), (2.9)\}$, $\{(2.8), (2.11)\}$ și $\{(2.8), (2.12)\}$ vom determina condițiile ce asigură invarianța dreptelor l_2 și l_3 . Astfel, dreptele $l_{2,3} = y - Ax - B_{2,3}$ sunt drepte invariante pentru sistemul (2.1) dacă se realizează identitățile $\varphi_{2,3}(x) \equiv 0$, unde $\varphi_{2,3}(x) = \left(A \cdot P(x, y) + B_{2,3} \cdot Q(x, y) \right) \Big|_{y=Ax+B_{2,3}}$.

Sistemul $\{(2.8), (2.9)\}$. În acest caz

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= -B_2(A + bB_2 + B_2^2l) - (1 + A^2 - 2AB_2 + 2AbB_2 + B_2d + 3AB_2^2l + B_2^2n)x \\ &\quad + (2A^2 - A^2b - AB_2 - Ad - g - 3A^2B_2l - 2AB_2n - B_2q)x^2 - (A^2 + A^3l + A^2n + Aq + s)x^3. \end{aligned}$$

Identitatea $\varphi_2(x) \equiv 0$ ne oferă condițiile $\{A = -B_2(b + lB_2)$, $d = -(1 + 2bB_2^2 - b^2B_2^2 + 2B_2^3l - 3bB_2^3l - 2B_2^4l^2 + B_2^2n)/B_2$, $g = -b + bB_2^2 - B_2l + B_2^3l - b^2B_2^3l - 2bB_2^4l^2 - B_2^5l^3 + bB_2^2n + B_2^3ln - B_2q$, $s =$

$B_2(b + B_2l)(q - B_2(b + B_2l)(1 - bB_2l - B_2^2l^2 + n))\}$. În aceste condiții:

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) = & ((B_2 - B_3)(B_2B_3(b + B_2l + B_3l) - ((1 - B_2B_3n) + B_2^2(b + B_2l)(b \\ & + B_2l + 3B_3l))x + B_2(q + B_2(b + B_2l)(3B_2l(b + B_2l) - 2n - 1))x^2)/B_2\end{aligned}$$

și $\varphi_3(x) \equiv 0 \Rightarrow \{b = -l(B_2 + B_3), n = (1 - 2B_2^2B_3^2l^2)/(B_2B_3), q = l(-2 - B_2B_3 + B_2^2B_3^2l^2)\}$.

Sistemul cubic capătă forma

$$\begin{aligned}\dot{x} = & y(x - 1)^2, \\ \dot{y} = & -(B_2B_3x + lB_2B_3(B_2 + B_3)x^2 + ((B_2 + B_3)(l^2B_2^2B_3^2 - 1) + 2lB_2^2B_3^2)xy \\ & - lB_2B_3(B_2 + B_3)y^2 + B_2^2B_3^2l^2x^3 - lB_2B_3(2 + B_2B_3 - l^2B_2^2B_3^2)x^2y \\ & + (1 - 2l^2B_2^2B_3^2)xy^2 + lB_2B_3y^3)/(B_2B_3), \quad B_2 \neq B_3.\end{aligned}\tag{2.58}$$

Sistemul $\{(2.8), (2.11)\}$. Avem

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) = & -B_2(A + bB_2 + AB_2f + B_2^2f) - (1 + A^2(1 + 2B_2f) + B_2(A(2b + c) + d + B_2(2Af + n)) \\ &) \cdot x - (fg + A^2(A + B_2)f^2 + Af(c(A - B_2) + Ab - B_2 + d) + B_2(2b - df - 4) - B_2c(4 - b + c) \\ & + B_2n(2 + c + 2Af))x^2/f + (f(g + 1)A(df + (c + 2)(c + 2 - b - n) + Af(1 + c - n)))x^3/f\end{aligned}$$

și $\varphi_2(x) \equiv 0 \Rightarrow \{b = (-A - AB_2f - B_2^2f)/B_2, \quad n = (-1 + A^2 - AB_2c - B_2d)/B_2^2, \quad g = -((c + 2)(Ad - 1) - 2Af + (A + B_2)(Adf + (c + 2)(3A + Ac - d)) - (A + B_2)^2(f(d - A) + (c + 2)(c + 2 - Af)) - f(c + 2)(A + B_2)^3)/(fB_2), \quad (A + B_2)(-1 + A^2 - AB_2 - 2B_2^2 - cAB_2 - cB_2^2 - dB_2)(2 + c + Af + B_2f) = 0\}$.

Funcția $\varphi_3(x)$ arată astfel

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) = & (fB_2B_3(B_3 - B_2)(A - B_2B_3f) + f(B_3 - B_2)(2B_3 + (1 + A^2)(B_2 - B_3) + B_2B_3(d \\ & + Ac - 2AB_2f))x + (B_2 - B_3)((2fA + c + 2)(A^2 - 1) - B_2^2(c + 2)^2 - (c + 1)(c + 2)AB_2 \\ & + B_2^2f(-3A - 2B_2 - cB_2 + A^2f) - 2cfAB_2(A + B_2) - dfB_2(2A + B_2) - dB_2(2 + c))x^2 \\ & + (A + B_2)(1 - A^2 + AB_2 + 2B_2^2 + AB_2c + B_2^2c + B_2d)(2 + c + Af + B_2f)x^3)/(fB_2^2).\end{aligned}$$

Luând în considerare $\gcd(P, Q) = 1$ și $B_2B_3(B_3 - B_2) \neq 0$ identitățile $\{\varphi_2(x) \equiv 0, \varphi_3(x) \equiv 0\}$ ne oferă condițiile $\{A = f/(c + 2), B_2 = -1/f, B_3 = -f/(c + 2), b = 1, d = ((c + 2)^3 + f^2(c + 2 - f^2))/(f(c + 2)^2), g = -(c + 2 + f^2)/(c + 2), n = ((c + 2)^2 - f^2)/(c + 2)\}$. Acestea, împreună cu condițiile (2.11), dau sistemului (2.8) forma

$$\begin{aligned}\dot{x} = & y(1 - x)(1 + x + cx + fy), \\ \dot{y} = & -(f(c + 2)^2x - f(c + 2)(c + 2 + f^2)x^2 + ((2 + c)^3 + (2 + c)f^2 - f^4)xy + \\ & ((c + 2)^3 + f(c + 2)^2y^2 + f^3(c + 2)x^3 + f^2(f^2 - (c + 2)(c + 3))x^2y \\ & + f(c + 2)((c + 2)^2 - f^2)xy^2 + f^2(c + 2)^2y^3)/(f(c + 2)^2).\end{aligned}\tag{2.59}$$

Sistemul $\{(2.8), (2.12)\}$. În acest caz funcțiile $\varphi_{2,3}$ au forma:

$$\begin{aligned}\varphi_{2,3}(x) = & -(aB_{2,3}(bB_{2,3} + A + AB_{2,3}f + B_{2,3}^2f) + (a(1 + A^2 + B_{2,3}d) + aAB_{2,3}(2b + c + 2Af \\ & + 2B_{2,3}f) + B_{2,3}^2(2a - ab + ac + f + fg + fs))x + (ag + aA(a + Ab + Ac + d + A^2f) \\ & + B_{2,3}((c + 2)(1 + g + s) + a(a - d)) + AB_{2,3}(3a - 2ab + ac + 2f + aAf + 2fg + 2fs))x^2 \\ & + (as + A(2 + c + Af)(g + 1) + aA^2(1 - b) + As(c + 2) - Aad + A^2fs)x^3)/a\end{aligned}$$

și $\{\varphi_2(x) \equiv 0, \varphi_3(x) \equiv 0\}$, dacă și numai dacă se realizează cel puțin una dintre următoarele serii de condiții **i**) $a = B_2B_3f\omega$, $b = 1 - \omega$, $c = -1 - B_2B_3f^2 - \omega$, $s = B_2B_3f^2(1 + B_2B_3\omega)$, $d = -(B_2 + B_3 - 2B_2^2B_3^2f\omega)/(B_2B_3)$, $g = f(B_2 + B_3 - B_2^2B_3^2f\omega)$; **ii**) $a = -(1 + B_{2,3}f)/B_{2,3}$; $b = -f(B_2 + B_3 + B_2B_3f)$, $c = (1 - B_2B_3(2 + B_{3,2}f + B_2B_3f^2))/(B_2B_3)$, $d = -(B_{3,2} + B_{2,3}(1 + B_{3,2}f)(1 - 2B_{2,3}B_{3,2}^2f - B_2^2B_3^2f^2))/(B_2B_3)$, $g = f(B_{2,3} + 2B_{3,2} + B_2B_3f)$, $s = -B_{3,2}f$, unde $\omega = (1 + B_2f)(1 + B_3f)$. În aceste condiții sistemul $\{(2.8), (2.12)\}$ arată astfel, respectiv,

$$\begin{aligned}\dot{x} = & (1 - x)(y + B_2B_3f(1 + B_2f)(1 + B_3f)x^2 - (1 + B_2f + B_3f + 2B_2B_3f^2)xy + fy^2), \\ \dot{y} = & -(B_2B_3x + (B_2 + B_3)x(B_2B_3fx - y) - B_2^2B_3^2f(1 + B_2f)(1 + B_3f)x(B_2B_3fx - 2y) \\ & - B_2B_3f(B_2 + B_3 + B_2B_3f)y^2 + B_2B_3f(1 + B_2B_3(1 + B_2f)(1 + B_3f))x^2(B_2B_3fx - y) \\ & - B_2B_3fx^2y + (1 - B_2B_3f)(1 + B_2B_3f)xy^2 + B_2B_3fy^3)/(B_2B_3); \quad (2.60)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} = & (x - 1)(-B_2B_3y + B_{3,2}(1 + B_{2,3}f)x^2 - B_2B_3fy^2 - (1 - B_2B_3 - B_{2,3}B_{3,2}^2f \\ & - B_2^2B_3^2f^2)xy)/(B_2B_3), \\ \dot{y} = & -(B_2B_3x + B_2B_3f(B_{2,3} + 2B_{3,2} + B_2B_3f)x^2 - (B_2 + B_3 + B_2B_3f - B_2^2B_3^2f(2 \\ & + B_{2,3}f)(1 + B_{3,2}f))xy - B_2B_3f(B_2 + B_3 + B_2B_3f)y^2 - B_{2,3}B_{3,2}^2fx^3 \\ & - B_2B_3f(1 + B_2B_3 + B_{2,3}B_{3,2}^2f)x^2y + (1 - B_2^2B_3^2f^2)xy^2 + B_2B_3fy^3)/(B_2B_3). \quad (2.61)\end{aligned}$$

2.4.3. Dreptele $l_{1,2,3}$ au pante diferite și $m(l_1) \geq 2$, $l_1 \cap l_2 \cap l_3 \neq \emptyset$.

Considerăm $l_1 = x - 1$, $l_2 = y - A_2x - B_2$, $l_3 = y - (A_2 + B_2 - B_3)x - B_3$, $B_2B_3(B_3 - B_2) \neq 0$.

Notăm

$$\psi_j(x) = \left(A_j \cdot P(x, y) + B_j \cdot Q(x, y) \right) \Big|_{y=A_jx+B_j}, \quad j = 2; 3, \quad (2.62)$$

unde $A_3 = A_2 + B_2 - B_3$. În condițiile (2.9) avem

$$\begin{aligned}\psi_{2,3}(x) = & -B_{2,3}(A_{2,3} + bB_{2,3} + B_{2,3}^2l) - (B_{2,3}d + 1 + A_{2,3}^2 + B_{2,3}^2n + A_{2,3}B_{2,3}(2b - 2 + 3B_{2,3}l))x \\ & - (g + A_{2,3}d + B_{2,3}q + A_{2,3}^2(b - 2 + 3B_{2,3}l) + A_{2,3}B_{2,3}(1 + 2n))x^2 \\ & - (s + A_{2,3}(A_{2,3} + A_{2,3}^2l + A_{2,3}n + q))x^3.\end{aligned}$$

Apoi $\psi_2(x) \equiv 0 \Rightarrow \{A_2 = -(bB_2 + B_2^2l)$, $d = -(1 + B_2^2(n + 2b - b^2) - B_2^3l(3b - 2 + 2B_2l))/B_2$, $g = -b - B_2(l + q) + B_2^2(b + B_2l)(1 + n) - B_2^3l(b + B_2l)^2$, $s = B_2(b + B_2l)(q + B_2(b + B_2l)(-1 + bB_2l + B_2^2l^2 - n))\}$

și $\psi_3(x) \equiv 0 \Rightarrow \{b = 1 - B_2l - B_3l, n = (1 - B_2B_3 + B_2^2B_3l + B_2B_3^2l - 2B_2^2B_3^2l^2)/(B_2B_3), s = (B_2l - 1)(B_3l - 1)\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(x-1)^2, \quad B_2B_3(B_3 - B_2) \neq 0, \\ \dot{y} &= -(B_2B_3x + B_2B_3(B_2l + B_3l - 2)x^2 + ((B_2 + B_3)(B_2^2B_3^2l^2 - 1) - B_2^2B_3^2l)xy \\ &\quad - B_2B_3(B_2l + B_3l - 1)y^2 + B_2B_3(B_2l - 1)(B_3l - 1)x^3 \\ &\quad + ((B_2 + B_3)(1 - B_2^2B_3^2l^2) + B_2^2B_3^2l(1 + B_2B_3l^2) - 2B_2B_3l)x^2y \\ &\quad + (1 - B_2B_3(1 - l(B_2 + B_3) + 2B_2B_3l^2))xy^2 + B_2B_3ly^3)/(B_2B_3). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dacă se realizează condițiile (2.11), atunci

$$\begin{aligned} \psi_{2,3}(x) &= -B_{2,3}(A_{2,3} + bB_{2,3} + B_{2,3}f(A_{2,3} + B_{2,3})) \\ &\quad - (1 + A_{2,3}^2 + A_{2,3}B_{2,3}(2b + c) + 2A_{2,3}B_{2,3}(A_{2,3} + B_{2,3})f + B_{2,3}(d + B_{2,3}n))x \\ &\quad - (fg + A_{2,3}df - A_{2,3}B_{2,3}f(1 + c - 2n) + A_{2,3}^2f(b + c) + A_{2,3}^2f^2(A_{2,3} + B_{2,3}) \\ &\quad + B_{2,3}((c + 2)(b + n - c - 2) - df))x^2/f \\ &\quad + (f(g + 1) + A_{2,3}(df + (c + 2)(c + 2 - b - n)) + A_{2,3}^2f(1 + c - n))x^3/f \end{aligned}$$

și $\{A_3 = A_2 + B_2 - B_3, \psi_{2,3} \equiv 0\} \Rightarrow \{A_{2,3} = -B_{2,3}, b = 1, c = -2, d = -(B_2 + B_3)/(B_2B_3), g = -2, n = (B_2B_3 - 1)/(B_2B_3)\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(x-1)(x - fy - 1), \quad B_2B_3(B_3 - B_2) \neq 0, \\ \dot{y} &= -(B_2B_3x - 2B_2B_3x^2 - (B_2 + B_3)xy + B_2B_3y^2 + B_2B_3x^3 \\ &\quad + (B_2 + B_3)x^2y + (1 - B_2B_3)xy^2 + B_2B_3fy^3)/(B_2B_3). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Acum, fie că se realizează condițiile (2.12). Atunci $\psi_j(x) = \varphi_{2,3}|_{A=A_{2,3}}(x)$, unde $\varphi_{2,3}(x)$ este dat de (2.4.2). Nu este greu de arătat că sistemul $\{\psi_2(x) \equiv 0, \psi_3(x) \equiv 0, A_3 = A_2 + B_2 - B_3, B_2B_3(B_3 - B_2) \neq 0\}$ nu este compatibil.

2.4.4. Dreptele $l_{1,2,3}$ sunt de poziție generică și $m(l_1) \geq 2$.

Fie că dreptele $l_{1,2,3}$ sunt de o poziție generică, i.e. nici o pereche de drepte nu sunt paralele și nu mai mult de două drepte trec prin același punct. Considerăm $l_1 = x - 1, l_{2,3} = y - A_{2,3}x - B_{2,3}$. Dreptele $l_{1,2,3}$ au poziție generică, dacă $A_3 - A_2 + B_2 - B_3 \neq 0$.

În condițiile (2.9) avem $\psi_2(x) \equiv 0$ și $\psi_3(x) \equiv 0$, dacă $\{A_2 = -bB_2, d = -(B_2 + B_3)/(B_2B_3), g = -b(2 + (b - 1)^2B_2B_3), s = b^2(1 + (b - 1)^2B_2B_3), A_3 = -bB_3, l = 0, n = (1 - 2bB_2B_3 +$

$$b^2 B_2 B_3)/(B_2 B_3), \quad q = b(B_2 + B_3)(1 + B_2 B_3 - 2b B_2 B_3 + b^2 B_2 B_3)/(B_2 B_3) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-1 + x)^2 y, \\ \dot{y} &= -(B_2 B_3 x(bx - 1)(b(1 + (b - 1)^2 B_2 B_3)x - 1) + (B_2 + B_3)x(b(1 \\ &\quad + (b - 1)^2 B_2 B_3)x - 1)y + (x + b B_2 B_3(1 + (b - 2)x))y^2)/(B_2 B_3). \end{aligned} \quad (2.65)$$

În condițiile (2.11) avem $\psi_2(x) \equiv 0$ și $\psi_3(x) \equiv 0$, dacă: **1)** $\{b = 1, c = g = -2, d = (-B_2 - B_3)/(B_2 B_3), n = (1 - B_2 B_3)/(B_2 B_3), A_2 = -B_2, A_3 = -B_3\}$; **2)** $\{b = 1, c = -(2B_{2,3} + f)/B_{2,3}, g = -1 + B_{2,3}f, d = -(1 + B_{2,3}^2 + B_{2,3}^3 f)/B_{2,3}, n = (B_{2,3}^2 - 1)f/B_{2,3}, A_2 = A_3 = -B_{2,3}, B_{3,2} = -1/f\}$; **3)** $\{b = 1, c = g = -2, d = (1 + A_3^2 + A_3 f - A_3^3 f)/A_3, n = (1 - A_3^2)f/A_3, A_2 = -B_2 = 1/(A_3 + f - A_3^2 f), B_3 = -1/f\}$.

Din aceste serii de condiții rezultă, respectiv, următoarele patru sisteme:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - x)y(1 - x + fy), \quad f \neq 0, \\ \dot{y} &= -(B_2 B_3 x - 2B_2 B_3 x^2 + B_2 B_3 x^3 - (B_2 + B_3)xy + (B_2 + B_3)x^2 y \\ &\quad + B_2 B_3 y^2 + (1 - B_2 B_3)xy^2 + B_2 B_3 f y^3)/(B_2 B_3). \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - x)y(B_{2,3} - B_{2,3}x - fx + B_{2,3}fy)/B_{2,3}, \quad f \neq 0, \\ \dot{y} &= (-B_{2,3}x + B_{2,3}(1 - B_{2,3}f)x^2 + B_{2,3}^2 f x^3 + (1 + B_{2,3}^2 + B_{2,3}^3 f)xy \\ &\quad - B_{2,3}(B_{2,3} - f + B_{2,3}^2 f)x^2 y - B_{2,3}y^2 + f(1 - B_{2,3}^2)xy^2 - B_{2,3}f y^3)/B_{2,3}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - x)y(1 - x + fy), \quad f \neq 0, \\ \dot{y} &= -(A_3(x - 1)^2 x + (-1 - A_3^2 + A_3(A_3^2 - 1)f)(x - 1)xy \\ &\quad + (A_3 + fx - A_3^2 fx)y^2 + A_3 f y^3)/A_3. \end{aligned} \quad (2.68)$$

În condițiile (2.12) avem $\psi_2(x) \equiv 0$ și $\psi_3(x) \equiv 0$, dacă:

1) $\{a = B_2(A_3 + B_3)^2 f(1 + B_3 f)/(B_3 + B_2 B_3 f), b = -A_3/B_3 - (A_3 + B_3)f, c = (-A_3 B_2 f + B_3(-2 - f(A_3 + 3B_2 + B_3 + 2B_2(A_3 + B_3)f)))/(B_3 + B_2 B_3 f), d = (-B_3 + B_2(-1 - B_3 f + B_2 f(-1 + 2(A_3 + B_3)^2(1 + B_3 f))))/(B_2 B_3(1 + B_2 f)), g = (A_3(2B_3 + B_2(A_3 + B_3)^2) + B_3(A_3 B_2(3 + A_3^2 - A_3 B_2) + (A_3 - B_2)(1 + 2A_3 B_2)B_3 + (1 + (A_3 - B_2)B_2)B_3^2)f + B_2 B_3(-A_3^3 B_2 - 4A_3^2 B_2 B_3 + A_3(B_2 + B_3 - 5B_2 B_3^2) + B_3(B_3 - B_2(1 + 2B_3^2)))f^2 - B_2^2 B_3^2(A_3 + B_3)^3 f^3)/(B_3 + B_2 B_3 f)^2, s = (A_3(A_3 + B_3(A_3 - B_2 + B_3)f)(B_3 + B_2((A_3 + B_3)^2 + B_3(1 + (A_3 + B_3)^2)f)))/(B_3^3(1 + B_2 f)^2), A_2 = (B_2(A_3 + B_3(A_3 - B_2 + B_3)f))/(B_3 + B_2 B_3 f), (1 + B_2 f)af(A_3^2 B_2 + B_3 + A_3 B_2 B_3 + B_2 B_3 f + A_3^2 B_2 B_3 f + A_3 B_2 B_3^2 f) \neq 0\}$;

2) $\{b = (1 - a B_{2,3})f/(a + f), c = -(a^2 + 2a B_{2,3} + 2af + 2B_{2,3}f + a B_{2,3}^2 f + f^2)/(B_{2,3}(a + f)), d = a(a(a + B_{2,3}) + a(2 + B_{2,3}^2)f + f^2)/(a + f)^2 - (1 + B_{2,3}^2 + B_{2,3}^3 f)/B_{2,3}, g = f(-1 + 2a B_{2,3} + B_{2,3}f)/(a + f), s = -B_{2,3}f, A_2 = A_3 = -B_{2,3}f/(a + f), B_{3,2} = -1/(a + f)\}$;

3) $\{b = 1, c = (1 - af - A_2^2 f^2)/(A_2 f - 1), d = 2(a + f), g = (1 - a^2 + aA_2 - af - aA_2^2 f - A_2^2 f^2)/(A_2 f - 1), s = A_2(a + f)(1 - af - A_2 f)/(1 - A_2 f), A_3 = (1 - af - A_2 f)/(f(1 - A_2 f)), B_2 = B_3 = -1/f\}$;

4) $\{b = (1 - aB_3)f/(a + f), c = -(a^2 + 2aB_3 + 2af + 2B_3 f + aB_3^2 f + f^2)/(B_3(a + f)), d = -(a^2 - 2a^3 B_3 + 2af - 5a^2 B_3 f + aB_3^2 f + f^2 - 4aB_3 f^2 + aB_3^3 f^2 - B_3 f^3)/(B_3(a + f)^2), g = -(a^3 + 3a^2 f + aB_3 f + 3af^2 + 2B_3 f^2 - aB_3^2 f^2 + f^3)/(B_3 f(a + f)), s = (a^2 + 2af + B_3 f - aB_3^2 f + f^2)/(B_3(a + f)), A_3 = -B_3 f/(a + f), A_2 = (a + f)(a^2 + 2af + B_3 f - aB_3^2 f + f^2)/(B_3 f(a^2 - aB_3 + 2af - aB_3^2 f + f^2)), B_2 = -(a + f)^2/(f(a^2 - aB_3 + 2af - aB_3^2 f + f^2))\}$.

Din aceste serii de condiții rezultă, respectiv, următoarele cinci sisteme:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (1 - x)[B_2(A_3 + B_3)^2 f(1 + B_3 f)x^2 + B_3(1 + B_2 f)y - (A_3 B_2 f \\
&\quad + B_3(1 + 2B_2 f)(1 + (A_3 + B_3)f))xy + B_3 f(1 + B_2 f)y^2]/(B_3(1 + B_2 f)), \\
(1 + B_2 f)af(A_3^2 B_2 + B_3 + A_3 B_2 B_3 + B_2 B_3 f + A_3^2 B_2 B_3 f + A_3 B_2 B_3^2 f) &\neq 0, \\
\dot{y} &= [-B_2 B_3^3(1 + B_2 f)^2 x + B_2 B_3(-A_3(2B_3 + B_2(A_3 + B_3)^2) \\
&\quad - B_3(A_3 B_2(3 + A_3^2 - A_3 B_2) + (A_3 - B_2)(1 + 2A_3 B_2)B_3 + (1 + (A_3 \\
&\quad - B_2)B_2)B_3^2)f + B_2 B_3(A_3(-1 + A_3^2)B_2 + (B_2 + A_3(-1 + 4A_3 B_2))B_3 \\
&\quad + (-1 + 5A_3 B_2)B_3^2 + 2B_2 B_3^3)f^2 + B_2^2 B_3^2(A_3 + B_3)^3 f^3)x^2 - A_3 B_2(A_3 \\
&\quad + B_3(A_3 - B_2 + B_3)f)(B_3 + B_2((A_3 + B_3)^2 + B_3(1 + (A_3 + B_3)^2)f))x^3 \\
&\quad - B_3^2(1 + B_2 f)(-B_3 + B_2(-1 - B_3 f + B_2 f(-1 + 2(A_3 + B_3)^2(1 \\
&\quad + B_3 f))))xy + (A_3^3 B_2(1 + B_3 f)(B_2 + B_3 + 2B_2 B_3 f) - B_2 B_3^2 f(B_2 - B_3 \\
&\quad - B_2 B_3 f + B_2^2(f + B_3(1 + B_3 f)^2)) - A_3^2 B_2 B_3(1 + B_3 f)(-2B_3 + B_2(-2 \\
&\quad + f(B_2 - 4B_3 + B_2 B_3 f))) + A_3 B_3(B_3 + B_2(1 + B_3^2 + B_3(3 + B_3^2)f \\
&\quad - 2B_3 f(B_2 + B_2 B_3 f)^2 + B_2(1 + 2B_3 f)(B_3 + f + B_3^2 f))))x^2 y \\
&\quad + B_2 B_3^2(1 + B_2 f)^2(A_3 + B_3(A_3 + B_3)f)y^2 - B_3(1 + B_2 f)(B_3 + B_2(A_3(A_3 \\
&\quad + 2B_3) + B_3(1 + A_3^2 - 2B_2 B_3 + A_3(-B_2 + B_3))f - 2B_2 B_3^2(A_3 \\
&\quad + B_3)f^2))xy^2 - B_2 B_3^3 f(1 + B_2 f)^2 y^3]/(B_2 B_3^3(1 + B_2 f)^2); \tag{2.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (1 - x)(aB_{2,3}(a + f)x^2 + B_{2,3}(a + f)y - (a^2 + aB_{2,3} + 2af + B_{2,3}f \\
&\quad + aB_{2,3}^2 f + f^2)xy + B_{2,3}f(a + f)y^2)/(B_{2,3}(a + f)), \\
\dot{y} &= (-B_{2,3}(a + f)^2 x - B_{2,3}f(a + f)(-1 + 2aB_{2,3} + B_{2,3}f)x^2 + B_{2,3}^2 f(a + f)^2 x^3 \\
&\quad - (-a^2 + a^3 B_{2,3} - 2af + 2a^2 B_{2,3}f - 2aB_{2,3}^2 f - f^2 + aB_{2,3}f^2 - B_{2,3}^2 f^2 - 2aB_{2,3}^3 f^2 \\
&\quad - B_{2,3}^3 f^3)xy + B_{2,3}f(a + f)(a - B_{2,3} + f - B_{2,3}^2 f)x^2 y + B_{2,3}(aB_{2,3} - 1)f(a \\
&\quad + f)y^2 + (a + f)((a + f)^2 - B_{2,3}^2 f^2)xy^2 - B_{2,3}f(a + f)^2 y^3)/(B_{2,3}(a + f)^2); \tag{2.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (1-x)(a(1-A_2f)x^2 + (1-A_2f)y + f(a-A_2+A_2^2f)xy \\
&\quad + f(1-A_2f)y^2)/(1-A_2f), \quad af \neq 0, \\
\dot{y} &= ((A_2f-1)x + (1-a^2-A_2^2f^2-a(f+A_2(A_2f-1))))x^2 + A_2(a+f) \\
&\quad \cdot (-1+(a+A_2)f)x^3 + 2(a+f)(A_2f-1)xy + f(1-a^2-A_2^2f^2-a(f \\
&\quad + A_2(A_2f-1)))x^2y + (A_2f-1)y^2 + f(A_2-f+A_2f(f-A_2)+a(A_2f-2))xy^2 \\
&\quad + f(A_2f-1)y^3)/(1-A_2f);
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (x-1)(aB_3(a+f)x^2 + B_3(a+f)y - (a^2+aB_3+2af+B_3f+aB_3^2f \\
&\quad + f^2)xy + B_3f(a+f)y^2)/(B_3(a+f)), \quad B_3 \neq -1/f, \\
\dot{y} &= -(B_3^2f(a+f)^2x - B_3(a+f)(a^3+3a^2f+aB_3f+3af^2+2B_3f^2-aB_3^2f^2 \\
&\quad + f^3)x^2 + B_3f(a+f)(a^2+2af+B_3f-aB_3^2f+f^2)x^3 + B_3f(-a^2+2a^3B_3 \\
&\quad -2af+5a^2B_3f-aB_3^2f-f^2+4aB_3f^2-aB_3^3f^2+B_3f^3)xy + (a^4+4a^3f \\
&\quad + a^2B_3f+6a^2f^2+2aB_3f^2-a^2B_3^2f^2+aB_3^3f^2+4af^3+B_3f^3-2aB_3^2f^3 \\
&\quad + aB_3^4f^3+f^4-B_3^2f^4)x^2y - B_3^2(-1+aB_3)f^2(a+f)y^2 - B_3f(a+f)(2a^2 \\
&\quad + 4af+B_3f+2f^2)xy^2 + B_3^2f^2(a+f)^2y^3/(B_3^2f(a+f)^2).
\end{aligned} \tag{2.72}$$

2.4.5. Integrabilitatea sistemelor (2.54) - (2.61), (2.63)-(2.72).

Sistemul (2.54) are integrala primă de forma (??), unde

$$\begin{aligned}
f_1 &= x-1, \quad f_2 = 1+x+cx, \quad f_3 = 1-x+dy, \quad f_4 = \exp\left[\frac{d(g+2)+(c+2)y}{x-1}\right], \\
\alpha_1 &= -(c+1)((c+2)^2+d^2(1+(3+c)(1+g))), \quad \alpha_2 = d^2(c-g), \\
\alpha_3 &= (c+1)(c+2)^2, \quad \alpha_4 = d(c+1)(c+2).
\end{aligned}$$

Pentru Sistemul (2.55) (respectiv, (2.56), (2.57)) prima mărime Lyapunov $L_1 = -(c+2)/4$ (respectiv, $L_1 = (c+2)/4$, $L_1 = -(d+q)/4$) nu este egală cu zero și, prin urmare, (2.55) (respectiv, (2.56), (2.57)) are focar în $(0,0)$.

Sistemul (2.58) are dreptele invariante $f_1 = x-1$, $f_{2,3} = y-lB_2B_3x-B_{2,3}$ și factorul exponențial $f_4 = \exp[1/(x-1)]$. Cofactorii lor sunt: $K_{f_1}(x,y) = y(x-1)$, $K_{f_{2,3}}(x,y) = (B_{3,2} + lB_2B_3x-y)(x+lB_2B_3y)/(B_2B_3)$, $K_{f_4}(x,y) = -y$. Sistemul (2.58) are factorul integrant de forma (2.30) dacă și numai dacă, în x și y , se realizează identitatea $M(x,y) \equiv 0$, unde

$$M(x,y) = \alpha_1 K_{f_1} + \alpha_2 K_{f_2} + \alpha_3 K_{f_3} + \alpha_4 K_{f_4} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{2.73}$$

Pentru (2.58) prima mărime Lyapunov este $L_1 = -l(1-B_2B_3+B_2^2B_3^2l^2)/4$. Dacă luăm $\alpha_1 = -(1+2B_2B_3+B_2^2B_3^2l^2)/(B_2B_3)$, $\alpha_2 = -(2B_2-B_3+lB_2^2B_3^2(2+B_2l+B_3l))/(B_2-B_3)$, $\alpha_3 =$

$-3-\alpha_2$, $\alpha_4 = (1+l^2B_2^2B_3^2(1+2B_2B_3)+lB_2B_3(B_2+B_3)(1+l^2B_2^2B_3^2))/(B_2B_3)$, atunci $M(x, y) = 4L_1x^2$. Prin urmare, sistemul $\{(2.58), L_1 = 0\}$ are un factor integrant de forma (2.30) și pentru el punctul singular $(0, 0)$ este de tip centru.

Sistemul (2.59). Dreptele invariante $f_1 = x - 1$, $f_2 = f(c + 2)y - f^2x + c + 2$, $f_3 = (c + 2)y - fx + f$ și factorul exponențial $f_4 = \exp[((c + 2)(1 + fy) - f^2)/(x - 1)]$ au, respectiv, cofactorii $K_{f_1} = -y(1 + x + cx + fy)$, $K_{f_2} = -(f - fx + 2y + cy)(2x + cx + fy)/(c + 2)$, $K_{f_3} = (2x + cx + fy)(-2 - c + f^2x - 2fy - cfy)/(f(c + 2))$, $K_{f_4} = (2 + c - f^2x + 2fy + cfy)(2fx + cfx - 2y - cy + f^2y)/(c + 2)$. Dacă $\alpha_1 = -3 - f^2(f^2 - (c + 2)(c + 3))/(c + 2)^3$, $\alpha_2 = (f^2 - c - 2)/(c + 2)^2$, $\alpha_3 = -1 + f^2 - f^4/(c + 2)^2$, $\alpha_4 = 1 - f^2/(c + 2)^2$, atunci (vezi, (2.73)) $M(x, y) = 4f(c + 2)^2y^2L_1$, unde $L_1 = -f(6 + 5c + c^2 - f^2)(2 + 3c + c^2 + f^2)/(4(c + 2)^3)$ este prima mărime Lyapunov pentru punctul singular $(0, 0)$ al sistemului (2.59).

Sistemul (2.60) are integrala primă de forma (??), unde

$$f_1 = x - 1, f_{2,3} = y - B_2B_3fx - B_{2,3}, f_4 = \exp\left[\frac{\omega(B_2-B_3)(1+B_2B_3fy)}{x-1}\right],$$

$$\alpha_1 = \omega(B_3 - B_2)(1 + B_2^2B_3^2f^2), \alpha_2 = -\omega B_2^2B_3(1 + B_2f), \alpha_3 = \omega B_2B_3^2(1 + B_3f), \alpha_4 = 1,$$

cu $\omega = (1 + B_2f)(1 + B_3f)$.

Sistemele (2.61). Fie funcția $\mu(x, y)$ are forma (2.30), unde

$$\begin{aligned} f_1 &= x - 1, f_2 = y - B_2B_3fx - B_{2,3}, f_3 = y - B_2B_3fx - B_{3,2}, \\ f_4 &= \exp[(1 + B_{2,3}f)(B_{2,3} + B_2B_3f - y)/(B_{2,3}(x - 1))], \\ \alpha_1 &= -2 + 2B_{3,2}f + B_2B_3f^2 + 1/(B_2B_3), \\ \alpha_2 &= -(1 + B_{3,2}^2 + 2B_{2,3}B_{3,2}^2f + B_2^2B_3^2f^2)/(B_{3,2}(B_{2,3} - B_{3,2})), \\ \alpha_3 &= (-1 + B_{2,3}^2 - 2B_2B_3 - 2B_{2,3}^2B_{3,2}(1 + B_2B_3 - B_{3,2}^2)f \\ &\quad - B_{2,3}^2(3B_{2,3} - 4B_{3,2})B_{3,2}^3f^2 - B_{2,3}(2B_{2,3} + B_{2,3}^3 - B_{3,2})B_{3,2}^2f^2 \\ &\quad - B_{2,3}^2B_{3,2}^3f^3(B_{2,3} - B_{3,2})(2B_2 + 2B_3 + B_2B_3f))/(B_{2,3}(B_{3,2} - B_{2,3})), \\ \alpha_4 &= B_{2,3}f(1 + B_{3,2}f)(1 + 2B_{2,3}B_{3,2}^2f + B_2^2B_3^2f^2)/(1 + B_{2,3}f). \end{aligned}$$

Atunci $\text{div}(\mu(x, y)\mathbb{X}) = 4L_1\mu(x, y)x^2$, unde $L_1 = (1 + B_{2,3}^2B_{3,2}f + B_2^2B_3^2f^2)(1 + B_2B_3 + 2B_{2,3}B_{3,2}^2f + B_2^2B_3^2f^2)/(4B_{2,3}^2B_{3,2})$ este prima mărime Lyapunov și $\mathbb{X}$ este câmpul vectorial asociat sistemului (2.61). Prin urmare, dacă $L_1 = 0$, atunci $\mu(x, y)$ este un factor integrant pentru (2.61).

Sistemul (2.63). Dacă prima mărime Lyapunov $L_1 = -l(1 + B_2^2B_3^2l^2)/4$ se anulează, i.e. $l = 0$, atunci $\{(2.63), l = 0\}$ are integrala primă de forma (??), unde $f_1 = x - 1$, $f_{2,3} = y + B_{2,3}x - B_{2,3}$, $f_4 = \exp[1/(x - 1)]$, $\alpha_1 = (B_2 - B_3)(1 - B_2B_3)$, $\alpha_2 = B_2^2B_3$, $\alpha_3 = -B_2B_3^2$, $\alpha_4 = B_3 - B_2$.

Sistemul (2.64) are integrala primă de forma (??), unde $f_1 = x - 1$, $f_{2,3} = y + B_{2,3}x - B_{2,3}$, $f_4 = \exp[(1 + B_2 B_3 f y)/(x - 1)]$, $\alpha_1 = (B_2 - B_3)(B_2 B_3(1 + B_2 f + B_3 f) - 1)$, $\alpha_2 = -B_2^2 B_3(1 + B_2 f)$, $\alpha_3 = B_2 B_3^2(1 + B_3 f)$, $\alpha_4 = B_2 - B_3$.

Sistemele (2.65), (2.66), (2.68), (2.69), (2.71), (2.72) sunt integrabile, deoarece ele au, respectiv, următorii factori integranți:

$$\mu(x, y) = 1/((x - 1)^2(-B_2 + bB_2x + y)(-B_3 + bB_3x + y));$$

$$\mu(x, y) = 1/((x - 1)^2(-B_2 + B_2x + y)(-B_3 + B_3x + y));$$

$$\mu(x, y) = 1/((x - 1)^2(-A_3 + A_3x - y)(-1 + x - A_3y - fy + A_3^2fy));$$

$$\mu(x, y) = 1/((x - 1)^2(B_3 + A_3x - y)(-B_2B_3 - B_2^2B_3f - A_3B_2x - A_3B_2B_3fx + B_2^2B_3fx - B_2B_3^2fx + B_3y + B_2B_3fy));$$

$$\mu(x, y) = 1/((x - 1)^2(1 - A_2fx + fy)(1 - A_2f - x + afx + A_2fx + fy - A_2f^2y));$$

$$\mu(x, y) = 1/((x - 1)^2(B_3(a + f - fx) - (a + f)y)(-B_3(a + f)^2 + (a + f)(a^2 + 2af + B_3f - aB_3^2f + f^2)x - B_3f(a^2 - aB_3 + 2af - aB_3^2f + f^2)y)).$$

Sistemele (2.67). Dacă prima mărime Lyapunov $L_1 = -2(B_{2,3} - f + B_{2,3}^2f)(B_{2,3} + f + B_{2,3}^2f)/B_{2,3}$ se anulează, atunci funcția $\mu(x, y) = (B_{2,3}(x - 1) + y)^{-1+B_{2,3}+B_{2,3}^3f}(1 + B_{2,3}fx + fy)^{B_{2,3}(B_{2,3}+1/f)} \exp[B_{2,3}(1 + B_{2,3}f)(1 + B_{2,3}f + fy)/(f(1 - x))]/(x - 1)^3$ este factor integrant pentru sistemele (2.67).

Sistemele (2.70). Pentru aceste sisteme avem $L_1 = 2(a^2 - aB_{2,3} + 2af - B_{2,3}f - 2aB_{2,3}^2f + f^2 - B_{2,3}^2f^2)(a^2 + 2af + B_{2,3}f + f^2 + B_{2,3}^2f^2)/(B_{2,3}(a + f)^2)$. Dacă $L_1 = 0$ expresia (2.30) este factor integrant pentru sistemele (2.70), unde

$$f_1 = aB_{2,3} + B_{2,3}f - B_{2,3}fx - ay - fy, f_2 = 1 + B_{2,3}fx + ay + fy, f_3 = x - 1, f_4 = \exp[((1 + B_{2,3}f)x + (a + f)y)/(x - 1)]; \alpha_1 = (-a^3 + a^2(B_{2,3} - 3f) + f(B_{2,3}^2 + B_{2,3}(-1 + 3B_{2,3}^2)f + (-1 - B_{2,3}^2 + 3B_{2,3}^4)f^2 + B_{2,3}^5f^3) + af(-3f + B_{2,3}(-f + B_{2,3}(1 + B_{2,3}f)^2)))/(B_{2,3}f(a + f)(1 + B_{2,3}(a + f))), \alpha_2 = (a^2 + f^2 - a(B_{2,3} + (-2 + B_{2,3}^2)f))/(B_{2,3}f(1 + B_{2,3}(a + f))), \alpha_3 = -3, \alpha_4 = -B_{2,3}f(1 + B_{2,3}f)/(a + f)^2.$$

2.5. Sistemele cubice cu punct critic monodromic și trei drepte invariante

l_1, l_2, l_3 , $m(l_3) \geq 2$, $m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) \geq 4$, unde l_1, l_2 sunt complexe și l_3 este reală.

2.5.1. Dreptele l_1 și l_2 sunt complexe paralele.

Fără a diminua generalitatea, considerăm $l_1 = x - 1$, $m(l_1) \geq 2$ și $l_{2,3} = y - Ax - \alpha \mp \beta i$, $A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $i^2 = -1$. Pentru a obține clasa sistemelor cubice pentru care aceste

drepte sunt drepte invariante este suficient de înlocuit $B_{2,3} = \alpha \pm \beta i$ în (2.58), (2.60) și (2.61). Notăm $A = lB_2B_3$ în cazul sistemului (2.58), și $A = fB_2B_3$ în cazul sistemelor (2.60), (2.61).

Considerăm sistemul (2.46), adică sistemul (2.6) pentru care au loc egalitățile $a = f = k = p = r = 0$, $c = -2\alpha/(\alpha^2 + 1)$, $m = 1/(\alpha^2 + 1)$.

Vom determina condițiile pentru care (2.46) admite dreapta reală $l_3 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ invariantă, apoi condițiile pentru care ea are multiplicitatea algebrică doi.

Notăm $\varphi(x) = \left(A \cdot P(x, y) + B \cdot Q(x, y) \right) \Big|_{y=Ax+B}$, $\sigma(x, y) = E_1(\mathbb{X})/(y - Ax - B)$ și $H_2(x) = \sigma(x, y) \Big|_{y=Ax+B}$.

Sistemul (2.46) are dreapta invariantă $l_3 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$, dacă polinomul $\varphi(x) = -(B(A + B(b + Bl))(1 + \alpha^2) + [A^2(1 + \alpha^2) + (1 + B(d + Bn))(1 + \alpha^2) + AB(-2\alpha + 2b(1 + \alpha^2) + 3Bl(1 + \alpha^2))]x + [(g + Bq)(1 + \alpha^2) + A^2(b + 3Bl - 2\alpha + (b + 3Bl)\alpha^2) + A(B + d + 2Bn + (d + 2Bn)\alpha^2)]x^2 + [A(A(1 + Al + n) + q) + s + (A(A(Al + n) + q) + s)\alpha^2]x^3)/(1 + \alpha^2)$ este echivalent cu zero, i.e.: $\{A = -B(b + Bl), q = (-g + (b + Bl)(-2 + B(-d + B(1 + (b + Bl)^2)))) - 2B^2(b + Bl)^2\alpha + (-g + (b + Bl)(-2 + B(-d + B(b + Bl)^2)))\alpha^2/(B(1 + \alpha^2)), s = -(b + Bl)(b + g + Bl), n = (-1 + B(-d + B(b + Bl)(b + 2Bl)))/B^2 - 2(b + Bl)\alpha/(1 + \alpha^2)\}$.

În aceste condiții $H_2(x) = (1 - (b + Bl)x)H_{21}(x)/(B(1 + \alpha^2)^3)$, unde $H_{21}(x) = B^2(1 + \alpha^2)(2 + 2\alpha^2 + Bd(1 + \alpha^2) + 4B^4l^2(1 + \alpha^2) + B^3l(-2\alpha + 3b(1 + \alpha^2))) + 2B^2(1 + \alpha^2)(-2b^2B^2\alpha + b^3B^2(1 + \alpha^2) + g(1 + \alpha^2) - Bl(4 - 2B^2 + 2B^3l\alpha + 4\alpha^2 + 3Bd(1 + \alpha^2) + 4B^4l^2(1 + \alpha^2)) - b(2 - B^2 + 4B^3l\alpha + 2\alpha^2 + 2Bd(1 + \alpha^2) + 5B^4l^2(1 + \alpha^2)))x + (4(1 + \alpha^2)^2 + 4Bd(1 + \alpha^2)^2 + 4B^8l^4(1 + \alpha^2)^2 + B^7l^3(1 + \alpha^2)(14\alpha + 3b(1 + \alpha^2)) - B^6l^2(8 + 4\alpha^2 + 9b^2(1 + \alpha^2)^2 - 32b(\alpha + \alpha^3)) + B^5l(-2\alpha - 11b^3(1 + \alpha^2)^2 + 9dl(1 + \alpha^2)^2 - b(11 + 3\alpha^2) + 22b^2(\alpha + \alpha^3)) + B^3(1 + \alpha^2)(d(-1 + 4b\alpha + 3b^2(1 + \alpha^2)) + l(4\alpha + 8b(1 + \alpha^2) - 5g(1 + \alpha^2))) + B^2(1 + \alpha^2)(-2 - 2g\alpha + d^2(1 + \alpha^2) + b(4\alpha - 3g(1 + \alpha^2))) + B^4(b^2(-3 + \alpha^2) - 3b^4(1 + \alpha^2)^2 + 4b^3(\alpha + \alpha^3) + 4l(1 + \alpha^2)(d\alpha + 2l(1 + \alpha^2)) + 2b(-\alpha + 6dl(1 + \alpha^2)^2)))x^2 + 2(2 + 2bB^2\alpha + 2\alpha^2 + Bd(1 + \alpha^2) + 2B^4l^2(1 + \alpha^2) + 2B^3l(b + \alpha + b\alpha^2))(g + B(b + Bl)(-d + B(1 + b^2 + bBl)) - 2B^2(b + Bl)^2\alpha + (g + B(b + Bl)(-d + bB(b + Bl)))\alpha^2)x^3 + (g + B(b + Bl)(-d + bB(b + Bl)) - 2B^2(b + Bl)^2\alpha + (g + B(b + Bl)(-d + bB(b + Bl)))\alpha^2)(g + B(b + Bl)(-d + B(1 + b^2 + bBl)) - 2B^2(b + Bl)^2\alpha + (g + B(b + Bl)(-d + bB(b + Bl)))\alpha^2)x^4. Identitatea $H_2(x) \equiv 0$, echivalentă cu identitatea $H_{21}(x) \equiv 0$, ne oferă următoarele serii de condiții:$

$$\{d = (-4 + b^2B^2 - 2bB^2\alpha - 4\alpha^2 + b^2B^2\alpha^2)/(2B(1 + \alpha^2)), g = -b, l = -b/(2B)\} \text{ sau}$$

$$\{d = -2/B, g = -b(2 + B^2 + b^2B^2 - 2bB^2\alpha + 2\alpha^2 + b^2B^2\alpha^2)/(1 + \alpha^2), l = 0\}.$$

Astfel, sistemele cubice (2.6) cu trei drepte invariante, două fiind complexe paralele

conjugate, iar a treia fiind o dreaptă reală de multiplicitatea algebrică doi, au una dintre următoarele două forme:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(1 + (x - \alpha)^2)/(1 + \alpha^2), \\ \dot{y} &= (-8xy^2(1 + \alpha^2) - 2B^2(bx - 2)(x(bx - 2) - 2by^2)(1 + \alpha^2) \\ &\quad + 4By(4x - 2bx^2 + by^2)(1 + \alpha^2) + bB^3xy(-4x + 8\alpha \\ &\quad + b(bx - 4)(1 + \alpha^2)))/(8B^2(1 + \alpha^2));\end{aligned}\tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(1 + (x - \alpha)^2)/(1 + \alpha^2), \\ \dot{y} &= (2Bx(bx - 1)y(1 + \alpha^2) + xy^2(1 + \alpha^2) + bB^4x^2(bx \\ &\quad - 1)(1 + b(b - 2\alpha) + b\alpha^2)) + 2bB^3x^2y(1 + b(b - 2\alpha) + b\alpha^2)) \\ &\quad + B^2(-2bx^2(1 + \alpha^2) + b^2x^3(1 + \alpha^2) + by^2(1 + \alpha^2) \\ &\quad + x(1 - 2by^2\alpha) + \alpha)^2 + b^2y^2(1 + \alpha^2)))/(B^2(1 + \alpha^2)).\end{aligned}\tag{2.75}$$

2.5.2. Dreptele $l_{1,2}$ sunt complexe omogene.

În acest caz $l_{1,2}$ sunt drepte invariante pentru (2.6), dacă sunt descrise de ecuația $y \mp ix = 0$ și dacă se verifică condițiile (2.48)

Putem considera dreapta reală $l_3 = x - 1$. Aceasta este invariantă pentru sistemul $\{(2.6), (2.48)\}$, dacă $P(1, y) = a + k + (1 + c + m)y + (a + d + p)y^2 + ry^3 \equiv 0$, i. e. $\{r = 0, k = -a, m = -1 - c, p = -a - d\}$.

În aceste condiții avem $\sigma(x, y)|_{x=1} = (b + n + ly)\psi(y)$, unde $\psi(y) = a^2 - al + (2 + c)(b + n) + 2(a(2 + c) + d(b + n))y + (2a^2 + 2a(d - l) + dl + (2 + c)(2 - b + c - n))y^2 + 2(2 + c)(a + d - l)y^3 + (a + d)(a + d - l)y^4$. Luând în considerare $\gcd(P, Q) = 1$, identitatea $\sigma(x, y)|_{x=1} \equiv 0$ are loc dacă $\psi(y) \equiv 0$, i.e. $\{c = -2, d = 0, l = a\}$ sau $\{a = 0, c = -2, d = 0\}$. Astfel, sistemul cubic $\{(2.6), (2.48)\}$ capătă următoarele două forme:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - x)(ax^2 + y - xy + ay^2), \\ \dot{y} &= -x + (2 - b)x^2 - (1 + n)x^3 - ax^2y - by^2 - nxy^2 - ay^3;\end{aligned}\tag{2.76}$$

$$\dot{x} = (x - 1)^2y, \quad \dot{y} = -x + (2 - b)x^2 - (1 + n)x^3 - lx^2y - by^2 - nxy^2 - ly^3.\tag{2.77}$$

2.5.3. Dreptele $l_{1,2}$ sunt complexe neomogene și concurente.

Cazul când $l_3 = x - A$, $A \neq 0$.

Fie $l_{1,2} \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{R}[x, y]$, $l_2 = \overline{l_1}$, $l_1 \nparallel l_2$ și $l_3 = x - A$, $A \neq 0$. Dreapta $l_3 = x - A$, $A \neq 0$ este dreaptă invariantă pentru sistemul (2.50), dacă $P(A, y) = A^2(a + Ag - 2A\alpha + 2aA\alpha) + (1 + 2A^2 - aA^2 + Ac + A^2d + 2A^2c\alpha - 3A^2\alpha^2 + A^2\beta^2)y + (Ab - Ac + f + 4A\alpha + 2Af\alpha)y^2 - (1 + f)y^3 \equiv 0$, i. e. $\{f = -1, g = -(a - 2A\alpha + 2aA\alpha)/A, c = -(1 - Ab - 2A\alpha)/A, d = -(2A - aA + b + 2Ab\alpha + A\alpha^2 + A\beta^2)/A\}$.

În aceste condiții avem $\sigma(x, y)|_{x=A} = (-A + aA + by)\psi(y)/A^2$, unde $\psi(y) = A^2(a^2A^2(1 + 2A\alpha) - (1 + A(b + 2\alpha))((1 + A\alpha)^2 + A^2\beta^2) + a(1 + A(4\alpha + A(-2 + 5\alpha^2 + \beta^2 + 2A\alpha(-1 + \alpha^2 + \beta^2)))) - 2(A^2)(a^2A^2 - (1 + A\alpha)^2 - A^2\beta^2 + a(2 - A(b - 4\alpha) + A^2(-1 - 2b\alpha + \alpha^2 + \beta^2)))y + (-1 - A(b + 4\alpha - A(-1 + 3a + b^2 - 4\alpha^2) + A^2b(-1 + 4a - 2b\alpha - 3\alpha^2 + \beta^2)))y^2 - 2(-1 + Ab)(1 + Ab + 2A\alpha)y^3 + (-1 + Ab)y^4$. Dacă $-A + aA + by \equiv 0$, atunci polinoamele $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ au factor comun de grad mai mare ca zero. Dacă $\psi(y) \equiv 0$, atunci $\{A = 1/b, a = -b^2 - 2b\alpha - \alpha^2 - \beta^2\}$. Prin urmare, sistemul cubic (2.6) capătă forma :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (bx - 1)((b + \alpha)^2x^2 + \beta^2) - y - (b + 2\alpha)xy + y^2, \\ \dot{y} &= -x - x^2(b^3 + 5b\alpha^2 + 2\alpha^3 + (b + 2\alpha)\beta^2) + 2xy(1 + (b + \alpha)^2 + \beta^2) \\ &\quad + x^2y(2\alpha + (b + 2\alpha)((b + \alpha)^2 + \beta^2)) - by^2 - (1 + 2b^2 + 4b\alpha + \alpha^2 + \beta^2)xy^2 \\ &\quad + by^3 - x^3(\alpha^2 + \beta^2)(1 + (b + \alpha)^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Cazul când $l_3 = y - Ax - B$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$.

Fie $l_3 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$. Această dreaptă este invariantă pentru sistemul (2.50), dacă $\varphi(x) = (B - 1)B(A + AB + bB + ABf)(-1 - Bd + A^2(-1 - 2Bf + 3B^2(1 + f)) + AB((-1 + B)(2b + c) - 2B(2 + f)\alpha) + B^2(1 + d + (2 + f)\alpha^2 + (2 + f)\beta^2))x + (aA(-1 + B) + A^3(-f + 3B(1 + f)) - g + A^2(b(-1 + B) + (-1 + 2B)c - 4B(2 + f)\alpha) + A((-1 + B)d + B\alpha(-2c + 7\alpha + 2f\alpha) + B(3 + 2f)\beta^2) + B(g + (c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2)))x^2 + (-1 + a + A^2 + Ac + A^2f - 2A\alpha)(A^2 - 2A\alpha + \alpha^2 + \beta^2)x^3 \equiv 0$ sau:

1) $\{a = 1, f = -2, A = c - 2\alpha, B = 1\}$;

2) $\{a = 1 - A(A + c + Af - 2\alpha), b = -A(1 + B + Bf)/B, d = (1 - A^2(1 + B^2(1 + f)) + AB(c - Bc + 2B(2 + f)\alpha) - B^2(1 + (2 + f)\alpha^2 + (2 + f)\beta^2))/((B - 1)B), g = (-A^3B(1 + f) + A^2B(-c + 2(1 + B + Bf)\alpha) - B^2(c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) + A(-1 + B + B^2(\alpha(2c - (5 + f)\alpha) - (1 + f)\beta^2)))/((B - 1)B)\}$.

În condițiile 1), sistemul cubic (2.50) are $H_2(x) = -H_{21}(x)H_{22}(x)$, unde $H_{21}(x) = b + (2 + 2bc + d - 4b\alpha + \alpha^2 + \beta^2)x + (c + bc^2 + cd + g - 2\alpha - 4bc\alpha - 2d\alpha + 4b\alpha^2 + c\alpha^2 - 2\alpha^3 + c\beta^2 - 2\alpha\beta)x^2$, iar $H_{22}(x) = 2b + (2 + 5bc - c^2 + d - 10b\alpha + 6c\alpha - 8\alpha^2)x - 2(c - 2\alpha)(-2 - 2bc + c^2 - d + 4b\alpha - 6c\alpha + 8\alpha^2)x^2 - (c - 2\alpha)(-c - bc^2 + c^3 - cd - g + 2\alpha + 4bc\alpha - 8c^2\alpha + 2d\alpha - 4b\alpha^2 + 20c\alpha^2 - 16\alpha^3)x^3$. Dacă $H_{21}(x) \equiv 0$, atunci sistemul cubic este degenerat. Fie $H_{21}(x) \neq 0$, iar $H_{22}(x) \equiv 0 \Rightarrow$

$\{b = 0, d = -2, c = 2\alpha\}$ sau $\{b = 0, d = -2 + g^2 - 2g\alpha, c = g + 2\alpha\}$. Am obținut sistemele:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + gx^3 + y - 2y^2 + y^3 + 2xy\alpha - 2xy^2\alpha + (\alpha^2 + \beta^2 - 1)x^2y, \\ \dot{y} &= x(1 + gx - y)(y - 1);\end{aligned}\tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + gx^3 + y + (g + 2\alpha)xy + (g^2 - 1 + \alpha^2 + \beta^2)x^2y - 2y^2 - (g + 2\alpha)xy^2 + y^3, \\ \dot{y} &= x(-1 - gx + (2 - g^2 + 2g\alpha)y + gxy + (g^2 - 1 - 2g\alpha)y^2 + g(\alpha^2 + \beta^2)xy).\end{aligned}\tag{2.80}$$

În condițiile **2)** sistemul cubic (2.50) are $H_2(x) = -H_{23}(x)H_{24}(x)/((B - 1)^2B^2)$, unde $H_{23}(x) = B(1 + B + Bf) + (A + 2AB + Bc + 2ABf - 2B)x$, iar $H_{24}(x) = (-1 + B)(B^2)(A^2(1 + B(-1 + B(5 + B(-1 + f))))(1 + f)) + AB(-(-1 + B)^2c - 2B(2 + f)(2 + Bf)\alpha) + (1 + B + Bf)(1 + B(-2 + B(1 + (2 + f)\alpha^2 + (2 + f)\beta^2)))) + 2(-1 + B)B(A^3(1 + B^2(7 + 2B(-1 + f)))(1 + f)) + A^2B(Bc(3 + B(-1 + f)) - 2(1 + B(8 + 5f + B(-1 + f(3 + 2f))))\alpha) + B^2(1 + B + Bf)(c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) + A(1 + B(-2 + B(1 - 2c(2 + Bf)\alpha + (3(4 + f) + 2B(1 + f(4 + f))))\alpha^2 + (4 + 3f + 2B(1 + f)^2)\beta^2))))x + (-1 + 3B + A^4(-1 + B(1 + B(-12 + B(19 + 3B(-3 + f) - 4f))(1 + f)))) + A^3B((-1 + B)Bc(5 + B(-2 + 4f)) + 2\alpha + 2B(2(7 + 5f) + B(-23 + 4(-2 + f)f - 2B(-6 + (-2 + f)f)))\alpha) + B^2(-3 + 2c\alpha - (7 + 2f)\alpha^2 - (3 + 2f)\beta^2) + B^3(1 + 3(4 + f)\alpha^2 + (4 + 3f)\beta^2 + 2c\alpha(-2 + \alpha^2 + \beta^2) - c^2(\alpha^2 + \beta^2)) - B^4(\alpha^2(5 + f + (1 + f)(2 + f)\alpha^2) + (1 + f)(1 + 2(2 + f)\alpha^2)\beta^2 + (1 + f)(2 + f)\beta^4 + 2c\alpha(-1 + \alpha^2 + \beta^2) - c^2(\alpha^2 + \beta^2)) + A^2(-2 + B(4 + B^3(-5 + c^2 - 5f - 8cf\alpha - (23 + f(5 + 2f))\alpha^2 - 7\beta^2 + f(-5 + 2f)\beta^2) - B(9 + 6f - 8c\alpha + 25\alpha^2 + 8f\alpha^2 + (9 + 8f)\beta^2) + B^2(-c^2 + 8c(-1 + f)\alpha + 12(1 + 3\alpha^2 + \beta^2) + f(11 - (5 + 4f)\alpha^2 + (7 - 4f)\beta^2)))) + AB(2\alpha + B(-2(-1 + B)Bc^2\alpha + (-1 + B)c(2 + 3\alpha^2 + 3\beta^2 + B(-2 + 4(1 + f)\alpha^2 + 4f\beta^2)) + 2\alpha(5 + 4f + 3\alpha^2 + 3\beta^2 + B(-11 - 7f - 4\alpha^2 + 3f\alpha^2 + (-4 + 3f)\beta^2 + B(5(1 + \alpha^2 + \beta^2) + f(3 + (3 + 2f)\alpha^2 + (3 + 2f)\beta^2))))))x^2 - 2B(2A + c + 2Af - 2\alpha)(A^2 - 2A\alpha + \alpha^2 + \beta^2)(1 + A^2 - 2B - 2A^2B + B^2 + 3A^2B^2 + A^2B^2f - 4AB^2\alpha - 2AB^2f\alpha + 2B^2\alpha^2 + B^2f\alpha^2 + 2B^2\beta^2 + B^2f\beta^2)x^3 - B^2(2A + c + 2Af - 2\alpha)(3A + c + 2Af - 2\alpha)(A^2 - 2A\alpha + \alpha^2 + \beta^2)^2x^4.$

Dacă $H_{23}(x) \equiv 0$, atunci $\deg\{\gcd(P(x, y), Q(x, y))\} > 0$. Fie $H_{23}(x) \not\equiv 0$, iar $H_{24}(x) \equiv 0 \Rightarrow \{c = 2(A + A^3 - 2AB + AB^2 - 2A^2B\alpha + A^2B^2\alpha - AB^2\alpha^2 + B^2\alpha^3 + AB^2\beta^2 + B^2\alpha\beta^2)/(B^2(A^2 - 2A\alpha + \alpha^2 + \beta^2)), f = (-1 - A^2 + 2B - B^2 - A^2B^2 + 2AB\alpha + 2AB^2\alpha - 2B^2\alpha^2 - 2B^2\beta^2)/(B^2(A^2 -$

$2A\alpha + \alpha^2 + \beta^2))\}$ și sistemul cubic (2.6) capătă forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x} = & [A^4x^2((1-B)(1+y) + 2(1+B)x\alpha) - A^3x((B-1)y(y+By-2) \\
& - 2(B-1)x(B+(2+B)y)\alpha + x^2(1+B((5+B)\alpha^2 + (1+B)\beta^2 - 1))) \\
& + A^2((1-B)(B^2-y)(y-1)y + 2(B-1)xy(-y+B(B+2y-2))\alpha \\
& - (B-1)x^2(1+y+B((B+8y)\alpha^2 + B\beta^2 - 2) + 2x^3\alpha(1+B(2B(\alpha^2 \\
& + \beta^2) - 1))) - A(2(1-B)B(B-y)(y-1)y\alpha + Bx^3(\alpha^2 + \beta^2) \\
& \times (2+B(B(1+\alpha^2 + \beta^2) - 3)) - 2(B-1)x^2\alpha(2y-2By \\
& + B^2(y(1+\alpha^2 + \beta^2) - 1)) + (B-1)xy(y+B(4+y(-2-3\alpha^2 + \beta^2) \\
& + B(y+2\alpha^2 + y\alpha^2 + (y-2)\beta^2 - 2) - 2))) + (B-1)(B^2x^2(\alpha^2 + \beta^2) \\
& + y^3(1+B(B(1+\alpha^2 + \beta^2) - 2)) + By(\alpha^2 + \beta^2)(B(1 \\
& + x(2\alpha + x(1+\alpha^2 + \beta^2))) - 2x^2) - y^2(1+2x\alpha \\
& + B(B(1+2\beta^2 + 2\alpha(\alpha + x(1+\alpha^2 + \beta^2))) - 2 - 4x\alpha))) \\
& - A^5x^3]/((B-1)B^2(A^2 - 2A\alpha + \alpha^2 + \beta^2)), \\
\dot{y} = & [(1-B)x(B-y)^2(\alpha^2 + \beta^2) + A^4x(2(1-B)y^2 + 2y(B+2Bx\alpha - 1) \\
& + x(\alpha(x\alpha - B(4+x\alpha)) - (B-1)x\beta^2)) + A(Bx(\alpha(2x\alpha + B(B(2+x(\alpha + \alpha^3)) \\
& - 2 - 3x\alpha)) + x(2+B(B+2B\alpha^2 - 3))\beta^2 + B^2x\beta^4) + xy(\alpha(B(4+4x\alpha \\
& + B(x\alpha(B+(B-2)\alpha^2 - 3) - 4)) - 2x\alpha) + x(B(4+B(B+2(B-2)\alpha^2 - 3)) \\
& - 2)\beta^2 + (B-2)B^2x\beta^4) + (B-1)^2y^3(B(1+\alpha^2 + \beta^2) - 1) \\
& + (B-1)y^2(B(1+2x\alpha)(2+\alpha^2 + \beta^2 - B(1+\alpha^2 + \beta^2)) - 1)) \\
& + A^3((1-B)^2(y-1)y^2 + 4(B-1)Bx(y-1)y\alpha + 2(B-1)Bx^3\alpha(\alpha^2 + \beta^2) \\
& + x^2(1-y-2y(\alpha^2 + \beta^2) - B^2(y-1)(5\alpha^2 + \beta^2) + B(\alpha^2 + \beta^2 - 1 + y(1 \\
& + \alpha^2 + \beta^2)))) - A^2x(-x^2(\alpha^2 + \beta^2) - y(-2+y(2+\alpha^2 + \beta^2)) + B^3(1 \\
& + y^2(1+\alpha^2 + \beta^2) - 2y(1+x\alpha)(1+\alpha^2 + \beta^2) + x(1+\alpha^2 + \beta^2) \\
& \times (\alpha(2+x\alpha) + x\beta^2)) + B(4x\alpha + 3x^2(\alpha^2 + \beta^2) + y^2(4+\alpha^2 + \beta^2) - 4y(1 \\
& + x\alpha(1+\alpha^2 + \beta^2))) + B^2(-1-6x\alpha - y^2(3+\alpha^2 + \beta^2) - x(\alpha^2 + \beta^2)(-2\alpha \\
& + x(3+\alpha^2 + \beta^2)) + 2y(2+\alpha^2 + \beta^2 + x\alpha(3+\alpha^2 + \beta^2)))) \\
& - A^5x^2(y-1)]/((B-1)B^2(A^2 - 2A\alpha + \alpha^2 + \beta^2)).
\end{aligned} \tag{2.81}$$

2.5.4. Integrabilitatea sistemelor (2.74), (2.75), (2.76), (2.77), (2.78)-(2.81).

Sistemul (2.74). Pentru acest sistem, prima mărime Lyapunov L_1 are forma $L_1 = b(4(1 + \alpha^2) + B^2(-4 + b^2(1 + \alpha^2)))/(4B(1 + \alpha^2))$. Dacă $L_1 = 0$, atunci sistemul este integrabil și are factor integrant de forma (2.30), unde $f_1 = (x - \alpha - i)$, $f_2 = (x - \alpha + i)$, $f_3 = -2B + bBx + 2y$, $f_4 =$

$Exp[1/(-2B + bBx + 2y)]$; $\alpha_1 = -i(-4(\alpha - i)(i + \alpha)^2 + b^2B^4(b - 2\alpha + b\alpha^2) - B^2(8i + b(1 + \alpha^2)(-4 + b(i + \alpha))))/(8B^2)$, $\alpha_2 = i(-4(\alpha - i)^2(i + \alpha) + b^2B^4(b - 2\alpha + b\alpha^2) + B^2(8i - b(1 + \alpha^2)(-4 + b(\alpha - i))))/(8B^2)$, $\alpha_3 = -3$, $\alpha_4 = 2B + bB^3(b - (2\alpha)/(1 + \alpha^2))$.

Sistemele (2.75), (2.76), (2.78), (2.79), (2.81) sunt integrabile și au, respectiv, următorii factori integranți:

$$\mu(x, y) = 1/((-B + bBx + y)^2(1 + x^2 - 2x\alpha + \alpha^2));$$

$$\mu(x, y) = 1/((-1 + x)^2(x^2 + y^2));$$

$$\mu(x, y) = 1/((-1 + bx)^2(1 - 2y + y^2 + 2x\alpha - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2));$$

$$\mu(x, y) = 1/((y - 1)^2(1 - 2y + y^2 + 2x\alpha - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2));$$

$$\mu(x, y) = 1/((-B - Ax + y)^2(1 - 2y + y^2 + 2x\alpha - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2)).$$

Prin urmare, toate aceste sisteme au centru în originea de coordonate $(0, 0)$.

Sistemul (2.77) (Sistemul (2.80)). Pentru acest sistem prima mărime Lyapunov $L_1 = -8l$ ($L_1 = 2g((g - \alpha)^2 + \beta^2)$) se anulează pentru $l = 0$ ($g = 0$). Astfel, sistemul (2.77) ((2.80)) este integrabil și are factorul integrant $\mu(x, y) = 1/((-1 + x)^2(x^2 + y^2))$ ($\mu(x, y) = 1/((y - 1)^2(1 - 2y + y^2 + 2x\alpha - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2))$).

Notăm cu $SC(1 : -1)$ familia sistemelor cubice cu cel puțin un punct critic de rezonanța $(1 : -1)$.

2.6. Concluzii la capitolul doi.

În capitolul doi au fost supuse cercetării sistemele $SC(1 : -1)$ cu drepte invariante multiple.

Cercetarea s-a soldat cu următoarele rezultate:

- în familia $SC(1 : -1)$ a fost stabilită multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte reale invariante;
- au fost determinate toate sistemele din $SC(1 : -1)$ ce au o dreaptă reală invariantă de multiplicitatea patru;
- au fost clasificate sistemele $SC(1 : -1)$ ce au două sau trei drepte invariante distincte de multiplicitate totală algebrică patru;
- pentru fiecare clasă de sisteme $SC(1 : -1)$ obținută a fost rezolvată problema de integrabilitate Darboux.

Rezultatele capitolului doi al tezei ne conduc la următoarele două concluzii:

1. Multiplicitatea maximală a unei drepte invariante reale pentru sistemele cubice de ecuații diferențiale cu singularități $(1 : -1)$ rezonante este patru.

2. În toate cazurile $m(l_1) \geq 4$, $m(l_1) + m(l_2) \geq 4$, $m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) \geq 4$, sistemul cubic de ecuații diferențiale cu singularități $(1 : -1)$ rezonante are centru în punctul critic de rezonanță $(1 : -1)$, dacă și numai dacă prima mărime Lyapunov este egală cu zero.

Rezultatele expuse în acest capitol au fost comunicate la Seminarul științific "Ecuații Diferențiale și Algebre" din cadrul Universității de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chișinău), 28 noiembrie 2017; Conferința științifică internațională "Modern problems of Differential Equations and their application", dedicated to the 100th anniversary of the professor S.D. Eidelman, Chernivtsi, Ucraina, și publicate în [113], [114], [121], [122], [133].

3. SISTEMELE DIFERENȚIALE CUBICE CU SINGULARITĂȚI (1 : -1) REZONANTE ȘI CU DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE TOTALĂ CINCI, INCLUSIV DREAPTA DE LA INFINIT.

Considerăm sistemul cubic (2.6) pentru care infinitul nu este degenerat, adică $\kappa(x, y) = yP_3(x, y) - xQ_3(x, y) \neq 0$, unde $P_3(x, y) = kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3$, $Q_3(x, y) = -(sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3)$. Notăm cu $l_\infty \equiv Z = 0$ dreapta de la infinit. Se spune că punctul critic al unui sistem diferențial polinomial este *monodromic nedegenerat*, dacă rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare lui sunt pur imaginare. La fel, vom spune că o dreaptă invariantă afină (dreapta de la infinit) este *multiplă*, dacă ea are multiplicitatea algebrică nu mai mică ca doi.

În acest capitol se rezolvă problema centrului pentru sistemele cubice cu puncte critice monodromice nedegenerate în presupunerea că dreapta de la infinit este multiplă și suma multiplicităților dreptelor invariante, inclusiv a dreptei de la infinit, nu este mai mică ca cinci, adică în cazurile: 1) $m(l_\infty) \geq 5$; 2) $m(l_\infty) \geq 2$, $m(l_1) + m(l_\infty) \geq 5$; 3) $m(l_\infty) \geq 2$, $m(l_1) + m(l_2) + m(l_\infty) \geq 5$; 4) $m(l_\infty) \geq 2$, $m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) + m(l_\infty) \geq 5$. Aici l_1 , l_2 și l_3 sunt drepte invariante afine. Rezultatul principal este:

Teorema 3.0.1. *Fie că pentru un sistem diferențial cubic: a) punctul critic M_0 este monodromic nedegenerat; b) dreapta de la infinit este multiplă și c) suma multiplicităților dreptelor invariante (inclusiv cea de la infinit) nu este mai mică ca cinci. Atunci, M_0 este de tip centru, dacă și numai dacă se anulează prima mărime Lyapunov ($L_1 = 0$).*

3.1. Sistemele cubice cu punct critic monodromic nedegenerat și dreapta de la infinit $l_\infty = 0$ de multiplicitatea $m(l_\infty) \geq 5$.

În această secțiune vom determina condițiile pentru care sistemul cubic (2.6) are dreapta de la infinit de multiplicitatea algebrică doi (respectiv: trei, patru, cinci) și în cazul configurației a) din Fig. 3.1 vom rezolva problema centrului.

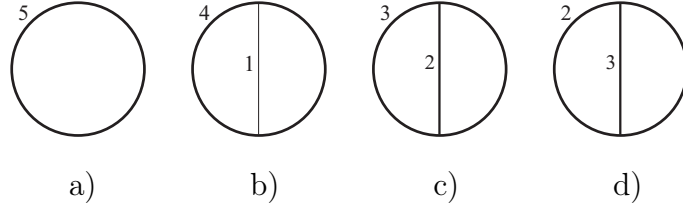


Fig. 3.1

3.1.1. Clasificarea sistemelor cubice (2.6) ce au dreapta de la infinit multiplă.

Considerăm sistemul omogenizat al sistemului (2.6):

$$\begin{cases} \dot{x} = yZ^2 + (ax^2 + cxy + fy^2)Z + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3, \\ \dot{y} = -(xZ^2 + (gx^2 + dxy + by^2)Z + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3). \end{cases} \quad (3.1)$$

Pentru sistemul (3.1) polinomul $E_1(\mathbb{X})$ arată astfel

$$E_1(\mathbb{X}) = C_0(x, y) + C_1(x, y)Z + C_2(x, y)Z^2 + \dots + C_8(x, y)Z^8,$$

unde $C_i(x, y), i = \overline{0, 8}$ sunt polinoame ce depind de x și y . Dacă $C_i(x, y) \equiv 0, i = \overline{0, j}$, atunci multiplicitatea algebrică a drepte de la infinit $Z = 0$ este $j + 2$.

Avem $C_0(x, y) = C_{01}(x, y)C_{02}(x, y)$, unde $C_{01}(x, y) = sx^4 + kx^3y + qx^3y + mx^2y^2 + nx^2y^2 + lxy^3 + pxy^3 + ry^4$ și $C_{02}(x, y) = (kq - ms)x^4 + 2(kn - ps)x^3y + (3kl + mn - pq - 3rs)x^2y^2 + 2(lm - qr)xy^3 + (lp - nr)y^4$. Dacă $C_{01}(x, y) \equiv 0$, atunci infinitul este degenerat. Fie că $C_{01}(x, y) \not\equiv 0$. Identitatea $C_{02}(x, y) \equiv 0$ furnizează următoarele cinci serii de condiții

$$n = k = m = s = p = q = 0, r \neq 0; \quad (3.2)$$

$$k = m = p = r = 0; \quad (3.3)$$

$$k = m = q = s = 0, l = nr/p; \quad (3.4)$$

$$k = s = 0, l = qr/m, n = pq/m; \quad (3.5)$$

$$l = rs/k, n = ps/k, q = ms/k. \quad (3.6)$$

Remarca 3.1.1. Transformarea $x \rightarrow y, y \rightarrow x, t \rightarrow -t$ păstrează forma sistemului (2.6) și schimbă coeficienții astfel: $a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d, \dots, r \leftrightarrow s$.

Fie $\{F(a, b, c, d, \dots, r, s)\}$ o serie de condiții. Notăm $\{F(a, b, c, d, \dots, r, s)\}^{\leftrightarrow} = \{F(b, a, d, c, \dots, s, r)\}$.

Lema 3.1.1. *Dreapta de la infinit $Z = 0$ a sistemului (2.6) are multiplicitatea algebrică nu mai mică ca trei, dacă și numai dacă se îndeplinește una dintre următoarele zece serii de condiții:*

$$a = c = f = k = m = p = r = 0; \quad (3.7)$$

$$c = aq/s, f = an/s, k = l = m = p = r = 0; \quad (3.8)$$

$$a = 0, c = fq/n, k = l = m = p = r = s = 0; \quad (3.9)$$

$$a = f = k = l = m = n = p = r = s = 0, q \neq 0; \quad (3.10)$$

$$a = gp/n, c = dp/n, k = 0, l = p, m = q = 0, r = p^2/n, s = 0; \quad (3.11)$$

$$b = fq/m, d = cq/m, g = aq/m, k = 0, l = qr/m, n = pq/m, s = 0, q \neq 0; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} d &= cq/m + m(bm - fq)/(qr), g = aq/m, k = 0, l = qr/m, \\ n &= m + q^2r/m^2, p = m^2/q + qr/m, s = 0; \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$b = fq/m, g = aq/m, k = l = 0, n = m, p = m^2/q, r = s = 0; \quad (3.14)$$

$$b = fs/k, d = cs/k, g = as/k, l = rs/k, n = ps/k, q = ms/k; \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} b &= (fk^2s + gkrs - ars^2)/k^3, d = s(ck^3 + gk^2p - akps - gkrs + ars^2)/k^4, \\ l &= rs/k, m = (k^4 + kps^2 - rs^3)/(k^2s), n = ps/k, q = (k^4 + kps^2 - rs^3)/k^3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Demonstrație. Rezolvăm identitatea $C_1(x, y) \equiv 0$ pentru fiecare serie de condiții (3.2)-(3.6), respectând condiția $\kappa(x, y) \neq 0$.

Condițiile (3.2). În aceste condiții polinomul $C_1(x, y)$ are forma $C_1(x, y) = y^5[3l(al - gr)x^2 + 2(cl^2 + alr - dlr - gr^2)xy + (fl^2 - blr + clr - dr^2)y^2]$. Luând în considerare faptul că infinitul este nedegenerat, adică $\kappa(x, y) = -y^3(lx - ry) \neq 0$, identitatea $C_1(x, y) \equiv 0$ are loc dacă:

$$f = br/l, a = gr/l, c = dr/l; \quad (3.17)$$

$$d = g = l = 0. \quad (3.18)$$

Transformarea $x \rightarrow y, y \rightarrow x, t \rightarrow -t$, ne arată că condițiile $\{(3.2), (3.17)\}$ se conțin în (3.15), iar condițiile $\{(3.2), (3.18)\}$ se conțin în (3.8).

În *Condițiile (3.3)* avem $\kappa(x, y) = -x(sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3)$ și polinomul $C_1(x, y) = -\kappa(x, y)[(aq - cs)x^4 + 2(an - fs)x^3y + (3al + cn - fq)x^2y^2 + 2clxy^3 + fly^4]/x$. Expresia $C_1(x, y)$ este identică cu zero dacă:

$$a = c = f = 0; \quad (3.19)$$

$$c = aq/s, f = an/s, l = 0; \quad (3.20)$$

$$a = 0, c = fq/n, l = s = 0; \quad (3.21)$$

$$a = f = l = n = s = 0, q \neq 0. \quad (3.22)$$

Condițiile (3.3), împreună cu condițiile (3.19)-(3.22), ne dau seriile de condiții (3.7)-(3.10), respectiv.

Pentru sistemul (3.1) cu Condițiile (3.4), polinoamele $\kappa(x, y)$ și $C_1(x, y)$ au forma $\kappa(x, y) = y^2(-nx + py)(px + ry)/p$ și $C_1(x, y) = -y^3(px + ry)C_{11}(x, y)/p^2$, unde $C_{11}(x, y) = -2np(an - gp)x^3 - (cn^2p + anp^2 - dnp^2 - gp^3 + 3an^2r - 3gnpr)x^2y - 2(cn^2 + anp - dnp - gp^2)rx y^2 + (fn p^2 - bp^3 - fn^2r + bnpr - cnpr + dp^2r)y^3$. Identitatea $C_1(x, y) \equiv 0$ implică $C_{11}(x, y) \equiv 0$, care are loc, dacă:

$$a = gp/n, c = dp/n, r = p^2/n; \quad (3.23)$$

$$b = dr/p, g = n = 0; \quad (3.24)$$

$$a = gp/n, c = dp/n, f = bp/n. \quad (3.25)$$

Avem $\{(3.4), (3.23)\} \equiv (3.11)$, $\{(3.4), (3.24), r = 0\}^{\leftrightarrow} \subset (3.10)$, $\{(3.4), (3.24), r \neq 0\}^{\leftrightarrow} \subset (3.8)$, $\{(3.4), (3.25), l = 0\}^{\leftrightarrow} \subset (3.12)$, și $\{(3.4), (3.25), l \neq 0\}^{\leftrightarrow} \subset (3.15)$.

În Condițiile (3.5) polinomul $\kappa(x, y) = y(my - qx)(mx^2 + pxy + ry^2)/m$, iar $C_1(x, y) = \kappa(x, y)C_{12}(x, y)/(m^2(my - qx))$, unde $C_{12}(x, y) = -mq(gm - aq)x^4 - 2pq(gm - aq)x^3y + (dm^3 - gm^2p + bm^2q - cm^2q + ampq - dmpq - fmq^2 + cpq^2 - 3gmqr + 3aq^2r)x^2y^2 + 2(bm^3 - fm^2q - gm^2r + amqr - dmqr + cq^2r)xy^3 + (bm^2p - fmpq - dm^2r - bmqr + cmqr + fq^2r)y^4$. Pentru ca $C_1(x, y) \equiv 0$, este necesar ca $C_{12}(x, y) \equiv 0$, care se realizează dacă:

$$b = fq/m, d = cq/m, g = aq/m, q \neq 0; \quad (3.26)$$

$$d = cq/m + m(bm - fq)/(qr), g = aq/m, p = m^2/q + qr/m; \quad (3.27)$$

$$b = fq/m, g = aq/m, p = m^2/q, r = 0; \quad (3.28)$$

$$d = bp/r, g = bm/r, q = 0; \quad (3.29)$$

$$b = 0, g = dm/p, q = r = 0; \quad (3.30)$$

$$b = d = p = q = r = 0. \quad (3.31)$$

Condițiile (3.5), împreună cu condițiile (3.26), (3.27) și (3.28), ne dau seriile de condiții (3.12), (3.13) și (3.14), respectiv. Avem $\{(3.5), (3.29)\}^{\leftrightarrow} \subset (3.8)$, $\{(3.5), (3.30), m = 0\}^{\leftrightarrow} \subset (3.10)$, $\{(3.5), (3.30), m \neq 0\}^{\leftrightarrow} \subset (3.9)$, $\{(3.5), (3.31)\}^{\leftrightarrow} \subset (3.9)$.

În cazul *Condițiilor* (3.6) polinoamele $\kappa(x, y)$ și $C_1(x, y)$ arată astfel: $\kappa(x, y) = (sx + ky)(kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3)/k$ și $C_1(x, y) = \kappa(x, y)C_{13}(x, y)/(k(sx + ky))$, unde $C_{13}(x, y) = (gk^3 - ak^2s + dk^2s - gkms - cks^2 + ams^2)x^4 + 2(dk^3 + bk^2s - ck^2s - gkps - fks^2 + aps^2)x^3y + (3bk^3 + dk^2m - gk^2p - 3fk^2s + bkms - ckms + akps - dkps - 3gkrs - fms^2 + cps^2 + 3ars^2)x^2y^2 + 2(bk^2m - gk^2r - fkms + akrs - dkrs + crs^2)xy^3 + (bk^2p - dk^2r - fkps - bkrs + ckrs + frs^2)y^4$. Dacă $\kappa(x, y) \neq 0$ și $C_{13}(x, y) \equiv 0$, atunci:

$$b = fs/k, d = cs/k, g = as/k; \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} d &= (bk^2p - fkps - bkrs + ckrs + frs^2)/(k^2r), \\ g &= (bk^3 - fk^2s + ars^2)/(krs), m = (k^4 + kps^2 - rs^3)/(k^2s). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Condițiile (3.6), împreună cu condițiile (3.32) și (3.33), obținute mai sus, ne conduc la seriile de condiții (3.15) și (3.16) din lema. $\square$

Lema 3.1.2. *Dreapta de la infinit $Z = 0$ a sistemului (2.6) are multiplicitatea algebrică cel puțin patru, dacă și numai dacă se verifică una dintre următoarele șapte serii de condiții:*

$$a = 0, c = b, f = g = k = l = m = n = p = r = s = 0, q \neq 0; \quad (3.34)$$

$$a = c = f = k = l = m = n = p = r = s = 0, q \neq 0; \quad (3.35)$$

$$b = aq/s, c = aq/s, f = 0, d = (agq + s^2 + a^2s)/(as), k = l = m = n = p = r = 0; \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} a &= m^3/(q(bm - fq)), c = (m^4 + b^2mq^2 - bfq^3)/(q^2(bm - fq)), \\ d &= (m^5 + 2b^2m^2q^2 - 3bfmq^3 + f^2q^4)/(m^2q(bm - fq)), \\ g &= m^2/(bm - fq), k = 0, l = m^2/q, n = 2m, p = 2m^2/q, r = m^3/q^2, s = 0; \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} b &= fs/k, d = cs/k, g = as/k, l = -k, m = (2k^2 - s^2)/s, \\ n &= (k^2 - 2s^2)/s, p = k(k^2 - 2s^2)/s^2, q = (2k^2 - s^2)/k, r = -k^2/s; \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} b &= -s(k^4 - agkrs + k^2rs + a^2rs^2)/(k^3(gk - as)), n = (k^4 + 2rs^3)/(k^2s), \\ c &= -(g^2k^6 - 3agk^5s + 2a^2k^4s^2 + k^4s^3 - agkrs^4 + k^2rs^4 + a^2rs^5)/(k^3s^2(gk - as)), \\ d &= (agk^4 - a^2k^3s - k^3s^2 + gkrs^2 - agrs^3 - krs^3)/(k^3(gk - as)), \\ f &= -(k^4 + g^2k^2r - 3agkrs + k^2rs + 2a^2rs^2)/(k^2(gk - as)), l = rs/k, \\ m &= (2k^4 + rs^3)/(k^2s), p = (k^4 + 2rs^3)/(ks^2), q = (2k^4 + rs^3)/k^3. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Demonstrație. Rezolvăm identitatea $C_2(x, y) \equiv 0$ pentru fiecare dintre seriile de condiții (3.7)-(3.16), considerând $\kappa(x, y) \neq 0$.

Condițiile (3.7). Avem $C_2(x, y) = -(sx^3 - nxy^2 - 2ly^3)\kappa(x, y)/x$, iar $\kappa(x, y) = x(sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3)$. $C_2(x, y)$ este echivalent cu zero doar dacă $\{l = n = s = 0, q \neq 0\} \Rightarrow (3.35)$.

Condițiile (3.8). Polinoamele $C_2(x, y)$ și $\kappa(x, y)$ au forma $C_2(x, y) = -\kappa(x, y)(s(agq + a^2s - ads + s^2)x^4 + 2as(gn + aq - bs)x^3y + (a^2q^2 + 2a^2ns + adns - abqs - ns^2)x^2y^2 + 2a^2nqxy^3 + a^2n^2y^4)/(s^2x^2)$ și $\kappa(x, y) = x^2(sx^2 + qxy + ny^2)$. Astfel, $C_2(x, y) \equiv 0 \Rightarrow \{b = aq/s, d = (agq + a^2s + s^2)/(as), n = 0\} \Rightarrow (3.36)$.

Condițiile (3.9). În acest caz $C_2(x, y) = \kappa(x, y)(-fgnqx^4 - 2fgn^2x^3y - (dfn^2 - n^3 - bfnq + f^2q^2)x^2y^2 - 2f^2nqxy^3 - f^2n^2y^4)/(n^2x^2)$, iar $\kappa(x, y) = x^2y(qx + ny)$. Sistemul cubic $\{(2.6), (3.9)\}$ are dreapta de la infinit $Z = 0$ de multiplicitate mai mică ca patru, deoarece $C_2(x, y) \neq 0$.

Condițiile (3.10). Sistemul cubic (2.6) cu condițiile (3.10) are $\kappa(x, y) = qx^3y$, iar $C_2(x, y) = -c\kappa(x, y)(gx^2 + (c - b)y^2) \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{1} \ c = 0 \Rightarrow (3.35), \mathbf{2} \ \{c = b, g = 0\} \Rightarrow (3.34)$.

Condițiile (3.11). Pentru sistemul cubic $\{(2.6), (3.11)\}$ polinoamele $C_2(x, y)$ și $\kappa(x, y)$ arată astfel: $C_2(x, y) = y^3(-2n^2(fgn - bgp + np)x^3 - n(df n^2 - n^3 - bdn p + 4fgnp - 4bgp^2 + 5np^2)x^2y - 2p(df n^2 - n^3 - bdn p + fgnp - bgp^2 + 2np^2)xy^2 - (f^2n^3 - 2bf n^2p + b^2np^2 + df np^2 - n^2p^2 - bdp^3 + p^4))y^3/n^2$, iar $\kappa(x, y) = y^2(nx + py)^2/n$. Nu sunt condiții pentru care $C_2(x, y) \equiv 0$, iar $\kappa(x, y) \neq 0$.

În cazul *Condițiilor (3.12)* polinomul $C_2(x, y) = \kappa(x, y)(-m^2qx^3 + m(m^2 - 2pq)x^2y - q(2m^2 - pq + 3mr)xy^2 - (mpq + m^2r - 2q^2r)y^3)/(m(qx + my)) \neq 0$, dacă $q \neq 0$ și $\kappa(x, y) = y(qx + my)(mx^2 + pxy + ry^2)/m \neq 0$.

Condițiile (3.13). Avem $C_2(x, y) = -y(m^2x + qry)(-m^3q^3r(abm - afq - qr)x^4 - 2mq^2r(abm - afq - qr)(m^3 + q^2r)x^3y + (b^2m^8 - 2bfm^7q + f^2m^6q^2 - abm^6qr + afm^5q^2r + bfm^4q^3r - f^2m^3q^4r + m^5q^2r^2 - 4abm^3q^3r^2 - bcm^2q^4r^2 + 4afm^2q^4r^2 + m^3q^4r^2 + cfmq^5r^2 + 5m^2q^4r^3 - q^6r^3)x^2y^2 + 2mqr(b^2m^5 - bfm^4q - abm^3qr - bcm^2q^2r + afm^2q^2r + m^3q^2r + cfmq^3r + 2m^2q^2r^2 - q^4r^2)xy^3 + m^2qr(bfm^4 - f^2m^3q + b^2m^2qr - bcm^2qr + m^3qr - 2bfmq^2r + cfmq^2r + f^2q^3r + m^2qr^2 - q^3r^2)y^4)/(m^4q^3r^2)$, iar $\kappa(x, y) = y(qx + my)^2(m^2x + qry)/(m^2q)$. Dreapta de la infinit $Z = 0$ are multiplicitatea algebrică patru, dacă $C_2(x, y) \equiv 0$ și $\kappa(x, y) \neq 0$. Mai exact, dacă:

$$\{c = (bfq^3 - m^4 - b^2mq^2)/(q^2(fq - bm)), a = -m^3/(q(fq - bm)), r = m^3/q^2\}$$

$\Rightarrow (3.37)$.

În cazul *Condițiilor (3.14)* avem $m(l_\infty) < 4$, deoarece $C_2(x, y) = -xy((-adm q^2 + m^2q^2 + acq^3)x^4 - (2adm^2q - 2m^3q - 2acmq^2)x^3y - (adm^3 - d^2m^3 - m^4 - acm^2q + 2cdm^2q - c^2mq^2 - dfmq^2 - m^2q^2 + cfq^3)x^2y^2 + (2dfm^2q + 2m^3q - 2cfmq^2)xy^3 + (dfm^3 + m^4 - cfm^2q)y^4)/(mq) \neq 0$ pentru $\kappa(x, y) = xy(qx + my)^2/q \neq 0$.

Condițiile (3.15). Polinomul $C_2(x, y) = \kappa(x, y)(k(2k^2 - ms - s^2)x^3 + k(km - 3ks - 2ps)x^2y - s(2km + 3kr - ps)xy^2 - (k^2r + kps - 2rs^2)y^3)/(k(sx + ky)) \equiv 0 \Rightarrow$

$$m = (2k^2 - s^2)/s, p = k(k^2 - 2s^2)/s^2, r = -k^2/s, \quad (3.40)$$

pentru $\kappa(x, y) = (sx + ky)(kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3)/k \neq 0$. Condițiile {(3.15), (3.40)} reprezintă seria de condiții (3.38).

Condițiile (3.16). În aceste condiții $C_2(x, y) = \kappa(x, y)C_{21}(x, y)/(k^6s(sx + ky))$, unde $\kappa(x, y) = (sx + ky)^2(k^3x^2 + kpsxy - rs^2xy + krsy^2)/(k^3s)$ și $C_{21}(x, y) = -k^2s(g^2k^6 - 2agk^5s - k^6s + a^2k^4s^2 + cgk^4s^2 - ack^3s^3 + k^4s^3 - agk^2ps^3 + k^3ps^3 + a^2kps^4 + agkrs^4 - k^2rs^4 - a^2rs^5)x^4 + 2k^3s(k^6 - cgk^4s - g^2k^3ps + ack^3s^2 - fgk^3s^2 - 2k^4s^2 + 3agk^2ps^2 - k^3ps^2 + g^2k^2rs^2 + afk^2s^3 - 2a^2kps^3 - 2agkrs^3 + a^2rs^4)x^3y + (k^{10} - cgk^8s + ack^7s^2 - 4fgk^7s^2 - 5k^8s^2 + agk^6ps^2 - k^7ps^2 - 2g^2k^6rs^2 + 4afk^6s^3 - a^2k^5ps^3 - g^2k^4p^2s^3 + 7agk^5rs^3 - 4k^6rs^3 - fgk^4ps^4 - k^5ps^4 + 2agk^3p^2s^4 - 5a^2k^4rs^4 + cgk^4rs^4 + 2g^2k^3prs^4 + afk^3ps^5 - a^2k^2p^2s^5 - ack^3rs^5 + fgk^3rs^5 + 2k^4rs^5 - 4agk^2prs^5 - g^2k^2r^2s^5 - afk^2rs^6 + 2a^2kprs^6 + 2agkr^2s^6 - a^2r^2s^7)x^2y^2 - 2ks(fgk^7 + k^8 - afk^6s - agk^5rs + 2k^6rs + fgk^4ps^2 + k^5ps^2 + a^2k^4rs^2 - cgk^4rs^2 + g^2k^3prs^2 - afk^3ps^3 + ack^3rs^3 - fgk^3rs^3 - 2k^4rs^3 - 2agk^2prs^3 - g^2k^2r^2s^3 + afk^2rs^4 + a^2kprs^4 + 2agkr^2s^4 - a^2r^2s^5)xy^3 - k^2s(k^6r + fgk^4ps + k^5ps - cgk^4rs - afk^3ps^2 + ack^3rs^2 - fgk^3rs^2 - 2k^4rs^2 + g^2k^2r^2s^2 + afk^2rs^3 - 2agkr^2s^3 + a^2r^2s^4)y^4$. Avem $C_2(x, y) \equiv 0 \Rightarrow C_{21}(x, y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$g = as/k, p = k(k^2 - 2s^2)/s^2, r = -k^2/s; \quad (3.41)$$

$$c = -(g^2k^6 - 3agk^5s + 2a^2k^4s^2 + k^4s^3 - agkrs^4 + k^2rs^4 + a^2rs^5)/(k^3s^2(gk - as)), \quad (3.42)$$

$$f = -(k^4 + g^2k^2r - 3agkrs + k^2rs + 2a^2rs^2)/(k^2(gk - as)), p = (k^4 + 2rs^3)/(ks^2).$$

Condițiile {(3.16), (3.41)} reprezintă condițiile (3.38), iar {(3.16), (3.42)} sunt echivalente cu condițiile (3.39). $\square$

Lema 3.1.3. *Multiplicitatea algebrică maximală a drepte de la infinit $Z = 0$ a sistemului (2.6) este egală cu cinci. Dreapta $Z = 0$ are multiplicitatea algebrică cinci, dacă și numai dacă se îndeplinește una dintre următoarele șase serii de condiții:*

$$a = b = c = f = g = k = l = 0, m = n = p = r = s = 0, q \neq 0; \quad (3.43)$$

$$b = c = 0, d = 2a, f = k = l = 0, m = n = p = q = r = 0, s = a^2, a \neq 0; \quad (3.44)$$

$$b = -as/k, c = a(k^2 - s^2)/(ks), d = a(k^2 - s^2)/k^2, f = -a, g = as/k, l = -k, \quad (3.45)$$

$$m = (2k^2 - s^2)/s, n = (k^2 - 2s^2)/s, p = k(k^2 - 2s^2)/s^2, q = (2k^2 - s^2)/k, r = -k^2/s;$$

$$\begin{aligned} a = 0, b = -gk^2/s^2, c = -2gk^2/s^2, d = 0, f = -2gk^3/s^3, l = k^3/s^2, \\ m = n = 3k^2/s, p = 3k^3/s^2, q = 3k, r = k^4/s^3, g^2k^2 - k^2s - s^3 = 0; \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} b = -as/k, c = -2as/k, d = 2a, f = -a(k^2 + 2s^2)/s^2, g = (k^2 + a^2s)/(ak), \\ l = k^3/s^2, m = n = 3k^2/s, p = 3k^3/s^2, q = 3k, r = k^4/s^3, k^4 - a^2k^2s - a^2s^3 = 0; \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} b = -k(k^2 + a^2s + s^2 - agk)/(s(gk - as)), c = -2k(gk - 2as)/s^2, \\ d = 2a, f = -k^2(2gk - 3as)/s^3, l = k^3/s^2, m = n = 3k^2/s, \\ p = 3k^3/s^2, q = 3k, r = k^4/s^3, g^2k^2 - 2agks - k^2s + a^2s^2 - s^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Demonstrație. Rezolvăm identitatea $C_3(x, y) \equiv 0$ pentru fiecare serie de condiții (3.34)-(3.39), respectând condiția $\kappa(x, y) \neq 0$.

Condițiile (3.34). Avem $\{\kappa(x, y) = qx^3y \neq 0, C_3(x, y) = bx(-qx^3y + bdx^3y^3 - 2qxy^3 + 2b^2y^4) \equiv 0\} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow (3.43)$. Polinomul $C_4(x, y) = -qx^3y - 2qxy^3$ nu este idenic zero, prin urmare, multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit $Z = 0$ este cinci.

Condițiile (3.35). În acest caz, $\{\kappa(x, y) = qx^3y \neq 0, C_3(x, y) = -qx^2y(gx^2 - by^2) \equiv 0\} \Rightarrow b = g = 0 \Rightarrow (3.43)$.

Condițiile (3.36). Avem $\kappa(x, y) = x^3(sx + qy)$, iar $C_3(x, y) = \kappa(x, y)(s^2(a^2g - aq - gs)x^3 + 2as(agq + a^2s - s^2)x^2y + aq(agq + 4a^2s - s^2)xy^2 + 2a^3q^2y^3)/(s^3x^2) \equiv 0 \Rightarrow \{q = 0, s = a^2\} \Rightarrow (3.44)$. Pentru sistemul $\{(2.6), (3.44)\}$ polinomul $C_4(x, y) = (a^2 - g^2)x^4 - 4agx^3y - 3a^2x^2y^2 \neq 0$.

În cazul *Condițiilor (3.37)* inegalitatea $\kappa(x, y) = y(qx + my)^3/q^2 \neq 0$ și identitatea $C_3(x, y) = -(-a^2 + s)x^4(gx + 2ay) \equiv 0$ ne dau $s = a^2 \Rightarrow (3.44)$.

Condițiile (3.38). Polinomul $\kappa(x, y) = (sx + ky)^3(kx - sy)/(ks^2)$, iar polinomul $C_3(x, y) = \kappa(x, y)((ak^2 - cks - as^2)x^2 - 2(a + f)ksxy - (fk^2 + cks - fs^2)y^2)/(k(sx + ky)) \equiv 0 \Rightarrow \{c = a(k^2 - s^2)/(ks); f = -a\} \Rightarrow (3.45)$. În condițiile (3.45) sistemul (2.6) are polinomul $C_4(x, y) = \kappa(x, y)((2k^2 + s^2)x^2 - 2ksxy + (k^2 + 2s^2)y^2)/(sx + ky)^2 \neq 0$.

Condițiile (3.39). Avem $\kappa(x, y) = (sx + ky)^3(k^3x + rs^2y)/(k^3s^2)$, iar $C_3(x, y) = \kappa(x, y)C_{31}(x, y)/(k^6s^2(gk - as)(sx + ky)^2)$, unde $C_{31}(x, y) = k^3s(g^4k^6 - 3ag^3k^5s - 2g^2k^6s + 3a^2g^2k^4s^2 + 4agk^5s^2 - a^3gk^3s^3 - 2a^2k^4s^3 - g^2k^4s^3 + agk^3s^4 + k^4s^4 - agkrs^5 + k^2rs^5 + a^2rs^6)x^3 - k^3(g^4k^7 - 5ag^3k^6s + 2g^2k^7s + 9a^2g^2k^5s^2 - 4agk^6s^2 - 7a^3gk^4s^3 + 2a^2k^5s^3 + g^2k^5s^3 - 2g^4k^3rs^3 + 2a^4k^3s^4 + agk^4s^4 - 3k^5s^4 + 6ag^3k^2rs^4 + 2g^2k^3rs^4 - 2a^2k^3s^5 - 6a^2g^2krs^5 - agk^2rs^5 - 3k^3rs^5 + 2a^3grs^6 - a^2krs^6)x^2y - s^2(2g^4k^7r + 3agk^8s - 3k^9s - 10ag^3k^6rs + g^2k^7rs - 3a^2k^7s^2 + 18a^2g^2k^5rs^2 + agk^6rs^2 - 3k^7rs^2 - 14a^3gk^4rs^3 - 2a^2k^5rs^3 - g^2k^5rs^3 - g^4k^3r^2s^3 + 4a^4k^3rs^4 + 2agk^4rs^4 + 3ag^3k^2r^2s^4 + g^2k^3r^2s^4 - a^2k^3rs^5 - 3a^2g^2kr^2s^5 - 2agk^2r^2s^5 + a^3gr^2s^6 + a^2kr^2s^6)xy^2 - s^2(agk^9 - k^10 - g^2k^8r - a^2k^8s + 3agk^7rs - k^8rs - 2a^2k^6rs^2 - g^2k^6rs^2 + g^4k^4r^2s^2 + 2agk^5rs^3 - 5ag^3k^3r^2s^3 + g^2k^4r^2s^3 -$

$a^2k^4rs^4 + 9a^2g^2k^2r^2s^4 - 2agk^3r^2s^4 - 7a^3gkr^2s^5 + a^2k^2r^2s^5 + 2a^4r^2s^6)y^3$. $C_3(x, y) \equiv 0$, dacă $C_{31}(x, y) \equiv 0 \Rightarrow$

$$a = 0, r = k^4/s^3, g^2k^2 - k^2s - s^3 = 0; \quad (3.49)$$

$$g = (k^2 + a^2s)/(ak), r = k^4/s^3, k^4 - a^2k^2s - a^2s^3 = 0; \quad (3.50)$$

$$r = k^4/s^3, g^2k^2 - 2agks - k^2s + a^2s^2 - s^3 = 0. \quad (3.51)$$

Condițiile (3.39), împreună cu condițiile (3.49)-(3.51), reprezintă seriile de condiții (3.46)-(3.48).

Sistemele $\{(2.6), (3.46)\}$ - $\{(2.6), (3.48)\}$ au polinomul $\kappa(x, y) = (sx + ky)^4/s^3$, iar polinomul $C_4(x, y)$ arată astfel, respectiv:

$$C_4(x, y) = \kappa(x, y)[s^2(k^4 + k^2s^2 - s^4)x^2 + 2ks^3(2k^2 + s^2)xy - k^4(4k^2 + 3s^2)y^2]/(k^2s^2(sx + ky)^2) \neq 0,$$

$$C_4(x, y) = -\kappa(x, y)(k^2 + s^2)(s^4x^2 - 2ks(k^2 + s^2)xy + k^4y^2)/(k^2s^2(sx + ky)^2) \neq 0,$$

$$C_4(x, y) = \kappa(x, y)(s^2(k^5 - a^2k^3s + k^3s^2 - a^2ks^3 - ks^4 \pm 2as^2\sqrt{k^2s(k^2 + s^2)})x^2 - 2k^2s(a^2k^2s - 2k^2s^2 + a^2s^3 - s^4 \pm 2ak\sqrt{k^2s(k^2 + s^2)})xy - k^2(4k^5 + a^2k^3s + 3k^3s^2 + a^2ks^3 \pm 2a\sqrt{k^2s(k^2 + s^2)}(2k^2 + s^2))y^2)/(k^3s^2(sx + ky)^2) \neq 0. \quad \square$$

3.1.2. Integrabilitatea sistemelor cubice $\{(2.6), (3.43)\}$ - $\{(2.6), (3.48)\}$.

Pentru sistemul $\{(2.6), (3.43)\}$ (respectiv, $\{(2.6), (3.45)\}$) prima mărime Lyapunov $L_1 = -q/4$ (respectiv, $L_1 = (k^2 + s^2)^2/(4ks^2)$) este diferită de zero, astfel $\{(2.6), (3.43)\}$ (respectiv, $\{(2.6), (3.45)\}$) are focar în $(0, 0)$.

Sistemele $\{(2.6), (3.44)\}$ și $\{(2.6), (3.46)\}$ - $\{(2.6), (3.48)\}$ au, respectiv, următoarele integrale prime:

$$F(x, y) = 6(x^2 + y^2) + 4gx^3 + 12ax^2y + 3a^2x^4;$$

$$F(x, y) = 6s^3(x^2 + y^2) + 4g(sx - 2ky)(sx + ky)^2 + 3(sx + ky)^4;$$

$$F(x, y) = 6aks^3(x^2 + y^2) + 4s^3(k^2 + a^2s)x^3 + 12a^2s^3xy(kx - sy)$$

$$-4a^2ks(k^2 + 2s^2)y^3 + 3ak(sx + ky)^4;$$

$$F(x, y) = 2(as - gk)(3s^3(x^2 + y^2) + 2gs^3x^3 + 6as^3x^2y + 6aks^2xy^2 - 4gk^3y^3$$

$$+ 6ak^2sy^3) + 12ks^2(k^2 + s^2)xy^2 - 3(gk - as)(sx + ky)^4.$$

Pentru aceste sisteme punctul critic $(0, 0)$ este de tip centru.

Divergența câmpului vectorial asociat fiecăruia dintre sistemele $\{(2.6), (3.44)\}$, $\{(2.6), (3.46)\}$ - $\{(2.6), (3.48)\}$ este identică zero, i.e. $\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \equiv 0$. În acest caz, sistemul (2.6) are integrala primă de forma unui polinom. Are loc următoarea teoremă:

Teorema 3.1.1. *Sistemele cubice diferențiale (2.6) pentru care dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică cinci au centru în originea de coordonate $(0,0)$, dacă și numai dacă divergența câmpului vectorial, asociat acestor sisteme, este identică zero.*

3.2. Sistemele cubice (2.6) ce au dreapta de la infinit $l_\infty \equiv Z = 0$ și o dreaptă reală afină invariantă l_1 de multiplicitățile $m(l_\infty) \geq 4$, $m(l_1) \geq 1$.

Transformarea

$$X = x/(x-1), \quad Y = y/(x-1) \quad (3.52)$$

(inversa : $x = X/(X-1)$, $y = Y/(X-1)$) reduce (2.8) la sistemul diferențial cubic în X și Y :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X-1)(-Y + aX^2 + (c+2)XY + fY^2), \\ \dot{Y} &= -(X - (g+2)X^2 - dXY + (1-b)Y^2 + (g+s+1)X^3 + (d+q-a)X^2Y \\ &\quad + (b-c+n-2)XY^2 + (l-f)Y^3). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Menționăm, că pentru (3.53) dreapta reală $X-1=0$ este invariantă. La fel, dreapta invariantă $x-1=0$ (dreapta de la infinit) pentru (2.8) ((3.53)) are aceeași multiplicitate ca și dreapta de la infinit (dreapta invariantă $X-1=0$) pentru (3.53) ((2.8)). Prin urmare, sistemele cubice (2.6) ce au dreapta de la infinit $Z=0$ și o dreaptă reală afină invariantă l_1 de multiplicitățile $m(Z) \geq 4$, $m(l_1) \geq 1$ (Figura 3.1 b)), cu exactitatea unei transformări afine și rescalarea timpului, se obțin cu ajutorul transformării (3.52) din sistemele, enumerate în Lemma 2.1.4, și pentru care $m(x-1=0) \geq 4$. De exemplu, aplicând transformarea (3.52), sistemul (2.27) se reduce la sistemul

$$\dot{X} = -Y(X-1), \quad \dot{Y} = -(X - dXY - Y^2 + (d+q)X^2Y$$

pentru care infinitul e de multiplicitate nu mai mică ca patru, iar $m(X-1=0) \geq 1$.

Deoarece transformarea (3.52) este nede generată într-o vecinătate a originii sistemului de coordonate, sistemele (2.8) și (3.53) au în același timp centru în $(0,0)$.

3.3. Sistemele cubice (2.6) ce au dreapta de la infinit și o dreaptă reală afină invariantă l_1 de multiplicitățile $m(l_\infty) \geq 3, m(l_1) \geq 2$.

În această secțiune vom rezolva problema centrului pentru sistemele cubice (2.6) în cazul configurației c) din Fig. 2.1. Pentru sistemele $\{(2.6), (3.7)\}$ - $\{(2.6), (3.16)\}$ vom determina condițiile de existență a unei drepte invariante reale l_1 de multiplicitatea doi și în condițiile obținute, vom rezolva problema centrului.

Notăm

$$\begin{aligned} X_1(x) &= A \cdot P(x, Ax + B) - Q(x, Ax + B), & Y_1(y) &= P(Ay + B, y) - A \cdot Q(Ay + B, y), \\ X_2(x) &= \left(E_1(\mathbb{X}) / (y - Ax - B) \right) \Big|_{y=Ax+B}, & X_3(x) &= \left(E_1(\mathbb{X}) / (y - Ax - B)^2 \right) \Big|_{y=Ax+B}, \\ Y_2(y) &= \left(E_1(\mathbb{X}) / (x - Ay - B) \right) \Big|_{x=Ay+B}, & Y_3(y) &= \left(E_1(\mathbb{X}) / (x - Ay - B)^2 \right) \Big|_{x=Ay+B}. \end{aligned}$$

Dreapta $l_1 \equiv y - Ax - B = 0$ ($l_1 \equiv x - Ay - B = 0$) este invariantă pentru sistemele cubice (2.6), atunci și numai atunci, când are loc identitatea $X_1(x) \equiv 0$ ($Y_1(y) \equiv 0$). În particular, dreapta $y - \gamma = 0$ ($x - \gamma = 0$) este invariantă pentru (2.6), dacă $Q(x, \gamma) \equiv 0$ ($P(\gamma, y) \equiv 0$). Dreapta invariantă $y - Ax - B = 0$ are multiplicitatea algebrică doi (trei) dacă $X_2(x) \equiv 0$ ($\{X_2(x) \equiv 0, X_3(x) \equiv 0\}$). Analog, dreapta invariantă $x - Ay - B = 0$ are multiplicitatea algebrică doi (trei) dacă $Y_2(y) \equiv 0$ ($\{Y_2(y) \equiv 0, Y_3(y) \equiv 0\}$).

Lema 3.3.1. *Fie $y - Ax - B = 0$ ($x - Ay - B = 0$) $A, B \in \mathbb{R}, B \neq 0$ o dreaptă invariantă a sistemului (2.6). Atunci $X_2(x) = X_{2d}(x) \cdot \zeta(x)$ ($Y_2(y) = Y_{2d}(y) \cdot \eta(y)$), unde $X_{2d}(x), \zeta(x)$ ($Y_{2d}(y), \eta(y)$) sunt polinoame în x (y). Dacă $X_{2d}(x) \equiv 0$ ($Y_{2d}(y) \equiv 0$), atunci $y - Ax - B$ ($x - Ay - B$) divide $P(x, y)$ și $Q(x, y)$, i.e. sistemul (2.6) este degenerat.*

Demonstrație. Dreapta $y - Ax - B = 0$ ($x - Ay - B = 0$) este invariantă pentru sistemul (2.6), dacă se realizează următoarea serie de condiții:

$$\begin{aligned} b &= -(A + ABf + B^2l + AB^2r)/B, & s &= -A(k + A^2l + Am + An + A^2p + q + A^3r), \\ d &= -(1 - A^2 + ABc + AB^2l + B^2n + AB^2p + A^2B^2r)/B, \\ g &= -(-A + aAB + A^2B^2l + AB^2m + AB^2n + A^2B^2p + B^2q + A^3B^2r)/B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(a &= -(A + ABg + B^2k + AB^2s)/B, & r &= -A(A^2k + l + Am + An + p + A^2q + A^3s), \right. \\ c &= -(1 - A^2 + ABd + AB^2k + B^2m + AB^2q + A^2B^2s)/B, \\ f &= -(-A + AbB + A^2B^2k + AB^2m + AB^2n + B^2p + A^2B^2q + A^3B^2s)/B \left. \right). \end{aligned}$$

Conform acestor condiții avem:

$$\begin{aligned}
X_{2d}(x) &= B(1 + Bf + B^2r) + (A + Bc + 2ABf + B^2p + 3AB^2r)x + \\
&\quad (a + Ac + A^2f + Bm + 2ABp + 3A^2Br)x^2 + (k + Am + A^2p + A^3r)x^3 \equiv 0 \\
&\Rightarrow \{a = -B(m + Ap + A^2r), c = (A - B^2p - AB^2r)/B, \\
&\quad f = -(1 + B^2r)/B, k = -A(m + Ap + A^2r)\} \Rightarrow \\
P(x, y) &= (y - Ax - B)(-y + B(m + Ap + A^2r)x^2 + B(p + Ar)xy + Bry^2)/B, \\
Q(x, y) &= (y - Ax - B)(x - B(A^2l + An + q)x^2 - B(Al + n)xy - Bry^2)/B \\
\\
(Y_{2d}(y) &= B(1 + Bg + B^2s) + (A + Bd + 2ABg + B^2q + 3AB^2s)y + \\
&\quad (b + Ad + A^2g + Bn + 2ABq + 3A^2Bs)y^2 + (l + An + A^2q + A^3s)y^3 \equiv 0 \\
&\Rightarrow \{b = -B(n + Aq + A^2s), d = (A - B^2q - AB^2s)/B, \\
&\quad g = -(1 + B^2s)/B, l = -A(n + Aq + A^2s)\} \Rightarrow \\
P(x, y) &= (x - Ay - B)(-y + Bkx^2 + B(Ak + m)xy + B(A^2k + Am + p)y^2)/B, \\
Q(x, y) &= (x - Ay - B)(x - Bsx^2 - B(q + As)xy - B(n + Aq + A^2s)y^2)/B). \square
\end{aligned}$$

Sistemul $\{(2.6), (3.7)\}$. Funcția $\kappa(x, y)$ arată astfel $\kappa(x, y) = x(sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3)$ și $P(\gamma, y) = y \neq 0$. Deci, căutăm dreapta $l_1 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$. Identitatea $(sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3)|_{y=Ax} = (A^3l + A^2n + Aq + s)x^3 \equiv 0$ se realizează, dacă $s = -(A^3l + A^2n + Aq)$. Astfel, $X_1(x) = B(A + bB + B^2l) + (1 + A^2 + 2AbB + Bd + 3AB^2l + B^2n)x + (A^2b + Ad + g + 3A^2Bl + 2ABn + Bq)x^2 \equiv 0$, dacă $\{d = (-1 + b^2B^2 + 3bB^3l + 2B^4l^2 - B^2n)/B, g = -b - Bl - b^2B^3l - 2bB^4l^2 - B^5l^3 + bB^2n + B^3ln - Bq, A = -B(b + Bl)\}$. Determinăm condițiile pentru care dreapta invariantă l_1 are multiplicitatea doi. Aici, $X_2(x) = (1 - bx - Blx)X_{21}(x)/B$, unde $X_{21}(x) = B^2(1 + b^2B^2 + 6bB^3l + 6B^4l^2 - B^2n) - 2B^2(b + b^3B^2 + 2Bl + 10b^2B^3l + 20bB^4l^2 + 11B^5l^3 - 3bB^2n - 4B^3ln + Bq)x + (1 + 2b^2B^2 + b^4B^4 + 10bB^3l + 19b^3B^5l + 8B^4l^2 + 66b^2B^6l^2 + 79bB^7l^3 + 31B^8l^4 - 2B^2n - 8b^2B^4n - 26bB^5ln - 18B^6l^2n + B^4n^2 + 3bB^3q + 5B^4lq)x^2 - 2B(1 + b^2B^2 + 5bB^3l + 4B^4l^2 - B^2n)(3b^2B^2l + 6bB^3l^2 + 3B^4l^3 - 2bBn - 2B^2ln + q)x^3 + B^2(3b^2B^2l + 6bB^3l^2 + 3B^4l^3 - 2bBn - 2B^2ln + q)^2x^4$. Identitatea $X_2(x) \equiv 0$ se verifică, dacă $X_{21}(x) \equiv 0 \Rightarrow \{l = 0, n = (1 + b^2B^2)/B^2, q = 2b(1 + b^2B^2)/B\}$ sau $\{n = (8l^2 - b^4)/(2b^2), q = (b^4 - 32l^2)/(16l), B = -b/(2l)\}$.

Pentru *Sistemul* $\{(2.6), (3.8)\}$ avem $\kappa(x, y) = x^2(sx^2 + qxy + ny^2)$ și $P(\gamma, y) = ((s + aq)y\gamma + any^2 + as\gamma^2)/s \neq 0$. Examinăm al doilea factor din $\kappa(x, y)$. Notăm $q^2 - 4ns = u^2 \Rightarrow n = (q^2 - u^2)/(4s) \Rightarrow \kappa(x, y) = x^2(2sx + qy - uy)(2sx + qy + uy)/(4s)$.

Fie $l_{1,2} \equiv 2sx + qy \mp uy + \gamma = 0$, $s\gamma(q \mp u) \neq 0$. Pentru dreptele $x = (-qy \pm uy - \gamma)/(2s)$, luăm $Y_1(y) = (\gamma(4qs \mp 4su - 2gq\gamma + 4as\gamma \pm 2gu\gamma + q\gamma^2 \mp u\gamma^2) + (4q^2s + 16s^3 \mp 8qsu + 4su^2 - 4gq^2\gamma + 4dqs\gamma \pm 8gqu\gamma \mp 8asu\gamma \mp 4dsu\gamma - 4gu^2\gamma + q^2\gamma^2 \mp 4qu\gamma^2 + 3u^2\gamma^2)y - 2(q \mp u)(gq^2 - 2dqs +$

$4bs^2 \mp 2gqu \pm 2dsu + gu^2 \pm qu\gamma - u^2\gamma)y^2)/(8s^2) \equiv 0 \Rightarrow \{a = -(q \mp u)(4s - 2g\gamma + \gamma^2)/(4s\gamma), b = (-16s^3 + 4su^2 + u^2\gamma(\gamma - 2g) - q^2(4s + \gamma(\gamma - 2g)))/(8s^2\gamma), d = gq/s + (\pm u - q)\gamma/(4s) - (q^2 + 4s^2 - u^2)/(q\gamma \mp u\gamma)\}$. În aceste condiții $X_2(x) = -1024s^7(q \mp u)\gamma^3 X_{2d}(x)\zeta_1(x)$, unde $X_{2d}(x) = -(q \mp u)\gamma(4s - 2g\gamma + \gamma^2) + 2(8s^3 \pm 4qsu - 4su^2 \mp 2gqu\gamma + 2gu^2\gamma \pm qu\gamma^2 - u^2\gamma^2)x$ și $\zeta_1(x) = 2\gamma^2(16q^2s^2 + 64s^4 \mp 16qs^2u - 4gq^2s\gamma - 16gs^3\gamma + 4gsu^2\gamma - 4q^2s\gamma^2 \pm 12qsu\gamma^2 - 8su^2\gamma^2 + gq^2\gamma^3 \mp 2gqu\gamma^3 + gu^2\gamma^3) + 2(q \mp u)\gamma(16q^2s^2 + 64s^4 \mp 32qs^2u + 16s^2u^2 - 8q^2s\gamma^2 - 16s^3\gamma^2 \pm 32qsu\gamma^2 - 24su^2\gamma^2 \mp 4gqu\gamma^3 + 4gu^2\gamma^3 + q^2\gamma^4 \mp 2qu\gamma^4 + u^2\gamma^4)x + (16q^4s^2 + 128q^2s^4 + 256s^6 \mp 64q^3s^2u \mp 256qs^4u + 96q^2s^2u^2 + 128s^4u^2 \mp 64qs^2u^3 + 16s^2u^4 - 8q^4s\gamma^2 - 32q^2s^3\gamma^2 \pm 64q^3su\gamma^2 \pm 96qs^3u\gamma^2 - 160q^2su^2\gamma^2 - 64s^3u^2\gamma^2 \pm 160qsu^3\gamma^2 - 56su^4\gamma^2 + 8gq^2u^2\gamma^3 \mp 16gqu^3\gamma^3 + 8gu^4\gamma^3 + q^4\gamma^4 \mp 12q^3u\gamma^4 + 30q^2u^2\gamma^4 \mp 28qu^3\gamma^4 + 9u^4\gamma^4)x^2 \pm 4(q \mp u)^2u\gamma(4q^2s + 16s^3 \mp 8qsu + 4su^2 - q^2\gamma^2 \pm 4qu\gamma^2 - 3u^2v^2)x^3 + 4(q \mp u)^4u^2\gamma x^4$. Dacă $X_{2d}(x) \equiv 0$, atunci sistemul (2.6) este degenerat, deci $X_{2d} \not\equiv 0$ (vezi Lemma 3.3.1). Identitatea $\zeta_1(x) \equiv 0$ ne oferă condițiile $\{u = 0, \gamma = \pm 2\sqrt{q^2s + 4s^3}/q\}$.

Sistemul $\{(2.6), (3.9)\}$. Pentru acest sistem avem $\kappa(x, y) = x^2y(qx + ny)$, $P(\gamma, y) = y(n + fny + fq\gamma)/n \not\equiv 0$ și $Q(x, \gamma) = -b\gamma^2 - (1 + d\gamma + n\gamma^2)x - (g + q\gamma)x^2 \equiv 0 \Rightarrow \{b = 0, g = -q\gamma, d = (-1 - n\gamma^2)/\gamma\}$. Conform acestor condiții polinomul $X_2(x) = \gamma(n + fqx + fn\gamma)(-n\gamma^2(1 + f\gamma)(-1 + n\gamma^2) - 2nq\gamma^3(1 + f\gamma)x + (n - 2n^2\gamma^2 - fq^2\gamma^3 + n^3\gamma^4)x^2 + 2nq\gamma(-1 + n\gamma^2)x^3 + nq^2\gamma^2x^4)/(n^2\gamma^2)$ este identic zero, dacă $\{q = 0, n = 1/\gamma^2\}$.

Fie $l_1 \equiv qx + ny + \gamma = 0$, $nq \neq 0$. Atunci $y = (-qx - \gamma)/n$ și $X_1(x) = -(\gamma(nq + bn\gamma - fq\gamma) + (n^3 + nq^2 - dn^2\gamma + 2bnq\gamma - fq^2\gamma + n^2\gamma^2)x + n(gn^2 - dnq + bq^2 + nq\gamma)x^2)/n^2 \equiv 0 \Rightarrow \{\gamma = q/g, b = (fq - gn)/n, d = (g^2n^3 - g^2nq^2 + n^2q^2 + fgq^3)/(gn^2q)\}$. Dreapta l_1 , i.e. $y = (-qx - \gamma)/n$, nu are multiplicitatea doi, după cum $X_2(x) = -q(gn - fq)(1 + gx)(q^2(g^3n^2 - fg^2nq + g^3q^2 - gnq^2 + fq^3) + 2gq^2(g^3n^2 + g^3q^2 - 2gnq^2 + fq^3)x + g(g^4n^4 + 2g^4n^2q^2 - 2g^2n^3q^2 + g^4q^4 - 5g^2nq^4 + n^2q^4 + fgq^5)x^2 - 2g^2nq^2(g^2n^2 + g^2q^2 - nq^2)x^3 + g^3n^2q^4x^4)/(g^4n^2) \not\equiv 0$.

Sistemul $\{(2.6), (3.10)\}$. Pentru acest sistem avem $\kappa(x, y) = qx^3y$. Dacă $c = 0$, atunci dreapta de la infinit are multiplicitatea patru și acest caz a fost studiat mai sus. Dacă $c \neq 0$, atunci sistemul are deja dreapta invariantă $l \equiv cx + 1 = 0$. Luând în considerare $\gcd(P, Q) = 1$, $Y_2(y) = (c - g + cdy - qy - bc^2y^2)(c - g + bc^2y^2 + c^3y^2)/c^4 \equiv 0$, dacă $\{b = -c, g = c\}$. Căutăm dreapta invariantă de forma $y - \gamma = 0$. Pentru această dreaptă multiplicitatea algebrică și multiplicitatea paralelă sunt egale. Astfel, $Q(x, \gamma) = -b\gamma^2 - (1 + d\gamma)x - (g + q\gamma)x^2 \equiv 0 \Rightarrow \{b = 0, \gamma = -1/d, q = dg\}$. În aceste condiții $Q(x, y)$ are forma: $Q(x, y) = -x(1 + gx)(1 + dy)$, și, prin urmare, dreapta invariantă $1 + dy = 0$ nu are multiplicitatea paralelă doi.

Sistemul $\{(2.6), (3.11)\}$. Funcția $\kappa(x, y)$ arată astfel: $\kappa(x, y) = y^2(nx + py)^2/n$. Dacă $y = \gamma$

atunci $Q(x, \gamma) = -\gamma^2(b + p\gamma) - (1 + d\gamma + n\gamma^2)x - gx^2 \equiv 0 \Rightarrow \{g = 0, b = -p\gamma, d = (-1 - n\gamma^2)/\gamma\}$ și în aceste condiții $X_2(x) = (-1 + n\gamma^2)(-px + n\gamma + fn\gamma^2 + p^2\gamma^3)(-x^2 - \gamma^2 + nx^2\gamma^2 - f\gamma^3 + 2px\gamma^3)/(n\gamma^2) \equiv 0 \Rightarrow n = 1/\gamma^2$.

Pentru $x = (-py - \gamma)/n$ avem $Y_1(y) = p\gamma + (n^2 + p^2)y + n(fn - bp)y^2 \neq 0$.

Sistemul $\{(2.6), (3.12)\}$ are $\kappa(x, y) = y(qx + my)(mx^2 + pxy + ry^2)/m$. Căutăm dreapta $y + \gamma = 0$. Pentru sistemul $\{(2.6), (3.12)\}$ multiplicitatea algebrică și multiplicitatea paralelă a dreptei $y + \gamma = 0$ este aceeași. Deci, $X_1(x) = q\gamma^2(f + r\gamma) + (m + cq\gamma + pq\gamma^2)x + q(a + m\gamma)x^2 \equiv 0 \Rightarrow \{f = -r\gamma, a = (c + p\gamma)q\gamma^2, m = -(c + p\gamma)q\gamma\} \Rightarrow X_2(x) = -r\gamma^2 - (c + 2p\gamma)x + q\gamma(c + p\gamma)x^2 \neq 0$.

Fie $l_1 \equiv x - Ay - B = 0, B \neq 0$ o dreaptă a sistemului $\{(2.6), (3.12)\}$. Astfel $Y_1(y) = B(Am + aBm + aABq) + (m + A^2m + 2aABm + Bcm + B^2m^2 + 2aA^2Bq + ABcq + AB^2mq)y + (aA^2 + Ac + f + 2ABm + Bp)(m + Aq)y^2 + (m + Aq)(A^2m + Ap + r)y^2)/m \equiv 0 \Rightarrow \{a = -Am/(B(m + Aq)), c = -m(1 - A^2 + B^2m + AB^2q)/(B(m + Aq)), f = -(-Am + AB^2m^2 + B^2mp + A^2B^2mq + AB^2pq)/(B(m + Aq)), r = -A(Am + p)\}$ și $Y_2(y) = (Bm + (Am - q)y)(-B^2m^2(-1 - A^2 + B^2m) + 2Bm^2(A + A^3 - 3AB^2m - B^2p - A^2B^2q)y + m(m + 2A^2m + A^4m - 2B^2m^2 - 8A^2B^2m^2 + B^4m^3 - 3AB^2mp - 6A^3B^2mq + 2AB^4m^2q + B^2pq - 2A^2B^2pq + A^2B^4mq^2)y^2 - 2Bm(2Am + p)(m + Aq)(1 + A^2 - B^2m - AB^2q)y^3 + B^2(2Am + p)^2(m + Aq)^2)/(B^2m^2(m + Aq)) \equiv 0$, dacă $\{m = 1/B^2, p = A = 0\}$.

Sistemul $\{(2.6), (3.13)\}$. În acest caz $\kappa(x, y) = y(qx + my)^2(m^2x + qry)/(m^2q)$. Dacă $y = \gamma$, atunci $X_1(x) = mqr\gamma^2(bm + qr\gamma) + (m^2qr + bm^4\gamma - fm^3q\gamma + cmq^2r\gamma + m^3qr\gamma^2 + q^3r^2\gamma^2)x + mq^2r(a + m\gamma) \equiv 0 \Rightarrow \{a = -m\gamma, b = -qr\gamma/m, f = r(m^2 + cmq\gamma + q^2r\gamma^2)/(m^3\gamma)\}$. În aceste condiții, dreapta $y = \gamma$ nu are multiplicitatea paralelă doi, deoarece $Q(x, \gamma) = -mqr\gamma^3 + (m^2 - m^3\gamma^2 - q^2r\gamma^2)x - m^2q\gamma x^2 \neq 0$.

Pentru $y = (-qx - \gamma)/m \Rightarrow X_1(x) = (-qr\gamma(mq + bm\gamma - fq\gamma) - (m^3qr + m^3q^3r - bm^4\gamma + fm^3q\gamma + 2bmq^2r\gamma - 2fq^3r\gamma)x + q(bm - fq)(m^3 - q^2r)x^2)/(m^2qr) \neq 0$ și pentru $y = (-m^2x - \gamma)/(qr)$ polinomul $X_1(x) = (-m\gamma(m^3q^2r - fm^3q\gamma + bmq^2r\gamma + m^3\gamma^2 - q^2r\gamma^2) - (m^6q^2r + m^2q^4r^3 - 2fm^6q\gamma + bm^4q^2r\gamma + cm^4q^2r\gamma + fm^3q^3r\gamma - cmq^4r^2\gamma + 2m^6\gamma^2 - 3m^3q^2r\gamma^2 + q^4r^2\gamma^2)x + m(m^3 - q^2r)(fm^4q - cm^2q^2r + aq^3r^2 - m^4\gamma + mq^2r\gamma)x^2)/(m^2q^3r^2) \equiv 0$, dacă $\{\gamma = -m^3qr/(a(m^3 - q^2r)), b = (a^2m^3 + afm^3 + m^3r - a^2q^2r)/(amqr), c = (afm^4 + m^4r + a^2q^2r^2)/(am^2qr)\}$. În acest caz $X_2(x) = -(-m^2qr(a^2m^6 + afm^6 + m^6r - 2a^2m^3q^2r - afm^3q^2r + a^2q^4r^2) + a(m^3 - q^2r)(a^2m^7 + afm^7 + m^7r - 2a^2m^4q^2r - afm^4q^2r - a^2m^3q^2r^2 + a^2mq^4r^2 + a^2q^4r^3)x)(m^6q^4r^2(a^3m^7 - 3am^7r - fm^7r - a^3m^4q^2r + 2a^3m^3q^2r^2 + a^2fm^3q^2r^2 + am^4q^2r^2 - a^3q^4r^3) - 2m^5q^3r(m^3 - q^2r)(a^4m^7 - 4a^2m^7r - afm^7r - a^4m^4q^2r + m^7r^2 + a^4m^3q^2r^2 + 2a^2m^4q^2r^2 - a^2m^3q^2r^3 - a^4q^4r^3)x + aq^2(m^3 -$

$q^2r)^2(a^4m^11 - 7a^2m^11r - afm^11r - a^4m^8q^2r + 5m^11r^2 + 2a^4m^7q^2r^2 + 5a^2m^8q^2r^2 - 3a^2m^7q^2r^3 - m^8q^2r^3 - 2a^4m^4q^4r^3 + a^4m^3q^4r^4 + 2a^2m^4q^4r^4 - a^4q^6r^5)x^2 + 2a^2m^3q(m^3 - q^2r)^3(a^2m^7 - 2m^7r - a^2m^4q^2r + a^2m^3q^2r^2 + m^4q^2r^2 - a^2q^4r^3)x^3 + a^3m^6(m^3 - q^2r)^5x^4)/(a^7m^5q^8r^6(m^3 - q^2r)^5)$ nu este echivalent cu zero.

Sistemul $\{(2.6), (3.14)\}$. Avem $\kappa(x, y) = xy(qx + my)^2/q$ și $P(\gamma, y) = a\gamma^2 + (1 + c\gamma + m\gamma^2)y + (fq + m^2\gamma)y^2/q \equiv 0 \Rightarrow \{a = 0, f = -m^2\gamma/q, c = (-1 - m\gamma^2)/\gamma\}$. Conform acestor condiții $P(x, y) = y(x - \gamma)(-q + mqx\gamma + m^2y\gamma)/(q\gamma)$ și dreapta $x - \gamma = 0$ nu are multiplicitatea paralelă doi. Dacă $y = \gamma$, atunci $Q(x, \gamma) = -(fq\gamma^2 + m(1 + d\gamma + m\gamma^2)x + q(a + m\gamma)x^2)/m \equiv 0 \Rightarrow \{f = 0, a = -m\gamma, d = (-1 - m\gamma^2)/\gamma\} \Rightarrow Q(x, y) = -x(y - \gamma)(-1 + qx\gamma + my\gamma)/\gamma$, de unde observăm că dreapta invariantă $y - \gamma = 0$ nu are multiplicitatea paralelă doi. *Sistemul* $\{(2.6), (3.14)\}$ nu are drepte invariante de forma $qx + my + \gamma = 0$, $qm\gamma \neq 0$, deoarece $X_1(x) = (-q\gamma - (m^2 + q^2 - dm\gamma + cq\gamma)x + q(dm - cq)x^2)/m \neq 0$.

Pentru *Sistemul* $\{(2.6), (3.15)\}$ avem $\kappa(x, y) = (sx + ky)(kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3)/k$ și $X_1(x) = -(k^2x + s^2x + s\gamma)/k \neq 0$, dacă $y = (-sx - \gamma)/k$.

Fie $l_1 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \neq 0$. Identitatea $(kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3)|_{y=Ax+B} = (k + Am + A^2p + A^3r)x^3 \equiv 0$ se îndeplinește dacă $k = -A(m + Ap + A^2r)$. Astfel $X_1(x) = (-B(A^2m + A^2Bfm + A^3p + A^3Bfp + A^4r + A^4Bfr + A^2B^2mr + A^3B^2pr + A^4B^2r^2 - Bfs - B^2rs) - (Am + A^3m + A^2Bcm + 2A^3Bfm + A^2p + A^4p + A^3Bcp + 2A^4Bfp + A^2B^2mp + A^3B^2p^2 + A^3r + A^5r + A^4Bcr + 2A^5Bfr + 3A^3B^2mr + 4A^4B^2pr + 3A^5B^2r^2 - Bcs - 2ABfs - B^2ps - 3AB^2rs)x - (a + Ac + A^2f + Bm + 2ABp + 3A^2Br)(A^2m + A^3p + A^4r - s)x^2)/(A(m + Ap + A^2r)) \equiv 0$ dacă $\{a = (m + Ap + A^2r)(A^2 - A^2B^2m - A^3B^2p - A^4B^2r + B^2s)/(B(A^2m + A^3p + A^4r - s)), c = (A(m + Ap + A^2r)(1 + AB^2p + A^2(B^2r - 1)) + B^2(p + Ar)s)/(Bs - A^2B(m + Ap + A^2r)), f = (A^2(1 + B^2r)(m + Ap + A^2r) + B^2rs)/(Bs - A^2B(m + Ap + A^2r))\}$. Polinomul $X_2(x) = (Bs + (Am + A^2p + A^3r + As)x)X_{21}(x)/(A^2B^2(m + Ap + A^2r)^2(A^2m + A^3p + A^4r - s))$, unde $X_{21}(x) = B^2(A^2m^2 + A^4m^2 + 2A^3mp + 2A^5mp + A^4p^2 + A^6p^2 + 2A^4mr + 2A^6mr - A^2B^2m^2r - 2A^4B^2m^2r + 2A^5pr + 2A^7pr - 2A^3B^2mpr - 4A^5B^2mpr - A^4B^2p^2r - 2A^6B^2p^2r + A^6r^2 + A^8r^2 - 2A^4B^2mr^2 - 4A^6B^2mr^2 + A^4B^4m^2r^2 - 2A^5B^2pr^2 - 4A^7B^2pr^2 + 2A^5B^4mpr^2 + A^6B^4p^2r^2 - A^6B^2r^3 - 2A^8B^2r^3 + 2A^6B^4mr^3 + 2A^7B^4pr^3 + A^8B^4r^4 + AB^2mps + A^2B^2p^2s + 4A^2B^2mrs + 5A^3B^2prs + 4A^4B^2r^2s - 2A^2B^4mr^2s - 2A^3B^4pr^2s - 2A^4B^4r^3s + B^4r^2s^2) + 2B(A^3m^2 + A^5m^2 + 2A^4mp + 2A^6mp - A^4B^2m^2p + A^5p^2 + A^7p^2 - 2A^5B^2mp^2 - A^6B^2p^3 + 2A^5mr + 2A^7mr - A^3B^2m^2r - 4A^5B^2m^2r + 2A^6pr + 2A^8pr - 2A^4B^2mpr - 10A^6B^2mpr + A^4B^4m^2pr - A^5B^2p^2r - 6A^7B^2p^2r + 2A^5B^4mp^2r + A^6B^4p^3r + A^7r^2 + A^9r^2 - 2A^5B^2mr^2 - 8A^7B^2mr^2 + 3A^5B^4m^2r^2 - 2A^6B^2pr^2 -$

$9A^8B^2pr^2 + 8A^6B^4mpr^2 + 5A^7B^4p^2r^2 - A^7B^2r^3 - 4A^9B^2r^3 + 6A^7B^4mr^3 + 7A^8B^4pr^3 + 3A^9B^4r^4 +$
 $AB^2m^2s + 4A^2B^2mps + 3A^3B^2p^2s + AB^2mrs + 8A^3B^2mrs + A^2B^2prs + 10A^4B^2prs - 2A^2B^4mprs -$
 $2A^3B^4p^2rs + A^3B^2r^2s + 7A^5B^2r^2s - 6A^3B^4mr^2s - 8A^4B^4pr^2s - 6A^5B^4r^3s + B^4prs^2 + 3AB^4r^2s^2)x +$
 $(A^2m^2 + 2A^4m^2 + A^6m^2 + A^2B^2m^3 - 2A^4B^2m^3 + 2A^3mp + 4A^5mp + 2A^7mp + 2A^3B^2m^2p -$
 $10A^5B^2m^2p + A^4p^2 + 2A^6p^2 + A^8p^2 + A^4B^2mp^2 - 14A^6B^2mp^2 + A^4B^4m^2p^2 - 6A^7B^2p^3 + 2A^5B^4mp^3 +$
 $A^6B^4p^4 + 2A^4mr + 4A^6mr + 2A^8mr - A^4B^2m^2r - 16A^6B^2m^2r + 2A^4B^4m^3r + 2A^5pr + 4A^7pr +$
 $2A^9pr - 4A^5B^2mpr - 40A^7B^2mpr + 14A^5B^4m^2pr - 3A^6B^2p^2r - 24A^8B^2p^2r + 24A^6B^4mp^2r +$
 $12A^7B^4p^3r + A^6r^2 + 2A^8r^2 + A^{10}r^2 - 5A^6B^2mr^2 - 26A^8B^2mr^2 + 19A^6B^4m^2r^2 - 6A^7B^2pr^2 -$
 $30A^9B^2pr^2 + 54A^7B^4mpr^2 + 36A^8B^4p^2r^2 - 3A^8B^2r^3 - 12A^{10}B^2r^3 + 32A^8B^4mr^3 + 40A^9B^4pr^3 +$
 $15A^{10}B^4r^4 + 3A^2B^2m^2s + 2AB^2mps + 11A^3B^2mps + 2A^2B^2p^2s + 8A^4B^2p^2s - 2A^2B^4mp^2s -$
 $2A^3B^4p^3s + 6A^2B^2mrs + 18A^4B^2mrs - 4A^2B^4m^2rs + 8A^3B^2prs + 23A^5B^2prs - 24A^3B^4mprs -$
 $22A^4B^4p^2rs + 6A^4B^2r^2s + 15A^6B^2r^2s - 34A^4B^4mr^2s - 50A^5B^4pr^2s - 30A^6B^4r^3s + B^4p^2s^2 +$
 $2B^4mrs^2 + 10AB^4prs^2 + 15A^2B^4r^2s^2)x^2 + 2B(m + 2Ap + 3A^2r)(A^2m + A^3p + A^4r - s)(-Am -$
 $A^3m - A^2p - A^4p + A^2B^2mp + A^3B^2p^2 - A^3r - A^5r + 3A^3B^2mr + 4A^4B^2pr + 3A^5B^2r^2 - B^2ps -$
 $3AB^2rs)x^3 + B^2(m + 2Ap + 3A^2r)^2(A^2m + A^3p + A^4r - s)^2x^4$. Identitatea $X_2(x) \equiv 0$ implică
 $X_{21}(x) \equiv 0 \Rightarrow \{m = (A^2 - 2)r, p = (r - 2A^2r)/A, s = -A^2(B^2r - 1)/B^2\}$ sau $\{p = -3A(1 +$
 $A^2)u^2 \pm (1 + A^2)u/B, r = u^2(1 + A^2)\}$, unde u este un parametru.

Sistemul $\{(2.6), (3.16)\}$ are $\kappa(x, y) = (sx + ky)^2(k^3x^2 + kpsxy - rs^2xy + krsy^2)/(sk^3)$. Din
 $ks \neq 0$ rezultă că sistemul poate avea o dreaptă invariantă de forma $y - Ax - B = 0$, $B \neq 0$.
 Pentru aceasta este necesar ca $X_1(x) = (Bks(Ak^3 + ABfk^3 + AB^2k^3r + Bfk^2s + Bgkrs +$
 $B^2k^2rs - aBrs^2) + s(k^4 + A^2k^4 + ABck^4 + 2A^2Bfk^4 + AB^2k^4p + 3A^2B^2k^4r + Bck^3s + 2ABfk^3s +$
 $Bgk^2ps + B^2k^3ps + 2ABgk^2rs + 3AB^2k^3rs - aBkps^2 - 2aABkrs^2 - Bgkrs^2 + aBrs^3)x + (ABk^6 +$
 $aAk^4s + A^2ck^4s + A^3fk^4s + gk^4s + Bk^5s + 2A^2Bk^4ps + 3A^3Bk^4rs + Ack^3s^2 + A^2fk^3s^2 + Agk^2ps^2 +$
 $3ABk^3ps^2 + A^2gk^2rs^2 + 3A^2Bk^3rs^2 - aAkps^3 + Bk^2ps^3 - aA^2krs^3 - Agkrs^3 - ABk^2rs^3 + aArs^4 -$
 $Bkrs^4)x^2 + k(Ak + s)^2(k^3 + Akps + A^2krs - Ars^2)x^3)/(k^4s) \equiv 0 \Rightarrow A \neq 0$ și două serii de
 condiții:

$$g = s(aB - 1)/(Bk), \quad p = k(k^2 - 2s^2)/s^2, \quad r = -k^2/s; \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
 c = & -(1/(A^2Bk^2s(Ak + s)))(-A^2B^2k^5 - A^4k^3s + aA^2Bk^3s - 2AB^2k^4s \\
 & + aABk^2s^2 - B^2k^3s^2 - A^4krs^2 + aA^4Bkrs^2 + aA^3Brs^3), \\
 f = & -(1/(ABk^2(Ak + s)))(A^2k^3 + A^2B^2k^3r + A^2krs - aA^2Bkrs \\
 & + 2AB^2k^2rs - aABrs^2 + B^2krs^2), \\
 g = & (A^2 - aA^2B + AB^2k + B^2s)/(AB), \quad p = -((k^3 + A^2krs - Ars^2)/(Aks)).
 \end{aligned} \quad (3.55)$$

În condițiile (3.54) $A = -s/k$, $X_2(x) = -X_{2d}(x)X_{22}(x)/(B^2k^6s^2)$, unde

$X_{2d}(x) = Bk^2s(B^2k^2 - s - Bfs) - k(B^2k^4 + Bcks^2 + B^2k^2s^2 - s^3 - 2Bfs^3)x - s^2(ak^2 - cks + fs^2)x^2$ și $X_{22}(x) = B^2k^2(k^2 + Bfk^2 + Bcks + s^2 - Bfs^2) + (aBk^2 - k^2 - Bcks - s^2 + Bfs^2)x(2Bks - (k^2 + s^2)x)$. Dacă $X_{2d}(x) \equiv 0$, atunci sistemul cubic este degenerat, iar dacă $X_{22}(x) \equiv 0$, atunci $\{a = -f, \quad c = (Bfs^2 - k^2 - Bfk^2 - s^2)/(Bks)\}$.

În condițiile (3.55) $X_2(x) = -X_{2d}(x)X_{22}(x)/(A^5B^2k^6s^2(Ak + s)^2)$, unde

$X_{2d}(x) = ABs(Ak(k - Ar) + B(aA - Bk)r(Ak + s)) + (A^3k(Ar - k)s + B(aA - Bk)(Ak + s)(A^2rs - k^2))x$ și

$X_{22}(x) = A^2B^2s^2(A^4k^5 + aA^2Bk^5 - A^2B^2k^5r - 2A^4B^2k^5r + A^4B^4k^5r^2 + Ak^4s + A^3k^4s + aABk^4s - A^2k^3rs + aA^2Bk^3rs - 2AB^2k^4rs - 5A^3B^2k^4rs + A^4B^2k^3r^2s - aA^4B^3k^3r^2s + 4A^3B^4k^4r^2s + aABk^2rs^2 - B^2k^3rs^2 - 4A^2B^2k^3rs^2 + 2A^3B^2k^2r^2s^2 - 3aA^3B^3k^2r^2s^2 + 6A^2B^4k^3r^2s^2 - AB^2k^2rs^3 + A^2B^2kr^2s^3 - 3aA^2B^3kr^2s^3 + 4AB^4k^2r^2s^3 - aAB^3r^2s^4 + B^4kr^2s^4) + 2ABs(Ak + s)(A^3B^2k^6 - A^3B^4k^6r + A^3k^4s + A^5k^4s + 2A^2B^2k^5s - 2A^3B^2k^4rs - 3A^5B^2k^4rs + aA^3B^3k^4rs - 3A^2B^4k^5rs + 2A^5B^4k^4r^2s + AB^2k^4s^2 - 2A^2B^2k^3rs^2 - 5A^4B^2k^3rs^2 + 2aA^2B^3k^3rs^2 - 3AB^4k^4rs^2 + A^5B^2k^2r^2s^2 - aA^5B^3k^2r^2s^2 + 6A^4B^4k^3r^2s^2 - 2A^3B^2k^2rs^3 + aAB^3k^2rs^3 - B^4k^3rs^3 + A^4B^2kr^2s^3 - 2aA^4B^3kr^2s^3 + 6A^3B^4k^2r^2s^3 - aA^3B^3r^2s^4 + 2A^2B^4kr^2s^4)x + (Ak + s)(A^3B^4k^8 + 2A^3B^2k^6s + 4A^5B^2k^6s - aA^3B^3k^6s + 3A^2B^4k^7s - 6A^5B^4k^6rs + A^3k^4s^2 + 2A^5k^4s^2 + A^7k^4s^2 + 2A^2B^2k^5s^2 + 7A^4B^2k^5s^2 - 2aA^2B^3k^5s^2 + 3AB^4k^6s^2 - 5A^5B^2k^4rs^2 - 6A^7B^2k^4rs^2 + 2aA^5B^3k^4rs^2 - 18A^4B^4k^5rs^2 + 6A^7B^4k^4r^2s^2 + 3A^3B^2k^4s^3 - aAB^3k^4s^3 + B^4k^5s^3 - 7A^4B^2k^3rs^3 - 11A^6B^2k^3rs^3 + 4aA^4B^3k^3rs^3 - 18A^3B^4k^4rs^3 + A^7B^2k^2r^2s^3 - aA^7B^3k^2r^2s^3 + 19A^6B^4k^3r^2s^3 - 2A^3B^2k^2rs^4 - 5A^5B^2k^2rs^4 + 2aA^3B^3k^2rs^4 - 6A^2B^4k^3rs^4 + A^6B^2kr^2s^4 - 2aA^6B^3kr^2s^4 + 21A^5B^4k^2r^2s^4 - aA^5B^3r^2s^5 + 9A^4B^4kr^2s^5 + A^3B^4r^2s^6)x^2 + 2AB(Ak + s)^3(-k^2 + A^2rs)(-AB^2k^4 - Ak^2s - A^3k^2s - B^2k^3s + 2A^3B^2k^2rs + 3A^2B^2krs^2 + AB^2rs^3)x^3 + AB^2(Ak + s)^5(-k^2 + A^2rs)^2x^4.$

Dacă $X_{2d}(x) \equiv 0$, atunci sistemul cubic este degenerat, iar dacă $X_{22}(x) \equiv 0$, atunci $\{r = k^2/(A^2s), \quad A^2B^2k^2 - A^2s - A^4s + 2AB^2ks + B^2s^2 = 0\}$.

În așa mod, am demonstrat următoarea leamnă:

Lema 3.3.2. *Sistemele (2.6) au o dreaptă invariantă reală afină de multiplicitatea doi și dreapta de la infinit $Z = 0$ de multiplicitatea cel puțin trei, dacă și numai dacă se îndeplinește una dintre următoarele treisprezece serii de condiții:*

$$\begin{aligned} a = c = f = k = l = m = p = r = 0, \quad d = -2/B, \quad g = -b(2 + b^2B^2), \\ n = (1 + b^2B^2)/B^2, \quad q = 2b(1 + b^2B^2)/B, \quad s = b^2(1 + b^2B^2); \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$a = c = f = k = m = p = r = 0, \quad d = -(b^4 - 16l^2)/(4bl), \quad (3.57)$$

$$g = -b, \quad n = -(b^4 - 8l^2)/(2b^2), \quad q = (b^4 - 32l^2)/(16l), \quad s = b^2/4;$$

$$a = (\pm 2q^2s \pm 4s^3 + gq\sqrt{s(q^2 + 4s^2)})/(2s\sqrt{s(q^2 + 4s^2)}),$$

$$b = q(\pm 2q^2s \pm 8s^3 + gq\sqrt{s(q^2 + 4s^2)})/(4s^2\sqrt{s(q^2 + 4s^2)}),$$

$$c = q(\pm 2q^2s \pm 4s^3 + gq\sqrt{s(q^2 + 4s^2)})/(2s^2\sqrt{s(q^2 + 4s^2)}), \quad (3.58)$$

$$d = (\pm q^2s \pm 4s^3 + gq\sqrt{s(q^2 + 4s^2)})/(s\sqrt{s(q^2 + 4s^2)}),$$

$$f = q^2(\pm 2q^2s \pm 4s^3 + gq\sqrt{s(q^2 + 4s^2)})/(8s^3\sqrt{s(q^2 + 4s^2)}),$$

$$n = q^2/(4s), \quad k = l = m = p = r = 0;$$

$$a = b = c = 0, \quad d = -2/\gamma, \quad n = 1/\gamma^2, \quad g = k = l = m = p = q = r = s = 0; \quad (3.59)$$

$$a = f = k = l = m = n = p = r = s = 0, \quad b = -c, \quad g = c, \quad q \neq 0; \quad (3.60)$$

$$a = 0, \quad b = -p\gamma, \quad c = -2p\gamma, \quad d = -2/\gamma, \quad g = k = 0, \quad n = 1/\gamma^2, \quad (3.61)$$

$$l = p, \quad m = q = 0, \quad r = p^2\gamma^2, \quad s = 0;$$

$$a = b = 0, \quad c = -2/B, \quad d = -2Bq, \quad f = g = 0, \quad (3.62)$$

$$k = l = 0, \quad m = 1/B^2, \quad n = p = r = s = 0, \quad q \neq 0;$$

$$a = 2Br, \quad b = 2A(B^2r - 1)/B, \quad c = 2(A^2 - 1)Br/A,$$

$$d = 2(1 - A^2)(B^2r - 1)/B, \quad f = -2Br, \quad m = (A^2 - 2)r,$$

$$g = 2A(1 - B^2r)/B, \quad k = Ar, \quad l = A(1 - B^2r)/B^2, \quad (3.63)$$

$$n = (2A^2 - 1)(B^2r - 1)/B^2, \quad p = (1 - 2A^2)r/A,$$

$$q = A(2 - A^2)(B^2r - 1)/B^2, \quad s = A^2(1 - B^2r)/B^2;$$

$$a = -Au(ABu + A^3Bu \pm A^2 \pm 2), \quad b = (ABu \pm 1)(Bu + A^2Bu \mp A)/B,$$

$$c = 2u(ABu + A^3Bu \pm 1), \quad d = -2(ABu \pm 1)(ABu + A^3Bu \pm 1)/B,$$

$$f = -u(Bu + A^2Bu \mp A), \quad g = A(ABu \pm 1)(ABu + A^3Bu \pm 2 \pm A^2)/B,$$

$$k = -A^2(1 + A^2)u(ABu \pm 1)/B, \quad l = -(1 + A^2)u(ABu \pm 1)/B, \quad (3.64)$$

$$m = A(1 + A^2)u(3ABu \pm 2)/B, \quad n = (1 + A^2)(ABu \pm 1)(3ABu \pm 1)/B^2,$$

$$p = -(1 + A^2)u(3ABu \pm 1)/B, \quad q = -A(1 + A^2)(ABu \pm 1)(3ABu \pm 2)/B^2,$$

$$r = u^2(1 + A^2), \quad s = A^2(1 + A^2)(ABu \pm 1)^2/B^2;$$

$$a = -f, \quad b = -g = s(1 + Bf)/(Bk), \quad c = (Bfs^2 - k^2 - Bfk^2 - s^2)/(Bks),$$

$$d = (Bfs^2 - 2k^2 - Bfk^2)/(Bk^2), \quad l = -k, \quad m = (2k^2 - s^2)/s, \quad (3.65)$$

$$n = (k^2 - 2s^2)/s, \quad p = k(k^2 - 2s^2)/s^2, \quad q = (2k^2 - s^2)/k, \quad r = -k^2/s;$$

$$\begin{aligned}
b &= (Ak - aABk - A^2s - aBs)/(AB(Ak + s)), \\
c &= 2(Ak + A^3k - aABk - aBs)/(AB(Ak + s)), \\
d &= 2(aB - 1)/B, f = (aABk + aBs - 2Ak - 2A^3k)/(A^2B(Ak + s)), \\
g &= (A^2 - aA^2B + AB^2k + B^2s)/(AB), l = k/A^2, m = k(Ak - 2s)/(As), \\
n &= (s - 2Ak)/A^2, p = k(s - 2Ak)/(A^2s), q = (Ak - 2s)/A, \\
r &= k^2/(A^2s), A^2B^2k^2 - A^2s - A^4s + 2AB^2ks + B^2s^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

3.3.1. Integrabilitatea sistemelor cubice $\{(2.6), (3.56)\}$ - $\{(2.6), (3.66)\}$.

Sistemele $\{(2.6), (3.56)\}$, $\{(2.6), (3.58)\}$ sunt integrabile și au, respectiv, următorii factori integranți:

$$\begin{aligned}
\mu(x, y) &= 1/(-B + bBx + y)^2, \\
\mu(x, y) &= 1/(2\sqrt{s(q^2 + 4s^2)} \pm 2qsx \pm q^2y)^2.
\end{aligned}$$

Sistemele $\{(2.6), (3.63)\}$, $\{(2.6), (3.64)\}$ și $\{(2.6), (3.66)\}$ au factorul integrant

$$\mu(x, y) = 1/(-B - Ax + y)^2,$$

iar Sistemele $\{(2.6), (3.59)\}$ și $\{(2.6), (3.61)\}$ au factorul integrant

$$\mu(x, y) = 1/(y - \gamma)^2,$$

și pentru aceste sisteme, punctul critic $(0, 0)$ este de tip centru.

Pentru Sistemul $\{(2.6), (3.57)\}$ ($\{(2.6), (3.65)\}$) prima mărime Lyapunov $L_1 = -(b^4 + 16l^2)/(64l)$ ($L_1 = (k^2 + s^2)^2/(4ks^2)$) nu este egală cu zero și de aceea $\{(2.6), (3.57)\}$ ($\{(2.6), (3.65)\}$) are focar în $(0, 0)$.

Sistemele $\{(2.6), (3.60)\}$ și $\{(2.6), (3.62)\}$ au prima mărime Lyapunov $L_1 = -q/4, q \neq 0$ care este diferită de zero.

Astfel, am demonstrat:

Teorema 3.3.1. *Fie sistemul diferențial cubic (2.6) are dreapta de la infinit de multiplicitatea algebrică cel puțin trei și o dreaptă invariantă afină reală l_1 de multiplicitatea doi. Atunci, pentru acest sistem originea de coordonate $(0, 0)$ este punct critic de tip centru, dacă și numai dacă el are factor integrant de forma $\mu(x, y) = 1/l_1^2$.*

3.4. Sistemele cubice (2.6) ce au dreapta de la infinit și o dreaptă reală afină invariantă l_1 de multiplicitățile $m(l_\infty) \geq 2$, $m(l_1) \geq 3$.

Sistemele, enunțate în titlul secțiunii, se obțin din sistemele din Lema 3.3.2 cu ajutorul transformării $X = x/l_1$, $Y = y/l_1$.

De exemplu, sistemul $\{(2.6), (3.56)\}$ are $l_1 = -B + bBx + y$ și transformarea $X = x/(-B + bBx + y)$, $Y = y/(-B + bBx + y)$, reduce $\{(2.6), (3.56)\}$ la sistemul

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y + X^2 - 3bBXY - 2Y^2 + b^3B^3X^3 + 3b^2B^2X^2Y + 3bBXY^2 + Y^3, \\ \dot{Y} &= -X(1 + b^3B^3X - Y),\end{aligned}$$

pentru care infinitul are multiplicitatea doi, iar dreapta afină invariantă $bBX + Y - 1 = 0$ e de multiplicitatea trei.

În cazul $m(Z) \geq 2$, $m(l_1) \geq 3$ (Figura 3.1 d)) are loc:

Teorema 3.4.1. *Sistemul diferențial cubic (2.6), pentru care dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică nu mai mică ca doi, iar dreapta invariantă afină l_1 e de multiplicitatea trei, are centru în originea de coordonate $(0,0)$, dacă și numai dacă el are factor integrant de forma $\mu(x, y) = 1/l_1^3$.*

3.5. Sistemele cubice cu focar fin și două drepte invariante afine l_1 , l_2 , pentru care $m(l_1) + m(l_2) + m(l_\infty) \geq 5$.

Considerăm sistemul cubic (2.8) pentru care dreapta $x - 1 = 0$ este invariantă. Ea are multiplicitatea algebrică cel puțin doi, dacă se realizează condițiile (2.9)-(2.12).

3.5.1. Dreptele l_1 și l_2 sunt reale și paralele.

Fie $l_1, l_2 \in \mathbb{R}[x, y]$, $l_1 \parallel l_2$. Considerăm $l_1 = x - 1$, iar $l_2 = x - \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\alpha \neq 0; 1$. Dreapta l_2 este invariată pentru sistemul (2.8), dacă se îndeplinește condiția (2.31).

Cazul $m(l_1) = 1$, $m(l_2) = 1$.

Lema 3.5.1. *Sistemul cubic (2.6) are două drepte invariante reale distincte și paralele $l_1 = x - 1$, $l_2 = x - \alpha$, $\alpha \neq \{0, 1\}$, $m(l_1) + m(l_2) = 2$ și dreapta de la infinit $Z = 0$ de multiplicitatea cel puțin 3, dacă și numai dacă, se îndeplinește una dintre următoarele două serii de condiții:*

$$\begin{aligned}a = b = g = f = 0, \quad d = -cq/(c + 1), \quad \alpha = -1/(c + 1), \\ m = -c - 1, \quad k = l = n = p = r = s = 0, \quad c \neq -2, \quad q \neq 0;\end{aligned}\tag{3.67}$$

$$a = b = d = f = 0, \alpha = -1/(c+1), m = -c-1, k = l = n = p = q = r = s = 0, c \neq -2. \quad (3.68)$$

Demonstrație. Pentru sistemul (2.8) cu condițiile (2.31), ce are deja dreptele invariante $l_1 = x - 1$ și $l_2 = (c+1)x + 1$, vom rezolva identitățile $\{C_0(x, y) \equiv 0, C_1(x, y) \equiv 0\}$ luând în cosiderare că polinomul $\kappa(x, y) \neq 0$.

Polinoamele $\kappa(x, y)$ și $C_0(x, y)$ arată astfel: $\kappa(x, y) = x(sx^3 + qx^2y - (1+c)xy^2 + nxy^2 + ly^3)$, $C_0(x, y) = (1+c)x\kappa(x, y)(sx^3 - nxy^2 - 2ly^3)$. Prin urmare, $C_0(x, y) \equiv 0$, dacă $s = n = l = 0$. În aceste condiții $C_1(x, y)$ capătă forma $C_1(x, y) = (1+c)x^3y(gqx^3 + (d+cd-bq+cq)xy^2 + 2b(1+c)y^3)$. Identitatea $C_1(x, y) \equiv 0$ are loc, dacă:

$$1) b = g = 0, d = -cq/(c+1), q \neq 0 \Rightarrow (3.67);$$

$$2) b = d = q = 0 \Rightarrow (3.68). \quad \square$$

Sistemele $\{(2.6), (3.67)\}$ și $\{(2.6), (3.68)\}$ au dreptele invariante paralele $l_1 \equiv x - 1 = 0$ și $l_2 \equiv (c+1)x + 1 = 0$.

$$\text{Cazul } m(l_1) = 2, m(l_2) = 1.$$

În fiecare serie de condiții (2.9), (2.11) și (2.12) sistemul cubic (2.8) are $P(\alpha, y) = y(-1 + \alpha)^2 \neq 0$, $P(\alpha, y) = -y(-1 + \alpha)(1 + fy + \alpha + c\alpha) \neq 0$ și $P(\alpha, y) = -(-1 + \alpha)((1 + \alpha + c\alpha)y + fy^2 + a\alpha^2) \neq 0$, respectiv. Prin urmare, dreapta reală $l_2 = x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0; 1$ nu este invariantă pentru sistemul dat.

În cazul Condițiilor (2.10) sistemul cubic (2.8) are deja dreapta invariantă reală $(1+c)x + 1 = 0$. Luând în cosiderare $\kappa(x, y) = -x^2(x^2 + gx^2 - qxy - y^2 + by^2) \neq 0$, polinomul $C_0(x, y) = (1+c)x^4((1+g)x^2 - qxy(b-1)y^2)((1+g)x^2 + (2-b+c)y^2) \equiv 0$ pentru $\{g = -1; c = b-2; b \neq 0\}$.

Astfel, are loc

Lema 3.5.2. *Sistemul cubic (2.6) are două drepte invariante reale paralele $m(l_1) = 2, m(l_2) = 1$, și dreapta de la infinit $Z = 0$ de multiplicitatea cel puțin doi, dacă și numai dacă se îndeplinește următoarea serie de condiții:*

$$a = f = l = 0, c = b-2, g = -1, m = -b+1, k = n = p = r = s = 0, b \neq 0. \quad (3.69)$$

Sistemul $\{(2.6), (3.69)\}$ are dreapta invariantă $l_1 \equiv x - 1 = 0$ de multiplicitate algebrică doi și dreapta invariantă $l_2 \equiv 1 + (b-1)x = 0$ de multiplicitate algebrică unu.

3.5.2. Dreptele l_1 și l_2 sunt reale și concurente.

$$\text{Cazul } m(l_1) = 1, m(l_2) = 1.$$

Sistemele ce verifică acestui caz se obțin din sistemele din Lema 2.3.3 prin aplicația transformării (3.52). Astfel, luând, de exemplu, sistemul (2.35), transformarea (3.52) îl reduce la sistemul

$$\dot{X} = (1 - X)Y, \quad \dot{Y} = -X(2X + gX - 1)(dY - 1),$$

pentru care infinitul e de multiplicitatea trei, iar dreptele invariante afine $l_1 = X - 1$ și $l_2 = dY - 1$ au ambele multiplicitatea unu.

Cazul $m(l_1) = 2, m(l_2) = 1$.

Pentru obținerea sistemelor de configurația cazului dat vom apela la Lema 2.3.4 și transformarea (3.52). Ilustrăm cele spuse pe baza exemplului (2.39). Transformarea (3.52) reduce (2.39) la sistemul

$$\dot{X} = Y(1 - X), \quad \dot{Y} = -(B^2X - B\alpha(1 + \beta)X^2 - 2BXY - \alpha^2\beta X^3 + 2\alpha\beta X^2Y - B\alpha Y^2 - \beta XY^2)/B^2,$$

unde $\alpha = A + B, \beta = 1 + A^2 + AB$. Sistemul dat are infinitul de multiplicitatea doi, dreapta invariantă $X - 1 = 0$ de multiplicitatea unu, iar dreapta invariantă $(A + B)X - Y - B = 0$ de multiplicitatea doi.

3.5.3. *Dreptele l_1 și $l_2, l_2 = \bar{l}_1$ sunt complexe și paralele.*

Considerăm sistemul (2.46) ce are dreapta invariantă $l_1 = x - \alpha - i$, i.e. pentru care au loc condițiile: $a = f = k = p = r = 0, c = -2\alpha/(\alpha^2 + 1), m = 1/(\alpha^2 + 1)$.

Sistemul omogenizat al sistemului (2.46) are polinomul $C_0(x, y)$ de forma: $C_0(x, y) = -(x^2 + \alpha^2)(s^2(1 + \alpha^2)x^6 + qs(1 + \alpha^2)x^5y + sx^4y^2 - (nq + ls)(1 + \alpha^2)x^3y^3 + 3sx^2y^2\alpha^2 + 2qxy^3\alpha^2 - (n + n^2 + 2lq + n^2\alpha^2 + 2lq\alpha^2)x^2y^4 + ny^4\alpha^2 - l(2 + 3n + 3n\alpha^2)xy^5 - 2l^2(1 + \alpha^2)y^6)/(1 + \alpha^2)^2$. Luând în considerare $\kappa(x, y) = x(sx^3 + qx^2y + xy^2 + nxy^2 + ly^3 + (sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3)\alpha^2/(1 + \alpha^2)) \neq 0$, identitatea $C_0(x, y) \equiv 0$ are loc dacă:

$$1) \ l = n = s = \alpha = 0; \quad 2) \ l = n = q = s = 0.$$

În condițiile 1) avem $C_1(x, y) = -x^3y(gqx^3 - (d + bq)xy^2 - 2by^3)$, care este echivalent cu zero, dacă $\{b = d = q = 0\}$ sau $\{b = d = g = 0\}$.

În cazul condițiilor 2), $C_1(x, y) = y^2(x^2 + \alpha^2)(dx^2y + 2bxy^2 - 2gx\alpha^2 - dy\alpha^2)/(1 + \alpha^2)^2 \equiv 0 \Rightarrow \{b = d = g = 0\}$ sau $\{b = d = \alpha = 0\}$. A doua serie de condiții, obținută în acest caz, este identică cu prima serie de condiții, obținută în cazul 1).

În așa mod, a fost demonstrată următoarea leamnă:

Lema 3.5.3. *Sistemul (2.6) are două drepte invariante complexe paralele și pentru el dreapta de la infinit e de multiplicitatea algebrică cel puțin trei, dacă se realizează una dintre următoarele trei serii de condiții:*

$$a = b = c = d = f = k = l = n = q = p = r = s = 0, m = 1; \quad (3.70)$$

$$a = b = c = d = f = g = k = l = n = p = r = s = 0, m = 1; \quad (3.71)$$

$$a = b = d = f = g = k = l = n = q = p = r = s = 0, c = -2\alpha/(\alpha^2 + 1), m = 1/(\alpha^2 + 1). \quad (3.72)$$

3.5.4. Dreptele l_1 și l_2 , $l_2 = \bar{l}_1$ sunt complexe omogene.

În acest caz, considerăm sistemul $\{(2.6), (2.48)\}$ pentru care $y \mp ix = 0$ sunt drepte invariante.

Sistemul omogen $\{(2.6), (2.48)\}$ are polinoamele $\kappa(x, y)$ și $C_0(x, y)$ de forma: $\kappa(x, y) = (x^2 + y^2)((m + n - r)x^2 + (l + p)xy + ry^2)$, $C_0(x, y) = -\kappa(x, y)C_{01}(x, y)$, unde $C_{01}(x, y) = [k^2 - k(l + p) + m(m + n - r)]x^4 + 2[p(m + n - r) - kn]x^3y + [p(l + p) - mn - k(3l + p) + 3(m + n)r - 3r^2]x^2y^2 - 2[lm - (l - k + p)r]xy^3 - (lp - nr)y^4$. Identitatea $C_{01}(x, y) \equiv 0$ ne oferă următoarele serii de condiții:

$$1) m = lk/n, p = k, r = lk/n; \quad 2) l = n = 0, p = k, r = m; \quad 3) k = n = 0, p = 0, r = m.$$

În Cazul 1) avem $\kappa(x, y) = (nx + ky)(nx + ly)(x^2 + y^2)/n$, iar $C_1(x, y) = \kappa(x, y) \cdot C_{11}(x, y)/(n(nx + ky))$, unde $C_{11}(x, y) = n(-(b + c)k(k - l) - (dk + a(-k + l))n + cn^2)x^4 + 2n(2ckn + d(-k^2 + n^2))x^3y + [-dk^2l + d(4k + l)n^2 + n(2bk(-k + l) + ck(k + 4l) + 2a(k - l)n - cn^2)]x^2y^2 + 2l(2dkn + c(k - n)(k + n))xy^3 + [dk^2l - k(b(k - l) + cl)n + (a + d)(k - l)n^2]y^4$. Identitatea $C_{11}(x, y) \equiv 0$ are loc, dacă $\{c = d = 0, l = k\}$ sau $\{c = d = 0, a = bk/n\}$.

Cazul 2). Avem $\kappa(x, y) = y(kx + my)(x^2 + y^2)$ și $C_1(x, y) = \kappa(x, y)C_{12}(x, y)/y$, unde $C_{12}(x, y) = (b + c)kx^4 + 2dkx^3y + (2bk - ck + dm)x^2y^2 - 2cmxy^3 + (bk - dm)y^4$. Luând în considerare faptul că $\kappa(x, y) \neq 0$, $C_{12}(x, y) \equiv 0$, dacă $\{b = c = d = 0\}$ sau $\{c = d = k = 0, m \neq 0\}$.

Cazul 3). Avem $\kappa(x, y) = y(lx + my)(x^2 + y^2)$ și $C_1(x, y) = \kappa(x, y)C_{13}(x, y)/(lx + my)$, unde $C_{13}(x, y) = l(al - (b + c)m)x^4 + ((2a - d)l^2 - 2(b + 2c)lm + dm^2)x^2y^2 + (-4dlm + 2c(l - m)(l + m))xy^3 + ((a + d)l^2 + (-b + c)lm - dm^2)y^4$. Astfel, pentru $\kappa(x, y) \neq 0$, identitatea $C_{13}(x, y) \equiv 0$ are loc, dacă $\{a = bm/l, c = d = 0\}$ sau $\{c = d = l = 0, m \neq 0\}$. Ultima serie de condiții, obținută în acest caz, e identică cu a doua serie de condiții, obținută în cazul 2).

Prin urmare, are loc:

Lema 3.5.4. *Sistemul (2.6) are două drepte invariante complexe omogene și pentru el dreapta de la infinit e de multiplicitatea algebrică cel puțin trei, dacă se realizează una dintre următoarele cinci serii de condiții:*

$$a = bk/n, c = d = 0, f = bk/n, g = b, m = lk/n, q = l, p = k, s = n, r = lk/n; \quad (3.73)$$

$$c = d = 0, f = a, g = b, l = k, m = k^2/n, p = k, q = k, r = k^2/n, s = n; \quad (3.74)$$

$$b = c = d = 0, f = a, g = l = n = q = 0, p = k, r = m, s = 0; \quad (3.75)$$

$$c = d = 0, f = a, g = b, k = l = n = 0, q = p = 0, r = m, s = 0, m \neq 0; \quad (3.76)$$

$$a = bm/l, c = d = 0, f = bm/l, g = b, k = n = 0, q = l, p = 0, r = m, s = 0. \quad (3.77)$$

3.5.5. Dreptele l_1 și l_2 , $l_2 = \overline{l_1}$ sunt complexe neomogene și concurente.

Fie $l_{1,2} \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{R}[x, y]$, $l_2 = \overline{l_1}$, $l_1 \nparallel l_2$, și fie sistemul (2.50) pentru care aceste drepte sunt invariante. Sistemul dat are polinoamele: $\kappa(x, y) = -(a-1)x^2 + (c-2\alpha)xy + (1+f)y^2(y^2 - 2xy\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2)x^2$ și $C_0(x, y) = -\kappa(x, y)C_{02}(x, y)$, unde $C_{02}(x, y) = [g^2 - (a-1)(\alpha^2 + \beta^2)(2 - a + d + \alpha^2 + \beta^2) + g(c\alpha^2 - 2\alpha^3 + c\beta^2 + 2\alpha(a-1-\beta^2))][x^4 + [2((a-1)(2(1+d)\alpha + (c-b)(\alpha^2 + \beta^2) + g(1+d+(2+f)(\alpha^2 + \beta^2))))][x^3y + [2+d^2+cg+2b(g-3\alpha)+2c\alpha+\alpha(-2(2+f)g+\alpha(c^2-b(c-2\alpha)-2c\alpha+(2+f)(\alpha^2-1)))+2\beta^2+(-bc+c^2-f+2(b-c)\alpha+2(2+f)\alpha^2)\beta^2+(2+f)\beta^4+a(-1-d+\alpha(6b+\alpha+2f\alpha)+\beta^2+2f\beta^2)+d(3+2c\alpha+(f-1)\alpha^2+(3+f)\beta^2)]x^2y^2 + [2(b(2-a+d+2c\alpha-3\alpha^2+\beta^2)+(1+f)(g+(c-2\alpha)(\alpha^2+\beta^2)))]xy^3 + [b^2-bc+2b(2+f)\alpha+(1+f)(1+d+(2+f)(\alpha^2+\beta^2))]y^4 \equiv 0$
 $\Rightarrow$

- 1) $\{a = (1 - b^2 + bc + f - 2b\alpha)/(1 + f), d = -(1 + b^2 - bc + f + (f + 2)(2b\alpha + (1 + f)(\alpha^2 + \beta^2)))/(f + 1), g = ((b - c + 2\alpha)(2b\alpha + \alpha^2 + f\alpha^2 + \beta^2 + f\beta^2))/(1 + f)\};$
- 2) $\{b = 0, d = -2 + a - \alpha^2 - \beta^2, f = -1, g = 2(1 - a)\alpha - (c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2)\};$
- 3) $\{b = c - 2\alpha, d = -2 + a - 2c\alpha + 3\alpha^2 - \beta^2, f = -1, g = 2(1 - a)\alpha, c - 2\alpha \neq 0\}.$

Cazul 1). Avem: $\kappa(x, y) = (bx + y + fy)(bx - cx - y - fy + 2x\alpha)(y^2 - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2)/(1 + f)$, iar $C_1(x, y) = \kappa(x, y)C_{11}(x, y)/((bx + (1 + f)y)(1 + f)^2)$, unde $C_{11}(x, y) = [2b^5\alpha + (1 + f)^3(c - 2\alpha)^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 - b(1 + f)^2(c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2)(-2 - 4c\alpha + (9 + 2f)\alpha^2 + \beta^2 + 2f\beta^2) + b^4(-4c\alpha + (13 + 5f)\alpha^2 + (1 + f)\beta^2) + 2b^3(\alpha(-1 + c^2 - f - c(9 + 5f)\alpha + (5 + f)(3 + 2f)\alpha^2) + (1 + f)(-c + (3 + 2f)\alpha)\beta^2) + b^2(1 + f)(\alpha(2c + (-7 + 5c^2 - 3f)\alpha - 2c(13 + 4f)\alpha^2 + (32 + f(17 + f))\alpha^3) + (c^2 - 2c(5 + 4f)\alpha + (1 + f)(-3 + 2(8 + f)\alpha^2))\beta^2 + f(1 + f)\beta^4][x^4 - 2[b^5 + b^4(-2c + 4(2 + f)\alpha) - (1 + f)^3(c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2)(1 + (2 + f)\alpha^2 + (2 + f)\beta^2) + b(1 + f)^2(\alpha^2 + \beta^2)(1 + c^2 + f - 2c(5 + 2f)\alpha + (2 + f)(9 + f)\alpha^2 + 2\beta^2 +$

$$\begin{aligned}
& f(3+f)\beta^2) + b^3(-1+c^2-f-2c(5+3f)\alpha+\beta^2+(3+2f)((7+3f)\alpha^2+f\beta^2)) + b^2(1+f)(2c^2\alpha - \\
& c(-1+7(2+f)\alpha^2+(2+3f)\beta^2)+2\alpha(-2+13\alpha^2+5\beta^2+f(-1+2(6+f)\alpha^2+2(4+f)\beta^2)))]x^3y+(1+ \\
& f)[3b^4-2b^3(c-2(3+2f)\alpha)+b^2(-1-c^2-f-4cf\alpha+(23+f(35+8f))\alpha^2+7\beta^2+f(11+4f)\beta^2)+(1+ \\
& f)^2(\alpha^2(5+f+(1+f)(2+f)\alpha^2)+(1+f)(1+2(2+f)\alpha^2)\beta^2+(1+f)(2+f)\beta^4+2c\alpha(-1+\alpha^2+\beta^2)- \\
& c^2(\alpha^2+\beta^2))-2b(1+f)(c^2\alpha+c(1+(1+f)\alpha^2+(3+f)\alpha^2)-\alpha(5+11\alpha^2+11\beta^2+f(3+(9+2f)\alpha^2+ \\
& (9+2f)\beta^2)))]x^2y^2-2(1+f)^2[b^2(c+2\alpha)+(1+f)^2(c-2\alpha)(\alpha^2+\beta^2)+2b(1+\alpha^2+\beta^2+f(1+(c- \\
& \alpha)\alpha+\beta^2))]xy^3-(1+f)^2[b^2(-1+f)+b(c+2f(2+f)\alpha)+(1+f)^2(1+(2+f)\alpha^2+(2+f)\beta^2)]y^4 \equiv 0 \\
& \Rightarrow \{b=0, c=2\alpha, f=(-1-2\alpha^2-2\beta^2)/(\alpha^2+\beta^2)\} \text{ sau } \{c=-(b^2(-1+f)+2bf(2+f)\alpha+(1+ \\
& f)^2(1+(2+f)\alpha^2+(2+f)\beta^2))/b, b^2+2b(1+f)\alpha+(1+f)(1+(2+f)\alpha^2+(2+f)\beta^2)=0\}.
\end{aligned}$$

Cazul 2). În acest caz $\kappa(x, y) = x(x - ax - cy + 2y\alpha)(y^2 - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2)$ și $C_1(x, y) = \kappa(x, y)C_{12}(x, y)/((x - ax - cy + 2y\alpha))$, unde $C_{12}(x, y) = [\alpha(-2(-1+a)^2a + (-3+(8-5a)a)c\alpha + 4(-1+a)(-1+2a-c^2)\alpha^2 - c(15-15a+c^2)\alpha^3 + 2(7-7a+3c^2)\alpha^4 - 12c\alpha^5 + 8\alpha^6) + (c-a^2c - 4(-1+a)(-1+c^2)\alpha - 2c(7-7a+c^2)\alpha^2 + 12(1-a+c^2)\alpha^3 - 24c\alpha^4 + 16\alpha^5)\beta^2 - (c-2\alpha)(-1+a+c^2-4c\alpha+4\alpha^2)\beta^4]x^4 + [2(a^3+2c\alpha-\alpha^2(3+(c-2\alpha)(c(2+\alpha^2)-2\alpha(3+\alpha^2))))+\beta^2-2(c-2\alpha)(c-3\alpha+c\alpha^2-2\alpha^3)\beta^2 - (c-2\alpha)^2\beta^4 + a^2(-2+2c\alpha-3\alpha^2+\beta^2) + a(1+\alpha(-4c+(6+c^2)\alpha-6c\alpha^2+8\alpha^3)-2\beta^2+(c-4\alpha)(c-2\alpha)\beta^2))]x^3y + [(c-2\alpha)(-1+a^2+2a\alpha(c+2\alpha)+\alpha^2(-8+c^2-2c\alpha)-4\beta^2+4a\beta^2+c(c-2\alpha)\beta^2)]x^2y^2 - 4(-1+a)(c-2\alpha)\alpha xy^3 + (-1+a)(c-2\alpha)y^4$. Luând în considerare faptul că $\kappa(x, y) \neq 0$, polinomul $C_{12}(x, y) \equiv 0$, dacă $\{c=2\alpha, a=-(\alpha^2+\beta^2)\}$.

Cazul 3). Sistemul (2.50), în condițiile cazului 3), are polinomul $\kappa(x, y) = x(x - ax - cy + 2y\alpha)(y^2 - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2)$, iar $C_1(x, y) = \kappa(x, y)C_{13}(x, y)/x$, unde $C_{13}(x, y) = [2a^2\alpha + 2a\alpha(-1+\alpha^2+\beta^2) - c(\alpha^2+\beta^2)]x^4 + 2(-a^2+\alpha^2+\beta^2+a(1+2c\alpha-5\alpha^2-\beta^2))x^3y + (c-2\alpha)(1-4a+2c\alpha-\alpha^2-\beta^2)x^2y^2 - 2c(c-2\alpha)xy^3 + (c-2\alpha)y^4 \neq 0$, pentru $c-2\alpha \neq 0$.

Prin urmare, s-a demonstrat:

Lema 3.5.5. *Sistemul (2.6) are două drepte invariante complexe neomogene concurente și pentru el dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică cel puțin trei, dacă și numai dacă se realizează una dintre următoarele trei serii de condiții:*

$$\begin{aligned}
& a=1, b=0, c=2\alpha, d=g=0, f=(-1-2\alpha^2-2\beta^2)/(\alpha^2+\beta^2), k=l=n=0, q=s=0 \\
& m=1+\alpha^2+\beta^2, p=-(2\alpha(1+\alpha^2+\beta^2))/(\alpha^2+\beta^2), r=(1+\alpha^2+\beta^2)/(\alpha^2+\beta^2);
\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
a &= -(f^3(\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha(b + \alpha) + \beta^2) + f^2(1 + 2\alpha(b + 2\alpha) \\
&\quad + 4\beta^2) + f(1 + b^2 + 4b\alpha + 5\alpha^2 + 5\beta^2))/(1 + f), \\
c &= -(b^2(-1 + f) + 2bf(2 + f)\alpha + (1 + f)^2(1 + (2 + f)\alpha^2 + (2 + f)\beta^2))/b, \\
d &= -(2 + 4\alpha(b + \alpha) + 4\beta^2 + f^3(\alpha^2 + \beta^2) + f^2(1 + 2b\alpha \\
&\quad + 5\alpha^2 + 5\beta^2) + f(3 + (b + 2\alpha)(b + 4\alpha) + 8\beta^2))/(1 + f), \\
g &= (2b\alpha + \alpha^2 + f\alpha^2 + \beta^2 + f\beta^2)(1 + 2\alpha(b + \alpha) + 2\beta^2 + f^3(\alpha^2 + \beta^2) + \\
&\quad f^2(1 + 2\alpha(b + 2\alpha) + 4\beta^2) + f(2 + b^2 + 4b\alpha + 5\alpha^2 + 5\beta^2))/(b(1 + f)), \\
k &= (\alpha^2 + \beta^2)(1 + 2\alpha(b + \alpha) + 2\beta^2 + f^3(\alpha^2 + \beta^2) + \\
&\quad f^2(1 + 2\alpha(b + 2\alpha) + 4\beta^2) + f(2 + b^2 + 4b\alpha + 5\alpha^2 + 5\beta^2))/b, \\
l &= -b, \quad m = (\alpha(-2 - 2f(2 + b^2 + f) - b(1 + f)(5 + 4f)\alpha \\
&\quad - 2(1 + f)^2(2 + f)\alpha^2) - (1 + f)(b + 2(1 + f)(2 + f)\alpha)\beta^2)/b, \\
n &= (1 + 2\alpha(2b + \alpha) + 2\beta^2 + f^3(\alpha^2 + \beta^2) + f^2(1 + 2\alpha(b + 2\alpha) \\
&\quad + 4\beta^2) + f(2 + (b + \alpha)(b + 5\alpha) + 5\beta^2))/(1 + f), \\
p &= (1 + 2\alpha(2b + \alpha) + 2\beta^2 + f^3(\alpha^2 + \beta^2) + \\
&\quad f^2(1 + 2\alpha(b + 2\alpha) + 4\beta^2) + f(2 + (b + \alpha)(b + 5\alpha) + 5\beta^2))/b, \\
q &= (\alpha(-2 - 2f(2 + b^2 + f) - b(1 + f)(5 + 4f)\alpha - \\
&\quad 2(1 + f)^2(2 + f)\alpha^2) - (1 + f)(b + 2(1 + f)(2 + f)\alpha)\beta^2)/(1 + f), \\
r &= -1 - f, \quad s = (\alpha^2 + \beta^2)(1 + 2\alpha(b + \alpha) + 2\beta^2 + f^3(\alpha^2 + \beta^2) + \\
&\quad f^2(1 + 2\alpha(b + 2\alpha) + 4\beta^2) + f(2 + b^2 + 4b\alpha + 5\alpha^2 + 5\beta^2))/(1 + f), \\
b^2 + 2b(1 + f)\alpha + (1 + f)(1 + (2 + f)\alpha^2 + (2 + f)\beta^2) &= 0;
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
a &= -(\alpha^2 + \beta^2), \quad b = 0, \quad c = 2\alpha, \quad d = -2(1 + \alpha^2 + \beta^2), \quad f = -1, \quad g = 2\alpha(1 + \alpha^2 + \beta^2), \quad k = l \\
&= m = 0, \quad n = 1 + \alpha^2 + \beta^2, \quad p = r = 0, \quad q = -2\alpha(1 + \alpha^2 + \beta^2), \quad s = (\alpha^2 + \beta^2)(1 + \alpha^2 + \beta^2).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

3.5.6. Integrabilitatea sistemelor $\{(2.6), (3.67)\}$ - $\{(2.6), (3.80)\}$.

Sistemul $\{(2.6), (3.67)\}$ are prima mărime Lyapunov $L_1 = -2q \neq 0$, deoarece $q \neq 0$. Prin urmare, punctul singular $(0, 0)$ este de tip focar.

Sistemele $\{(2.6), (3.68)\}$, $\{(2.6), (3.69)\}$, $\{(2.6), (3.70)\}$, $\{(2.6), (3.72)\}$ sunt integrabile și au următorii factori integranți, respectiv:

$$\begin{aligned}
\mu(x, y) &= (1 - x + bx)(x - 1)^{d^2 - 2bd^2 - 3} \exp[d(b - 1)(y - dx) + bd(d + y)/(x - 1)]; \\
\mu(x, y) &= 1/((x - 1)(1 + x + cx)); \quad \mu(x, y) = 1/(1 + x^2); \quad \mu(x, y) = 1/(1 + x^2 - 2x\alpha + \alpha^2),
\end{aligned}$$

iar punctul singular $(0, 0)$ al acestor sisteme este de tip centru.

Sistemul $\{(2.6), (3.71)\}$ are prima mărime Lyapunov $L_1 = -2q$. Dacă $q = 0$, atunci $\{(2.6), (3.71), q = 0\}$ se include în sistemul $\{(2.6), (3.70)\}$.

Sistemul $\{(2.6), (3.73)\}$ ($\{(2.6), (3.75)\}$) are prima mărime Lyapunov $L_1 = 8(k - l)$ ($L_1 = 8k$), care se anulează pentru $l = k$ ($k = 0$). Astfel, sistemul $\{(2.6), (3.73), l = k\}$ ($\{(2.6), (3.75), k = 0\}$) este integrabil și are factorul integrant $\mu(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$.

Sistemele $\{(2.6), (3.74)\}$, $\{(2.6), (3.76)\}$ au factorul integrant $\mu(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ și punctul singular $(0, 0)$ de tip centru.

Sistemul $\{(2.6), (3.77)\}$ are focar în originea de coordonate $(0, 0)$, deoarece $L_1 = -8l \neq 0$.

Factorul integrant al *Sistemelor* $\{(2.6), (3.78)\}$, $\{(2.6), (3.79)\}$ și $\{(2.6), (3.80)\}$ este

$$\mu(x, y) = 1/(1 - 2y + y^2 + 2x\alpha - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2).$$

3.6. Sistemele cubice cu focar fin și trei drepte invariante afine l_1, l_2, l_3 , pentru care $m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) + m(l_\infty) \geq 5$.

Considerăm $l_1 \equiv x - 1 = 0$. Dreapta $l_2 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ este invariantă pentru sistemul (2.8), dacă $\varphi(x) \equiv 0$, unde $\varphi(x) = \left(A \cdot P(x, y) + B \cdot Q(x, y) \right) \Big|_{y=Ax+B}$.

Pentru sistemul (2.8) polinomul $\varphi(x)$ arată astfel: $\varphi(x) = -B(A + bB + ABf + B^2l) - (1 + A^2 + 2AbB + ABc + Bd + 2A^2Bf - AB^2f + 3AB^2l + B^2n)x - (aA + A^2b - AB + A^2c - ABc + Ad + A^3f - 2A^2Bf + g + 3A^2Bl + 2ABn + Bq)x^2 + (aA + A^2 + A^2c + A^3f - A^3l - A^2n - Aq - s)x^3$. Prin urmare, dreapta $l_2 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ este invariantă pentru acest sistem, dacă $\varphi(x) \equiv 0$, adică

$$\begin{aligned} l &= -(A + bB + ABf)/B^2, \quad s = A(-A + aAB + aB^2 + Bg)/B^2, \\ n &= (-1 + 2A^2 + AbB - ABc - Bd + A^2Bf + AB^2f)/B^2, \\ q &= (2A - A^3 - aAB + AB^2 + A^2Bc + AB^2c + ABd - Bg)/B^2. \end{aligned} \tag{3.81}$$

3.6.1. Dreptele l_1, l_2, l_3 sunt reale și distincte.

Fie $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}[x, y]$.

Cazul $m(l_1) = m(l_2) = m(l_3) = 1$ și $l_1 \parallel l_2$.

Considerăm $l_1 = x - 1$, iar $l_2 = x - \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\alpha \neq 0; 1$. Pentru sistemul $\{(2.8), (2.31)\}$ determinăm condițiile astfel ca dreapta $l_3 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ să fie invariantă, apoi condițiile ca dreapta de la infinit $Z = 0$ să aibă multiplicitatea doi.

Sistemul $\{(2.8), (2.31)\}$ are polinomul $\varphi(x) = -AB - bB^2 - B^3l - (1 + A^2 + 2AbB + ABc + Bd + 3AB^2l + B^2n)x - (A^2b - AB + A^2c - ABc + Ad + g + 3A^2Bl + 2ABn + Bq)x^2 + (A^2 + A^2c -$

$A^3l - A^2n - Aq - s)x^3$. Dreapta $l_3 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ este invariantă pentru acest sistem, dacă $\varphi(x) \equiv 0$, i.e. $\{s = -(b + Bl)(b + g + Bl), A = -B(b + Bl), n = (-1 + B(-d + B(b + Bl)(b + c + 2Bl)))/B^2, q = (-g + (b + Bl)(-2 + B(-d + B(-1 + b + Bl)(1 + b + c + Bl))))/B\}$.

În condițiile date, sistemul omogenizat, corespunzător sistemului $\{(2.8), (2.31)\}$ are polinoamele $\kappa(x, y)$ și $C_0(x, y)$ de forma: $\kappa(x, y) = x(bBx + B^2lx + y)(-bBx^2 - Bgx^2 - B^2lx^2 - xy - B^2xy + b^2B^2xy - B^2cxy + bB^2cxy - Bdxy + 2bB^3lxy + B^3clxy + B^4l^2xy + B^2ly^2)/B^2$; $C_0(x, y) = -(1 + c)x\kappa(x, y)C_{01}(x, y)/B^2$, unde $C_{01}(x, y) = B^2(b + Bl)(b + g + Bl)x^3 + (-1 + B(-d + B(b + Bl)(b + c + 2Bl)))xy^2 + 2B^2ly^3$. Astfel, dreapta $Z = 0$ are multiplicitatea algebrică doi, dacă $C_{01}(x, y) \equiv 0$, i.e. $\{d = -1/B, b = l = 0\}$ sau $\{g = -b, d = (-1 + b^2B^2 + bB^2c)/B, l = 0\}$.

Din cele expuse mai sus, urmează:

Lema 3.6.1. *Sistemul cubic (2.6) are trei drepte invariante distincte $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}[x, y]$, $m(l_1) = m(l_2) = m(l_3) = 1$, $l_1 \parallel l_2$, și pentru el dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică cel puțin doi, dacă și numai dacă se îndeplinește una dintre următoarele două serii de condiții:*

$$a = b = f = k = l = n = 0, d = -1/B, m = -c - 1, q = -g/B, p = r = s = 0, c \neq -1, -2; \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} a = f = k = 0, d = (-1 + b^2B^2 + bB^2c)/B, g = -b, \\ m = -c - 1, l = n = p = r = s = 0, q = -bB(1 + c), c \neq -1, -2. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Sistemul $\{(2.6), (3.82)\}$ are dreptele invariante $l_1 \equiv x - 1 = 0$, $l_2 \equiv (1 + c)x + 1 = 0$, $l_3 \equiv y - B = 0$, iar sistemul $\{(2.6), (3.83)\}$ are $l_1 \equiv x - 1 = 0$, $l_2 \equiv (1 + c)x + 1 = 0$, $l_3 \equiv bBx + y - B = 0$.

Cazul $m(l_1) = m(l_2) = m(l_3) = 1$ și $l_2 \parallel l_3$.

Considerăm $l_1 = x - 1$, iar $l_2 = y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$. Pentru sistemul $\{(2.8), (3.81)\}$ determinăm condițiile astfel ca dreapta $l_3 \equiv y - Ax - B_1 = 0$, $B_1 \in \mathbb{R}$, $B_1 \neq B$, $B_1 \neq 0$ să fie invariantă, apoi condițiile pentru care $Z = 0$ e de multiplicitatea doi.

Sistemul $\{(2.8), (3.81)\}$ are polinomul $\varphi(x) = (B_1 - B)(B_1(bBB_1 + A(B + B_1 + BB_1f)) + (B_1 + A^2B_1 + B(1 + AB_1(2b + c) + B_1d + A^2(1 + 2B_1f))))x + B(A(a + d + A(b + c + Af)) + g)x^2)/B^2 \equiv 0 \Rightarrow \{g = A(-a + 1/B + 1/B_1), b = -(A(B + B_1 + BB_1f))/(BB_1), d = (-1 + A^2)(B + B_1)/(BB_1) - Ac\}$.

În aceste condiții, sistemul omogenizat, corespunzător sistemului $\{(2.8), (3.81)\}$, are polinoamele $\kappa(x, y)$ și $C_0(x, y)$ de forma:

$$\kappa(x, y) = x(Ax - y)((A + aBB_1)x^2 + (A^2 - 1 + BB_1 + BB_1c)xy + (BB_1f - A)y^2)/(BB_1),$$

$$C_0(x, y) = (Ax - y)\kappa(x, y)C_{02}(x, y)/(BB_1), \text{ unde } C_{02}(x, y) = (2a + A - aA^2 + Ac)x^3 + (1 + 3aA + c + 2Af)x^2y + A(2 + 2c + Af)xy^2 + Afy^3.$$

Astfel, identitatea $C_0(x, y) \equiv 0$ are loc, dacă $C_{02}(x, y) \equiv 0$, i.e. $\{a = 0, c = -1, A = 0\}$ sau $\{a = 0, c = -1, f = 0\}$.

S-a demonstrat:

Lema 3.6.2. *Sistemul cubic (2.6) are trei drepte invariante distincte $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}[x, y]$, $m(l_1) = m(l_2) = m(l_3) = 1$, $l_2 \parallel l_3$, și pentru el dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică cel puțin doi, dacă și numai dacă se îndeplinește una dintre următoarele două serii de condiții:*

$$a = 0, c = -1, k = l = m = 0, n = 1/(BB_1), p = -f, q = r = s = 0, B_1 \neq B; \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} a = f = k = 0, c = -1, l = A/(BB_1), m = p = r = 0, n = (1 - 2A^2)/(BB_1), \\ q = A(A^2 - 2)/(BB_1), s = A^2/(BB_1), B_1 \neq B. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Cazul $m(l_1) = m(l_2) = m(l_3) = 1$ și l_1, l_2, l_3 sunt drepte concurente două câte două.

Considerăm $l_1 = x - 1$, iar $l_2 = y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$. Pentru sistemul $\{(2.8), (3.81)\}$ determinăm condițiile pentru care dreapta $l_3 \equiv y - A_1x - B_1 = 0$, $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$, $A_1 \neq A$, $B_1 \neq 0$ este dreaptă invariantă, apoi condițiile pentru care dreapta de la infinit $Z = 0$ are multiplicitatea doi. În așa mod, se obține:

Lema 3.6.3. *Sistemul cubic (2.6) are trei drepte invariante distincte și concurente $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}[x, y]$, și pentru el dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică cel puțin doi, dacă și numai dacă se îndeplinește una dintre următoarele șapte serii de condiții:*

$$\begin{aligned} a = 0, b = -(AB + B^2 + AB_1)/(BB_1), c = -1, g = (AB + B^2 + AB_1 - BB_1)/(BB_1), \\ d = (-B + A^2B + 2AB^2 + B^3 - B_1 + A^2B_1 - B^2B_1)/(BB_1), f = 0, k = 0, \\ l = (A + B)/(BB_1), m = 0, n = -(-1 + 2A^2 + 3AB + B^2 - AB_1 - BB_1)/(BB_1), \\ p = 0, q = (-2A + A^3 - B + 2A^2B + AB^2 + B_1 - A^2B_1 - ABB_1)/(BB_1), \\ r = 0, s = A(A + B - B_1)/(BB_1), B \neq B_1; \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} b = (-A + aAB + aB^2)/B, c = (-a - A + aA^2 + aAB)/A, \\ d = -(A - A^3 - aAB + aA^3B + AB^2 + aA^2B^2 - aAB^3 - aB^4)/(AB), \\ f = -a(A + B)/A, g = -(A - B)(-A + aAB + aB^2)/(AB), k = -a, l = 0, \\ m = -a(-1 + A^2 + AB)/A, n = (A + B)(A - aAB - aB^2)/(AB), \\ p = a(A + B)/A, q = (-1 + A^2 + AB)(-A + aAB + aB^2)/(AB), \\ r = 0, s = (-A + aAB + aB^2)/B, a \neq 0, B \neq B_1; \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned}
b &= a(-B + B_1 + aBB_1), \quad c = (-1 - BB_1 + aBB_1^2 + a^2B^2B_1^2)/(BB_1), \\
d &= -(B - aBB_1 + BB_1^2 - a^2B^3B_1^2 - B_1^3 - aBB_1^3 + a^2B^2B_1^3 + a^3B^3B_1^3)/(BB_1), \\
f &= -(1 + aB)/B, \quad g = (1 - aB)(-B + B_1 + aBB_1)/B, \quad k = -a, \quad l = 0, \\
m &= -(-1 + aBB_1^2 + a^2B^2B_1^2)/(BB_1), \quad n = -(1 + aB)(-B + B_1 + aBB_1)/B, \\
p &= (1 + aB)/B, \quad q = (-B + B_1 + aBB_1)(-1 + aBB_1^2 + a^2B^2B_1^2)/(BB_1), \\
r &= 0, \quad s = a(-B + B_1 + aBB_1), \quad a \neq 0, \quad B \neq B_1;
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
a &= b = 0, \quad c = -(1 + BB_1)/(BB_1), \quad d = (B^3 - B_1 - B^2B_1)/(BB_1), \quad f = -1/B_1, \\
g &= (B - B_1)/B_1, \quad k = l = 0, \quad m = 1/(BB_1), \quad n = -(B - B_1)/B_1, \quad p = 1/B_1, \\
q &= -(B - B_1)/(BB_1), \quad r = s = 0, \quad B \neq B_1;
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
a &= b = 0, \quad d = (1 + B^2 + B^4 + B^2c + 3B^4c + 3B^4c^2 + B^4c^3)/(B^3(1 + c)^2), \\
f &= -1/B, \quad g = -(1 + B^2 + B^2c)/(B^2(1 + c)), \quad k = l = 0, \quad m = -1 - c, \quad p = 1/B, \\
n &= (1 + B^2 + B^2c)/(B^2(1 + c)), \quad q = -(1 + B^2 + B^2c)/B, \quad r = s = 0, \quad c \neq -1;
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
a &= A^2B_1f(1 + Bf)/(B(1 + B_1f)), \quad b = -A(1 + Bf)/B, \quad l = 0, \\
c &= (-B - ABf - AB_1f - BB_1f - 2ABB_1f^2)/(B(1 + B_1f)), \\
d &= (-B - B_1 - BB_1f - B_1^2f + 2A^2B_1^2f + 2A^2BB_1^2f^2)/(BB_1(1 + B_1f)), \\
g &= -A(-2B - A^2B_1 - ABB_1 - B^2f - 3BB_1f - A^2BB_1f - AB^2B_1f - ABB_1^2f \\
&\quad - B^2B_1f^2 - BB_1^2f^2 + A^2BB_1^2f^2 - AB^2B_1^2f^2 + A^2B^2B_1^2f^3)/(B^2(1 + B_1f)^2), \\
k &= -A^2B_1f(1 + Bf)/(B(1 + B_1f)), \quad m = Af(B + B_1 + 2BB_1f)/(B(1 + B_1f)), \\
n &= (B + A^2B_1 + ABB_1 + BB_1f + A^2BB_1f + AB^2B_1f + ABB_1^2f + AB^2B_1^2f^2)/ \\
&\quad (B^2B_1(1 + B_1f)), \quad p = -f, \quad q = -A(B + B_1 + 2BB_1f)(B + A^2B_1 + ABB_1 + BB_1f \\
&\quad + A^2BB_1f + AB^2B_1f + ABB_1^2f + AB^2B_1^2f^2)/(B^3B_1(1 + B_1f)^2), \quad r = 0, \\
s &= A^2(1 + Bf)(B + A^2B_1 + ABB_1 + BB_1f + A^2BB_1f + AB^2B_1f \\
&\quad + ABB_1^2f + AB^2B_1^2f^2)/(B^3(1 + B_1f)^2);
\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned}
a &= (A^2 - AB - ABc)/B, \quad b = 0, \quad d = -2(1 - A^2 + AB + ABc)/B, \quad f = -1/B, \\
g &= 1 - 2A^2 + 2AB + c - A^2c + 3ABc + ABc^2, \quad k = A(-A + B + Bc)/B, \quad l = 0, \\
n &= (1 - A^2 + AB + ABc)/B^2, \quad p = 1/B, \quad q = -(1 + c)(1 - A^2 + AB + ABc)/B, \\
m &= -1 - c, \quad r = 0, \quad s = A(A - B - Bc)(-1 + A^2 - AB - ABc)/B^2.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

3.6.2. Dreptele l_1 și l_2 sunt complexe, iar l_3 este reală.

Cazul $l_{1,2} = x - \alpha \pm i$.

Vom determina condițiile pentru care sistemul (2.46) admite dreapta invarianta reală $l_3 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$, apoi vom determina condițiile pentru care dreapta de la

infini are multiplicitatea algebrică doi.

Sistemul (2.46) are dreapta invariantă $l_3 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$, dacă polinomul $\varphi(x) = -(B(A + B(b + Bl))(1 + \alpha^2) + [A^2(1 + \alpha^2) + (1 + B(d + Bn))(1 + \alpha^2) + AB(-2\alpha + 2b(1 + \alpha^2) + 3Bl(1 + \alpha^2))]x + [(g + Bq)(1 + \alpha^2) + A^2(b + 3Bl - 2\alpha + (b + 3Bl)\alpha^2) + A(B + d + 2Bn + (d + 2Bn)\alpha^2)]x^2 + [A(A(1 + Al + n) + q) + s + (A(A(Al + n) + q) + s)\alpha^2]x^3)/(1 + \alpha^2)$ este identic zero, i.e.:

$$\{A = -B(b + Bl), q = (1/(B(1 + \alpha^2)))(-g + (b + Bl)(-2 + B(-d + B(1 + (b + Bl)^2))) - 2B^2(b + Bl)^2\alpha + (-g + (b + Bl)(-2 + B(-d + B(b + Bl)^2)))\alpha^2), s = -(b + Bl)(b + g + Bl), n = (-1 + B(-d + B(b + Bl)(b + 2Bl)))/B^2 - (2(b + Bl)\alpha)/(1 + \alpha^2)\}.$$

În aceste condiții sistemul omogen, asociat sistemului (2.46), are polinomul $C_0(x, y) = x\kappa(x, y)C_{01}(x, y)/(B^2(1 + \alpha^2)^2)$, unde $\kappa(x, y) = x(bBx + B^2lx + y)[2B^3lxy\alpha + xy(1 + \alpha^2) - b^2B^2xy(1 + \alpha^2) - B^4l^2xy(1 + \alpha^2) + Bx(gx + dy)(1 + \alpha^2) + B^2(-xy + l(x - y)(x + y)(1 + \alpha^2)) + bBx(x(1 + \alpha^2) - 2By(-\alpha + Bl(1 + \alpha^2)))]/(B^2(1 + \alpha^2))$, iar $C_{01}(x, y) = B^2(b + Bl)(b + g + Bl)(1 + \alpha^2)x^3 + (-1 + B(-d + B(b + Bl)(b + 2Bl)) - 2B^2(b + Bl)\alpha + (-1 + B(-d + B(b + Bl)(b + 2Bl)))\alpha^2)xy^2 + 2B^2l(1 + \alpha^2)y^3$. Prin urmare, dreapta de la infinit $Z = 0$ va avea multiplicitatea algebrică doi, dacă $C_{01}(x, y) \equiv 0$, adică $\{d = -1/B, b = l = 0\}$ sau $\{g = -b, d = -1/B + bB(b - (2\alpha)/(1 + \alpha^2)), l = 0\}$.

Lema 3.6.4. *Sistemul cubic (2.6) are două drepte invariante complexe și paralele, o dreaptă invariantă reală și pentru el dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică cel puțin doi, dacă și numai dacă se realizează una dintre următoarele două serii de condiții:*

$$\begin{aligned} a = b = f = k = p = l = n = r = s = 0, c = -2\alpha/(\alpha^2 + 1), \\ d = -1/B, m = 1/(\alpha^2 + 1), q = -g/B; \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} a = f = k = l = n = p = r = s = 0, c = -2\alpha/(\alpha^2 + 1), q = bB/(1 + \alpha^2) \\ d = -1/B + bB(b - (2\alpha)/(1 + \alpha^2)), g = -b, m = 1/(\alpha^2 + 1), b \neq 0. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Sistemul cubic $\{(2.6), (3.93)\}$ are dreptele invariante $l_{1,2} = x - \alpha \pm i$, $l_3 = y - B$, iar sistemul cubic $\{(2.6), (3.94)\}$ are dreptele invariante $l_{1,2} = x - \alpha \pm i$, $l_3 = y + bBx - B$.

Cazul $l_{1,2} = y \pm ix$.

Lema 3.6.5. *Sistemul cubic (2.6) are două drepte complexe omogene, o dreaptă invariantă reală și pentru el dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică cel puțin doi, dacă și numai dacă se realizează una dintre următoarele două serii de condiții:*

$$a = d = f = 0, c = -1, g = b - 1, k = m = p = r = 0, q = l, s = n, l \neq 0; \quad (3.95)$$

$$c = -1, d = 0, f = a, g = b - 1, l = m = r = 0, k = p = -a, q = k - a, s = n. \quad (3.96)$$

Demonstrație. Putem considera dreapta reală $l_3 = x - 1$. Dreapta l_3 este invariantă pentru sistemul $\{(2.6), (2.48)\}$, dacă $P(1, y) = a + k + (1 + c + m)y + (a + d + p)y^2 + ry^3 \equiv 0$, i.e. $\{r = 0, k = -a, m = -1 - c, p = -a - d\}$. În aceste condiții polinomul $C_0(x, y)$ are forma $C_0(x, y) = -\kappa(x, y)C_{02}(x, y)$, unde $\kappa(x, y) = -x(x + cx - nx + ay + dy - ly)(x^2 + y^2)$, iar $C_{02}(x, y) = (1 + 2c + c^2 - ad + al - (1 + c)n)x^4 + (2(1 + c)(a + d) - 2dn)x^3y + (d^2 - dl + a(d + 2l) + n + cn)x^2y^2 + 2(1 + c)lxy^3 + (a + d)ly^3 \equiv 0 \Rightarrow \{a = d = 0, c = -1, l \neq 0\}$ sau $\{c = -1, d = l = 0\}$. $\square$

Cazul $l_{1,2} = y - (\alpha \pm \beta i)x - 1$, $\beta \neq 0$

Lema 3.6.6. *Sistemul cubic (2.6) are două drepte complexe neomogene și concurente, o dreaptă invariantă reală și pentru el dreapta de la infinit e de multiplicitate algebrică cel puțin doi, dacă și numai dacă se realizează una dintre următoarele cinci serii de condiții:*

$$\begin{aligned} a + \omega = b = l = r = 0, c = (-1 + 2A\alpha)/A, d = -2(1 + \omega), g = (2A\alpha + 2A\alpha\omega + \omega)/A, \\ f = -1, k = \omega/A, m = -2\alpha/A, n = 1 + \omega, p = 1/A, q = -2\alpha(1 + \omega), s = \omega(1 + \omega), \beta \neq 0; \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} a = 1, b = 0, d = -1, f = -2, g = k = \omega(2\alpha - c), \\ l = n = q = s = 0, m = 2c\alpha - 4\alpha^2 + \omega, p = -c, r = 1; \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} a = 1, b = c - 2\alpha, d = 4\alpha^2 - 1 - 2c\alpha, f = -2, g = k = 0, l = 2\alpha - c, m = \omega, \\ n = 2(c - 2\alpha)\alpha, p = -2\alpha, q = \omega(2\alpha - c), r = 1, s = 0, c \neq 2\alpha; \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} a = 1, b = 0, c = 2\alpha, d = 1/B, f = -2 + (1 - B)/(B\omega), g = k = l = n = q = s = 0, \\ m = (B(1 + \omega) - 1)/B, p = 2\alpha(1 - B - B\omega)/(B\omega), r = (B + B\omega - 1)/(B\omega); \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} a &= (A^2 - 2AB\alpha + \omega(A^2 + B - A^2B))/\Omega, b = A(B - 1)(1 + \omega)/\Omega, \\ c &= (A(A^2 - 4B\alpha^2 + 2B\omega) + 2A(-1 + B)(1 + A\alpha) - \omega(A - 2B\alpha))/\Omega, \\ d &= (A(A - 2AB + 2\alpha) - \omega(1 - 2A^2 + 2A^2B))/\Omega, \\ f &= (1 - B - A(1 + B)(A - 2\alpha) - 2B\omega)/\Omega, s = A^2\omega(B - 1)(1 + \omega)/\Omega, \\ g &= A(2A\alpha(B - 1) - \omega(A^2 + B - 2AB\alpha - 1) - B\omega^2)/\Omega, \\ k &= -A\omega(-1 + A^2 + B - 2A\alpha + B\omega)/\Omega, r = (A^2 + B - 2A\alpha + B\omega - 1)/\Omega, \\ l &= A(1 - B)(1 + \omega)/\Omega, n = A(B - 1)(A + 2\alpha)(1 + \omega)/\Omega, \\ m &= (2A\alpha + \omega)(-1 + A^2 + B - 2A\alpha + B\omega)/\Omega, \\ p &= (A + 2\alpha)(1 - A^2 - B + 2A\alpha - B\omega)/\Omega, q = A(1 - B)(1 + \omega)(2A\alpha + \omega)/\Omega, \end{aligned} \quad (3.101)$$

unde $\omega = \alpha^2 + \beta^2$, $\Omega = B((A - \alpha)^2 + \beta^2)$.

Demonstrație. Fie $l_3 = x - A$, $A \neq 0$. Dreapta $l_3 = x - A$, $A \neq 0$ este invariantă pentru sistemul (2.50), dacă $P(A, y) = A^2(a + Ag - 2A\alpha + 2aA\alpha) + (1 + 2A^2 - aA^2 + Ac + A^2d +$

$2A^2c\alpha - 3A^2\alpha^2 + A^2\beta^2)y + (Ab - Ac + f + 4A\alpha + 2Af\alpha)y^2 - (1 + f)y^3 \equiv 0$, i. e. $\{f = -1, g = -(a - 2A\alpha + 2aA\alpha)/A, c = -(1 - Ab - 2A\alpha)/A, d = -(2A - aA + b + 2Ab\alpha + A\alpha^2 + A\beta^2)/A\}$. În aceste condiții polinomul $C_0(x, y)$ are forma $C_0(x, y) = -\kappa(x, y)C_{03}(x, y)/A^2$, unde $\kappa(x, y) = -x(-Ax + aAx - y + Aby)(y^2 - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2)/A$, iar $C_{03}(x, y) = (a^2(1 + 2A\alpha) - A(b + 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) + a(\alpha^2 + \beta^2 + 2A\alpha(-1 + \alpha^2 + \alpha^2)))x^4 + 2(-a^2A + A(\alpha^2 + \beta^2) + a(b + A(1 + 2b\alpha - \alpha^2 - \beta^2)))x^3y + (a - 4aAb + (b + \alpha)^2 + \beta^2 + Ab(1 + 2b\alpha + 3\alpha^2 - \beta^2))x^2y^2 - 2Ab(b + 2\alpha)xy^3 + Aby^3 \equiv 0 \Rightarrow \{b = 0, a = -(\alpha^2 + \beta^2)\} \Rightarrow (3.97)$.

Fie $l_3 \equiv y - Ax - B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$. Această dreaptă este invariantă pentru sistemul (2.50), dacă $\varphi(x) = (B - 1)B(A + AB + bB + ABf)(-1 - Bd + A^2(-1 - 2Bf + 3B^2(1 + f)) + AB((-1 + B)(2b + c) - 2B(2 + f)\alpha) + B^2(1 + d + (2 + f)\alpha^2 + (2 + f)\beta^2))x + (aA(-1 + B) + A^3(-f + 3B(1 + f)) - g + A^2(b(-1 + B) + (-1 + 2B)c - 4B(2 + f)\alpha) + A((-1 + B)d + B\alpha(-2c + 7\alpha + 2f\alpha) + B(3 + 2f)\beta^2) + B(g + (c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2)))x^2 + (-1 + a + A^2 + Ac + A^2f - 2A\alpha)(A^2 - 2A\alpha + \alpha^2 + \beta^2)x^3 \equiv 0$ sau:

1) $\{a = 1, f = -2, A = c - 2\alpha, B = 1\}$;

2) $\{a = 1 - A(A + c + Af - 2\alpha), b = -A(1 + B + Bf)/B, d = (1 - A^2(1 + B^2(1 + f)) + AB(c - Bc + 2B(2 + f)\alpha) - B^2(1 + (2 + f)\alpha^2 + (2 + f)\beta^2))/((B - 1)B), g = (-A^3B(1 + f) + A^2B(-c + 2(1 + B + Bf)\alpha) - B^2(c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2) + A(-1 + B + B^2(\alpha(2c - (5 + f)\alpha) - (1 + f)\beta^2)))/((B - 1)B)\}$.

În condițiile cazului 1) sistemul omogen, asociat sistemului cubic (2.50), are polinomul $C_0(x, y)$ de forma: $C_0(x, y) = -\kappa(x, y)C_{04}(x, y)$, unde $\kappa(x, y) = y(-cx + y + 2x\alpha)(y^2 - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2)$, iar $C_{04}(x, y) = g(g + c\alpha^2 - 2\alpha^3 + c\beta^2 - 2\alpha\beta^2)x^4 + 2(1 + d)gx^3y + (1 + d^2 + 2bg + (-3 - (b - c)(c - 2\alpha))\alpha^2 + c(g + 2\alpha) + \beta^2 - (b - c)(c - 2\alpha)\beta^2 + d(2 + 2c\alpha - 3\alpha^2 + \beta^2))x^2y^2 + 2(b + bd - g + 2bc\alpha - 3b\alpha^2 - c\alpha^2 + 2\alpha^3 + b\beta^2 - c\beta^2 + 2\alpha\beta^2)xy^3 - (1 - b^2 + bc + d)y^4$. $C_0(x, y) \equiv 0$, dacă $C_{04}(x, y) \equiv 0$, i. e. $\{b = 0, d = -1, g = (2\alpha - c)(\alpha^2 + \beta^2)\}$ sau $\{b = c - 2\alpha, d = 4\alpha^2 - 1 - 2c\alpha, g = 0\} \Rightarrow (3.98)$ și (3.99), respectiv.

În cazul 2) sistemul omogen, asociat sistemului cubic (2.50), are polinomul $C_0(x, y) = -\kappa(x, y)C_{05}(x, y)/(B^2(B - 1)^2)$, unde $\kappa(x, y) = (Ax - y)(Ax + cx + Afy + y + fy - 2x\alpha)(y^2 - 2xy\alpha + x^2\alpha^2 + x^2\beta^2)$, iar $C_{05}(x, y) = [-A^6B^2(1 + f)^2 + 2A^5B^2(1 + f)(-c + (3 + B + f + Bf)\alpha) - B^3(c - 2\alpha)^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 + AB^2(c - 2\alpha)(\alpha^2 + \beta^2)(-2 + 2B + 4Bc\alpha - \alpha^2 - 9B\alpha^2 - 2Bf\alpha^2 - (1 + B + 2Bf)\beta^2) + A^4B(-(1 + f)(2 + \alpha^2 + \beta^2) - B^2(1 + f)(-4c\alpha + (13 + 5f)\alpha^2 + (1 + f)\beta^2) - B(c^2 - 2(1 + f) - 4c(2 + f)\alpha + (12 + f(9 + f))\alpha^2 + f(1 + f)\beta^2)) - A^2(1 - B(2 + 2c\alpha + (-3 + f)\alpha^2 + (1 + f)\beta^2) + B^3(\alpha(2c + (-7 + 5c^2 - 3f)\alpha - 2c(13 + 4f)\alpha^2 + (32 + f(17 + f))\alpha^3) + (c^2 - 2c(5 + 4f)\alpha + (1 + f)(-3 + 2(8 + f)\alpha^2))\beta^2 + f(1 + f)\beta^4) + B^2(1 - 6c\alpha^3 + (9 + f)\alpha^4 - 6c\alpha\beta^2 + \alpha^2(4 + c^2 + 4f + 2(5 + f)\beta^2) + \beta^2(c^2 +$

$(1+f)(4+\beta^2)))) + A^3B(2B(1+B)c^2\alpha - c(2+\alpha^2+\beta^2+B(-2+(9+2f+2B(9+5f))\alpha^2+\beta^2+2(B+f+Bf)\beta^2)) + 2\alpha(3+f+\alpha^2+\beta^2+B(-2+3(2+f)\alpha^2+(2+3f)\beta^2+B(-1+15\alpha^2+3\beta^2+f(-1+(13+2f)\alpha^2+(5+2f)\beta^2))))))x^4 - 2[A^5B(1+f)(1+B^2(1+f)) + A^4B(c(1+B(-1+2B)(1+f)) - 2(2+f)(1+2B^2(1+f))\alpha) + B^2(c-2\alpha)(\alpha^2+\beta^2)(-1+B(1+(2+f)\alpha^2+(2+f)\beta^2)) + A(-1+B(2+2c\alpha+(-2+f)\alpha^2+(2+f)\beta^2) + B^3(\alpha^2+\beta^2)(1+c^2+f-2c(5+2f)\alpha+(2+f)(9+f)\alpha^2+2\beta^2+f(3+f)\beta^2) - B^2(1+(-1+2f)\alpha^2+(3+2f)\beta^2-2c\alpha(-1+\alpha^2+\beta^2)+c^2(\alpha^2+\beta^2))) + A^3(1-B(2+2c\alpha-3\alpha^2+\beta^2+f(1+\alpha^2+\beta^2)) + B^2(-c^2+2c(2+f)\alpha+2(1+f)(1+2\alpha^2+2\beta^2)) + B^3(-1+c^2-f-2c(5+3f)\alpha+\beta^2+(3+2f)((7+3f)\alpha^2+f\beta^2))) - A^2B(2(-1+B)Bc^2\alpha+2\alpha(-2-f-\alpha^2-\beta^2+2B(f+2(1+\alpha^2+\beta^2)) + B^2(-2+13\alpha^2+5\beta^2+f(-1+2(6+f)\alpha^2+2(4+f)\beta^2))) + c(2+\alpha^2+\beta^2+B(-3+(1+f)\alpha^2+(-3+f)\beta^2-B(-1+7(2+f)\alpha^2+(2+3f)\beta^2))))]x^3y + [-1-A^4(1+B+Bf)(1+B(-2+3B)(1+f)) + A^3B(-(-1+B)c(3+2B(1+f)) + 2(-4-3f+B(3+2f)(2-f+2B(1+f)))\alpha) + B(2+2c\alpha+(-1+f)\alpha^2+(3+f)\beta^2) - B^3(\alpha^2(5+f+(1+f)(2+f)\alpha^2)+(1+f)(1+2(2+f)\alpha^2)\beta^2+(1+f)(2+f)\beta^4+2c\alpha(-1+\alpha^2+\beta^2)-c^2(\alpha^2+\beta^2)) - B^2(1+(2+f)\alpha^4+2\beta^2+(2+f)\beta^4-2c\alpha(-2+\alpha^2+\beta^2)+c^2(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha^2(-3+(2+f)\beta^2)) + A^2(4+B(-3-8c\alpha+13\alpha^2-3\beta^2-f(-3+\alpha^2+\beta^2)+B(-2-c^2-4f-4c(-2+f)\alpha+2(-1+f)(7+f)\alpha^2+2(1+f)^2\beta^2)+B^2(1+c^2+f+4cf\alpha-(23+f(35+8f))\alpha^2-7\beta^2-f(11+4f)\beta^2))) + AB(-2(-1+B)Bc^2\alpha-(-1+B)c(-2-\alpha^2-\beta^2+2B(1+(1+f)\alpha^2+(3+f)\beta^2)) + 2\alpha(1+f+\alpha^2+\beta^2-B(6+4\alpha^2+4\beta^2+f(4+\alpha^2+\beta^2)) + B^2(5+11\alpha^2+11\beta^2+f(3+(9+2f)\alpha^2+(9+2f)\beta^2))))]x^2y^2 - 2(B-1)[A^3(1+2B(1+f)) - A^2B(2\alpha+B(1+f)(c+2\alpha)) - B^2(1+f)(c-2\alpha)(\alpha^2+\beta^2) + A(-1+B(-1-2f+2c\alpha-3\alpha^2+\beta^2+2B(1+\alpha^2+\beta^2+f(1+(c-\alpha)\alpha+\beta^2))))]xy^3 + (B-1)[A^2(1+B(2+3f+B(-1+f^2))) + AB(c-Bc-2(2+f)(1+Bf)\alpha) + B(1+f)(-1+B(1+(2+f)\alpha^2+(2+f)\beta^2))]y^4. Astfel, $C_{05}(x, y) \equiv 0$, dacă $\{c = 2\alpha, f = -2 + (1-B)/(B(\alpha^2+\beta^2))\}$ sau $\{c = (A(A^2-2B\alpha^2+2B\beta^2)+2A(-1+B)(1+A\alpha)-(A-2B\alpha)(\alpha^2+\beta^2))/(B((A-\alpha)^2+\beta^2)), f = (1-B-A(1+B)(A-2\alpha)-2B(\alpha^2+\beta^2))/(B((A-\alpha)^2+\beta^2))\} \Rightarrow (3.100)$ și (3.101), respectiv. $\square$$

3.6.3. Integrabilitatea sistemelor $\{(2.6), (3.82)\}$ - $\{(2.6), (3.101)\}$.

Sistemele $\{(2.6), (3.82)\}$ și $\{(2.6), (3.84)\}$ sunt integrabile, au următorii factori integranți, respectiv:

$$\mu(x, y) = 1/((x-1)(1+x+cx)(y-B)); \quad \mu(x, y) = 1/((x-1)(B-y)(B_1-y)),$$

și pentru aceste sisteme punctul critic $(0, 0)$ este de tip centru.

Sistemul $\{(2.6), (3.83)\}$ ($\{(2.6), (3.85)\}$) are prima mărime Lyapunov $L_1 = 2bB(1+c)$ ($L_1 = -(2A(1+A^2))/(BB_1)$) care se anulează pentru $b = 0$ ($A = 0$). Astfel, sistemul $\{(2.6), (3.83)\}$

$\{(2.6), (3.85)\}$ este integrabil și are factorul integrant de forma $\mu(x, y) = 1/((-1+x)(1+x+cx)(y-B))$ ($\mu(x, y) = 1/((x-1)(B-y)(B_1-y))$).

Sistemul $\{(2.6), (3.86)\}$. Dacă anulăm prima mărime Lyapunov $L_1 = -2(A+B)(1+A^2+2AB+B^2-BB_1)/(BB_1) = 0$, atunci avem factorul integrant $\mu(x, y) = (x-1)^{(1+(A+B)^2)/(BB_1)} \cdot (B+Ax-y)^{(-B(2+(A+B)^2)+(1-A^2+B^2)B_1)/(B-B_1)} (B_1+(A+B)x-B_1x-y)^{-2-A^2+B^2+B(1+2A(A+B))/(B-B_1)} \cdot \exp[-(-1+(A+B)(B^3+A(-1+2B^2)+B_1-B^2B_1+A^2(B+B_1)))x/(BB_1)]$.

Sistemul $\{(2.6), (3.87)\}$ are factor integrant de forma

$$\mu(x, y) = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} l_3^{\alpha_3} f_4^{\alpha_4}, \quad (3.102)$$

unde $l_1 = x-1$, $l_2 = B+Ax-y$, $l_3 = A+A(-1+aB)x+aB(Bx-y)$, $f_4 = \exp[A(-1+aB)x+aB(Bx-y)]$;

$$\alpha_1 = (-2aA^3B^2(-1+aB) - A^4(-1+aB)^2 + a^2B^4(-1+B^2) + 2aAB^2(-1+aB)(-1+B^2) + A^2(-2+B(B-a(-2+B(a+2B)))))/A^2,$$

$$\alpha_2 = -1 + A^2 - B^2 + a^2B^2(A+B)^2(1+A^2-B^2)/A^2 + a(-(1+A^2)/A - 2(1+A^2)B - (1+2A^2)B^2/A + 2B^3 + (2B^4)/A + (1+A^2)/(A-aB^2)),$$

$$\alpha_3 = a(1+A^2)/(aB^2-A), \quad \alpha_4 = -(A+B)(1+A^2-B^2)(aB^2+A(-1+aB))/(A^2B);$$

$$\text{pentru } L_1 = -2(a+A+aA^2-aB^2)(-A^2+aB-AB+aA^2B+2aAB^2+aB^3)/A^2 = 0.$$

La fel, *Sistemul* $\{(2.6), (3.88)\}$, cu $L_1 = -2(1+BB_1-B_1^2+a^2B^2B_1^2)(1-BB_1-aB^2B_1+B_1^2+2aBB_1^2+a^2B^2B_1^2)/(B^2B_1) = 0$, are factor integrant de forma (3.102), unde

$$l_1 = x-1, \quad l_2 = B_1+aBB_1x-y, \quad l_3 = B-(B-B_1-aBB_1)x-y, \quad f_4 = \exp[(B-B_1-aBB_1)x+y];$$

$$\alpha_1 = (B_1+B(-2+aB_1(1+(1+aB)B_1(B_1+B(-1+aB_1)))))/B,$$

$$\alpha_2 = (-B_1+B(-1+aB_1(-1+(1+aB)B_1(B-(1+aB)B_1))))/B,$$

$$\alpha_3 = (1+aBB_1^2+a^2B^2B_1^2)/(B_1(-B+B_1+aBB_1)),$$

$$\alpha_4 = -(1+aB)(1+aBB_1^2+a^2B^2B_1^2)/B.$$

Sistemul $\{(2.6), (3.89)\}$ cu prima mărime Lyapunov $L_1 = -(1+aB)(1+aBB_1^2+a^2B^2B_1^2)/B = 0$ are factorul integrant $\mu(x, y) = (x-1)^{-2+B/B_1} (B-y)^{-(B+B_1)/B_1} (B_1+Bx-B_1x-y)^{B(B-B_1)} \cdot \exp[(Bx-B_1x-y)/B_1]$ și are centru în $(0, 0)$.

Sistemul $\{(2.6), (3.90)\}$. Fie $l_1 = x-1$, $l_2 = 1+B(1+c)y$, $l_3 = -B^2(1+c) + (1+B^2+B^2c)x+B(1+c)y$, $f_4 = \exp[(1+B^2+B^2c)x/(B(1+c))+y]$;

$$\alpha_1 = -(1+2B^2+2B^2c)/(B^2(1+c)),$$

$$\alpha_2 = (1-B^2-B^2c)/(B^2(1+c)),$$

$$\alpha_3 = (1+B^2+B^2c)/(B^2(1+c)^2), \quad \alpha_4 = -1/B.$$

Dacă $L_1 = 2(-1 + B^2c + B^2c^2)(1 + 2B^2 + 3B^2c + B^2c^2)/(B^5(1 + c)^3) = 0$, atunci (3.102) cu l_1, l_2, l_3, f_4 și $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, menționați mai sus, este factor integrant pentru sistemul $\{(2.6), (3.90)\}$.

Sistemele $\{(2.6), (3.91)\}, \{(2.6), (3.92)\}, \{(2.6), (3.93)\}, \{(2.6), (3.96)\}, \{(2.6), (3.97)\}, \{(2.6), (3.98)\}, \{(2.6), (3.100)\}, \{(2.6), (3.101)\}$ sunt integrabile, având, respectiv, următorii factori integranți:

$$\mu(x, y) = 1/((x-1)(B+Ax-y)(BB_1+BB_1^2f+AB_1x+ABB_1fx-B_1y-BB_1fy));$$

$$\mu(x, y) = 1/((x-1)(B+Ax-y)(B-Ax+Bx+Bcx-y));$$

$$\mu(x, y) = 1/((y-B)(1+x^2-2x\alpha+\alpha^2));$$

$$\mu(x, y) = 1/((x-1)(x^2+y^2));$$

$$\mu(x, y) = 1/((x-A)(1-2y+y^2+2x\alpha-2xy\alpha+x^2\alpha^2+x^2\beta^2));$$

$$\mu(x, y) = 1/((-1-cx+y+2x\alpha)(1-2y+y^2+2x\alpha-2xy\alpha+x^2\alpha^2+x^2\beta^2));$$

$$\mu(x, y) = 1/((y-B)(1-2y+y^2+2x\alpha-2xy\alpha+x^2\alpha^2+x^2\beta^2));$$

$$\mu(x, y) = 1/((y-B-Ax)(1-2y+y^2+2x\alpha-2xy\alpha+x^2\alpha^2+x^2\beta^2)).$$

Sistemul $\{(2.6), (3.94)\} (\{(2.6), (3.95)\})$ are focar în originea de coordonate $(0, 0)$, deoarece $L_1 = -2bB/(1 + \alpha^2) \neq 0$ ($L_1 = -8l \neq 0$).

Sistemul $\{(2.6), (3.99)\}$, pentru $L_1 = -2(c - 2\alpha)(1 + 2c\alpha - 5\alpha^2 - \beta^2) = 0$, are factorul integrant $\mu(x, y) = \text{Exp}[-(cx - y - 2x\alpha)(\alpha^2 + \beta^2)](-1 - cx + y + 2x\alpha)^{-2c\alpha + 5\alpha^2 + \beta^2}(-1 + y - x(\alpha + i\beta))^{-(3/2) - (i(\alpha + c\alpha^2 - 2\alpha^3 + c\beta^2 - 2\alpha\beta^2))/(2\beta)}(-1 + y - x\alpha + ix\beta)^{(I(\alpha + c\alpha^2 - 2\alpha^3 - 2\alpha\beta^2 + \beta(3i + c\beta)))/(2\beta)}$ și centru în originea de coordonate $(0, 0)$.

3.7. Concluzii la capitolul trei.

În capitolul trei au fost supuse cercetării sistemele $SC(1 : -1)$ cu drepte invariante de multiplicitate totală cinci, inclusiv dreapta de la infinit care se presupune că este multiplă.

În urma acestei cercetări au fost obținute următoarele rezultate:

- au fost determinate condițiile pentru care dreapta de la infinit are multiplicitatea algebrică cel puțin doi (trei, patru, cinci, respectiv) pentru sistemele $SC(1 : -1)$;
- a fost determinată multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit pentru sistemele $SC(1 : -1)$;
- au fost clasificate sistemele $SC(1 : -1)$ cu dreapta de la infinit de multiplicitatea algebrică cinci;
- au fost determinate condițiile pentru care sistemul $SC(1 : -1)$ admite o dreaptă invariantă reală afină multiplă, multiplicitatea algebrică totală fiind cinci, împreună cu dreapta

de la infinit;

- au fost clasificate sistemele $SC(1 : -1)$ cu două drepte reale sau complexe și cu dreapta de la infinit, de multiplicitatea algebrică totală cinci;
- au fost clasificate sistemele $SC(1 : -1)$ cu trei drepte reale și complexe și cu dreapta de la infinit, de multiplicitatea algebrică totală cinci;
- au fost construite integralele prime Darboux sau factori integranți Darboux pentru sistemele obținute.

Clasificarea sistemelor cubice cu un număr maximal de drepte invariante, inclusiv dreapta de la infinit, și luând în considerare multiplicitățile lor, a fost efectuată în lucrarea [72] de către Llibre J. și Vulpe N. În [123] s-a arătat că în clasa sistemelor cubice diferențiale multiplicitatea maximală a unei drepte afine reale (a dreptei de la infinit) este șapte. Sistemele cubice cu două drepte invariante afine reale neparalele de multiplicitate maximală sunt clasificate în [134] și [135] de către Vacaraș O.

Ținând cont de rezultatele obținute în capitolul trei, deducem următoarele concluzii:

1. Multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit pentru sistemul $SC(1 : -1)$ este cinci.
2. Sistemul $SC(1 : -1)$ cu dreapta de la infinit de multiplicitate algebrică cinci are centru în originea de coordonate $(0,0)$, dacă și numai dacă, are integrală primă polinomială.
3. Sistemul $SC(1 : -1)$ cu dreapta de la infinit de multiplicitate algebrică trei și o dreaptă invariantă reală afină de multiplicitatea algebrică doi, are centru în originea de coordonate $(0,0)$, dacă și numai dacă, are factor integrant de forma $\mu(x, y) = 1/l_1^2$.
4. Sistemul $SC(1 : -1)$ cu dreapta de la infinit de multiplicitate algebrică doi și o dreaptă invariantă reală afină de multiplicitatea algebrică trei, are centru în originea de coordonate $(0,0)$, dacă și numai dacă, are factor integrant de forma $\mu(x, y) = 1/l_1^3$.
5. În toate cazurile $m(l_1) + m(l_\infty) \geq 5$, $m(l_1) + m(l_2) + m(l_\infty) \geq 5$, $m(l_1) + m(l_2) + m(l_3) + m(l_\infty) \geq 5$, sistemul $SC(1 : -1)$ are centru în originea de coordonate $(0,0)$, dacă și numai dacă prima marime Lyapunov este egală cu zero.

Rezultatele expuse în acest capitol au fost comunicate la conferința internațională MITRE-2019, conferința IMCS-55, Conferința științifică internațională "Modern problems of Differential Equations and their application", dedicated to the 100th anniversary of the professor S.D. Eidelman, 2020, Chernivtsi, Ucraina, și în cadrul seminarului științific "Ecuatii Diferențiale și Algebre", Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chișinău), 27 noiembrie 2018 și 18 iunie 2019, și publicate în [116], [117], [119], [120], [115], [122].

4. SISTEME DIFERENȚIALE CUBICE CU SINGULARITĂȚI (1:-2) REZONANTE ȘI CU DREPTE INVARIANTE DE MULTIPLICITATE TOTALĂ ȘASE ȘI ȘAPTE (INCLUSIV DREAPTA DE LA INFINIT).

Considerăm sistemul cubic

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = y(-2 + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2) \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad \gcd(P, Q) = 1, \quad (4.1)$$

unde x, y sunt variabile, iar a_{ij}, b_{ij} sunt coeficienți reali.

Rezultatele principale din această secțiune sunt expuse în următoarele 3 teoreme:

Teorema 4.0.1. *Sistemul cubic (4.1) are drepte invariante afine de două direcții de multiplicitate algebrică totală șase, dacă și numai dacă el are una dintre următoarele cinci-sprezece forme:*

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq \{0, 1\}, \dot{y} = y(y-1)(by+2), b \neq \{0, -2\}; \quad (4.2)$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq \{0, 1\}, \dot{y} = -2y(y-1)^2; \quad (4.3)$$

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \dot{y} = y(y-1)(cy+2), c \neq \{0, -2\}; \quad (4.4)$$

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \dot{y} = -2y(y-1)^2; \quad (4.5)$$

$$\dot{x} = x((2-c)y + 3cy^2 + 2)/2, \dot{y} = y(y-1)(cy+2), c \neq \{0, -2\}; \quad (4.6)$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1), \dot{y} = y(x+ax-2), a \neq \{0, 1\}; \quad (4.7)$$

$$\dot{x} = x((1+d)y^2 + 1), \dot{y} = y(y-1)(dy+2), d \neq \{0, -2\}; \quad (4.8)$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1), \dot{y} = y(-2+3x+(a-2)x^2), a \neq \{0, 1\}; \quad (4.9)$$

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq \{0, 1\}, \dot{y} = y(py^2 + qy - 2), q^2 + 8p < 0; \quad (4.10)$$

$$\dot{x} = x(px^2 + qx + 1), q^2 - 4p < 0, \dot{y} = y(y-1)(cy+2), c \neq \{0, -2\}; \quad (4.11)$$

$$\dot{x} = x(px^2 + qx + 1), q^2 - 4p < 0, \dot{y} = y(ry^2 + sy - 2), s^2 + 8r < 0; \quad (4.12)$$

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \dot{y} = y(py^2 + qy - 2), q^2 + 8p < 0; \quad (4.13)$$

$$\dot{x} = x(px^2 + qx + 1), \quad q^2 - 4p < 0, \quad \dot{y} = -2y(y - 1)^2; \quad (4.14)$$

$$\dot{x} = x(py^2 + qy + 2)/2, \quad \dot{y} = y(py^2 + qy - 2), \quad q^2 + 8p < 0; \quad (4.15)$$

$$\dot{x} = x(px^2 + qx + 1), \quad q^2 - 4p < 0, \quad \dot{y} = -y(2 + qx), \quad (4.16)$$

unde $a, b, c, d, q, p, r, s \in \mathbb{R}$. Sistemele (4.2)-(4.16) sunt Darboux integrabile și au, respectiv, următoarele integrale prime:

$$(4.2)-F(x, y) = (x - 1)^{\frac{2(2+b)}{(1-a)b}} x^{\frac{2(2+b)}{b}} (ax - 1)^{\frac{2a(2+b)}{(a-1)b}} (y - 1)^{\frac{2}{b}} y^{-\frac{2+b}{b}} (by + 2);$$

$$(4.3)-F(x, y) = e^{\frac{a-1}{y-1}} x^{2-2a} (ax - 1)^{2a} (y - 1)^{a-1} y^{1-a} (x - 1)^{-2};$$

$$(4.4)-F(x, y) = e^{\frac{2c+4}{x-1}} x^{-4-2c} (x - 1)^{4+2c} (y - 1)^2 y^{-2-c} (cy + 2)^c;$$

$$(4.5)-F(x, y) = e^{\frac{2}{1-x} + \frac{1}{1-y}} x^2 (x - 1)^{-2} (y - 1)^{-1} y;$$

$$(4.6)-F(x, y) = e^{\frac{1}{2+cy} - \frac{5c+2c^2}{4(y-1)}} x^2 (y - 1)^{\frac{c^2+5c-4}{2}} (cy + 2)y;$$

$$(4.7)-F(x, y) = e^{\frac{1}{ax-1} + \frac{3a-4a^2}{x-1}} x^2 (x - 1)^{4a^2-6a-1} (ax - 1)y;$$

$$(4.8)-F(x, y) = x^2 y(dy + 2)^{-\frac{2+d}{d}} (y - 1)^{-2};$$

$$(4.9)-F(x, y) = x^2 y(ax - 1)^{\frac{2-2a}{a}} (x - 1)^{-1};$$

$$(4.10)-F(x, y) = (x - 1)^{-\frac{1}{a}} x^{\frac{1-a}{a}} (ax - 1)^{\frac{1-a}{2a}} \left(y + \frac{q+\sqrt{\gamma}}{2p}\right)^{(a-1)(\sqrt{\gamma}-q)\delta} \left(y + \frac{q-\sqrt{\gamma}}{2p}\right)^{(a-1)(\sqrt{\gamma}+q)\beta}, \quad \text{unde}$$

$$\gamma = q^2 + 8p, \quad \delta = \frac{128p^3 - q^3 \gamma \sqrt{\gamma} + q^3 \sqrt[3]{\gamma}}{512ap^3 \sqrt{\gamma}}, \quad \beta = \frac{128p^3 + q^3 \gamma \sqrt{\gamma} - q^3 \sqrt[3]{\gamma}}{512ap^3 \sqrt{\gamma}};$$

$$(4.11)-F(x, y) = (y - 1)^{\frac{2}{c}} x^{\frac{-4-2c}{c}} (cy + 2)y^{\frac{-2-c}{c}} \left(x + \frac{q+\sqrt{\lambda}}{2p}\right)^{-(c+2)(\sqrt{\lambda}-q)\beta} \left(x + \frac{q-\sqrt{\lambda}}{2p}\right)^{(c+2)(\sqrt{\lambda}+q)\gamma},$$

$$\text{unde } \lambda = q^2 - 4p, \quad \beta = \frac{-16p^3 + 4pq^3 \sqrt{\lambda} - q^5 \sqrt{\lambda} + q^3 \sqrt[3]{\lambda}}{16cp^3 \sqrt{\lambda}}, \quad \gamma = \frac{16p^3 + 4pq^3 \sqrt{\lambda} - q^5 \sqrt{\lambda} + q^3 \sqrt[3]{\lambda}}{16cp^3 \sqrt{\lambda}};$$

$$(4.12)-F(x, y) = x^{-32p^3 \lambda \delta} \left(x + \frac{q+\lambda}{2p}\right)^{-(q-\lambda)(16p^3 - \gamma)\delta} (2px + q - \lambda) y^{-16p^3 \lambda \delta} \left(y + \frac{s-\beta}{2r}\right)^{-16p^3 s(q-\lambda)\delta + \beta/(s+\beta)}$$

$$\cdot (2ry + s + \beta)/4pr, \quad \text{unde } \lambda = \sqrt{q^2 - 4p}, \quad \beta = \sqrt{8r + s^2}, \quad \gamma = q^3 \lambda (4p - q^2 + \lambda^2), \quad \delta = 1/(q + \lambda)(16p^3 - \gamma);$$

$$(4.13)-F(x, y) = e^{\beta/(x-1)} (x - 1)^{\beta} x^{-\beta} y^{-q\lambda + 8p + q^2} \left(y + \frac{q+\lambda}{2p}\right)^{q\lambda - 4p - q^2} \left(y + \frac{q-\lambda}{2p}\right)^{-4p}, \quad \text{unde } \lambda = \sqrt{8p + q^2}, \quad \beta = 2q\lambda - 16p - 2q^2;$$

$$(4.14)-F(x, y) = e^{\beta/(y-1)} (y - 1)^{\beta} x^{-2\beta} y^{-\beta} \left(x + \frac{q+\lambda}{2p}\right)^{q\lambda + \beta - q^2} \left(x + \frac{q-\lambda}{2p}\right)^{4p}, \quad \text{unde } \lambda = \sqrt{q^2 - 4p}, \quad \beta = q\lambda - \lambda^2;$$

$$(4.15)-F(x, y) = (py^2 + qy - 2)^{-2} x^2 y / (16p^2);$$

$$(4.16)-F(x, y) = (px^2 + qx + 1)^{-1} x^2 y.$$

Teorema 4.0.2. *Sistemul cubic (4.1) are drepte invariante afine de trei direcții de multiplicitate algebrică totală șase, dacă și numai dacă el are una dintre următoarele treisprezece forme:*

$$\dot{x} = -x(x - 1), \quad \dot{y} = y(y - 1)(2 - x - y); \quad (4.17)$$

$$\dot{x} = x(1 - axy + (1 + d)y^2 + ax), \quad \dot{y} = y(y - 1)(dy + 2); \quad (4.18)$$

$$\dot{x} = x(x - 1)(ax - 1), \quad \dot{y} = y(-2 + 3x + dy + (a - 2)x^2 - dxy); \quad (4.19)$$

$$\dot{x} = x(1 - 2fx + f^2x^2 + 2fxy + (1 + c)y^2), \dot{y} = y(y - 1)(2 + cy); \quad (4.20)$$

$$\dot{x} = x(4f^2x^2 + 4c^2fxy + c^3(4 + c)y^2 + 8cfx + 4c^2)/(4c^2), \dot{y} = y(y - 1)(cy + 2); \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x - 1)(ax - 1), \\ \dot{y} &= -y(16a^2 - 24a^3x - 8a^3(1 + 2a)x^2 + 8afy - 8a^2fxy + f^2y^2)/(8a^2); \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\dot{x} = x(x - 1)(ax - 1), \dot{y} = -y(f^2y^2 - 8fxy + 8(2 - a)x^2 - 24x + 8fy + 16)/8; \quad (4.23)$$

$$\dot{x} = x(f^2x^2 + 4fxy - 4y^2 - 4fx + 4)/4, \dot{y} = -2y(y - 1)^2; \quad (4.24)$$

$$\dot{x} = x(x - 1)^2, \dot{y} = -y(2b^2 - 3b^2x + b^2x^2 - 4by + 4bxy + 2y^2)/(b^2); \quad (4.25)$$

$$\dot{x} = x(x - 1)((2 + c)x - 2)/2, \dot{y} = y(y - 1)(4 - (4 + c)x + 2cy)/2; \quad (4.26)$$

$$\dot{x} = x(x - 1)(-2 + 2x - c)/(2 + c), \dot{y} = y(y - 1)(4 + 2c - (4 + c)x + 2cy + c^2y)/(2 + c); \quad (4.27)$$

$$\dot{x} = x(x - 1)(ax - 1), \dot{y} = -y(18a - 9a(1 + a)x + 6l(1 + a)y - 9alxy + 2l^2y^2)/(9a); \quad (4.28)$$

$$\dot{x} = x(x - 1)^2, \dot{y} = -y(2b^2 - 2b^2x - 4by + 3bxy + 2y^2)/b^2, \quad (4.29)$$

unde $abcdf(a - 1)(c + 2)(d + 2) \neq 0$ și $a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$. Sistemele (4.17)-(4.29) sunt Darboux integrabile și au, respectiv, următoarele integrale prime (factori integranți):

$$(4.17)-F(x, y) = e^{xy/(y-1)}(x - 1)(y - 1)(x + y - 1)^{-1};$$

$$(4.18)-F(x, y) = x^2y(dy + 2)^{-\frac{2+d}{d}}(y - ax - 1)^{-2};$$

$$(4.19)-F(x, y) = x^2y(ax - 1)^{\frac{2-2a}{a}}(dy + 2x - 2)^{-1};$$

$$(4.20)-F(x, y) = e^{2fx/(1-fx-y)}x^2y(2 + cy)^{-(2+c)/c}(fx + y - 1)^{-2};$$

$$(4.21)-F(x, y) = e^{-8fx/(2c+2fx+c^2y)}x^4(y - 1)^{-2-cy^2}(2fx + c(2 + cy))^{-4};$$

$$(4.22)-F(x, y) = -e^{fy/(4a(ax-1)-fy)}(x - 1)^{2a-2}x^2y(4a - 4a^2x + fy)^{-1};$$

$$(4.23)-F(x, y) = e^{fy/(4x-fy-4)}x^2(ax - 1)^{-2+2/a}y(4x - fy - 4)^{-1};$$

$$(4.24)-F(x, y) = e^{2fx/(2-fx-2y)}x^2y(-2 + fx + 2y)^{-2};$$

$$(4.25)-F(x, y) = e^{y/(b(1-x)-y)}x^2y(b(x - 1) + y)^{-1};$$

$$(4.26)-\mu(x, y) = (2x + cx - 2)^{1/(2+c)}(y - 1)^{-(1+c)/(2+c)}(2x + cx - cy - 2)^{-(4+c)/(4+2c)}x^{-2}y^{-3/2}(x - 1)^{-1/2};$$

$$(4.27)-\mu(x, y) = (x - 1)^{1/(2+c)}(y - 1)^{-(1+c)/(2+c)}(2x - 2 - c)^{-1/2}x^{-2}y^{-3/2}(2x - cy - 2)^{-(4+c)/(4+2c)};$$

$$(4.28)-\mu(x, y) = (ax - 1)^{1/(2-2a)}(3ax - ly - 3)^{(2-a)/(2a-2)}(3ax - ly - 3a)^{(1-2a)/(2a-2)}x^{-2}y^{-3/2}(x - 1)^{a/(2a-2)};$$

$$(4.29)-F(x, y) = e^{(1-x)/(b(y+b(x-1)))}x^{-2/b^2}y^{-1/b^2}(y + b(x - 1))^{1/b^2}.$$

Teorema 4.0.3. *Sistemul cubic (4.1) are drepte invariante afine de patru direcții de multiplicitate algebrică totală șase, dacă și numai dacă el are una dintre următoarele șase forme:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x-1)(ax-1), \\ \dot{y} &= -\frac{y}{bg}y(2bg-3abgx-abg(1-2a)x^2-2(b+g)y+2a(b+g)xy+2y^2); \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x-1)(ax-1), \\ \dot{y} &= y(-2ng+3ngx-ng(2-a)x^2+2(n-g)y-2(n-g)xy+2y^2)/(ng); \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(f+fsx+f^2sx+f^2s^2x^2-2y^2+fy^2)/f, \\ \dot{y} &= (1-y)y(2f+fsx+f^2sx-2y)/f; \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\dot{x} = (x-1)^2x, \quad \dot{y} = -y(2bg-3bgx+bgx^2-2(b+g)y+2(b+g)xy+2y^2)/bg; \quad (4.33)$$

$$\dot{x} = x(1-mx-n^2x^2-mnx^2+mx-y^2), \quad \dot{y} = -2y(1-y)^2; \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(4-2ndx-2dfx+nd^2fx^2-nd^2xy-d^2fxy+4dy^2+d^2y^2)/4, \\ \dot{y} &= y(y-1)(2+dy), \end{aligned} \quad (4.35)$$

unde $am(a-1)(b-g)(n+g)(f-1)(n-f) \neq 0$ și $a, b, d, f, g, n, m \in \mathbb{R}$. Sistemele (4.30)-(4.35) sunt Darboux integrabile și au, respectiv, următoarele integrale prime (factori integranți):

$$(4.30)-F(x, y) = (x-1)^{2(a-1)(b-g)/g}x^{-2+2b/g}y^{-1+b/g}(b(ax-1)+y)(g(ax-1)+y)^{-b/g}/(b(g-b));$$

$$(4.31)-F(x, y) = (x-1)x^{-2-2n/g}(ax-1)(nx-y-b)y^{-1-n/g}(gx+y-g)^{n/g};$$

$$(4.32)-\mu(x, y) = (1+sx-y)^{f/2}(f+fsx-y)^{-(1+f)/2}(y-1)^{(1-f)/2}x^{-2}(1+fsx-y)^{-1/2}y^{-3/2};$$

$$(4.33)-F(x, y) = x^2(b-g)y^{b-g}(b(x-1)+y)^g(g(x-1)+y)^{-b};$$

$$(4.34)-F(x, y) = x^{2(2n+m)}(1+nx-y)^{-2n}y^{2n+m}((n+m)x+y-1)^{-2(n+m)};$$

$$(4.35)-F(x, y) = x^{2(n-f)}(y-1)^{-1/2(2+d)(n-f)}y^{n-f}(ndx-dy-2)^{-2n}(dfx-dy-2)^{2f}.$$

4.1. Multiplicitatea algebrică maximală a dreptelor $x = a, y = a, a \in \mathbb{C}$ și $Z = 0$.

4.1.1. Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $x = 0$ ($y = 0$).

Vom determina multiplicitatea algebrică maximală a dreptei invariante $x = 0$ ($y = 0$) a sistemului (4.1). Pentru aceasta calculăm determinantul $E_1(X)$. El are forma $E_1(X) = xy(6 + \omega(x, y))$, unde $\omega(x, y)$ este un polinom de gradul șase și $\omega(0, 0) \neq 0$. Expresia lui $E_1(X)$ ne spune că dreapta invariantă $x = 0$ ($y = 0$) are multiplicitatea algebrică exact egală cu unu. În așa mod, s-a demonstrat următoarea leamă:

Lema 4.1.1. Pentru sistemul (4.1) multiplicitatea algebrică maximală a dreptei invariante $x = 0$ ($y = 0$) este unu.

4.1.2. Multiplicitatea algebrică maximală a dreptelor $x = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$.

Fără a pierde generalitatea, considerăm $\alpha = 1$. Astfel, sistemul (4.1) poate fi scris în următoarea formă

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x-1)(ax+by-1) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -y(2+cx+dy+mx^2+nxy+sy^2) \equiv Q(x, y).\end{aligned}\tag{4.36}$$

Pentru (4.36) polinomul $E_1(X)$ arată astfel: $E_1(X) = xy(x-1)(A_2(y) + A_3(y)(x-1) + A_4(y)(x-1)^2 + A_5(y)(x-1)^3 + A_6(y)(x-1)^4 + A_7(y)(x-1)^5)$, unde $A_j(y), j = 2, \dots, 7$ sunt polinoame în y . De exemplu, $A_2(y) = A_{21}(y)A_{22}(y)$, unde $A_{21}(y) = 2+c+m+dy+ny+sy^2$, iar $A_{22}(y) = -1+a^2-c+ac-m+am+2(-b+ab-d+ad-n+an)y+(b^2+bd+bn-3s+3as)y^2+2bsy^3$. Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = 1$ este cel puțin doi, dacă se realizează identitatea $A_2(y) \equiv 0$. Fie că $A_2(y) \equiv 0$. Deoarece $GCD(P, Q) = 1$, atunci polinomul $A_{21}(y)$ nu este identic zero, prin urmare, cerem ca $A_{22}(y)$ să fie identic zero. Identitatea $A_{22}(y) \equiv 0$ se realizează, dacă se îndeplinește una dintre următoarele trei serii de condiții:

$$1) \ b = 0, a = 1; \quad 2) \ a = 1, n = -b - d, s = 0; \quad 3) \ n = -b - d, m = -1 - a - c, s = 0.$$

În fiecare dintre cazurile 1), 2) și 3) multiplicitatea algebrică a dreptei $x = 1$ este cel puțin trei, dacă polinomul $A_3(y)$ va fi identic zero. Astfel:

În Cazul 1) obținem $A_3(y) = A_{21}(y)A_{31}(y)$, unde $A_{31}(y) = 2 + c + m + 2(d + n)y + 3sy^2$. Dacă $A_{31}(y) \equiv 0$, atunci $\deg(GCD(P, Q)) > 0$. Prin urmare, $A_{31}(y)$ nu este identic zero, și, în acest caz, multiplicitatea dreptei $x = 1$ este doi.

În cazul 2) avem $\{A_3(y) = 4+4c+c^2+4m+2cm+m^2+(b^2-2bd-bcd-b^m-bdm)y^2+2b^2dy^3 \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow \{c = -3, d = 0, m = 1\} \Rightarrow A_4(y) = -4b^2y^2 \neq 0$.

Sistemul (4.1) are forma

$$\dot{x} = x(x-1)(x+by-1), \dot{y} = y(-2+3x-x^2+bxy), b \neq 0.\tag{4.37}$$

În cazul 3) avem $\{A_3(y) = (-1+a+by)(-6+6a-2c+2ac+(3b+bc-3d+3ad)y+2bdy^2) \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow \{d = 0, c = -3, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow A_4(y) = -2(-1+a+by)(-3+3a+2by) \neq 0$. Sistemul (4.1) arată astfel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x-1)(ax+by-1), \\ \dot{y} &= y(-2+3x+(a-2)x^2+bxy), (a, b) \neq (1, 0)\end{aligned}\tag{4.38}$$

și are dreptele invariante: $l_1 \equiv x = 0$, $l_{2,3,4} \equiv x - 1 = 0$, $l_5 \equiv y = 0$.

Observăm, că sistemul (4.37) este un caz particular al sistemului (4.38).

Lema 4.1.2. *Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei invariante $l \equiv x - \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, a sistemului (4.1) este trei. Dacă $l = 0$ are multiplicitatea algebrică trei, atunci printr-o transformare de coordonate și rescalarea timpului, sistemul (4.1) poate fi scris sub forma (4.38) și dreapta $l \equiv x - 1 = 0$ este unica dreaptă invariantă paralelă la dreapta $x = 0$.*

4.1.3. Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $y = 1$.

Dreapta $y = 1$ este dreaptă invariantă pentru sistemul (4.1), dacă și numai dacă (4.1) arată astfel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(kx^2 + jxy + ry^2 + ax + by + 1) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= y(y - 1)(cx + dy + 2) \equiv Q(x, y).\end{aligned}\tag{4.39}$$

Pentru a determina în clasa sistemelor (4.39) multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $y - 1$, scriem $E_1(X)$ astfel

$$\begin{aligned}E_1(X) &= xy(y - 1)(B_2(x) + B_3(x)(y - 1) + B_4(x)(y - 1)^2 + B_5(x)(y - 1)^3 \\ &\quad + B_6(x)(y - 1)^4 + B_7(x)(y - 1)^5).\end{aligned}$$

Luând în considerare $GCD(P, Q) = 1$, polnomul $B_2(x) = B_{21}(x)B_{22}(x)$, unde $B_{21}(x) = 1 + b + r + ax + jx + kx^2$ și $B_{22}(x) = -2 + 2b - 3d + bd - d^2 + 2r + dr + 2(2a - 2c + ad - cd + 2j + dj)x + (ac - c^2 + 6k + 3dk + cj)x^2 + 2ckx^3$ este identic zero, dacă se îndeplinește una dintre următoarele trei serii de condiții:

$$4) \ c = 0, d = -2; \quad 5) \ d = -2, k = 0, c = a + j; \quad 6) \ k = 0, c = a + j, r = 1 - b + d.$$

În cazul 4) condiția $GCD(P, Q) = 1$ implică $B_3(x) = 2x^2(a + j + kx)(2a + 2j + 3kx) \neq 0$.

În cazul 5) avem $\{B_3(x) = (a + j)^2(b + 2ax)x^2 \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow \{a = b = 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow B_4(x) = 2j^2x^2 \neq 0$. Sistemul (4.39) capătă forma

$$\dot{x} = x(jxy - y^2 + 1), \dot{y} = y(y - 1)(2 + jx - 2y), j \neq 0.\tag{4.40}$$

În cazul 6) am obținut $B_3(x) = B_{31}(x)B_{32}(x)$, unde $B_{31}(x) = 2 + d + ax + jx$ și $B_{32}(x) = 4b + 2bd + (6a + ab + 3ad + bj)x + (2a^2 + 2aj)x^2$. Presupunem $B_3(x) \equiv 0$. După cum $GCD(P, Q) = 1$, polinomul $B_{31}(x)$ nu este identic zero și, prin urmare, $B_{32}(x)$ este identic zero, i. e. $\{a = b = 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow B_4(x) = (2 + d + jx)(6 + 3d + 2jx) \neq 0$. Sistemul (4.39) arată astfel:

$$\dot{x} = x(jxy + (1 + d)y^2 + 1), \dot{y} = y(y - 1)(2 + jx + dy), (d, j) \neq (-2, 0).\tag{4.41}$$

El posedă dreptele invariante: $l_1 \equiv x = 0$, $l_2 \equiv y = 0$, $l_{3,4,5} \equiv y - 1 = 0$.

Uşor se observă, că sistemul (4.40) este un caz particular al sistemului (4.41).

Lema 4.1.3. *Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei invariante $l \equiv y - \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, a sistemului (4.1) este trei. Dacă $l = 0$ are multiplicitatea algebrică trei, atunci printr-o transformare de coordonate şi rescalarea timpului sistemul (4.1) poate fi scris sub forma (4.41). Dreapta $l \equiv y - 1 = 0$ este unica dreaptă invariantă a lui (4.41) paralelă la dreapta $y = 0$.*

4.1.4. *Multiplicitatea algebrică maximală a dreptelor $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Dreapta $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este invariantă pentru sistemul (4.1), dacă şi numai dacă (4.1) arată astfel:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(px^2 + qx + 1) \equiv P(x, y), \quad q^2 - 4p < 0, \\ \dot{y} &= -y(2 + cx + dy + mx^2 + nxy + sy^2) \equiv Q(x, y). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Pentru a determina multiplicitatea algebrică maximală a dreptei $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, scriem $E_1(X)$ astfel:

$$E_1(X) = xy(px^2 + qx + 1)(A_2(x, y) + A_3(x, y)(px^2 + qx + 1)),$$

unde

$$\begin{aligned} A_2(x, y) &= (m^2p - c^2p^2 - 2mp^2 + 2cmpq + cp^2q - m^2q^2 - mpq^2 + (-2cmp^2 + 2cp^3 + 2m^2pq - \\ &c^2p^2q + mp^2q - 2p^3q + 2cmpq^2 + cp^2q^2 - m^2q^3 - mpq^3)x + (-3dmp^2 - 3cnp^2 + 4dp^3 + 3mnpq + \\ &np^2q)y + (-2n^2p^2 + 2d^2p^3 - 4mp^2s + 6sp^3)y^2 + (-3mnp^2 + 3cdp^3 + 4np^3 - 3dmp^2q - dp^3q + 3mnpq^2 + \\ &np^2q^2)xy + (4dnp^3 - 2n^2p^2q + 4cp^3s - 4mp^2qs - p^3qs)xy^2 + 5p^3s(d + n)xy^3 + 3p^3s^2y^4)/p^3. \end{aligned}$$

Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, este cel puţin doi, dacă are loc identitatea $A_2(x, y) \equiv 0$. Luând în considerare că coeficienţii sistemului sunt numere reale şi că $GCD(P, Q) = 1$, ultima identitate ne furnizează următoarea serie de condiţii: $\{d = n = m = s = 0, c = q\}$. În acest caz obţinem sistemul (4.16) din teorema (4.0.1) care are dreptele invariante: $l_1 \equiv x = 0$, $l_{2,3} \equiv x + \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0$, $l_{4,5} \equiv x + \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0$, $l_6 \equiv y = 0$. Pentru acest sistem polinomul $E_1(X)$ are forma $E_1(X) = 2xy(3 + qx)(1 + qx + px^2)^2$ şi el nu se divide la $(px^2 + qx + 1)^3$.

Lema 4.1.4. *Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei invariante complexe $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, a sistemului (4.1) este doi.*

4.1.5. *Multiplicitatea algebrică maximală a dreptelor $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Dreapta $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este invariantă pentru sistemul (4.1), dacă și numai dacă (4.1) arată astfel:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(kx^2 + jxy + ry^2 + ax + by + 1) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= y(py^2 + qy - 2) \equiv Q(x, y), q^2 + 8p < 0.\end{aligned}\tag{4.43}$$

Pentru (4.43) avem

$$E_1(X) = xy(py^2 + qy - 2)(A_2(x, y) + A_3(x, y)(py^2 + qy - 2)),$$

unde $A_2(x, y) = (2b^2p^2 - 3p^3 + 2bp^2q - 4p^2r - 4bpqr - 2pq^2r + 4pr^2 + 2q^2r^2 + (6bjp^2 - ap^3 + 2jp^2q + 6ap^2r - 6jpqr)x + 2p^2(2j^2 + a^2p + 4kr)x^2 + 5akp^3x^3 + 3k^2p^3x^4 + (-2bp^3 - b^2p^2q + p^3q - bp^2q^2 + 4bp^2r + 4p^2qr + 2bpq^2r + pq^3r - 4pqr^2 - q^3r^2)y + (3abp^3 - jp^3 - 3bjp^2q + ap^3q - jp^2q^2 + 6jp^2r - 3ap^2qr + 3jppq^2r)xy + 5jp^3x^3y + (4bkp^3 + 4ajp^3 - 2j^2p^2q + kp^3q - 4kp^2qr)x^2y)/p^3$. Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este cel puțin doi, dacă are loc identitatea $A_2(x, y) \equiv 0$. Ținând cont de condiția $GCD(P, Q) = 1$ și luând în considerare faptul că coeficienții sistemului sunt reali, identitatea $A_2(x, y) \equiv 0$ se realizează, dacă se îndeplinesc condițiile $\{a = k = j = 0, b = q/2, r = 3p/2\}$. În acest caz avem sistemul 14) din teorema (4.0.1) ce posedă dreptele invariante $l_1 \equiv x = 0, l_{2,3} \equiv y + \frac{q + \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0, l_{4,5} \equiv y + \frac{q - \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0, l_6 \equiv y = 0$. Multiplicitatea dreptelor $l_{4,5}$ este exact doi, deoarece $(py^2 + qy - 2)^3$ nu divide polinomul $E_1(X) = -xy(py^2 + qy - 2)^2(-6 - qy + 3py^2)/4$, calculat pentru sistemul 14).

Lema 4.1.5. *În clasa sistemelor (4.1) multiplicitatea algebrică maximală a dreptei invariante complexe $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, a sistemului (4.1) este doi.*

4.1.6. *Multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit $Z = 0$.*

Scriem sistemul (4.1) sub forma

$$\dot{x} = x(1 + ax + by + kx^2 + lxy + ry^2), \dot{y} = y(-2 + cx + dy + mx^2 + nxy + sy^2)\tag{4.44}$$

și fie

$$\dot{x} = x(Z^2 + axZ + byZ + kx^2 + lxy + ry^2), \dot{y} = y(-2Z^2 + cxZ + dyZ + mx^2 + nxy + sy^2).\tag{4.45}$$

sistemul omogenizat asociat lui (4.44).

Vom considera că infinitul pentru (4.44) nu este degenerat, adică $\kappa(x, y) = yP_3(x, y) - xQ_3(x, y) \neq 0$, unde $P_3(x, y) = x(kx^2 + lxy + ry^2), Q_3(x, y) = y(mx^2 + nxy + sy^2)$.

Pentru sistemul (4.45) polinomul $E_1(\mathbb{X})$ arată astfel:

$$E_1(\mathbb{X}) = xy(C_0(x, y) + C_1(x, y)Z + C_2(x, y)Z^2 + \dots + C_6(x, y)Z^6), \quad (4.46)$$

unde $C_i(x, y), i = \overline{0, 6}$ sunt polinoame ce depind de x și y . Dacă $C_i(x, y) \equiv 0, i = \overline{0, j}$, atunci multiplicitatea algebrică a drepte de la infinit $Z = 0$ este $j + 2$.

În (4.46) polinomul $C_0(x, y)$ are forma $C_0(x, y) = -\kappa(x, y)C_{01}(x, y)/(xy)$, unde $\kappa(x, y) = xy[(k - m)x^2 + (l - n)xy + (r - s)y^2]$ și $C_{01}(x, y) = kmx^4 + 2knx^3y + (ln - mr + 3ks)x^2y^2 + 2lsxy^3 + rsy^4$. Luând în considerare $\kappa(x, y) \neq 0$, expresia $C_0(x, y)$ va fi echivalentă cu zero, dacă $C_{01}(x, y) \equiv 0 \Rightarrow$

- 1) $k = l = r = 0$; 2) $m = n = s = 0$; 3) $k = l = m = s = 0$;
- 4) $k = n = r = s = 0$; 5) $k = s = 0, l = mr/n$.

Astfel, în fiecare dintre cazurile 1)-5) sistemul (4.1) are dreapta de la infinit $Z = 0$ de multiplicitatea algebrică doi.

Să rezolvăm identitatea $C_1(x, y) \equiv 0$ în toate aceste cazuri.

Cazul 1). Polinomul $C_1(x, y) = -\kappa(x, y)(amx^3 + 2anx^2y + (bn + 3as)xy^2 + 2bsy^3)/(xy) \equiv 0 \Rightarrow$

a) $\{a = b = 0\} \Rightarrow C_2(x, y) = -\kappa(x, y)(mx^2 + 2nxy + 3sy^2)/xy \neq 0$, pentru $\kappa(x, y) = -xy(mx^2 + nxy + sy^2) \neq 0$;

b) $\{a = n = s = 0\} \Rightarrow C_2(x, y) = mx^2(mx^2 + b^2y^2 + bdy^2) \neq 0$, pentru $\kappa(x, y) = -mx^3y \neq 0$.

În *Cazul 2)* avem $C_1(x, y) = -\kappa(x, y)(2ckx^3 + (3dk + cl)x^2y + 2dlxy^2 + dry^3)/(xy) \equiv 0$. Luând în considerare $\kappa(x, y) = xy(kx^2 + lxy + ry^2) \neq 0$, identitatea $C_1(x, y) \equiv 0$ are următoarele soluții:

c) $\{c = d = 0\} \Rightarrow C_2(x, y) = 2\kappa(x, y)(3kx^2 + 2lxy + ry^2)/(xy) \neq 0$, deoarece $\kappa(x, y) = xy(kx^2 + lxy + ry^2) \neq 0$;

d) $\{d = k = l = 0\} \Rightarrow C_2(x, y) = -ry^2(acy^2 + c^2x^2 - 2ry^2) \neq 0$, pentru $\kappa(x, y) = rxy^3 \neq 0$.

În condițiile *Cazului 3)* expresia $C_1(x, y) = y(2an^2x^3 + n(bn - ar - cr)x^2y - dr^2y^3)$ va fi identic zero pentru $\kappa(x, y) = -xy^2(nx - ry) \neq 0$, dacă:

e) $\{d = n = 0\}$ (aceste condiții au fost studiate în cazul 2), d));

f) $\{a = b = r = 0\}$ (aceste condiții formează un subcaz al cazului 1), a));

g) $\{a = d = 0, b = cr/n\} \Rightarrow C_2(x, y) = 2y^2(n^2x^2 + nrxy + r^2y^2)/n^2 \neq 0$ pentru $\kappa(x, y) = -xy^2(nx - ry) \neq 0$.

Cazul 4). Pentru $\kappa(x, y) = -x^2y(mx - ly) \neq 0$, polinomul $C_1(x, y) = x^2(am^2x^3 - cl^2xy^2 + blmxy^2 + dlmxy^2 - 2dl^2y^3)$ este identic zero, dacă:

h) $\{a = l = 0\}$ (aceste condiții au fost studiate în cazul 1), b));

i) $\{c = d = m = 0\}$; (Aceste condiții formează un subcaz al cazului **2**), c.)

j) $\{a = d = 0, c = bm/l\} \Rightarrow C_2(x, y) = x^2(m^2x^2 + lmx y + 4l^2y^2)/l^2 \neq 0$, pentru $\kappa(x, y) = -x^2y(mx - ly) \neq 0$.

În *Cazul 5*) sistemul (4.45) are polinomul $\kappa(x, y) = -xy(mx + ny)(nx - ry)/n$, iar $C_1(x, y) = (mx + ny)(amn^2x^4 + 2an^3x^3y + (bn^3 + bmnr + dmnr - an^2r - cn^2r - cmr^2)x^2y^2 - 2dmr^2xy^3 - dnr^2y^4)/n^2$ este identic zero, dacă:

k) $\{a = b = r = 0\} \Rightarrow C_2(x, y) = x^2(m^2x^2 + lmx y + 4l^2y^2)/l^2 \neq 0$, pentru $n \neq 0$;

l) $\{a = d = 0, b = cr/n\} \Rightarrow C_2(x, y) = (mx + ny)(mn^2x^3 + n(2n^2 + mr)x^2y + 2r(n^2 + 2mr)xy^2 + 2nr^2y^3)/n^2 \neq 0$, pentru $\kappa(x, y) = -xy(mx + ny)(nx - ry)/n \neq 0$;

m) $\{a = d = 0, m = -n^2/r\} \Rightarrow C_2(x, y) = (n^4x^4 - 2n^3rx^3y - r(b^2n^2 - 2bcnr - 3n^2r + c^2r^2)x^2y^2 - 4nr^3xy^3 + 2r^4y^4)/r^2 \neq 0$, pentru $r \neq 0$.

Astfel, s-a demonstrat următoarea Lemă:

Lema 4.1.6. *În clasa sistemelor (4.1) multiplicitatea algebrică maximală a drepte de la infinit este trei.*

4.2. Configurații posibile ale dreptelor invariante de două direcții de multiplicitate totală șase.

Luând în considerare Lemele (4.1.1)-(4.1.5), pentru sistemul (4.1) avem următoarele 12 configurații de șase drepte reale invariante de două direcții:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A1})(3\mathbf{r}; 3\mathbf{r}); & \mathbf{A5})(4(1, 2)\mathbf{r}; 2\mathbf{r}); & \mathbf{A9})(2\mathbf{r}; 4(3)\mathbf{r}); \\ \mathbf{A2})(3\mathbf{r}; 3(2)\mathbf{r}); & \mathbf{A6})(3(2)\mathbf{r}; 3(2)\mathbf{r}); & \mathbf{A10})(4(3)\mathbf{r}; 2\mathbf{r}); \\ \mathbf{A3})(3(2)\mathbf{r}; 3\mathbf{r}); & \mathbf{A7})(1\mathbf{r}; 5(2, 2)\mathbf{r}); & \mathbf{A11})(1\mathbf{r}; 5(1, 3)\mathbf{r}); \\ \mathbf{A4})(2\mathbf{r}; 4(1, 2)\mathbf{r}); & \mathbf{A8})(5(2, 2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); & \mathbf{A12})(5(1, 3)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}) \end{array}$$

și următoarele șapte configurații de șase drepte invariante, două dintre care sunt complexe:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{B1})(3\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}); & \mathbf{B4})(3(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}); & \mathbf{B6})(1\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 4(2, 2)\mathbf{c}); \\ \mathbf{B2})(1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 3\mathbf{r}); & \mathbf{B5})(1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 3(2)\mathbf{r}); & \mathbf{B7})(1\mathbf{r} + 4(2, 2)\mathbf{c}; 1\mathbf{r}). \\ \mathbf{B3})(1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}); \end{array}$$

Notăm cu $3(2)\mathbf{r}$ ($4(3)\mathbf{r}$) două drepte paralele reale și diferite, una dintre care este numărată de două (trei) ori, și spunem că această dreaptă are multiplicitatea egală cu doi

(trei). Prin $5(1, 3)\mathbf{r}$ notăm trei drepte reale paralele și diferite, una dintre care are multiplicitatea trei, iar prin $1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}$ este notat un triplet de drepte paralele distincte, una dintre care este reală și două sunt complexe (nereale).

Notăm cu $(3\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 2\mathbf{c})$ configurația ce constă din șase drepte afine de două direcții: un triplet de drepte reale distincte paralele într-o direcție; o dreaptă reală și o pereche de drepte complexe (nereale) paralele în a doua direcție. Prin $(1\mathbf{r}; 5(2, 2)\mathbf{r})$ este notată configurația a șase drepte de două direcții ce constă din: o dreaptă reală (într-o direcție) și cinci drepte reale paralele, două dintre care au multiplicitatea doi fiecare (în a doua direcție).

4.2.1. Configurații nerealizabile.

În această secțiune vom arăta că în clasa sistemelor cubice de forma (4.44) (sau (4.1)) configurațiile **A4**), **A5**), **A9**) și **A10**) nu sunt realizabile.

Configurația A4) $(2\mathbf{r}; 4(1, 2)\mathbf{r})$. Printr-o transformare afină de coordonate și rescalarea timpului, sistemul cubic (4.44) cu două drepte invariante reale în direcția axei Oy și trei drepte reale invariante în direcția axei Ox , poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = x(x-1)(ax+by-1), \dot{y} = y(y-1)(cy+2), bc(c+2)(a^2+(b-1)(b-c)) \neq 0. \quad (4.47)$$

Fără a pierde generalitatea, considerăm că dreapta invariantă $y = 1$ are multiplicitatea doi. Pentru sistemul (4.47) polinomul $E_1(X)$ arată astfel:

$E_1(X) = (1-x)x(y-1)y(2+cy)[4-b^2+c-bc-4ax-4bx-3abx+2b^2x-acx+5abx^2-2by-b^2y+3cy-bcy+2b^2xy-3acxy-2bcy^2](y-1)+\varphi(x)]$, unde $\varphi(x) = (1-b)(1+b+c) - (a(c+3b-1) - 2(1-b)^2)x - a(2a+5(1-b))x^2 + 3a^2x^3$. Deoarece $\varphi(x)$ nu este identic zero, polinomul $(y-1)^2$ nu divide $E_1(X)$ și, prin urmare, dreapta invariantă $y = 1$ nu poate avea multiplicitatea doi. În așa mod, am demonstrat că configurația **A4**) nu este realizabilă.

Configurația A5) $(4(1, 2)\mathbf{r}; 2\mathbf{r})$. Sistemul (4.1) poate fi scris astfel

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1), \dot{y} = y(y-1)(bx+cy+2), a(a-1)((b+2)^2(b+2a)^2+c^2) \neq 0. \quad (4.48)$$

Polinomul $E_1(X)$ pentru (4.48) arată astfel:

$E_1(X) = -xy(x-1)(ax-1)(y-1)[(-4+2a-5b+ab-b^2+(6a-b+ab-b^2)x+2abx^2+(8b+2b^2-2c+ac-3bc)y+(2b^2+3ac)xy+5bcy^2)(x-1)+\phi(y)]$, unde $\phi(y) = (2+2b+cy)(-3+a-b+4y+2by-2cy+3cy^2)$.

Considerăm că pentru sistemul (4.48) dreapta invariantă $x = 1$ are multiplicitatea doi. Conform presupunerii $\phi(y)$ trebuie să fie identic zero, dar acest fapt nu are loc. Deci dreapta

$x = 1$ nu poate avea multiplicitatea doi. Astfel, am demonstrat că configurația **A5)** nu este realizabilă.

Configurația A9)(2r; 4(3)r) (Configurația A10)(4(3)r; 2r)). Ținând cont de Lema (4.1.3) (Lema (4.1.2)), putem considera sistemul (4.41) ((4.38)). Acest sistem nu are dreaptă invariantă descrisă de ecuația de forma $x = \alpha$ ($y = \alpha$), $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Prin urmare, configurația **A9) (A10))** nu este realizabilă.

4.3. Clasificarea sistemelor cubice (4.1) cu drepte invariante de multiplicitate totală șase și de două direcții.

Configurația A1)(3r; 3r). Printr-o transformare afină de coordonate și rescalarea timpului, orice sistem ce realizează această configurație poate fi scris sub forma (4.2) din Teorema (4.0.1). Sistemul (4.2) are dreptele invariante :

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_2 \equiv x - 1 = 0, \quad l_3 \equiv ax - 1 = 0, \quad l_4 \equiv y = 0, \quad l_5 \equiv y - 1 = 0, \quad l_6 \equiv by + 2 = 0$$

și este Darboux integrabil.

Configurația A2)(3r; 3(2)r). Orice sistem cubic cu un triplet de drepte invariante distincte paralele și o pereche de drepte invariante distincte paralele, printr-o transformare afină de coordonate, poate fi scris astfel:

$$\dot{x} = x(x-1)(ax-1) \equiv P(x, y), \quad \dot{y} = y(y-1)(bx+cy+2) \equiv Q(x, y), \quad a(a-1) \neq 0. \quad (4.49)$$

Pentru acest sistem avem $E_1(X) = xy(y-1)(x-1)(ax-1)(A_2(x) + A_3(x)(y-1))$, unde $A_2(x) = -2-3c-c^2-2(2+2a+2b+c+ac+bc)x + (6a-b-ab-b^2+3ac)x^2 + 2abx^3$, iar $A_3(x)$ este un polinom în x . Pentru ca dreapta $y-1=0$ să aibă multiplicitatea doi, cerem ca $A_2(x) \equiv 0$ și identitatea dată se realizează, dacă $\{b=0, c=-2\}$. În aceste condiții sistemul (4.49) devine sistemul (4.3) din Teorema (4.0.1). Acest sistem are dreptele invariante:

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_2 \equiv x - 1 = 0, \quad l_3 \equiv ax - 1 = 0, \quad l_4 \equiv y = 0, \quad l_{5,6} \equiv y - 1 = 0$$

și este Darboux integrabil.

Configurația A3)(3(2)r; 3r). În acest caz sistemul (4.1) poate fi scris astfel

$$\dot{x} = x(x-1)(ax+by-1) \equiv P(x, y), \quad \dot{y} = y(y-1)(cy+2) \equiv Q(x, y), \quad c(c+2) \neq 0. \quad (4.50)$$

Pentru (4.50) polinomul $E_1(X)$ are forma

$$E_1(X) = xy(y-1)(x-1)(cy+2)(A_2(y) + A_3(y)(x-1)),$$

unde $A_2(y) = -1 + a^2 + (4 - 4a - 2b + 2ab - 2c + 2ac)y + (b^2 - 2b + 3c - 3ac + bc)y^2 - 2bcy^3$. Identitatea $A_2(y) \equiv 0$ se realizează, dacă și numai dacă $\{a = 1, b = 0\}$. Conform acestor condiții sistemul (4.50) are forma (4.4) din Teorema (4.0.1), care are dreptele invariante

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_{2,3} \equiv x - 1 = 0, \quad l_4 \equiv y = 0, \quad l_5 \equiv y - 1 = 0, \quad l_6 \equiv cy + 2 = 0.$$

Configurația A6)(3(2)r; 3(2)r). Scriem sistemul (4.1) sub forma

$$\dot{x} = x(x - 1)(ax + by - 1) \equiv P(x, y), \quad \dot{y} = y(y - 1)(cx + dy + 2) \equiv Q(x, y). \quad (4.51)$$

Pentru acest sistem $E_1(X) = xy(y - 1)(x - 1)(A_2(y) + A_3(x, y)(x - 1))$, unde $A_2(y) = (2 + c + dy)((1 - a)(1 + a + c - 4y + 2by - 2cy + 2dy - 3dy^2) + by^2(2 - b + c - d + 2dy))$ și $A_3(x, y) = 4 + 2a^2 - 3c + 2ac + a^2c - c^2 + ac^2 - 10ax + 2a^2x + cx + 2acx + a^2cx - c^2x + ac^2x + 6a^2x^2 - 3acx^2 + a^2cx^2 + ac^2x^2 + 2a^2cx^3 - 8ay - 8by + 4aby + 8cy - 8acy - 2bcy + 2abcy + 2c^2y - 2ac^2y + 2dy + 4ady + a^2dy - 3cdy + 3acdy + 10abxy - 8acxy - 2bcxy + 2abcy + 2c^2xy - 2ac^2xy - 5adxy + a^2dxy + 3acdx + 3abcx^2y - 2ac^2x^2y + 3a^2dx^2y + 4b^2y^2 - 4bcy^2 + b^2cy^2 - bc^2y^2 - 10ady^2 - 4bdy^2 + 2abdy^2 + 5cdy^2 - 5acdy^2 + bcdy^2 + 2ad^2y^2 + b^2cxy^2 - bc^2xy^2 + 5abdx^2y^2 - 5acdx^2y^2 + 2b^2dy^3 - 3bcdy^3 - 3ad^2y^3$. Dreapta $x - 1 = 0$ va avea multiplicitatea doi, doar dacă $A_2(y)$ este identic zero: $\{A_2(y) \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow \{a = 1, b = 0\}$ sau $\{a = 1, c = b - 2, d = 0, b \neq 0\}$.

Dacă $\{a = 1, b = 0\}$, atunci avem sistemul

$$\dot{x} = x(x - 1)^2, \quad \dot{y} = y(y - 1)(cx + dy + 2). \quad (4.52)$$

Pentru sistemul (4.52) polinomul $E_1(X)$ are forma

$$E_1(X) = xy(y - 1)(x - 1)^2(B_2(x) + B_3(x)(y - 1)),$$

unde $B_2(x) = 2 + 3d + d^2 + (8 + 4c + 4d + 2cd)x + (2c - 6 + c^2 - 3d)x^2 - 2cx^3$.

Dreapta $y - 1 = 0$ va avea multiplicitatea doi, dacă $B_2(x) \equiv 0$ și această identitate se realizează când $\{c = 0, d = -2\}$. Prin urmare, sistemul (4.52) va avea forma (4.5) din Teorema (4.0.1). Acest sistem are următoarele drepte invariante:

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_{2,3} \equiv x - 1 = 0, \quad l_4 \equiv y = 0, \quad l_{5,6} \equiv y - 1 = 0.$$

Dacă $\{a = 1, c = b - 2, d = 0, b \neq 0\}$ polinomul $B_2(x)$ are forma $B_2(x) = 2 - 2b^2 - 2b(1 + b)x + (4b - 6 - 2b^2)x^2 + (4 - 2b)x^3$. Evident, $B_2(x)$ nu este identic zero. Prin urmare, în acest caz, multiplicitatea dreptei invariante $y - 1 = 0$ nu poate fi egală cu doi.

Configurația A7)(1r; 5(2, 2)r). Rescriem sistemul (4.1) sub forma

$$\dot{x} = x(fx^2 + gxy + hy^2 + ax + by + 1), \dot{y} = y(y - 1)(cy + 2), c(c + 2) \neq 0. \quad (4.53)$$

Pentru sistemul (4.53) avem $E_1(X) = xy(y - 1)(cy + 2)(A_2(x) + A_3(x)(y - 1))$, unde $A_2(x) = -A_{21}(x)A_{22}(x)$, $A_{21}(x) = 1 + b + h + ax + gx + fx^2$ și $A_{22}(x) = -1 + b - c + h + 2ax + 2gx + 3fx^2$. Luând în considerare condiția $GCD(P, Q) = 1$, avem $A_{21}(x) \neq 0$, și, prin urmare, cerem $A_{22}(x)$ să fie identic zero. Acest fapt are loc dacă $\{f = 0, g = -a, h = 1 - b + c\}$.

În aceste condiții, sistemul (4.53) arată astfel

$$\dot{x} = x(-axy + (1 - b + c)y^2 + ax + by + 1), \dot{y} = y(y - 1)(cy + 2), c(c + 2) \neq 0. \quad (4.54)$$

Pentru sistemul (4.54) avem $E_1(X) = xy(y - 1)^2(cy + 2)(B_2(x) + B_3(x)(cy + 2))$, unde $B_2(x) = (2 + c)(2 - 2b + c + acx)(2 - 2b - c + 2acx)/c^3$. Implicația $\{B_2(x) \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow \{a = 0, b = (2 - c)/2\}$ reduce sistemul (4.54) la sistemul (4.6) din Teorema (4.0.1), care are următoarele drepte invariante:

$$l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv y = 0, l_{3,4} \equiv y - 1 = 0, l_{5,6} \equiv cy + 2 = 0.$$

Configurația A8)(5(2, 2)r; 1r). Considerăm sistemul

$$\dot{x} = x(x - 1)(ax - 1), \dot{y} = y(fy^2 + gxy + hx^2 + bx + cy - 2), a(a - 1) \neq 0. \quad (4.55)$$

În acest caz

$$E_1(X) = xy(ax - 1)(x - 1)(A_2(y) + A_3(y)(x - 1)),$$

$A_2(y) = -A_{21}(y)A_{22}(y)$, $A_{21}(y) = 1 + a - b - h - 2cy - 2gy - 3fy^3$ și $A_{22}(y) = -2 + b + h + cy + gy + fy^2$. Dreapta $x - 1 = 0$ are multiplicitatea doi, dacă polinomul $A_2(y)$ este identic zero. Avem $\{A_2(y) \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow A_{21}(y) \equiv 0 \Rightarrow \{f = 0, g = -c, h = 1 + a - b\}$. Sistemul (4.55) capătă forma

$$\dot{x} = x(x - 1)(ax - 1), \dot{y} = y(-cxy + (1 + a - b)x^2 + bx + cy - 2), a(a + 1) \neq 0. \quad (4.56)$$

Vom cere ca pentru sistemul (4.56) dreapta invariantă $ax - 1 = 0$ să aibă multiplicitatea doi. Calculăm polinomul $E_1(X)$ pentru (4.56):

$$E_1(X) = xy(x - 1)^2(ax - 1)(B_2(y) + B_3(y)(ax - 1)),$$

unde $B_2(y) = (a - 1)(-1 - 2a + b + acy)(-1 - a + b + 2acy)/a^3$. Luând în considerare $GCD(P, Q) = 1$, polinomul $B_2(y)$ va fi identic zero, dacă și numai dacă $\{c = 0, b = a + 1\}$. În aceste

condiții, sistemul (4.56) devine sistemul (4.7) din Teorema (4.0.1), care are următoarele drepte invariante:

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_{2,3} \equiv x - 1 = 0, \quad l_{4,5} \equiv ax - 1 = 0, \quad l_6 \equiv y = 0.$$

Configurația A11)(1r; 5(1, 3)r). Pentru realizarea acestei configurații este suficient să punem $j = 0$ în sistemul (4.41). În așa mod, am obținut sistemul (4.8) din Teorema (4.0.1), care are dreptele invariante

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_2 \equiv y = 0, \quad l_{3,4,5} \equiv y - 1 = 0, \quad l_6 \equiv dy + 2 = 0.$$

Configurația A12)(5(1, 3)r; 1r). În acest caz punem $b = 0, a \neq 0$ în (4.38) și obținem sistemul (4.9) din Teorema (4.0.1) ce posedă dreptele invariante

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_{2,3,4} \equiv x - 1 = 0, \quad l_5 \equiv ax - 1 = 0, \quad l_6 \equiv y = 0.$$

Configurația B1)(3r; 1r+2c). Printr-o transformare afină de coordonate sistemul (4.1) poate fi adus la forma (4.10) din Teorema (4.0.1) ce admite următoarele drepte invariante:

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_2 \equiv x - 1 = 0, \quad l_3 \equiv ax - 1 = 0, \quad l_4 \equiv y = 0, \quad l_5 \equiv y + \frac{q + \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0,$$

$$l_6 \equiv y + \frac{q - \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0, \text{ unde } q^2 + 8p < 0.$$

Configurația B2)(1r+2c; 3r). În acest caz sistemul (4.1) poate fi adus la forma (4.11) din Teorema (4.0.1), care admite dreptele invariante

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_2 \equiv x + \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, \quad l_3 \equiv x + \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, \quad l_4 \equiv y = 0, \text{ unde } q^2 - 4p < 0.$$

Configurația B3)(1r+2c; 1r+2c). Sistemul (4.1) poate fi adus la forma (4.12) din Teorema (4.0.1), care are dreptele invariante

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_2 \equiv x + \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, \quad l_3 \equiv x + \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0,$$

$$l_4 \equiv y = 0, \quad l_5 \equiv y + \frac{s + \sqrt{s^2 + 8r}}{2r} = 0, \quad l_6 \equiv y + \frac{s - \sqrt{s^2 + 8r}}{2r} = 0,$$

unde $q^2 - 4p < 0, s^2 + 8r < 0$.

Configurația B4)(3(2)r; 1r+2c). În acest caz sistemul (4.1) poate fi scris astfel:

$$\dot{x} = x(x - 1)(ax + by - 1), \quad \dot{y} = y(py^2 + qy - 2), \quad q^2 + 8p < 0. \quad (4.57)$$

Polinomul $E_1(X)$ are forma

$$E_2(X) = xy(x-1)(py^2 + qy - 2)(A_2(y) + A_3(y)(x-1)),$$

unde $A_2(y) = 1 - a^2 + 2(b - ab - q + aq)y + (3ap + bq - b^2 - 3p)y^2 + 2bpy^3$.

Dreapta $x - 1 = 0$ va avea multiplicitatea doi doar dacă $A_2(y)$ este identic zero, iar acest fapt are loc când $\{b = 0, a = 1\}$. În aceste condiții, sistemul (4.57) are forma (4.13) din Teorema (4.0.1), având dreptele invariante

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_{2,3} \equiv x - 1 = 0, \quad l_4 \equiv y = 0, \quad l_5 \equiv y + \frac{q + \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0, \quad l_6 \equiv y + \frac{q - \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0.$$

Configurația B5)($1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 3(2)\mathbf{r}$). Scriem sistemul (4.1) după cum urmează:

$$\dot{x} = x(px^2 + qx + 1), \quad \dot{y} = y(y - 1)(cx + dy + 2), \quad q^2 - 4p < 0. \quad (4.58)$$

Pentru sistemul (4.58) polinomul $E_1(X)$ are forma

$$E_1(X) = xy(y - 1)(px^2 + qx + 1)(A_2(x) + A_3(x)(y - 1)),$$

unde $A_2(x) = 2 + 3d + d^2 + 2(2c + cd - 2q - dq)x + (c^2 - 6p - 3dp - cq)x^2 - 2cp x^3$. Expresia lui $A_2(x)$ va fi identică cu zero, dacă condiția $\{c = 0, d = -2\}$ se îndeplinește. Astfel, sistemul (4.58) capătă forma (4.14) din Teorema (4.0.1). Sistemul are următoarele drepte invariante:

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_2 \equiv x + \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, \quad l_3 \equiv x + \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, \quad l_4 \equiv y = 0, \quad l_{5,6} \equiv y - 1 = 0.$$

Configurația B6)($1\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 4(2, 2)\mathbf{c}$). Sistemul (4.1) ce admite configurația **B6)** este sistemul (4.15) din Teorema (4.0.1), obținut în secțiunea 4.1.5.

Configurația B7)($1\mathbf{r} + 4(2, 2)\mathbf{c}; 1\mathbf{r}$). Sistemul ce are configurația dreptelor invariante **B7)** a fost obținut în secțiunea 4.1.4. Acesta reprezintă sistemul (4.16) din Teorema (4.0.1).

4.4. Configurații ale dreptelor invariante de trei și patru direcții de multiplicitate totală șase.

Luând în considerare Lemele (4.1.1)-(4.1.5), pentru sistemul (4.1) avem următoarele configurații de șase drepte reale invariante

1) de trei direcții:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A1})(3\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A7})(4(1,2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A13})(1\mathbf{r}; 3(2)\mathbf{r}; 2\mathbf{r}); \\
& \mathbf{A2})(2\mathbf{r}; 3\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A8})(1\mathbf{r}; 4(1,2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A14})(3\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}); \\
& \mathbf{A3})(3(2)\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A9})(2\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 2\mathbf{r}); \quad \mathbf{A15})(2\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}); \\
& \mathbf{A4})(2\mathbf{r}; 3(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A10})(3\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2\mathbf{r}); \quad \mathbf{A16})(1\mathbf{r}; 3\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}); \\
& \mathbf{A5})(4(3)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A11})(1\mathbf{r}; 3\mathbf{r}; 2\mathbf{r}); \quad \mathbf{A17})(3(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}); \\
& \mathbf{A6})(1\mathbf{r}; 4(3)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A12})(3(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2\mathbf{r}); \quad \mathbf{A18})(1\mathbf{r}; 3(2)\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r})
\end{aligned}$$

și următoarele configurații de șase drepte invariante, două dintre care sunt complexe:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B1})(2\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{B5})(1\mathbf{r}; 3\mathbf{r}; 2\mathbf{c}); \quad \mathbf{B9})(1\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 2\mathbf{r}); \\
& \mathbf{B2})(1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 2\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{B6})(3(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2\mathbf{c}); \quad \mathbf{B10})(1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 1\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}); \\
& \mathbf{B3})(3\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2\mathbf{c}); \quad \mathbf{B7})(1\mathbf{r}; 3(2)\mathbf{r}; 2\mathbf{c}); \quad \mathbf{B11})(1\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 2(2)\mathbf{r}); \\
& \mathbf{B4})(2\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 2\mathbf{c}); \quad \mathbf{B8})(1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 1\mathbf{r}; 2\mathbf{r});
\end{aligned}$$

2) de patru direcții:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A1})(3\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A5})(1\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A9})(1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}; 2\mathbf{r}); \\
& \mathbf{A2})(2\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A6})(2\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A10})(1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}); \\
& \mathbf{A3})(1\mathbf{r}; 3\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A7})(3(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A11})(1\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \\
& \mathbf{A4})(1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 2\mathbf{r}); \quad \mathbf{A8})(1\mathbf{r}; 3(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{A12})(2\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r});
\end{aligned}$$

și următoarele configurații de șase drepte invariante, două dintre care complexe:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B1})(2\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2\mathbf{c}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{B5})(1\mathbf{r}; 3\mathbf{r}; 1\mathbf{c}; 1\mathbf{c}); \quad \mathbf{B9})(3(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{c}; 1\mathbf{c}); \\
& \mathbf{B2})(1\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 2\mathbf{c}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{B6})(1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{B10})(1\mathbf{r}; 3(2)\mathbf{r}; 1\mathbf{c}; 1\mathbf{c}); \\
& \mathbf{B3})(3\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{c}; 1\mathbf{c}); \quad \mathbf{B7})(1\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 2\mathbf{c}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}); \quad \mathbf{B11})(1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 1\mathbf{r} + 1\mathbf{c}; 1\mathbf{r} + 1\mathbf{c}). \\
& \mathbf{B4})(2\mathbf{r}; 2\mathbf{r}; 1\mathbf{c}; 1\mathbf{c}); \quad \mathbf{B8})(1\mathbf{r}; 1\mathbf{r}; 2\mathbf{c}; 2\mathbf{c});
\end{aligned}$$

Pornind de la aceste configurații, cercetându-le prin aceleași metode și tehnici de obținere a sistemelor ce au configurații cu drepte invariante de două direcții, s-au obținut sistemele (4.17)-(4.29), care au drepte invariante de trei direcții, și sistemele (4.30)-(4.35), care au drepte invariante de patru direcții, din Teoremele 4.0.2, 4.0.3.

4.5. Clasificarea sistemelor cubice (4.1) cu drepte invariante de multiplicitate totală șapte, inclusiv dreapta de la infinit.

Luând în considerare Lemele 4.1.1-4.1.5 și configurațiile realizabile, descrise în secțiunile anterioare, obținem următoarele rezultate, prezentate în tabelele ce urmează.

Notăția configurațiilor diferă puțin de notațiile din secțiunile anterioare și se explică prin faptul că s-a adăugat dreapta de la infinit semnată cu $2i$, $3i$ și de multiplicitatea 2, 3, respectiv.

Tabelul 4.1. Sistemele cubice (4.1) cu drepte invariante de două direcții și de multiplicitate totală șapte, inclusiv dreapta de la infinit

Configurații realizabile	Sistemul diferențial cubic	Integrala primă (factor integrant) Darboux
(3r,2r; 2i)	$\dot{x} = x(x-1)(ax-1),$ $\dot{y} = y(y-1)(bx+cy+2),$ $a(a-1) \neq 0.$	$F(x, y) = (x-1)^2 x^{2a-2} (ax-1)^{-2a} ((y-1)/y)^{1-a}.$
(2r,3r; 2i)	$\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = y(y-1)(cy+2),$ $c(c+2) \neq 0.$	$F(x, y) = ((x-1)/x)^{-4-2c} y^{2+c} (2+cy)^{-c} (y-1)^{-2}.$
(3(2)r,2r; 2i)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = 2y(y-1).$	$F(x, y) = \frac{\exp[2x/(1-x)]x^2y}{(x-1)^2(y-1)}$
(3(2)r,1r; 3i)	$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = -2y.$	$F(x, y) = \frac{\exp[2x/(1-x)]x^2y}{(x-1)^2}$
(2r,3(2)r; 2i)	1) $\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = -2y(1-y)^2;$ 2) $\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = (2-x-2y)(y-1)y.$	1) $F(x, y) = \frac{\exp[y/(y-1)]x^2y}{(x-1)^2(y-1)};$ 2) $\mu(x, y) = \exp[(1-xy)/(2y-2)] x^{-2}(x-1)^{-1/2}((y-1)y)^{-3/2}.$
(1r,4(3); 2i)	$\dot{x} = x(1+y^2), \quad \dot{y} = 2y(y-1).$	$F(x, y) = \frac{\exp[-y]x^2y}{(y-1)^2}.$
(4(3),1r; 2i)	$\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = y(-2+3x-2x^2).$	$F(x, y) = \frac{\exp[-2x]x^2y}{(x-1)}.$
(2r,1r+2c; 2i)	$\dot{x} = x(1-x),$ $\dot{y} = -2y(1-2ya+y^2(a^2+b^2)).$	$F(x, y) = \exp[2a \arctg[yb/(1-ya)]]$ $(x-1)^{-4b} x^{-4b} y^{2b} ((ya-1)^2 + y^2 b^2)^{-b}.$
(1r,1r+2c; 3i)	$\dot{x} = x,$ $\dot{y} = -2y(1-2y\alpha+y^2(\alpha^2+\beta^2)).$	$F(x, y) = \exp[2\alpha \arctg[y\beta/(1-y\alpha)]] x^{4\beta} y^{2\beta} ((y\alpha-1)^2 + y^2 \beta^2)^{-\beta}.$
(1r+2c,2r; 2i)	$\dot{x} = x(1-2ax+a^2x^2+b^2x^2),$ $\dot{y} = 2y(y-1).$	$F(x, y) = \exp[2a \arctg[bx/(1-ax)]]$ $x^{2b} y^{2b} (b^2x^2 + (ax-1)^2)^{-b} (y-1)^{-b} y^b.$
(1r+2c,1r; 3i)	$\dot{x} = x(1-2ax+a^2x^2+b^2x^2),$ $\dot{y} = -2y.$	$F(x, y) = \exp[2a \arctg[bx/(1-ax)]]$ $x^{2b} y^b (b^2x^2 + (ax-1)^2)^{-b}.$

Tabelul 4.2. Sistemele cubice (4.1) cu drepte invariante de trei direcții și de multiplicitate totală șapte, inclusiv dreapta de la infinit

Configurații realizabile	Sistemul diferențial cubic	Integrala primă (factor integrant) Darboux
(1r,1r,2r; 3i)	$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 + x + bx + bx^2 + ay \\ &\quad + axy - 2y^2), \\ \dot{y} &= -y(2 + x - bx^2 - 4y - axy + 2y^2).\end{aligned}$	$\mu(x, y) = \exp[(1 + x)(1 - a)/(2(1 + x - y))]x^{-2}y^{-3/2}(1 + x - y)^{-1/2}.$

Tabelul 4.3. Sistemele cubice (4.1) cu drepte invariante de patru direcții și de multiplicitate totală șapte, inclusiv dreapta de la infinit

Configurații realizabile	Sistemul diferențial cubic	Integrala primă (factor integrant) Darboux
(2r,1r,1r,1r; 2i)	$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x), as(a - s) \neq 0 \\ \dot{y} &= y(-2as + 3asx - 2asx^2 - 2y^2 \\ &\quad - 2(a - s)y + 2(a + s)xy)/as.\end{aligned}$	$\mu(x, y) = (x - 1)/(x(ax - y - a)(sx - y - s)y).$
(1r,2r,1r,1r; 2i)	$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - lx - s(l - s)x^2 \\ &\quad + lxy + y^2), \\ \dot{y} &= 2(y - 1)y, s(l + 2s) \neq 0.\end{aligned}$	$\mu(x, y) = (y - 1)/(x(1 + sx - y)y(lx + sx + y - 1)).$

4.6. Concluzii la capitolul patru.

În capitolul patru au fost supuse cercetării sistemele cubice Lotka-Volterra de ecuații diferențiale cu singularități $(1 : -2)$ rezonante, în continuare $SCLV(1 : -2)$, și cu drepte invariante de multiplicitate totală șase și șapte (inclusiv dreapta de la infinit) aliniate după două, trei sau patru direcții.

În urma acestei cercetări au fost obținute următoarele rezultate:

- a fost determinată multiplicitatea algebrică maximală a dreptelor reale $x = 0, y = 0$, pentru sistemele $SCLV(1 : -2)$;
- a fost determinată multiplicitatea algebrică maximală a dreptelor reale $x = a, y = a, a \in \mathbb{R}^*$, pentru sistemele $SCLV(1 : -2)$;
- a fost determinată multiplicitatea algebrică maximală a dreptelor complexe $x = a, y = a, a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pentru sistemele $SCLV(1 : -2)$;
- a fost determinată multiplicitatea algebrică maximală a dreptei de la infinit $Z = 0$ pentru sistemele $SCLV(1 : -2)$;

- au fost clasificate sistemele $SCLV(1 : -2)$ cu drepte invariante afine de două direcții, de multiplicitate algebrică totală șase;
- au fost clasificate sistemele $SCLV(1 : -2)$ cu drepte invariante afine de trei direcții, de multiplicitate algebrică totală șase;
- au fost clasificate sistemele $SCLV(1 : -2)$ cu drepte invariante de patru direcții, de multiplicitate algebrică totală șase;
- au fost clasificate sistemele $SCLV(1 : -2)$ cu drepte invariante de două, trei și patru direcții, de multiplicitate algebrică totală șapte, inclusiv dreapta de la infinit;
- au fost construite integralele prime Darboux sau factorii integranți Darboux pentru sistemele obținute.

Ținând cont de rezultatele obținute în capitolul patru, deducem următoarele concluzii:

1. Multiplicitatea maximală a dreptei $x = 0$ ($y = 0$) pentru sistemul $SCLV(1 : -2)$ este *unu*.
2. Multiplicitatea maximală a dreptei $x = a$ ($y = a$), $a \in \mathbb{R}^*$ pentru sistemul $SCLV(1 : -2)$ este *trei*.
3. Multiplicitatea maximală a dreptei $x = \alpha$ ($y = \alpha$), $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pentru sistemul $SCLV(1 : -2)$ este *doi*.
4. Multiplicitatea maximală a dreptei de la infinit $Z = 0$ pentru sistemul $SCLV(1 : -2)$ este *trei*.
5. Cincisprezece sisteme $SCLV(1 : -2)$ au configurații de drepte invariante de multiplicitate totală șase și de *două* direcții.
6. Treisprezece sisteme $SCLV(1 : -2)$ au configurații de drepte invariante de multiplicitate totală șase și de *trei* direcții.
7. Șase sisteme $SCLV(1 : -2)$ au configurații de drepte invariante de multiplicitate totală șase și de *patru* direcții.
8. Douăsprezece sisteme $SCLV(1 : -2)$ au configurații de drepte invariante de multiplicitate totală șapte și de *două* direcții, inclusiv dreapta de la infinit.
9. Un sistem $SCLV(1 : -2)$ are configurația de drepte invariante de multiplicitate totală șapte și de *trei* direcții, inclusiv dreapta de la infinit.
10. Două sisteme $SCLV(1 : -2)$ au configurații de drepte invariante de multiplicitate totală șapte și de *patru* direcții, inclusiv dreapta de la infinit.

În ultimii ani, un număr mare de lucrări au fost dedicate studierii problemei de integrabili-

tate a sistemelor diferențiale polinomiale și, în particular, a sistemelor Lotka-Volterra cu puncte singulare rezonante (vezi [23]-[70]). Problema dată a fost complet rezolvată în [54] pentru sistemul pătratic cu punct singular rezonant, însă pentru sistemul cubic este încă deschisă. În acest capitol, sunt clasificate sistemele cubice cu singularități rezonante ce au drepte invariante de două, trei sau patru direcții de multiplicitate totală șase și șapte (inclusiv dreapta de la infinit).

Rezultatele expuse în acest capitol au fost comunicate în cadrul conferinței MITRE-2015; 3 iulie 2015, MITRE-2016, 24 iunie 2016; în cadrul seminarului dedicat profesorului A. Belousov, Institutul de Matematică și Informatică "V. Andrunachievici", 19 februarie 2016; în cadrul seminarului științific Ecuatii Diferențiale și Algebre, Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chișinău), 23 februarie 2016; în cadrul conferinței științifice cu participare internațională a doctoranzilor "Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători", IMI "V. Andrunachievici", 10 martie 2015, 25 mai 2016; în cadrul conferinței "International scientific conference Differential-functional Equations and their Application dedicated to the 80th anniversary of professor V.I. Fodchuk", Ukraine, Chernivtsi, 28-30 Septembrie, 2016; la Conferința științifică națională cu participare internațională "Invățământul superior din Republica Moldova la 85 ani", 24-25 Septembrie 2015, Chișinău; și publicate în [111], [112], [127], [128], [129], [130], [131], [132].

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

În lucrare, din punct de vedere al teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale, au fost studiate sistemele cubice de ecuații diferențiale cu singularități rezonante și cu drepte invariante. Pentru aceste sisteme s-a rezolvat problema deosebirii centrului de focar, sau problema centrului – o problemă ce stă la baza teoriei calitative a sistemelor diferențiale polinomiale.

Problema dată constă în determinarea condițiilor asupra coeficienților membrilor din partea dreaptă a sistemului diferențial care impun punctul singular să fie de tip centru. Obținerea acestor condiții se bazează pe faptul că punctul singular este de tip centru, dacă și numai dacă în vecinătatea lui, sistemul are integrală primă analitică diferită de o constantă sau factor integrant analitic. Astfel, rezolvarea problemei centrului se reduce la rezolvarea problemei de integrabilitate.

O metodă, ce se bucură de o mare aplicabilitate, este metoda Darboux de integrabilitate. Ea constă în construirea integralei prime sau a factorului integrant din soluțiile algebrice ale sistemului diferențial polinomial.

Teoria Darboux de integrabilitate a fost dezvoltată, actualizată și extinsă asupra sistemelor de diferite ordine. Astfel, o completare a acestei teorii se exprimă prin luarea în considerație, împreună cu curbele algebrice invariante, și a multiplicităților acestora. Curbele invariante multiple generează unele funcții exponențiale, numite factori exponențiali, ce fac parte din componenta integralei prime (sau a factorului integrant). În astfel de situații, se vorbește despre integrabilitatea Darboux generalizată sau în sens generalizat.

În teza de față pentru sistemele diferențiale cubice, în cazul rezonanței $(1 : -1)$, și a celor de tip Lotka-Volterra, în cazul rezonanței $(1 : -2)$, sunt studiate relațiile dintre dreptele invariante (inclusiv dreapta de la infinit), multiplicitățile acestora, mărimile Lyapunov și integrabilitatea Darboux, care ne conduc la trei probleme:

Problema 1. Determinarea multiplicității algebrice maxime a unei drepte invariante afine și a dreptei de la infinit în familia sistemelor diferențiale cubice cu singularități de rezonanță $(1 : -1)$ și $(1 : -2)$;

Problema 2. Clasificarea sistemelor diferențiale cubice (Lotka-Volterra) cu singularități $(1 : -1)$ ($(1 : -2)$) rezonante și cu drepte invariante afine de multiplicitate totală patru (șase);

Problema 3. Clasificarea sistemelor diferențiale cubice (Lotka-Volterra) cu singularități $(1 : -1)$ ($(1 : -2)$) rezonante și cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci (șapte);

Problema 4. Studiarea integrabilității sistemelor cubice cu singularități $(1 : -1)$ și $(1 : -2)$ rezonante și cu drepte invariante de multiplicitate algebrică totală 4, 5, 6 și 7.

Problemele formulate au fost complet rezolvate. Astfel, pentru prima dată au fost determinate sistemele diferențiale polinomiale cu singularități rezonante și care posedă drepte invariante de multiplicitate algebrică totală 4, 5 (inclusiv dreapta de la infinit), 6, 7 (inclusiv dreapta de la infinit). Pentru aceste clase de sisteme cubice:

- a fost stabilită multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine și a dreptei de la infinit;
- au fost obținute condițiile necesare și suficiente de existență a centrului;
- au fost construite integralele prime sau factorii integranți de tip Darboux.

La realizarea cercetărilor au fost folosite metodele teoriei calitative a sistemelor dinamice, metodele algebrei computaționale, metoda de integrabilitate Darboux.

Problema științifică importantă soluționată constă în rezolvarea completă a problemei centrului pentru sistemele diferențiale cubice cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală cinci și a problemei de clasificare și integrabilitate a sistemelor cubice de tip Lotka-Volterra cu singularități $(1 : -2)$ rezonante și cu drepte invariante (inclusiv dreapta de la infinit) de multiplicitate totală șase și șapte.

Rezultatele cercetărilor elaborate au un rol important la realizarea studiului calitativ al sistemelor diferențiale cubice și ne permit să concluzionăm următoarele:

Concluzii generale:

1. În teza de față pentru prima dată s-a pus și s-a rezolvat problema de determinare în clasa sistemelor cubice cu singularități rezonante a multiplicității maxime a unei drepte invariante afine și a dreptei de la infinit, ceea ce reprezintă pentru viitor un pas important în studiul calitativ al sistemelor cubice cu drepte invariante (Cap. 2, 2.1; Cap. 3, 3.1; Cap. 4, 4.1);
2. Clasificarea sistemelor cubice cu singularități rezonante și cu drepte invariante de multiplicitate algebrică totală 4, 5, 6, 7 reprezintă o continuare a studiului sistemelor cubice cu drepte invariante, efectuat anterior (Cap. 2, 2.3-2.5; Cap. 3, 3.2-3.6; Cap. 4, 4.3, 4.5);
3. Singularitatea $(1 : -1)$ rezonantă a sistemelor cubice cu drepte invariante multiple a căror multiplicitate totală este patru (cazul afin) sau cinci (prin enumerarea dreptei de la infinit) este de tip centru, dacă și numai dacă se anulează prima mărime Lyapunov, fapt ce ușurează studiul calitativ al sistemelor diferențiale polinomiale (Cap. 2, 2.2, 2.3.6, 2.4.5, 2.6;

Cap. 3, 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.5.6, 3.6.3).

Rezultatele obținute pentru sistemele diferențiale cubice cu singularități rezonante formează un studiu fundamental în rezolvarea problemei de integrabilitate. Conform concluziilor enunțate putem **recomanda următoarele:**

- rezultatele ce se conțin în teză pot fi folosite la investigarea sistemelor diferențiale polinomiale cu drepte invariante multiple;
- metodele elaborate, cum ar fi și cea de reducere a cercetării configurațiilor prin aplicarea transformărilor, pot fi folosite la studierea ulterioară a sistemelor diferențiale polinomiale cu curbe algebrice invariante;
- cercetările efectuate pot fi utilizate în studiul calitativ al sistemelor diferențiale polinomiale cu singularități rezonante, la investigarea diferitor modele matematice din fizică, chimie, biologie ș. a. care descriu anumite procese sociale și naturale;
- rezultatele obținute pot fi incluse în programele cursurilor opționale ținute studenților și masteranzilor la facultățile universitare cu profil real sau tehnic.

BIBLIOGRAFIE

1. ANDRONOV, A. A. et al. *Qualitative theory of second-order dynamical systems*. John. Wiler Sons, New York, 1973.
2. ARTÉS, J., LLIBRE, J. On the number of slopes of invariant straight lines for polynomial differential systems. In: *Jour. of Nanjing University*, 1996, vol. 13, p. 143–149. ISSN 1671–7627.
3. ARTÉS, J.C., GRÜNBAUM, B., LLIBRE, J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems. In: *Pacific Journal of Mathematics*, 1998, vol. 184, nr. 2, pp. 207–300. ISSN 0030–8730.
4. BAUTIN, N.N. On periodic solutions of a system of differential equations. In: *Prikl. Mat. i Mekh.*. 1954, vol. 18, nr. 1, pp 128–140.
5. BONDAR, Y.L., SADOVSKII, A.P. Variety of the center and limit cycles of a cubic system, which is reduced to Lienard form. In: *Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica*. 2004, vol. 46, nr. 3, pp. 71–90. ISSN 1024–7696.
6. BOTHMER, H.-C., KROKER, J. Focal values of plane cubic systems. In: *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2010, vol. 9, pp. 319–324. ISSN 1575–5460.
7. BUJAC, C. One new class of cubic systems with maximum number of invariant lines omitted in the classification of J.Llibre and N.Vulpe. In: *Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica*. 2014, nr. 2(75), pp. 102–105. ISSN 1024–7696.
8. BUJAC, C. One subfamily of cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with two distinct real infinite singularities. In: *Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica*. 2015, nr. 1(77), pp. 48–86. ISSN 1024–7696.
9. BUJAC, C. Cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight. *Doct. thesis in mathematics*. Chișinău, 2016, 165 p.
10. BUJAC, C., LLIBRE J., VULPE N. First integrals and phase portraits of planar polynomial differential cubic systems with the maximum number of invariant straight lines. In: *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2016, vol. 15, nr. 2, pp.327–348. ISSN 1575–5460.
11. BUJAC, C., VULPE, N. Cubic systems with invariant straight lines of total multiplicity eight and with three distinct infinite singularities. In: *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2015, vol. 14, nr. 1, pp.109–137. ISSN 1575–5460.

12. BUJAC, C., VULPE, N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2015, vol. 423, nr. 2, pp. 1025–1080. ISSN 0022–247X.
13. BUJAC, C., VULPE, N. Classification of cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight and two distinct infinite singularities. In: *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2015, nr. 74, pp. 1–38. ISSN 1417–3875.
14. BUJAC, C., VULPE, N. Cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity eight possessing one infinite singularity. In: *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2017, vol. 16, nr. 1, pp.1–30. ISSN 1575–5460.
15. BUJAC, C., SCHLOMIUK, D., VULPE, N. *Cubic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity seven and four real distinct infinite singularities*. Universite de Montreal, Canada, CRM Report 3368, 2018, pp. 1–84.
16. BUJAC, C., SCHLOMIUK, D., VULPE, N. Configurations of invariant straight lines of the type $(2,2,1,1)$ for a family of cubic systems. In: *The Fifth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova IMCS-55*, September 28–October 1, 2019, Chişinău, pp. 24–27. ISBN 978–9975–68–378–4.
17. CAIRO, L., LLIBRE, J. Integrability of the 2D Lotka–Volterra system via polynomial first integrals and polynomial inverse integrating factors. In: *J. Phys. A: Math. Gen.* 2000, vol. 33, nr. 12, pp. 2407–2417. ISSN 1361–447.
18. CAO, J., LLIBRE, J., ZHANG, X. Darboux integrability and algebraic limit cycles for a class of polynomial differential systems. In: *Science China Mathematics*. 2014, vol. 57, nr. 4, pp. 775–794. ISSN 1674–7283.
19. CHAVARRIGA, J., GIACOMINI, H., GINÉ, J. An improvement to Darboux integrability theorem for systems having a center. In: *Appl. Math. Letters*. 1999, vol. 12, pp. 85–89. ISSN 0893–9659.
20. CHAVARRIGA, J., GINÉ, J. Integrability of a linear center perturbed by a fifth degree homogeneous polynomial. In: *Publ. Mat.* 1997, vol. 41, nr. 2, pp. 335–356. ISSN 0214–1493.
21. CHAVARRIGA, J., GINÉ, J. Integrability of cubic systems with degenerate infinity. In: *Diff. Equations Dynam. Systems*. 1998, vol. 6, pp. 425–438. ISSN 0971–3514.

22. CHAVARRIGA, J., LLIBRE, J., SOTOMAYOR, J. Algebraic solutions for polynomial systems with emphasis in the quadratic case. In: *Expos. Math.* 1997, vol. 15, nr. 2, pp. 161–173. ISSN 0723–0869.
23. CHEN, X., GINÉ, J., ROMANOVSKI, V.G., SHAFER, D.S. The 1: -q resonant center problem for certain cubic Lotka-Volterra systems. In: *Appl. Math. Comput.* 2012, vol. 218, pp. 11620–11633. ISSN 0096–3003.
24. CHERKAS, L.A., ZHILEVICH, L.I. Some tests for the absence or uniqueness of limit cycles. In: *Differentsial'nye Uravnenia*. 1970, vol. 6, nr. 7, pp. 1170–1178 (Russian).
25. CHERKAS, L.A., ZHILEVICH, L.I. The limit cycles of certain differential equations. In: *Differentsial'nye Uravnenia*. 1972, vol. 8, nr. 7, pp. 1207–1213 (Russian).
26. CHRISTOPHER, C.J. Invariant algebraic curves and conditions for a center. In: *Proc. Roy. Soc., Edinburgh, Sect. A*. 1994, vol. 124, p. 1209–1229. ISSN 0308–2105.
27. CHRISTOPHER, C., LI, Chengzhi. *Limit Cycles of Differential Equations. Series: Advanced Courses in Mathematics*. Birkhauser Verlag, Basel, CRM Barcelona, 2007. 170 p. ISBN 978–3–7643–8410–4.
28. CHRISTOPHER, C., ROUSSEAU, C. Nondegenerate linearizable centers of complex planar quadratic and symmetric cubic systems in C^2 . In: *Publ. Math.* 2001, vol. 45, nr. 1, pp. 95–123. ISSN 0214–1493.
29. CHRISTOPHER, C., ROUSSEAU, C. Normalizable, integrable and linearizable saddle points in the Lotka- Volterra system. In: *Qual. Theory Dynam. Syst.* 2004, vol.5, nr. 1, pp. 11–61. ISSN 1575–5460.
30. CHRISTOPHER, C., LLIBRE, J., PANTAZI, C., ZHANG, X. Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems. In: *J. Phys. A*. 2002, vol. 35, nr. 10, pp. 2457–2476. ISSN 1751–8113.
31. CHRISTOPHER, C., LLIBRE, J., PEREIRA, J.V. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. In: *Pacific J. of Math.* 2007, vol. 229, nr. 1, pp. 63–117. ISSN 0030–8730.
32. CHRISTOPHER, C., MARDESIC, P., ROUSSEAU, C. *Normalizable, integrable and linearizable saddle points in complex quadratic systems in C^2* . 2000. (Preprint. University of Montreal, CRM 2687).

33. COZMA, D. The problem of the center for cubic systems with two parallel invariant straight lines and one invariant conic. In: *Nonlinear Differential Equations and Applications*. 2009, vol. 16, nr. 2, pp. 213–234. ISSN 1021–9722.
34. COZMA, D. *Integrability of cubic systems with invariant straight line and invariant conics*. Chişinău: Ştiinţa, 2013. 240 p. ISBN 978–9975–67–906–0.
35. COZMA, D., DASCALESCU, A. The problem of the center for a cubic system having two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Abstracts of the XVIII International Scientific Conference on Differential Equations "Erugin's Readings—2018"*, May 15–18, 2018, Grodno, Belarus, pp. 102–103. ISBN 978–985–7160–08–2.
36. COZMA, D., MATEI, A. Integrating factors of a cubic system with two parallel invariant lines and one invariant cubic. In: *The Fifth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova IMCS-55*, September 28–October 1, 2019, Chişinău, pp. 50–53. ISBN 978–9975–68–378–4.
37. COZMA, D., ŞUBĂ, A. Conditions of the existence of four invariant straight lines of the cubic systems in the case of centre or focus. In: *Bulletin of Academy of Sciences of Rep. Moldova. Mathematics*. 1993, vol. 3, pp. 54–62 (Russian).
38. COZMA, D., ŞUBĂ, A. Partial integrals and the first focal value in the problem of centre. In: *Nonlinear Differential Equations*. Italy. 1995, vol. 2, nr. 1, pp. 21–34. ISSN 1021–9722.
39. COZMA, D., ŞUBĂ, A. The solution of the problem of center for cubic differential systems with four invariant straight lines. In: *Scientific Annals of the "Al. I. Cuza" University, Romania, Mathematics*. 1998, XLIV, S. I.a, pp. 517–530. ISSN 1221–8421.
40. COZMA, D., ŞUBĂ, A. Solution of the problem of the center for a cubic differential system with three invariant straight lines. In: *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2001, vol. 2, nr. 1, pp. 129–143. ISSN 1575–5460.
41. DAI, GUOREN. Two estimates of the number of invariant lines of a system of polynomials of degree n (Chinese). In: *Acta Math. Sci.* 1996, vol. 16, nr. 2, pp. 232–240. ISSN 0252–9602.
42. DAI GUOREN, WO SONGLIN. Closed orbits and straight line invariants in E_3 systems. In: *Acta Mathematica Scientia*. 1989, vol. 9, nr. 3, pp. 251–261. ISSN

0252–9602. (Chinese).

43. DANILIUK, V., ȘUBĂ, A. Necessary and sufficient center conditions for some cubic systems. In: *Izv. AN MSSR, Ser. fiz.-mat i tehn.* 1989, vol. 3, pp. 57–58. ISSN 0236–3089.
44. DANILIUK, V., ȘUBĂ, A. The distinguishing between a center and a focus in a cubic system with six parameters. In: *Izv. AN MSSR, Matematika.* 1990, vol. 3, pp. 18–21. ISSN 0236–3089.
45. DARBOUX, G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. In: *Bull. Sci. Math.* 1878, pp. 60–96, pp. 124–144, pp. 152–200.
46. DASCALESCU, A. Condiții de integrabilitate pentru un sistem diferențial cubic ce posedă o cubică invariantă. In: *Științe ale naturii și exacte, științe juridice și economice: sesiunea națională de comunicări științifice studentești*, 21–22 aprilie 2016, USM. Rezumatele comunicărilor, Chișinău, 2016, pp. 90–92. ISBN 978–9975–71–768–7.
47. DASCALESCU, A. Integrability conditions for a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant cubic. In: *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series.* 2018, vol. 45, nr. 2, pp. 271–282. ISSN 1223–6934.
48. DOLIĆANIN, D., GINÉ, J., OLIVEIRA, R., ROMANOVSKI, V.G. The center problem for a $2 : -3$ resonant cubic Lotka-Volterra system. In: *Appl. Math. Comput.* 2013, vol. 220, pp. 12–19. ISSN 0096–3003.
49. DUKARIĆ, M., FERČES, B., GINÉ, J. *The solution of the $1 : -3$ resonant center problem in the quadratic case.* 2013. (Preprint. Universitat de Lleida).
50. DUKARIĆ, M., GINÉ, J. Integrability of Lotka–Volterra planar complex cubic systems. In: *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2016, vol. 26, nr. 01, 1650002. ISSN 0218–1274.
51. DULAC, H. Détermination et intégration d’une certaine classe d’équations différentielles ayant pour point singulière un centre. In: *Bull. Sci. Math.* 1908, vol. 38, nr. 2, pp. 230–252.

52. FERČES, B., GINÉ, J., YIRONG, L., ROMANOVSKI, V.G. Integrability conditions for Lotka–Volterra planar complex quartic systems having homogeneous nonlinearities. In: *Acta Appl. Math.* 2013, vol. 124, nr. 1, pp. 107–122. ISSN 0167–8019.
53. FERČEC, B., MAHDI, A. Center conditions and cyclicity for a family of cubic systems: computer algebra approach. In: *Mathematics and Computers in Simulation.* 2013, vol. 87, pp. 55–67. ISSN 0378–4754.
54. FRONVILLE, A., SADOVSKI, A.P., ZOLADEK, H. Solution of the $1 : -2$ resonant center problem in the quadratic case. In: *Fund. Math.* 1998, vol. 157, pp. 191–207. ISSN 0016–2736.
55. GINÉ, J., CHRISTOPHER, C., PREŘERN, M., ROMANOVSKI, V.G., SHCHEGLOVA, N.L. The resonant center problem for a $2 : -3$ resonant cubic Lotka–Volterra system. In: *CASC 2012.* September 3–6, 2012, Maribor, Slovenia. Lecture Notes in Computer Science 7442, pp. 129–142. ISBN 978–3–642–32972–2.
56. GINÉ, J., KADYRSIZOVA, Z., LIU, Y., ROMANOVSKI, V.G. Linearizability conditions for Lotka–Volterra planar complex quartic systems having homogeneous nonlinearities. In: *Comput. Math. Appl.* 2011, vol. 61, pp. 1190–1201. ISSN 0898–1221.
57. GINÉ, J., ROMANOVSKI, V.G. Linearizability conditions for Lotka–Volterra planar complex cubic systems. In: *J. Phys. A, Math. Theor.* 2009, vol. 42, nr. 22, 225206, 15 pp. ISSN 1751–8113.
58. GINÉ, J., ROMANOVSKI, V.G. Integrability conditions for Lotka–Volterra planar complex quintic systems. In: *Nonlinear Anal. "Real World Appl."* 2010, vol. 11, nr. 3, pp. 2100–2105. ISSN 1468–1218.
59. GRAVEL, S., THIBAUT, P. Integrability and linearizability of the Lotka–Volterra system with a saddle point with rational hyperbolicity ratio. In: *J. Differential Equations.* 2002, vol. 184, pp. 20–47. ISSN 0022–0396.
60. HU, Z., ROMANOVSKI, V.G., SHAFER, D.S. $1 : -3$) resonant centers on C^2 with homogeneous cubic nonlinearities. In: *Comput. Math. Appl.* 2008, vol. 56, nr. 8, pp. 1927–1940. ISSN 0898–1221.
61. JOUANOLLOU, J.P. *Equations de Pfaff algébriques.* Lectures Notes in Mathematics, Springer–Verlag. New–York/Berlin. 1979, vol. 708.

62. KOMPEL, V.G. Sufficient conditions for the center for a two-dimensional autonomous system whose right-hand sides are polynomials of the third degree. In: *Differ. Equ.* 1988, vol. 24, nr. 9, pp. 1636–1637. ISSN 0012–2661.
63. KOOLIJ, R.E. Cubic systems with four real line invariants. In: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1995, vol. 118, nr. 1, pp. 7–19. ISSN 0305–0041.
64. KOOLIJ, R.E. Cubic systems with four real line invariants, including complex conjugated lines. In: *Diff. Eq. and Dyn. Sys.* 1996, vol. 4, nr. 1, pp. 43–56. ISSN 0971–3514.
65. KOOLIJ, R.E. Real polynomial systems of degree n with $n + 1$ line invariants. In: *J. of Diff. Eqs.* 1995, vol. 116, nr. 2, pp. 249–264. ISSN 0022–0396.
66. KOOLIJ, R.E., CHRISTOPHER, C.J. Algebraic invariant curves and the integrability of polynomial systems. In: *Appl. Math. Lett.* 1993, vol. 6, nr. 4, pp. 51–53. ISSN 0893–9659.
67. LEVANDOVSKYY, V., PFISTER, G., ROMANOVSKI, V.G. Evaluating cyclicity of cubic systems with algorithms of computational algebra. In: *Communications in Pure and Applied Analysis.* 2012, vol. 11, nr. 5, pp. 2023–2035. ISSN 1097–0312.
68. Li, C., LIU, C., YANG, J. A cubic system with thirteen limit cycles. In: *J. Diff. Eqns.* 2009, vol. 246, pp. 3609–3619. ISSN 0022–0396.
69. LIU, C., CHEN, G., LI, C. Integrability and linearizability of the Lotka–Volterra systems. In: *J. Differential Equations.* 2004, vol. 198, nr. 2, pp. 301–320. ISSN 0022–0396.
70. LIU, C., CHEN, G., CHEN, G. Integrability of Lotka–Volterra type systems of degree 4. In: *J. Math. Anal. Appl.* 2012, vol. 388, nr. 2, pp. 1107–1116. ISSN 0022–247X.
71. LYUBIMOVA, R.A. On some differential equation possesses invariant lines (Russian). In: *Differential and integral equations, Gorky Universitet.* 1977, vol. 1, pp. 19–22.
72. LLIBRE, J., VULPE, N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines. In: *Rocky Mountain J. Math.* 2006, vol. 36, nr. 4, pp. 1301–1373. ISSN 0035–7596.
73. LLOYD, N.G., PEARSON, J.M., ROMANOVSKI V.G. Computing integrability conditions for a cubic differential system. In: *Comp. Math. Applic.* 1996, vol. 32, nr. 10, pp. 99–107. ISSN 0898–1221.

74. LYAPUNOV, A.M. *The general problem of the stability of motion*. Gosudarstv. Izdat. Tech. Lit., 1950, 471 p.
75. MIRONENKO, V.I. *Linear dependence of functions along solutions of differential equations*. Beloruss. Gos. Univ., Minsk, 1981. 104 p. (în rusă).
76. POPA, M.N. Application of invariant processes to the study of the homogeneous linear particular integrals of a differential system. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1991, vol. 317, nr. 4, pp. 834–839 (Russian); translation in *Soviet Math. Dokl.* 1991, vol. 43, nr. 2, pp. 550–555. ISSN 0197–6788.
77. POPA, M.N., PRICOP, V.V. *The center–focus problem: algebraic solutions and hypotheses*. Chişinău, Institute of Mathematics and Informatics, 2018, 256 p. ISBN 978–9975–62–416–9.
78. POPA, M.N., SIBIRSKII, K.S. Conditions for the existence of a homogeneous linear partial integral of a differential system. In: *Differ. Equ.* 1987, vol. 23, nr. 8, pp. 1324–1331. ISSN 0374–0641.
79. POPA, M.N., SIBIRSKII, K.S. Conditions of the existence of nonhomogeneous invariant straight line of the quadratic system. In: *Izv. Akad. Nauk Moldav. SSR. Matematica*. 1991, vol. 1, pp. 77–80 (Russian).
80. PUȚUNTICĂ, V. *Studiul calitativ al sistemelor cubice de ecuații diferențiale cu șase și cu șapte drepte invariante reale*: tz. de doct. în matematică. Chişinău, 2010. 135 p.
81. PUȚUNTICĂ, V., ȘUBĂ, A. Cubic differential system with six real invariant straight lines along two directions. In: *Studia Universitatis. Seria Științe Exacte și Economice*. 2008, vol. 18, nr. 8, pp. 5–16. ISSN 1857–2073.
82. PUȚUNTICĂ, V., ȘUBĂ, A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along three directions. In: *Buletinul Academiei de Științe a RM, Matematica*. 2009, vol. 2, nr. 60, pp. 111–130. ISSN 1024–7696.
83. REPEȘCO, V. Cubic systems with degenerate infinity and invariant straight lines of total parallel multiplicity six. In: *Romai Journal*. 2013, v. 9, nr. 1, pp. 133–146. ISSN 1841–5512.
84. REPEȘCO, V. Canonical forms of cubic differential systems with real invariant straight lines of total multiplicity seven along one direction. In: *Acta et Commentationes*.

Științe Exacte și ale Naturii. Chișinău, 2018, vol. 6, nr. 2, pp. 122–130. ISSN 2537–6284.

85. REPEȘCO, V. Classification of cubic systems with invariant straight lines along one direction of total multiplicity at least seven. In: *The Fifth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova IMCS-55*, September 28–October 1, 2019, Chișinău, pp. 138–141. ISBN 978–9975–68–378–4.
86. ROMANOVSKI, V.G., SHAFER, D.S. On the center problem for $(p : -q)$ resonant polynomial vector fields. In: *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*. 2008, vol. 5, nr. 15, pp. 871–887. ISSN 1370–1444.
87. ROMANOVSKI, V.G., SHAFER, D.S. *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach*. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 2009. 348 p. ISBN 978–0–8176–4726–1.
88. ROMANOVSKI, V.G., ȘUBĂ, A.S. Center of some cubic systems. In: *Annals of Differential Equations*. 2001, vol. 17, nr. 4, pp. 363–376. ISSN 1002–0942.
89. RYCHKOV, G.S. The limit cycles of the equation $u(x+1) = (-x+ax^2+bxy+cu+du^2)dx$. In: *Differ. Equa.* 1972, vol. 8, nr. 12, pp. 2257–2259. ISSN 0374–0641.
90. SADOVSKI, A.P. The problem of distinguishing the center and the focus. (Russian). In: *Differ. Uravn.* 1973, vol. 9, nr. 4 pp. 650–659.
91. SADOVSKI, A.P. Homomorphic integrals of certain system of differential equations. In: *Differ. Uravn.* 1974, nr. 10 pp. 558–560. Translation in *Differ. Equ.* 1974, nr. 10 4225–4227. ISSN 0374–0641.
92. SADOVSKI, A.P., SHCHEGLOVA, T.V. Solution of the center-focus problem for a nine-parameter cubic system. In: *Differ. Equa.* 2011, vol. 47, nr. 2, pp. 208–223. ISSN 0374–0641.
93. SCHLOMIUK, D. Basic algebro-geometric concepts in the study of planar polynomial vector fields. In: *Publ. Mat.* 1997, vol. 41, nr. 1, pp. 269–295. ISSN 0214–1493.
94. SCHLOMIUK, D. Elementary first integrals and algebraic invariant curves of differential equations. In: *Expositiones Mathematicae*. 1993, nr. 11, pp. 433–454. ISSN 0723–0869.

95. SCHLOMIUK, D. Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields. In: *Bifurcations and periodic orbits of vector fields (D.Schlomiuk, ed.)*. Kluwer Academic Publishes, 1993, pp. 429–467. ISBN 978–90–481–4303–0.
96. SIBIRSKII, K.S. Conditions of the existence of an invariant straight line of the quadratic system in the case of centre or focus. Kishinev, Mat. Issled, vol. 106, 1989, pp. 114–118 (Russian).
97. SIBIRSKII, K.S. The number of limit cycles in the neighborhood of a singular point. In: *Differ. Equ.* 1965, vol. 1, nr. 1, pp. 51–66. ISSN 0374–0641.
98. SIBIRSKII, K.S. Centroaffine invariant center and simple saddle-center conditions for a quadratic differential system. (Russian) In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1985, vol. 285, nr. 4, pp. 819–823.
99. SIBIRSKII, K.S. Centroaffine invariant center conditions in the sense of Dulac for a quadratic differential system. (Russian) In: *Differ. Uravn.* 1986, vol. 22, nr. 6, pp. 954–961.
100. SIBIRSKII, K.S. Conditions for the presence of a simple saddle-center of an autonomous two-dimensional differential system. (Russian). In: *Differ. Uravn.* 1986, vol. 22, nr. 8, pp. 1456–1458.
101. SOKULSKI, J. On the number of invariant lines for polynomial vector fields. In: *Nonlinearity*. 1996, vol. 9, pp. 479–485. ISSN 0951–7715.
102. ȘUBĂ, A. Solution of the center problem for cubic systems with a bundle of three invariant straight lines. In: *Bulletin of ASM. Mathematics*. 2003, vol. 45, nr. 1, pp. 91–101. ISSN 0236–3089.
103. ȘUBĂ, A. Sufficient center conditions for a two-dimensional autonomous system with cubic right-hand sides. In: *Differ. Equ.* 1989, vol. 25, nr. 11, pp. 2014–2016. ISSN 0374–0641.
104. ȘUBĂ, A. Particular integrals, integrability and the center problem. In: *Differ. Equation*. 1996, vol. 32, nr. 7, pp. 880–889. ISSN 0374–0641.
105. ȘUBĂ, A., COZMA, D. Solution of the problem of the center for cubic systems with two homogeneous and one nonhomogeneous invariant straight lines. In: *Bull. Acad. Sci. of Moldova, Mathematics*. 1999, vol. 29, nr. 1, pp. 37–44. ISSN 0236–3089.

106. ȘUBĂ, A., COZMA, D. Solution of the problem of the centre for cubic system with three invariant straight lines two of which a parallel. In: *Bulletin of ASM. Mathematics*. 2001, vol. 36, nr. 2, pp. 75–86. ISSN 0236–3089.
107. ȘUBĂ, A., COZMA, D. Solution of the problem of the center for cubic systems with three invariant straight lines in generic position. In: *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2005, nr. 6, pp. 45–58. ISSN 1575–5460.
108. ȘUBĂ, A., REPEȘCO, V. Configurations of invariant straight lines of cubic differential systems with degenerate infinity. In: *Scientific Bulletin of Chernivtsi University, Series "Mathematics"*. 2012, vol. 2, nr. 2-3, pp. 177-182.
109. ȘUBĂ, A., REPEȘCO, V., PUȚUNTICĂ, V. Cubic systems with seven invariant straight lines of configuration $(3, 3, 1)$. In: *Bulletin of ASM. Mathematics*. 2012, vol. 69, nr. 2, pp. 81–98. ISSN 1024–7696.
110. ȘUBĂ, A., REPEȘCO, V., PUȚUNTICĂ, V. Cubic systems with invariant straight lines of total parallel multiplicity seven. In: *Electron. J. Differential Equations*. 2013, nr. 274, pp. 1–22. ISSN 1072–6691.
111. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Maximal algebraic multiplicity of an invariant straight line of Lotka-Volterra cubic systems with $(1:-2)$ -singularity. In: *International Conference: Mathematics Information Technologies: Research and Education (MITRE 2015)*, 2-5 iulie 2015, Chișinău. Abstracts, pp. 79-80. ISBN 978–9975–71–678–9.
112. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Integrability of Lotka-Volterra cubic systems with $(1:-2)$ -singularity having six invariant straight lines of two directions. In: *International Conference: Mathematics Information Technologies: Research and Education (MITRE 2016)*, 23-26 iunie 2016, Chișinău. Abstracts, pp. 65–66. ISBN 978–8875–71–794–6.
113. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Cubic differential systems with a weak focus and an affine real invariant straight line of maximal multiplicity. In: *Book of Abstracts of Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM)*, September 14-17, 2017, Iași, România. pp. 22–24. ISSN 2537–2688.
114. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Cubic differential systems with a weak focus and a real invariant straight line of maximal algebraic multiplicity. In: *Acta et Commentationes. Științe Exacte și ale Naturii*. Chișinău, 2017, vol. 4, nr. 2, pp. 119–130. ISSN 2537–6284.

115. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Centers in cubic differential systems with an affine invariant straight line of multiplicity two and the line at infinity of multiplicity three. In: *Book of Abstracts of Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM)*, September 19–22, 2019, Valahia University of Targoviste, Romania. p. 27. ISSN 2537–2688.
116. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Solution of the problem of the center for cubic differential systems with the line at infinity and an affine real invariant straight line of total algebraic multiplicity five. In: *Bulletin of ASM. Mathematics*. 2019, vol. 90, nr. 2, pp. 13–40. ISSN 1024–7696.
117. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Classification of cubic differential systems with a monodromic critical point and multiple line at infinity. In: *Programul Conferinței Științifice internaționale "Perspectivele și problemele integrării în Spațiul European al Cercetării și Educației", Universitatea de Stat "Bogdan Petriceicu Hașdeu" din Cahul, 6 iunie 2019, Cahul. Republica Moldova.*
118. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Classification of cubic differential systems with a monodromic critical point and multiple line at infinity. In: *The Scientific Journal of Cahul State University "B.P. Hasdeu"* Cahul, Republica Moldova. 2019, nr. 2(6), pp. 100–105. ISSN 2587–313X.
119. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Centers in cubic differential systems with the line at infinity of maximal multiplicity. In: *International Conference: Mathematics Information Technologies: Research and Education (MITRE 2019)*, Iunie 24–25, 2019, Chișinău. Abstracts, pp. 60–61. ISBN 978–9975–149–17–4.
120. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Center problem and classification of cubic differential systems with the line at infinity of multiplicity three and an invariant affine straight line of multiplicity two. In: *The Fifth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova IMCS-55*, September 28–October 1, 2019, Chișinău, pp. 150–153. ISBN 978–9975–68–378–4.
121. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Solution of the center problem for cubic differential systems with one or two affine invariant straight lines of total algebraic multiplicity four. In: *ROMAI J.*, 2019, vol. 15, nr. 2, pp. 101–116. ISSN 1841–5512.
122. ȘUBĂ, A., **TURUTA, S.** Problem of the center for cubic differential systems with invariant straight lines, including the line at infinity, of total multiplicity five. In: *In-*

ternational scientific conference "Modern problems of Differential Equations and their application", dedicated to the 100th anniversary of the professor S.D. Eidelman, 16-19 September, 2020, Chernivtsi, Ucraina, p. 77.

123. ȘUBĂ, A., VACARAȘ, O. Cubic differential systems with an invariant straight line of maximal multiplicity. In: *Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series*. 2015, vol. 42, nr. 2, pp. 427–449. ISSN 1223–6934.
124. SUO, G., CHEN, Y. The real quadratic system with two conjugate imaginary straight line solutions. In: *Ann. of Diff. Eqs.* 1986, vol. 2, nr. 2, pp. 197–207. ISSN 1002–0942.
125. SUO, G., SUN, J. The n -degree differential system with $(n - 1)(n + 1)/2$ straight line solutions has no limit cycles. In: *Proc. of Ordinary Differential Equations and Control Theory*. Wuhan, 1987, pp. 216–220 (Chinese).
126. TLYACHEV, V.B., USHKHO, A.D., USHKHO, D.S. An Estimate from Above of the Number of Invariant Straight Lines of n -th Degree Polynomial Vector Field. In: *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2015, vol. 15, nr. 2, pp. 171–179 (in Russian).
127. **TURUTA, S.** Integrability of Lotka-Volterra cubic systems with (1:-2)-singularity and six invariant real straight lines of two directions. In: *Conferința științifică națională cu participare internațională "Invățământul superior din Republica Moldova la 85 ani"*. 24-25 Septembrie 2015, Chișinău pp. 51–53. ISBN 978–9975–76–159–8.
128. **TURUTA, S.** Lotka-Volterra cubic systems with (1:-2)-singularity and six invariant straight lines of two directions. In: *Conferința științifică Internațională a doctoranzilor "Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători"*. 10 martie, 2015, Chișinău, pp. 26. ISBN 978–9975–3036–4–4.
129. **TURUTA, S.** Daboux integrability of Lotka-Volterra cubic differential systems with 1:-2 resonant singularity and six straight lines of three directions. In: *Book of Abstracts of Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM)*, Craiova, September 15–18, 2016, Romania, pp. 43–44. ISSN 2537–2688.
130. **TURUTA, S.** Darboux first integrals of Lotka-Volterra cubic differential systems with (1:-2)-singularity having invariant straight lines of two directions and total multiplicity

- six. In: *Conferința științifică Internațională a doctoranzilor "Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători"*. 25 mai 2016, Chișinău, pp.314–317. ISBN 978–9975–993–83–4.
131. **TURUTA, S.** Classification of Lotka-Volterra cubic systems with 1:-2 singularity and straight lines of three directions and total multiplicity six. In: *International scientific conference "Diferential-Functional equations and their application"*. 28–30 September, 2016, Chernivtsi, p. 138.
 132. **TURUTA, S.** Lotka-Volterra cubic differential systems with (1:-2)-singularity and invariant affine straight lines of two directions of total algebraic multiplicity six. In: *Acta et Commentationes. Științe Exacte și ale Naturii*. 2016, vol. 2, nr. 2, pp. 71–87. ISSN 2537–6284.
 133. **TURUTA, S.** Solution of the problem of the center for cubic differential systems with three affine invariant straight lines of total algebraic multiplicity four. In: *Bulletin of ASM. Mathematics*. 2020, vol. 92, nr. 1, pp. 89–105. ISSN 1024–7696.
 134. **VACARAȘ, O.** Cubic differential systems with two affine real non-parallel invariant straight lines of maximal multiplicity. *Bul. Acad. Științe Repub. Mold., Mat.* 2015, vol. 79, nr. 3, pp. 79–101. ISSN 1024–7696.
 135. **VACARAȘ, O.** *Sisteme cubice de ecuații diferențiale cu două și trei drepte invariante de multiplicitate maximală: tz de doct. în matematică*. Chișinău, 2017. 150 p.
 136. **WANG, Q., LIU, Y.** Linearizability of the polynomial differential systems with a resonant singular point. In: *Bull. Sci. Math.* 2008, nr. 132, pp. 97–111. ISSN 0007–4497.
 137. **XIEA, X., ZHAN, Q.** Uniqueness of limit cycles for a class of cubic system with an invariant straight line. In: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2009, vol. 70, nr. 12, pp. 4217–4225. ISSN 0362–546X.
 138. **YE, YANQIAN.** Qualitative theory of polynomial differential systems. In: *Shanghai Science-Technical Publisher*, Shanghai, 1995.
 139. **YU, P., HAN, M.** Twelve limit cycles in a cubic case of the 16th Hilbert problem. In: *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 2005, vol. 15, nr. 7, pp. 2191–2205. ISSN 0218–1274.

- 140. ZHANG, X. Number of integral lines of a polynomial systems of degree three and four.
In: *J. of Nanjing University, Math. Biquarterly*, 1993, vol. 10, pp. 209–212. ISSN 0469–5097.
- 141. ZHANG, X., YE, YANQIAN. On the number of invariant lines for polynomial systems.
In: *Proc. of the American Math. Soc.*, 1998, vol. 126, nr.8, p. 2249–2265. ISSN 0002–9939.
- 142. ZOLADEK, H. On certain generalization of the Bautin's theorem. In: *Nonlinearity*. 1994, vol. 7, pp. 273–279. ISSN 0951–7715.
- 143. ZOLADEK, H. Remarks on: The classification of reversible cubic systems with center.
In: *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 1996, vol. 8, nr. 2, pp. 335–342. ISSN 1230–3429.

DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnata, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări și realizări științifice. Conștientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecințele în conformitate cu legislația în vigoare.

Turuta Silvia

Semnătura:

Data:

CV-ul AUTORULUI

Nume: Turuta

Prenume: Silvia

Data nașterii: 31.07.1990

Locul nașterii: s. Cotiujenii Mari, r. Șoldănești,
R. Moldova

Cetățania: R. Moldova



Studii:

- licență: 2008-2011, Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chișinău), Facultatea "Fizică Matematică și Tehnologii Informaționale", specializarea "Matematică", titlul obținut "Licențiat în științe exacte";

- masterat: 2011-2013, Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chișinău), Facultatea "Fizică Matematică și Tehnologii Informaționale", specializarea "Matematici moderne și tehnologii moderne de instruire", titlul de master obținut în științe ale educației;

- doctorat: 2013-2016, Universitatea Academiei de Științe a Moldovei (actuala Universitate de Stat "Dimitrie Cantemir"), specialitatea 111.02 - Ecuații diferențiale.

Activitatea profesională:

2011 - prezent - Instituția Publică L.T. "Mihail Sadoveanu", or. Călărași, r. Călărași, profesoară de matematică;

Domeniu de interes științific: teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.

Participări în proiecte științifice:

- 15.817.02.03F, "Invarianti algebrici și geometrici în studiul calitativ al sistemelor diferențiale polinomiale", aprilie-mai 2019.

Participări la conferințe științifice:

- The International Conference: "Mathematics and Information Technologies: Research and Education" (MITRE). Chișinău, 2011, 2015, 2016, 2019;

- Conferința științifică Internațională a doctoranzilor Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători. Chișinău, 2015, 2016.

- International scientific conference Differential-functional Equations and their Application dedicated to the 80th anniversary of professor V.I. Fodchuk (1936-1992), Chernivtsi, 2016;

– Conferința științifică națională cu participare internațională. Învățământul superior din Republica Moldova la 85 ani, Chișinău, 2015;

– The Fifth Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 55th anniversary of the foundation of the Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, 2019;

– International scientific conference "Modern problems of Differential Equations and their application", dedicated to the 100th anniversary of the professor S.D. Eidelman, Chernivtsi, 2020.

Participări la seminare științifice:

– Seminarul "Ecuatii Diferențiale și Algebre" din cadrul facultății "Fizică, Matematică și Tehnologii Informaționale", Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chișinău), 2016, 2017, 2018, 2019, 2020;

– Scientific seminar dedicated to Prof. Valentin Belousov and Prof. Galina Beliavscaia, 2016.

Lucrări științifice publicate:

– 6 articole științifice;

– o lucrare în materialele conferinței științifice internaționale a doctoranzilor "Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători", Chișinău;

– o lucrare în materialele conferinței științifice internaționale "Perspectivele și problemele integrării în Spațiul European al Cercetării și Educației", Universitatea de Stat Bogdan Petriceicu Hașdeu din Cahul;

– 10 teze ale comunicărilor la conferințe științifice.

Cunoașterea limbilor: româna (maternă), franceza (mediu), engleza (mediu), rusa (mediu).

Date de contact: e-mail: poderioghin_silvia@yahoo.com; telefon: 068280989.