

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
Facultatea de Matematică și Informatică

Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 004.728.5:519.85(043.2)

PAȘA TATIANA

**ALGORITMI DE SOLUȚIONARE A PROBLEMELOR
NELINIARE DE TRANSPORT**

**122.03 – MODELARE, METODE MATEMATICE,
PRODUSE PROGRAM**

Rezumatul tezei de doctor în informatică

CHIȘINĂU, 2021

Teza a fost elaborată în cadrul Departamentului de Informatică al Facultății de Matematică și Informatică a Universitatea de Stat din Moldova.

Conducători științifici:

UNGUREANU Valeriu, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar
PALADI Florentin, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar

Referenți oficiali:

GUTULEAC Emilian, doctor habilitat în științe tehnice, profesor universitar, UTM
MORARU Vasile, doctor în științe fizico-matematice, profesor universitar, UTM

Componenta Consiliului Științific Specializat:

GAINDRIC Constantin, președinte, doctor habilitat în informatică, profesor universitar
Membru corespondent AȘM
MARIN Maria, secretar științific, doctor în științe pedagogice, conferențiar universitar, USM
BALAȘ Valentina Emilia, doctor inginer, profesor universitar, Universitatea „Aurel Vlaicu”
Arad, România
COSTAȘ Ilie, doctor habilitat în informatică, profesor universitar, ASEM
CĂPĂȚÂNĂ Gheorghe, doctor în științe tehnice, profesor universitar, USM
ARNAUT Vsevolod, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, USM
IZVOREANU Bartolomeu, doctor în științe tehnice, conferențiar universitar, UTM

Susținerea va avea loc la **15 decembrie 2021**, ora **15:00**, în ședința Consiliului Științific Specializat **D 122.03-21-49** din cadrul Universității de Stat din Moldova str. A. Mateevici, 60, MD-2009, Chișinău, Republica Moldova, **biroul 222, blocul 4**.

Teza de doctor și rezumatul pot fi consultate la Biblioteca Universității de Stat din Moldova și pe pagina web a ANACEC (www.cnaa.md).

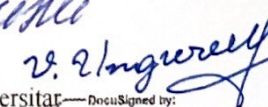
Rezumatul a fost expediat la 06.11.2021

Secretar științific al Consiliului Științific Specializat,
MARIN Maria, doctor în științe pedagogice, conferențiar universitar

Conducători științifici,

UNGUREANU Valeriu, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar
PALADI Florentin, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar

Autor,
PAȘA Tatiana



DocuSigned by:
Florentin Paladi
0C021B2EB4F84EB.

CUPRINS

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII	4
CONȚINUTUL TEZEI	7
CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI.....	27
LISTA PUBLICAȚIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI.....	29
ADNOTARE.....	31

REPERELE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea și importanța temei de cercetare: Problema clasică de transport este o problemă de programare liniară. Modelul problemei este utilizat pentru optimizarea aprovizionării întreprinderilor cu materie primă și materiale, dar și pentru aprovizionarea magazinelor cu produse acumulate în depozite. El are aplicație și dezvoltare în diferite domenii, cum ar fi proiectarea rețelelor de telecomunicații, a conductelor pentru apă, gaz, petrol, planificarea transportului rutier și a procesului de fabricație. Un aspect important – funcțiile neliniare de cost complică soluționarea problemei de transport deoarece pentru rezolvare se cer a fi utilizate, spre exemplu, condițiile de optimalitate Kuhn-Tucker și multiplicatorii Lagrange, derivatele de ordinul întâi (metode gradient) și cele de ordinul doi (matricea Hessian), dar și funcțiile de penalizare. Cazul funcțiilor concave de cost implică o serie de dificultăți suplimentare din cauza existenței mai multor puncte de extrem local, fapt ce complică obținerea soluției optime globale; aplicarea unor asemenea tehnici devine greoaie sau impracticabilă.

Pentru soluționarea unor astfel de modele complexe pot fi considerați algoritmi genetici. Faptul că algoritmi folosesc principii, proprietăți și noțiuni (populație, cromozomi, gene, selecție, încrucișare, mutație) din genetică a impus denumirea lor de „algoritmi genetici”. Algoritmi sunt euristici și stohastici, ceea ce înseamnă că soluția obținută nu întotdeauna este soluție optimă globală, ci doar se află în vecinătatea optimului global. Algoritmi genetici sunt utilizați pentru soluționarea problemelor dificile deoarece pentru aplicarea lor nu este necesară cunoașterea informației despre gradient sau Hessian. Algoritmi sunt refractari la blocajele în optime locale și permit abordarea unor probleme de optimizare neliniară de dimensiuni mari.

În teză sunt prezentate rezultatele studiului problemei neliniare de transport cu funcții concave de cost. Pentru soluționarea problemei sunt descriși algoritmi genetici care sunt testați în baza problemelor de transport pe rețele de diferite dimensiuni. În lucrare sunt formulate următoarele probleme generale: *Problema 1*. Să se soluționeze problema neliniară de transport pe rețea cu funcții concave de cost cu una sau mai multe surse și una sau mai multe destinații prin care circulă un flux omogen de produs. *Problema 2*. Să se soluționeze problema neliniară de transport cu funcții concave de cost descrisă de mai mulți indici: surse, destinații, puncte intermediare, tipuri de produse transportate, tipuri de transport utilizat. Algoritmi de soluționare a Problemelor 1 și 2 sunt descriși în capitolele 2 și 3, respectiv.

Scopul lucrării: constă în studierea și soluționarea unui șir de probleme neliniare de transport de dimensiuni mari cu funcții concave de cost.

Obiectivele lucrării: cercetarea problemelor de transport și a metodelor de soluționare a lor; elaborarea algoritmilor aproximativi pentru soluționarea problemelor neliniare de transport; elaborarea algoritmilor genetici pentru soluționarea în timp rezonabil a problemelor de transport de dimensiuni mari descrise de rețele cu una sau mai multe surse și una sau mai multe destinații cu funcții concave de cost; elaborarea algoritmilor genetici pentru soluționarea în timp rezonabil a problemelor de transport de dimensiuni mari descrise de rețele cu mai mulți indici și cu funcții concave de cost; testarea și estimarea timpului de execuție a algoritmilor propuși.

Ipoteze de cercetare: în baza analizei literaturii de specialitate și a obiectivelor de cercetare, au fost dezvoltate următoarele ipoteze: problemele neliniare de transport cu funcții concave de cost formulate ca probleme de programare neliniară pot fi soluționate aplicând aproximarea succesivă la probleme liniare; aplicarea algoritmilor genetici permit soluționarea problemelor neliniare de transport de dimensiuni mari (câteva mii de necunoscute) în timp rezonabil; codificarea problemei neliniare de transport astfel încât să fie garantată obținerea soluțiilor admisibile la decodificarea cromozomilor este esențială; operatorii de încrucișare și mutație trebuie descriși astfel încât să asigure că prin aplicarea lor se vor obține cromozomi, cărora le sunt asociate soluții admisibile; utilizarea unui model elitist al algoritmilor genetici permite păstrarea soluțiilor admisibile ale problemei care pretind a fi soluții optime (pseudo optime) a problemei formulate.

Sinteza metodologiei de cercetare și justificarea metodelor de cercetare: cercetările științifice realizate în teză sunt bazate pe ultimile rezultate științifice din domeniul temei tezei de doctor descrise în literatura de specialitate și care se referă la noțiunile și metodele teoriei grafurilor, metodele de optimizare, teoria algoritmilor, teoria complexității, inteligența artificială și algoritmii genetici.

Noutatea științifică a rezultatelor obținute: constă în obținerea rezultatelor noi de ordin teoretico-aplicativ care completează cele cunoscute deja în literatura de specialitate în domeniul problemelor neliniare de transport și care sunt publicate în reviste recenzate. În baza rezultatelor teoretice sunt elaborați algoritmi eficienți care pot fi aplicați la soluționarea unui spectru larg de probleme practice. Noutatea științifică se exprimă prin: soluționarea problemei neliniare de transport pe rețea cu funcții concave de cost prin reducerea acesteia la o serie de probleme de programare liniară și demonstrarea convergenței algoritmului la un optim local „apropiat” de optimul global; codificarea problemelor neliniare de transport pe rețea cu una sau mai multe surse și una sau mai multe destinații ca urmare fiind elaborați algoritmi genetici de soluționare; soluționarea problemei neliniare de transport cu 4 indici și a problemei neliniare de transport pe rețea cu 5 indici prin reducerea acestora la o problemă de programare liniară; codificarea problemei

neliniare de transport cu 4 indici și a problemei neliniare de transport pe rețea cu 5 indici ca urmare fiind elaborați algoritmi genetici de soluționare; pentru fiecare din algoritmi genetici elaborați au fost descriși operatorii de încrucișare și mutație care asigură că prin aplicarea lor se obțin cromozomi, cărora le sunt asociate soluții admisibile; demonstrarea convergenței către o soluție optimă locală (pseudo optimă) pentru fiecare dintre algoritmi elaborați.

Aprobarea rezultatelor științifice: rezultatele științifice de bază obținute și reflectate în lucrare, sunt prezentate la conferințe științifice naționale și internaționale, sunt publicate în reviste de specialitate din țară și de peste hotare:

a) *Rezultatele științifice în ultimii 5 ani au fost prezentate în secțiile conferințelor științifice:* A 20-a Conferință a SPSR, AFA “Henri Coandă”, 28-29 aprilie 2017, Brașov, România; The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachevici (1917 - 1997), 28 iunie – 2 iulie 2017, ASM, Chișinău; ITSN-2017, 17-18 October, 2017, Chisinau, RM; The 50th anniversary of Computers, Informatics and Microelectronics Faculty & Electronics and Telecommunications Faculty, October 19-21, 2017, Chisinau, RM; A 21-a Conferință a Societății de Probabilități și Statistică din România, 13-14 aprilie 2018, ASE, București, România; MITI 2018, 19-21 April, 2018, Bălți, RM; Moldova Wolfram Technology Conference 2018, June 9, USM, Chișinău; CAIM 2018, 20th – 23th September, 2018, TUM, Chișinău, RM; CIMOTI, 12-16 noiembrie 2018, Chișinău, RM; MITRE, MSU, June 24-26, 2019, Chișinău, RM; CAIM 2019, 19th – 20th September, 2019, “Valahia” University, Târgoviște, Romania; IMCS - 55, September 28 - October 1, 2019, Chișinău, RM; ICAPM 2019, October 31 – November 3, Iași, România, ICAMNM, Craiova, October 29-31, 2020, România; International Symposium “Actual Problems of Mathematics and Informatics”, November 27-28, 2020, TUM, Chișinău, RM.

b) *Rezultatele obținute sunt publicate în 19 lucrări științifice, inclusiv 12 lucrări fără coautori.*

Structura tezei: teza este structurată în trei capitole, în care sunt studiate o serie de cazuri particulare ale problemei neliniare de transport, fiind elaborați și testați algoritmi de soluționare a acestora. Lucrarea conține adnotări în limbile română, rusă și engleză, introducere, concluzii generale și recomandări, o listă bibliografică ce cuprinde 173 titluri, 12 anexe, declarația privind asumarea răspunderii și CV-ul autorului.

În compartimentul **Concluzii generale și recomandări** sunt expuse concluziile generale asupra rezultatelor obținute în cadrul tezei. Sunt punctate importanța și impactul acestor rezultate asupra dezvoltării domeniului dat. Sunt prezentate recomandările în formă de sugestii privind cercetările de perspectivă.

CONȚINUTUL TEZEI

În **Introducere** este argumentată actualitatea și importanța temei de cercetare, sunt formulate scopul, obiectivele și ipotezele tezei. Este formulată problema științifică de importanță majoră fiind menționată importanța teoretică și valoarea aplicativă a lucrării, este efectuată o analiză a publicațiilor la tema tezei și o sinteză a conținutului tezei.

În **Capitolul I, Analiza situației în domeniul problemelor neliniare de transport**, format din 6 secțiuni, care poartă un caracter introductiv, este examinată situația actuală în domeniul de cercetare. Aici sunt enunțate rezultatele clasice și recente ce țin de domeniul de cercetare, și sunt descrise diferite clase de probleme de transport și algoritmi de soluționare, cum sunt: problema clasică de transport, problema de transport pe rețea cu funcții constante de cost, cu funcții liniare de cost, cu funcții neliniare diferențiabile, nediferențiabile și separabile.

Un rol important în soluționarea diferitor tipuri de probleme de transport au algoritmi genetici care sunt studiați sub aspectul posibilității de aplicare pentru obținerea soluțiilor în cazul problemelor complexe în ceea ce privește funcția obiectiv care descrie costul de transport, dar și problemele aplicative de dimensiuni mari.

Sunt grupate și analizate problemele de transport cu mai mulți indici pentru care funcția de cost este nu doar concavă și dependentă de sursele și de destinațiile rețelei, dar și de tipurile de produs transportat și de tipurile de transport utilizat. În acest context este propusă modalitatea de soluționare prin reducerea unor astfel de probleme la serii de probleme de programare liniară, dar și prin aplicarea algoritmilor genetici în special pentru problemele practice de dimensiuni mari.

În **Capitolul II, Problema neliniară de transport cu funcții concave de cost**, format din 6 secțiuni, sunt formulate un șir de cazuri particulare ale problemei neliniare de transport pe rețea cu funcții concave de cost: *problema neliniară de transport pe rețea cu o sursă și o destinație*, *problema neliniară de transport pe rețea cu o sursă și o destinație pentru care se pune restricția că fluxul de produs trece prin toate arcele rețelei*, *problema neliniară de transport pe rețea cu o sursă și câteva destinații* și *problema neliniară de transport pe rețea cu câteva surse și câteva destinații*. Pentru fiecare din problemele formulate sunt descriși algoritmi de soluționare care generează soluție pseudo optimă în timp rezonabil.

Rezultatele sunt publicate în (Lozovanu & Pasha, 2002), (Pașa & Ungureanu, 2017a), (Pașa & Ungureanu, 2017d), (Pașa & Ungureanu, 2017e), (Pașa & Ungureanu, 2017f), (Pașa, 2018c), (Pașa, 2018d), (Pașa, 2020a), (Pașa, 2020c).

Se consideră problema neliniară de transport pe rețea descrisă de graful conex aciclic $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, unde pe mulțimea de vârfuri este definită funcția de producere și consum $q: V \rightarrow R$, iar pe mulțimea de arce sunt definite funcțiile neliniare concave

nedescrescătoare de cost $\varphi_e(x_e)$. Problema neliniară de transport pe rețea constă în determinarea unui flux x^* care minimizează funcția $F(x) = \sum_{e \in E} \varphi_e(x_e)$ care descrie costul de transport, adică se cere soluționarea problemei:

$$F(x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{e \in E^+(v)} x(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x(e) = q(v), \quad (2)$$

$$x(e) \geq 0, \quad e \in E, \quad (3)$$

unde $E^-(v) = \{(v, u) | (v, u) \in E\}$, $E^+(v) = \{(u, v) | (u, v) \in E\}$, iar sistemul de restricții definește mulțimea de soluții admisibile X ale problemei formulate, adică soluțiile care satisfac sistemul de ecuații și condițiile de nenegativitate (Lozovanu & Pasha, 2002).

Un aspect caracteristic al problemelor de optimizare neliniară este faptul că ele pot avea mai multe optime locale.

Algoritmul AE1 constă în reducerea consecutivă a problemei de optimizare liniară la o problemă a programării liniare:

Pasul 1. Se construiește o soluție admisibilă inițială $x^0 = (x^0(e_1), x^0(e_2), \dots, x^0(e_m))$ a sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{e \in E^+(v)} x(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x(e) = q(v), & v \in V, \\ x(e) \geq 0, & e \in E. \end{cases} \quad (4)$$

Pasul 2. Se determină valoarea funcției obiectiv în x^0 :

$$F(x^0) = \sum_{e \in E} \varphi_e(x^0(e)), \quad (5)$$

și se calculează valoarea coeficienților:

$$C_e = \begin{cases} \frac{\varphi_e(x^0(e))}{x^0(e)}, & x^0(e) > 0, \\ \varphi'_e(0), & x^0(e) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

pentru fiecare $e \in E$.

Pasul 3. Se soluționează problema liniară de transport:

$$\begin{aligned} z(x) &= \sum_{e \in E} C_e x(e) \rightarrow \min, \\ \begin{cases} \sum_{e \in E^+(v)} x(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x(e) = q(v), & v \in V, \\ x(e) \geq 0, & e \in E, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

și se obține soluția optimă $x^1 = (x^1(e_1), x^1(e_2), \dots, x^1(e_m))$ a problemei liniare.

Pasul 4. Se compară valorile $z(x^1)$ și $F(x^0)$. Dacă $z(x^1) < F(x^0)$ sau $z(x^1) = F(x^0)$ și $x^1 \neq x^0$, atunci x^0 se substituie cu x^1 și se trece la *Pasul 2*, ceea ce înseamnă că se repornește procedura de liniarizare cu o altă soluție inițială. Dacă $z(x^1) > F(x^0)$ sau $z(x^1) = F(x^0)$ și $x^1 = x^0$, atunci în calitate de soluție optimă a problemei neliniare este considerată soluția $x^* = x^0$. **STOP.**

În (Pașa & Ungureanu, 2017a) este formulat și descris algoritmul de soluționare a problemei de transport pe rețea pentru cazul când fluxul pe arcele rețelei este restricționat de capacitățile lor, care indică limitele de jos și de sus ale fluxurilor pe arce.

În urma testelor efectuate pe mai multe exemple de rețele de transport de diferite dimensiuni, s-a constatat că soluția obținută depinde de soluția inițială de la *Pasul 1*, adică de soluția sistemului (4). Soluția inițială poate fi determinată diferit în dependență de metoda utilizată pentru soluționarea sistemului (4).

În acest context apare ideea ca algoritmul de soluționare a problemei de transport pe rețea cu funcții concave de cost să fie modificat astfel, încât să pornească de la mai multe soluții admisibile, iar dintre soluțiile optime, obținute în urma executării algoritmului **AE2**, să fie aleasă cea care corespunde valorii minime a funcției obiectiv.

Algoritmul AE2 cu câteva soluții inițiale:

Faza I Inițializarea datelor.

Pasul 1. Se construiește o mulțime ce conține p soluții admisibile inițiale de forma $x^0 = (x^0(e_1), x^0(e_2), \dots, x^0(e_m))$, soluții ale sistemului (4). Faza II se execută pentru fiecare dintre cele p soluții admisibile inițiale obținute.

Faza II Se execută pentru fiecare element al mulțimii.

Pasul 2. Se determină valoarea funcției obiectiv în x^0 (5) și se calculează valoarea coeficienților (6) pentru fiecare $e \in E$.

Pasul 3. Se soluționează problema liniară de transport (7) și se obține soluția optimă $x^1 = (x^1(e_1), x^1(e_2), \dots, x^1(e_m))$.

Pasul 4. Se compară valorile $z(x^1)$ și $F(x^0)$. Dacă $z(x^1) < F(x^0)$ sau $z(x^1) = F(x^0)$ și $x^1 \neq x^0$, atunci x^0 se substituie cu x^1 și se trece la *Pasul 2* ceea ce înseamnă că se repornește procedura de liniarizare cu altă soluție inițială. Dacă $z(x^1) > F(x^0)$ sau $z(x^1) = F(x^0)$ și $x^1 = x^0$, atunci soluția optimă a problemei neliniare este considerată valoarea $x^* = x^0$.

Faza III Se obține soluția problemei.

Pasul 5. Se compară valorile funcției obiectiv în toate soluțiile obținute și se determină valoarea sa minimală. În calitate de soluție a problemei servește cea careia îi corespunde valoarea minimă a funcției obiectiv. **STOP.**

Se formulează și se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema 2.5. *Algoritmul AE1 converge către un optim local.*

Teorema 2.6. *Algoritmul AE2 converge către un optim local.*

Algoritmii AE1 și AE2 propuși sunt testați aplicând funcțiile standard ale Sistemului Mathematica.

În cele ce urmează este studiată problema de optimizare neliniară de transport pe rețea de tipul (1) – (3) cu funcția de producere și consum de forma:

$$q(v) = 0, \text{ pentru } v \in V \setminus \{v_0, v_t\} \text{ și } q(v_0) = -q(v_t) \quad (8)$$

unde v_0 este sursa rețelei, v_t – destinația ei. Astfel, se cere determinarea costului minim de transport în rețea cu o sursă și o destinație pentru cazul când costul este descris de o funcție concavă nedescrescătoare. Pentru simplitate, în descrierea algoritmului, se presupune că primul vârf din rețea v_1 este sursa rețelei, iar ultimul vârf v_n – destinația.

Algoritmul genetic AG1 propus pentru soluționarea problemei de transport cu funcții concave nedescrescătoare secvențial-liniare constă din următorii pași:

Pasul 1. Inițializarea. Se generează populația inițială din $4n$ cromozomi. Fiecare cromozom este descris de o mulțime $Nr = \{nr_1, nr_2, \dots, nr_n\}$ care conține n numere întregi și fiecare element reprezintă numărul de arce care ies din vârful respectiv:

- pentru fiecare poziție $i = \overline{1, n-1}$ este generat un număr întreg pozitiv nr_i între 1 și numărul de arce ce ies din vârful i ;
- pe ultima poziție este plasat numărul $nr_n = 0$ (din destinație nu iese niciun arc). Cele $nr_i, i = \overline{1, n-1}$ arce care ies din vârful i , pe care ulterior este transportat flux de produs, sunt selectate aleatoriu.

Partea de flux care trece prin arcul (i, j) , din totalul fluxului care intră în vârful i , este dat de matricea proporțiilor de repartitie $R = \{r_{ij} | i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}\}$ generată aleatoriu, și pentru care se respectă condiția $\sum_{j=1}^n r_{ij} = 1, i = \overline{1, n-1}$, și $r_{ij} = 0$, pentru $i = n, j = \overline{1, n}$.

Pasul 2. Decodificarea și Evaluarea cromozomilor. Decodificarea presupune asocierea fiecărui cromozom cu o soluție admisibilă de forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, unde $x_h, h = \overline{1, m}$ este cantitatea de flux care trece prin arcul (i, j) calculată astfel: $x_h = r_{ij} * cf_i$, unde cf_i este

cantitatea de flux care intră în vârful i și $x_h = 0$ dacă prin arcul respectiv nu trece flux. Evaluarea presupune determinarea valorii funcției obiectiv pentru fiecare dintre soluții.

Pasul 3. Selectarea. Cromozomii sunt sortați în ordinea creșterii valorii funcției obiectiv în soluția asociată cromozomului. Cromozomii din prima jumătate a populației, adică $2n$ cromozomi, sunt transferați în noua populație.

Pasul 4. Încrucișarea cromozomilor. Încrucișarea are loc între cromozomii transferați în populația $P(i)$ din populația $P(i - 1)$. Aleatoriu este aplicată aceeași tăietură ambilor cromozomi-părinți luați câte doi. După tăietură, se obțin mulțimile Nr_1 și Nr_2 , $Nr = Nr_1 \cup Nr_2$, $Nr_1 = \{nr_1, nr_2, \dots, nr_k\}$, $Nr_2 = \{nr_{k+1}, nr_{k+2}, \dots, nr_n\}$. Nr_1 – partea stângă iar Nr_2 – partea dreaptă a cromozomului.

Fiecare pereche de cromozomi-părinți generează doi cromozomi-urmași astfel:

- primul cromozom-urmas primește partea stângă a cromozomului-mamă și partea dreaptă a cromozomului-tată;
- al doilea cromozom-urmas primește partea stângă a cromozomului-tată și partea dreaptă a cromozomului-mamă.

Fiecare pereche de cromozomi-părinți generează doi cromozomi-urmași și dimensiunea populației rămâne constantă.

Pasul 5. Mutația. Unei gene a cromozomului-urmas i se aplică o mutație cu probabilitatea $\varepsilon \in [0.001, 0.01]$, și constă în generarea unui număr aleatoriu nr_i , între 1 și numărul de arce care ies din vârful respectiv, pentru o genă a cromozomului-urmas. Celelalte gene rămân nemodificate.

Pasul 6. Verificarea condiției de oprire. Oprirea execuției algoritmului are loc dacă se respectă condiția $|f(x_{P(i)}) - f(x_{P(i-1)})| \leq \varepsilon$ pentru soluțiile asociate primului cromozom din două populații consecutive $P(i - 1)$ și $P(i)$. În calitate de soluție a problemei servește soluția admisibilă care corespunde cromozomului cu valoarea minimă a funcției obiectiv din ultima populație construită. Se trece la *Pasul 2* dacă condiția de oprire nu este satisfăcută, în caz contrar **STOP**.

Se formulează și se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema 2.7. Algoritmul AGI necesită un volum de memorie de ordinul $O(n^2)$.

Teorema 2.8. Complexitatea unei iterații a algoritmului AGI este de ordinul $O(nm)$.

Definiția 2.1. Soluție ε -optimă a problemei neliniare de transport pe rețea este soluția $x_{P(i)}$ generată de o populație $P(i)$ care satisface condiția: $|f(x_{P(i)}) - f(x_{P(i-1)})| \leq \varepsilon$, unde

$f(x_{P(i)})$ este valoarea funcției obiectiv pentru soluția asociată cromozomului cu cele mai bune caracteristici din populația $P(i)$.

Teorema 2.9. Algoritmul AG1 converge către o soluție ε - optimă.

Codul scris în Wolfram Mathematica poate fi accesat pe <https://github.com/TatianaPasa/GeneticAlgorithm>.

În cele ce urmează este soluționată problema neliniară de transport (1) – (3), care presupune determinarea costului minim de transport, pentru rețele standard cu funcția de producere și consum de forma (8), când se impune restricția transportării unui flux de produs prin fiecare dintre arcele rețelei unde v_0 - sursa rețelei, v_t - destinația rețelei.

Algoritmul genetic AG2 propus pentru soluționarea problemei de transport cu funcții concave nedescrescătoare secvențial-liniare constă din următorii pași:

Pasul 1. Inițializarea. Se generează populația inițială din $4n$ cromozomi: fiecare cromozom este descris de o listă de forma $L = \{l_{i1}, \dots, l_{im_i}\}_i \mid i = \overline{1, n-1}$, unde m_i - numărul de arce care ies din vârful i , fiecare $l_{ij}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m_i}$ reprezentând partea de flux care trece prin arcul (i, j) din totalul fluxului care intră în vârful i . Pentru fiecare vârf se cere să fie satisfăcută condiția $\sum_{j=1}^{m_i} l_{ij} = 1, i = \overline{1, n-1}$.

Pasul 2. Decodificarea și Evaluarea cromozomilor. Decodificarea presupune asocierea fiecărui cromozom cu o soluție admisibilă de forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, unde $x_h, h = \overline{1, m}$ este cantitatea de flux care trece prin arcul (i, j) și se determină astfel $x_h = l_{ij} * cf_i, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m_i}$, unde cf_i este cantitatea de flux care intră în vârful i și $l_{ij}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m_i}$ - partea de flux care trece prin arcul (i, j) . Evaluarea presupune determinarea valorii funcției obiectiv pentru fiecare dintre soluțiile obținute.

Pasul 3. Selectarea. Cromozomii sunt sortați în ordinea creșterii valorii funcției obiectiv în soluția asociată cromozomului. Cromozomii din prima jumătate a populației, adică $2n$ cromozomi, sunt transferați în noua populație.

Pasul 4. Încrucișarea cromozomilor. Încrucișarea are loc între cromozomii transferați în populația $P(i)$ din populația $P(i-1)$. Aleatoriu este aplicată aceeași tăietură ambilor cromozomi-părinți, luați câte doi, care presupune împărțirea în două mulțimi de gene a cromozomului L_1 și L_2 , astfel încât $L = L_1 \cup L_2$, unde $L_1 = \{l_{i1}, \dots, l_{im_i}\}_i \mid i = \overline{1, n_1}$, $L_2 = \{l_{i1}, \dots, l_{im_i}\}_i \mid i = \overline{n_1+1, n}$. L_1 - partea stângă iar L_2 - partea dreaptă a cromozomului. Încrucișarea cromozomilor presupune:

- primul cromozom-urmaş primeşte partea stângă a cromozomului-mamă şi partea dreaptă a cromozomului-tată;
- al doilea cromozom-urmaş primeşte partea stângă a cromozomului-tată şi partea dreaptă a cromozomului-mamă.

Fiecare pereche de cromozomi-părinţi generează doi cromozomi-urmaşi şi dimensiunea populaţiei generate rămâne constantă.

Pasul 5. Mutaţia. Unei gene a cromozomului i se aplică mutaţia cu o probabilitate $\varepsilon \in [0.1, 0.5]$ şi presupune modificarea unei gene de pe poziţia i a cromozomului-urmaş. Se generează o listă nouă $\{l_{i1}, \dots, l_{im_i}\}_i$ pentru un vârf i ales aleatoriu, astfel încât să fie satisfăcută condiţia $\sum_{j=1}^{m_i} l_{ij} = 1, i = \overline{1, n-1}$. Celelalte gene rămân nemodificate.

Pasul 6. Verificarea condiţiei de oprire. Oprirea algoritmului are loc dacă se respectă condiţia $|f(x_{P(i)}) - f(x_{P(i-1)})| \leq \varepsilon$, pentru soluţiile asociate primului cromozom din două populaţii consecutive $P(i-1)$ şi $P(i)$. În calitate de soluţie a problemei serveşte cea care corespunde cromozomului cu valoarea minimă a funcţiei obiectiv din ultima populaţie construită. Se trece la *Pasul 2* dacă condiţia de oprire nu este satisfăcută.

Se formulează şi se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema 2.10. Algoritmul AG2 necesită un volum de memorie de ordinul $O(nm)$.

Teorema 2.11. Complexitatea unei iteraţii a algoritmului AG2 este de ordinul $O(nm)$.

Teorema 2.12. Algoritmul AG2 converge către o soluţie ε -optimă.

Codul scris în Wolfram Mathematica poate fi accesat pe <https://github.com/TatianaPasa/GeneticAlgorithm>.

În cele ce urmează este soluţionată problema neliniară de transport (1) – (3), pe o reţea de transport cu o singură sursă şi câteva destinaţii descrisă de mulţimea de vârfuri V , unde $|V| = n$ şi mulţimea de arce E , unde $|E| = m$. Problema presupune determinarea costului minim de transport. Funcţia de producere şi consum asociată mulţimii de vârfuri are forma:

$$\begin{aligned} q(v) &= 0 \text{ pentru } v \in (V \setminus V_t) \setminus \{v_0\} \\ q(v_0) &= \sum_{i=1}^k q(v_i), v_i \in V_t \end{aligned} \quad (9)$$

unde v_0 – sursa reţelei, $v_i \in V_t, i = \overline{1, k}$ – destinaţia i a reţelei de transport, $V_t \subset V$ – mulţimea tuturor destinaţiilor reţelei şi $|V_t| = k$.

Algoritmul genetic AG3 propus pentru soluţionarea problemei de transport cu funcţii concave nedescrescătoare secvenţial-liniare constă din următorii paşi:

Pasul 1. Inițializarea. Se generează aleatoriu populația inițială din $4n$ cromozomi: fiecare cromozom este descris de o listă de forma $T = \{(i, j) \mid i, j = \overline{1, n}\}$, unde T este arbore de acoperire a grafului $G(V, E)$, $|T| = n - 1$ și fiecare (i, j) este arcul ce iese din vârful i și intră în vârful j . În cazul prezenței repetărilor aceluiasi arbore de acoperire, repetările sunt șterse și dimensiunea populației este adaptată.

Pasul 2. Decodificarea și Evaluarea cromozomilor. Decodificarea presupune că fiecărui cromozom i se asociază o soluție admisibilă. În acest scop: se asociază flux nul arcelor din graful inițial, care nu aparțin arborelui de acoperire ce descrie cromozomul; se asociază flux arcelor care intră în destinații cantitatea căruia coincide cu necesarul destinației respective; parcurgând arborele în adâncime, arcelor rămase (i, j) le este asociat flux cantitatea căruia coincide cu totalul fluxului care trece prin arcele descendente vârfului j . Pentru soluția admisibilă de forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, unde x_h , $h = \overline{1, m}$ este cantitatea de flux care trece prin arcul (i, j) cu indicele h avem:

$$x_h = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin T, \\ q(j), & j \in V_t, \\ \sum_{(j, j')} x_{r'}, & r' \text{ este indicele arcului } (j, j'). \end{cases}$$

Evaluarea presupune determinarea valorii funcției obiectiv pentru fiecare dintre soluțiile obținute.

Pasul 3. Selectarea cromozomilor. Cromozomii sunt sortați în ordinea creșterii valorii funcției obiectiv asociate cromozomului. Cromozomii din prima jumătate a populației sunt transferați în noua populație.

Pasul 4. Încrucișarea cromozomilor. Are loc între cromozomii transferați în populația $P(i)$ din populația $P(i - 1)$ prin selecție.

Aleatoriu se aplică aceeași tăietură ambilor cromozomi-părinți luați câte doi, care constă în împărțirea aleatorie a mulțimii de destinații în două submulțimi. Mulțimea de destinații $V_t = \{1, 2, \dots, k\}$ este divizată în două submulțimi $V_{t_1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{k_1}\}$ și $V_{t_2} = \{v_{k_1+1}, v_{k_1+2}, \dots, v_k\}$, astfel încât $V_t = V_{t_1} \cup V_{t_2}$ cu $|V_t| = |V_{t_1}| + |V_{t_2}|$.

Încrucișarea cromozomilor presupune:

- primul cromozom-urmaș primește arcele care formează drumurile din sursă către mulțimea V_{t_1} a cromozomului-mamă și arcele care formează drumurile din sursă în mulțimea V_{t_2} a cromozomului-tată;

- al doilea cromozom-urmas primește arcele care formează drumurile din sursă către mulțimea V_{t_1} a cromozomului-tată și arcele care formează drumurile din sursă în mulțimea V_{t_2} a cromozomului-mamă.

La fiecare cromozom-urmas se adaugă vârfurile lipsă din totalul de n vârfuri ale grafului inițial și arcurile ce formează drumurile care unesc aceste vârfuri cu sursa în arborii care descriu cromozomii-părinți astfel: primului cromozom-urmas i se adaugă drumurile de la cromozomul-mamă; celui de al doilea cromozom-urmas i se adaugă drumurile de la cromozomul-tată.

Pentru a putea asocia cromozomul-urmas cu o soluție admisibilă este construit un arbore de acoperire peste graful obținut care descrie cromozomul-urmas. Fiecare pereche de cromozomi-părinți generează doi cromozomi-urmasi și dimensiunea populației rămâne constantă.

Pasul 5. Mutația. Unei gene a cromozomului-urmas i se aplică o mutație care are loc cu probabilitatea $\varepsilon \in [0.1, 0.5]$ și presupune ștergerea unui arc (i, j) și adăugarea altui arc (i^*, j) prezent în graful inițial, celelalte gene rămân nemodificate.

Pasul 6. Verificarea condiției de oprire. Implică oprirea algoritmului după k iterații. În calitate de soluție a problemei servește cea care corespunde cromozomului cu valoarea minimă a funcției obiectiv din ultima populație construită. Se trece la *Pasul 2* dacă condiția de oprire nu este satisfăcută.

Se formulează și se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema 2.13. Algoritmul AG3 necesită un volum de memorie de ordinul $O(n^2)$.

Teorema 2.14. Complexitatea unei iterații a algoritmului AG3 este de ordinul $O(n^2)$.

Teorema 2.15. Algoritmul AG3 converge către un optim local.

Codul scris în Wolfram Mathematica poate fi accesat pe <https://github.com/TatianaPasa/GeneticAlgorithm>.

În cele ce urmează se consideră problema neliniară de transport (1) – (3) pe rețea cu câteva surse și câteva destinații. Rețeaua de transport este descrisă de mulțimea de vârfuri $V = V_s \cup V_t \cup V_{int}$, unde $|V| = n + m + g$ și mulțimea de arce $E \subset V \times V$, $|E| = u$, unde V_s este mulțimea de surse, $|V_s| = n$, V_t – mulțimea de destinații, $|V_t| = m$ iar V_{int} – mulțimea de puncte intermediare, $|V_{int}| = g$.

Mulțimii de vârfuri i se asociază funcția de producere și consum de forma:

$$q(v) = 0 \text{ pentru } v \in V \setminus (V_s \cup V_t) \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n q(v_i) = \sum_{j=1}^m q(v_j)$$

unde $v_i \in V_s, i = \overline{1, n}$, este sursa i a rețelei de transport, $v_j \in V_t, j = \overline{1, m}$, – destinația j a rețelei de transport.

Algoritmul genetic AG4 propus pentru soluționarea problemei de transport cu funcții concave nedescrescătoare secvențial-liniare de cost constă din următorii pași:

Pasul 1. Inițializare. Se generează aleatoriu populația inițială din $4nm$ cromozomi: fiecare cromozom este descris de o listă de forma: $P = \{ \{T_r, r = \overline{1, n}\}, P_n, P_m \}$, unde $T_r = \{(i, j) \in E\}$, $r = \overline{1, n}$ - arbori de acoperire cu rădăcina în sursa r , $P_n = \{p(1), p(2), \dots, p(n)\}$ - ordinea de deservire a surselor, $P_m = \{p(1), p(2), \dots, p(m)\}$ - ordinea de deservire a destinațiilor.

Pasul 2. Decodificarea și Evaluarea cromozomilor. Decodificarea presupune asocierea fiecărui cromozom cu o soluție admisibilă având la bază modul de codificare a problemei.

Se inițializează tablourile unidimensionale care conțin respectiv cantitățile de produs în surse $\alpha' = [\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n]$ și necesitățile de produs în destinații $\beta' = [\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_m]$.

Pentru fiecare element $r \in P_n$ se construiește soluția intermediară pe arborele de acoperire corespunzător:

1. Pentru fiecare $j \in P_m$ avem: $x_{rh} = \min\{\alpha'_r, \beta'_j\}$, $v_j \in V_t$ și h - indicele arcului $(i, j) \in T_r$. Apoi, se actualizează $\alpha'_r := \alpha'_r - x_{rh}$, $\beta'_j := \beta'_j - x_{rh}$.
2. Arcului (i, j) cu indicele h unde $j \notin V_t$ i se asociază fluxul:

$$x_{rh} = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin T_r, \\ \sum_{(j, j') \in T_r} x_{rh'} & h' - \text{indicele arcului } (j, j'). \end{cases}$$

Ca rezultat se obțin soluțiile intermediare de forma: $x_{rh} = (x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{ru}), r = \overline{1, n}$ iar soluția finală a problemei are forma:

$$x = \left(\sum_{i=1}^n x_{i1}, \sum_{i=1}^n x_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n x_{iu} \right).$$

Evaluarea cromozomilor presupune determinarea valorii funcției obiectiv pentru fiecare dintre soluțiile obținute asociate cromozomilor.

Pasul 3. Selectarea cromozomilor. Cromozomii sunt sortați în ordinea creșterii valorii funcției obiectiv pentru soluția asociată cromozomului. Cromozomii din prima jumătate a populației sunt transferați în noua populație.

Pasul 4. Încrucișarea cromozomilor. Încrucișarea are loc între cromozomii transferați în populația $P(i)$ din populația $P(i - 1)$. Aleatoriu este aplicată aceeași tăietură ambilor cromozomi-părinți asupra compartimentului unu.

Încrucișarea cromozomilor presupune:

- primul cromozom-urmas este descris de arborii de acoperire de până la tăietură a cromozomului-mamă cu ordinea respectivă de deservire a surselor și arborii de acoperire de după tăietură a cromozomului-tată cu ordinea respectivă de deservire a destinațiilor;
- al doilea cromozom-urmas este descris de arborii de acoperire de până la tăietură a cromozomului-tată cu ordinea respectivă de deservire a surselor și arborii de acoperire de după tăietură a cromozomului-mamă cu ordinea respectivă de deservire a destinațiilor.

Fiecare pereche de cromozomi-părinți generează doi cromozomi-urmasi și dimensiunea populației rămâne constantă.

Pasul 5. Mutația. Unei gene a cromozomului-urmas i se aplică o mutație cu probabilitatea $\varepsilon \in [0.1, 0.5]$ și presupune:

- pentru fiecare dintre compartimentele *doi*, descris de ordinea de deservire a surselor, și *trei*, descris de ordinea de deservire a destinațiilor, aleatoriu se decide dacă este aplicată mutația;
- în fiecare dintre compartimentele alese se schimbă valorile între două elemente alese aleatoriu.

Celelalte gene rămân nemodificate.

Pasul 6. Verificarea condiției de oprire. Oprirea algoritmului are loc după k iterații. În calitate de soluție a problemei servește soluția ce corespunde cromozomului pentru care valoarea funcției obiectiv din ultima populație este minimă. Se trece la *Pasul 2* dacă condiția de oprire nu este satisfăcută.

Revenind la cadrul general, se formulează și se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema 2.16. Algoritmul AG4 necesită un volum de memorie de ordinul $O(|V|(n|V| + n + m))$.

Teorema 2.17. Complexitatea unei iterații a algoritmului AG4 este de ordinul $O(n|V|(m + |V| + u))$ operații.

Teorema 2.18. Algoritmul AG4 converge către un optim local.

Pe <https://github.com/TatianaPasa/GeneticAlgorithm> poate fi accesat codul scris în Wolfram Mathematica.

În **Capitolul III, Problema neliniară de transport cu N indici**, este studiată *problema de transport cu funcții concave de cost descrisă de 4 indici: surse, destinații, tipuri de produse transportate și tipuri de transport utilizate pentru transportare și problema de transport pe rețea cu funcții concave de cost care este descrisă de 5 indici: surse, destinații, tipuri de produse transportate, tipuri de transport utilizate pentru transportare și punctele intermediare ale rețelei*.

Rezultatele sunt publicate în lucrările (Pașa, 2018b), (Pașa & Ungureanu, 2019a), (Pașa, 2019b), (Pașa, 2020b).

În cele ce urmează, este considerată problema de transport pe rețea cu funcții concave de cost descrisă de: n surse $A_1, A_2, \dots, A_n$ care posedă cantitățile de produs respectiv $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; m destinații $B_1, B_2, \dots, B_m$ cu necesitățile respective de produs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$; p tipuri de produse $P_1, P_2, \dots, P_p$ cu cantitățile respective $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$; q tipuri de transport $T_1, T_2, \dots, T_q$ cu capacitățile de transport respective $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q$. Fluxul x_{ijkl} descrie cantitatea de produs P_l transportat din sursa A_i în destinația B_j utilizând tipul de transport T_k . Această problemă face parte din grupul de probleme de transport cu 4 indici (PT4I).

Problema neliniară de transport cu 4 indici (PNT4I) constă în determinarea unui flux x^* ce minimizează funcția:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \varphi_{ijkl}(x_{ijkl}),$$

unde $\varphi_{ijkl}(x_{ijkl})$ sunt funcții concave secvențial liniare nedescrescătoare de cost, adică se cere soluționarea problemei neliniare:

$$F(x) \rightarrow \min, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q x_{ijkl} = \alpha_i, & i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q x_{ijkl} = \beta_j, & j = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^q x_{ijkl} = \gamma_k, & k = \overline{1, p}, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p x_{ijkl} = \delta_l, & l = \overline{1, q}, \\ x_{ijkl} \geq 0, & (i, j, k, l), \end{cases} \quad (12)$$

pentru care sunt respectate condițiile de pozitivitate; deci, mărimile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ și $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q$ sunt pozitive și nenule. Forma generală a soluției optime pentru

PNT4I descrisă de (11) – (12) este $x^* = (x_{1111}^*, x_{1112}^*, \dots, x_{nmpq}^*)$. Se presupune că toate datele sunt valori reale și se dorește să se obțină ca soluție optimă o valoare reală fezabilă.

Algoritmul AME1 constă în reducerea consecutivă a problemei de optimizare neliniară la o serie de probleme de programare liniară:

Pasul 1. Se construiește o soluție admisibilă inițială $x^0 = (x_{1111}^0, x_{1112}^0, \dots, x_{nmpq}^0)$ a sistemului (12).

Pasul 2. Se determină valoarea funcției neliniare în x^0 :

$$F(x^0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \varphi_{ijkl}(x_{ijkl}^0),$$

și se calculează valoarea coeficienților:

$$C_{ijkl} = \begin{cases} \frac{\varphi_{ijkl}(x_{ijkl}^0)}{x_{ijkl}^0}, & x_{ijkl}^0 > 0, \\ \varphi'_{ijkl}(0), & x_{ijkl}^0 = 0, \end{cases}$$

pentru fiecare (i, j, k, l) .

Pasul 3. Se soluționează problema liniară de transport:

$$Z(x_{ijkl}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q C_{ijkl} x_{ijkl} \rightarrow \min,$$

cu restricțiile (12) și se obține soluția optimă $x^1 = (x_{1111}^1, x_{1112}^1, \dots, x_{nmpq}^1)$.

Pasul 4. Se compară valorile $Z(x^1)$ și $F(x^0)$. Dacă $Z(x^1) < F(x^0)$ sau $Z(x^1) = F(x^0)$ și $x^1 \neq x^0$, atunci x^0 se substituie cu x^1 și se trece la Pasul 2, ceea ce înseamnă că se repornește procedura de liniarizare cu o altă soluție inițială. Dacă $Z(x^1) > F(x^0)$ sau $Z(x^1) = F(x^0)$ și $x^1 = x^0$, atunci soluția optimă a problemei neliniare este considerată valoarea $x^* = x^0$. **STOP.**

Se formulează și se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema 3.1. Algoritmul AME1 converge către un optim local.

Teorema 3.2. Algoritmul AME1 necesită un volum de memorie de ordinul $O(nmpq(n + m + p + q))$.

Algoritmul genetic AMG1 propus pentru soluționarea PNT4I cu funcții concave nedescrescătoare secvențial-liniare constă din următorii pași:

Pasul 1. Inițializarea. Se generează aleatoriu populația inițială din $4nm$ cromozomi după cum urmează: fiecare cromozom este descris de o listă de forma $P = \{P_{ij}, P_p, P_q\}$, unde $P_{ij} = \{p(i, j) \mid i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ – listă aleatoare de arce care descrie ordinea de transport a produselor pe arce, $P_p = \{p(1), p(2), \dots, p(p)\}$ – o permutare a numerelor

$k = \overline{1, p}$ asociate tipurilor de produse, $P_q = \{p(1), p(2), \dots, p(q)\}$ – o permutare a numerelor $l = \overline{1, q}$ asociate tipurilor de transport.

Pasul 2. Decodificarea și Evaluarea cromozomilor. Decodificarea presupune că fiecărui cromozom i se asociază o soluție admisibilă de forma $x = (x_{1111}, x_{1112}, \dots, x_{nmpq})$ transportând fluxul din k produse cu cele l tipuri de transport din n surse către m destinații astfel: Se creează tablourile unidimensionale care conțin respectiv cantitățile de produs în surse, necesitățile de produs în destinații, tipuri de produse cu cantitățile respective și tipurile de transport cu capacitățile respective $\alpha' = [\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n]$, $\beta' = [\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_m]$, $\gamma' = [\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_p]$, $\delta' = [\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_q]$.

Pentru fiecare arc $(i, j) \in P_{ij}$, fiecare indice $k \in P_p$ și fiecare indice $l \in P_q$ se determină: $x_{ijkl} = \min\{\alpha'_i, \beta'_j, \gamma'_k, \delta'_l\}$, după care are loc actualizarea $\alpha'_i := \alpha'_i - x_{ijkl}$, $\beta'_j := \beta'_j - x_{ijkl}$, $\gamma'_k := \gamma'_k - x_{ijkl}$, $\delta'_l := \delta'_l - x_{ijkl}$.

Evaluarea presupune determinarea valorii funcției obiectiv pentru fiecare dintre soluțiile obținute.

Pasul 3. Selectarea cromozomilor. Cromozomii sunt sortați în ordinea creșterii valorilor funcției obiectiv asociate cromozomului. Cromozomii din prima jumătate a populației sunt transferați în noua populație.

Pasul 4. Încrucișarea cromozomilor. Are loc între perechile de cromozomi transferați în populația $P(i)$ din populația $P(i - 1)$ prin selecție. Aleatoriu este aplicată aceeași tăietură ambilor cromozomi-părinți asupra compartimentului 1, după care:

- primul cromozom-urmas primește consecutivitatea arcelor de până la tăietură a cromozomului-mamă și ordinea de distribuire a tipurilor de produse, iar celelalte arce (din a doua parte a compartimentului 1) păstrează ordinea arcelor cromozomului-tată și ordinea de utilizare a tipurilor de transport;
- al doilea cromozom-urmas primește consecutivitatea arcelor de după tăietură a cromozomului-tată și ordinea de distribuire a tipurilor de produse, iar celelalte arce (din prima parte a compartimentului 1) păstrează ordinea arcelor cromozomului-mamă și ordinea de utilizare a tipurilor de transport.

Pasul 5. Mutația. Unei gene a cromozomului-urmas i se aplică o mutație care are loc cu o probabilitate $\varepsilon \in [0.1, 0.5]$ și presupune:

- pentru fiecare compartiment *doi* – tipuri de produse, *trei* – tipuri de transport, aleatoriu se decide dacă este aplicată mutația;

- în fiecare dintre compartimentele alese se schimbă valorile între două elemente alese aleatoriu.

Pasul 6. Verificarea condiției de oprire. Implică oprirea algoritmului după k iterații. În calitate de soluție a problemei servește soluția care corespunde cromozomului cu valoarea funcției obiectiv minimă din ultima populație construită. Se trece la *Pasul 2* dacă condiția de oprire nu este satisfăcută.

Se formulează și se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema 3.3. Algoritmul AMG1 necesită un volum de memorie de ordinul $O(nm(n + m + p + q))$.

Teorema 3.4. Complexitatea unei iterații a algoritmului AMG1 este de ordinul $O(n^2m^2pq)$.

Teorema 3.5. Algoritmul AMG1 converge către un optim local.

Codul scris în Wolfram Mathematica poate fi accesat pe <https://github.com/TatianaPasa/GeneticAlgorithm>.

În cele ce urmează, se consideră problema descrisă de: n surse $A_1, A_2, \dots, A_n$ care posedă cantitățile de produs respectiv $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; m destinații $B_1, B_2, \dots, B_m$ cu necesitățile respective de produs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$; p tipuri de produse $P_1, P_2, \dots, P_p$ de cantitățile respective $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$; q tipuri de transport $T_1, T_2, \dots, T_q$ cu capacitățile respective $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q$; g noduri (puncte) intermediare $v_r \in V_{int}$ în care nu are loc nici producerea și nici consumul din cantitatea de produs.

În acest caz, rețeaua de transport este descrisă de un graf orientat aciclic $G = (V, E)$, cu mulțimea de vârfuri $V = V_s \cup V_t \cup V_{int}$, unde V_s – mulțimea de surse, $|V_s| = n$, V_t – mulțimea de destinații $|V_t| = m$ și V_{int} – mulțimea de puncte intermediare $|V_{int}| = g$ iar E – mulțimea de arce, $|E| = u$. Această problemă face parte din grupul de probleme neliniare de transport cu 5 indici descrisă de surse, destinații, puncte intermediare, tipuri de produse și tipuri de transport.

Pentru a simplifica formularea problemei, dar și descrierea/implementarea algoritmului de soluționare, problema neliniară de transport descrisă de surse, destinații, tipuri de produse, tipuri de transport și puncte intermediare este formulată ca o problemă neliniară de transport pe rețea cu 3 indici (PNTR3I) descrisă de arce, tipuri de produse și tipuri de transport.

În aceste condiții, pentru determinarea costului minim de transport trebuie respectate restricțiile de conservare a fluxului de produs în rețea:

- 1) Cantitatea totală de produs de tipul P_k , $k = \overline{1, p}$ în mărime de γ_k , $k = \overline{1, p}$, care iese din toate sursele rețelei este descrisă de relația:

$$\sum_{e \in E^-(V_s)} \sum_{l=1}^q x_{ekl} = \gamma_k, \quad k = \overline{1, p}, \quad (13)$$

unde $E^-(V_s)$ – mulțimea arcelor care ies din sursele rețelei.

- 2) Cantitatea totală de transport de tipul T_l , $l = \overline{1, q}$ cu capacitatea δ_l , $l = \overline{1, q}$ care iese din toate sursele rețelei este descrisă de relația:

$$\sum_{e \in E^-(V_s)} \sum_{k=1}^p x_{ekl} = \delta_l, \quad l = \overline{1, q}, \quad (14)$$

unde $E^-(V_s)$ – mulțimea arcelor care ies din sursele rețelei.

- 3) Cantitatea totală de produs care iese din fiecare sursă A_i , $i = \overline{1, n}$ este α_i , $i = \overline{1, n}$ și descrisă de relația:

$$\sum_{e \in E^-(s_i)} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q x_{ekl} = \alpha_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

unde $s_i \in V_s$ – sursa i a rețelei, $E^-(s_i)$ – mulțimea arcelor care ies din sursa i a rețelei.

- 4) Cantitatea totală de produs care intră în fiecare destinație B_j , $j = \overline{1, m}$ este β_j , $j = \overline{1, m}$ și descrisă de relația:

$$\sum_{e \in E^+(d_j)} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q x_{ekl} = \beta_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (16)$$

unde $d_j \in V_t$ – destinația j a rețelei, $E^+(d_j)$ – mulțimea arcelor care intră în destinația j a rețelei.

- 5) Cantitatea de produs γ_k , $k = \overline{1, p}$ care intră într-un vârf intermediar $v_r \in V_{int}$ coincide cu cantitatea de produs care iese din acel vârf:

$$\sum_{e \in E^+(v_r)} \sum_{l=1}^q x_{ekl} - \sum_{e \in E^-(v_r)} \sum_{l=1}^q x_{ekl} = 0, \quad r = \overline{1, g}, k = \overline{1, p}, \quad (17)$$

unde $v_r \in V_{int}$ – vârf intermediar al rețelei, $E^-(v_r)$ – mulțimea arcelor care ies din punctul intermediar r a rețelei, $E^+(v_r)$ – mulțimea arcelor care intră în punctul intermediar r a rețelei.

- 6) Cantitatea de transport δ_l , $l = \overline{1, q}$ care intră într-un vârf intermediar $v_r \in V_{int}$ coincide cu cantitatea de transport care iese din acel vârf:

$$\sum_{e \in E^+(v_r)} \sum_{k=1}^p x_{ekl} - \sum_{e \in E^-(v_r)} \sum_{k=1}^p x_{ekl} = 0, \quad r = \overline{1, g}, l = \overline{1, q}, \quad (18)$$

unde $v_r \in V_{int}$ – vârf intermediar al rețelei, $E^-(v_r)$ – mulțimea arcelor care ies din punctul intermediar r a rețelei, $E^+(v_r)$ – mulțimea arcelor care intră în punctul intermediar r a rețelei.

7) Valorile care descriu fluxul de produs pe arcele rețelei sunt mărimi pozitive:

$$x_{ekl} \geq 0, \quad \text{pentru fiecare } (e, k, l). \quad (19)$$

PNTR3I constă în determinarea unui flux x^* care minimizează funcția de cost:

$$F(x) = \sum_{e \in E} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \varphi_{ekl}(x_{ekl}), \quad (20)$$

unde $\varphi_{ekl}(x_{ekl})$ sunt funcții concave secvențial liniare nedescrescătoare de cost, adică se cere soluționarea problemei neliniare:

$$\begin{aligned} & F(x) \rightarrow \min, \\ & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{e \in E^-(V_s)} \sum_{l=1}^q x_{ekl} = \gamma_k, \quad k = \overline{1, p}, \\ & \sum_{e \in E^-(V_s)} \sum_{k=1}^p x_{ekl} = \delta_l, \quad l = \overline{1, q}, \\ & \sum_{e \in E^-(s_i)} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q x_{ekl} = \alpha_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ & \sum_{e \in E^+(d_j)} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q x_{ekl} = \beta_j, \quad j = \overline{1, m}, \\ & \sum_{e \in E^+(v_r)} \sum_{l=1}^q x_{ekl} - \sum_{e \in E^-(v_r)} \sum_{l=1}^q x_{ekl} = 0, \quad r = \overline{1, g}, k = \overline{1, p}, \\ & \sum_{e \in E^+(v_r)} \sum_{k=1}^p x_{ekl} - \sum_{e \in E^-(v_r)} \sum_{k=1}^p x_{ekl} = 0, \quad r = \overline{1, g}, l = \overline{1, q}, \\ & x_{ekl} \geq 0, \quad \forall (e, k, l), \end{aligned} \right. \quad (22) \end{aligned}$$

pentru care sunt respectate condițiile de pozitivitate, deci mărimile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ și $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q$ sunt pozitive și nenule.

Forma generală a soluției optime a PNTR3I are forma $x^* = (x_{111}^*, x_{112}^*, \dots, x_{upq}^*)$ pentru o rețea descrisă de u arce. Se presupune că toate datele sunt valori reale și se dorește să se obțină ca soluție optimă o valoare reală fezabilă.

În cele ce urmează se propune algoritmul AME2 de soluționare a problemei formulate care constă în reducerea consecutivă a problemei de optimizare neliniară la o serie de probleme de programare liniară. Pentru determinarea coeficienților care descriu funcția obiectiv liniară la care este redusă funcția obiectiv neliniară a problemei inițiale se folosește schema de soluționare a problemelor separabile deoarece ea satisface condițiile.

Algoritmul AME2

Pasul 1. Se construiește o soluție admisibilă inițială $x^0 = (x_{111}^0, x_{112}^0, \dots, x_{upq}^0)$ a sistemului de restricții (22).

Pasul 2. Se determină valoarea funcției în x^0 :

$$F(x^0) = \sum_{e \in E} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \varphi_{ekl}(x_{ekl}^0),$$

și se calculează valoarea coeficienților:

$$C_{ekl} = \begin{cases} \frac{\varphi_{ekl}(x_{ekl}^0)}{x_{ekl}^0}, & x_{ekl}^0 > 0, \\ \varphi'_{ekl}(0), & x_{ekl}^0 = 0, \end{cases}$$

pentru fiecare (e, k, l) .

Pasul 3. Se soluționează problema liniară de transport:

$$Z(x_{ekl}) = \sum_{e \in E} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q C_{ekl} x_{ekl} \rightarrow \min,$$

cu restricțiile (22) și se obține soluția optimă $x^1 = (x_{111}^1, x_{112}^1, \dots, x_{upq}^1)$ pentru o rețea descrisă de u arce.

Pasul 4. Se compară valorile $Z(x^1)$ și $F(x^0)$. Dacă $Z(x^1) < F(x^0)$ sau $Z(x^1) = F(x^0)$ și $x^1 \neq x^0$ atunci x^0 se substituie cu x^1 și se trece la *Pasul 2* ceea ce înseamnă că se repornește procedura de liniarizare cu o altă soluție inițială. Dacă $Z(x^1) > F(x^0)$ sau $Z(x^1) = F(x^0)$ și $x^1 = x^0$, atunci soluția optimă a problemei neliniare este considerată valoarea $x^* = x^0$, se păstrează mărimea $F(x^0)$ și $x^* = x^0$ care îi corespunde și **STOP**.

În cele ce urmează, se formulează și se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema 3.6. *Algoritmul AME2 converge către un optim local.*

Teorema 3.7. *Algoritmul AME2 necesită un volum de memorie de ordinul $O(upq(n + m + g(p + q)))$.*

În cele ce urmează este soluționată problema *PNTR3I*, aplicând un algoritm genetic, ceea ce presupune codificarea problemei astfel încât fiecărui cromozom din populație să i se poată asocia doar o soluție admisibilă. Fiecare populație nou-creată păstrează cromozomii cu cele mai bune caracteristici din populația precedentă, astfel încât în timpul selecției să nu fie pierdute soluțiile cărora le sunt asociate costuri mici.

Algoritmul genetic AMG2 propus pentru soluționarea *PNTR3I* cu funcții concave nedescrescătoare secvențial-liniare constă din următorii pași:

Pasul 1. Inițializarea. Se generează aleatoriu populația inițială din $4|V|$ cromozomi fiecare descris

de mulțimea $P = \{T_r, r = \overline{1, n}, P_n, P_m, P_p, P_q\}$, unde $T_r = \{(i, j) \mid i, j = \overline{1, n+m+g}\}$ – arbori de acoperire cu rădăcina în sursa r , $r = \overline{1, n}$ a rețelei de transport, $P_n = \{p(1), p(2), \dots, p(n)\}$ – o permutare a numerelor $i = \overline{1, n}$ asociate surselor, $P_m = \{p(1), p(2), \dots, p(m)\}$ – o permutare a numerelor $j = \overline{1, m}$ asociate destinațiilor, $P_p = \{p(1), p(2), \dots, p(p)\}$ – o permutare a numerelor $k = \overline{1, p}$ asociate tipurilor de produse, $P_q = \{p(1), p(2), \dots, p(q)\}$ – o permutare a numerelor $l = \overline{1, q}$ asociate tipurilor de transport.

Pasul 2. Decodificarea și Evaluarea cromozomilor. Decodificarea presupune că fiecărui cromozom i se asociază o soluție admisibilă de forma $x = (x_{111}, x_{112}, \dots, x_{epq})$ transportând fluxul din k produse cu l tipuri de transport din fiecare sursă către destinații pe arcele ce corespund arborilor. În acest scop:

1. Se creează tablourile unidimensionale care conțin respectiv cantitățile de produs în surse, necesitățile de produs în destinații, tipurile de produse cu cantități diferite și tipurile de transport cu capacități diferite astfel:

$$\alpha' = [\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n], \beta' = [\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_m], \gamma' = [\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_p], \delta' = [\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_q].$$

2. Pentru fiecare indice $r \in P_{ij}$ se determină soluția intermediară astfel:

- a) pentru fiecare indice $j \in P_m$, fiecare indice $k \in P_p$ și fiecare indice $l \in P_q$ se determină: $x_{ekl} = \min\{\alpha'_i, \beta'_j, \gamma'_k, \delta'_l\}$, după care are loc actualizarea $\alpha'_i := \alpha'_i - x_{ekl}$, $\beta'_j := \beta'_j - x_{ekl}$, $\gamma'_k := \gamma'_k - x_{ekl}$, $\delta'_l := \delta'_l - x_{ekl}$, unde e - indicele arcului $(i, j) \in T_r$;
- b) arcului (i, j) cu indicele e , unde $j \notin V_t$, i se asociază fluxul:

$$x_{rekl} = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin T_r, \\ \sum_{(j, j') \in T_r} x_{re'kl} & e' - \text{indicele arcului } (j, j'), \end{cases}$$

unde $k = \overline{1, p}$, $l = \overline{1, q}$. Ca rezultat se obțin soluțiile intermediare de forma:

$$x_{rekl} = (x_{r111}, x_{r112}, \dots, x_{rupq}), r = \overline{1, n}$$

iar soluția finală a problemei are forma:

$$x = \left(\sum_{i=1}^n x_{i111}, \sum_{i=1}^n x_{i112}, \dots, \sum_{i=1}^n x_{iupq} \right).$$

Evaluarea cromozomilor presupune determinarea valorii funcției obiectiv pentru fiecare dintre soluțiile asociate cromozomilor.

Pasul 3. Selectarea cromozomilor. Cromozomii sunt sortați în ordinea creșterii valorii funcției obiectiv pentru soluția asociată cromozomului. Cromozomii din prima jumătate a populației sunt transferați în noua populație.

Pasul 4. Încrucișarea cromozomilor. Încrucișarea se realizează între cromozomii transferați în populația $P(i)$ din populația $P(i - 1)$ prin selecție. Aleatoriu este aplicată aceeași tăietură ambilor cromozomi-părinți asupra compartimentului 1. Cromozomii-urmași se obțin astfel:

- primul cromozom-urmas primește arborii de până la tăietură a cromozomului-mamă cu ordinea respectivă a surselor și a tipurilor de produse și arborii de după tăietura a cromozomul-tată cu ordinea respectivă a destinațiilor și a tipurilor de transport;
- al doilea cromozom-urmas primește arborii de până la tăietură a cromozomului-tată cu ordinea respectivă a surselor și tipurilor de produse și arborii de după tăietură a cromozomul-mamă cu ordinea respectivă a destinațiilor și tipurilor de transport.

Fiecare pereche de cromozomi-părinți generează doi cromozomi-urmași și dimensiunea populației noi rămâne constantă.

Pasul 5. Mutația. Unei gene a cromozomului-urmas i se aplică o mutație cu probabilitatea $\varepsilon \in [0.1, 0.5]$ și presupune:

- pentru fiecare compartiment *doi* – surse, *trei* – destinații, *patru* – tipuri de produse și *cinci* – tipuri de transport, aleatoriu se decide dacă este aplicată mutația;
- în fiecare dintre compartimentele alese se schimbă valorile între două elemente alese aleatoriu.

Pasul 6. Verificarea condiției de oprire. Implică oprirea algoritmului după k iterații. În calitate de soluție a problemei servește soluția care corespunde cromozomului cu valoarea funcției obiectiv minimă din ultima populație construită. Se trece la *Pasul 2* dacă condiția de oprire nu este satisfăcută.

Se formulează și se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema 3.8. Algoritmul AMG2 necesită un volum de memorie de ordinul $O(|V|(n|V| + n + m + p + q))$.

Teorema 3.9. Complexitatea unei iterații a algoritmului AMG2 este de ordinul $O(npq|V|(m + |V| + u))$.

Teorema 3.10. Algoritmul AMG2 converge către optimul local.

Codul scris în Wolfram Mathematica poate fi accesat pe <https://github.com/TatianaPasa/GeneticAlgorithm>.

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Cercetările efectuate în cadrul tezei “*Algoritmi de soluționare a problemelor neliniare de transport*” corespund scopului și obiectivelor expuse în introducerea lucrării. Ținând cont de importanța și aplicabilitatea problemei studiate în capitolul 1 și în baza rezultatelor obținute în capitolele 2 și 3, se formulează câteva concluzii generale și recomandări.

Concluzii generale asupra rezultatelor obținute

1. Soluționarea problemelor neliniare de transport de dimensiuni mari descrise de rețele cu una sau mai multe surse și una sau mai multe destinații aplicând algoritmi euristici AE1 și AE2, descriși de autor, permit îmbunătățirea esențială a timpului de execuție la aflarea soluției pseudo optime de minimum 600 de ori pentru probleme de dimensiuni mici și de peste 9 000 000 de ori pentru probleme de dimensiuni mari (Cap. 2, 2.2);
2. Algoritmi genetici AG1, AG2, AG3 și AG4, propuși de autor, permit soluționarea în timp rezonabil a problemelor neliniare de transport cu câteva mii de necunoscute descrise de rețelele cu una sau mai multe surse și una sau mai multe destinații pentru care funcțiile standard nu sunt aplicabile în timp real (Capitolul 2, 2.3, 2.4, 2.5);
3. Soluționarea problemelor neliniare de transport de dimensiuni mari descrise de rețele cu mai mulți indici aplicând algoritmi euristici AME1 și AME2, descriși de autor, permit îmbunătățirea esențială a timpului de execuție și generează o soluție pseudo optimă în timp rezonabil (Capitolul 3, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.2, 3.2.3);
4. Algoritmi genetici AMG1 și AMG2, propuși de autor, permit soluționarea în timp rezonabil a problemelor neliniare de transport cu câteva mii de necunoscute, descrise de rețelele cu mai mulți indici (Capitolul 3, 3.1.4, 3.1.5, 3.2.4, 3.2.5);
5. Testarea algoritmilor genetici AG3, AG4, AMG1 și AMG2, demonstrează că se asigură cu succes ieșirea din blocajele în soluțiile locale, iar procedura de codificare permite la decodificare să se obțină întotdeauna soluții admisibile ale problemei examinate (Capitolul 2, 2.4.3, 2.5.3, Capitolul 3, 3.1.5, 3.2.5);
6. Se observă o îmbunătățire a timpului de execuție pentru algoritmi genetici AG1, AG2, AG3, AG4, AMG1, AMG2 în comparație cu timpul de execuție a algoritmilor AE1, AE2, AME1 și AME2, primii fiind aplicabili și pentru probleme de dimensiuni foarte mari de ordinul a zeci de mii de necunoscute în timp de la 5 la 10 minute pe calculatoarele menționate în teză (Capitolul 2, 3).

Algoritmi elaborați și testați în cadrul acestei lucrări sunt realizați în limbajul Wolfram și implementați în Sistemul Mathematica.

Avantajele și valoarea elaborărilor propuse

Cercetările efectuate sunt o extindere a teoriei ce ține de problemele neliniare de transport pe rețea cu funcții concave de cost. Datorită gradului înalt de noutate și originalitate, algoritmi elaborați propuși în lucrare au o valoare științifică distinctă. Rezultatele obținute pot fi utilizate în diverse domenii atât teoretice, cât și practice.

Recomandări

Luând în considerare importanța teoretico-aplicativă și complexitatea problemelor abordate în lucrare, se recomandă:

1. Continuarea cercetărilor în vederea elaborării unor noi algoritmi care permit obținerea soluțiilor optime pentru probleme neliniare de transport cu variate tipuri de funcții de cost, diferite de cele examinate deja în lucrare.
2. Extinderea rezultatelor obținute pentru cazuri nestudiate ale problemelor neliniare de transport cu mai mulți indici, prin descrierea modelului matematic și a algoritmilor care permit soluționarea lor.
3. Utilizarea rezultatelor obținute în curricula unor discipline opționale predate în cadrul instituțiilor de învățământ superior la diverse cicluri de studii universitare.

LISTA PUBLICAȚIILOR AUTORULUI LA TEMA TEZEI

1. LOZOVANU, D., PASHA, T. An algorithm for solving the transport problem on network with concave cost functions of flow on edges. In: *Computer Science Journal of Moldova*, 2002, vol. 10, no. 3(30), p. 341-347. ISSN 1561-4042.
2. PAȘA, T. Proprietățile soluționării optime a problemei neliniare de transport pe rețea. În: *Analele Universității de Stat din Moldova, Seria "Științe fizico-matematice"*, 2004, p. 134-140. ISSN 1811-2641.
3. PAȘA, T. Algoritmul determinării soluțiilor admisibile și a soluțiilor optime pentru problemele de transport pe rețea cu o singură sursă. În: *Analele Universității de Stat din Moldova, Seria "Științe fizico-matematice"*, 2005, p. 188-190. ISSN 18811-2641.
4. PAȘA, T. Sinteza metodelor de soluționare a unor cazuri particulare ale problemei de transport pe rețea. În: *Studia Universitatis Moldaviae, Seria Științe Exacte*, 2011, nr.7 (47), p. 53-59. Online ISSN 2345-1033.
5. PAȘA, T., UNGUREANU, V. Wolfram Mathematica as an environment for solving concave network transportation problem. In: *The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachevici (1917 - 1997), 28 iunie - 2 iulie, 2017a*, p. 429 - 432. Chișinău: IMCS, AȘM. ISBN 978 - 9975 - 71 - 915 - 5.
6. PAȘA, T., UNGUREANU, V. Asupra metodei potențialelor pentru problema de transport degenerată. *Studia Universitas Moldaviae, Seria Științe Exacte*, 2017b, nr. 2 (102), p. 30-36. ISSN 1857 – 2073.
7. PAȘA, T. Problema fluxului maxim în rețele – analiza și sinteza algoritmilor de soluționare. *Studia Universitatis Moldaviae, Seria „Științe exacte”*, 2017c, nr. 7 (107), p. 150-158. ISSN 1857-2073, Online ISSN 2345-1033.
8. PAȘA, T., UNGUREANU, V. Non-Linear Concave Transportation Problem Solving and Implementation using Wolfram Language., In: *ITSN*, 2017d, p. 30-39. Chișinău. ISBN 978-9975-3168-5-9.
9. PAȘA, T., UNGUREANU, V. Solving the transportation problem with piecewise - linear concave cost function. In: *Review of AFA, The Scientific Informative Review*, 2017e, vol. XV no. 2 (34), p. 49 -56. SPSR, DOI: 10.19062/1842-9238.2017.15.2. ISSN 1842-9238.
10. PAȘA, T., UNGUREANU, V. Applying sequential and parallel programming to solve a non-linear transport problem. In: *ICMCS, October 19 - 21, 2017f*, p. 247-251. Cișinău, Republic of Moldova. ISBN 978-9975-4264-8-0.

11. **PAȘA, T.** Soluționarea problemei de transport pe rețea ca problemă a programării nelineare. În: *Studia Universitatis Moldaviae, Seria Științe Exacte*, 2018a, nr. 7 (117), p. 14-24. ISSN 1857 - 2073.
12. **PAȘA, T.** Multi-index transport problem with non-linear cost functions. In: *Romai J.*, 2018b, vol. 14, no. 2, p. 129-137. Disponibil: <https://rj.romai.ro/arhiva/2018/2/Pasa.pdf>.
13. **PAȘA, T.** The genetic algorithm for solving the non-linear transportation problem. In: *Review of the Air Force Academy, The Scientific Informative Review*, 2018c, nr. 2 (37), p. 37 - 44. Online ISSN: 2069-4733, ISSN-L: 1842-9238.
14. **PAȘA, T.**, The application of parallel programming in solving the non-linear transport problem, *Conferința Internațională Modelare Matematică, Optimizare și Tehnologii informaționale*, 12-16 noiembrie, 2018d, Chișinău, p. 164-168. ISBN 978-9975-62-421-3.
15. **PAȘA, T.**, UNGUREANU, V. Solving the non-linear 4-index transportation problem. In: *The Fifth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova*, 2019a, p. 221-224. Chișinău: Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science. Disponibil: https://ibn.idsi.md/sites/default/files/imag_file/221-224_9.pdf.
16. **PAȘA, T.** Solving non-linear multi-index transportation problems. In: *Romai J.*, 2019b, vol. 15, no. 2, p. 91-99. Disponibil: <https://rj.romai.ro/arhiva/2019/2/Pasa.pdf>.
17. **PAȘA, T.** Solving transportation problems with concave cost functions using genetic algorithms. In: *Computer Science Journal of Moldova*, 2020a, vol. 28 no. 2 (83), p.140-151.
18. **PAȘA, T.**, Algoritmi de soluționare a problemelor neliniare de transport cu mai mulți indici. În: *Studia Universitatis Moldaviae, Seria Științe Exacte*, 2020b, nr. 2 (132), p. 36-44. ISSN 1857 - 2073 Online ISSN 2345-1033.
19. **PAȘA, T.** Genetic algorithm for solving transportation problems on networks with one source and multiple sinks. In: *ITM Web Conf., ICAMNM 2020, Section: Applied Mathematics and Numerical Methods*, 2020c, nr. 34, 11 pages. <https://doi.org/10.1051/itmconf/20203402006>, Online ISSN 2271-2097.

ADNOTARE

Paşa Tatiana

“Algoritmi de soluționare a problemelor neliniare de transport”, teză de doctor în informatică, Chișinău, anul 2021.

Structura tezei: Teza conține: introducere, trei capitole, concluzii generale și recomandări, bibliografie din 173 de titluri, 118 pagini text de bază, 10 figuri, 20 tabele. Rezultatele obținute sunt publicate în 19 lucrări științifice.

Cuvinte cheie: problemă de transport, problemă neliniară, rețea de transport, funcție de cost, funcție de producere și consum, graf, arbore de acoperire, algoritm genetic, mulțime admisibilă.

Scopul lucrării: constă în soluționarea unui șir de probleme neliniare de transport de dimensiuni mari cu funcții concave de cost.

Obiectivele cercetării: cercetarea problemelor de transport și a metodelor de soluționare a lor; elaborarea algoritmilor aproximativi pentru soluționarea problemelor neliniare de transport; elaborarea algoritmilor genetici pentru soluționarea în timp rezonabil a problemelor de transport de dimensiuni mari descrise de rețele cu una sau mai multe surse și una sau mai multe destinații cu funcții concave de cost; elaborarea algoritmilor genetici pentru soluționarea în timp rezonabil a problemelor de transport de dimensiuni mari descrise de rețele cu mai mulți indici și cu funcții concave de cost; testarea și estimarea timpului de execuție a algoritmilor propuși.

Noutatea și originalitatea științifică: constă în obținerea rezultatelor noi de ordin teoretico-aplicativ care completează cele cunoscute deja în literatura de specialitate în domeniul problemelor neliniare de transport. Sunt soluționate problemele neliniare de transport cu doi, patru și cinci indici aplicând reduceri consecutive a problemelor neliniare de transport la probleme liniare; este codificată problema neliniară de transport cu o sursă și o destinație, problema neliniară de transport cu o sursă și câteva destinații, problema neliniară de transport cu câteva surse și câteva destinații, problema neliniară de transport cu 4 indici și cea cu 5 indici pentru a putea fi aplicați algoritmi genetici astfel încât la decodificare să fie obținute soluții admisibile; sunt descriși operatorii de încrucișare și mutație a algoritmilor genetici astfel încât la decodificare se obțin soluții admisibile; este demonstrat practic faptul că fiecare din algoritmi propuși generează o soluție admisibilă locală în timp rezonabil.

Rezultatul/rezultatele obținute care contribuie la soluționarea unei probleme științifice importante: consistă în *identificarea metodelor* de codificare a problemelor neliniare de transport fapt care *a condus la crearea* unor algoritmi genetici și a unor algoritmi bazați pe reducerea la probleme liniare *pentru implementarea ulterioară* în soluționarea problemelor aplicative.

Semnificația teoretică: este determinată de rezultatele obținute - elaborarea algoritmilor descriși de iterații polinomiale pentru soluționarea unor probleme neliniare de transport. Este demonstrat că algoritmi converg întotdeauna către o soluție optimă locală în timp rezonabil.

Valoarea aplicativă: constă în posibilitatea utilizării algoritmilor propuși pentru rezolvarea problemelor de transport reale și în adaptarea lor pentru o mulțime mai largă de probleme neliniare de transport.

Implementarea rezultatelor științifice: rezultatele obținute pot servi drept suport pentru cursuri opționale pentru studenții și masteranzi ce țin de soluționarea problemelor de optimizare neliniară. Algoritmi propuși permit soluționarea problemelor de aprovizionare a magazinelor cu produse, a întreprinderilor cu materii prime, a organizațiilor de construcție cu materiale de construcție etc..

АННОТАЦИЯ

Паша Татiana

**«Алгоритмы решения нелинейных транспортных задач»,
диссертационная работа в информатике, Кишинэу, 2021 год.**

Структура работы: Диссертация содержит: введение, три главы, заключение с рекомендациями, список цитируемой литературы состоящий из 173 наименований, 118 страниц основного текста, 10 рисунков, 20 таблиц. Полученные результаты были опубликованы в 19 научных работах.

Ключевые слова: транспортная задача, нелинейная задача, транспортная сеть, функция стоимости, функция производства и потребления, граф, дерево покрытия, генетический алгоритм, допустимое множество.

Цель исследования: состоит в том, чтобы решить ряд нелинейных транспортных задач больших размеров с вогнутыми функциями стоимости.

Задачи исследования: исследование транспортных задач и их методов решения; разработка приближенных алгоритмов решения нелинейных транспортных задач; разработка генетических алгоритмов для решения за разумное время крупномасштабных транспортных задач, описываемых сетями с одним или несколькими источниками и одним или несколькими пунктами назначения с вогнутыми функциями стоимости; разработка генетических алгоритмов для решения за разумное время крупномасштабных транспортных задач, описываемых сетями с несколькими индексами и вогнутыми функциями стоимости; тестирование и оценка времени выполнения предложенных алгоритмов.

Научная новизна и оригинальность: состоит в получении новых теоретико-прикладных результатов, дополняющих уже известные в специализированной литературе области нелинейных транспортных задач. Нелинейные транспортные задачи с двумя, четырьмя и пятью индексами решены путем применения последовательных сведений нелинейных транспортных задач к линейным задачам; была закодирована нелинейная транспортная задача с одним источником и одним стоком, нелинейная транспортная задача с одним источником и несколькими стоками, нелинейная транспортная задача с несколькими источниками и несколькими стоками, нелинейная транспортная задача с 4 и 5 индексами, так что, применяя генетические алгоритмы были получены допустимые решения во время декодирования; описаны операторы скрещивания и мутации генетических алгоритмов чтобы получить допустимые решения после декодирования; практически продемонстрировано что каждый из предложенных алгоритмов генерирует локально допустимое решение за разумное время.

Полученные результаты, способствующие решению важной научной проблемы: состоит в определении методов кодирования нелинейных транспортных задач, что привело к разработке генетических алгоритмов и алгоритмов, основанных на сведении к линейным задачам для последующего внедрения при решении прикладных задач.

Теоретическая значимость: определена полученными результатами, связанными с алгоритмами, описываемыми полиномиальными итерациями, предложенными для решения нелинейных транспортных задач. Доказано, что алгоритмы всегда сходятся к локальному оптимальному решению за разумное время.

Практическая применимость: состоит в возможности использования предложенных алгоритмов при решении реальных транспортных задач и их адаптации для более широкого набора нелинейных транспортных задач.

Внедрение научных результатов: полученные результаты могут стать подспорьем при разработке некоторых факультативных курсов, связанных с решением задач нелинейной оптимизации, для студентов и магистрантов. Предложенные алгоритмы позволяют решить задачи обеспечения магазинов товарами, вывозимыми со складов, предприятий сырьём, строительных организаций строительными материалами и т.д.

ANNOTATION

Paşa Tatiana

“Algorithms for solving nonlinear transportation problems” a PhD degree in Informatics, Chişinău, 2021.

Thesis structure: The thesis contains an introduction, three chapters, general conclusions and recommendations, a bibliography of 173 titles, 118 pages of main text, 10 figures, 20 tables. The obtained results were published in 19 scientific papers.

Keywords: transportation problem, nonlinear problem, transportation network, cost function, production and consumption function, graph, spanning tree, algorithm, admissible set.

The goal of the thesis: is to study and solve large-scale nonlinear transportation problems with concave cost functions.

Research objectives: research of transport problems and methods of their solving; elaboration of approximate algorithms for solving non-linear transportation problems; elaboration of genetic algorithms for solving in a reasonable time the large-scale transportation problems described by networks with one or more sources and one or more destinations with concave cost functions; elaboration of genetic algorithms for solving in a reasonable time the large-scale transportation problems described by networks with several indices and concave cost functions; testing and estimating the execution time of the proposed algorithms.

The scientific novelty and originality: consists in new theoretical and applicative results that complete those known from specialized literature in the domain of nonlinear transportation problems. The non-linear transportation problems with two, four and five indices were solved through the application of consecutive reductions of the non-linear problems to linear ones; the non-linear problems with a single source and destination, with a single source and several destinations, with several sources and several destinations, with 4 indices and with 5 indices were codified so that genetic algorithms could be applied and admissible solutions are obtained through decoding; the crossover and mutations operators of the genetic algorithms were described so that admissible solution are obtained through decoding; it has been practically proved that each of the proposed algorithms generates a local admissible solution in reasonable time.

The obtained results which contribute to solve some important scientific problem: consists in identification of methods of coding nonlinear transportation problems, which led to the creation of genetic algorithms and of algorithms based on reduction to a linear problem. These algorithms were then implemented to solve applicative problems.

The theoretical significance: of the research is determined by the obtained results related to the proposed algorithms with polynomial iterations for solving nonlinear transportation problems. It has been shown that algorithms always converge to a local optimal solution in a reasonable time.

The applicative value: of the paper consists in the possibility of using the proposed algorithms to solve real transportation problems and adapting them to a larger set of nonlinear transportation problems.

The implementation of the scientific results: the obtained results can serve as a support for some optional courses, related to solving nonlinear optimization problems, for bachelor or master students. The proposed algorithms allow solving the problem of supplying stores with products transported from warehouses, enterprises with raw materials, construction and civil engineering companies with construction materials, etc.

PAȘA TATIANA

**ALGORITMI DE SOLUȚIONARE A PROBLEMELOR
NELINIARE DE TRANSPORT**

**122.03 – MODELARE, METODE MATEMATICE,
PRODUSE PROGRAM**

Rezumatul tezei de doctor în informatică

Aprobat spre tipar: **03.11.2021**

Formatul hârtiei: 60x84 1/16

Hârtie ofset. Tipar ofset.

Tirajul: **45** ex.

Coli de tipar: **2,1**

Comanda nr. **134**

Tipografia

CEP 21504