

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
ȘCOALA DOCTORALĂ ȘTIINȚE FIZICE, MATEMATICE,
ALE INFORMAȚIEI ȘI INGINEREȘTI


Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 512.548


DIDURIC, Natalia


MORFISMELE ȘI PROPRIETĂȚILE SISTEMELOR
ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIȚII DE TIP
MOUFANG


REZUMAT


Specialitatea 111.03 - Logică matematică, algebră și teoria numerelor

Autor:  Diduric Natalia

Conducător de doctorat:  Șcerbacov Victor, doctor habilitat în științe fizico-matematice

Comisia de îndrumare:  Cojocarui Svetlana, doctor habilitat în informatică, membru correspondent

 Arnautov Vladimir, academician, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar

 Chiriac Liubomir, doctor habilitat în științe matematice, profesor universitar

CHIȘINĂU, 2022

Teza a fost elaborată în cadrul Școlii Doctorale Științe Fizice, Matematice, ale Informației și Inginerești, Universitatea de Stat din Moldova.

Autor:

Diduric Diduric Natalia

Conducător științific:

Șcerbacov Șcerbacov Victor, doctor habilitat în științe fizico-matematice

Comisia de doctorat:

Președinte:

Gaindric Constantin, doctor habilitat în informatică, membru corespondent

Conducător de doctorat:

Șcerbacov Victor, doctor habilitat în științe fizico-matematice

Referenți oficiali:

Arnautov Vladimir, academician, doctor habilitat în științe fizico-matematice

Sârbu Parascovia, doctor în științe matematice, conferențiar universitar

Dudek Wieslaw A., doctor habilitat în științe tehnice, profesor universitar

Ursu Vasile, doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar

Susținerea va avea loc pe data de 29 martie 2022, ora 14:00, la Institutul de Matematică și Informatică "Vladimir Andrunachievici", str. Academiei 5, bir. 340.

Teza de doctorat și rezumatul pot fi consultate la Biblioteca Universității de Stat din Moldova și pe pagina web a Agenției Naționale de Asigurare a Calității în Educație și Cercetare (www.cnaa.md).

Autor Diduric

Secretarul comisiei de doctorat: Petic Petic Mircea, doctor în informatică, conferențiar cercetător

© Diduric Natalia, 2022

CUPRINS

1.	REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII	4
2.	CONȚINUTUL TEZEI	8
3.	CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI	17
	BIBLIOGRAFIE	19
	LISTA PUBLICAȚIILOR AUTOAREI LA TEMA TEZEI	21
	ADNOTARE	23
	ANNOTATION	24
	АННОТАЦИЯ	25

1. REPERE CONCEPTUALE ALE CERCETĂRII

Actualitatea și importanța problemei abordate. Teoria cvazigrupurilor își ia începutul în anii 20–30 ai secolului XX, după publicarea lucrărilor fundamentale ale lui David Hilbert, la sfârșitul secolului XIX, care țin de axiomatizarea matematicii și, în particular, de axiomatizarea geometriei, apariția lucrărilor referitoare la diferite sisteme de axiome, în general la sistemele de axiome ale diverselor geometrii, inclusiv geometriei euclidiene, geometriei proiective, geometriei Lobacevski, în dimensiunile 2 și 3.

Însuși termenul „cvazigrup” a apărut în lucrarea lui Ruth Moufang [1] consacrată problemelor de coordonată planurilor proiective. Putem afirma, de asemenea, că termenul „cvazigrup” a apărut în studiul independenței axiomelor planului proiectiv. În lucrările sale Moufang prin cvazigrup percepea obiectul, care acum este numit buclă Moufang. În termeni moderni, ea a definit bucla Moufang ca o IP -buclă (Q, \cdot) cu „asociativitate slabă”.

Peste doi ani după apariția lucrărilor Moufang a fost publicată o lucrare importantă la tema cvazigrupurilor de Gerrit Bol (1937), și anume „Gewebe und Gruppen”. Bol a abordat noțiunea de cvazigrup din punct de vedere geometric. El construiește trei noi configurații U_1 , U_2 , U_3 și arată că cele trei figuri U împreună implică numai legea $a [b (cb)] = [(ab) c] b$, care este tocmai una din identitățile Moufang. Mai mult, Bol explică semnificația algebrică a fiecărei dintre figurile U , că U_1 și U_2 corespund unor legi care sunt numite în prezent identitățile Bol la dreapta și Bol la stânga.

În plus mai existau deja și câteva publicații americane pe cvazigrupuri: (1937) „Teoria cvazigrupurilor”, de Hausmann și Ore; (1939) „Cvazigrupuri, care verifică anumite legi asociative generalizate”, de Murdoch; (1940) „Cvazigrupuri”, de Garrison.

Toți cei trei autori au folosit deja termenul "cvazigrup" într-un sens mai larg, așa cum îl folosim acum, și nu doar ca sistemul Q^* al lui Moufang.

Primele publicații care au introdus termenul "buclă" au fost cele două lucrări foarte importante pe care Albert le-a scris în 1943: Quasigroups. I și Quasigroups. II [2, 3]. Menționăm și lucrările lui K. Toyoda [4], R. H. Bruck [5], R. Baer [6, 7].

Până în prezent buclele Moufang și buclele Bol sunt cele mai studiate în teoria cvazigrupurilor. În general sau studiat buclele Bol medii. Lucrările publicate de Jaiyéolá T. G., David S. P. și Oyebola O. O. (2021); Abdulkareem A. O. și Adeniran J. O. (2020) sunt dedicate cercetării acestor bucle. În lucrarea P. Sârbu și I. Grecu s-a demonstrat că buclele comutative cu flexibilitate invariantă sub izostrofia buclelor sunt bucle Moufang. În special, s-a obținut că IP -buclele comutative cu flexibilitate universală sunt bucle Moufang. Onoi V. I. și Ursu

L. A., folosind abordarea izotopică, au generalizat conceptul buclei binare Moufang în cazul n -ar ($n > 2$).

În anii 30 ai secolului XX a fost introdusă noțiunea de rețea. În terminologia teoriei rețelelor noțiunea de cvazigrup are o interpretare geometrică clară [8].

Pentru cvazigrupuri, în special cele legate de combinatorică, au fost determinate și activ cercetate diferite transformări (morfisme), printre care de menționat: izomorfismele, automorfismele, izotopiile, autotopiile, izostrofiile, autostrofiile, pseudoautomorfismele, izotopiile generalizate. Automorfismele și grupurile automorfismelor buclelor au fost cercetate de către A.A. Albert încă în primele lucrări ce țin de teoria cvazigrupurilor [2]. Conceptul de parastrofie în general a fost introdus de către A. Sade în Franța în anii 1950. Pseudoautomorfismele au fost definite și cercetate de către R.H. Bruck în lucrarea “Pseudo-automorphisms and Moufang loops”, 1952.

Definiția: G -bucă este bucla izomorfă tuturor buclelor izotope ei, are o origine geometrică. R.H. Bruck în lucrarea sa în 1971 a evidențiat că o problemă nerezolvată este problema descrierii G -buclelor. Din punct de vedere geometric, problema lui Bruck a fost rezolvată de către Barlotti și Strambach. Belousov a rezolvat această problemă și a demonstrat că bucla (L, \cdot) este G -bucă dacă și numai dacă orice element al ei este companionul căruiva pseudoautomorfism la dreapta și căruiva la stânga al buclei (L, \cdot) ([8], Teorema 3.8). Rezultatele lui V. D. Belousov deschid calea către cercetarea G -proprietăților, adică către cercetarea G -buclelor și G -cvazigrupurilor. În ultimii ani, teoria G -buclelor s-a dezvoltat foarte activ. Sunt descoperite clase noi de G -bucle. Rămâne nerezolvată problema cercetării GA -cvazigrupurilor la stânga, la dreapta și medii.

În Republica Moldova, V. Belousov (1925-1988) și discipolii săi (Florea, Basarab, Gvaramia etc.) au obținut rezultate fundamentale în teoria cvazigrupurilor. Cvazigrupurile Moufang, care sunt studiate intens în prezent, au fost definite și cercetate de către V. Belousov. În lucrarea sa Dudek W. A. a descris forma liniară a acestor cvazigrupuri și s-au caracterizat parastrofii lor. Florea I. A. a introdus în 1965 o clasă specială de cvazigrupuri, pe care o numim cvazigrupuri Bol [9]. În 1976 a cercetat relația cvazigrupurilor tranzitive la stânga cu cvazigrupurile Bol [10]. Apare problema de a prelungi cercetarea relațiilor unor clase cunoscute de cvazigrupuri cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.

Aproape toate clasele bine cunoscute (clasice) de cvazigrupuri și bucle posedă proprietăți de inversabilitate. Cel mai des aceste cvazigrupuri posedă una din proprietățile IP , LIP , RIP , WIP sau CI . IP - și LIP - buclele au fost definite în lucrarea lui R. Moufang [1]. WIP -buclele – în lucrarea lui R. Baer [6], iar CI -buclele au fost definite de către Rafael Artzy [11]. V. D. Belousov

și B. V. Țurcan au definit și studiat CI -cvazigrupurile [12]. Apare problema de a continua studiul proprietăților unor cvazigrupuri cu proprietate de inversabilitate (WA -, CI -cvazigrupuri).

În lucrarea lui F. Fenyves, “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type”, (1969) s-au enumerat 60 de identități, numite de tip Bol-Moufang. Ele includ identitățile Bol la stânga, Bol la dreapta și cele patru identități Moufang. Aceste identități reprezintă o formă mai slabă a legii asociative, iar în cazul buclelor, unele dintre ele implică asociativitatea. Kenneth Kunen în lucrarea sa „Quasigroups, Loops, and Associative Laws” (1996) pune întrebarea: cărei slăbiri a legii asociative un cvazigrup este o buclă. În special, rezolvă complet problema pentru toate identitățile de tip Bol-Moufang. Apare problema de a prelungi cercetarea existenței unităților unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang.

Lucrările publicate de R. Moufang, G. Bol, R. H. Bruck, V. D. Belousov, K. Kunen, S. Gagola III, J. D. Philips ș. a. sunt dedicate cercetării cvazigrupurilor și buclelor cu identități de tip Bol-Moufang.

În teza de față sunt formulate următoarele probleme:

Problema 1. De cercetat morfismele, proprietățile, relațiile cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite în lucrare (i -cvazigrupuri și WIP -cvazigrupuri generalizate).

Problema 2. De cercetat existența unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea lui F. Fenyves, “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type”, (1969).

Problema 3. De cercetat G -proprietățile cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

Menționăm câteva lucrări în această direcție [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] ș.a. Problemele 1-3 sunt soluționate în Capitolele 2, 3 și 4.

Scopul și obiectivele tezei. Scopul lucrării constă în cercetarea morfismelor și proprietăților sistemelor algebrice neasociative cu identități de tip Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective:

- (1) Cercetarea relațiilor WA -, CI -cvazigrupurilor, tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.;
- (2) Cercetarea existenței unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea lui F. Fenyves, “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type”, (1969);
- (3) Cercetarea morfismelor, proprietăților și relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite în lucrare (i -cvazigrupuri și WIP -cvazigrupuri generalizate);
- (4) Cercetarea G -proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

Noutatea și originalitatea științifică. Toate rezultatele prezentate în teză sunt noi și originale. Au fost cercetate diverse clase de cvazigrupuri (WA -, CI -cvazigrupuri, cvazigrupuri tranzitive la stânga, Neumann ș.a.). Au fost introduse și cercetate două clase noi de cvazigrupuri (WIP -cvazigrupuri generalizate, i -cvazigrupuri). Au fost cercetate clase de cvazigrupuri izotope grupurilor. Sunt descrise proprietățile unor clase de cvazigrupuri inversabile. Au fost cercetate conexiuni între clasele de cvazigrupuri studiate și cvazigrupurile clasice Moufang, Bol ș.a. Sunt determinate formele generale ale automorfismelor, pseudoautomorfismelor și cvaziautomorfismelor acestor cvazigrupuri.

Problema științifică importantă soluționată în domeniul respectiv constă în cercetarea diferitelor relații de tip morfisme (autotopii, pseudoautomorfisme, G -proprietăți) și noțiunilor (distributanților, nucleelor) în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele studiate de cvazigrupuri (inclusiv și clasele noi introduse).

Importanța teoretică și valoarea aplicativă a lucrării este determinată de obținerea unor rezultate noi în cercetarea sistemelor neasociative cu identități de tip Bol-Moufang. Lucrarea poartă un caracter teoretic. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în predarea cursurilor de specialitate pentru studenții, masteranzii și doctoranzii de la specialitățile de matematică.

Aprobarea rezultatelor. Rezultatele științifice obținute au fost expuse și aprobate în cadrul Sesiunii speciale a Seminarului “Algebră și Logică matematică”, dedicate memoriei Profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică și Informatică “Vladimir Andrunachievici” al Academiei de Științe a Moldovei. Rezultatele principale incluse în teză au fost prezentate la următoarele conferințe științifice:

- “Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători”: Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a 6-a, Chișinău, 15 iunie, 2017.
- The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4, June 28 – July 2, 2017, Chișinău.
- The 25 Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017, September 14–17, 2017, Iași.
- International conference on mathematics, informathics and information technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, 19-21 april, 2018, Bălți.

- “Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători”: Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a VII-a Chișinău, 15 iunie, 2018.
- The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018, September 20-23, 2018, Chișinău.
- International conference Mathematics & Information technologies: research and education, MITRE-2019, Moldova, State University, June 24, 2019, Chișinău.
- LOOPS 2019 Conference, Budapest University of Technology and Economics, July 7-July 11, 2019, Hungary.
- The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55), September 30, 2019, Chișinău.

Publicațiile la tema tezei. În total 16 lucrări științifice, cuprinzând 6 articole în reviste recenzate de specialitate (un articol fără coautori) și 10 rezumate la conferințe științifice (7 rezumate fără coautori).

Structura și volumul tezei. Teza este scrisă în limba română și conține: introducere, patru capitole, concluzii generale și recomandări, Bibliografie cu 109 titluri. Volumul tezei constă din 104 pagini (inclusiv 91 pagini de text de bază).

Cuvinte-cheie: cvazigrup, buclă, grup, grupoid, izotop, automorfism, unitate la stânga, unitate la dreapta, pseudoautomorfism, cvazigrup Bol la stânga (la dreapta), cvazigrup Moufang, WA -cvazigrup, CI -cvazigrup, i -cvazigrup, cvazigrup medial, cvazigrup Neumann, cvazigrup tranzitiv la stânga, G -proprietăți.

2. CONȚINUTUL TEZEI

Structura tezei este reprezentată în patru capitole, care conțin rezultatele teoretice obținute în cercetarea proprietăților sistemelor algebrice neasociative cu identități de tip Bol-Moufang.

În introducere este formulată actualitatea și importanța problemei abordate, sunt menționate obiectivele, noutatea științifică și originalitatea tezei. Problema științifică studiată subliniază importanța teoretică și aplicativă a lucrării. Este prezentată o scurtă analiză a problemelor și publicațiilor la tema tezei. Această secțiune se încheie cu un rezumat al conținutului lucrării.

Primul Capitol – Analiza situației în domeniul sistemelor algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang al tezei, format din șapte paragrafe, poartă un caracter introductiv și are

ca scop prezentarea situației actuale în domeniul sistemelor algebrice neasociative cu identități de tip Bol-Moufang. Conține noțiunile și teoremele de bază, necesare pentru expunerea lucrării.

Deseori cercetăm cvazigrupurile și bucele din punct de vedere al apropierii lor de grupuri. În grup un rol mare îl joacă și proprietatea de inversabilitate. În cel de al **doilea Capitol - Despre unele clase de cvazigrupuri cu proprietăți de inversabilitate (WA-, OWIP-, CI-cvazigrupuri)** s-au cercetat două clase cunoscute de cvazigrupuri cu proprietate inversă; s-a introdus o clasă nouă de cvazigrupuri, o generalizare a *WIP*-cvazigrupurilor (*OWIP*-cvazigrupuri). Capitolul conține șapte paragrafe în care sunt realizate obiectivele 1 și 3.

Primele trei paragrafe redau rezultatele obținute în cercetarea *WA*-cvazigrupurilor. Cvazigrupul (Q, \cdot) cu identitățile $xx \cdot yz = xy \cdot xz$ și $xy \cdot zz = xz \cdot yz$ se numește *WA-cvazigrup* sau *cvazigrup semimedial* (pe scurt: *SM-cvazigrup*).

WA-cvazigrupurile au fost cercetate de către T. Kepka în lucrarea “A note on *WA*-quasigroups” (1978). În lucrarea dată T. Kepka a caracterizat și *WA-cvazigrupurile* simple. Aplicând un rezultat important obținut de T. Kepka: orice buclă, izotopă unui *WA-cvazigrup*, este o buclă comutativă Moufang [23], s-au demonstrat următoarele:

Lema 2.1.2. Orice *WA-cvazigrup* cu unitate la stânga este cvazigrup Bol la stânga.

Lema 2.1.3. Orice *WA-cvazigrup* cu unitate la dreapta este cvazigrup Bol la dreapta.

Lema 2.1.4. Orice *WA-cvazigrup* (Q, \cdot) cu proprietate inversă la stânga (la dreapta) este cvazigrup Bol la stânga (la dreapta).

Din Lema 2.1.4. și faptul că cvazigrupul Bol la stânga și Bol la dreapta este cvazigrup Moufang rezultă Corolarul 2.1.2..

Corolarul 2.1.2. Orice *WA-cvazigrup*, care este *IP-cvazigrup*, este cvazigrup Moufang.

Izotopia de forma $x \circ y = L_a^{-1}(L_a x \cdot y)$ ($(x \circ y = R_a^{-1}(x \cdot R_a y))$) se numește *operație derivată la dreapta (la stânga)* pentru (Q, \cdot) , generată de elementul a . Cercetând operațiile derivate pentru *WA-cvazigrupul* (Q, \cdot) , s-a obținut Teorema 2.1.2.

Teorema 2.1.2. Fie (Q, \cdot) este *WA-cvazigrup*. Atunci:

(i) operația derivată la dreapta pentru (Q, \cdot) este cvazigrup Bol la stânga,

(ii) operația derivată la stânga (Q, \cdot) este cvazigrup Bol la dreapta.

Elementele grupului $I_h(Q, \cdot) = \{\alpha \in M(Q, \cdot) \mid \alpha h = h\}$, unde $M(Q, \cdot)$ este grup, generat de toate translațiile cvazigrupului (Q, \cdot) la stânga și la dreapta, se numesc aplicații interne pentru (Q, \cdot) în raport cu elementul $h \in Q$. Belousov a demonstrat (vezi [8]), că grupul $I_h(Q, \cdot)$ este generat de toate permutările de forma:

$$L_{x,y} = L_{x \circ y}^{-1} L_x L_y, \text{ unde } (x \circ y)h = x \cdot yh,$$

$$R_{x,y} = R_{x \cdot y}^{-1} R_y R_x, \text{ unde } h(x \cdot y) = hx \cdot y,$$

$$T_x = L_{\sigma x}^{-1} R_x, \text{ unde } \sigma = R_h^{-1} L_h.$$

Paragraful 2.2. al tezei este dedicat automorfismelor WA -cvazigrupurilor, permutărilor interne ca automorfisme în raport cu unitatea la stânga și în raport cu element arbitrar, determinând condițiile necesare și suficiente:

Teorema 2.2.1. În WA -cvazigrupul (Q, \cdot) cu unitate la stânga f permutările interne $L_{x,y}, R_{x,y}$ și T_x față de $a \in Q$ sunt automorfisme în (Q, \cdot) dacă și numai dacă $a \in N_l$ și verifică următoarea identitate $xy \cdot a = xf \cdot ya$.

În paragraful 2.4. al acestui capitol s-au cercetat proprietățile unei clase noi de cvazigrupuri introdusă de către elevul lui V. D. Belousov, I. A. Florea și autoarea tezei și anume $OWIP$ -cvazigrupuri.

Cvazigrupul (Q, \cdot) are proprietate inversabilă slabă ((Q, \cdot) este WIP -cvazigrup), dacă $x \cdot I(y \cdot x) = Iy$, pentru orice $x, y \in Q$ și careva permutare a mulțimii Q . Buclele cu proprietate inversă slabă detaliat au fost cercetate de către Osborn [24]. Introducând o permutare α în identitatea dată s-a obținut o clasă nouă de cvazigrupuri, anume $OWIP$ -cvazigrupuri.

Definiția 2.4.1. Cvazigrupul (Q, \cdot) se numește $OWIP$ -cvazigrup, dacă (Q, \cdot) verifică identitatea

$$x \cdot I(y \cdot \alpha x) = Iy, \quad (2.24)$$

pentru orice $x, y \in Q$, unde I și α sunt careva permutări ale mulțimii Q .

Din identitatea (2.24), aplicând proprietățile permutărilor, pentru această clasă de cvazigrupuri s-a obținut o identitate nouă (2.25):

Lema 2.4.1. $OWIP$ -cvazigrupul (Q, \cdot) verifică egalitatea

$$I^{-1}(xz) \cdot \alpha x = I^{-1}z, \quad (2.25)$$

pentru orice $x, z \in Q$.

Aplicând (2.25) s-a obținut condiția necesară și suficientă când $OWIP$ -cvazigrupul (Q, \cdot) este izotop unei LIP -bucle (Q, \circ) . Vedem Teorema 2.4.1.

Teorema 2.4.1. $OWIP$ -cvazigrupul (Q, \cdot) este izotop al unei LIP -bucle (Q, \circ) , unde

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y, xy = R_a x \circ L_b y, \quad (2.26)$$

dacă și numai dacă (Q, \cdot) verifică următoarea egalitate

$$b \cdot I(I^{-1}(by) \cdot x) = R_{e_b}^{-1}(b \cdot I(I^{-1}b \cdot x)) \cdot y, \quad (2.27)$$

unde $be_b = b$, $R_{e_b}v = ve_b$.

Pentru cazul, când orice buclă (Q, \circ) , izotopă unui $OWIP$ -cvazigrup (Q, \cdot) , este o LIP -buclă, cvazigrupul (Q, \cdot) verifică identitatea:

$$z \cdot I(I^{-1}(zy) \cdot x) = R_{e_z}^{-1}(z \cdot I(I^{-1}z \cdot x)) \cdot y, \quad (2.28)$$

pentru orice $x, y, z \in Q$ unde I este permutare a mulțimii Q , $ze_z = z$, $Re_z t = te_z$. S-a obținut:

Teorema 2.4.2. Orice buclă (Q, \circ) , izotopă unui cvazigrup (Q, \cdot) cu identitatea (2.28), este o buclă Bol la stânga.

Prin analogie se prezintă și rezultatele la dreapta.

În ultimul paragraf al acestui capitol sunt prezentate rezultatele obținute la cercetarea *CI*-cvazigrupurilor. *CI*-buclele sunt obiecte clasice ale teoriei cvazigrupurilor. Această clasă de bucle a fost definită de către Rafael Artzy [11]. V. D. Belousov și B. V. Turkan în lucrarea comună “Скрещенно-обратимые квазигруппы (*CI*-квазигруппы)”, (1969) au definit *CI*-cvazigrupurile. Unele aplicații ale *CI*-cvazigrupurilor în criptografie sunt prezentate în lucrarea lui A. D. Keedwell (1999).

Definiția 2.5.3. Grupoidul (Q, \cdot) cu identitatea

$$xy \cdot I_r x = y, \quad (2.30)$$

unde I_r este aplicația mulțimii Q în sine, se numește *CI-grupoid la stânga*.

Grupoidul (Q, \cdot) cu identitatea

$$I_l x \cdot yx = y, \quad (2.31)$$

unde I_l este aplicația mulțimii Q în sine, se numește *CI-grupoid la dreapta*.

Grupoidul (Q, \cdot) cu ambele identități (2.30) și (2.31) se numește *CI-grupoid* [13].

Bucla (Q, \cdot) , ce verifică una din identitățile echivalente $x \cdot yJx = y$, $xy \cdot Jx = y$, unde J este o bijecție a mulțimii Q astfel încât $x \cdot Jx = 1$, se numește *CI-buclă*. Cvazigrupul (Q, \cdot) cu identitatea $xy \cdot Jx = y$, unde J este o aplicație a mulțimii Q în Q , se numește *CI-cvazigrup*.

Observăm, că în acest caz aplicația J este permutare a mulțimii Q [12]. În orice *CI*-cvazigrup permutarea J este unică ([25], Lema 2.25).

Din rezultatele lui V. Izbaș și N. Labo urmează că *CI*-grupoidul la stânga, în care aplicația I_r este bijectivă, este *CI*-cvazigrup. Orice *CI*-grupoid finit la stânga este *CI*-cvazigrup. Orice *CI*-grupoid este *CI*-cvazigrup [13].

S-a cercetat cazul când un *CI*-cvazigrup este izotop unui grup. S-a găsit condiția când bucla, izotopă unui *CI*-cvazigrup, să fie comutativă. Vedem propozițiile:

Propoziția 2.6.1. *CI*-cvazigrupul (Q, \cdot) este izotop unui grup (Q, \circ) cu izotopia (2.26) dacă și numai dacă (Q, \cdot) verifică identitatea

$$(x(y(zu))) \cdot v = y \cdot ((xz \cdot v) \cdot u), \quad (2.36)$$

pentru orice $x, y, z, u, v \in Q$.

Propoziția 2.6.3. Dacă orice buclă (Q, \circ) , izotopă unui *CI*-cvazigrup (Q, \cdot) , este comutativă, atunci cvazigrupul (Q, \cdot) este medial, iar (Q, \circ) este un grup abelian.

În al treilea Capitol – Despre o clasă de *i*-cvazigrupuri. Unități la dreapta (la stânga) în cvazigrupuri de tip Bol-Moufang, format din șase paragrafe, sunt realizate obiectivele 2 și 3.

În acest capitol s-a cercetat o clasă nouă de cvazigrupuri numită *i*-cvazigrupuri introdusă de către I. A. Florea și autoarea tezei.

Definiția 3.1.2. Cvazigrupul (Q, \cdot) se numește *i*-cvazigrup, dacă (Q, \cdot) verifică identitatea

$$x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x), \quad (3.1)$$

unde $x, y, z \in Q$.

Primul exemplu construit de astfel de cvazigrup fiind:

Exemplul 3.1.1.

1. Fie $(C, +, \cdot)$ inelul numerelor complexe. Fie $x \circ y = ix - y$, pentru orice $x, y \in C$ și element fixat $i^2 = -1$. Atunci (C, \circ) este *i*-cvazigrup.

De unde și a fost numit *i*-cvazigrup.

În primul paragraf al acestui capitol s-a cercetat distributantul *i*-cvazigrupurilor. *Distributantul* D al cvazigrupului (Q, \cdot) este format din toate elementele d ale mulțimii Q astfel încât $(x \cdot y) \cdot d = (x \cdot d) \cdot (y \cdot d)$, $d \cdot (x \cdot y) = (d \cdot x) \cdot (d \cdot y)$, pentru orice $x, y \in Q$. Cunoaștem că nu orice cvazigrup are distributant nevid. Evidențiem următoarele teoreme:

Teorema 3.1.1. Dacă *i*-cvazigrupul (Q, \cdot) este *RIP*-cvazigrup, atunci (Q, \cdot) este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și distributantul $D = \{f\}$.

Teorema 3.1.4. *i*-cvazigrupul (Q, \cdot) cu distributant nevid D este cvazigrup Bol la stânga dacă și numai dacă (Q, \cdot) verifică egalitatea

$$xa \cdot xy = xx \cdot ay, \quad (3.6)$$

pentru orice $x, y \in Q$, unde $a \in D$, a este element fixat.

S-a demonstrat că *i*-cvazigrupurile cu unitate la dreapta sunt bucle Moufang, cele cu unitate la stânga sunt cvazigrupuri cu proprietate inversă la stânga. Rezultatele obținute sunt redată în următoarele propoziții:

Propoziția 3.2.2. Dacă *i*-cvazigrupul (Q, \cdot) are unitate la dreapta e , atunci (Q, \cdot) este buclă Moufang în care $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in Q$.

Propoziția 3.2.3. Orice *i*-cvazigrup (Q, \cdot) cu unitate la stânga f este cvazigrup cu proprietate inversă la stânga și izotop unei *LIP*-bucle (Q, \circ) , unde $x \circ y = R_f^{-1}x \cdot y$.

Pentru condiția ca *i*-cvazigrupul să fie unipotent s-a obținut că este cvazigrup Moufang. Vedem următoarea propoziție:

Propoziția 3.2.4. Dacă în i -cvazigrupul (Q, \cdot) are loc $x^2 = f$, pentru orice $x \in Q$, unde f este element fixat, atunci (Q, \cdot) este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și izotop al unui grup abelian.

În paragraful 3.3. al acestui capitol s-au cercetat i -cvazigrupurile alternative la dreapta (la stânga), arătând că sunt bucle Moufang. Pentru i -cvazigrupurile cu elasticitate s-a obținut:

Propoziția 3.3.3. În orice i -cvazigrup (Q, \cdot) cu identitatea de elasticitate mulțimea tuturor unităților locale formează un subcvazigrup Bol la stânga.

S-a descris relația dintre unele tipuri de cvazigrupuri care conțin unitate la stânga cu cvazigrupurile Moufang (în sensul lui Belousov).

Propoziția 3.3.4. i -cvazigrupul (Q, \cdot) cu unitate la stânga f este cvazigrup Moufang dacă și numai dacă (Q, \cdot) verifică egalitatea

$$zx \cdot x = zf \cdot xx, \quad (3.26)$$

pentru orice $x, z \in Q$.

Sunt caracterizate anumite pseudoautomorfisme ale acestor cvazigrupuri (în sensul lui Pflugfelder).

Propoziția 3.4.1. Dacă permutarea α a mulțimii Q a i -cvazigrupului (Q, \cdot) cu unitate la stânga f este pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului (Q, \cdot) cu companionul k , atunci k este un element Bol la stânga.

Propoziția 3.4.2. Dacă în i -cvazigrupul (Q, \cdot) cu unitate la stânga f translațiile L_a și R_b sunt pseudoautomorfisme la dreapta cu companionul k , atunci $a = e_k f, b = e_k$, unde $ke_k = k$.

Ultimul paragraf al acestui capitol este dedicat cercetării existenței unității la dreapta (la stânga) în cvazigrupuri cu fiecare dintre cele 60 de identități de tip Bol-Moufang enumerate în lucrarea “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type” de Fenyves. Identitatea, bazată pe o operație algebrică, este de tip Bol-Moufang, dacă «ambele părți ale identității conțin aceleași trei litere diferite, luate în aceeași ordine, însă una dintre ele se întâlnește de două ori pe fiecare parte a identității».

K. Kunen în lucrarea *Quasigroups, loops and associative laws*, (1996) a studiat existența unității în cvazigrupurile cu asociativitate slabă și a soluționat complet problema existenței unității bilaterale în cvazigrupurile cu identități de tip Bol-Moufang, pentru fiecare dintre cele 60 de identități. Kunen, de asemenea, arată care dintre identitățile evidențiate implică legile: asociativă, flexibilității, alternativă la dreapta (la stânga), astfel soluționând problema pentru cvazigrupurile asociative cu fiecare dintre cele 60 de identități de tip Bol-Moufang și parțial

pentru unele identități existența unității unilaterale. A rămas deschisă problema existenței unității unilaterale pentru identitățile lui Fenyves [26].

S-a folosit lista celor 60 de identități de tip Bol-Moufang, cercetate în [27]. Există și alte definiții ale identităților de tip Bol-Moufang și, prin urmare, alte clasificări ale acestor identități [28, 29].

Evidențiem unele teoreme:

Teorema 3.5.13. Cvazigrupul (Q, \cdot) cu identitatea F_{16} $(xy \cdot x)z = x(yx \cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Teorema 3.5.20. Cvazigrupul (Q, \cdot) cu identitatea F_{35} $(yx \cdot x)z = (y \cdot xx)z$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Teorema 3.5.21. Cvazigrupul (Q, \cdot) cu identitatea F_{36} (*RC identitate*) $(yx \cdot x)z = y(xx \cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Teorema 3.5.32. Cvazigrupul (Q, \cdot) cu identitatea F_{49} $(xx \cdot y)z = x(xy \cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Astfel este rezolvat obiectivul 2.

În **Capitolul patru – Cvazigrupuri tranzitive la stânga. Cvazigrupuri Neumann și Schweizer** – sunt realizate obiectivele, care se referă la cercetarea G -proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann și la cercetarea relațiilor acestor cvazigrupuri cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a. clase de cvazigrupuri.

În paragrafele 4.1.-4.5. sunt formulate rezultatele obținute la cercetarea cvazigrupurilor tranzitive la stânga și anume: despre relația acestor cvazigrupuri cu alte clase de cvazigrupuri, despre nucleu, despre morfisme, despre G -proprietăți.

Cvazigrupul (Q, \cdot) se numește *cvazigrup tranzitiv la stânga*, dacă verifică identitatea $xy \cdot xz = yz$. În unele lucrări mai sunt numite cvazigrupuri Ward [17].

În publicația „On the foundations of quasigroups” de Stein (1957) s-a demonstrat: dacă cvazigrupul (Q, \cdot) verifică asociativitatea $x \cdot yz = xy \cdot z$ (adică acest cvazigrup este grup), atunci parastrofii (23) și (132) acestui cvazigrup verifică identitatea tranzitivă la stânga. De asemenea a demonstrat că cvazigrupurile Ward sunt izotopi ai grupurilor.

În paragraful 4.2. s-a găsit condiția necesară și suficientă când cvazigrupul tranzitiv la stânga este cvazigrup Moufang, F -cvazigrup la stânga (Propoziția 4.2.3., Teorema 4.2.2.).

Teorema 4.2.2. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga (Q, \cdot) este F -cvazigrup la stânga dacă și numai dacă translația R_f este automorfism al cvazigrupului (Q, \cdot) .

S-au caracterizat nucleele stâng și drept ale cvazigrupului tranzitiv la stânga. E bine cunoscut că mulțimile N_l și N_r formează subgrupuri ale cvazigrupului. Avem:

Teorema 4.3.1. Nucleul la stânga (N_l, \cdot) al cvazigrupului tranzitiv la stânga (Q, \cdot) este subgrup normal al cvazigrupului (Q, \cdot) , care constă din elemente de ordin doi, care se află în centrul grupului $(Q, +)$.

Teorema 4.3.2. Dacă cvazigrupul tranzitiv la stânga (Q, \cdot) are nucleu la dreapta netrivial, atunci este grup comutativ cu toate elementele nenule de ordin doi.

Cunoaștem că cvazigrupul (Q, \cdot) este G -cvazigrup la dreapta, dacă orice element al lui este companionul unui pseudoautomorfism la dreapta. Analog se definește G -cvazigrupul la stânga. Iar cvazigrupul care este în același timp și G -cvazigrup la dreapta și G -cvazigrup la stânga este G -cvazigrup. G -cvazigrupurile totdeauna au unitate, adică G -cvazigrupul este buclă. Importanța cercetării pseudoautomorfismelor urmează din teorema lui V. D. Belousov: bucla (L, \cdot) este G -buclă dacă și numai dacă orice element $x \in L$ este companionul căruiva pseudoautomorfism la dreapta și căruiva la stânga (L, \cdot) . Rezultatele lui V. D. Belousov deschid calea către cercetarea G -proprietăților, adică către cercetarea G -buclelor și G -cvazigrupurilor. Există legătură dintre nucleele cvazigrupurilor și pseudoautomorfismele cvazigrupurilor.

În paragraful 4.5. s-au cercetat G -proprietățile pentru cvazigrupul tranzitiv la stânga. Este formulată condiția necesară și suficientă ca el să fie GA -cvazigrup la dreapta, adică grupul componentelor a doua (a treia) ale A -pseudoautomorfismelor la dreapta cvazigrupului să fie tranzitiv în Q .

Teorema 4.5.3. Cvazigrupul tranzitiv la stânga (Q, \cdot) este GA -cvazigrup la dreapta dacă și numai dacă (Q, \cdot) este grup abelian de ordin doi.

În paragrafele 4.6.-4.8. sunt formulate rezultatele obținute pentru cvazigrupurile Neumann.

Cvazigrupul (Q, \cdot) se numește *cvazigrup Neumann*, dacă (Q, \cdot) verifică identitatea $x \cdot (yz \cdot yx) = z$. S-a obținut identitatea Neumann din parastroful (13) al cvazigrupului ce verifică identitatea $xy \cdot z = y \cdot zx$. Cvazigrupurile Neumann sunt izotopi unor grupuri abeliene. Vedem din:

Teorema 4.6.3. Orice cvazigrup Neumann este izotop unui grup abelian $(Q, +)$ de forma $x \cdot y = x - y$.

Din cercetarea autotopiilor și cvaziautomorfismelor s-au obținut formulele lor generale.

Corolarul 4.6.2. Orice autotopie a cvazigrupului Neumann (Q, \cdot) are forma:

$$(L_a, L_{Ib}, L_{a \cdot Ib})\theta_1, \quad (4.23)$$

unde $L_a, L_{Ib}, L_{a \cdot Ib}$ sunt translațiile cvazigrupului (Q, \cdot) , $\theta_1 = I\theta \in Aut(Q, \cdot)$.

Propoziția 4.7.2. În cvazigrupul Neumann (Q, \cdot) orice cvaziautomorfism γ are forma

$$\gamma = R_a \gamma' = L_b \gamma'', \quad (4.29)$$

unde γ', γ'' sunt automorfisme ale cvazigrupului (Q, \cdot) , iar b și a careva elemente din Q și invers, permutarea γ din (4.29) este cvaziautomorfism.

Aplicând Teorema 4.6.3. ușor s-au demonstrat unele proprietăți ale cvazigrupurilor Neumann.

Corolarul 4.6.3.

1. Orice cvazigrup Neumann (Q, \cdot) este unipotent și are unitate la dreapta;
2. Orice buclă, izotopă unui cvazigrup Neumann, este grup abelian;
3. Orice cvazigrup Neumann este cvazigrup medial;
4. Orice cvazigrup Neumann este cvazigrup Bol la stânga;
5. Orice cvazigrup Neumann este cvazigrup Moufang;
6. Miezul cvazigrupului Neumann este grupoid distributiv;
7. Nucleul la dreapta al cvazigrupului Neumann (Q, \cdot) conține astfel de elemente ale mulțimii Q , încât $a = -a$.

Cvazigrupul (Q, \cdot) cu identitatea $yz \cdot yx = xz$ se numește cvazigrup Schweizer. S-a demonstrat că noțiunea de cvazigrup Neumann coincide cu cea de cvazigrup Schweizer. Are loc:

Teorema 4.6.5. Orice cvazigrup Schweizer (Q, \cdot) este cvazigrup Neumann și invers.

Cercetarea G -proprietăților acestor cvazigrupuri a constatat că orice cvazigrup Neumann (Q, \cdot) este GA -cvazigrup, adică grupurile ${}_3\Pi_r^A$ și ${}_3\Pi_l^A$ acționează tranzitiv pe mulțimea Q .

Teorema 4.8.1. Orice cvazigrup Neumann (Q, \cdot) este GA -cvazigrup.

Observăm că cvazigrupul Neumann este G -cvazigrup la stânga în sensul lui V. D. Belousov.

Mulțumiri. Exprim sinceră recunoștință conducătorului științific *Victor Alexeevici Șcerbacov* pentru determinarea domeniului și formularea obiectivelor de cercetare, pentru cunoștințele pe care le-am căpătat pe parcursul celor patru ani de doctorantură și pentru ajutorul pe care mi l-a oferit în realizarea publicațiilor și scrierea tezei.

Cu deosebită considerație și recunoștință aduc mulțumiri profesorului, candidatului în științe fizico-matematice, *Ivan Arhipovici Florea*, care a ghidat primii mei pași în teoria cvazigrupurilor, primele cercetări ale diferitor clase de cvazigrupuri. Publicațiile Dumnealui servindu-mi ca repere următoarelor cercetări.

Exprim recunoștință directorului școlii doctorale Matematică și Știința Informației, academi-cianului *Mitrofan Mihailovici Cioban*, pentru răbdare, îndrumare și încurajare.

Alese mulțumiri aduc membrilor comisiei de îndrumare, dnei dr. hab., mem. cor. *Cojocaru Svetlana*, dlui acad., *Arnautov Vladimir* și dlui dr. hab. *Chiriac Liubomir*, pentru sfaturile și recomandările prețioase.

În mod deosebit, mulțumesc dlui dr. hab., mem. cor. *Gaindric Constantin* și dnei dr., conf. univ. *Sârbu Parascovia* pentru consultațiile și sfaturile competente oferite.

Dedic această lucrare *regretaților părinților mei, Nicolae și Olga*, cu dragoste și recunoștință.

3. CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Cercetările efectuate în teza de doctor “Morfismele și proprietățile sistemelor algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang” corespund în totalitate scopului și obiectivelor stabilite în introducere.

Clasa cvazigrupurilor conține cea a grupurilor (orice grup este un cvazigrup), domeniu care a cunoscut o evoluție extraordinară în secolul XX și continuă să se dezvolte rapid în prezent. Noțiunea de cvazigrup este mai generală ca cea de grup, deci se regăsește ca echivalent algebric într-un spectru mai larg de probleme ale mediului în care existăm și necesită abordări specifice, care lipsesc în teoria grupurilor.

Problema științifică importantă soluționată constă în cercetarea diferitelor relații de tip morfisme (autotopii, pseudoautomorfisme, G -proprietăți) și noțiunilor (distributanților, nucleelor) în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele studiate de cvazigrupuri (inclusiv și clasele noi introduse).

Rezultatele principale ale tezei sunt noi. Analizând rezultatele obținute putem evidenția următoarele concluzii generale:

1. S-a stabilit că orice WA -cvazigrup, care este un IP -cvazigrup, este un cvazigrup Moufang;
S-a dovedit că în WA -cvazigrupul cu unitate la stânga permutările interne în raport cu unitatea sunt automorfisme ale cvazigrupului; pentru permutările interne în raport cu elementul $a \in Q$ s-a găsit condiția necesară și suficientă când sunt automorfisme;
2. Cercetând WIP -cvazigrupurile generalizate s-a găsit condiția când acest cvazigrup este izotop unei LIP -bucle. Presupunând, că orice buclă izotopă unui $OWIP$ -cvazigrup este o LIP -buclă, s-a obținut o identitate nouă în acest cvazigrup. A fost găsită relația dintre cvazigrupuri cu identitatea dată și buclele Bol la stânga;

3. A fost definită și studiată noțiunea de i -cvazigrup, relațiile lor cu alte clase de cvazigrupuri. S-a demonstrat că i -cvazigrupurile idempotente sunt cvazigrupuri Bol la stânga, Stein la dreapta, distributive la stânga. S-a descris relația dintre unele tipuri de cvazigrupuri care conțin unitate la stânga cu cvazigrupurile Moufang;
4. A fost soluționată problema existenței unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type” de F. Fenyves (1969). În lucrare este prezentat tabelul cu datele privind existența unității pentru fiecare dintre cele 60 de identități;
5. S-a demonstrat că noțiunea de cvazigrup Neumann coincide cu cea de cvazigrup Schweizer.

Teza propusă spre susținere utilizează relații de tip morfisme la cercetarea proprietăților și existenței unităților în sisteme algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang, ce conduc la descrierea noilor relații importante dintre clasele de cvazigrupuri, conține soluționarea completă a problemei existenței unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang.

Recomandări:

1. Soluționarea problemei existenței unității unilaterale pentru cvazigrupuri ce satisfac identități de tip Bol-Moufang poate fi utilizată în cercetarea cvazigrupurilor cu identități de tip Bol-Moufang.
2. În teză sunt definite două clase noi de cvazigrupuri: i -cvazigrupurile și *OWIP*-cvazigrupurile. În lucrare sunt cercetate unele proprietăți ale acestor clase de cvazigrupuri, însă teoria generală a lor urmează a fi elaborată.
3. Rezultatele obținute pot fi aplicate la elaborarea unor cursuri opționale pentru masteranzi și doctoranzi.

BIBLIOGRAFIE

- [1] MOUFANG, R., Zur Structur von Alternativ Korpern, *Math. Ann.*, vol. 110, pp. 416-430, 1935. ISSN: 0025-5831
- [2] ALBERT, A. A., Quasigroups. I, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 54, no. 1, pp. 507-519, 1943. ISSN: 0002-9947
- [3] ALBERT, A. A., Quasigroups. II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 55, pp. 401-419, 1944. ISSN: 0002-9947
- [4] TOYODA, K., On axioms of linear functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, vol. 17, pp. 221-227, 1941. ISSN: 03609-9846
- [5] BRUCK, R. H., Some results in the theory of quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 55, pp. 19-52, 1944. ISSN: 0002-9947
- [6] BAER, R., Nets and groups. I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 46, pp. 110-141, 1939. ISSN: 0002-9947
- [7] BAER, R., Nets and groups. II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 47, no. 2, pp. 435-439, 1940. ISSN: 0002-9947
- [8] БЕЛОУСОВ, В. Д., Основы теории квазигрупп и луп, Москва: Наука, 1967.
- [9] ФЛОРЯ, И. А., Квазигруппы Бола, *Исследования по общей алгебре, АН МССР*, 1965.
- [10] ФЛОРЯ, И. А., Связь левотранзитивных квазигрупп с квазигруппами Бола, *Сети и квазигруппы*, pp. 203-216, 1976.
- [11] ARTZY, R., On loops with a special property, *Proc. Amer. Math. Soc.*, no. 6, pp. 448-453, 1955. ISSN: 0002-9939
- [12] БЕЛОУСОВ, В. Д. и ЦУРКАН, Б. В., Скрещенно-обратимые квазигруппы (СИ-квазигруппы), *Изв. Выш. Учебн. Завед. Математика.*, т. 82(3), pp. 21-27, 1969. 0021-3446 (print)
- [13] IZBASH, V. and LABO, N., Crossed-inverse-property groupoids, *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, no. 2(54), pp. 101-106, 2007. ISSN: 1024-7696
- [14] URSU, V. I., On the pre-ordering of automorphic loops and Moufang loops, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, vol. 64, no. 1, pp. 49-55, 2019. ISSN: 0035-3965
- [15] SYRBU, P. N., On loops with universal elasticity, *Quasigroups Related Systems*, no. 3, pp. 41-54, 1996. ISSN: (Print) 1561-2848
- [16] DUDEK, W. A. and MONZO, R. A., The structure of idempotent translatable quasigroups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 43, no. 2, pp. 1603-1621, 2020. ISSN: 0126-6705

- [17] CHATTERJEA, S. K., On Ward quasigroups, *Pure Math. Manuscript*, no. 6, pp. 31-34, 1987.
- [18] DENES, J. and KEEDWELL, A. D., Some applications of non-associative algebraic systems in cryptology, *P.U.M.A.*, vol. 12(2), pp. 147-195, 2002. ISSN: 1218-4586
- [19] HOROSH, G., SHCHERBACOV, V., TCACHENCO, A. and YATSKO, T., On some groupoids with Bol-Moufang type identities, 2019. [Online]. Available: arxiv.org.1904.v1.
- [20] IZBASH, V. I. and SHCHERBACOV, V., On quasigroups with Moufang identity, in *In Abstracts of The Third International Conference in memory of M.I. Kargapolov (1928-1976)*, Krasnoyarsk, Russian Federation, 1993.
- [21] EVANS, T., Homomorphisms of non-associative systems, *J. London Math. Soc.*, vol. 24, pp. 254-260, 1949. ISSN: 0024-6107
- [22] PHILLIPS, J. D. and VOJTECHOVSKY, P., The varieties of loops of Bol-Moufang type, *Algebra Universalis*, vol. 54(3), pp. 259-271, 2005. ISSN: 0002-5240
- [23] KEPKA, T., A note on WA-quasigroups, *Acta Univ. Carolin. Math. Phis.*, vol. 19(2), pp. 61-62, 1978. ISSN: 0001-7140
- [24] OSBORN, M., Loops with the weak inverse property, *Pacif. J. Math.*, vol. 10, no. 1, pp. 295-304, 1960. ISSN: 0030-8730
- [25] SHCHERBACOV, V. A., Elements of Quasigroup Theory and Applications, Boca Raton: CRC Press, 2017. ISBN: 9781315120058
- [26] KUNEN, K., Quasigroups, loops and associative laws, *J. Algebra*, vol. 185(1), pp. 194-204, 1996. ISSN: (Print) 0021-8693
- [27] JAYEOLA, T. G., ILOJIDE, E., OLATINWO, M. O. and SMARANDACHE, F., On the Classification of BolMoufang Type of Some Varieties of Quasi Neutrosophic Triplet Loop (Fenyves BCI-Algebras), in *Symmetry*, 2018. ISSN: 2073-8994
- [28] AKHTAR, R., ARP, A., KAMINSKI, M., VAN EXEL, J., VERNON, D. and WASHINGTON, C., The varieties of Bol-Moufang quasigroups defined by a single operation, *Quasigroups Related Systems*, vol. 20(1), pp. 1-10, 2012. ISSN: (Print) 1561-2848
- [29] COTE, B., HARVILL, B., HUHN, M. and KIRCHMAN, A., Classification of loops of generalized Bol-Moufang type, *Quasigurops Related Systems*, vol. 19(2), pp. 193-206, 2011. ISSN: (Print) 1561-2848

LISTA PUBLICAȚIILOR AUTOAREI LA TEMA TEZEI

Articole în reviste cotate SCOPUS:

1. DIDURIK, N. N. and FLORJA, I. A., A note on left loops with WA-property, *Quasigroups and Related Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 186-196, 2016. ISSN: (Print) 1561-2848
2. DIDURIK, N. N. and SHCHERBACOV, V. A., On definition of CI-quasigroup, *Romai Journal*, vol. 13, no. 2, pp. 55-58, 2017. ISSN: (Print) 1841-5512
3. DIDURIK, N., Some properties of left-transitive quasigroups, *Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova*, vol. 87, no. 2, pp. 85-94, 2018. ISSN: 1024-7696
4. DIDURIK, N. N. and FLORJA, I. A., Some properties of i-quasigroups, *Quasigroups and Related Systems*, vol. 28, no. 2, pp. 183-194, 2020. ISSN: (Print) 1561-2848
5. DIDURIK, N. and SHCHERBACOV, V., Units in quasigroups with classical Bol-Moufang type identities, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, vol. 61, no. 4, pp. 427-435, 2020. ISSN: 0010-2628

Articole arXiv preprint:

6. DIDURIK, N. and SHCHERBACOV, V., Some properties of Neumann quasigroups, 2018. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1809.07095v1>.

Contribuții (articole, rezumate, teze) în materialele conferințelor și altor lucrări științifice:

7. DIDURIC, N., CI-quasigrupuri, în "*Tendențe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători*": Conferința Științifică a Doctoranzilor, Chișinău, 2017, pp. 25-29. ISBN: 978-9975-108-66-9
8. DIDURIK, N., Generalized WIP-quasigroups, in *The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4*, Chișinău, 2017, pp. 67-70. ISBN: 978-9975-71-915-5
9. DIDURIK, N. N. and SHCHERBACOV, V. A., On definition of CI-quasigroups, in *The 25 Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM*, Iași, 2017, p. 87. ISSN: 2038-0909
10. DIDURIK, N., On left-transitive quasigroups, in *The 25 Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM*, Iași, 2017, p. 86. ISSN: 2038-0909
11. ДИДУРИК, Н., А-псевдоавтоморфизмы левых транзитивных квазигрупп, in *International conference on mathematics, informatics and information technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov*, Bălți, 2017, pp. 39-40. ISBN: 978-9975-3214-7-1

12. DIDURIK, N., Some properties of Neumann quasigroups, in *The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018*, Chişinău, 2018, p. 93.
13. DIDURIC, N., Despre unele proprietăţi ale quasigrupurilor cu identitatea lui Neumann, in *Tendenţe contemporane ale dezvoltării ştiinţei: viziuni ale tinerilor cercetători. Conferinţa Ştiinţifică a Doctoranzilor*, Chişinău, 2018, pp. 11-14. ISBN: 978-9975-108-66-9
14. DIDURIK, N., i-Quasigroups, in *International conference Mathematics & Information technologies: research and education, MITRE-2019*, Chişinău, 2019, pp. 26-27.
15. DIDURIK, N. and SHCHERBACOV, V., Units in quasigroups with non-classical Bol-Moufang type identities, in *The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55)*, Chişinău, 2019, pp. 57-60.
16. SHCHERBACOV, V. and DIDURIK, N., Units in quasigroups with Bol-Moufang type of identities, in *LOOPS Conference Budapest University of Technology and Economics*, Hungary, 2019, p. 49.

ADNOTARE

la teza de doctorat “**Morfismele și proprietățile sistemelor algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang**”, prezentată de către Diduric Natalia pentru conferirea titlului științific de doctor în științe matematice, specialitatea 111.03 - Logică Matematică, Algebră și Teoria Numerelor, Chișinău, 2022.

Structura tezei: teza este scrisă în limba română și conține introducere, patru capitole, concluzii generale și recomandări, 109 titluri bibliografice, 104 pagini (inclusiv 91 pagini de text de bază). Rezultatele obținute sunt publicate în 16 lucrări științifice.

Cuvinte-cheie: cvazigrup, buclă, izotop, pseudoautomorfism, cvazigrup Bol la stânga (la dreapta), cvazigrup Moufang, WA -cvazigrup, i -cvazigrup, G -proprietăți.

Domeniul de studiu al tezei: algebră, în special, teoria cvazigrupurilor cu identități, inclusiv identitățile de tip Bol-Moufang, proprietățile sistemelor algebrice neasociative.

Scopul și obiectivele lucrării. Scopul lucrării este cercetarea proprietăților sistemelor algebrice neasociative cu identități de tip Bol-Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective: cercetarea relațiilor WA -, CI -cvazigrupurilor, cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, Bol la dreapta ș.a.; cercetarea existenței unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea lui F. Fenyves “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type”, (1969); cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite în lucrare (i -cvazigrupuri și $OWIP$ -cvazigrupuri); cercetarea G -proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

Noutatea și originalitatea științifică. Toate rezultatele prezentate în teză sunt noi și originale. Au fost cercetate diverse clase de cvazigrupuri (WA -, CI -cvazigrupuri, cvazigrupuri tranzitive la stânga, Neumann ș.a.). Au fost introduse și cercetate două clase noi de cvazigrupuri (WIP -cvazigrupuri generalizate, i -cvazigrupuri). Au fost cercetate clase de cvazigrupuri izotope grupurilor. Sunt descrise proprietățile unor clase de cvazigrupuri inversabile. Au fost cercetate conexiuni între clasele de cvazigrupuri studiate și cvazigrupurile clasice Moufang, Bol ș.a. Sunt determinate formele generale ale automorfismelor, pseudoautomorfismelor și cvaziautomorfismelor acestor cvazigrupuri.

Problema științifică importantă soluționată în domeniul respectiv constă în cercetarea diferitelor relații de tip morfisme (autotopii, pseudoautomorfisme, G -proprietăți) și noțiunilor (distributanților, nucleelor) în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele studiate de cvazigrupuri (inclusiv și clasele noi introduse).

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării este determinată de obținerea unor rezultate noi în cercetarea sistemelor neasociative cu identități de tip Bol-Moufang. Lucrarea poartă un caracter teoretic.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în predarea cursurilor de specialitate pentru studenții, masteranzii și doctoranzii de la specialitățile de matematică.

ANNOTATION

of the doctoral thesis “**Morphisms and properties of non-associative algebraic systems with Moufang type conditions**”, presented by Diduric Natalia for conferring the scientific title of Doctor in mathematical sciences, speciality 111.03 - Mathematical Logic, Algebra and Number Theory, Chisinau, 2022.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and contains an introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, 109 bibliographic titles, 104 pages (including 91 pages of basic text). The obtained results are published in 16 scientific papers.

Keywords: quasigroup, loop, isotope, pseudo-automorphism, left Bol (right) quasigroup, Moufang quasigroup, *WA*-quasigroup, *i*-quasigroup, *G*-properties.

Thesis field of study: algebra, in special, the theory of quasigroups with identities including Bol-Moufang-type identities, properties of non-associative algebraic systems.

The purpose and objectives of the paper. The aim of the paper is to investigate the properties of non-associative algebraic systems with Bol-Moufang type identities. To achieve this goal, the following objectives have been defined: research on the relations of *WA*-, *CI*-quasigroups, transitive on the left and Neuman with the quasigroups Moufang, Bol on the left, on the right, etc.; research of the existence of unilateral unity in quasigroups with Bol-Moufang type identities, enumerated in the work of F. Fenyves “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type”, (1969); research of morphisms, properties, relationships with other classes of quasigroups of newly defined quasigroups (*i*-quasigroups and *WIP*-generalized quasigroups); research on the *G*-properties of left transitive quasigroups and Neumann.

Scientific novelty and originality. All the results presented in the thesis are new and original. Diverse classes of quasigroups known earlier (*WA*-, *CI*-quasigroups, transitive left quasigroups, Neumann, etc.) were researched. Two new classes of quasigroups were introduced and researched (*i*-quasigroups, *WIP*-generalized quasigroups). Isotope group quasigroup classes were investigated. The properties of some classes of invertible quasigroups were described. Connections between the studied quasigroup classes and the classical quasigroups Moufang, Bol, etc. were investigated. The general forms of the automorphisms, pseudoautomorphisms and quasianaomorphisms of these quasigroups were determined.

The important scientific problem solved consists in the research of different morphisms (autotopies, pseudoautomorphisms, *G*-properties) and notions (distributant, nucleus) in non-associative algebraic systems with Bol-Moufang conditions that lead to the description of important new relationships between the classes studied by quasigroups (including newly introduced classes).

The theoretical importance and applicative value of the thesis are determined by obtaining new results in the research of non-associative systems of the Bol-Moufang type. The paper is of theoretical character. The methods developed in the paper allowed solving the problems.

Implementation of scientific results. The results of the paper can be used in teaching specialized courses for students, masters and doctoral students in mathematics.

АННОТАЦИЯ

диссертации «**Морфизмы и свойства неассоциативных алгебраических систем с условиями типа Муфанг**», представленной Дидурик Натальей для присвоения ученой степени доктора математических наук по специальности 111.03 – Математическая логика, Алгебра и Теория чисел, Кишинев, 2022 год.

Структура диссертации: диссертация написана на румынском языке и содержит введение, четыре главы, общие выводы и рекомендации, список литературы из 109 публикаций, 104 страницы (в том числе 91 страница основного текста). Результаты опубликованы в 16 научных работ.

Ключевые слова: квазигруппа, лупа, изотоп, псевдоавтоморфизм, левая (правая) квазигруппа Бола, квазигруппа Муфанг, WA -квазигруппа, i -квазигруппа, G -свойства.

Область исследования: алгебра, в частности, теория квазигрупп с тождествами, в том числе тождества типа Бола-Муфанг, свойства неассоциативных алгебраических систем.

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является исследование свойств неассоциативных алгебраических систем с тождествами типа Бола-Муфанг. Для достижения этой цели были определены следующие задачи: исследование связи WA -, CI -квазигрупп, левотранзитивных и Неймана с квазигруппами Муфанг, левой и правой Бола и др.; исследование существования односторонней единицы в квазигруппах с тождествами типа Бола-Муфанг, перечисленные в работе Ф. Фенивса, “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type”, (1969); исследование морфизмов, свойств и взаимосвязей с другими классами квазигрупп новых квазигрупп, определенных в работе (i -квазигруппы и обобщенные WIP -квазигруппы); исследование G -свойств левотранзитивных квазигрупп и квазигрупп Неймана.

Научная новизна и оригинальность. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и оригинальными. Были исследованы различные классы квазигрупп (WA -, CI -квазигруппы, левотранзитивные квазигруппы, Неймана и др.). Были введены и исследованы два новых класса квазигрупп (обобщенные WIP -квазигруппы, i -квазигруппы). Исследованы классы квазигрупп изотопных группам. Описываются свойства некоторых классов обратимых квазигрупп. Исследованы связи между изучаемыми классами квазигрупп и классическими квазигруппами Муфанг, Бол и др. Определены общие формы автоморфизмов, псевдоавтоморфизмов и квазиавтоморфизмов этих квазигрупп.

Решенная важная научная проблема состоит в исследовании различных морфизмов (автотопий, псевдоавтоморфизмов, G -свойств) и понятий (дистрибутант, ядро) в неассоциативных алгебраических системах с условиями Бола-Муфанг, которые приводят к описанию новых важных взаимосвязей между изученными классами квазигрупп (включая и новые введенные классы).

Теоретическая значимость и прикладное значение работы определяется получением новых результатов в исследовании неассоциативных систем с тождествами типа Бола-Муфанг. Работа носит теоретический характер.

Внедрение научных результатов. Результаты работы могут быть использованы при преподавании специализированных курсов для студентов, магистров и аспирантов математических специальностей.

Diduric, Natalia

**MORFISMELE ȘI PROPRIETĂȚILE SISTEMELOR
ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIȚII DE TIP
MOUFANG**

**SPECIALITATEA 111.03 - LOGICĂ MATEMATICĂ,
ALGEBRĂ ȘI TEORIA NUMERELOR**

Rezumatul tezei de doctorat

Aprobat spre tipar: 04.02.2022

Formatul hârtiei 60x84 1/16

Hârtie ofset. Tipar ofset.

Tiraj 40 ex.

Coli de tipar: 1,6

OOO "IMPRESO" str. Sverdlova 92, Tiraspol, MD-3300