UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

Cu titlu de manuscris

C.Z.U: 512.548

DIDURIC NATALIA

MORFISMELE ŞI PROPRIETĂŢILE SISTEMELOR ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIŢII DE TIP MOUFANG

SPECIALITATEA 111.03 - LOGICĂ MATEMATICĂ, ALGEBRĂ ŞI TEORIA NUMERELOR

Teză de doctor în științe matematice

Conducător ştiinţific: Șcerbacov Victor, dr. hab. în științe fizico-matematice

Membrii comisiei de îndrumare: Cojocaru Svetlana, dr. hab. în informatică, membru corespondent

Arnautov Vladimir, acad., dr. hab. în științe fizico-matematice, profesor universitar

Chiriac Liubomir, dr. hab. în științe matematice, profesor universitar

Autor: Diduric Natalia

CHIŞINĂU, 2022

CUPRINS

ADNOTARE 5

ANNOTATION 6

АННОТАЦИЯ 7

INTRODUCERE 8

1. ANALIZA SITUAȚIEI ÎN DOMENIUL SISTEMELOR ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIȚII DE TIP MOUFANG 15

1.1. Grupoizi. Definițiile cvazigrupului și buclei 15

1.2. Operațiile inverse ale cvazigrupului (parastrofii) 16

1.3. Proprietățile cvazigrupurilor. Noțiuni generale. 17

1.4. Cvazigrupuri cu proprietate inversă la stânga (*LIP*-cvazigrupuri). Cvazigrupuri cu proprietate inversă la dreapta (*RIP*-cvazigrupuri). 21

1.5. Cvazigrupul Bol la stânga. Cvazigrupul Bol la dreapta. Buclă Moufang. 22

1.6. Cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang 24

1.7. Concluzii la capitolul 1 26

2. DESPRE UNELE CLASE DE CVAZIGRUPURI CU PROPRIETĂȚI DE INVERSABILITATE (*WA*-, *OWIP*-, *CI*-CVAZIGRUPURI) 27

2.1. Proprietățile *WA*-buclelor la stânga 27

2.2. Automorfisme ale *WA*-buclelor la stânga 31

2.3. Pseudoautomorfisme și subbucle 34

2.4. *WIP*-cvazigrupuri generalizate (*OWIP*-cvazigrupuri) 35

2.5. Despre definirea *CI*-cvazigrupurilor 38

2.6. Izotopii *CI*-cvazigrupului 39

2.7. Concluzii la capitolul 2 42

3. DESPRE O CLASĂ DE *i*-CVAZIGRUPURI. UNITĂȚI LA DREAPTA (LA STÂNGA) ÎN CVAZIGRUPURI DE TIP BOL-MOUFANG 43

3.1. *i*-cvazigrupuri cu distributant nevid 43

3.2. Relația *i*-cvazigrupurilor cu unele clase de cvazigrupuri 49

3.3. *i*-cvazigrupuri cu identități alternative și de elasticitate 52

3.4. Pseudoautomorfisme ale *i*-cvazigrupurilor 56

3.5. Unități la dreapta (la stânga) în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang 57
3.6. Concluzii la capitolul 3 73
4. CVAZIGRUPURI TRANZITIVE LA STÂNGA. CVAZIGRUPURI NEUMANN ȘI SCHWEIZER 75
4.1. Proprietățile de bază ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga 75
4.2. Cvazigrupuri tranzitive la stânga și alte clase de cvazigrupuri 77
4.3. Nucleul cvazigrupurilor tranzitive la stânga 79
4.4. Despre morfismele cvazigrupurilor tranzitive la stânga 80
4.5. *G*-proprietăți ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga 81
4.6. Rezultatele de bază ale cvazigrupurilor Neumann 83
4.7. Pseudoautomorfisme, cvaziautomorfisme ale cvazigrupului Neumann 86
4.8. *G*-proprietăți ale cvazigrupului Neumann 88
4.9. Concluzii la capitolul 4 89
CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI 90
BIBLIOGRAFIE 92
DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII 102
CV-ul AUTOAREI 103

ADNOTARE

la teza de doctorat "**Morfismele şi proprietăţile sistemelor algebrice neasociative cu condiţii de tip Moufang**", prezentată de către Diduric Natalia pentru conferirea titlului științific de doctor în ştiinţe matematice, specialitatea 111.03 - Logică Matematică, Algebră şi Teoria Numerelor, Chişinău, 2022.

Structura tezei: teza este scrisă în limba română şi conţine introducere, patru capitole, concluzii generale şi recomandări, 109 titluri bibliografice, 104 pagini (inclusiv 91 pagini de text de bază). Rezultatele obţinute sunt publicate în 16 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte-cheie: cvazigrup, buclă, izotop, pseudoautomorfism, cvazigrup Bol la stânga (la dreapta), cvazigrup Moufang, *WA*-cvazigrup, *i*-cvazigrup, *G*-proprietăţi.

Domeniul de studiu al tezei: algebră, în special, teoria cvazigrupurilor cu identităţi, inclusiv identităţile de tip Bol-Moufang, proprietăţile sistemelor algebrice neasociative.

Scopul şi obiectivele lucrării. Scopul lucrării este cercetarea proprietăţilor sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Bol-Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective: cercetarea relațiilor *WA*-, *CI*-cvazigrupurilor, cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, Bol la dreapta ș.a.; cercetarea existenței unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea lui F. Fenyves "Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type", (1969); cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite în lucrare (*i*-cvazigrupuri și *OWIP*-cvazigrupuri); cercetarea *G*-proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. Toate rezultatele prezentate în teză sunt noi şi originale. Au fost cercetate diverse clase de cvazigrupuri (*WA*-, *CI*-cvazigrupuri, cvazigrupuri tranzitive la stânga, Neumann ș.a.). Au fost introduse şi cercetate două clase noi de cvazigrupuri (*WIP*-cvazigrupuri generalizate, *i*-cvazigrupuri). Au fost cercetate clase de cvazigrupuri izotope grupurilor. Sunt descrise proprietăţile unor clase de cvazigrupuri inversabile. Au fost cercetate conexiuni între clasele de cvazigrupuri studiate și cvazigrupurile clasice Moufang, Bol ș.a. Sunt determinate formele generale ale automorfismelor, pseudoautomorfismelor și cvaziautomorfismelor acestor cvazigrupuri.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată în domeniul respectiv constă în cercetarea diferitelor relații de tip morfisme (autotopii, pseudoautomorfisme, *G*-proprietăți) și noțiunilor (distributanților, nucleelor) în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele studiate de cvazigrupuri (inclusiv și clasele noi introduse).

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării este determinată de obținerea unor rezultate noi în cercetarea sistemelor neasociative cu identități de tip Bol-Moufang. Lucrarea poartă un caracter teoretic.

Implementarea rezultatelor științifice. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în predarea cursurilor de specialitate pentru studenții, masteranzii și doctoranzii de la specialitățile de matematică.

ANNOTATION

of the doctoral thesis “**Morphisms and properties of non-associative algebraic systems with Moufang type conditions**”, presented by Diduric Natalia for conferring the scientific title of Doctor in mathematical sciences, speciality 111.03 - Mathematical Logic, Algebra and Number Theory, Chisinau, 2022.

Thesis structure: the thesis is written in Romanian and contains an introduction, four chapters, general conclusions and recommendations, 109 bibliographic titles, 104 pages (including 91 pages of basic text). The obtained results are published in 16 scientific papers.

Keywords: quasigroup, loop, isotope, pseudo-automorphism, left Bol (right) quasigroup, Moufang quasigrup, *WA*-quasigroup, *i*-quasigroup, *G*-properties.

Thesis field of study: algebra, in spesial, the theory of quasigroups with identities including Bol-Moufang-type identities, properties of non-associative algebraic systems.

The purpose and objectives of the paper. The aim of the paper is to investigate the properties of non-associative algebraic systems with Bol-Moufang type identities. To achieve this goal, the following objectives have been defined: research on the relations of *WA*-, *CI*-quasigroups, transitive on the left and Neuman with the quasigroups Moufang, Bol on the left, on the right, etc.; research of the existence of unilateral unity in quasigroups with Bol-Moufang type identities, enumerated in the work of F. Fenyves “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type”, (1969); research of morphisms, properties, relationships with other classes of quasigroups of newly defined quasigroups (*i*-quasigroups and *WIP*-generalized quasigroups); research on the *G*-properties of left transitive quasigroups and Neumann.

Scientific novelty and originality. All the results presented in the thesis are new and original. Diverse classes of quasigroups known earlier (*WA*-, *CI*-quasigroups, transitive left quasigroups, Neumann, etc.) were researched. Two new classes of quasigroups were introduced and researched (*i*-quasigroups, *WIP*-generalized quasigroups). Isotope group quasigroup classes were investigated. The properties of some classes of invertible quasigroups were described. Connections between the studied quasigroup classes and the classical quasigroups Moufang, Bol, etc. were investigated. The general forms of the automorphisms, pseudoautomorphisms and quasiautomorphisms of these quasigroups were determined.

The important scientific problem solved consists in the research of different morphisms (autotopies, pseudoautomorphisms, *G*-properties) and notions (distributant, nucleus) in non-associative algebraic systems with Bol-Moufang conditions that lead to the description of important new relationships between the classes studied by quasigroups (including newly introduced classes).

The theoretical importance and applicative value of the thesis are determined by obtaining new results in the research of non-associative systems of the Bol-Moufang type. The paper is of theoretical character. The methods developed in the paper allowed solving the problems.

Implementation of scientific results. The results of the paper can be used in teaching specialized courses for students, masters and doctoral students in mathematics.

АННОТАЦИЯ

диссертации **«Морфизмы и свойства неассоциативных алгебраических систем с условиями типа Муфанг»**, представленной Дидурик Натальей для присвоения ученой степени доктора математических наук по специальности 111.03 – Математическая логика, Алгебра и Теория чисел, Кишинев, 2022 год.

Структура диссертации: диссертация написана на румынском языке и содержит введение, четыре главы, общие выводы и рекомендации, список литературы из 109 публикаций, 104 страницы (в том числе 91 страница основного текста). Результаты опубликованы в 16 научных работ.

Ключевые слова: квазигруппа, лупа, изотоп, псевдоавтоморфизм, левая (правая) квазигруппа Бола, квазигруппа Муфанг, WA-квазигруппа, i-квазигруппа, левотранзитивная квазигруппа, G-свойства.

Область исследования: алгебра, в частности, теория квазигрупп с тождествами, в том числе тождества типа Бола-Муфанг, свойства неассоциативных алгебраических систем.

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является исследование свойств неассоциативных алгебраических систем с тождествами типа Бола-Муфанг. Для достижения этой цели были определены следующие задачи: исследование связи *WA*-, *CI*-квазигрупп, левотранзитивных и Неймана с квазигруппами Муфанг, левой и правой Бола и др.; исследование существования односторонней единицы в квазигруппах с тождествами типа Бола-Муфанг, перечисленные в работе Ф. Фенивса, “Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type”, (1969); исследование морфизмов, свойств и взаимосвязей с другими классами квазигрупп новых квазигрупп, определенных в работе (i-квазигруппы и обобщенные *WIP*-квазигруппы); исследование *G*-свойств левотранзитивных квазигрупп и квазигрупп Неймана.

Научная новизна и оригинальность. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и оригинальными. Были исследованы различные классы квазигрупп (*WA*-, *CI*-квазигруппы, левотранзитивные квазигруппы, Неймана и др.). Были введены и исследованы два новых класса квазигрупп (обобщенные *WIP*-квазигруппы, i-квазигруппы). Исследованы классы квазигрупп изотопных группам. Описываются свойства некоторых классов обратимых квазигрупп. Исследованы связи между изучаемыми классами квазигрупп и классическими квазигруппами Муфанг, Бол и др. Определены общие формы автоморфизмов, псевдоавтоморфизмов и квазиавтоморфизмов этих квазигрупп.

Решенная важная научная проблема состоит в исследовании различных морфизмов (автотопий, псевдоавтоморфизмов, G-свойств) и понятий (дистрибутант, ядро) в неассоциативных алгебраических системах с условиями Бола-Муфанг, которые приводят к описанию новых важных взаимосвязей между изученными классами квазигрупп (включая и новые введенные классы).

Теоретическая значимость и прикладное значение работы определяется получением новых результатов в исследовании неассоциативных систем с тождествами типа Бола-Муфанг. Работа носит теоретический характер.

Внедрение научных результатов. Результаты работы могут быть использованы при преподавании специализированных курсов для студентов, магистров и аспирантов математических специальностей.

INTRODUCERE

Teza prezintă rezultatele teoretice ale studiului morfismelor şi proprietăţilor sistemelor algebrice neasociative cu condiţii de tip Moufang. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în criptografie.

Actualitatea și importanța problemei abordate. Teoria cvazigrupurilor își ia începutul în anii 20–30 ai secolului XX, după publicarea lucrărilor fundamentale ale lui David Hilbert, la sfârșitul secolului XIX, care țin de axiomatizarea matematicii și, în particular, de axiomatizarea geometriei, apariția lucrărilor referitoare la diferite sisteme de axiome, în general la sistemele de axiome ale diverselor geometrii, inclusiv geometriei euclidiene, geometriei proiective, geometriei Lobacevschi, în dimensiunile 2 și 3.

Însuși termenul „cvazigrup” a apărut în lucrarea lui Ruth Moufang [1] consacrată problemelor coordinatizării planurilor proiective. În lucrările sale Moufang prin cvazigrup percepea obiectul, care acum este numit buclă Moufang. În termeni moderni, ea a definit bucla Moufang ca o IP-buclă $(Q,\cdot)$ cu “asociativitate slabă”. Însăși Moufang a cercetat IP-buclele, care satisfac identitatea $a(c \cdot ab) = (ac \cdot a)b$ (“Quasi-gruppe Q^{*}”) sau identitatea $(ab)(ca) = a\big((bc)a\big)$ (“Quasi-gruppe Q^{**}”), unde $a, b, c \in Q$ [1].

Identitățile menționate mai sus poartă numele de identitatea Moufang la stânga și identitatea Moufang medie, respectiv.

Peste doi ani după apariția lucrărilor Moufang a fost publicată o lucrare importantă la tema cvazigrupurilor de Gerrit Bol (1937), și anume “Gewebe und Gruppen”. Bol a abordat noțiunea de cvazigrup din punct de vedere geometric. El construiește trei noi configurații U1, U2, U3 și arată că cele trei figuri U împreună implică numai legea $a\ [b\ (cb)]\ =\ [(ab)\ c]\ b,$ care este tocmai una din identitățile Moufang. Mai mult, Bol explică semnificația algebrică a fiecărei dintre figurile U, că U1 și U2 corespund unor legi care sunt numite în prezent identitățile Bol la dreapta și Bol la stânga.

Bol arată că împreună, U1 și U2 implică U3, iar când toate cele trei configurații sunt închise, se obține cvazigrupul Moufang. În particular Bol arată că cvazigrupul Moufang satisface legea flexibilității: $b\ (cb)\ =\ (bc)\ b$ [2]. Astfel, Bol obține că o buclă este Moufang dacă și numai dacă ea este atât Bol la dreapta cât și la stânga.

În plus mai existau deja și câteva publicații americane pe cvazigrupuri: (1937) Teoria cvazigrupurilor, de Hausmann și Ore; (1939) Cvazigrupuri, care verifică anumite legi asociative generalizate, de Murdoch; (1940) Cvazigrupuri, de Garrison.

Toți cei trei autori au folosit termenul "cvazigrup" într-un sens mai larg, așa cum îl folosim acum, și nu doar ca sistemul Q^{*} al lui Moufang.

A. C. Sușchevici (1937) a definit cvazigrupurile mediale (abeliene) ([3], p. 157). Primele publicații care au introdus termenul "buclă" au fost cele două lucrări foarte importante pe care Albert le-a scris în 1943: Quasigroups. I și Quasigroups. II [4, 5]. Menționăm și lucrările lui D. G. Murdoch [6], K. Toyoda [7], R. H. Bruck [8], R. Baer [9, 10].

Până în prezent buclele Moufang și buclele Bol sunt cele mai studiate în teoria cvazigrupurilor. În general sau studiat buclele Bol medii. Lucrările publicate de Jaiyéolá T. G., David S. P. și Oyebola O. (2021); O. Abdulkareem A. O. și Adeniran J. O. (2020) sunt dedicate cercetării acestor bucle. În lucrarea P. Sârbu și I. Grecu s-a demonstrat că buclele comutative cu flexibilitate invariantă sub izostrofia buclelor sunt bucle Moufang. În special, s-a obținut că IP-buclele comutative cu flexibilitate universală sunt bucle Moufang. Onoi V. I. și Ursu L. A., folosind abordarea izotopică, au generalizat conceptul buclei binare Moufang în cazul n-ar ($n > 2$).

În anii 30 ai secolului XX a fost introdusă noțiunea de rețea. În terminologia teoriei rețelelor noțiunea de cvazigrup are o interpretare geometrică clară [11].

Cvazigrupurile au multiple aplicări în statistică (teoria planificării experimentului) [12], teoria ecuațiilor diferențiale, geometria diferențială [13], geometria hiperbolică [14], fizică [15], teoria codurilor [16], criptografie [17].

Pentru cvazigrupuri, în special cele legate de combinatorică, au fost determinate și activ cercetate diferite transformări (morfisme), printre care de menționat: izomorfismele, automorfismele, izotopiile, autotopiile, izostrofiile, autostrofiile, pseudoautomorfismele, izotopiile generalizate.

Automorfismele și grupurile automorfismelor buclelor au fost cercetate de către A. A. Albert încă în primele lucrări ce țin de teoria cvazigrupurilor [4, 5]. Un aspect extrem de semnificativ al lucrării Quasigroups.I a fost introducerea conceptului de izotopie pentru cvazigrupuri. Conceptul de parastrofie în general a fost introdus de către A. Sade în Franța în anii 1950. Pseudoautomorfismele au fost definite și cercetate de către R.H. Bruck în lucrarea “Pseudo-automorphisms and Moufang loops”, 1952.

Definiția: G-*buclă* este bucla izomorfă tuturor buclelor izotope ei, are o origine geometrică. R.H. Bruck în lucrarea sa în 1971 a evidențiat că o problemă nerezolvată este problema descrierii G-buclelor. Din punct de vedere geometric, problema lui Bruck a fost rezolvată de către Barlotti și Strambach. Belousov a rezolvat această problemă și a demonstrat că bucla $(L,\cdot)$ este G-buclă dacă și numai dacă orice element al ei este companionul căruiva pseudoautomorfism la dreapta și căruiva la stânga al buclei $(L,\cdot)$ ([11], Teorema 3.8).

Rezultatele lui V. D. Belousov deschid calea către cercetarea G-proprietăților, adică către cercetarea G-buclelor și G-cvazigrupurilor. În ultimii ani, teoria G-buclelor s-a dezvoltat foarte activ. Sunt descoperite clase noi de G-bucle. Rămâne nerezolvată problema cercetării GA-cvazigrupurilor la stânga, la dreapta și medii.

În Republica Moldova, V. Belousov (1925-1988) și discipolii săi (Florea, Basarab, Gvaramia etc.) au obținut rezultate fundamentale în teoria cvazigrupurilor:

1. Noi abordări pentru cvazigrupuri - operații derivate, cvazigrupuri speciale și F-cvazigrupuri;
2. Noile proprietăți ale cvazigrupurilor cunoscute – distributive, fiind izotope unei bucle Moufang; distributive la stânga, care sunt izotope unui grup; F-cvazigrupuri, izotopi ai unui cvazigrup total simetric;
3. Cvazigrupuri n – are;
4. Ecuațiile funcționale pentru a exprima legile generale ale cvazigrupurilor (atât binare, cât și n-are);
5. Buclele generalizate Moufang și Bol.

Cvazigrupurile Moufang, care sunt studiate intens în prezent, au fost definite și cercetate de către V. Belousov. În lucrarea s-a Dudek W. A. a descris forma liniară a acestor cvazigrupuri și s-au caracterizat parastrofii lor. Florea I. A. a introdus în 1965 o clasă specială de cvazigrupuri, pe care o numim cvazigrupuri Bol. În 1976 a cercetat relația cvazigrupurilor tranzitive la stânga cu cvazigrupurile Bol. Apare problema de a prelungi cercetarea relațiile unor clase cunoscute de cvazigrupuri cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.

Aproape toate clasele bine cunoscute (clasice) de cvazigrupuri și bucle posedă proprietăți de inversabilitate. Cel mai des aceste cvazigrupuri posedă una din proprietățile IP, LIP, RIP, WIP sau CI.

IP- și LIP- buclele au fost definite în lucrarea lui R. Moufang [1], WIP-buclele – în lucrarea lui R. Baer [9], iar CI-buclele au fost definite de către Rafael Artzy în [18]. V. D. Belousov și B. V. Țurcan au definit și studiat CI-cvazigrupurile în [19]. Și anume sunt dovedite următoarele fapte: orice CI-grupoid este cvazigrup, orice CI-grupoid la stânga este cvazigrup la stânga. Din rezultatele lui V. Izbaș și N. Labo urmează că CI-grupoidul la stânga, în care aplicația I_r este bijectivă, este CI-cvazigrup; orice CI-grupoid finit la stânga este un CI-cvazigrup; orice CI-grupoid este un CI-cvazigrup.

Apare problema de a continua studiul proprietăților unor cvazigrupuri cu proprietate de inversabilitate (WA-, CI-cvazigrupuri).

În lucrarea sa F. Fenyves, "Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type", (1969) [20] a enumerat 60 de identități, numite de tip Bol-Moufang (ambele părți ale identității conțin aceleași trei litere diferite, luate în aceeași ordine, însă una dintre ele se întâlnește de două ori pe fiecare parte a identității). Ele includ identitățile Bol la stânga, Bol la dreapta și cele patru identități Moufang. Aceste identități reprezintă o formă mai slabă a legii asociative, iar în cazul buclelor, unele dintre ele implică asociativitatea. Kenneth Kunen în lucrarea sa „Quasigroups, Loops, and Associative Laws" (1996) pune întrebarea: cărei slăbiri a legii asociative un cvazigrup este o buclă. În special, rezolvă complet problema pentru toate identitățile de tip Bol-Moufang. Apare problema de a prelungi cercetarea existenței unităților unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang.

Lucrările publicate de R. Moufang, G. Bol, R. H. Bruck, V. D. Belousov, K. Kunen, S. Gagola III, J. D. Philips ș. a. sunt dedicate cercetării cvazigrupurilor și buclelor cu identități de tip Bol-Moufang [21, 11, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29].

În teza de față sunt formulate următoarele probleme:

Problema 1. De cercetat morfismele, proprietățile, relațiile cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite în lucrare (i-cvazigrupuri și *WIP*-cvazigrupuri generalizate).

Problema 2. De cercetat existența unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea lui F. Fenyves, "Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type", (1969).

Problema 3. De cercetat G-proprietățile cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

Menționăm câteva lucrări în această direcție [30, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38].

Problemele 1-3 sunt soluționate în Capitolele 2, 3 și 4.

Scopul și obiectivele tezei. Scopul lucrării constă în cercetarea morfismelor și proprietăţilor sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Bol-Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective:

(1) Cercetarea relațiilor WA-, CI-cvazigrupurilor, tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.;

(2) Cercetarea existenței unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea lui F. Fenyves, "Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type", (1969);

(3) Cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite în lucrare (i-cvazigrupuri și *WIP*-cvazigrupuri generalizate);

(4) Cercetarea G-proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în cercetarea diferitelor relații de tip morfisme (autotopii, pseudoautomorfisme, *G*-proprietăți) și noțiunilor (distributanților, nucleelor) în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele studiate de cvazigrupuri (inclusiv și clasele noi introduse).

Semnificația teoretică și valoarea aplicativă a lucrării este determinată de obţinerea unor rezultate noi în cercetarea sistemelor neasociative cu identități de tip Bol-Moufang. Lucrarea poartă un caracter teoretic. Rezultatele lucrării pot fi utilizate în predarea cursurilor de specialitate pentru studenții, masteranzii și doctoranzii de la specialitățile de matematică.

Aprobarea rezultatelor. Rezultatele științifice obținute au fost expuse și aprobate în cadrul Sesiunii speciale a Seminarului "Algebră și Logică matematică", dedicate memoriei Profesorului V. Belousov, Institutul de Matematică și Informatică "Vladimir Andrunachievici" al Academiei de Științe a Moldovei. Rezultatele principale incluse în teză au fost prezentate la următoarele conferințe științifice:

- "Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători": Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a 6-a, Chișinău, 15 iunie, 2017.
- The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4, June 28 – July 2, 2017, Chișinău.
- The 25 Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017, September 14–17, 2017, Iași.
- International conference on mathematics, informathics and information technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, 19-21 april, 2018, Bălţi.
- "Tendinţe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători": Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a VII-a Chișinău, 15 iunie, 2018.
- The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018, September 20-23, 2018, Chişinău.
- International conference Mathematics & Information technologies: research and education, MITRE-2019, Moldova, State University, June 24, 2019, Chișinău.

- LOOPS 2019 Conference, Budapest University of Technology and Economics, July 7-July 11, 2019, Hungary.
- The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55), September 30, 2019, Chișinău.

Publicații la tema tezei. În total 16 publicații științifice, cuprinzând 6 articole în reviste recenzate de specialitate (un articol fără coautori) și 10 rezumate la conferințe științifice (7 rezumate fără coautori).

Sumarul compartimentelor tezei. Structura tezei este reprezentată în patru capitole, care conțin rezultatele teoretice obținute în cercetarea proprietăţilor sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Bol-Moufang. De asemenea, teza conține o adnotare în limbile engleză, română și rusă, introducere, concluzii generale și recomandări, Bibliografie cu 109 de titluri.

În introducere este formulată actualitatea și importanța problemei abordate, sunt menționate obiectivele, noutatea științifică și originalitatea tezei. Problema științifică studiată subliniază importanța teoretică și aplicativă a lucrării. Este prezentată o scurtă analiză a problemelor și publicațiilor la tema tezei. Această secțiune se încheie cu un rezumat al conținutului lucrării.

Primul capitol al tezei poartă un caracter introductiv și are ca scop prezentarea situației actuale în domeniul sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Bol-Moufang. Conține noțiunile și teoremele de bază, necesare pentru expunerea lucrării.

În cel de-al **doilea capitol**, sunt studiate WA-cvazigrupurile, WIP-cvazigrupurile generalizate și CI-cvazigrupurile. Toate aceste cvazigrupuri au proprietăți de inversabilitate. În acest capitol sunt introduse și studiate WIP-cvazigrupurile generalizate ($OWIP$-cvazigrupurile).

În **capitolul trei** sunt introduse și cercetate i-cvazigrupurile – o nouă clasă de cvazigrupuri. Această noțiune a fost definită de către autoarea tezei în publicațiile comune cu I. A. Florea. În caz general i-cvazigrupurile nu au proprietăți de inversabilitate. În teză sunt studiate i-cvazigrupuri înzestrate suplimentar cu unele proprietăți de inversabilitate.

K. Kunen a studiat existența unității bilaterale în cvazigrupuri cu anumite identități evidențiate dintre cele "60 de identități de tip Bol-Moufang", precăutate de Fenyves [22]. Problema cercetării existenței unității în cvazigrupuri cu identități este formulată și în monografia lui V. D. Belousov [11] (problema nr. 18, p. 217). În acest capitol este soluționată problema existenței unității unilaterale în cvazigrupurile care satisfac fiecare dintre cele 60 de identități de tip Bol-Moufang enumerate în [20].

În **capitolul patru** sunt studiate cvazigrupurile tranzitive la stânga și cvazigrupurile Neumann. Atât cvazigrupurile tranzitive cât și cele Neumann sunt izotope grupurilor. Au fost studiate nucleele, G-proprietatea și diverse morfisme ale cvazigrupurilor indicate. Rezultatul principal al acestei părți a disertației arată că noțiunea de cvazigrup Neumann coincide cu cea de cvazigrup Schweizer.

Secțiunea **Concluzii generale și recomandări** prezintă concluziile generale ale autoarei cu privire la rezultatele obținute în cadrul tezei. Concluziile sunt prezentate sub formă de rezultate obținute și sunt urmate de recomandările autoarei cu privire la modul în care aceste rezultate pot fi aplicate în diverse domenii științifice, precum și în cercetări potențiale.

Mulțumiri:

Exprim sinceră recunoștință conducătorului științific *Victor Alexeevici Şcerbacov* pentru determinarea domeniului și formularea obiectivelor de cercetare, pentru cunoștințele pe care le-am căpătat pe parcursul celor patru ani de doctorantură și pentru ajutorul pe care mi l-a oferit în realizarea publicațiilor și scrierea tezei.

Cu deosebită considerație și recunoștință aduc mulțumiri profesorului, candidatului în științe fizico-matematice, *Ivan Arhipovici Florea*, care a ghidat primii mei pași în teoria cvazigrupurilor, primele cercetări ale diferitor clase de cvazigrupuri. Publicațiile Dumnealui servindu-mi ca repere următoarelor cercetări.

Exprim recunoștință directorului școlii doctorale Matematică și Știința Informației, academicianului $\boxed{Mitrofan\ Mihailovici\ Cioban}$, pentru răbdare, îndrumare și încurajare.

Alese mulțumiri aduc membrilor comisiei de îndrumare, dnei dr. hab., mem. cor. *Cojocaru Svetlana*, dlui acad., *Arnautov Vladimir* și dlui dr. hab. *Chiriac Liubomir*, pentru sfaturile și recomandările prețioase.

În mod deosebit, mulțumesc dlui dr. hab., mem. cor. *Gaindric Constantin* și dnei dr., conf. univ. *Sârbu Parascovia* pentru consultațiile și sfaturile competente oferite.

Dedic această lucrare *regretaților părinților mei, Nicolae și Olga,* cu dragoste și recunoștință.

1. ANALIZA SITUAȚIEI ÎN DOMENIUL SISTEMELOR ALGEBRICE NEASOCIATIVE CU CONDIȚII DE TIP MOUFANG

În acest capitol se realizează o analiză a conceptelor algebrice fundamentale. Se face o sinteză a situației în domeniul cercetării. Un ingredient foarte important al matematicii este creativitatea, capacitatea de a formula definiții utile, care vor duce la rezultate interesante.

O noțiune foarte importantă a algebrei generale este noțiunea de operație algebrică sau pur și simplu de operație.

Fie dată o mulțime nevidă Q, finită sau infinită; elementele mulțimii Q notăm cu litere mici latine: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ Prin mulțimea Q la puterea n înțelegem mulțimea Q^n, formată din toate n-uplele posibile ordonate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ elementelor din Q. Atunci *operație n-ară A*, definită pe mulțimea Q, vom numi aplicația mulțimii Q^n în mulțimea Q. Dacă n-uplei $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i se pune cu aceasta în corespondență elementul b (ce aparține de asemeni Q), atunci scriem $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$. Numărul n se numește *aritatea* operației A. Dacă $n = 2$, atunci operația A se numește *binară*: $A(a_1, a_2) = b$. Dacă $n = 1$, atunci operația A se numește *unară*: $A(a_1) = b$. Se pot precăuta operații și de "aritate" infinită și zero. Mulțimea Q cu mulțimea de operații Ω, precum operațiile din Ω pot fi de orice aritate, se numește *algebră universală* sau pur și simplu *algebră*, ea se notează $Q(\Omega)$.

Pe noi ne vor interesa numai operațiile binare. Operațiile, definite pe mulțimea Q, uneori vom nota cu litere mari latine $A, B, C, \ldots$ Deseori vom nota operațiile ca produs obișnuit, adică nu vom scrie $A(a, b) = c$, dar $ab = c$, sau, dacă va fi nevoie, vom folosi și alte semne pentru operație: $\bullet$, Δ, $*$, $\circ$ și a.m.d., de exemplu $a \bullet b = c, a\Delta b = c$ și a.m.d.

1.1. Grupoizi. Definițiile cvazigrupului și buclei

O mulțime nevidă Q cu o operație binară A se numește *grupoid* și se notează (Q, A). Dacă operația este notată cu un simbol, de exemplu cu " $\cdot$ " sau " $\circ$ ", vom scrie $(Q,\cdot)$ sau, respectiv $(Q,\circ)$. Prin urmare pe mulțimea Q sunt definiți atâția grupoizi câte operații algebrice există pe această mulțime. Vom considera că două operații A și B, definite pe o mulțime Q, coincid dacă $A(a, b) = B(a, b)$, pentru orice $a, b \in Q$. Numărul elementelor din mulțimea Q se numește *ordinul grupoidului* (Q, A).

Definiția 1.1.1. Grupoidul binar $(Q,\circ)$ se numește *cvazigrup*, dacă pentru orice pereche ordonată $(a, b) \in Q^2$ există soluțiile unice $x, y \in Q$ pentru ecuațiile $x \circ a = b$ și $a \circ y = b$ [11].

Adesea această definiție este numită *existențială*. Această definiție este echivalentă următoarei: grupoidul (Q, A) se numește *cvazigrup*, dacă prin oricare două elemente din egalitatea $A(a, b) = c$ se determină univoc al treilea.

Mai este și altă definiție a cvazigrupului pe care o vom prezenta mai jos. Introducerea standartă în teoria cvazigrupurilor este dată în [11, 39, 40, 41].

Fie $(Q,\cdot)$ un cvazigrup.

Definiția 1.1.2. Elementul $i \in Q$ este *idempotent* în $(Q,\cdot)$ atunci, când $i \cdot i = i$.
Elementul $f \in Q$ este *unitate la stânga* în $(Q,\cdot)$ atunci, când $f \cdot x = x$, pentru orice $x \in Q$.
Elementul $e \in Q$ este *unitate la dreapta* în $(Q,\cdot)$ atunci, când $x \cdot e = x$, pentru orice $x \in Q$.
Elementul $e \in Q$ este *unitate* (bilaterală) în $(Q,\cdot)$ atunci, când este unitate și la stânga și la dreapta.
Elementul $m \in Q$ este *unitate medie* în $(Q,\cdot)$ atunci, când $x \cdot x = m$, pentru orice $x \in Q$.

Definiția 1.1.3. Cvazigrupul este *buclă la stânga* (*la dreapta*), dacă are unitate la stânga (la dreapta). Cvazigrupul este *buclă*, dacă are unitate la dreapta și unitate la stânga.

1.2. Operațiile inverse ale cvazigrupului (parastrofii)

Fie dat cvazigrupul (Q, A). Ecuația $A(a, x) = b$ este rezolvabilă univoc. Această ecuație definește o operație algebrică binară $A^{-1}(a, b) = x, A^{-1}$ este *operația inversă la dreapta* pentru A. Ne convingem că (Q, A^{-1}) este cvazigrup, adică ecuațiile $A^{-1}(x, a) = b$ și $A^{-1}(a, y) = b$ sunt rezolvabile univoc. Într-adevăr, $a = A(x, b)$ este rezolvabilă univoc, adică $A(c, b) = a$ de unde $A^{-1}(c, a) = b$. Soluție a ecuației $A^{-1}(a, y) = b$ este $A(a, b)$. Analog ecuația $A(y, a) = b$ definește o operație nouă ${}^{-1}A$ numită *operația inversă la stânga* pentru A. Analog se demonstrează că $(Q, {}^{-1}A\ )$ este cvazigrup. Operația A se numește *inversabilă*, dacă ea este inversabilă la dreapta și la stânga.

Argumentând, prin analogie avem următoarele operații ale cvazigrupului ${}^{-1}(A^{-1})$, $({}^{-1}A)^{-1}$, A^*, unde $A^* = ({}^{-1}(A^{-1}))^{-1} = {}^{-1}(({}^{-1}A)^{-1})$ și $A^*(x, y) = A(y, x)$. Alte operații noi ale cvazigrupului nu sunt.

Dacă operația cvazigrupului este notată cu " $\cdot$ ", atunci

$$ab = c \Leftrightarrow a\backslash c = b \Leftrightarrow c/b = a$$

și $(\cdot)^{-1} = (\backslash), {}^{-1}(\cdot) = (/)$.

Următoarea definiție se numește definiția *ecuațională* a cvazigrupului.

Definiția 1.2.1. (vezi [42, 38]) Grupoidul $(Q,\cdot)$ se numește *cvazigrup*, dacă în această mulțime Q există operațiile "$\backslash$" și "$/$" astfel că în algebra $(Q,\cdot,\backslash,/)$ sunt adevărate identitățile

$$x \cdot (x\backslash y) = y, \tag{1.1}$$

$$(y/x)\cdot x = y, \tag{1.2}$$

$$x\backslash(x\cdot y) = y, \tag{1.3}$$

$$(y\cdot x)/x = y. \tag{1.4}$$

În orice cvazigrup $(Q,\cdot,\backslash,/)$ următoarele identități sunt adevărate:

$$x/(y\backslash x) = y, \tag{1.5}$$

$$(x/y)\backslash x = y. \tag{1.6}$$

Fiecărei inversări a cvazigrupului A îi corespunde o permutare de gradul trei. Cvazigrupurile A, A^{-1}, ${}^{-1}A$, ${}^{-1}(A^{-1})$, $({}^{-1}A)^{-1}$, A^{*} se numesc *parastrofii cvazigrupului* A, iar trecerea de la A la unul dintre aceste șase cvazigrupuri se numește *parastrofie*.

1. $A(x_1,x_2) = x_3 \;\Leftrightarrow$
2. $A^{(12)}(x_2,x_1) = x_3 \;\Leftrightarrow$
3. $A^{(13)}(x_3,x_2) = x_1 \;\Leftrightarrow$
4. $A^{(23)}(x_1,x_3) = x_2 \;\Leftrightarrow$
5. $A^{(123)}(x_2,x_3) = x_1 \;\Leftrightarrow$
6. $A^{(132)}(x_3,x_1) = x_2$

Vezi în [11, 43].

Observați că cazul 5 și 6 este parastrof (12) al cazului 3 și respectiv 4 [41].

Notă 1.2.1. Conceptul de parastrofie, în special parastrofia (12), poate fi extins pentru grupoizi.

1.3. Proprietățile cvazigrupurilor. Noțiuni generale.

În acest paragraf o să prezentăm noțiunile, proprietățile și teoremele principale care ne interesează în cazul diferitelor clase de cvazigrupuri.

Fie dat cvazigrupul $(Q,\cdot)$.

1° <u>*Unitățile locale ale cvazigrupului.*</u>

Ecuația $a\cdot x = a$ este rezolvabilă univoc, $a\cdot e_a = a, e_a$ este *unitatea locală la dreapta* a elementului a. Soluția f_a ecuației $y\cdot a = a$ vom numi *unitate locală la stânga* a elementului a. Dacă în cvazigrup $e_a = e_b$, atunci cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are unitate la dreapta $e, x\cdot e = x, \forall x \in Q$.

Prin analogie avem cvazigrup cu unitate la stânga, dacă $f_a = f_b, \forall\, a,b \in Q$.

Se cunoaște că în orice grupoid $(Q,\circ)$, dacă este unitate la stânga f și unitate la dreapta e, atunci ele sunt egale $f = e$.

2° <u>*Elemente inverse.*</u>

Fie $(Q,\cdot)$ o buclă cu unitatea e. Elementele inverse la dreapta și la stânga pentru x se determină prin identitățile $xx^{-1} = e, {}^{-1}xx = e$ corespunzător [11].

3° <u>*Translațiile.*</u>

Aplicațiile $R_a: x \to xa$ și $L_a: x \to ax$ se numesc *translații la dreapta și la stânga* (corespunzător) față de elementul a. Ele, evident, sunt permutări ale mulțimii Q (aplicații reciproc univoce Q în sine).

Propoziția 1.3.1. Dacă $(Q,\cdot)$ este un grup, atunci translațiile sale posedă proprietățile:

(i) $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}, R_a^{-1} = R_{a^{-1}}, \forall\, a \in Q,$

(ii) $L_a R_b = R_b L_a, \forall a, b \in Q,$

(iii) $L_a L_b = L_{ab}, R_a R_b = R_{ba}, \forall a, b \in Q.$

Din propoziția dată rezultă importanța noțiunii de izotopie.

4° <u>*Izotopia.*</u>

Fie două operații binare " $\cdot$ " și " $\circ$ ", definite pe mulțimea Q.

Definiția 1.3.1. Operația " $\circ$ " se numește *izotopă* operației " $\cdot$ " sau *izotop* al operației " $\cdot$ ", dacă există tripleta de permutări α, β, γ mulțimii Q astfel, încât

$$\gamma(x \circ y) = \alpha x \cdot \beta y, \tag{1.7}$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Definiția 1.3.2. Tripleta ordonată $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ vom numi *izotopie*.

α - componenta de stânga, β - componenta de dreapta, γ - componenta principală a izotopiei *T*.

Dacă $\alpha = \beta = \gamma$, atunci izotopia se transformă în izomorfism $\gamma(x \circ y) = \gamma x \cdot \gamma y$, γ este *izomorfism*. Izotopia de forma $T = (\alpha, \beta, \varepsilon)$, unde ε este substituție identică, $\varepsilon(x) = x$, $\forall x \in Q$ se numește *principală*.

Teorema 1.3.1. Orice izotop $(Q,\circ)$ al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ este de asemenea un cvazigrup.

Notăm prin *G* mulțimea tuturor tripletelor de permutări definite pe mulțimea Q a cvazigrupului $(Q,\cdot)$,

$$G = \{T = (\alpha, \beta, \gamma)\}.$$

Produsul izotopiilor T_1 și T_2 este izotopia

$$T = T_1 T_2 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_2).$$

Teorema 1.3.2. Mulțimea tuturor izotopiilor, definite pe mulțimea Q cvazigrupului $(Q,\cdot)$ formează grup față de produsul introdus.

Dacă cvazigrupul $(Q,\circ)$ este izotop cvazigrupului $(Q,\cdot)$, atunci pentru a simplifica scrierea ne învoim să scriem $(\circ) = (\cdot)^T$, unde $T = (\alpha, \beta, \gamma)$.

(i) Dacă $(\circ) = (\cdot)^T$, atunci $(\cdot) = (\circ)^{T^{-1}}$.

(ii) $((\cdot)^T)^{T_1} = (\cdot)^{TT_1}$.

(iii) Dacă cvazigrupul $(Q,\circ)$ este izotop cvazigrupului $(Q,\cdot)$, atunci $(Q,\circ)$ este izomorf cu un izotop principal al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

(iv) Fiecare cvazigrup este izotop căreiva bucle.

Pentru grupuri noțiunea de izotopie se reduce la cea de izomorfism. Aceasta rezultă din următoarea teoremă:

Teorema (Albert) 1.3.3. Dacă bucla $(Q,\circ)$ este izotopă unui grup $(Q,\cdot)$, atunci ea însăși este grup, izomorf grupului [11].

În anii 40 ai secolului XX s-a demonstrat că cvazigrupurile ce verifică identitatea $xy \cdot uv = xu \cdot yv$ (cvazigrupurile mediale), sunt izotope unor grupuri abeliene și a fost caracterizată această izotopie (este vorba de cunoscuta teoremă Toyoda [11, 39, 40]).

Teorema (Toyoda) 1.3.4. Fie (Q, A) un cvazigrup medial. Atunci există un grup abelian $(Q, +)$ astfel încât operația A are forma

$$A(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) + c,$$

unde $\varphi, \psi \in Aut\ (Q, +), \varphi\psi = \psi\varphi$, pentru toți $x, y \in Q$ și c un element fixat din Q.

Deși teorema dată este numită des "Teorema lui Toyoda", ea a fost demonstrată independent, aproximativ în aceeași perioadă de trei autori: Toyoda (1941), Murdoch (1941) [6] și Bruck (1944) [8].

5° <u>*Autotopiile cvazigrupurilor. Cvaziautomorfismele.*</u>

Un rol semnificativ în teoria cvazigrupurilor îl joacă noțiunea de autotopie.

Definiția 1.3.3. Tripleta ordonată $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ de permutări ale mulțimii Q se numește *autotopie* a cvazigrupului $(Q,\cdot)$, dacă $\gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y) = x \cdot y$, pentru oricare $x, y \in Q$.

Noțiunea de autotopie este caz particular al izotopiei. În particular, autotopia de forma $(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha$ va fi *automorfism*.

Toate autotopiile cvazigrupului formează grup față de înmulțirea autotopiilor. Componentele tuturor autotopiilor cvazigrupului cu același nume de asemenea formează grup. Dacă permutarea φ este componentă a unei autotopii T, atunci o vom numi *autotopică*.

Componenta principală a autotopiei T a cvazigrupului $(Q,\cdot)$ se numește *cvaziautomorfism al* cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Cu alte cuvinte, permutarea γ mulțimii Q se numește *cvaziautomorfism* al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, dacă există alte două permutări α și β mulțimii Q, astfel, încât $\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y$, adică $\mathrm{T} = (\alpha, \beta, \gamma)$ este autotopia cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

6° <u>*Nuclee ale cvazigrupului.*</u>

Definiția 1.3.4. (vezi [11, 40, 44]) *Nucleele la stânga* N_l, *mediu* N_m și *la dreapta* N_r ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$ se definesc în felul următor:

$$N_l = \{a \in Q | a \cdot xy = ax \cdot y\},$$
$$N_m = \{a \in Q | xa \cdot y = x \cdot ay\},$$
$$N_r = \{a \in Q | xy \cdot a = x \cdot ya\}, \forall x, y \in Q.$$

Au loc următoarele teoreme:

Teorema 1.3.3. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are nucleu la stânga $N_l \neq \emptyset$ dacă și numai dacă $(Q,\cdot)$ are unitate la stânga f.

Analog are loc teorema pentru nucleul la dreapta.

Teorema 1.3.4. Nucleul mediu $N_m \neq \emptyset$, dacă și numai dacă $(Q,\cdot)$ este buclă, adică are unitate $xe = ex = x$.

Teorema 1.3.5. Fiecare nucleu nevid N_l, N_m și N_r este subgrup al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

7° *<u>Permutări regulare.</u>* Permutarea λ (ρ) se numește *permutare regulară la stânga* (*la dreapta*) a buclei $(Q,\cdot)$, dacă $\lambda(xy) = \lambda x \cdot y$ $(\rho(xy) = x \cdot \rho y)$, $\forall\, x, y \in Q$. Permutarea φ se numește *medie regulară*, dacă există așa permutare φ^*, că $\varphi x \cdot y = x \cdot \varphi^* y$, $\forall\, x, y \in Q$. Setul tuturor permutărilor regulare la stânga, la dreapta și medii $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, S sunt grupuri. Toate permutările regulare ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$ sunt autotopice, așa cum $U_\lambda = (\lambda, 1, \lambda), V_\rho = (1, \rho, \rho)$, $W_\varphi = (\varphi, \varphi^{*-1}, 1)$ sunt autotopiile lui $(Q,\cdot)$.

8° *<u>Pseudoautomorfisme.</u>*

Alte permutări autotopice importante, ca și permutările regulare la dreapta și la stânga sunt pseudoautomorfismele cvazigrupului [11, 40].

Definim în sensul lui H. O. Pflugfelder:

Definiția 1.3.5. Bijecția θ a mulțimii Q se numește *pseudoautomorfism la dreapta* al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, dacă există măcar un element $c \in Q$ astfel, încât $\theta x \cdot (\theta y \cdot c) = \theta(x \cdot y) \cdot c$ pentru toți $x, y \in Q$, adică

$$(\theta, R_c\theta, R_c\theta) \tag{1.8}$$

este autotopia cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Elementul c se numește companionul lui θ.

Bijecția θ a mulțimii Q se numește *pseudoautomorfism la stânga* al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, dacă există măcar un element $c \in Q$ astfel, încât $(c \cdot \theta x) \cdot \theta y = c \cdot \theta(x \cdot y)$ pentru toți $x, y \in Q$, adică

$$(L_c\theta, \theta, L_c\theta) \tag{1.9}$$

este autotopia cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Elementul c se numește companionul lui θ [40].

Dacă θ este pseudoautomorfism la dreapta și la stânga, atunci θ se numește *pseudoautomorfism*.

Existența pseudoautomorfismelor la drepta (la stânga) în cvazigrupul (Q, A) presupune existența unității la dreapta (la stânga) [40]. În sensul cărții lui Belousov pseudoautomorfismul la dreapta după Pflugfelder este numit pseudoautomorfism la stânga, iar pseudoautomorfismul la stânga este numit pseudoautomorfism la dreapta. Existența pseudoautomorfismelor la drepta (la stânga) în cvazigrupul (Q, A) presupune existența unității la stânga (la dreapta) [11]. Se știe că dacă cvazigrupul are pseudoautomorfism netrivial la stânga și la dreapta, atunci este buclă [11, 40].

1.4. Cvazigrupuri cu proprietate inversă la stânga (*LIP*-cvazigrupuri). Cvazigrupuri cu proprietate inversă la dreapta (*RIP*-cvazigrupuri).

Definiția 1.4.1. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește cu *proprietate inversă la stânga*, dacă există aplicația $I_l: Q \to Q$ astfel, încât este adevărată egalitatea $I_l\, x \cdot xy = y$ sau ${}^{-1}x \cdot xy = y, \forall x, y \in Q$.

Teorema 1.4.1. În orice *LIP*-cvazigrup $(Q,\cdot)$ au loc:

1. $I_l^2 = \varepsilon$, adică ${}^{-1}({}^{-1}x) = x, \varepsilon$ este permutare identică.
2. $x({}^{-1}xy) = y$,
3. ${}^{-1}xx = e_x$, unde $xe_x = x$,
4. $L_x^{-1} = L_{{}^{-1}x}$, unde $L_x y = xy$,
5. I_l este permutare (bijecție).

Definiția 1.4.2. Elementul b al cvazigrupului arbitrar $(Q,\cdot)$ se numește *element Bol la stânga*, dacă verifică identitatea

$$b(x \cdot by) = R_{e_b}^{-1}(b \cdot xb)y, \tag{1.10}$$

$\forall x, y \in Q$, unde $R_{e_b}x = xe_b, be_b = b$.

Scriem (1.10) cu ajutorul translațiilor $L_b(x \cdot L_b y) = R_{e_b}^{-1} L_b R_b x \cdot y$ sau $L_b(xy) = R_{e_b}^{-1} L_b R_b x \cdot L_b^{-1} y$. Am obținut autotopia $T = (R_{e_b}^{-1} L_b R_b, L_b^{-1}, L_b)$.

Teorema 1.4.2. În orice cvazigrup $(Q,\cdot)$, dacă $T = (\alpha, L_b^{-1}, L_b)$ este autotopie, atunci b este element Bol la stânga.

Teorema 1.4.3. Dacă în *LIP*-cvazigrupul $(Q,\cdot)$, $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ este autotopie, atunci și $T_1 = (I_l \alpha I_l, \gamma, \beta)$ de asemenea este autotopie.

Teorema 1.4.4. Dacă *LIP*-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are unitate la stânga f și $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ este autotopie, atunci $\alpha f = b$, unde b este element Bol la stânga.

Teorema 1.4.5. Bucla $(Q, \circ)$, izotop al *LIP*-cvazigrupului $(Q,\cdot)$, unde izotopia este următoarea

$$x \circ y = R_a^{-1} x \cdot L_b^{-1} y, \tag{1.11}$$

va fi de asemenea *LIP*-buclă dacă și numai dacă elementul *b* este element Bol la stânga.

Prin analogie se definesc RIP-cvazigrupurile.

Definiția 1.4.3. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *RIP-cvazigrup*, dacă există aplicația $I_r: Q \to Q$ astfel, încât este adevărată identitatea $yx \cdot I_r x = y$ sau $yx \cdot x^{-1} = y$.

Teorema 1.4.6. În orice *RIP*-cvazigrup $(Q,\cdot)$ are loc:

1. $(x^{-1})^{-1} = x$, adică $I_r^2 = \varepsilon$, ε este permutare identică,
2. I_r este permutare, adică I_r este bijecție,
3. $yx^{-1} \cdot x = y$,
4. $xx^{-1} = f_x$, unde $f_x x = x$,
5. $R_x^{-1} = R_{x^{-1}}$.

Definiția 1.4.4. Elementul $a \in Q$ se numește *element Bol la dreapta* al cvazigrupului arbitrar $(Q,\cdot)$, dacă verifică identitatea

$$(za \cdot y)a = z \cdot L_{f_a}^{-1}(ay \cdot a). \tag{1.12}$$

Scriem egalitatea (1.12) cu ajutorul translațiilor $R_a(R_a z \cdot y) = z \cdot L_{f_a}^{-1} R_a L_a y$ sau $R_a(zy) = R_a^{-1} z \cdot L_{f_a}^{-1} R_a L_a y$. Am obținut autotopia $\left(R_a^{-1}, L_{f_a}^{-1} R_a L_a, R_a\right)$.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 1.4.7. În orice cvazigrup $(Q,\cdot)$, dacă $T = (R_a^{-1}, \beta, R_a)$ este autotopie, atunci *a* este element Bol la dreapta.

Cvazigrupul $(Q,\cdot)$, care este RIP- și LIP-cvazigrup se numește IP*-cvazigrup*.

Definiția 1.4.5. Elementul Moufang la stânga se definește de identitatea

$$a(x \cdot ay) = (a \cdot x f_a)a \cdot y, \tag{1.13}$$

elementul Moufang la dreapta de identitatea

$$(ya \cdot x)a = y \cdot a(e_a x \cdot a). \tag{1.14}$$

Teorema 1.4.8. În IP-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ elementele Bol și Moufang sunt echivalente.

1.5. Cvazigrupul Bol la stânga. Cvazigrupul Bol la dreapta. Buclă Moufang.

Fie *LIP*-cvazigrupul $(Q,\cdot)$, care are proprietatea că orice buclă, izotopă unui cvazigrup $(Q,\cdot)$, este de asemenea o *LIP*-buclă. Astfel ajungem la noțiunea de cvazigrup Bol la stânga.

Definiția 1.5.1. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$, care verifică identitatea

$$x(y \cdot xz) = R_{e_x}^{-1}(x \cdot yx) \cdot z, \forall x, y, z \in Q, \tag{1.15}$$

se numește *cvazigrup Bol la stânga* [45].

Prin analogie avem, cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *cvazigrup Bol la dreapta*, dacă verifică identitatea

$$(zx \cdot y)x = z \cdot L_{f_x}^{-1}(xy \cdot x). \tag{1.16}$$

Teorema 1.5.1. Orice cvazigrup Bol la stânga $(Q,\cdot)$ este LIP-cvazigrup [45].

Teorema 1.5.2. Orice buclă $(Q,\circ)$, izotop al unui cvazigrup Bol la stânga $(Q,\cdot)$, este buclă Bol la stânga, adică $(Q,\circ)$ verifică identitatea

$$x \circ \big(y \circ (x \circ z)\big) = \big(x \circ (y \circ x)\big) \circ z. \tag{1.17}$$

Teoreme similare au loc pentru cvazigrupurile Bol la dreapta.

În general sau studiat buclele Bol medii. Lucrările publicate de Jaiyéolá T. G., David S. P., Oyebola O. O. [46]; Abdulkareem A. O., Adeniran J. O. [47] sunt dedicate cercetării acestor bucle. S-a demonstrat că buclele comutative cu flexibilitate invariantă sub izostrofia buclelor sunt bucle Moufang. În special, s-a obținut că IP-buclele comutative cu flexibilitate universală sunt bucle Moufang [48].

Definiția 1.5.2. (vezi [11]) Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numeşte *cvazigrup Moufang*, dacă $(Q,\cdot)$ verifică următoarele identități

$$(xy \cdot z)y = x\Big(y\big(e_y z \cdot y\big)\Big), \tag{1.18}$$

$$y(x \cdot yz) = \Big(\big(y \cdot x f_y\big)y\Big)z, \tag{1.19}$$

unde $ye_y = y = f_y y$.

În teza sa de doctor (IM AN MSSR, 1965) I. A. Florea a demonstrat că identitățile (1.18) și (1.19) sunt echivalente, din această cauză se poate defini cvazigrupul Moufang ca cvazigrup, ce verifică numai una din aceste identități.

Cvazigrupurile Moufang definite de V. D. Belousov sunt studiate intens în prezent. S-a descris forma liniară a acestor cvazigrupuri și s-au caracterizat parastrofii lor [49]. Folosind abordarea izotopică, s-a generalizat conceptul buclei binare Moufang în cazul n-ar ($n > 2$). S-au dat două exemple de bucle ternare Moufang care nu sunt un grup ternar [50].

Definiția 1.5.3. (vezi [51]) Bucla $(Q,\cdot)$ se numeşte *buclă Moufang*, dacă verifică una din identitățile

$$(zx \cdot y)x = z(x \cdot yx), \tag{1.20}$$

$$x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z, \tag{1.21}$$

$$yx \cdot zy = y(xz \cdot y), \tag{1.22}$$

$$yx \cdot zy = (y \cdot xz)y. \tag{1.23}$$

În cercetarea cvazigrupurilor cu identități de tip Bol-Moufang vom avea nevoie de următoarele două leme: prima demonstrată de către I. A. Florea în teza sa de doctor, a doua este demonstrată în cartea lui Belousov [11].

Lema 1.5.1. Cvazigrupul Bol la stânga și Bol la dreapta este cvazigrup Moufang [45].

Lema 1.5.2. Bucla, izotopă unui cvazigrup Moufang, este o IP-buclă.

Definiția 1.5.4. Bucla comutativă $(Q,\cdot)$ cu identitatea $xx \cdot yz = xy \cdot xz$ se numește *buclă comutativă Moufang*.

O progresare enormă s-a realizat în cercetarea buclelor Moufang. Lucrările publicate de A. N. Grishkov, A. V. Zavarnitsine [52]; M. Rasskazova [53]; Gagola S. M. III, de Lourdes Merlini Giuliani Maria [54]; Hall J. I. [55]; Evans A. B., Gagola S. M. III [56] ș. a. sunt dedicate cercetării buclelor Moufang.

Observăm, metodele studierii buclelor Bol și Moufang și cvazigrupurilor Bol și Moufang se deosebesc considerabil. Într-o oarecare măsură, acestea sunt două curente diferite. Buclele Bol și Moufang tradițional se studiază mai mult de matematicienii occidentali, iar cvazigrupurile Bol și Moufang se studiază mai mult de matematicienii fostei URSS și țărilor blocului oriental.

1.6. Cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang

Identitatea, bazată pe o operație algebrică, este de tip Bol-Moufang, dacă «ambele părți ale identității conțin aceleași trei litere diferite, luate în aceeași ordine, însă una dintre ele se întâlnește de două ori pe fiecare parte a identității» [20].

Identitățile de tip Bol-Moufang sunt 60 de identități de ordinul patru pentru o operație algebrică binară, care includ identitățile Bol la stânga și la dreapta și cele patru identități Moufang. Identitățile decurg din asociativitate, dar sunt strict mai slabe decât asociativitatea, în cazul buclelor, unele dintre ele implică asociativitatea.

Patru elemente de bază x, y, z, w într-o ordine fixată pot fi luate în paranteze în cinci moduri:

$$(xy)(zw), x\big((yz)w\big), \big(x(yz)\big)w, \big((xy)z\big)w, x\big(y(zw)\big).$$

Dacă două elemente din patru sunt egale, adică avem $x, x, y, z,$ atunci pot fi aranjate în șase moduri astfel încât y și z se află într-o ordine fixată. Identitățile Bol-Moufang sunt obținute atunci când luăm elementele x, x, y, z cu y înainte de z (pentru definititudine) și formăm un monom de ordinul patru cu paranteze (dintre cele cinci formate mai sus) și îl egalăm cu monoame cu paranteze diferite, de exemplu $(xy)(zx) = x\big((yz)x\big), (xy)(zx) = \big(x(yz)\big)x$. Putem face acest lucru în 60 moduri. Astfel printre identitățile Bol-Moufang într-un cvazigrup sau într-o buclă se obțin clase interesante de cvazigrupuri și bucle, de exemplu, buclele Bol, buclele Moufang ș.a.

Noțiunea este introdusă în [20]. Explicații importante sunt prezentate în [22].

Kenneth Kunen în lucrarea sa „Quasigroups, Loops, and Associative Laws” (1996) pune întrebarea: cărei slăbiri a legii asociative un cvazigrup este o buclă. În special, rezolvă complet problema pentru toate identitățile de „tip Bol-Moufang”, cele scrise cu patru variabile, dintre care trei sunt distincte. La începutul articolului, Kunen amintește că toate cele 4 identități Moufang, dacă sunt adevărate într-un cvazigrup, atunci acest cvazigrup este o buclă și toate sunt echivalente. Amintim că acest rezultat (prezența unității) a fost anunțat mai devreme (1993) în rezumatul lui V. Izbaș și V. Șcerbacov. Echivalența în bucle a celor 4 identități Moufang este un rezultat binecunoscut (a se vedea cartea lui V. D. Belousov).

În secțiunea 2, Kunen studiază identitățile flexibilității, alternative la stânga și la dreapta. Se subliniază că niciuna dintre aceste trei nu implică faptul că cvazigrupul este o buclă, deși oricare două dintre ele împreună o obțin. Se arată, de asemenea, că există o singură lege cu dimensiunea patru cu două variabile distincte, din care urmează că un cvazigrup este o buclă.

Lema 1.6.1. ([22], Lema 2.2.) În orice cvazigrup:

1. RALT presupune că există unitate la dreapta.
2. LALT presupune că există unitate la stânga.
3. FLEX plus o unitate la dreapta sau la stânga presupune că există unitate bilaterală.
4. Orice două dintre RALT, LALT, FLEX presupun că există unitate bilaterală.

Se introduc cvazigrupuri de forma $\alpha x + \beta y = x * y$ peste grupuri ciclice de reziduuri modulo n. Aceste grupuri sunt utilizate pentru a construi exemple (contraexemple). Marcăm lema:

Lema 1.6.2. [22] Fiecare cvazigrup care verifică orice dintre simetrizările $\big((xy)x\big)y = (xy)(xy)$ sau $(yx)(yx) = y(x(yx))$ este buclă.

În secțiunea 3 este dat un tabel în care sunt enumerate cvazigrupurile (reduse la 24) cu identități de tip Bol-Moufang din lucrarea lui Fenyves (există 60 de astfel de identități) și indică care cvazigrup este o buclă și care nu. Kunen a exclus unele dintre cvazigrupuri, deoarece pentru el este clar că aceste identități implică faptul că cvazigrupul dat nu este o buclă.

Reformulând titlul articolului lui Gagola «Cum și de ce buclele Moufang se comportă ca și grupul» [24] se poate de spus că cvazigrupurile cu identitățile Bol-Moufang «se comportă ca și grupul». Atrageți atenția, informația despre unitățile la dreapta și la stânga în orice cvazigrup cu identitatea de tip Bol-Moufang poate fi găsită în [11, 57, 58, 37, 59].

Aceste identități sunt folosite la cercetarea buclelor triplete [60]. În [25, 27, 29] sunt cercetate varietățile cvazigrupurilor, definite de identitățile Bol-Moufang. În [26] sunt cercetate identitățile Bol-Moufang generalizate. Sunt cercetate buclele Bol-Moufang cu subgrup cu indiciu 2 [28]. În [36] se studiază existența unității în grupoizi cu identități Bol-Moufang.

1.7. Concluzii la capitolul 1

În Capitolul 1 au fost cercetate reperele teoretice ale problemei în cauză. S-au relevat noțiunile și rezultatele generale din teoria cvazigrupurilor, servind ca temelia realizării scopului și obiectivelor lucrării.

Scopul lucrării este de a cerceta morfismele și proprietăţile sistemelor algebrice neasociative cu identităţi de tip Moufang. Pentru atingerea acestui scop au fost definite următoarele obiective:

(1) Cercetarea relațiilor WA-, CI-cvazigrupurilor, tranzitive la stânga și Neumann cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.;

(2) Cercetarea existenței unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea lui F. Fenyves, "Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type", (1969);

(3) Cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite în lucrare (i-cvazigrupuri și WIP-cvazigrupuri generalizate);

(4) Cercetarea G-proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann.

În baza analizei situației actuale în teoria cvazigrupurilor binare formulăm următoarele concluzii:

1. Cercetările efectuate denotă opiniile că aproape toate clasele de cvazigrupuri și bucle posedă proprietate inversă. Cel mai des aceste cvazigrupuri posedă una dintre cele 3 proprietăți de inversabilitate, și anume: inversabilitate la stânga (LIP), la dreapta (RIP), și bilaterală (IP).

2. O problemă actuală este: pentru ce identități în cvazigrupul $(Q,\cdot)$ urmează că $(Q,\cdot)$ este buclă [11].

3. Izotopia, fiind un concept important al teoriei cvazigrupurilor ne dă o posibilitate de a cerceta clasele de cvazigrupuri, trecând cu ajutorul izotopiei la buclă. Uneori bucla este grup, iar proprietățile grupului sunt cunoscute și cu ajutorul grupului, buclei cercetăm proprietățile cvazigrupului dat. Valoarea izotopiei pentru cvazigrupuri urmează din următoarea teoremă simplă: *orice cvazigrup este izotop unei bucle*. Pentru grupuri conceptul de izotopie nu joacă un rol semnificativ, am văzut din **Teorema (Albert) 1.3.3.**.

2. DESPRE UNELE CLASE DE CVAZIGRUPURI CU PROPRIETĂȚI DE INVERSABILITATE (*WA*-, *OWIP*-, *CI*-CVAZIGRUPURI)

Deseori cercetăm cvazigrupurile și buclele din punct de vedere al apropierii lor de grupuri. În grup un rol mare îl joacă și proprietatea de inversabilitate, care se exprimă în felul următor: pentru orice element x există elementul invers x^{-1} astfel, încât se îndeplinește egalitatea $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, și de aici pe baza legii asociative avem $x^{-1}(xy) = y, (yx)x^{-1} = y$. Aceste egalități pot fi luate ca definire a unei clase foarte largi de cvazigrupuri și bucle. Multe dintre clasele de cvazigrupuri și bucle, intens studiate până în prezent, au proprietăți de “inversabilitate”. Printre cele mai cunoscute clase de cvazigrupuri (bucle) cu proprietăți de inversabilitate sunt IP-, LIP-, RIP-, WIP-, CI-cvazigrupurile ș.a. În capitolul dat s-au cercetat WA-, CI-cvazigrupurile și o clasă de cvazigrupuri nouă definită WIP-cvazigrupuri generalizate ($OWIP$-cvazigrupuri).

2.1. Proprietățile *WA*-buclelor la stânga

WA-cvazigrupurile au fost cercetate de către T. Kepka în lucrarea “A note on *WA*-quasigroups” (1978). În lucrarea dată T. Kepka a caracterizat și WA-cvazigrupurile simple [61]. De asemenea *WA*-cvazigrupurile au fost cercetate de către A. M. Ceban (1997) [62].

Definiția 2.1.1. (a se vedea [63, 61]) Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitățile

$$xx \cdot yz = xy \cdot xz \text{ și } xy \cdot zz = xz \cdot yz \quad (2.1)$$

se numește WA-*cvazigrup* sau *cvazigrup semimedial* (pe scurt: SM-cvazigrup) (a se vedea [64, 65]).

Identitățile (2.1) nu sunt echivalente.

Exemplul 2.1.1. *Cvazigrupul* $(Q,*)$ *satisface identităților (2.1).*

*	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	3	2	5	4
2	2	4	0	5	1	3
3	4	2	5	0	3	1
4	3	5	1	4	0	2
5	5	3	4	1	2	0

Lema 2.1.1. Orice WA-cvazigrup verifică următoarele identități:

$$x^2\backslash(yz) = (x\backslash y)(x\backslash z), \quad (2.2)$$

$$(yz)/x^2 = (y/x)(z/x), \quad (2.3)$$

$$x(y\backslash z) = (xy)\backslash(x^2 z), \tag{2.4}$$

$$(y/z)x = (yx^2)/(zx), \tag{2.5}$$

unde $xy = z \iff x\backslash z = y \iff z/y = x$.

Demonstrație. (2.2). Știm că există astfel element z', încât $x^2\backslash yz' = (x\backslash y)(x\backslash z)$.

Noi trebuie să demonstrăm că $z' = z$. Din definiția operației "\" avem

$$yz' = x^2\big((x\backslash y)(x\backslash z)\big) \overset{(2.1)}{=} x(x\backslash y)\cdot x(x\backslash z) \overset{(1.1)}{=} yz.$$

Prin urmare, $z' = z$.

(2.3). Știm că există astfel element z', încât $yz'/x^2 = (y/x)(z/x)$. Noi trebuie să demonstrăm că $z' = z$. Din definiția operației "/" avem

$$yz' = (y/x)(z/x)\cdot x^2 \overset{(2.1)}{=} (y/x)x\cdot(z/x)x \overset{(1.2)}{=} yz.$$

Prin urmare, $z' = z$.

(2.4). Știm că există astfel element z', încât $x(y\backslash z) = (xy)\backslash\big(x^2 z'\big)$. Noi trebuie să demonstrăm că $z' = z$. Avem

$$x^2 z' = (xy)\cdot x(y\backslash z) \overset{(2.1)}{=} x^2\cdot y(y\backslash z) \overset{(1.1)}{=} x^2 z.$$

Prin urmare, $z' = z$.

(2.5). Știm că există astfel element y', încât $(y/z)x = \big(y'x^2\big)/(zx)$. Trebuie să demonstrăm că $y' = y$. Ca și în cazurile precedente

$$y'x^2 = (y/z)x\cdot(zx) \overset{(2.1)}{=} (y/z)z\cdot x^2 \overset{(1.2)}{=} yx^2.$$

Prin urmare, $y' = y$. □

Din definițiile 2.1.1. și 1.5.3. urmează că orice buclă comutativă Moufang este un WA-cvazigrup.

O caracterizare importantă a WA-cvazigrupurilor dată de T. Kepka vedem în următoarea teoremă:

Teorema 2.1.1. (a se vedea [61]) Orice buclă, izotopă unui WA-cvazigrup, este o buclă comutativă Moufang.

Lema 2.1.2. Orice WA-cvazigrup cu unitate la stânga este cvazigrup Bol la stânga.

Demonstrație. Dacă f este unitate la stânga a cvazigrupului $(Q,\cdot)$, atunci $ff = f, L_f x = x$ pentru toți $x \in Q$ și $L_f = \varepsilon$. Din Teorema 2.1.1. urmează că izotopul de forma

$$x \circ y = R_f^{-1}x \cdot L_f^{-1}y = R_f^{-1}x \cdot y, \tag{2.6}$$

cvazigrupului $(Q,\cdot)$ este o buclă comutativă Moufang. Orice buclă comutativă Moufang $(Q,\circ)$ este IP-buclă, adică există așa permutare I, încât

$$Ix \circ (x \circ y) = (y \circ x) \circ Ix = y, \tag{2.7}$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Trecând în ecuația (2.7) la operația " $\cdot$ " obținem

$$R_f^{-1}Ix \cdot \left(R_f^{-1}x \cdot y\right) = y,\ R_f^{-1}IR_f x \cdot (x \cdot y) = y.$$

Prin urmare, $I_l x \cdot (x \cdot y) = y$ pentru

$$I_l = R_f^{-1}IR_f. \tag{2.8}$$

În așa mod $(Q,\cdot)$ este LIP-cvazigrup. Aceasta după rezultatele din [45] arată că $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga. □

Corolarul 2.1.1. Dacă f este unitate la stânga a WA-cvazigrupului $(Q,\cdot)$, atunci translația R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ și automorfism al buclei comutative Moufang $(Q,\circ)$ definită de (2.6).

Demonstrație. Faptul că $R_f \in Aut(Q,\cdot)$ urmează din (2.1) și egalitatea $ff = f$. Mai departe, folosind formula (2.6), avem

$$R_f(x \circ y) = R_f x \circ R_f y, R_f\left(R_f^{-1}x \cdot y\right) = R_f^{-1}R_f x \cdot R_f y, x \cdot R_f y = x \cdot R_f y.$$

Prin urmare $R_f I = IR_f$ și (2.8) capătă forma $I_l = I$. □

Lema 2.1.3. Orice WA-cvazigrup cu unitate la dreapta este cvazigrup Bol la dreapta.

Demonstrație. Fie izotopul $(Q,\circ)$ WA-cvazigrupului $(Q,\cdot)$ este:

$$x \circ y = x \cdot L_e^{-1}y,$$

unde e este unitate la dreapta pentru $(Q,\cdot)$. După Teorema 2.1.1., $(Q,\circ)$ este buclă comutativă Moufang. Fie 1 este unitate în $(Q,\circ)$ și I permutare în Q astfel, încât $x \circ Ix = 1$ pentru orice $x \in Q$. Așa cum $(y \circ x) \circ Ix = y$ pentru orice $x, y \in Q$, avem

$$y = (y \circ x) \circ Ix = (y \cdot L_e^{-1}x) \cdot L_e^{-1}Ix.$$

Prin urmare, $(y \cdot x) \cdot L_e^{-1}IL_e x = y$, de aici $(y \cdot x) \cdot \rho x = y$ pentru $\rho = L_e^{-1}IL_e$. Așadar, $(Q,\cdot)$ este RIP-cvazigrup. Aceasta după rezultatele din [45] înseamnă că $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la dreapta.

□

Lema 2.1.4. Orice WA-cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu proprietate inversă la stânga (la dreapta) este cvazigrup Bol la stânga (la dreapta).

Demonstrație. Așa cum WA-cvazigrupul cu proprietate inversă la stânga este LIP-cvazigrup, demonstrația acestei leme este foarte asemănătoare cu demonstrația Lemei 2.1.2.

Pentru WA-cvazigrupuri cu proprietate inversă la dreapta demonstrația este similară. □

Corolarul 2.1.2. Orice WA-cvazigrup, care este IP-cvazigrup, este cvazigrup Moufang.

Demonstrație. Demonstrația urmează din Lema 2.1.4. și Lema 1.5.1. □

Definiția 2.1.2. (a se vedea [11]) Izotopia de forma

$$x \circ y = L_a^{-1}(L_a x \cdot y) \tag{2.9}$$

se numește *operație derivată la dreapta* pentru $(Q,\cdot)$, generată de elementul a.

Izotopia de forma

$$x \circ y = R_a^{-1}(x \cdot R_a y) \tag{2.10}$$

se numește *operație derivată la stânga* pentru $(Q,\cdot)$ generată de elementul a.

Noțiunea de operații derivate este introdusă în [66, 67].

Teorema 2.1.2. Fie $(Q,\cdot)$ este WA-cvazigrup. Atunci:

(i) operația derivată la dreapta pentru $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga,

(ii) operația derivată la stânga pentru $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la dreapta.

Demonstrație. (i). Din (2.9) urmează că cvazigrupul $(Q,\circ)$ are unitate la stânga, și anume, $f = e_a$, unde $ae_a = a$. De fapt, $e_a \circ y = L_a^{-1}(L_a e_a \cdot y) = L_a^{-1} L_a y = y$. În particular $f \circ f = f$.

Fie următorul izotop al cvazigrupului $(Q,\circ)$

$$x + y = \left(R_f^\circ\right)^{-1} x \circ y, \tag{2.11}$$

unde $R_f^\circ x = x \circ f$. Atunci $(Q, +)$ este buclă cu unitatea f.

Într-adevăr, $f + y = \left(R_f^\circ\right)^{-1} f \circ y = f \circ y = y$, așa cum, dacă $\left(R_f^\circ\right)^{-1} f = z$, atunci $f = \left(R_f^\circ\right) z, f = z \circ f$. Dar, așa cum am menționat deja, $f \circ f = f$, prin urmare, $z = f$. Mai departe avem $x + f = \left(R_f^\circ\right)^{-1} x \circ f = R_f^\circ \left(R_f^\circ\right)^{-1} x = x$.

Folosind (2.9), noi putem scrie (2.11) în felul următor

$$x + y = L_a^{-1}\left(L_a\left(R_f^\circ\right)^{-1} x \cdot y\right).$$

Astfel, bucla $(Q, +)$ este izotop unui WA-cvazigrup $(Q,\cdot)$. Conform Teoremei 2.1.1.: printre buclele izotope WA-cvazigrupului $(Q,\cdot)$ există buclă comutativă Moufang. Amintim că orice buclă, izotopă unei bucle Moufang, este buclă Moufang (a se vedea [11]). Din această cauză $(Q, +)$ este buclă Moufang.

Demonstrația va fi completă, dacă vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\circ)$ este LIP-cvazigrup. Din $x^{-1} + (x + y) = y$, folosind (2.11), vom obține $\left(R_f^\circ\right)^{-1} x^{-1} \circ \left(\left(R_f^\circ\right)^{-1} x \circ y\right) = y$. Acum, notând $\left(R_f^\circ\right)^{-1} x^{-1}$ prin αx și $\left(R_f^\circ\right)^{-1} x$ prin βx, vom obține două permutări α, β ale mulțimii Q, și posibilitatea de a scrie ultima ecuație sub o formă mai convenabilă $\alpha x \circ (\beta x \circ y) = y$, care este echivalentă cu $\alpha\beta^{-1} x \circ (x \circ y) = y$. Ultima arată că $(Q,\circ)$ este LIP-cvazigrup. Aceasta termină demonstrația (i).

(ii). Din (2.10) urmează că cvazigrupul $(Q,\circ)$ are unitate la dreapta $e = f_a$, unde $f_a a = a$. De fapt, $x \circ f_a = R_a^{-1}(x \cdot R_a f_a) = R_a^{-1}(x \cdot a) = x$.

Fie următorul izotop al cvazigrupului (buclei la dreapta) $(Q,\circ)$

$$x + y = x \circ (L_e^{\circ})^{-1} y, \tag{2.12}$$

unde $L_e^{\circ} x = e \circ x$. Atunci $(Q, +)$ este buclă cu unitatea e. Demonstrația e similară demonstrației în (i) și noi o omitem.

Din (2.12), folosind (2.10), avem

$$x + y = R_a^{-1}(x \cdot R_a (L_e^{\circ})^{-1} y).$$

Similar, ca și în (i), noi putem demonstra că $(Q, +)$ este buclă Moufang. Mai departe, din $(y + x) + x^{-1} = y$, folosind (2.12), avem $(y \circ (L_e^{\circ})^{-1} x) \circ (L_e^{\circ})^{-1} x^{-1} = y$. Aceasta arată că $(Q,\circ)$ este RIP-cvazigrup. □

2.2. Automorfisme ale WA-buclelor la stânga

Acest paragraf este dedicat automorfismelor WA-cvazigrupurilor, permutărilor interne ca automorfisme în raport cu unitatea la stânga și în raport cu element arbitrar.

Începem cu un lucru, care este un folclor al cvazigrupurilor:

Lema 2.2.1. În autotopia de cvazigrup oricare două componente determină în mod unic a treiea.

Elementele grupului $I_h(Q,\cdot) = \{\alpha \in M(Q,\cdot) |\ \alpha h = h\}$, unde $M(Q,\cdot)$ este grup, generat de toate translațiile cvazigrupului $(Q,\cdot)$ la stânga și la dreapta, se numesc aplicații interne pentru $(Q,\cdot)$ în raport cu elementul $h \in Q$ (a se vedea [11]). Belousov a demonstrat (a se vedea [11]) că grupul $I_h(Q,\cdot)$ este generat de toate permutările de forma:

$$L_{x,y} = L_{x \circ y}^{-1} L_x L_y, \text{ unde } (x \circ y)h = x \cdot yh,$$

$$R_{x,y} = R_{x \bullet y}^{-1} R_y R_x, \text{ unde } h(x \bullet y) = hx \cdot y,$$

$$T_x = L_{\sigma x}^{-1} R_x, \text{ unde } \sigma = R_h^{-1} L_h.$$

Lema 2.2.2. În WA-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f permutările interne $L_{x,y}, R_{x,y}$ și T_x în raport cu elementul f sunt automorfisme ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Demonstrație. În cazul nostru $L_{x,y} = L_{x \circ y}^{-1} L_x L_y$, unde $x \circ y = R_f^{-1}(x \cdot R_f y) = R_f^{-1} x \cdot y$, după Corolarul 2.1.1. Prin urmare

$$L_{x,y} = L_{R_f^{-1} x \cdot y}^{-1} L_x L_y. \tag{2.13}$$

Mai mult decât atât, $x \cdot y = fx \cdot y = f(x \bullet y) = x \bullet y$ are loc

$$R_{x,y} = R_{x \cdot y}^{-1} R_y R_x. \tag{2.14}$$

Așa cum $\sigma x = R_f^{-1} L_f x = R_f^{-1} x$, avem $T_x = L_{R_f^{-1} x}^{-1} R_x$. Astfel

$$L_{x,y}f = R_{x,y}f = T_xf = f. \tag{2.15}$$

Din (2.1) urmează că pentru orice $a \in Q$ fixat, următoarele triplete (L_a, L_a, L_{a^2}) și (R_a, R_a, R_{a^2}), inversele lor și cu componente diferite – produsul lor sunt autotopii în $(Q,\cdot)$. Prin urmare

$$\left(L^{-1}_{R_f^{-1}x\cdot y}, L^{-1}_{R_f^{-1}x\cdot y}, L^{-1}_{\left(R_f^{-1}x\cdot y\right)^2}\right)(L_x, L_x, L_{x^2})\left(L_y, L_y, L_{y^2}\right) = \left(L_{x,y}, L_{x,y}, L^{-1}_{\left(R_f^{-1}x\cdot y\right)^2}L_{x^2}L_{y^2}\right). \tag{2.16}$$

Aceasta înseamnă că

$$L_{x,y}f \cdot L_{x,y}z = L^{-1}_{\left(R_f^{-1}x\cdot y\right)^2}L_{x^2}L_{y^2}(f \cdot z), \tag{2.17}$$

de unde, folosind (2.15), avem

$$L_{x,y}z = L^{-1}_{\left(R_f^{-1}x\cdot y\right)^2}L_{x^2}L_{y^2}z, \tag{2.18}$$

pentru orice $x, y, z \in Q$. Aceasta împreună cu (2.16), arată că $L_{x,y}$ este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Analog din

$$\left(R^{-1}_{x\cdot y}, R^{-1}_{x\cdot y}, R^{-1}_{(x\cdot y)^2}\right)\left(R_y, R_y, R_{y^2}\right)(R_x, R_x, R_{x^2}) = \left(R_{x,y}, R_{x,y}, R^{-1}_{(x\cdot y)^2}R_{y^2}R_{x^2}\right) \tag{2.19}$$

și

$$\left(L^{-1}_{R_f^{-1}x}, L^{-1}_{R_f^{-1}x}, L^{-1}_{\left(R_f^{-1}x\right)^2}\right)(R_x, R_x, R_{x^2}) = \left(T_x, T_x, L^{-1}_{\left(R_f^{-1}x\right)^2}R_{x^2}\right), \tag{2.20}$$

de aici rezultă că $R_{x,y}$ și T_x sunt automorfisme pentru cvazigrupul $(Q,\cdot)$. □

Corolarul 2.2.1. În orice WA-cvazigrup cu unitate la stânga avem

$$L_{x,y} = L_{x^2,y^2}, R_{x,y} = R_{x^2,y^2},\ \ T_x = T_{x^2}.$$

Demonstrație. Presupunând $y = z$ în (2.1), avem

$$(xy)^2 = x^2 \cdot y^2. \tag{2.21}$$

Din (2.13) și (2.18) urmează că identitatea $L_{x,y} = L_{x^2,y^2}$ va fi demonstrată, dacă vom demonstra că $\left(R_f^{-1}x \cdot y\right)^2 = R_f^{-1}x^2 \cdot y^2$. Aceasta urmează din (2.21) și faptul că R_f (și inversa lui) sunt automorfisme în $(Q,\cdot)$ (a se vedea Corolarul 2.1.1.). De fapt,

$$\left(R_f^{-1}x\right)^2 = R_f^{-1}x \cdot R_f^{-1}x = R_f^{-1}(x \cdot x) = R_f^{-1}x^2.$$

Precum $R_{x,y} = R^{-1}_{(x\cdot y)^2}R_{y^2}R_{x^2}$, după (2.19), din (2.14) și (2.21) obținem $R_{x,y} = R_{x^2,y^2}$.

Identitatea a treia se demonstrează similar. □

Definiție 2.2.1. (a se vedea [68, 40]) Fie $(Q,\cdot)$ un grupoid. Elementul $a \in Q$ se numește *element nuclear la stânga* în $(Q,\cdot)$, dacă $L_{ax} = L_aL_x$ pentru orice $x \in Q$. Mulțimea tuturor elementelor nucleare la stânga în $(Q,\cdot)$ se numește nucleu la stânga $(Q,\cdot)$ și se notează N_l.

Este bine cunoscut (a se vedea [11, 51]) că în cvazigrup mulțimea N_l formează subgrup.

Teorema 2.2.1. În WA-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f permutările interne $L_{x,y}, R_{x,y}$ și T_x față de $a \in Q$ sunt automorfisme în $(Q,\cdot)$ dacă și numai dacă $a \in N_l$ și verifică următoarea identitate $xy \cdot a = xf \cdot ya$.

Demonstrație. În acest caz $L_{x,y} = L_{x\circ y}^{-1} L_x L_y$, unde $x \circ y = R_a^{-1}(x \cdot R_a y)$, $R_{x,y} = R_{x\bullet y}^{-1} R_y R_x$, unde $ax \cdot y = a(x \bullet y)$ și $T_x = L_{\sigma x}^{-1} R_x$, unde $\sigma x = R_a^{-1} L_a x$.

Astfel, ca și în demonstrația Lemei 2.2.2. (identitățile (2.16), (2.17), și (2.18)), putem demonstra că $L_{x,y}, R_{x,y}$ și T_x sunt automorfisme pentru $(Q,\cdot)$. Atunci $L_{x\circ y}^{-1} L_x L_y f = f$, adică $L_x L_y f = L_{x\circ y} f$. Deci, $x \cdot yf = L_{x\circ y} f = R_a^{-1}(x \cdot R_a y) f$, de unde obținem

$$R_f^{-1}(x \cdot yf) = R_a^{-1}(x \cdot R_a y).$$

Deoarece R_f^{-1} este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ (Corolarul 2.1.1.), din ultima identitate obținem $R_f^{-1} x \cdot y = R_a^{-1}(x \cdot R_a y)$, deoarece și $xy = R_a^{-1}\big(R_f x \cdot R_a y\big)$. Astfel,

$$xy \cdot a = xf \cdot ya,$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Mai mult decât atât, $R_{x\bullet y}^{-1} R_y R_x f = f$ este $R_y R_x f = R_{x\bullet y} f$. Prin urmare $xy = x \bullet y$ și $ax \cdot y = a(x \bullet y) = a \cdot xy$, pentru toți $x, y \in Q$. Deci $a \in N_l$.

Afirmația inversă este evidentă. □

Lema 2.2.3. Permutarea $L_a R_a$ este automorfism al WA-cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f dacă și numai dacă $a^2 = f$.

Demonstrație. Deoarece

$$(L_a, L_a, L_{a^2})(R_a, R_a, R_{a^2}) = (L_a R_a, L_a R_a, L_{a^2} R_{a^2}) \tag{2.22}$$

este autotopie în $(Q,\cdot)$, avem

$$L_a R_a f \cdot L_a R_a y = L_{a^2} R_{a^2} y, \tag{2.23}$$

pentru orice $y \in Q$. Această autotopie este automorfism dacă și numai dacă $L_{a^2} R_{a^2} = L_a R_a$. Ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $L_a R_a f = f$, adică, dacă și numai dacă $a^2 = f$. □

Corolarul 2.2.2. Fie $(Q,\cdot)$ este WA-cvazigrup cu unitate la stânga f. Dacă $a^2 = f$, atunci $L_a R_a = L_{a^2} R_{a^2} = R_f$.

Demonstrație. Din (2.22) și faptul că $L_a R_a$ este automorfism pentru $(Q,\cdot)$ urmează $L_a R_a = L_{a^2} R_{a^2}$. Din (2.23), $L_a R_a f = f$ și $a^2 = f$ avem $L_a R_a = R_f$. □

Lema 2.2.4. Permutarea $L_{a^2} R_a$ este automorfism al WA-cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f dacă și numai dacă $a^2 \cdot a = f$.

Demonstrație. Este clar că

$$\left(L_{a^2}, L_{a^2}, L_{(a^2)^2}\right)(R_a, R_a, R_{a^2}) = \left(L_{a^2}R_a, L_{a^2}R_a, L_{(a^2)^2}R_{a^2}\right)$$

este autotopie a cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Prin urmare $L_{a^2}R_a f \cdot L_{a^2}R_a y = L_{(a^2)^2}R_{a^2} y$ are loc pentru orice $y \in Q$. Această autotopie este automorfism dacă și numai dacă $L_{(a^2)^2}R_{a^2} = L_{a^2}R_a$, adică dacă și numai dacă $L_{a^2}R_a f = f$. Ultima condiție este echivalentă cu $a^2 \cdot a = f$. □

2.3. Pseudoautomorfisme și subbucle

Noțiunea de pseudoautomorfism o avem în primul capitol al lucrării (a se vedea [11, 40]). În sensul lui Belousov (a se vedea [11]) avem:

Lema 2.3.1. În WA-cvazigrupul cu unitate la stânga f translația R_a este pseudoautomorfism la dreapta dacă și numai dacă translația L_a este pseudoautomorfism la dreapta și $a^2 = f$.

Demonstrație. Presupunem că R_a este pseudoautomorfism la dreapta cu companionul k, adică cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are autotopia $(L_k R_a, R_a, L_k R_a)$. Conform Lemei 2.2.3., $L_a R_a$, unde $a^2 = f$ este automorfism pentru $(Q,\cdot)$.

Prin urmare

$$(L_k R_a, R_a, L_k R_a)(L_a R_a, L_a R_a, L_a R_a)^{-1} = (L_k L_a^{-1}, L_a^{-1}, L_k L_a^{-1})$$

este, de asemenea, o autotopie pentru $(Q,\cdot)$. Ultima înseamnă că L_a^{-1} este pseudoautomorfism la dreapta pentru $(Q,\cdot)$. Așa cum mulțimea tuturor pseudoautomorfismelor la dreapta în $(Q,\cdot)$ alcătuiește grup (a se vedea [11]), L_a de asemenea este pseudoautomorfism la dreapta pentru $(Q,\cdot)$.

Afirmația inversă este evidentă. □

Lema 2.3.2. Fie $(H,\cdot)$ un subcvazigrup al WA-cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Atunci $(aH,\cdot)$ este subcvazigrup pentru $(Q,\cdot)$, pentru orice $a = a^2$.

Demonstrație. Conform (2.1) avem $ah_1 \cdot ah_2 = a^2 \cdot h_1h_2 = a \cdot h_1h_2 \in aH$. Astfel, mulțimea aH este închisă față de operația de cvazigrup.

Ecuația $ah_1 \cdot x = ah_2$, unde $h_1, h_2 \in H$, are unica soluție $x \in Q$. E evident că $x = ax'$, pentru careva $x' \in Q$. În așa mod, $ah_1 \cdot ax' = a \cdot h_1x' = ah_2$. Prin urmare $h_1x' = h_2$ și deci, $x' \in H$. Atunci $x = ax' \in aH$.

Similar vom demonstra că ecuația $y \cdot ah_1 = ah_2$ are soluție în aH. □

Lema 2.3.3. Fie $(Q,\cdot)$ este WA-cvazigrup cu unitate la stânga f și $(Q,\circ)$ este buclă definită în (2.6). Dacă $(Q,\cdot)$ satisface proprietății inverse, atunci:

(i) $R_f^2 = \varepsilon$, unde ε este permutare identică,

(ii) $I_l = I, I_r = IR_f$ pentru $I_l x \cdot xy = y, xy \cdot I_r y = x, Ix \circ (x \circ y) = y$,

(iii) I_l și I_r sunt automorfisme ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$ și buclei $(Q,\circ)$,

(iv) $I_l I_r = R_f, I_l I_r = I_r I_l$.

Demonstrație. (i). De fapt, $I_l f = I_r f = f$. Astfel $xf \cdot f = x$, pentru toți $x \in Q$. Așa dar, $R_f^2 = \varepsilon$.

(ii). Deoarece $x \circ y \overset{(2.6)}{=} R_f^{-1} x \cdot y = R_f x \cdot y$, după $(i), R_f$ este automorfism în $(Q,\cdot)$ și corespunde buclei comutative Moufang $(Q,\circ)$ (Teorema 2.1.1. și Corolarul 2.1.1.).

Trecem acum la ecuația $I_l x(x \cdot y) = y$ și folosim operația buclei "$\circ$", avem $R_f I_l x \circ \left(R_f x \circ y\right) = y$. Astfel $R_f I_l R_f^{-1} x \circ (x \circ y) = y$.

Prin urmare, $I = R_f I_l R_f^{-1}$ și $I_l = R_f^{-1} I R_f = I$, deoarece în $(Q,\circ)$ automorfismele R_f și I comutează.

Analog, trecând în ecuația $(x \cdot y) I_r y = x$ după operația buclei "$\circ$", obținem $R_f\left(R_f x \circ y\right) \circ I_r y = x$. Astfel, $\left(x \circ R_f y\right) \circ I_r y = x$ și $(x \circ y) \circ I_r R_f^{-1} y = x$. Deci, $I = I_r R_f^{-1}$ și $I_r = I R_f$.

(iii). Este corolar pentru (ii) și (iii).

(iv). Deoarece $I = I_l$ și $I_r = I R_f$, avem $I_l I_r = I^2 R_f = R_f$. Analog, $I_r I_l = I R_f I = R_f$. □

2.4. *WIP*-cvazigrupuri generalizate (*OWIP*-cvazigrupuri)

Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are proprietate inversabilă slabă ($(Q,\cdot)$ este WIP-cvazigrup), dacă $x \cdot I(y \cdot x) = Iy$, pentru orice $x, y \in Q$ și careva permutare a mulțimii Q [9, 10, 69].

Buclele cu proprietate inversă slabă detaliat au fost cercetate de către Osborn [70]. În particular, în [70] este construit exemplu de *WIP*-buclă, care este G-buclă. Tot în această sursă sunt demonstrate și alte proprietăți ale *WIP*-buclelor. Introducând o permutare α în identitatea dată s-a obținut o clasă nouă de cvazigrupuri, anume *OWIP*-cvazigrupuri.

În acest paragraf s-au cercetat careva proprietăți ale *WIP*-cvazigrupurilor generalizate. Este o clasă nouă de cvazigrupuri introdusă de către Florea I. A. și autoarea tezei.

Definiția 2.4.1. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *$OWIP$-cvazigrup*, dacă $(Q,\cdot)$ verifică identitatea

$$x \cdot I(y \cdot \alpha x) = Iy, \tag{2.24}$$

pentru orice $x, y \in Q$, unde I și α careva permutări ale mulțimii Q.

Următorul cvazigrup este $OWIP$-cvazigrup, însă nu este WIP-cvazigrup.

Exemplul 2.4.1. *Avem* $I = (0\ 1), \alpha = (1\ 2)$.

*	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

Lema 2.4.1. $OWIP$-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ verifică egalitatea

$$I^{-1}(xz)\cdot\alpha x = I^{-1}z, \qquad (2.25)$$

pentru orice $x,z\in Q$.

Demonstrație. Din (2.24) avem $I^{-1}\big(x\cdot I(y\cdot\alpha x)\big)=y, I^{-1}\big(x\cdot I(y\cdot\alpha x)\big)\cdot\alpha x=y\cdot\alpha x$, $I^{-1}(xz)\cdot\alpha x=I^{-1}z$, unde $y\cdot\alpha x=I^{-1}z$. □

Teorema 2.4.1. $OWIP$-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este izotop unei LIP-bucle $(Q,\circ)$, unde

$$x\circ y=R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y, xy=R_a x\circ L_b y \qquad (2.26)$$

dacă și numai dacă $(Q,\cdot)$ verifică următoarea egalitate

$$b\cdot I(I^{-1}(by)\cdot x)=R_{e_b}^{-1}\big(b\cdot I(I^{-1}b\cdot x)\big)\cdot y, \qquad (2.27)$$

unde $be_b=b,\ R_{e_b}v=ve_b$.

Demonstrație. Fie $(Q,\circ)$ este LIP-buclă, adică $(Q,\circ)$ verifică următoarea egalitate

$$I_l x\circ(x\circ y)=y.$$

Folosind (2.26) avem $R_a^{-1}I_l x\cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y)=y$. Aplicăm I^{-1} asupra ambelor părți ale ultimii egalități și obținem $I^{-1}\Big(R_a^{-1}I_l x\cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y)\Big)=I^{-1}y$. Înmulțim ultima egalitate din dreapta cu expresia $\alpha R_a^{-1}I_l x$ și avem

$$I^{-1}\Big(R_a^{-1}I_l x\cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y)\Big)\cdot\alpha R_a^{-1}I_l x=I^{-1}y\cdot\alpha R_a^{-1}I_l x.$$

Din egalitatea (2.25) obținem $I^{-1}L_b^{-1}(R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y)=I^{-1}y\cdot\alpha R_a^{-1}I_l x$. Mai departe efectuăm următoarele substituții $x\to R_a x, y\to L_b y$, obținem $I^{-1}L_b^{-1}(xy)=I^{-1}L_b y\cdot\alpha R_a^{-1}I_l R_a x$.

Dacă $y=e_b$, unde $be_b=b$, atunci

$$I^{-1}L_b^{-1}R_{e_b}x=L_{I^{-1}b}\alpha R_a^{-1}I_l R_a x, \alpha R_a^{-1}I_l R_a x=L_{I^{-1}b}^{-1}I^{-1}L_b^{-1}R_{e_b}x,$$

$$I^{-1}L_b^{-1}(xy)=I^{-1}L_b y\cdot L_{I^{-1}b}^{-1}I^{-1}L_b^{-1}R_{e_b}x, R_{e_b}^{-1}L_b I L_{I^{-1}b}x\cdot y=L_b I(I^{-1}L_b y\cdot x),$$

$$R_{e_b}^{-1}\big(b\cdot I(I^{-1}b\cdot x)\big)\cdot y=b\cdot I(I^{-1}(by)\cdot x).$$

Am obținut (2.27).

Invers. Fie (2.27) are loc. Atunci avem $L_b I(I^{-1}L_b y\cdot x)=\varphi x\cdot y$, unde $\varphi x=R_{e_b}^{-1}L_b I L_{I^{-1}b}x$. Mai putem scrie $I^{-1}L_b y\cdot\varphi^{-1}x=I^{-1}L_b^{-1}(xy), I^{-1}y\cdot\varphi^{-1}R_a^{-1}x=I^{-1}L_b^{-1}(R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y)$.

Prin urmare următoarea egalitate este adevărată

$$I^{-1}\Big(\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y)\Big)\cdot\alpha(\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x)\overset{(2.25)}{=}I^{-1}L_b^{-1}(R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y)=$$
$$=I^{-1}y\cdot\varphi^{-1}R_a^{-1}x,$$

$$I^{-1}\Big(\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y)\Big)=I^{-1}y, R_a^{-1}(R_a\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x)\cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}x\cdot L_b^{-1}y)=y,$$

$R_a\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}x\circ(x\circ y)=y, I_l x\circ(x\circ y)=y$, unde $I_l=R_a\alpha^{-1}\varphi^{-1}R_a^{-1}$. □

Cercetăm cazul, când orice buclă $(Q,\circ)$, izotopă unui $OWIP$-cvazigrup $(Q,\cdot)$, este LIP-buclă. În acest caz cvazigrupul $(Q,\cdot)$ verifică următoarea identitate

$$z \cdot I(I^{-1}(zy) \cdot x) = R_{e_z}^{-1}\big(z \cdot I(I^{-1}z \cdot x)\big) \cdot y, \tag{2.28}$$

pentru orice $x, y, z \in Q$, unde I este permutare a mulțimii $Q, ze_z = z, R_{e_z}t = te_z$.

Lema 2.4.2. Dacă cvazigrupul $(Q,\cdot)$ verifică identitatea (2.28), atunci în $(Q,\cdot)$ este adevărată identitatea

$$z \cdot I(y \cdot \alpha z) = Iy, \tag{2.29}$$

pentru orice $z, y \in Q$, unde α este aplicația mulțimii Q în sine. Iar dacă α este permutare, atunci $(Q,\cdot)$ este $OWIP$-cvazigrup.

Demonstrație. Ecuația $I(I^{-1}c \cdot x) = e_c$, unde $ce_c = c$ are soluție unică. Într-adevăr,

$$x = (IL_{I^{-1}c})^{-1}e_c = L_{I^{-1}c}^{-1}I^{-1}e_c = \alpha c.$$

Dacă înlocuim în (2.28) $x = L_{I^{-1}z}^{-1}I^{-1}e_z = \alpha z$, atunci $I(I^{-1}(zy) \cdot \alpha z) = y, z \cdot I(I^{-1}(zy) \cdot \alpha z) = zy$, unde $t = I^{-1}(zy)$. □

Teorema 2.4.2. Orice buclă $(Q,\circ)$, izotopă unui cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu identitatea (2.28), este buclă Bol la stânga [11].

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm acel fapt pentru bucla $(Q,\circ)$, unde izotopia are forma (2.26).

Din (2.28) și (2.26) avem

$$R_a z \circ L_b I(R_a I^{-1}(R_a z \circ L_b y) \circ L_b x) = R_a R_{e_z}^{-1}\big(z \cdot I(I^{-1}z \cdot x)\big) \circ L_b y.$$

Dacă $L_b y = e$, unde e este unitate a buclei $(Q,\circ)$, $e = ba$, atunci avem

$$R_a z \circ L_b I(R_a I^{-1}(R_a z \circ L_b y) \circ L_b x) = \big(R_a z \circ L_b I(R_a I^{-1} R_a z \circ L_b x)\big) \circ L_b y.$$

Facem următoarele substituții: $z \to R_a^{-1}z, y \to L_b^{-1}y, x \to L_b^{-1}x$ și obținem

$$z \circ L_b I(R_a I^{-1}(z \circ y) \circ x) = \big(z \circ L_b I(R_a I^{-1}z \circ x)\big) \circ y.$$

Dacă $z = e$, apoi obținem $L_b I(R_a I^{-1}y \circ x) = \varphi x \circ y$, unde $\varphi x = L_b I(R_a I^{-1}e \circ x)$, φ este permutare a mulțimii Q. Prin urmare obținem următoarea identitate

$$z \circ \big(\varphi x \circ (z \circ y)\big) = \big(z \circ (\varphi x \circ z)\big) \circ y \text{ sau } z \circ \big(x \circ (z \circ y)\big) = \big(z \circ (x \circ z)\big) \circ y, \ \forall\, x, y, z \in Q.$$

Am obținut că $(Q,\circ)$ este buclă Bol la stânga. □

Corolarul 2.4.1. Dacă cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea (2.28) este LIP-cvazigrup, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga.

Analog se prezintă și rezultatele la dreapta. Unele rezultate ale acestei lucrări sunt publicate în [71].

2.5. Despre definirea *CI*-cvazigrupurilor

CI-buclele au fost definite de către Rafael Artzy [18]. În [18] se demonstrează că J este un automorfism al buclei $(Q,\cdot)$. V. D. Belousov și B. V. Țurkan au definit CI-cvazigrupurile în [19]. Unele aplicații ale CI-cvazigrupurilor în criptografie sunt prezentate în [72, 35].

Definiția 2.5.1. Bucla $(Q,\cdot)$, ce verifică una din identitățile echivalente $x \cdot yJx = y, xy \cdot Jx = y$, unde J este o bijecție a mulțimii Q astfel încât $x \cdot Jx = 1$, se numește CI-*buclă*.

În [18] este demonstrat că J este automorfism al buclei $(Q,\cdot)$.

Definiția 2.5.2. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea $xy \cdot Jx = y$, unde J este o aplicație a mulțimii Q în Q, se numește CI-*cvazigrup* [19].

Observăm că în acest caz aplicația J este permutare a mulțimii Q [19]. În orice CI-cvazigrup permutarea J este unică ([41], Lema 2.25).

Definiția 2.5.3. [19] Grupoidul $(Q,\cdot)$ cu identitatea

$$xy \cdot I_r x = y, \tag{2.30}$$

unde I_r este aplicația mulțimii Q în sine, se numește CI-*grupoid la stânga*.

Grupoidul $(Q,\cdot)$ cu identitatea

$$I_l x \cdot yx = y, \tag{2.31}$$

unde I_l este aplicația mulțimii Q în sine, se numește CI-*grupoid la dreapta*.

Grupoidul $(Q,\cdot)$ cu ambele identități (2.30) și (2.31) se numește CI-*grupoid* [30].

În articolul fundamental [19] sunt dovedite următoarele fapte: orice CI-grupoid este cvazigrup, în CI-cvazigrup identitățile (2.30) și (2.31) sunt echivalente, orice CI-grupoid la stânga este cvazigrup la stânga.

Din rezultatele lui V. Izbaș și N. Labo urmează că CI-grupoidul la stânga, în care aplicația I_r este bijectivă, este CI-cvazigrup. Orice CI-grupoid finit la stânga este un CI-cvazigrup. Orice CI-grupoid este un CI-cvazigrup [30].

Exemplul 2.5.1. *Cvazigrupul* $(Q,*)$ *este CI-cvazigrup.*

*	0	1	2	3	4	5
0	3	4	5	1	0	2
1	5	3	4	2	1	0
2	4	5	3	0	2	1
3	2	0	1	3	5	4
4	0	1	2	5	4	3
5	1	2	0	4	3	5

2.6. Izotopii CI-cvazigrupului

Propoziția 2.6.1. CI-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este izotop unui grup $(Q,\circ)$, cu izotopia (2.26) dacă și numai dacă $(Q,\cdot)$ verifică identitatea

$$\Big(x\big(y(zu)\big)\Big) \cdot v = y \cdot \big((xz \cdot v) \cdot u\big), \tag{2.32}$$

pentru orice $x, y, z, u, v \in Q$.

Demonstrație. Fie $(Q,\circ)$ din (2.26) este grup, adică în $(Q,\circ)$ are loc legea asociativă

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z). \tag{2.33}$$

Atunci din (2.33) și (2.26) avem $R_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot L_b^{-1}z = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}z)$. Efectuăm următoarele substituții $x \to R_a x, y \to L_b y,\ z \to L_b z$ și obținem

$$R_a^{-1}(xy) \cdot z = x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}L_b y \cdot z). \tag{2.34}$$

Din $xy \cdot Jx = y$ avem $R_{Jx}L_x = \varepsilon$, unde ε este permutarea identică a mulțimii Q. Am obținut

$$L_x^{-1} = R_{Jx}, R_x^{-1} = L_{J^{-1}x}. \tag{2.35}$$

Folosim (2.35) în (2.34)

$$\Big(J^{-1}a \cdot \big(x \cdot (y \cdot Jb)\big)\Big) \cdot z = x \cdot \Big(\big((J^{-1}a \cdot y) \cdot z\big) \cdot Jb\Big). \tag{2.36}$$

Deoarece bucla, izotopă unui grup, este de asemenea grup, atunci egalitatea (2.36) are loc în $(Q,\cdot)$ $\forall\ a, b, x, y, z \in Q$, adică în $(Q,\cdot)$ este adevărată identitatea (2.32).

Invers. Fie în $(Q,\cdot)$ are loc (2.32). Trecem de la operația " $\cdot$ " la operația " $\circ$ ", folosind (2.26)

$$R_a\Big(x\big(y(zu)\big)\Big) \circ L_b v = R_a y \circ L_b(R_a(R_a(R_a x \circ L_b z) \circ L_b v) \circ L_b u).$$

Dacă $L_b v = e$, unde e este unitate a buclei $(Q,\circ)$, atunci avem

$$\big(R_a y \circ L_b(R_a^2(R_a x \circ L_b z) \circ L_b u)\big) \circ L_b v = R_a y \circ L_b(R_a(R_a(R_a x \circ L_b z) \circ L_b v) \circ L_b u).$$

Simplificăm ultima egalitate

$$\big(y \circ L_b(R_a^2(x \circ z) \circ u)\big) \circ v = y \circ L_b(R_a(R_a(x \circ z) \circ v) \circ u).$$

Dacă $y = e$, avem

$$\big(y \circ L_b(R_a^2(x \circ z) \circ u)\big) \circ v = y \circ (L_b(R_a^2(x \circ z) \circ u) \circ v), (y \circ t) \circ v = y \circ (t \circ v),$$

unde $t = L_b(R_a^2(x \circ z) \circ u)$. Am obținut că $(Q,\circ)$ este grup. □

Exemplul 2.6.1.

1. *Cvazigrupul $(Q,*)$ este CI-cvazigrup în care nu are loc identitatea (2.36). Aici* $J = (0\ 1)(3\ 4)$.

*	0	1	2	3	4
0	2	4	1	3	0
1	3	2	0	1	4
2	1	0	2	4	3
3	0	3	4	2	1
4	4	1	3	0	2

2. *Următorul cvazigrup este CI-cvazigrup în care are loc identitatea (2.32). Avem* $J = (0)(1)(2)(3)(4)$.

*	0	1	2	3	4
0	0	2	1	4	3
1	2	3	0	1	4
2	1	0	4	3	2
3	4	1	3	2	0
4	3	4	2	0	1

Se pune întrebarea, dacă cvazigrupul arbitrar $(Q,\cdot)$ verifică identitatea (2.32), este oare $(Q,\cdot)$ un CI-cvazigrup?

Propoziția 2.6.2. Dacă cvazigrupul arbitrar $(Q,\cdot)$ verifică identitatea (2.32), atunci $(Q,\cdot)$ este un CI- cvazigrup.

Demonstrație. Înlocuim în (2.32) $z = y, u = y^{-1}$, unde $yy^{-1} = e_y$ și obținem

$$xy \cdot v = y \cdot ((xy \cdot v)y^{-1}) \text{ sau } t = y(ty^{-1}),$$

unde $t = xy \cdot v$.

Din $t = y(ty^{-1})$ urmează $ty^{-1} = \big(y(ty^{-1})\big)y^{-1},\ x = (yx) \cdot y^{-1}$, unde $x = ty^{-1}$. Avem $x = (yx) \cdot Jy$, unde $y^{-1} = Jy$, $(Q,\cdot)$ este CI-cvazigrup. □

Propoziția 2.6.3. Dacă orice buclă $(Q,\circ)$, izotopă unui CI-cvazigrup $(Q,\cdot)$, este comutativă, atunci cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este medial, iar $(Q,\circ)$ este grup abelian.

Demonstrație. Este suficient de precăutat izotopul $(Q,\circ)$, unde izotopia este dată de egalitatea (2.26). Fie $(Q,\circ)$ este buclă comutativă, adică este dat $x \circ y = y \circ x, \forall\, x, y \in Q$. Atunci avem $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y = R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x$. Acum aplicăm (2.35) și obținem $L_{J^{-1}a}x \cdot R_{Jb}y = L_{J^{-1}a}y \cdot R_{Jb}x$ sau $(J^{-1}a \cdot x)(y \cdot Jb) = (J^{-1}a \cdot y)(x \cdot Jb)$. Ultima egalitate are loc $\forall a, b, x, y \in Q$. Prin urmare $(Q,\cdot)$ este cvazigrup medial, iar $(Q,\circ)$ este grup abelian (pe baza Teoremei lui Toyoda) [11]. □

Propoziția 2.6.4. Bucla $(Q,\circ)$, izotopă unui CI-cvazigrup $(Q,\cdot)$, unde izotopia este dată de (2.26), va fi CI-buclă dacă și numai dacă $(Q,\cdot)$ verifică egalitatea

$$(x \cdot by)a = (x \cdot ba)y, \tag{2.37}$$

pentru orice $x, y \in Q$ [19].

Demonstrație. Fie $(Q,\circ)$ este CI-buclă, adică în $(Q,\circ)$ are loc $(x \circ y) \circ x^{-1} = y$, unde $x \circ x^{-1} = e$, e este unitate a buclei $(Q,\circ)$, unde $e = ba, x^{-1} = J'x$. Atunci avem

$$R_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot L_b^{-1}x^{-1} = y. \tag{2.38}$$

În orice CI-cvazigrup $(Q,\cdot)$ are loc $J^{-1}x(yx) = y$. Într-adevăr, avem $(xy)Jx = y$, $x(xy \cdot Jx) = xy,\ x(z \cdot Jx) = z$, unde $z = xy$, de unde avem

$$J^{-1}x(zx) = z. \tag{2.39}$$

Înmulțim din stânga (2.38) cu $J^{-1}L_b^{-1}x^{-1}$ și obținem pe baza (2.39)

$$R_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) = J^{-1}L_b^{-1}x^{-1} \cdot y \text{ sau } R_a^{-1}(xy) = J^{-1}L_b^{-1}J' R_a x \cdot L_b y.$$

Fie $y = e_b$, unde $be_b = b$. Atunci avem

$$R_a^{-1}(xy) = R_b^{-1}R_a^{-1}R_{e_b}x \cdot L_b y,\ R_{e_b}^{-1}R_a R_b x \cdot y = R_a(x \cdot L_b y) = (x \cdot by)a.$$

Dacă $y = a$, avem $(x \cdot ba)y = (x \cdot by)a$.

Invers. Este dat (2.37) sau $R_a(x \cdot L_b y) = R_{ba}x \cdot y$, sau $xy = R_a^{-1}(R_{ba}x \cdot L_b^{-1}y), (xy)Jx = R_a^{-1}(R_{ba}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot Jx$, de unde urmează $y = R_a^{-1}(R_{ba}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot Jx$. În ultima egalitate trecem la operația " $\circ$ ", folosind (2.26)

$$R_a^{-1}(R_a^{-1}R_a R_{ba}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot L_b^{-1}L_b Jx = y, (x \circ y) \circ J'x = y, \text{ unde } J' = L_b J R_{ba}^{-1} R_a^{-1}.$$

□

Acum trecem la studiul cvazigrupului $(Q,\cdot)$ în care egalitatea (2.37) are loc $\forall a, b, x, y \in Q$.

Propoziția 2.6.5. Orice cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu identitatea

$$(x \cdot yz)t = (x \cdot yt)z, \tag{2.40}$$

$\forall x, y, z, t \in Q$ este CI-cvazigrup și medial [19].

Demonstrație. În orice cvazigrup $(Q,\cdot)$ ecuația $ax = e_a$, unde $ae_a = a$, este rezolvabilă și soluția depinde numai de a. Avem $a \cdot I(a) = e_a$, unde I este aplicația Q în Q. În (2.40) substituim $y = x, t = I(x)$, unde $x \cdot I(x) = e_x$, avem $(x \cdot xz)I(x) = xz$ sau $(xv)I(x) = v$, unde $v = xz, \forall\ v, x \in Q$. Am obținut că $(Q,\cdot)$ este CI-cvazigrup.

Mai departe luăm în considerare bucla $(Q,\circ)$, izotopă unui cvazigrup $(Q,\cdot)$, unde izotopia este dată prin egalitatea (2.26). În egalitatea (2.40) trecem de la operația " $\cdot$ " la operația " $\circ$ ", folosind (2.26):

$$R_a\big(R_a x \circ L_b(R_a y \circ L_b z)\big) \circ L_b t = R_a(x \cdot yt) \circ L_b z.$$

Dacă $L_b z = e$, e este unitate a buclei $(Q,\circ)$, atunci avem

$$R_a\big(R_a x \circ L_b(R_a y \circ L_b z)\big) \circ L_b t = (R_a(R_a x \circ L_b R_a y\,) \circ L_b t) \circ L_b z.$$

Efectuăm substituțiile $x \to R_a^{-1}x, y \to R_a^{-1}y, z \to L_b^{-1}z, t \to L_b^{-1}t$ și obținem

$$R_a\big(x \circ L_b(y \circ z)\big) \circ t = (R_a(x \circ L_b y) \circ t) \circ z.$$

Dacă $t = e$, avem $(R_a(x \circ L_b y) \circ z) \circ t = (R_a(x \circ L_b y) \circ t) \circ z$. Notăm $R_a(x \circ L_b y) = v$, avem $(v \circ z) \circ t = (v \circ t) \circ z$. Dacă $v = e$, atunci avem $z \circ t = t \circ z, \forall\, z, t \in Q$. $(Q,\circ)$ este buclă comutativă.

Mai departe urmează $(z \circ v) \circ t = z \circ (v \circ t)$. Am obținut că $(Q,\circ)$ este grup abelian. Faptul că $(Q,\cdot)$ este cvazigrup medial urmează din Propoziția 2.6.3. și Teorema lui Albert [11]. □

2.7. Concluzii la capitolul 2

În Capitolul 2 sunt cercetate cvazigrupurile cu proprietăți de inversabilitate și anume WA- și CI-cvazigrupuri. S-a definit o clasă nouă de cvazigrupuri $OWIP$-cvazigrupuri, o generalizare pentru WIP-cvazigrupuri.

În baza cercetărilor efectuate în Capitolul 2 și a rezultatelor obținute putem formula următoarele concluzii:

1. S-a obținut că orice WA-cvazigrup, care este un IP-cvazigrup, este cvazigrup Moufang. S-a demonstrat că în WA-cvazigrup operația derivată la dreapta este un cvazigrup Bol la stânga, iar operația derivată la stânga este cvazigrup Bol la dreapta. Sunt date condiții necesare și suficiente când în WA-cvazigrupul cu unitate la stânga permutările interne sunt automorfisme în raport cu elementul $a \in Q$ [73].
2. S-a găsit condiția când $OWIP$-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este izotop al unei LIP-bucle $(Q,\circ)$. Presupunând că orice izotop al buclei *OWIP*-cvazigrupului este o *LIP*-buclă, am obținut o identitate nouă în acest cvazigrup pentru care s-a găsit relația cu bucla Bol la stânga [74].
3. S-a găsit condiția necesară și suficientă (identitatea 2.36), când CI-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este izotop unui grup $(Q,\circ)$. Presupunând că orice buclă izotopă unui CI-cvazigrup este comutativă, obținem că cvazigrupul este medial, iar bucla este un grup abelian [75, 76, 77].

În acest capitol sunt realizate obiectivele, care se referă la cercetarea relațiilor WA-, CI-cvazigrupurilor cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a. și la cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite (anume $OWIP$-cvazigrupuri).

Rezultatele expuse în Capitolul 2 au fost publicate în [73, 74, 75, 77, 76].

3. DESPRE O CLASĂ DE *i*-CVAZIGRUPURI. UNITĂȚI LA DREAPTA (LA STÂNGA) ÎN CVAZIGRUPURI DE TIP BOL-MOUFANG

În acest capitol s-a cercetat o clasă nouă de cvazigrupuri numită i-cvazigrupuri introdusă de către elevul lui V. D. Belousov, I. A. Florea împreună cu autoarea tezei. S-a descris relația dintre unele tipuri de cvazigrupuri care conțin unitate la stânga cu cvazigrupurile Bol și Moufang (în sensul lui Belousov) și sunt caracterizate anumite pseudoautomorfisme ale acestor cvazigrupuri (în sensul lui Pflugfelder).

K. Kunen în lucrarea *Quasigroups, loops and associative laws*, (1996) a studiat existența unității în cvazigrupurile cu asociativitate slabă și a soluționat complet problema existenței unității bilaterale în cvazigrupurile cu identități de tip Bol-Moufang, pentru fiecare dintre cele 60 de identități. Kunen, de asemenea, arată care dintre identitățile evidențiate implică legile: asociativă, flexibilitătii, alternativă la dreapta (la stânga), astfel soluționând problema pentru cvazigrupurile cu asociativitate pentru fiecare dintre cele 60 de identități și pentru unele identități existența unității unilaterale. A rămas deschisă problema existenței unității unilaterale pentru identitățile lui Fenyves.

Ultimul paragraf al acestui capitol este dedicat cercetării celor 60 de identități de tip Bol-Moufang enumerate de Fenyves, la existența unității unilaterale. S-a folosit lista celor 60 de identități de tip Bol-Moufang, cercetate în [60]. A se vedea Tabelul 3.1 mai jos [36]. Există și alte definiții ale identităților de tip Bol-Moufang și, prin urmare, alte clasificări ale acestor identități [29, 26].

3.1. *i*-cvazigrupuri cu distributant nevid

În acest paragraf s-a cercetat distributantul i-cvazigrupurilor. Cunoaștem că nu orice cvazigrup are distributant nevid. Începem cu definiția distributantului:

Definiția 3.1.1. *Distributantul* D al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ este format din toate elementele d ale mulțimii Q astfel încât $(x \cdot y) \cdot d = (x \cdot d) \cdot (y \cdot d), d \cdot (x \cdot y) = (d \cdot x) \cdot (d \cdot y)$, pentru orice $x, y \in Q$ [78].

Definiția 3.1.2. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește i-*cvazigrup*, dacă $(Q,\cdot)$ verifică identitatea

$$x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x), \tag{3.1}$$

unde $x, y, z \in Q$.

Exemplul 3.1.1. *Exemple de* i*-cvazigrupuri.*

1. *Fie* $(C, +,\cdot)$ *inelul numerelor complexe. Fie* $x \circ y = ix - y$, *pentru orice* $x, y \in C$ *și element fixat* $i^2 = -1$. *Atunci* $(C,\circ)$ *este i-cvazigrup.*

2. *Orice grup $(G,\cdot)$ în care elementele de forma x^2 se află în centrul lui, este i-cvazigrup.*
3. *O buclă comutativă Moufang este un i-cvazigrup. De asemenea, un cvazigrup Bol la stânga este un i-cvazigrup.*
4. *Există patru i-cvazigrupuri induse de grupul Z_5:*

$$x \cdot_1 y = (x + y)(mod 5), \qquad x \cdot_2 y = (2x + 4y)(mod 5),$$

$$x \cdot_3 y = (3x + 4y)(mod 5), \qquad x \cdot_4 y = (4x + y)(mod 5)$$

și cinci i-cvazigrupuri cu unitate care nu sunt induse de Z_5:

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	5	4	1
3	3	5	4	2	1
4	4	1	2	5	3
5	5	4	1	3	2

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	1	5	3
3	3	1	5	2	4
4	4	5	2	3	1
5	5	3	4	1	2

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	5	3	1
3	3	5	2	1	4
4	4	3	1	5	2
5	5	1	4	2	3

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	5	1	3	4
3	3	1	4	5	2
4	4	3	5	2	1
5	5	4	2	1	3

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	5	4	1	3
3	3	4	2	5	1
4	4	1	5	3	2
5	5	3	1	2	4

Remarcă 3.1.1. Translația R_f, unde f este unitate la stânga a cvazigrupului $(Q,\cdot)$, este notată prin R. Într-un i-cvazigrup cu unitate la stânga $R^2 = \varepsilon$ (translația identică) și $R^{-1} = R$.

Teorema 3.1.1. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este RIP-cvazigrup, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și distributantul $D = \{f\}$.

Demonstrație. Din egalitatea (3.1), pentru $y = x$, avem

$$x^2 z = zx \cdot x, \tag{3.2}$$

pentru toți $x, z \in Q$.

Din egalitatea $yx \cdot x^{-1} = y$ și (3.2) avem $(x^2 z)x^{-1} \cdot x^{-1} = z$. Atunci

$$x^{-2}(x^2 z) = z, \tag{3.3}$$

pentru toți $x, z \in Q$.

Din (3.1), (3.3) și (3.2) obținem $(x(x^{-2}) \cdot z) = x^{-2}(x^2 z) = z$. Atunci avem

$$x(x(x^{-2}) \cdot z) = x(I_l x \cdot z) = z, \tag{3.4}$$

unde $I_l x = x \cdot x^{-2}$. În (3.4) facem substituția $z \to xz$ și obținem $I_l x \cdot xz = z$. Am obținut că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este un IP-cvazigrup, unde $I_l x \cdot xy = y$ și $yx \cdot I_r x = y$.

Mai departe demonstrăm existența unității la stânga f. Avem $ye_y \cdot e_y^{-1} = y,\ ye_y^{-1} = y$, $e_y^{-1} = e_y$. Am obținut $ze_y \cdot e_y^{-1} = ze_y \cdot e_y = e_y^2 z = z, e_y^2 = f, fz = z,$ pentru orice $z \in Q$. Din egalitatea $fy \cdot y^{-1} = f$ avem $yy^{-1} = f, y^{-1} = {}^{-1}yf$ sau $I_r y = R_f I_l y, I_r = R_f I_l,$ atunci $I_r I_l = R, (I_r I_l)^{-1} = R^{-1} = R$ și $I_r I_l = I_l I_r$.

În orice IP-cvazigrup are loc

$$^{-1}((xy)^{-1}) = {}^{-1}\left({}^{-1}y \cdot {}^{-1}x\right) = ({}^{-1}x)^{-1} \cdot \left({}^{-1}y\right)^{-1},\ I_l I_r(xy) = I_r I_l x \cdot I_r I_l y.$$

Am obținut autotopia $T = (I_r I_l, I_r I_l, I_l I_r) = (R, R, R)$, unde R este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, adică $(xy)f = xf \cdot yf$. Deci, distributantul $D = \{f\}$.

Rămâne să demonstrăm că $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang, adică are loc identitatea $x(y \cdot xz) = \big((x \cdot yf)x\big)z$ (știm că acest cvazigrup are unitate la stânga f). Pentru aceasta este destul să demonstrăm că în $(Q,\cdot)$ are loc autotopia $T = \left(R_x L_x R_f, L_x^{-1}, L_x\right)$.

Din egalitatea $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ avem autotopia

$$T_1 = (L_x^{-1}, R_x^2, L_x) \text{ și } \big(x(xy \cdot z)\big)^{-1} = \big(y(zx \cdot x)\big)^{-1}, {}^{-1}(xy \cdot z) \cdot {}^{-1}x = {}^{-1}(zx \cdot x) \cdot {}^{-1}y,$$
$$(z^{-1}(xy)^{-1}) \cdot {}^{-1}x = (x^{-1}(zx)^{-1})^{-1} \cdot {}^{-1}y\,.$$

Am obținut

$$z^{-1}\left({}^{-1}y \cdot {}^{-1}x\right) \cdot {}^{-1}x = \left(x^{-1} \cdot \left({}^{-1}x \cdot {}^{-1}z\right)\right) \cdot {}^{-1}y. \tag{3.5}$$

Având în vedere egalitățile $I_l^2 = I_r^2 = \varepsilon, R_f^2 = \varepsilon, R_f = I_r I_l = I_l I_r$, efectuăm în (3.5) următoarele substituții $z \to z^{-1}, y \to y^{-1}, x \to x^{-1}$ și obținem $\big(z(yx)\big) \cdot x = \big(Rx \cdot (x \cdot Rz)\big) \cdot y$. Avem o nouă autotopie $T_2 = \left(L_{xf} L_x R, R_x^{-1}, R_x\right)$. Atunci $T_3 = T_2 T_1 = (\alpha, R_x, R_x L_x)$, unde $\alpha = L_{xf} L_x R L_x^{-1}$. Deoarece $(Q,\cdot)$ este IP-cvazigrup, atunci avem autotopia $T_4 = (R_x L_x, I_r R_x I_r, \alpha)$, unde

$$I_r R_x I_r y = (y^{-1} \cdot x)^{-1} = {}^{-1}x \cdot {}^{-1}(y^{-1}) = L_x^{-1} R y, I_r R_x I_r = L_x^{-1} R = L_{{}^{-1}x} R,$$

$$T_4 = \left(R_x L_x, L_{{}^{-1}x} R, \alpha\right).$$

Așadar, avem $\alpha(yz) = (xy \cdot x) \cdot {}^{-1}x(zf)$. Dacă $y = x^{-1}$, unde $xx^{-1} = f$, atunci obținem

$$\alpha(x^{-1} \cdot z) = zf, \alpha L_{x^{-1}} = R, \alpha = R L_{x^{-1}}^{-1} = R L_{{}^{-1}(x^{-1})} = R L_{xf},$$

unde $RL_{xf} z = R(xf \cdot z) = x \cdot Rz = L_x R z, \alpha = L_x R,\ T_4 = (R_x L_x, L_x^{-1} R, L_x R)$. Deoarece R este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, obținem, în definitive autotopia $T = T_4 \cdot \left(R_f, R_f, R_f\right) = \left(R_x L_x R_f, L_x^{-1}, L_x\right)$. □

Teorema 3.1.2. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este izotop unui grup abelian, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang medial și distributantul $D = \{f\}$.

Demonstrație. Cercetăm izotopul $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = R^{-1}x \cdot y = Rx \cdot y = xf \cdot y$, $(Q,\circ)$ este un grup abelian cu unitatea f. Din $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ avem $Rx \circ (R(Rx \circ y) \circ z) = Ry \circ (R(Rz \circ x) \circ x)$. Dacă $z = f$, atunci $Rx \circ R(Rx \circ y) = Ry \circ (Rx \circ x), R(Rx \circ y) = Ry \circ x, R(x \circ y) = Rx \circ Ry$. Am obținut că R este automorfism al grupului abelian $(Q,\circ)$ și cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Prin urmare, distributantul $D = \{f\}$.

Mai departe din $(y \circ x) \circ x^{-1} = y$ urmează că $R(Ry \cdot x) \cdot x^{-1} = y$ și $(y \cdot Rx) \cdot x^{-1} = y$. Am obținut că $(Q,\cdot)$ este RIP-cvazigrup și pe baza Teoremei 3.1.1. cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang. Rămâne să demonstrăm că $(Q,\cdot)$ este cvazigrup medial. Fie are loc $xy \cdot uv = xu \cdot yv'$. Trebuie să demonstrăm că $v = v'$. Avem

$$R(Rx \circ y) \circ (Ru \circ v) = R(Rx \circ u) \circ (Ry \circ v'), x \circ Ry \circ Ru \circ v = x \circ Ru \circ Ry \circ v', v = v'.$$

□

Teorema 3.1.3. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu distributant nevid D este izotop unei bucle Bol la stânga, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga.

Demonstrație. Fie $a \in D$. Atunci are loc $a(xy) = (ax) \cdot (ay), (xy)a = (xa) \cdot (ya)$, pentru toți $x, y \in Q$. Am obținut că L_a și R_a sunt automorfisme ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$ și $a^2 = a$, $L_aR_a = R_aL_a, R_aL_a^{-1} = L_a^{-1}R_a, R_a^{-1}L_a = L_aR_a^{-1}$. Mai departe avem $a(ay \cdot a) = y\big((aa)a\big)$, $a\big(a(ya)\big) = ya$, pentru orice $y \in Q, a(az) = z$, unde $z = ya$. Am obținut $L_a^2 = \varepsilon, L_a = L_a^{-1}$.

Acum fie izotopul $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y$, $(Q,\circ)$ este buclă Bol la dreapta cu unitatea $e = a$. Din ${}^{-1}x \circ (x \circ y) = y$ avem

$$R_a^{-1}\big({}^{-1}x\big) \cdot L_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y) = y,\ R_a^{-1}Ix \cdot L_a^{-1}(R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y) = R_a^{-1}Ix \cdot (L_aR_a^{-1}x \cdot L_a^2y) = y,$$

$$R_a^{-1}IR_aL_ax(xy) = y, I_lx(xy) = y,$$

unde $I_l = R_a^{-1}IR_aL_a$.

Am obținut că i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este LIP-cvazigrup și este izotop unei bucle Bol la stânga, de unde urmează că $(Q,\cdot)$ este un cvazigrup Bol la stânga. □

Teorema 3.1.4. i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu distributant nevid D este cvazigrup Bol la stânga dacă și numai dacă $(Q,\cdot)$ verifică egalitatea

$$xa \cdot xy = xx \cdot ay, \tag{3.6}$$

pentru orice $x, y \in Q$, unde $a \in D, a$ este element fixat.

Demonstrație. Este dat $a(xy) = ax \cdot ay$, $(xy)a = xa \cdot ya$. De unde, în particular, obținem $ax \cdot a = a \cdot xa$, $R_aL_a = L_aR_a$, $a^2 = a$, L_a, R_a este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ și buclei $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y$. Acum aplicăm identitatea i-cvazigrupului $x(xy \cdot z) =$

$y(zx \cdot x)$. Înlocuind $x = z = a$, avem $a(at) = t$, $\forall t \in Q$, unde $t = ya$, $L_a^2 = \varepsilon$, unde ε este permutare identică a mulțimii Q. Mai departe avem $a(aa \cdot z) = a(za \cdot a)$, $L_a = R_a^2$.

Pentru simplificarea scrierii, ne învoim $L_a = L$, $R_a = R$. În egalitatea $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ trecem de la operația " $\cdot$ " la operația " $\circ$ ", folosind

$$x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y = R^{-1}x \cdot L^{-1}y, \;\; xy = Rx \circ Ly.$$

Avem

$$Rx \circ L(R(Rx \circ Ly) \circ Lz) = Ry \circ L(R(Rz \circ Lx) \circ Lx), \;\; Rx \circ \big((LR^2x \circ LRLy) \circ L^2z\big) =$$
$$= Ry \circ \big((LR^2z \circ LRLx) \circ L^2x\big).$$

Acum folosim următoarea egalitate $L = R^2$, $L^2 = \varepsilon$ și obținem

$$Rx \circ \big((x \circ Ry) \circ z\big) = Ry \circ \big((z \circ Rx) \circ x\big).$$

Efectuăm substituția $y \to R^{-1}y$ și obținem identitatea

$$Rx \circ \big((x \circ y) \circ z\big) = y \circ \big((z \circ Rx) \circ x\big). \tag{3.7}$$

Dacă $y = Rx$, atunci obținem

$$(x \circ Rx) \circ z = (z \circ Rx) \circ x, Rx \circ \big((x \circ y) \circ z\big) = y \circ \big((x \circ Rx) \circ z\big).$$

Dacă $y = x^{-1}$, unde $x \circ x^{-1} = e = a$, e este unitate a buclei $(Q,\circ)$, atunci avem

$$Rx \circ z = x^{-1} \circ \big((x \circ Rx) \circ z\big). \tag{3.8}$$

Din (3.6) avem $R^2x \circ L(Rx \circ Ly) = R(Rx \circ Lx) \circ L^2y$, $Lx \circ (LRx \circ L^2y) = (R^2x \circ RLx) \circ L^2y$. Efectuăm substituția $x \to Lx$ și obținem

$$x \circ (Rx \circ y) = (x \circ Rx) \circ y. \tag{3.9}$$

Din (3.8) și (3.9) avem

$$Rx \circ z = x^{-1} \circ \big(x \circ (Rx \circ z)\big), \;\; t = x^{-1} \circ (x \circ t), \tag{3.10}$$

unde $t = Rx \circ z$, $\forall\, x, z \in Q$. În egalitatea (3.10) trecem de la operația " $\circ$ " la operația " $\cdot$ " și obținem $t = R^{-1}x^{-1} \cdot L^{-1}(R^{-1}x \cdot L^{-1}t) = R^{-1}x^{-1} \cdot (L^{-1}R^{-1}x \cdot t) = R^{-1}IRLx \cdot (xt) = I_l x(xt)$, unde $I_l = R^{-1}IRL$. Avem că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este un LIP-cvazigrup.

Acum demonstrăm că bucla $(Q,\circ)$ este inversabilă și la dreapta, adică $(Q,\circ)$ este o IP-buclă. În (3.7) substituim $y = e$, unde e este unitate a buclei $(Q,\circ)$ și obținem

$$Rx \circ (x \circ z) = (z \circ Rx) \circ x. \tag{3.11}$$

În (3.7) substituim $z = e$, avem

$$Rx \circ (x \circ y) = y \circ (Rx \circ x). \tag{3.12}$$

Din (3.11) și (3.12) avem

$$(z \circ Rx) \circ x = z \circ (Rx \circ x). \tag{3.13}$$

Din (3.13) și (3.7) obținem egalitatea $Rx \circ \big((x \circ y) \circ z\big) = y \circ \big(z \circ (Rx \circ x)\big)$. Dacă $z = y^{-1}$, atunci avem $(x \circ y) \circ y^{-1} = x,\ \forall\, x, y \in Q,\ \ (Q,\circ)$ este IP-buclă.

Mai departe demonstrăm că $(Q,\circ)$ este buclă Moufang în care $(Rx \circ x) \circ y = y \circ (Rx \circ x),\ \ \forall\, x, y \in Q$. Din $Rx \circ \big((x \circ y) \circ z\big) = y \circ \big((z \circ Rx) \circ x\big)$ obținem autotopia T_1 buclei $(Q,\circ)$, unde $T_1 = (L_x^{-1}, R_x R_{Rx}, L_{Rx})$.

Avem

$$\Big(Rx \circ \big((x \circ y) \circ z\big)\Big)^{-1} = \Big(y \circ \big((z \circ Rx) \circ x\big)\Big)^{-1}, \qquad \big((x \circ y) \circ z\big)^{-1} \circ (Rx)^{-1} =$$

$$= \big((z \circ Rx) \circ x\big)^{-1} \circ y^{-1}, (z^{-1} \circ (x \circ y)^{-1}) \circ (Rx)^{-1} = (x^{-1} \circ (z \circ Rx)^{-1}) \circ y^{-1} \text{ și}$$

$$\big(z^{-1} \circ (y^{-1} \circ x^{-1})\big) \circ (Rx)^{-1} = \big(x^{-1} \circ ((Rx)^{-1} \circ z^{-1})\big) \circ y^{-1}. \qquad (3.14)$$

Din $x \circ x^{-1} = e$ avem $Rx \circ Rx^{-1} = Re = e,\ \ Rx^{-1} = (Rx)^{-1}$. În egalitatea (3.14) facem substituțiile $x \to x^{-1}, y \to y^{-1}, z \to z^{-1}$ și obținem egalitatea $\big(z \circ (y \circ x)\big) \circ Rx = \big(x \circ (Rx \circ z)\big) \circ y$. Avem o nouă autotopie T_2 a buclei $(Q,\circ)$, unde $T_2 = (L_x L_{Rx}, R_x^{-1}, R_{Rx})$. Mai departe obținem autotopia $T_3 = T_1 T_2 = (L_{Rx}, R_x R_{Rx} R_x^{-1}, L_{Rx} R_{Rx}) = (L_{Rx}, \alpha, L_{Rx} R_{Rx})$, unde $\alpha = R_x R_{Rx} R_x^{-1}$.

Am obținut egalitatea $L_{Rx} R_{Rx}(y \circ z) = L_{Rx} y \circ \alpha z$. Dacă $y = e$, atunci $\alpha = R_{Rx},\ T_3 = (L_{Rx}, R_{Rx}, L_{Rx} R_{Rx})$. În T_3 efectuăm substituția $x \to R^{-1}x$ și avem $T_3 = (L_x, R_x, L_x R_x)$. Deoarece bucla $(Q,\circ)$ este IP-buclă, atunci mai avem încă autotopia $T_4 = (L_x R_x, I R_x I, L_x) = (L_x R_x, L_x^{-1}, L_x)$. Am obținut identitatea Bol la stânga $x \circ \big(y \circ (x \circ z)\big) = \big(x \circ (y \circ x)\big) \circ z$. Deoarece $(Q,\circ)$ este o IP-buclă, atunci $(Q,\circ)$ este o buclă Moufang.

Acum demonstrăm egalitatea $(Rx \circ x) \circ y = y \circ (Rx \circ x),\ \forall\, x, y \in Q$. În egalitatea (3.7) substituim $y = Rx$ și obținem $(x \circ Rx) \circ z = z \circ (Rx \circ x)$. Dacă $z = e$, atunci avem $x \circ Rx = Rx \circ x,\ \ (Rx \circ x) \circ z = z \circ (Rx \circ x)$. Definitiv am obținut că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este inversabil la stânga și este izotop unei bucle Moufang $(Q,\circ)$.

Pe baza rezultatelor din [45] avem că $(Q,\cdot)$ este un cvazigrup Bol la stânga.

Invers. Fie $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga. Atunci $(Q,\cdot)$ este inversabil la stânga, adică are loc $I_l x \cdot xy = y,\ \ R I_l x \circ L(Rx \circ Ly) = y,\ \ R I_l x \circ (LRx \circ y) = y,\ \ R I_l R^{-1} L^{-1} x \circ (x \circ y) = y$.

Am obținut că și bucla $(Q,\circ)$ este inversabilă la stânga. Pe baza (3.8), avem

$$Rx \circ z = x^{-1} \circ \big((x \circ Rx) \circ z\big) = x^{-1} \circ \big(x \circ (Rx \circ z)\big), (x \circ Rx) \circ z = x \circ (Rx \circ z),$$

$$R^{-1}(R^{-1}x \cdot L^{-1}Rx) \cdot L^{-1}z = R^{-1}x \cdot L^{-1}(x \cdot L^{-1}z), \quad (R^{-2}x \cdot L^{-1}x) \cdot z = R^{-1}x \cdot (L^{-1}x \cdot L^{-1}z),$$

$(Lx \cdot Lx) \cdot Lz = R^{-1}x \cdot (Lx \cdot z),\ \ xx \cdot az = R^{-1}Lx \cdot xz,\ \ xx \cdot az = xa \cdot xz.$ □

3.2. Relația i-cvazigrupurilor cu unele clase de cvazigrupuri

Introducem noțiunea de miez al cvazigrupului Bol la stânga. Miez al cvazigrupului Bol la stânga $(Q,\cdot)$ numim grupoidul $(Q,+)$ definit în felul următor $x+y=R_{e_x}^{-1}(x\cdot {}^{-1}yx)$, unde ${}^{-1}yy=e_y, ye_y=y$. Pentru bucla Bol la stânga această noțiune a fost introdusă de către V. D. Belousov.

Propoziția 3.2.1. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este idempotent, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga. Mai mult, în acest caz $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Stein la dreapta, care este distributiv la stânga și miezul cvazigrupului Bol la stânga de asemenea este i-cvazigrup [79].

Demonstrație. Fie că în i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ fiecare element este idempotent, adică $x^2=x$. Atunci din (3.1) avem $xz=zx\cdot x$. Am obținut identitatea Stein la dreapta.

Înmulțim din dreapta egalitatea Stein la dreapta la x și obținem $xz\cdot x=(zx\cdot x)x=x\cdot zx$. Am obținut legea de elasticitate $xz\cdot x=x\cdot zx$.

Mai departe avem $x(xy\cdot x)=y(x^2\cdot x)=yx, x(x\cdot yx)=yx$. Substituim $yx=z$ și avem $x(xz)=z$, pentru orice $x,z\in Q$. Atunci $(Q,\cdot)$ este LIP-cvazigrup și $L_x^2=\varepsilon$, unde ε este permutare identică. Din $x(xy\cdot z)=y(x^2z)=y\cdot xz$, pentru $y\to xy$ avem

$$x\big((x\cdot xy)z\big)=xy\cdot xz, x(yz)=xy\cdot xz.$$

Atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup distributiv la stânga, L_x este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Acum ne convingem că $(Q,\cdot)$ verifică identitatea Bol la stânga $x(y\cdot xz)=R_{e_x}^{-1}(x\cdot yx)\cdot z$.
$A=x(y\cdot xz)=xy\cdot x(xz)=xy\cdot z, B=R_{e_x}^{-1}(x\cdot yx)\cdot z=R_x^{-1}(xy\cdot x)\cdot z=xy\cdot z.$
Am obținut că $(Q,\cdot)$ este un cvazigrup Bol la stânga.

Trecem la cercetarea miezului $(Q,+)$ al cvazigrupului Bol la stânga $(Q,\cdot)$

$$x+y=R_{e_x}^{-1}\big(x\cdot {}^{-1}yx\big)=R_x^{-1}(x\cdot yx)=R_x^{-1}(xy\cdot x)=xy.$$

Am obținut “ $+$ ” = “ $\cdot$ ”. □

Remarca 3.2.1. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$, în care $x^2=x$, este izotop unei bucle comutative, atunci $(Q,\cdot)$ este distributiv la stânga, iar bucla $(Q,\circ)$ este buclă Moufang comutativă [80], unde $x\circ y=R_a^{-1}x\cdot L_a^{-1}y$.

Remarca 3.2.2. Orice buclă $(Q,\circ)$, izotopă unui i-cvazigrup $(Q,\cdot)$, unde $x^2=x$, este buclă Bol la stânga [45].

Dacă cercetăm izotopul $(Q,\circ)$, unde $x\circ y=R_a^{-1}x\cdot L_a^{-1}y$, atunci din $x(xy)=y$, obținem $R_ax\circ L_a(R_ax\circ L_ay)=y, x\circ L_a(x\circ L_ay)=y$. Dacă $y=e=a$, atunci avem $x\circ L_ax=e$, $L_ax\circ x=e, L_ax={}^{-1}x$, unde L_a este automorfism și al buclei $(Q,\circ)$. Dacă bucla $(Q,\circ)$ este inversabilă la dreapta, atunci $(Q,\circ)$ este buclă Moufang comutativă, iar $(Q,\cdot)$ este cvazigrup distributiv.

Propoziția 3.2.2. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are unitate la dreapta e, atunci $(Q,\cdot)$ este buclă Moufang în care $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in Q$.

Demonstrație. Fie $(Q,\cdot)$ are unitate la dreapta $xe = x$, pentru toți $x \in Q$. În egalitatea $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ substituim $x = y = e, e(ee \cdot z) = e(ze \cdot e), e(ez) = ez, et = t$, pentru toți $t \in Q$, unde $t = ez$. Am obținut că $(Q,\cdot)$ este buclă, unde $x \cdot xz = zx \cdot x$.

Acum demonstrăm că bucla $(Q,\cdot)$ este inversabilă la stânga. Avem

$$^{-1}yy = e,\ \ ^{-1}y\left(^{-1}yy \cdot z\right) = y\left(z^{-1}y \cdot {}^{-1}y\right),\ \ ^{-1}yz = y\left(^{-1}y \cdot {}^{-1}yz\right), t = y(^{-1}yt),$$

unde $t^{-1} = yz$. Efectuăm substituția $t \to yt$ și obținem $yt = y\left(^{-1}y \cdot yt\right), t = {}^{-1}y \cdot yt$. Avem că $(Q,\cdot)$ este LIP-buclă.

Mai departe demonstrăm că $(Q,\cdot)$ este RIP-buclă. Avem $x(xe \cdot z) = e(zx \cdot x), x \cdot xz = zx \cdot x = x^2z$. Pe de altă parte avem $x(xy \cdot e) = y(ex \cdot x) = yx^2, x \cdot xy = yx^2$. Am obținut că în bucla $(Q,\cdot)$ are loc egalitatea $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in Q$. Atunci putem scrie

$$x(xy \cdot z) = y(x^2z) = y(zx^2), xy \cdot z = {}^{-1}x(y \cdot zx^2).$$

Dacă $z = {}^{-1}y$, atunci obținem $xy \cdot {}^{-1}y = {}^{-1}x\left(y \cdot {}^{-1}yx^2\right) = {}^{-1}x(xx) = x$. Avem egalitatea $xy \cdot {}^{-1}y = x$, adică bucla $(Q,\cdot)$ este RIP-buclă.

Definitiv am obținut că $I_lx \cdot xy = y, yx \cdot I_rx = y$, unde $I_l = I_r$ și $(Q,\cdot)$ este IP-buclă. Pe baza Teoremei 3.1.1. $(Q,\cdot)$ este buclă Moufang. □

Propoziția 3.2.3. Orice i-cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este cvazigrup cu proprietate inversă la stânga și izotop unei LIP-bucle $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = R_f^{-1}x \cdot y$.

Demonstrație. Din $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ pentru $x = y$, obținem $x^2z = zx \cdot x$. Dacă $z = f$, atunci avem $x^2f = x^2$, pentru orice $x \in Q$.

Acum cercetăm identitatea $x^2(x^2y \cdot z) = y(zx^2 \cdot x^2)$ și substituim $y = f$. Avem $x^2(x^2z) = zx^2 \cdot x^2, x^2(x^2y \cdot z) = y(x^2 \cdot x^2z)$.

Fie $x^2 \cdot (x^2)^{-1} = f$. Atunci obținem $x^2z = (x^2)^{-1}(x^2 \cdot x^2z), t = (x^2)^{-1}(x^2t)$, pentru orice $x, t \in Q$, unde $t = x^2z$. Mai departe avem $x\left((x \cdot (x^2)^{-1}) \cdot z\right) = (x^2)^{-1}(x^2z) = z, x(I_lx \cdot z) = z$, unde $I_lx = x \cdot (x^2)^{-1}$. Am obținut că $(Q,\cdot)$ este LIP-cvazigrup.

Acum cercetăm izotopul $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = R_f^{-1}x \cdot y$. Am obținut că $(Q,\circ)$ este buclă cu unitate f. Din $I_lx \cdot xy = y$ urmează $R_fI_lx \circ \left(R_fx \circ y\right) = y, R_fI_lR_f^{-1}x \circ (x \circ y) = y$. Atunci $(Q,\circ)$ este LIP-buclă. □

Propoziția 3.2.4. Dacă în i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc $x^2 = f$, pentru orice $x \in Q$, unde f este element fixat, atunci $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și izotop al unui grup abelian.

Demonstrație. Din $x^2z = zx \cdot x$ avem $fz = zx \cdot x$, pentru orice $x, z \in Q$. În particular, avem $fz = ze_z \cdot e_z = z$, unde f este unitate la stânga. Am obținut identitatea $zx \cdot x = z, R_x^2 = \varepsilon, R_x = R_x^{-1}, R_f = R_f^{-1}$, $(Q,\cdot)$ este RIP-cvazigrup și, pe baza Teoremei 3.1.1., cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang.

Din $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x) = yz$, dacă $y = f$, avem $x(xf \cdot z) = z, I_l = R_f$. Din $x(xy \cdot z) = yz$ urmează egalitatea $xy \cdot z = xf \cdot yz, xy \cdot f = xf \cdot yf, D = \{f\}$ și $R_f = I_l$ este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ și buclei $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = R_f^{-1}x \cdot y, xy = Rx \circ y$ (Propoziția 3.2.3.) Din $xy \cdot z = xf \cdot yz$ avem $R(Rx \circ y) \circ z = x \circ (Ry \circ z), (x \circ Ry) \circ z = x \circ (Ry \circ z)$, $(Q,\circ)$ este grup.

Ne convingem că $(Q,\circ)$ este grup abelian. Din $I_lx \cdot xy = R_fx \cdot xy = y$ urmează $x \circ (Rx \circ y) = y$. Dacă $y = f$, atunci obținem $x \circ Rx = f, Rx = x^{-1} = Ix$ și $R = I$ este automorfism al grupului. Prin urmare, $(Q,\circ)$ este grup abelian. □

Propoziția 3.2.5. i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este cvazigrup Moufang dacă și numai dacă R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Demonstrație. Fie R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, adică verifică egalitatea

$$xy \cdot f = xf \cdot yf, \tag{3.15}$$

pentru orice $x, y \in Q$.

Fie $y \cdot y^{-1} = f$. Pe baza Propoziției 3.2.3., cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este inversabil la stânga, adică verifică egalitatea

$$^{-1}x \cdot xy = y \text{ sau } I_lx \cdot xy = y. \tag{3.16}$$

Din $^{-1}y \cdot \left(^{-1}y\right)^{-1} = f$ și (3.17) obținem $\left(^{-1}y\right)^{-1} = yf, I_rI_l = R_f$. Deoarece $R_f^2 = \varepsilon, I_l^2 = \varepsilon$, atunci avem $I_r = R_fI_l$,

$$y^{-1} = {}^{-1}y \cdot f. \tag{3.17}$$

Din egalitățile (3.15) și (3.17) obținem

$$\left(x \cdot {}^{-1}y\right)f = xf \cdot {}^{-1}yf,\ x\left(\left(x \cdot {}^{-1}y\right) \cdot f\right) = x(xf \cdot y^{-1}),$$

$$^{-1}y(fx \cdot x) = f(x^2y^{-1}),\ \ ^{-1}yx^2 = x^2y^{-1}.$$

Mai departe avem $x^2 = y(x^2 \cdot y^{-1}), x = {}^{-1}x\left(y(x^2 \cdot y^{-1})\right)$. Acum putem scrie $x(xy \cdot y^{-1}) = y(x^2 \cdot y^{-1}), xy \cdot y^{-1} = {}^{-1}x\left(y(x^2y^{-1})\right) = x$. Am obținut $xy \cdot y^{-1} = x$, pentru orice

$x, y \in Q$, adică $(Q,\cdot)$ este cvazigrup inversabil la dreapta. Pe baza Teoremei 3.1.1. $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang.

Invers. Fie că $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang. Atunci, în particular, $(Q,\cdot)$ este și cvazigrup Bol la dreapta, adică are loc identitatea $(zx \cdot y)x = z \cdot L_{f_a}^{-1}(xy \cdot x) = z \cdot L_f^{-1}(xy \cdot x) = z(xy \cdot x)$. În particular, $(zf \cdot y)f = z(fy \cdot f) = z(yf)$. Facem substituția $z \to zf$ și obținem $(zy)f = zf \cdot yf$, R_f este automorfism. □

3.3. i-cvazigrupuri cu identități alternative și de elasticitate

Cunoaștem că cea mai cercetată clasă de bucle neasociative este clasa de bucle Moufang. Avem în primul capitol definiția buclei Moufang cu identitățile (1.18) și (1.19). Cunoaștem că orice buclă Moufang este IP-buclă ([11], Teorema 5.6). În afară de aceasta, în bucla Moufang sunt adevărate identitățile:

$$x \cdot xz = xx \cdot z \ (legea\ alternativă\ la\ stânga), \tag{3.18}$$

$$zx \cdot x = z \cdot xx \ (legea\ alternativă\ la\ dreapta), \tag{3.19}$$

$$xy \cdot x = x \cdot yx \ (legea\ de\ elasticitate). \tag{3.20}$$

Identitățile (3.18) și (3.19) urmează din identitățile buclei Moufang pentru $y = 1$, iar (3.20) din (1.19) pentru $z = 1$.

În paragraful dat s-au cercetat i-cvazigrupurile cu aceste trei legi. Au loc următoarele propoziții:

Propoziția 3.3.1. Dacă în i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc legea alternativă la stânga (3.18), atunci $(Q,\cdot)$ este buclă Moufang, unde $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in Q$.

Demonstrație. Avem:

1. $f_y \cdot f_y y = f_y^2 y, y = f_y^2 y, f_y^2 = f_y$, pentru orice $y \in Q$,
2. $f_y \cdot f_y z = f_y^2 z, f_y \cdot f_y z = f_y z, f_y t = t$, pentru orice $y, t \in Q, ft = t$,
3. $x(xf \cdot y) = f(x^2 y) = x^2 y = x(xy), xf \cdot y = xy, xf = x$, pentru orice $x \in Q$, f este unitate a buclei $(Q,\cdot)$.

Pe baza Propoziției 3.2.2. avem că $(Q,\cdot)$ este buclă Moufang și $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in Q$. □

Propoziția 3.3.2. Dacă în i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc legea alternativă la dreapta (3.19), atunci $(Q,\cdot)$ este buclă Moufang în care $x^2y = yx^2$.

Demonstrație. Avem:

1. $ye_y \cdot e_y = y(e_y^2), y = ye_y^2, e_y^2 = e_y$, pentru orice $y \in Q$,
2. $ze_y \cdot e_y = z(e_y^2) = ze_y, te_y = t$, pentru orice $t \in Q, e_y = e, xe = x$.

Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are unitate la dreapta și, pe baza Propoziției 3.2.2., $(Q,\cdot)$ este buclă Moufang și $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in Q$. □

Propoziția 3.3.3. În orice i-cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu identitatea de elasticitate (3.20) mulțimea tuturor unităților locale formează un subcvazigrup Bol la stânga [45].

Demonstrație. Din (3.20) avem $xe_x \cdot x = x \cdot e_x x,\ x = e_x x,$

$$e_x = f_x,\ \ \forall\, x \in Q. \tag{3.21}$$

Din (3.1) și (3.20), obținem $xx \cdot z = zx \cdot x,\ \ e_z e_z \cdot z = ze_z \cdot e_z,\ \ e_z^2 z = z,\ \ e_z^2 = f_z = e_z,$

$$e_z^2 = e_z,\ \forall\, z \in Q. \tag{3.22}$$

Din (3.1) și (3.22), obținem

$$e_x(e_x y \cdot e_x) = y(e_x e_x \cdot e_x) = ye_x, e_x(e_x \cdot ye_x) = ye_x,\ \ e_x(e_x t) = t,$$

$$e_x(e_x t) = t,\ \forall\, x, t \in Q. \tag{3.23}$$

Din (3.1) și (3.23), obținem $e_x(e_x y \cdot z) = y(e_x^2 z) = y \cdot e_x z,$

$$e_x(yz) = e_x y \cdot e_x z,\ \ \forall x, y, z \in Q. \tag{3.24}$$

Din (3.24) avem $e_x\big(ye_y\big) = e_x y \cdot e_x e_y,$

$$e_x \cdot e_y = e_{e_x y}, \forall x, y \in Q. \tag{3.25}$$

Fie M mulțimea tuturor unităților locale ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$, adică

$$M = \{e_x \in Q | xe_x = x\}, \forall x \in Q.$$

Din (3.25) urmează că M este închisă față de operația de cvazigrup " $\cdot$ ", adică $\forall\ e_x, e_y \in M$, $\big(e_x \cdot e_y \in M\big)$. Pentru ca $(M,\cdot)$ să fie subcvazigrup este suficient să demonstrăm că soluțiile ecuațiilor $e_a x = e_{b},\ \ y \cdot e_a = e_b,\ \ \forall\ e_a, e_b \in M$ aparțin M.

Fie $e_a \cdot c = e_b$. Atunci avem $c = e_a \cdot e_b \in M$. Fie $de_a = e_b$. Atunci analog obținem $(de_a)e_a = e_b e_a,\ e_a^2 d = e_b e_a,\ \ \ e_a d = e_b \cdot e_a,\ \ \ d = e_a(e_b \cdot e_a) \in M$. Avem că $(M,\cdot)$ este sub-cvazigrup al i-cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Ne rămâne să demonstrăm că subcvazigrupul $(M,\cdot)$ verifică identitatea Bol la stânga:

$$x(y \cdot xz) = R_{e_x}^{-1}(xy \cdot x) \cdot z,\ \ \forall\, x, y, z \in M.$$

Pentru orice $x, y, z \in M$ are loc $x^2 = x,\ \ e_x = x,\ \ x(xy) = y,\ \ x(yz) = xy \cdot xz$. Din această cauză obținem

$$A = x(y \cdot xz) = xy \cdot (x \cdot xz) = xy \cdot z;\ \ \ B = R_{e_x}^{-1}(xy \cdot x) \cdot z = R_x^{-1}(xy \cdot x) \cdot z = xy \cdot z.$$

Am obținut $A = B$. □

Propoziția 3.3.4. i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este cvazigrup Moufang dacă și numai dacă $(Q,\cdot)$ verifică identitatea

$$zx \cdot x = zf \cdot xx, \tag{3.26}$$

pentru orice $x, z \in Q$.

Demonstrație. Scriem identitatea de bază a i-cvazigrupului $(Q,\cdot)$

$$x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x), \tag{3.27}$$

$\forall x, y, z \in Q$.

Dacă $x = y$, atunci

$$xx \cdot z = zx \cdot x. \tag{3.28}$$

Dacă $x = f$, unde $fx = x$, $\forall\, x \in Q$, atunci obținem $z = zf \cdot f$, $R_f^2 = \varepsilon$, ε este permutare identică a mulțimii Q, $R_f = R_f^{-1}$. Dacă în (3.28) $z = f$, atunci obținem $xx \cdot f = xx$,

$$x^2 f = x^2, \ \ \forall x \in Q. \tag{3.29}$$

Fie $(Q,\circ)$ este buclă, izotopă unui cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu izotopia

$$x \circ y = R_f^{-1} x \cdot y = R_f x \cdot y, \ xy = R_f x \circ y. \tag{3.30}$$

Bucla $(Q,\circ)$ are unitate f. Pentru a simplifica scrierea, convenim să notăm $R_f = R$. Fie dat (3.26), atunci din (3.26) și (3.28) obținem

$$zf \cdot xx = xx \cdot z, \tag{3.31}$$

$\forall\, x, z \in Q$.

Din (3.31), (3.30) și (3.29) avem $z \circ (Rx \circ x) = R(xx) \circ z = xx \circ z = (Rx \circ x) \circ z$,

$$z \circ (Rx \circ x) = (Rx \circ x) \circ z, \tag{3.32}$$

$\forall\, x, z \in Q$.

În $(Q,\cdot)$ are loc $x^2(x^2 y \cdot z) = y(x^2 x^2 \cdot z)$. Dacă $y = f$, atunci

$$x^2(x^2 z) = x^2 x^2 \cdot z, \tag{3.33}$$

$\forall\, x, z \in Q$.

Mai departe demonstrăm că $(Q,\cdot)$ este inversabil la stânga. Avem $x^2(x^2(x^2)^{-1} \cdot z) = (x^2)^{-1}(x^2 x^2 \cdot z) = (x^2)^{-1}(x^2 \cdot x^2 z)$, unde $x^2(x^2)^{-1} = f$. Am obținut egalitatea

$$x^2 z = (x^2)^{-1}(x^2 \cdot x^2 z),$$
$$t = (x^2)^{-1}(x^2 t), \tag{3.34}$$

$\forall\, x, t \in Q$, unde $t = x^2 z$.

Definitiv avem $x(x(x^2)^{-1} \cdot z) = (x^2)^{-1}(x^2 z) = z$. Facem substituția $z \to xz$ și obținem $x(x^2)^{-1} \cdot xz = z$, $I_l x \cdot xz = z$, unde $I_l x = x(x^2)^{-1}$. Am obținut că i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este inversabil la stânga.

În egalitatea $I_l x \cdot xy = y$ trecem de la operația " $\cdot$ " a cvazigrupului $(Q,\cdot)$ la operația " $\circ$ " a buclei $(Q,\circ)$ din (3.30) și obținem $RI_l x \circ (Rx \circ y) = y$, $RI_l R^{-1} x \circ (x \circ y) = y$. Avem că $(Q,\circ)$ este buclă inversabilă la stânga. În egalitatea (3.27) de la operația " $\cdot$ " trecem la operația " $\circ$ ":

$$Rx \circ (R(Rx \circ y) \circ z) = Ry \circ (Rx^2 \circ z) = Ry \circ (x^2 \circ z) = Ry \circ \big((Rx \circ x) \circ z\big) =$$
$$= Ry \circ \big(z \circ (Rx \circ x)\big).$$

Am obținut

$$Rx \circ (R(Rx \circ y) \circ z) = Ry \circ \big(z \circ (Rx \circ x)\big), \forall x, y, z \in Q. \tag{3.35}$$

Dacă în egalitatea (3.35) $y = e = f$, atunci avem $Rx \circ (x \circ z) = z \circ (Rx \circ x)$. Dacă în egalitatea (3.35) $z = e$, atunci avem $Rx \circ R(Rx \circ y) = Ry \circ (Rx \circ x) = (Rx \circ x) \circ Ry = Rx \circ (x \circ Ry)$, $R(Rx \circ y) = x \circ Ry$, $R(x \circ y) = Rx \circ Ry$, R este automorfism al buclei $(Q,\circ)$ și cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Acum egalitatea (3.35) putem scrie că

$$Rx \circ \big((x \circ y) \circ z\big) = y \circ \big(Rx \circ (x \circ z)\big). \tag{3.36}$$

Dacă $z = y^{-1}$, unde $y^{-1} \circ (y \circ z) = z$, obținem $(x \circ y) \circ y^{-1} = x$ și $(Q,\circ)$ este IP-buclă.

Mai departe demonstrăm că $(Q,\circ)$ este buclă Moufang. Din egalitatea (3.36) avem autotopia T_1 buclei $(Q,\circ)$, unde $T_1 = (L_x^{-1}, R_x R_{Rx}, L_{Rx})$. Într-adevăr, avem

$$L_{R_x}(L_x y \circ z) = y \circ R_x R_{R_x} z, y \to L_x^{-1} y, L_{R_x}(y \circ z) = L_x^{-1} y \circ R_x R_{R_x} z, T_1 = (L_x^{-1}, R_x R_{Rx}, L_{Rx}).$$

În plus, avem $\Big(Rx \circ \big((x \circ y) \circ z\big)\Big)^{-1} = \Big(y \circ \big((z \circ Rx) \circ x\big)\Big)^{-1}, \big((x \circ y) \circ z\big)^{-1} \circ (Rx)^{-1} = \big((z \circ Rx) \circ x\big)^{-1} \circ y^{-1}$, $(z^{-1} \circ (x \circ y)^{-1}) \circ (Rx)^{-1} = (x^{-1} \circ (z \circ Rx)^{-1}) \circ y^{-1}$,

$$\big(z^{-1} \circ (y^{-1} \circ x^{-1})\big) \circ (Rx)^{-1} = \big(x^{-1} \circ ((Rx)^{-1} \circ z^{-1})\big) \circ y^{-1}.$$

Am obținut o autotopie nouă T_2 a buclei $(Q,\circ)$, unde $T_2 = (L_x^{-1} L_{Rx}^{-1}, R_x, R_{Rx}^{-1})$. Acum cercetăm autotopia T_3, unde $T_3 = T_2^{-1} T_1 = (L_{Rx}, R_{Rx}, R_{Rx} L_{Rx})$. În T_3 efectuăm substituția $x \to Rx$, unde $R^2 = \varepsilon$, și obținem $T_4 = (L_x, R_x, R_x L_x)$.

Deoarece $(Q,\circ)$ este IP-buclă, atunci mai avem și autotopia T_5, unde

$$T_5 = (R_x L_x, IR_x I, L_x) = (R_x L_x, L_x^{-1}, L_x),$$

adică am obținut $L_x(y \circ z) = R_x L_x y \circ L_x^{-1} z$, $x \circ \big(y \circ (x \circ z)\big) = \big((x \circ y) \circ x\big) \circ z$. Am obținut identitatea Moufang.

Ne vom convinge că și cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este IP-cvazigrup, adică ne mai rămâne să demonstrăm că $(Q,\cdot)$ este inversabil la dreapta. Avem

$$x^{-1} \circ (x \circ y) = (y \circ x) \circ x^{-1} = y, \;\; R(R \cdot x) \cdot x^{-1} = (R^2 y \cdot Rx) \cdot x^{-1} = (y \cdot Rx) x^{-1} = y.$$

Definitiv avem că i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este IP-cvazigrup și-i izotop unei bucle Moufang. Pe baza rezultatelor din [81] urmează că $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang.

Invers. Fie $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang și demonstrăm că are loc identitatea (3.26).

În particular, în cvazigrupul Moufang $(Q,\cdot)$ are loc a doua identitate Bol $(zx \cdot y)x = z \cdot L_{f_x}^{-1}(xy \cdot x) \; = z(xy \cdot x)$. Dacă $x = f$, atunci avem $(zf \cdot y)f = z \cdot yf$. Facem substituția $z \to zf$ și obținem $(zy)f = zf \cdot yf$, R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ și buclei $(Q,\circ)$. Din această cauză din identitatea $x(xy \cdot z) = y(zx \cdot x)$ în cvazigrupul $(Q,\cdot)$ obținem în $(Q,\circ)$ identitatea

$$Rx \circ \big((x \circ y) \circ z\big) = y \circ \big((z \circ Rx) \circ x\big). \tag{3.37}$$

Dacă $y = Rx$, atunci

$$(x \circ Rx) \circ z = (z \circ Rx) \circ x, \forall\, x, z \in Q. \tag{3.38}$$

În (3.37) înlocuim $z = e = f$ și avem $Rx \circ (x \circ y) = y \circ (Rx \circ x)$. Am obținut

$$z \circ (Rx \circ x) = Rx \circ (x \circ z), \forall x, z \in Q. \tag{3.39}$$

În (3.37) punem $y = e$ și avem $Rx \circ (x \circ z) = (z \circ Rx) \circ x$,

$$(z \circ Rx) \circ x = Rx \circ (x \circ z), \forall x, z \in Q. \tag{3.40}$$

Din (3.38), (3.39), (3.40) avem

$$z \circ (Rx \circ x) = (Rx \circ x) \circ z,\; x \circ Rx = Rx \circ x, \tag{3.41}$$

$$Rz \cdot (R^2x \cdot x) = R(R^2x \cdot x) \cdot z,\; zf \cdot xx = xx \cdot z = zx \cdot x. \tag{3.42}$$

□

3.4. Pseudoautomorfisme ale *i*-cvazigrupurilor

Cercetând pseudoautomorfismele în sensul lui Pflugfelder (a se vedea [40]) avem:

Propoziția 3.4.1. Dacă permutarea α a mulțimii Q a i-cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu companionul k, atunci k este un element Bol la stânga.

Demonstrație. Este dat: $k \cdot \alpha(xy) = (k \cdot \alpha x) \cdot \alpha y$. Dacă $\alpha x = e_k$, atunci avem

$$\alpha(\alpha^{-1}e_k \cdot y) = \alpha y,\;\; \alpha^{-1}e_k \cdot y = y, \alpha^{-1}e_k = f,\;\; e_k = \alpha f.$$

Mai departe observăm că este dată autotopia T_1 cvazigrupului $(Q,\cdot)$, unde $T_1 = (L_k\alpha, \alpha, L_k\alpha)$. Pe baza Propoziției 3.3.3. i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este inversabil la stânga, din această cauză mai avem autotopiile T_2 și T_3, unde $T_2 = (I_l L_k \alpha I_l, L_k\alpha, \alpha)$, $T_3 = T_2 T_1^{-1} = (\gamma, L_k, L_k^{-1})$. Aflăm permutarea γ. Avem $L_k^{-1}(yz) = \gamma y \cdot L_k z$. Dacă $z = e_k$, atunci obținem $R_k^{-1}L_k^{-1}R_{e_k} = \gamma$. Avem autotopia $T_4 = \left(R_k^{-1}L_k^{-1}R_{e_k}, L_k, L_k^{-1}\right)^{-1} = \left(R_{e_k}^{-1}L_k R_k, L_k^{-1}, L_k\right)$, k este elementul Bol la stânga, $k(x \cdot ky) = R_{e_k}^{-1}(k \cdot xk) \cdot y$, $\forall x, y \in Q$. □

Exemplul 3.4.1. *Fie* $(Q, +,\cdot)$ *câmpul numerelor raționale. Definim o operație nouă* "$\circ$", $x \circ y = -x + y$. *Atunci* $(Q,\circ)$ *este* i*-cvazigrup cu unitate la stânga* $f = 0$. *Translația la stânga* L_a *a cvazigrupului* $(Q,\circ)$, *este pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului* $(Q,\circ)$ *cu* *companionul* $k = -\frac{a}{2}$. *Pe baza propoziției demonstrate, cvazigrupul* $(Q,\circ)$ *este cvazigrup Bol la stânga.*

Propoziția 3.4.2. Dacă în i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f translațiile L_a și R_b sunt pseudoautomorfisme la stânga cu companionul k, atunci $a = e_k f, b = e_k$, unde $ke_k = k$.

Demonstrație. Fie $k \cdot L_a(xy) = (k \cdot L_a x) \cdot L_a y,\ k(a \cdot xy) = (k \cdot ax) \cdot ay$. Dacă $x = f$, atunci obținem $k = k \cdot af,\ af = e_k, af \cdot f = e_k f,\ a = e_k f$.

Fie $k \cdot R_b(xy) = (k \cdot R_b x) \cdot R_b y,\ k(xy \cdot b) = (k \cdot xb) \cdot yb$. Dacă $x = f$, atunci avem $k = kb, b = e_k$. □

Propoziția 3.4.3. Dacă i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este izotop unui grup abelian, atunci L_a și R_b, unde $a = e_k f, b = e_k$, sunt pseudoautomorfisme la stânga ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu companionul k.

Demonstrație. Cercetăm izotopul $(Q,\circ)$ i-cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu izotopia

$$x \circ y = R_f^{-1} x \cdot y, \tag{3.43}$$

$\forall x, y \in Q$. $(Q,\circ)$ este o buclă cu unitatea f. De unde urmează că $(Q,\circ)$ este un grup abelian.

Ne convingem că are loc

$$k \cdot L_{e_k f}(xy) = \left(k \cdot L_{e_k f} x\right) \cdot L_{e_k f} y, k(e_k f \cdot xy) = \left(k \cdot (e_k f \cdot x)\right) \cdot (e_k f \cdot y).$$

Din (3.43) avem $A = k(e_k f \cdot xy) = Rk \circ \left(R^2 e_k \circ (Rx \circ y)\right) = kf \circ \left(e_k \circ (Rx \circ y)\right)$, și

$$B = \left(k \cdot (e_k f \cdot x)\right) \cdot (e_k f \cdot y) = R\left(Rk \circ (e_k \circ x)\right) \circ (e_k \circ y) = k \circ e_k f \circ xf \circ e_k \circ y.$$

Ne convingem că are loc $kf = k \circ e_k f$ pe baza, că R_f este automorfism al grupului abelian $(Q,\circ)$ și $R^2 = \varepsilon$. $R(kf) = k,\ R(k \circ e_k f) = Rk \circ R^2 e_k = k \cdot e_k = k$. Am obținut $A = B$.

Acum ne convingem că are loc

$$k \cdot R_{e_k}(xy) = \left(k \cdot R_{e_k} x\right) \cdot R_{e_k} y, k(xy \cdot e_k) = (k \cdot xe_k) \cdot (ye_k).$$

Din (3.43) avem $A = k(xy \cdot e_k) = kf \circ (R(Rx \circ y) \circ e_k) = kf \circ x \circ Ry \circ e_k$,

$B = (k \cdot xe_k) \cdot (ye_k) = R(Rk \circ Rx \circ e_k) \circ Ry \circ e_k = k \circ x \circ e_k f \circ Ry \circ e_k,\ A = B$. □

3.5. Unități la dreapta (la stânga) în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang

În acest paragraf cercetăm cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang dacă posedă sau nu unitate la dreapta sau la stânga. K. Kunen a studiat existența unității bilaterale în cvazigrupuri cu anumite identități, evidențiate dintre cele "60 de identități de tip Bol-Moufang", precăutate de Fenyves [22]. Este prezentat tabelul cu datele privind existența unității pentru fiecare dintre cele 60 de identități. În tabel rezultatele lui K. Kunen sunt citate. Dovezile de asemenea sunt incluse pentru complitudinea expunerii.

În unele cazuri am folosit Prover9 [82] și Mace4 [83] pentru unele demonstrații și pentru a construi contraexemple.

Amintim că parastroful (12) al grupoidului $(G,\cdot)$ este grupoidul $(G,*)$, care în operația " $*$ " se primește după următoarea regulă:

$$x * y = y \cdot x. \tag{3.44}$$

Clar că pentru orice grupoid $(G,\cdot)$ există grupoidul lui parastrofic (12) $(G,*)$.

Tabela lui Cayley a grupoidului $(G,*)$ este o simetrizare a tabelei Cayley a grupoidului $(G,\cdot)$ față de diagonala principală. Evidențiem că pentru orice cvazigrup binar există și parastrofii lui [11, 40, 41].

Presupunem că identitatea F este adevărată în grupoidul $(G,\cdot)$. Atunci noi putem obține identitatea parastrofică (12) (F^*) a identității F, care trece operația " $\cdot$ " în operația " $*$ " și schimbă ordinea variabilelor folosind regula (3.44).

Remarca 3.5.1. În cazul cvazigrupului, analog pentru identitatea parastrofică (12), pot fi determinate alte identități parastrofice.

Tabelul 3.1. Unitățile în cvazigrupurile cu identități de tip Bol-Moufang

Numele	Denumirea	identitatea	f	e	buclă	grup
F_1		$xy \cdot zx = (xy \cdot z)x$	+	+	+	+ [22]
F_2	Moufang medie	$xy \cdot zx = (x \cdot yz)x$	+	+	+ [22]	-
F_3		$xy \cdot zx = x(y \cdot zx)$	+	+	+ [22]	+
F_4	Moufang medie	$xy \cdot zx = x(yz \cdot x)$	+	+	+ [22]	-
F_5		$(xy \cdot z)x = (x \cdot yz)x$	+	+	+ [22]	+
F_6	Identitate extra	$(xy \cdot z)x = x(y \cdot zx)$	+	+	+ [22]	-
F_7		$(xy \cdot z)x = x(yz \cdot x)$	+	-	-	-
F_8		$(x \cdot yz)x = x(y \cdot zx)$	-	+	-	-
F_9		$(x \cdot yz)x = x(yz \cdot x)$	-	-	- [22]	-
F_{10}		$x(y \cdot zx) = x(yz \cdot x)$	+	+	+ [22]	+
F_{11}		$xy \cdot xz = (xy \cdot x)z$	+	+	+	+ [22]
F_{12}		$xy \cdot xz = (x \cdot yx)z$	+	+	+ [22]	+
F_{13}	Identitate extra	$xy \cdot xz = x(yx \cdot z)$	+	+	+ [22]	-
F_{14}		$xy \cdot xz = x(y \cdot xz)$	+	+	+	+ [22]
F_{15}		$(xy \cdot x)z = (x \cdot yx)z$	-	-	-	-

F_{16}		$(xy \cdot x)z = x(yx \cdot z)$	+	-	-	-
F_{17}	Moufang la stânga	$(xy \cdot x)z = x(y \cdot xz)$	+	+	+ [22]	-
F_{18}		$(x \cdot yx)z = x(yx \cdot z)$	+	+	+	+ [22]
F_{19}	Bol la stânga	$(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$	-	+	-	-
F_{20}		$x(yx \cdot z) = x(y \cdot xz)$	+	+	+	+ [22]
F_{21}		$yx \cdot zx = (yx \cdot z)x$	+	+	+	+ [22]
F_{22}	Identitate extra	$yx \cdot zx = (y \cdot xz)x$	+	+	+ [22]	-
F_{23}		$yx \cdot zx = y(xz \cdot x)$	+	+	+ [22]	+
F_{24}		$yx \cdot zx = y(x \cdot zx)$	+	+	+	+ [22]
F_{25}		$(yx \cdot z)x = (y \cdot xz)x$	+	+	+	+ [22]
F_{26}	Bol la dreapta	$(yx \cdot z)x = y(xz \cdot x)$	+	-	-	-
F_{27}	Moufang la dreapta	$(yx \cdot z)x = y(x \cdot zx)$	+	+	+ [22]	-
F_{28}		$(y \cdot xz)x = y(xz \cdot x)$	+	+	+	+ [22]
F_{29}		$(y \cdot xz)x = y(x \cdot zx)$	-	+	-	-
F_{30}		$y(xz \cdot x) = y(x \cdot zx)$	-	-	-	-
F_{31}		$yx \cdot xz = (yx \cdot x)z$	+	+	+	+ [22]
F_{32}		$yx \cdot xz = (y \cdot xx)z$	+	+	+ [22]	+
F_{33}		$yx \cdot xz = y(xx \cdot z)$	+	+	+ [22]	+
F_{34}		$yx \cdot xz = y(x \cdot xz)$	+	+	+	+ [22]
F_{35}		$(yx \cdot x)z = (y \cdot xx)z$	-	+	-	-
F_{36}	RC identitate	$(yx \cdot x)z = y(xx \cdot z)$	+	-	-	-
F_{37}	C identitate	$(yx \cdot x)z = y(x \cdot xz)$	-	-	- [22]	-
F_{38}		$(y \cdot xx)z = y(xx \cdot z)$	+	+	+ [22]	-
F_{39}	LC identitate	$(y \cdot xx)z = y(x \cdot xz)$	-	+	-	-
F_{40}		$y(xx \cdot z) = y(x \cdot xz)$	+	-	-	-
F_{41}	LC identitate	$xx \cdot yz = (x \cdot xy)z$	+	+	+ [22]	-
F_{42}		$xx \cdot yz = (xx \cdot y)z$	+	-	- [22]	-
F_{43}		$xx \cdot yz = x(x \cdot yz)$	+	-	-	-
F_{44}		$xx \cdot yz = x(xy \cdot z)$	+	-	-	-
F_{45}		$(x \cdot xy)z = (xx \cdot y)z$	+	-	-	-

F_{46}	LC identitate	$(x \cdot xy)z = x(x \cdot yz)$	-	-	-	-
F_{47}		$(x \cdot xy)z = x(xy \cdot z)$	+	+	+	+ [22]
F_{48}	LC identitate	$(xx \cdot y)z = x(x \cdot yz)$	+	-	- [22]	-
F_{49}		$(xx \cdot y)z = x(xy \cdot z)$	+	-	-	-
F_{50}		$x(x \cdot yz) = x(xy \cdot z)$	+	+	+	+ [22]
F_{51}		$yz \cdot xx = (yz \cdot x)x$	-	+	- [22]	-
F_{52}		$yz \cdot xx = (y \cdot zx)x$	-	+	- [22]	-
F_{53}	RC identitate	$yz \cdot xx = y(zx \cdot x)$	+	+	+ [22]	-
F_{54}		$yz \cdot xx = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-
F_{55}		$(yz \cdot x)x = (y \cdot zx)x$	+	+	+	+ [22]
F_{56}	RC identitate	$(yz \cdot x)x = y(zx \cdot x)$	-	-	-	-
F_{57}	RC identitate	$(yz \cdot x)x = y(z \cdot xx)$	-	+	- [22]	-
F_{58}		$(y \cdot zx)x = y(zx \cdot x)$	+	+	+	+ [22]
F_{59}		$(y \cdot zx)x = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-
F_{60}		$y(zx \cdot x) = y(z \cdot xx)$	-	+	-	-

Este evident că identitatea F este adevărată în grupoidul $(G,\cdot)$ dacă și numai dacă în grupoidul $(Q,*)$ identitatea F^* este adevărată.

Teorema 3.5.1. [36]. $(F_1)^* = F_3, (F_2)^* = F_4, (F_5)^* = F_{10}, (F_6)^* = F_6, (F_7)^* = F_8, (F_9)^* = F_9,$
$(F_{11})^* = F_{24}, (F_{12})^* = F_{23}, (F_{13})^* = F_{22}, (F_{14})^* = F_{21}, (F_{15})^* = F_{30}, (F_{16})^* = F_{29},$
$(F_{17})^* = F_{27}, (F_{18})^* = F_{28}, (F_{19})^* = F_{26}, (F_{20})^* = F_{25}, (F_{31})^* = F_{34}, (F_{32})^* = F_{33},$
$(F_{35})^* = F_{40}, (F_{36})^* = F_{39}, (F_{37})^* = F_{37}, (F_{38})^* = F_{38}, (F_{41})^* = F_{53}, (F_{42})^* = F_{54},$
$(F_{43})^* = F_{51}, (F_{44})^* = F_{52}, (F_{45})^* = F_{60}, (F_{46})^* = F_{56}, (F_{47})^* = F_{58}, (F_{48})^* = F_{57},$
$(F_{49})^* = F_{59}, (F_{50})^* = F_{55}.$

Ușor se vede că orice grup satisface oricărei identități $F_1 - F_{60}$. Prin urmare, grupul ciclic Z_3 este contraexemplu pentru afirmația că «există cvazigrup cu identitatea dintre identitățile $F_1 - F_{60}$, care are unitate medie».

Lema 3.5.1. Dacă cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are unitate la stânga (la dreapta), atunci parastroful (12) al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ are unitate la dreapta (la stânga).

Lema 3.5.2. Dacă în cvazigrupul $(Q,\cdot)$ variabilele x și y parcurg toată mulțimea Q $(x \neq y)$, atunci $x \cdot y$ de asemenea parcurge toată mulțimea Q.

Demonstrație. Dacă fixăm variabila x, de exemplu, $x = a, a \in Q$, atunci și $a \cdot y$ parcurge toată mulțimea Q. A se vedea, de asemenea, [41]. □

Atrageți atenția, o altă situație, când $x = y$. Vedeți, de exemplu, identitatea F_{42}, Teorema 3.5.25.

Lema 3.5.3. Dacă în cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc identitatea asociativă, atunci acest cvazigrup este grup.

Demonstrație. Pentru a arăta cititorilor acestei lucrări metodele de demonstrație, care au fost aplicate în lucrarea dată, oferim dovezi bine cunoscute. A se vedea, de exemplu, [84].

Aici aplicăm Lema 3.5.2.. În identitatea de asociativitate $x \cdot yz = xy \cdot z$ înlocuim $x = f_y \left(f_y y = y\right)$. Atunci avem $f_y \cdot yz = yz$. Am obținut că f_y este unitate la stânga a cvazi-grupului $(Q,\cdot)$.

În identitatea de asociativitate $x \cdot yz = xy \cdot z$ substituim $z = e_y \left(ye_y = y\right)$. Atunci avem $xy = xy \cdot e_y$. Am obținut că e_y este unitate la dreapta a cvazigrupului $(Q,\cdot)$. □

Lema 3.5.4. Dacă cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este grup, atunci cvazigrupul $(Q, \overset{(12)}{\cdot})$ este grup.

Demonstrație. Este un folclor matematic. □

Teorema 3.5.2. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_1 este grup [22].

Demonstrație. Aplicând Lema 3.5.2., putem scrie identitatea F_1 $xy \cdot zx = (xy \cdot z)x$ în forma $t \cdot zx = tz \cdot x$, unde $t = xy$. Obținem identitatea asociativă. Conform Lemei 3.5.3 cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este buclă, precum este și grup. Atunci cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este grup. □

Corolarul 3.5.1. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_3 este grup.

Demonstrație. Conform Teoremei 3.5.1. $F_3 = (F_1)^*$. □

Teorema 3.5.3. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitățile F_4 și F_2 este buclă [22].

Demonstrație. Faptul că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_4 este buclă, este demonstrat în [57, 59]. Restul urmează din Lema 3.5.1., deoarece după Teorema 3.5.1. $(F_2)^* = F_4$. □

Este bine cunoscut că există bucle neasociative Moufang [85].

Teorema 3.5.4. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitățile F_5 și F_{10} este grup.

Demonstrație. Cunoaștem că orice cvazigrup $(Q,\cdot)$ posedă proprietatea de reducere din dreapta și stânga [11, 40, 41]. Atunci din identitatea $(xy \cdot z)x = (x \cdot yz)x$ avem $xy \cdot z = x \cdot yz$. Ultimul urmează din Lema 3.5.3. □

Teorema 3.5.5. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_6 $(xy \cdot z)x = x(y \cdot zx)$ (*identitate extra*) este buclă.

Demonstrație. A se vedea [22]. □

Există extra bucle neasociative [86].

Teorema 3.5.6. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_7 $(xy \cdot z)x = x(yz \cdot x)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Dacă facem substituția în identitatea F_7 $x = f_y$, atunci avem $yz \cdot f_y = f_y(yz \cdot f_y)$. Clar că $(yz \cdot f_y)$ primește toate elementele mulțimii Q.

Următorul contraexemplu arată că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_7 nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Corolarul 3.5.2. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_8 $(x \cdot yz)x = x(y \cdot zx)$ are unitate la dreapta și nu are unitate la stânga.

Demonstrație. Demonstrația urmează din Teorema 3.5.6., Lema 3.5.1. și faptul că $F_8 = (F_7)^*$ (Teorema 3.5.1.). □

Teorema 3.5.7. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_9 $(x \cdot yz)x = x(yz \cdot x)$ nu are unitate nici la stânga nici la dreapta [22].

Demonstrație. Următorul cvazigrup $(Q,\cdot)$ satisface identității F_9 și nu are unitate nici la stânga și nici la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

□

Teorema 3.5.8. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{11} $xy \cdot xz = (xy \cdot x)z$ este grup [22].

Demonstrație. Putem scrie identitatea F_{11} $xy \cdot xz = (xy \cdot x)z$ în forma $t \cdot xz = tx \cdot z$, unde $t = xy$. Restul urmează din Lema 3.5.3. □

Corolarul 3.5.3. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{24} $yx \cdot zx = y(x \cdot zx)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{24} = (F_{11})^*$. □

Teorema 3.5.9. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{12} $xy \cdot xz = (x \cdot yx)z$ este grup [22].

Demonstrație. Dacă substituim în identitatea F_{12} $x = f_z$, atunci $f_z y \cdot z = (f_z \cdot y f_z)z$. După substituție în ultima egalitate avem $y = y f_z$. Ultima egalitate înseamnă că cvazigrupul cu identitatea F_{12} are unitate la dreapta.

Dacă introducem în identitatea F_{12} $x = y = e$, atunci avem $ee \cdot ez = (e \cdot ee)z, e \cdot ez = ez$. Prin urmare, cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{12} are unitate la stânga, și, în sfârșit, acest cvazigrup este buclă.

Dacă substituim în identitatea F_{12} $z = 1$, atunci avem

$$xy \cdot x = x \cdot yx. \tag{3.45}$$

Dacă aplicăm egalitatea (3.45) în egalitatea F_{12}, atunci avem

$$xy \cdot xz = (xy \cdot x)z. \tag{3.46}$$

Dacă notăm xy prin litera t, atunci putem scrie identitatea (3.46) în forma

$$t \cdot xz = tx \cdot z. \tag{3.47}$$

□

Corolarul 3.5.4. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{23} $yx \cdot zx = y(xz \cdot x)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{23} = (F_{12})^*$. □

Teorema 3.5.10. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{13} $xy \cdot xz = x(yx \cdot z)$ este buclă.

Demonstrație. A se vedea [86]. □

Corolarul 3.5.5. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{22} $yx \cdot zx = (y \cdot xz)x$ este buclă.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{22} = (F_{13})^*$. □

Exemple de bucle neasociative cu identitățile F_{13} și F_{22} găsiți în [86].

Teorema 3.5.11. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{14} $xy \cdot xz = x(y \cdot xz)$ este grup.

Demonstrație. Putem substitui $t = xz$. Mai departe demonstrația este analoagă demonstrației Teoremei 3.5.8. □

Corolarul 3.5.6. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{21} $yx \cdot zx = (yx \cdot z)x$ este grup [22].

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{21} = (F_{14})^*$. □

Teorema 3.5.12. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{15} $(xy \cdot x)z = (x \cdot yx)z$ nu are unitate nici la dreapta și nici la stânga.

Demonstrație. Următorul cvazigrup $(Q,\cdot)$ satisface identității F_{15} și nu are unitate nici la stânga și nici la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

□

Corolarul 3.5.7. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{30} $y(xz \cdot x) = y(x \cdot zx)$ nu are unitate nici la dreapta și nici la stânga.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{30} = (F_{15})^*$. □

Teorema 3.5.13. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{16} $(xy \cdot x)z = x(yx \cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Dacă substituim în identitatea F_{16} $x = y, y = y\backslash x$, atunci avem $(y(y\backslash x) \cdot y)z = y((y\backslash x)y \cdot z)$ și după ce aplicăm identitatea (1.1) avem

$$xy \cdot z = y\big((y\backslash x)y \cdot z\big). \tag{3.48}$$

Aplicând operația "\" în egalitatea (3.48), vom obține

$$(y\backslash x)y \cdot z = y\backslash(xy \cdot z). \tag{3.49}$$

Dacă în egalitatea (3.49) notăm $xy = t$, atunci $x = t / y$,

$$(y\backslash(t/y))y \cdot z = y\backslash(t \cdot z). \tag{3.50}$$

Dacă în egalitatea (3.50) notăm $y = t$ și folosim identitatea (1.3), atunci avem

$$(y\backslash(y/y))y \cdot z = z. \tag{3.51}$$

Ultima egalitate arată că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are unitate la stânga.

Următorul cvazigrup satisface identității F_{16} și nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Corolarul 3.5.8. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{29} $(y \cdot xz)x = y(x \cdot zx)$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{29} = (F_{16})^*$. □

Teorema 3.5.14. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{17} (*Moufang la stânga*) $(xy \cdot x)z = x(y \cdot xz)$ este buclă [22].

Demonstrație. A se vedea [37, 58, 59]. □

Corolarul 3.5.9. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{27} (*Moufang la dreapta*) $(yx \cdot z)x = y(x \cdot zx)$ este buclă.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{27} = (F_{17})^*$. □

Teorema 3.5.15. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{18} $(x \cdot yx)z = x(yx \cdot z)$ este grup [22].

Demonstrație. Notăm yx prin variabila t. Atunci identitatea F_{18} capătă forma $xt \cdot z = x \cdot tz$. Restul urmează din Lema 3.5.3. □

Corolarul 3.5.10. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{28} $(y \cdot xz)x = y(xz \cdot x)$ este grup [22].

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{28} = (F_{18})^*$. □

Teorema 3.5.16. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{19} (*Bol la stânga*) $(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Demonstrație. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{19} nu are unitate la stânga.

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	2	1	0
2	0	2	1

Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{19} are unitate la dreapta. Dacă în identitatea $(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$ înlocuim $z = e_x$, atunci avem $(x \cdot yx)e_x = x \cdot yx$, pentru toți $x, y \in Q$ [41]. □

Corolarul 3.5.11. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{26} (*Bol la dreapta*) $(yx \cdot z)x = y(xz \cdot x)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{26} = (F_{19})^*$. □

Teorema 3.5.17. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{20} $x(yx \cdot z) = x(y \cdot xz)$ este grup.

Demonstrație. Dacă simplificăm din stânga în identitatea $x(yx \cdot z) = x(y \cdot xz)$, atunci avem $yx \cdot z = y \cdot xz$. Restul urmează din Lema 3.5.3. □

Corolarul 3.5.12. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{25} $(yx \cdot z)x = (y \cdot xz)x$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{25} = (F_{20})^*$. □

Teorema 3.5.18. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{31} $yx \cdot xz = (yx \cdot x)z$ este grup [22].

Demonstrație. Dacă notăm yx prin t, atunci din identitatea F_{31} obținem identitatea de asociativitate $t \cdot xz = tx \cdot z$. □

Corolarul 3.5.13. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{34} $yx \cdot xz = y(x \cdot xz)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{34} = (F_{31})^*$. □

Teorema 3.5.19. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{32} $yx \cdot xz = (y \cdot xx)z$ este grup [22].

Demonstrație. Vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{32} are unitate la stânga. În identitatea F_{32} $yx \cdot xz = (y \cdot xx)z$ facem substituția $y \to x/(zz), x \to z, z \to y$ și obținem

$$\big((x/zz)zz\big)y = \big((x/zz)z\big) \cdot zy, \tag{3.52}$$

și după aplicarea identității (1.2) avem

$$xy = \big((x/zz)z\big) \cdot zy. \tag{3.53}$$

Dacă vom nota zy prin litera t, atunci $y = z\backslash t$. Și noi putem rescrie egalitatea (3.53) în forma

$$x(z\backslash t) = \big((x/zz)z\big) \cdot t. \tag{3.54}$$

Dacă notăm în egalitatea (3.54) $x = z$, atunci avem

$$x(x\backslash t) \overset{(1.1)}{=} t = \big((x/xx)x\big) \cdot t. \qquad (3.55)$$

Am demonstrat că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{32} are unitate la stânga $f = ((x/xx)x)$.

Dacă substituim în identitatea F_{32} $x = e$, atunci avem

$$y \cdot ez = yz, ez = z, e = f. \qquad (3.56)$$

Deoarece în cvazigrupul $(Q,\cdot)$ există unitate la stânga, atunci există de asemenea și unitate la dreapta.

Dacă în identitatea F_{32} notăm $z = e$, atunci avem

$$yx \cdot x = y \cdot xx. \qquad (3.57)$$

Dacă aplicăm identitatea (3.57) din partea dreaptă a identității F_{32}, atunci avem

$$yx \cdot xz = (yx \cdot x)z. \qquad (3.58)$$

Pentru a demonstra că cvazigrupul cu identitatea F_{32} este grup, putem nota în identitatea (3.58) yx prin litera t și aplica Lemele 3.5.2. și 3.5.3. □

Corolarul 3.5.14. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{33} $yx \cdot xz = y(xx \cdot z)$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{33} = (F_{32})^*$. □

Teorema 3.5.20. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{35} $(yx \cdot x)z = (y \cdot xx)z$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Demonstrație. Demonstrăm că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{35} are unitate la dreapta. În identitatea F_{35} simplificăm din dreapta și avem

$$yx \cdot x = y \cdot xx. \qquad (3.59)$$

Dacă în identitatea (3.59) notăm $yx = t$, atunci $t/x = y$. Folosind această substituție, noi putem rescrie identitatea (3.59) în felul următor

$$tx = (t/x) \cdot xx. \qquad (3.60)$$

Presupunem că $x := y\backslash x$ în identitatea F_{35}. Atunci avem

$$\big(y(y\backslash x) \cdot (y\backslash x)\big)z \overset{(1.1)}{=} \big(x \cdot (y\backslash x)\big)z = \big(y \cdot (y\backslash x)(y\backslash x)\big)z. \qquad (3.61)$$

După simplificarea din dreapta în identitatea (3.61), avem

$$x \cdot (y\backslash x) = y \cdot (y\backslash x)(y\backslash x). \qquad (3.62)$$

Din identitatea (3.62) cu ajutorul operației diviziunii din dreapta "\" avem

$$(y\backslash x)(y\backslash x) = y\backslash\big(x \cdot (y\backslash x)\big). \qquad (3.63)$$

Dacă înlocuim în identitatea (3.63) x = y, atunci avem

$$(x\backslash x)(x\backslash x) = x\backslash\big(x(x\backslash x)\big) \overset{(1.1)}{=} x\backslash x. \qquad (3.64)$$

În identitatea (3.60) fie $x := z\backslash z$, pentru careva $z \in Q$. Atunci vom obține

$$t(z\backslash z) = \big(t/(z\backslash z)\big)\cdot(z\backslash z)(z\backslash z) \overset{(3.64)}{=} \big(t/(z\backslash z)\big)\cdot(z\backslash z) \overset{(1.2)}{=} t. \qquad (3.65)$$

Următorul exemplu demonstrează că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{35} nu are unitate la stânga.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	2	3	4	5
1	0	1	3	2	5	4
2	3	2	4	5	0	1
3	2	3	5	4	1	0
4	5	4	0	1	2	3
5	4	5	1	0	3	2

□

Corolarul 3.5.15. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{40} $y(xx\cdot z) = y(x\cdot xz)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{35} = (F_{40})^*$. □

Teorema 3.5.21. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{36} (*RC identitate*) $(yx\cdot x)z = y(xx\cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{36} are unitate la stânga. Dacă vom substitui $y:=f_x$ în identitatea $(yx\cdot x)z = y(xx\cdot z)$, atunci vom obține

$$(f_x x\cdot x)z = f_x(xx\cdot z), xx\cdot z = f_x(xx\cdot z). \qquad (3.66)$$

Din egalitatea (3.66) urmează că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{36} are unitate la stânga. Următorul exemplu demonstrează că unitatea la dreapta nu există.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Corolarul 3.5.16. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{39} (*LC identitate*) $(y\cdot xx)z = y(x\cdot xz)$ nu are unitate la stânga și are unitate la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{39} = (F_{36})^*$. □

Teorema 3.5.22. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{37} (*C identitate*) $(yx\cdot x)z = y(x\cdot xz)$ nu are unitate nici la stânga și nici la dreapta.

Demonstrație. Dăm exemplul necesar.

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

□

Teorema 3.5.23. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{38} $(y\cdot xx)z = y(xx\cdot z)$ este buclă [22].

Demonstrație. În identitatea F_{38} substituim $y \coloneqq f_{xx}$. Atunci avem

$$(f_{xx}\cdot xx)z = f_{xx}(xx\cdot z), xx\cdot z = f_{xx}(xx\cdot z). \quad (3.67)$$

În cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{38} există unitate la stânga.

În identitatea F_{38} substituim $z \coloneqq e_{xx}$. Atunci avem

$$(y\cdot xx)e_{xx} = y(xx\cdot e_{xx}), (y\cdot xx)e_{xx} = y\cdot xx. \quad (3.68)$$

Prin urmare în cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{38} există unitate la dreapta. □

Următorul exemplu demonstrează că cvazigrupul cu identitatea F_{38} nu este asociativ; buclă cu identitatea F_{38} fără proprietatea lui Lagrange.

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	3	4	2
2	2	4	0	1	3
3	3	2	4	0	1
4	4	3	1	2	0

Teorema 3.5.24. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{41} (*LC identitate*) $xx\cdot yz = (x\cdot xy)z$ este buclă [22].

Demonstrație. Vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{41} are unitate la stânga. În identitatea F_{41} vom substitui $y \coloneqq e_x$. Atunci avem

$$xx\cdot e_x z = (x\cdot xe_x)z, xx\cdot e_x z = xx\cdot z, e_x z = z. \quad (3.69)$$

Vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{41} are unitate la dreapta. În identitatea F_{41} vom substitui $y \coloneqq f_x$. Atunci avem

$$xx\cdot f_z z = (x\cdot xf_z)z, xx\cdot z = (x\cdot xf_z)z, xx = x\cdot xf_z, x = xf_z. \quad (3.70)$$

□

Următorul exemplu demonstrează că bucla cu identitatea F_{41} nu este asociativă.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	3	5	2	4
2	2	5	0	4	1	3
3	3	4	1	0	5	2
4	4	3	5	2	0	1
5	5	2	4	1	3	0

Corolarul 3.5.17. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{53} (*RC identitate*) $yz \cdot xx = y(zx \cdot x)$ este buclă.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{53} = (F_{41})^*$. □

Teorema 3.5.25. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{42} $xx \cdot yz = (xx \cdot y)z$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta [22].

Demonstrație. Vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{42} are unitate la stânga. În identitatea F_{42} vom substitui $y \coloneqq e_{xx}$. Atunci avem

$$xx \cdot e_{xx}z = (xx \cdot e_{xx})z, xx \cdot e_{xx}z = xx \cdot z, e_{xx}z = z. \quad (3.71)$$

Următorul exemplu demonstrează că bucla la stânga cu identitatea F_{42} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Corolarul 3.5.18. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{54} $yz \cdot xx = y(z \cdot xx)$ are unitate la dreapta și nu are unitate la stânga.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{54} = (F_{42})^*$. □

Teorema 3.5.26. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{43} $xx \cdot yz = x(x \cdot yz)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{43} are unitate la stânga. În identitatea F_{43} vom substitui $x = y = f_z$. Atunci avem

$$f_z f_z \cdot f_z z = f_z(f_z \cdot f_z z), f_z f_z \cdot z = f_z z, f_z f_z = f_z. \quad (3.72)$$

Mai departe în identitatea F_{43} vom substitui $x = f_x$. Atunci avem $f_x f_x \cdot yz = f_x(f_x \cdot yz)$, aplicând egalitatea (3.72),

$$f_x \cdot yz = f_x(f_x \cdot yz), yz = f_x \cdot yz. \quad (3.73)$$

Următorul exemplu demonstrează că bucla la stânga cu identitatea F_{43} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	3	2	5	4
1	0	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	0	1
3	3	2	5	4	1	0
4	4	5	0	1	2	3
5	5	4	1	0	3	2

□

Corolarul 3.5.19. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{51} $yz \cdot xx = (yz \cdot x)x$ are unitate la dreapta și nu are unitate la stânga [22].

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1 $F_{51} = (F_{43})^*$. □

Teorema 3.5.27. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{44} $xx \cdot yz = x(xy \cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{44} are unitate la stânga. În identitatea F_{44} substituim $x = f_y$. Atunci avem

$$f_y f_y \cdot yz = f_y(f_y y \cdot z), f_y f_y \cdot yz = f_y \cdot yz, f_y f_y = f_y. \tag{3.74}$$

Mai departe în identitatea F_{44} substituim $x = f_x$. Atunci avem

$f_x f_x \cdot yz = f_x(f_x y \cdot z)$, folosind egalitatea (3.74),

$$f_x \cdot yz = f_x(f_x y \cdot z), yz = f_x y \cdot z, y = f_x y. \tag{3.75}$$

Următorul exemplu demonstrează că bucla la stânga cu identitatea F_{44} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Teorema 3.5.28. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{45} $(x \cdot xy)z = (xx \cdot y)z$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{45} are unitate la stânga. În identitatea F_{45} simplificăm din dreapta. Atunci avem

$$x \cdot xy = xx \cdot y. \tag{3.76}$$

În identitatea (3.76) substituim $x = f_y$ și obținem

$$f_y \cdot f_y y = f_y f_y \cdot y, f_y f_y = f_y. \tag{3.77}$$

Mai departe în identitatea (3.76) substituim $x = f_x$. Atunci avem

$f_x \cdot f_x y = f_x f_x \cdot y$, folosind egalitatea (3.77),

$$f_x \cdot f_x y = f_x y, f_x y = y. \tag{3.78}$$

Următorul exemplu demonstrează că bucla la stânga cu identitatea F_{45} nu are unitate la dreapta.

·	0	1	2	3	4	5
0	1	0	3	2	5	4
1	0	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	0	1
3	3	2	5	4	1	0
4	4	5	0	1	2	3
5	5	4	1	0	3	2

□

Corolarul 3.5.20. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{60} $y(zx \cdot x) = y(z \cdot xx)$ are unitate la dreapta și nu are unitate la stânga.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{60} = (F_{45})^*$. □

Teorema 3.5.29. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{46} (LC *identitate*) $(x \cdot xy)z = x(x \cdot yz)$ nu are unitate nici la stânga și nici la dreapta.

Demonstrație. Aducem exemplul necesar.

·	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

□

Corolarul 3.5.21. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{56} (*RC identitate*) $(yz \cdot x)x = y(zx \cdot x)$ nu are unitate nici la stânga și nici la dreapta.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{56} = (F_{46})^*$. □

Teorema 3.5.30. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{47} $(x \cdot xy)z = x(xy \cdot z)$ este grup [22].

Demonstrație. Dacă în identitatea F_{47} notăm xy prin variabila t, atunci obținem $xt \cdot z = x \cdot tz$.

□

Corolarul 3.5.22. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{58} $(y \cdot zx)x = y(zx \cdot x)$ este grup [22].

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{58} = (F_{47})^*$. □

Teorema 3.5.31. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{48} $(xx \cdot y)z = x(x \cdot yz)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta [22].

Demonstrație. Vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{48} are unitate la stânga. În identitatea F_{48} substituim $y = f_{yz}$. Atunci avem $\left(f_{yz}f_{yz} \cdot y\right)z = f_{yz}\left(f_{yz} \cdot yz\right)$,

$$\left(f_{yz}f_{yz} \cdot y\right)z = yz, f_{yz}f_{yz} \cdot y = y. \tag{3.79}$$

Următorul exemplu demonstrează că bucla la stânga cu identitatea F_{48} nu are unitate la dreapta.

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	1	4	3	0	2
1	3	0	4	2	1
2	0	1	2	3	4
3	2	3	1	4	0
4	4	2	0	1	3

□

Corolarul 3.5.23. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{57} $(yz \cdot x)x = y(z \cdot xx)$ are unitate la dreapta și nu are unitate la stânga [22].

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{57} = (F_{48})^*$. □

Teorema 3.5.32. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{49} $(xx \cdot y)z = x(xy \cdot z)$ are unitate la stânga și nu are unitate la dreapta.

Demonstrație. Vom demonstra că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{49} are unitate la stânga. În identitatea F_{49} trecem $y \to (xx)\backslash y$. Atunci avem

$$\left(xx \cdot (xx\backslash y)\right)z \overset{(1.1)}{=} yz = x\left(\left(x\left((xx)\backslash y\right)\right) \cdot z\right). \tag{3.80}$$

Mai departe aplicăm în egalitatea (3.80) diviziunea din dreapta "\",

$$\left(x\left((xx)\backslash y\right)\right)z = x\backslash(yz). \tag{3.81}$$

Dacă înlocuim în egalitatea (3.81) $x = y$, atunci avem

$$\left(x\left((xx)\backslash x\right)\right)z = x\backslash(xz) \overset{(1.1)}{=} z. \tag{3.82}$$

Următorul exemplu demonstrează că bucla la stânga cu identitatea F_{49} nu are unitate la dreapta.

·	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

□

Corolarul 3.5.24. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{59} $(y \cdot zx)x = y(z \cdot xx)$ are unitate la dreapta și nu are unitate la stânga.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{59} = (F_{49})^*$. □

Teorema 3.5.33. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{50} $x(x \cdot yz) = x(xy \cdot z)$ este grup.

Demonstrație. Dacă simplificăm din stânga în identitatea F_{50}, atunci avem asociativitatea $x \cdot yz = xy \cdot z$. Restul urmează din Lema 3.5.3. □

Corolarul 3.5.25. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea F_{55} $(yz \cdot x)x = (y \cdot zx)x$ este grup.

Demonstrație. Din Teorema 3.5.1. $F_{55} = (F_{50})^*$. □

3.6. Concluzii la capitolul 3

În Capitolul 3 s-a definit o clasă nouă de cvazigrupuri (i-cvazigrupuri) și au fost cercetate unele proprietăți ale acestei clase și relațiile cu alte clase de cvazigrupuri. A fost complet soluționată problema cercetării existenței unității unilaterale în cvazigrupurile cu identități de tip Bol-Moufang enumerate în [20].

În baza cercetărilor efectuate în Capitolul 3 și a rezultatelor obținute putem formula următoarele concluzii:

1. Presupunând că i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este inversabil la dreapta s-a demonstrat că este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga și distributantul $D = \{f\}$. Presupunând că distributantul D i-cvazigrupului $(Q,\cdot)$ este nevid și $(Q,\cdot)$ este izotop unei bucle Bol la stânga s-a dovedit că $(Q,\cdot)$ este un cvazigrup Bol la stânga.

   S-a găsit relația i-cvazigrupurilor cu alte cvazigrupuri: presupunând că i-cvazigrupul este idempotent s-a demonstrat că este cvazigrup Bol la stânga, cvazigrup Stein la dreapta, distributiv la stânga și miezul cvazigrupului Bol la stânga de asemenea este i-cvazigrup; s-a demonstrat că i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este buclă Moufang în care $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in Q$, presupunând că $(Q,\cdot)$ are unitate la dreapta e; s-a demonstrat că i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang cu unitate la stânga f și izotop unui grup abelian, presupunând că $(Q,\cdot)$ este unipotent.

Cercetând i-cvazigrupurile cu legile alternative și legea de elasticitate s-au obținut următoarele: presupunând că în i-cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc legea alternativă la stânga (la dreapta) s-a dovedit că $(Q,\cdot)$ este buclă Moufang, unde $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in Q$; s-a demonstrat că în orice i-cvazigrup $(Q,\cdot)$ cu identitatea de elasticitate mulțimea tuturor unităților locale formează subgrup Bol la stânga.

Cercetând morfismele acestei clase: presupunând că substituția α a mulțimii Q i-cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f este pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ cu companionul k, s-a demonstrat că k este element Bol la stânga [87, 88].

2. În ultimul paragraf a fost soluționată problema existenței unității unilaterale pentru fiecare cvazigrup ce satisface identități de tip Bol-Moufang. Am obținut că (a se vedea tabelul 3.1): cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu orice dintre identitățile $F_7, F_{16}, F_{26}, F_{36}, F_{40}, F_{43}, F_{44}, F_{45}, F_{49}$ este buclă la stânga; cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu orice dintre identitățile $F_8, F_{19}, F_{29}, F_{35}, F_{39}, F_{54}, F_{59}, F_{60}$ este buclă la dreapta; cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu orice dintre identitățile $F_{15}, F_{30}, F_{37}, F_{46}, F_{56}$ nu are unitate [89, 90, 91].

În acest capitol sunt realizate obiectivele, care se referă la cercetarea morfismelor, proprietăților, relațiilor cu alte clase de cvazigrupuri ale cvazigrupurilor noi definite (anume i-cvazigrupuri) și la cercetarea cvazigrupurilor cu orice dintre cele 60 de identități clasice de tip Bol-Moufang enumerate în [20] la existența unității unilaterale. Este prezentat tabelul cu datele privind existența unității pentru fiecare dintre cele 60 de identități.

Rezultatele obținute în capitolul 3 sunt publicate în [87, 88, 89, 90, 91].

4. CVAZIGRUPURI TRANZITIVE LA STÂNGA. CVAZIGRUPURI NEUMANN ȘI SCHWEIZER

Dacă nucleul la stânga (față de un element k) coincide cu tot cvazigrupul $(Q,\cdot)$, atunci grupul permutărilor regulare la stânga este tranzitiv pe mulțimea Q. În legătură cu aceasta s-a introdus următoarea noțiune:

Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește $\mathcal{L}$-tranzitiv, dacă grupul $\mathcal{L}$ al tuturor permutărilor regulare este tranzitiv pe mulțimea Q.

Analog se definește $\mathcal{R}$- și Φ-tranzitiv. Exemplu simplu de cvazigrupuri tranzitive (adică $\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$- sau Φ-tranzitive) poate servi grupul. Cvazigrupurile tranzitive sunt strâns legate cu grupurile, și anume are loc:

Teoremă. Orice buclă $(Q,\cdot)$, izotopă unui cvazigrup tranzitiv (Q, A), este grup.

S-a observat că pentru $\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$-tranzitive afirmația inversă, în general vorbind, nu este adevărată. Deci, există cvazigrupuri tranzitive, diferite de grupuri.

În acest capitol sunt cercetate proprietățile cvazigrupurilor tranzitive la stânga (inclusiv autotopiile lor și pseudoautomorfismele), sunt stabilite conexiunile lor cu unele clase de cvazigrupuri. Sunt descrise GA-cvazigrupurile la dreapta tranzitive la stânga.

De asemenea s-a cercetat clasa de cvazigrupuri Neumann și anume proprietățile de bază, morfismele, G-proprietățile.

4.1. Proprietățile de bază ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga

În acest paragraf s-au cercetat proprietățile principale ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga.

Definiția 4.1.1. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *cvazigrup tranzitiv la stânga*, dacă acest cvazigrup verifică identitatea

$$xy \cdot xz = yz. \tag{4.1}$$

Este în [92, 43].

În publicația [43] s-a demonstrat: dacă în cvazigrupul $(Q,\cdot)$ are loc asociativitatea $x \cdot yz = xy \cdot z$ (adică acest cvazigrup este grup), atunci parastrofii (23) și (132) acestui cvazigrup verifică identitatea tranzitivă la stânga (4.1), parastrofii (13) și (123) acestui cvazigrup satisfac identități tranzitive la dreapta (adică identități $yx \cdot zx = yz$).

În publicațiile [93, 34, 94, 95, 96] cvazigrupurile tranzitive la stânga se numesc cvazigrupuri Ward. În [94] sunt prezentate argumentele principale de necesitate a cercetării cvazigrupurilor tranzitive la stânga. În această publicație se evidențiază că Frobenius a folosit diviziunea la dreapta de grup în lucrările sale dedicate teoriei reprezentării grupurilor [97].

Din rezultatele publicațiilor menționate mai sus urmează următoarea teoremă.

Teorema 4.1.1. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(G,\circ)$ poate fi obținut din grupul $(G,+)$ (nu neapărat comutativ) folosind următoarea construcție

$$x \circ y = -x + y = Ix + y, \tag{4.2}$$

unde $x + Ix = 0$, pentru toți $x, y \in G$ [43].

Din Teorema 4.1.1. urmează că orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\circ)$ este unipotent, adică există element fixat 0 al mulțimii Q astfel, încât $x \circ x = 0$, pentru toți $x \in Q$.

Remarca 4.1.1. Din Teorema 4.1.1. urmează că cvazigrupul $(Q,\circ)$ este o aplicație izotopică a unui grup $(Q,+)$ cu izotopia $(I,\varepsilon,\varepsilon)$.

Corolarul 4.1.1. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este comutativ dacă și numai dacă este grup abelian cu orice element diferit de 0 de ordin doi.

Demonstrație. Din comutativitate cu ajutorul egalității (4.2) avem $-x + y = -y + x$, pentru orice $x, y \in Q$. Prin urmare $-x = x, x + x = 0$, pentru toți $x \in Q$.

Invers. Este evident că orice grup abelian, orice element al cărui este de ordin doi (cu excepția lui 0), este tranzitiv la stânga. □

Următorul corolar ușor urmează și din Teorema 4.1.1.

Corolarul 4.1.2. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ are unitate la stânga, adică există astfel element $f \in Q$, încât $f \cdot x = x$, pentru toți $x \in Q$.

Demonstrație. Dacă de înlocuit în identitatea (4.1) $x = y$, atunci avem $xx \cdot xz = xz$. Prin urmare $f = x \cdot x$. □

Dacă folosim Teorema 4.1.1., atunci Corolarul 4.1.2. ia forma:

Remarca 4.1.2. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\circ)$ are unitate la stânga, și anume, elementul 0 este unitate la stânga.

Demonstrație. Dacă punem în ecuația (4.2) $x = 0$, unde 0 este unitatea grupului $(Q,+)$, atunci $0 \circ y = -0 + y = y$, pentru orice $y \in Q$. □

Remarca 4.1.3. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este LIP-cvazigrup [92].

Demonstrație. În identitatea (4.1) substituim $y = f$, unde $fx = x$, pentru orice $x \in Q$, și obținem următoarea egalitate $xf \cdot xz = fz$. Mai departe avem $xf \cdot xz = z$. Din ultima egalitate avem că $R_f = I_l$. □

Corolarul 4.1.3. În cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ are loc următoarea egalitate $R_f^{-1} = R_f$.

Demonstrație. Din Remarca 4.1.3. avem $R_f = I_l$. Atunci $R_f^{-1} = I_l^{-1}$. Însă în LIP-cvazigrupuri $I_l = I_l^{-1}$ [11, 41]. □

Teorema 4.1.2. Orice buclă, izotopă unui cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$, este grup [92].

Demonstrație. *Prima metodă*. Din Teorema 4.1.1. urmează că orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ izotop unui grup $(Q,+)$ de forma $x \circ y = Ix + y$, unde $x + Ix = 0$, pentru toți $x \in Q$. Prin urmare, printre izotopii buclei cvazigrupului $(Q,\cdot)$ există un grup.

Mai mult, din teorema lui Albert [11, 41] rezultă că orice buclă, care este izotop al unui cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$, este grup.

A doua metodă. Cercetăm izotopul buclei cvazigrupului $(Q,\cdot)$ de forma

$$x + y = R_f^{-1}x \cdot L_f^{-1}y = xf \cdot y. \tag{4.4}$$

Am aplicat Corolarul 4.1.2 și Corolarul 4.1.3. Din Teorema 4.1.1. urmează că acest izotop este grup.

Mai departe, din teorema lui Albert urmează că orice buclă, care este izotop al unui cvazigrup tranzitiv $(Q,\cdot)$, este grup. □

Corolarul 4.1.4. În cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ și grupul izotop lui $(Q,+)$ (Teorema 4.1.1.) avem $R_f^{\cdot} = I^{+}$.

Demonstrație. Demonstrația urmează din egalitățile (4.2) și (4.4). □

În cvazigrupuri tranzitive la stânga identitatea cvazigrupului Bol la dreapta $(yx \cdot z)x = yL_{f_x}^{-1}(xz \cdot x)$ se va transforma în identitatea buclei Bol la dreapta

$$(yx \cdot z)x = y(xz \cdot x), \tag{4.5}$$

deoarece orice cvazigrup tranzitiv la stânga are unitate la stânga f (Corolarul 4.1.2.).

Exemplul 4.1.1. *Dăm un exemplu de cvazigrup tranzitiv la stânga. Este parastroful (23) grupului* S_3.

$\ast$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	2	0	1	4	5	3
2	1	2	0	5	3	4
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	3	2	0	1
5	5	3	4	1	2	0

4.2. Cvazigrupuri tranzitive la stânga și alte clase de cvazigrupuri

Acum să cercetăm relația cvazigrupurilor tranzitive la stânga cu alte clase de cvazigrupuri. În altă formă următoarea teoremă este demonstrată în [92].

Teorema 4.2.1. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Bol la stânga.

Demonstrație. Cercetăm izotopul buclei cvazigrupului $(Q,\cdot)$ de forma

$$x \circ y = R_f^{-1}x \cdot L_f^{-1}y = xf \cdot y. \tag{4.6}$$

Din Teorema 4.1.2. urmează că acest izotop este un grup. Vom scrie partea stângă a identității Bol la stânga în următoarea formă

$$x(y \cdot xz) = R_f x \circ R_f y \circ R_f x \circ z. \tag{4.7}$$

Partea dreaptă poate fi transcrisă în forma $R_{e_x}^{-1}(x \cdot yx) \cdot z = R_f t \circ z$, unde $t = R_{e_x}^{-1}(x \cdot yx)$. Atunci $x \cdot yx = R_{e_x} t = t \cdot e_x$. Trecând în ultima egalitate la operația " $\circ$ " avem $R_f x \circ R_f y \circ x = R_f t \circ e_x$,

$$R_f x \circ R_f y \circ x \circ (e_x)^{-1} = R_f t. \tag{4.8}$$

Din egalitatea $x \cdot e_x = x$ avem $R_f x \circ e_x = x, (e_x)^{-1} = x^{-1} \circ R_f x$. Dacă înlocuim în egalitatea (4.8) ultima egalitate, atunci avem $R_f x \circ R_f y \circ x \circ x^{-1} \circ R_f x = R_f t$, $R_f x \circ R_f y \circ R_f x = R_f t$. Prin urmare,

$$R_f x \circ R_f y \circ R_f x \circ z = R_f t \circ z. \tag{4.9}$$

Partea dreaptă a ecuației (4.7) coincide cu partea stângă a ecuației (4.9) ce și demonstrează teorema. □

Propoziția 4.2.1. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este izotop unui grup abelian dacă și numai dacă translația R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Demonstrație. Este ușor de verificat. □

În [94] condițiile, când cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este izotop unui grup abelian se dau cu ajutorul Teoremei 4.1.1 în următoarea formă:

Propoziția 4.2.2. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este izotop unui grup abelian dacă și numai dacă permutarea $I, x + Ix = 0$, pentru orice $x \in Q$, este automorfism al grupului $(Q, +)$.

Demonstrație. Este ușor de verificat. □

Lema 4.2.1. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ verifică identitatea (identitatea buclei Bol la dreapta)

$$(zx \cdot y)x = z(xy \cdot x) \tag{4.10}$$

dacă și numai dacă permutarea R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Demonstrație. Demonstrația urmează din egalitatea (4.6), aplicând calcule directe. □

Remarca 4.2.1. Utilizând egalitatea (4.2), putem scrie identitatea (4.10) în următoarea formă $-z - y = -y - z$. Din această egalitate urmează că grupul $(Q, +)$ este comutativ și că permutarea $Ix = -x$, pentru orice $x \in Q$ este automorfism al grupului $(Q, +)$.

Propoziția 4.2.3. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Moufang [81] dacă și numai dacă translația R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Demonstrație. Se știe că orice cvazigrup Bol la stânga și la dreapta este cvazigrup Moufang. A se vedea, de exemplu,([51], p. 80). Mai departe urmează din Teorema 4.2.1 și Lema 4.2.1. □

Definiția 4.2.1. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea $x \cdot yz = xy \cdot e_x z$, unde $x \cdot e_x = x$, pentru orice $x \in Q$, se numește F-*cvazigrup la stânga*.

Teorema 4.2.2. Orice cvazigrup tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este F-cvazigrup la stânga dacă și numai dacă translația R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Demonstrație. Clar că demonstrând această teoremă, putem utiliza orice abordare a cvazigrupurilor tranzitive la stânga și anume printre Teoremele 4.1.1. sau 4.1.2.

Aici vom aborda către Teorema 4.1.1. În acest caz din egalitatea $x \cdot e_x = x$ avem $e_x = 2x$, pentru orice $x \in Q$. Presupunem că cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este F-cvazigrup la stânga. Atunci putem rescrie egalitatea F-cvazigrupului la stânga în forma

$$-x + (-y + z) = -(-x + y) + (-2x + z). \tag{4.11}$$

Mai departe, folosind proprietățile grupului, obținem

$$-x - y + z = -y + x - 2x + z, -x - y = -y - x. \tag{4.12}$$

Prin urmare, grupul $(Q, +)$ este comutativ și pentru a termina demonstrația se poate aplica Propoziția 4.2.1.

Invers. Presupunem că în cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ translația R_f este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Din Propoziția 4.2.1. grupul $(Q, +)$ este comutativ și identitatea (4.11) are loc. □

4.3. Nucleul cvazigrupurilor tranzitive la stânga

Acum să trecem la caracterizarea nucleului cvazigrupurilor tranzitive la stânga.

Teorema 4.3.1. Nucleul la stânga $(N_l,\cdot)$ al cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este subgrup normal al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, care constă din elemente de ordin doi, care se află în centrul grupului $(Q, +)$.

Demonstrație. E bine cunoscut [11, 40] că mulțimile N_l și N_r formează subgrupuri ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Folosind (4.2), putem rescrie egalitatea $a \cdot xy = ax \cdot y$ în următoarea formă $-a - x + y = -(-a + x) + y, -a - x = -x + a$. Dacă $x = 0$, atunci avem $-a = a, a + a = 0$. Aceasta înseamnă că elementul a are ordin doi, elementul a se află în centrul $(Z, +)$ grupului $(Q, +)$, nucleul la stânga $(N_l, +)$ este subgrup normal abelian al grupului $(Q, +)$.

Din Remarca 4.1.1. și rezultatele despre congruențele normale ale cvazigrupurilor izotope [13] urmează că $(N_l,\cdot) \trianglelefteq (Q,\cdot)$. □

Teorema 4.3.2. Dacă cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ are nucleu la dreapta netrivial, atunci este grup comutativ cu toate elementele nenule de ordin doi.

Demonstrație. Folosind (4.2) putem rescrie egalitatea $x \cdot ya = xy \cdot a$ în următoarea formă $-x + (-y + a) = -(-x + y) + a, -x - y = -y + x, -y = x - y + x, -x = y + x - y,$ $Ix = y + x - y$, pentru orice $x, y \in Q$.

Ultimul înseamnă că permutarea I este automorfism al grupului $(Q, +)$, grupul $(Q, +)$ este comutativ. Din egalitatea $-x = y + x - y$ avem $-x = x, x + x = 0$. Ultimul înseamnă că în grupul $(Q, +)$ toate elementele nenule au ordin doi. □

Corolarul 4.3.1. Dacă cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este asociativ, atunci $(Q,\cdot)$ este grup abelian al cărui orice element (cu excepția unității sale) este de ordin doi.

Demonstrație. Demonstrația urmează din Teorema 4.3.1. În acest caz nucleul la stânga coincide cu cvazigrupul $(Q,\cdot)$. □

4.4. Despre morfismele cvazigrupurilor tranzitive la stânga

În teoria cvazigrupurilor un rol semnificativ îl joacă și autotopiile. Dăm două forme ale oricărei autotopii a unui cvazigrup tranzitiv la stânga.

Următoarea teoremă pentru prima dată a fost demonstrată în [92]. Demonstrația noastră diferă de demonstrația dată în [92].

Teorema 4.4.1. Orice autotopie (α, β, γ) a cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ are forma

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(L^{\cdot}_a, R^{\cdot}_b, R^{\cdot}_f L^{\cdot}_a R^{\cdot}_b\right) R^{\cdot}_f \theta, \tag{4.13}$$

unde a, b sunt elemente fixate ale mulțimii Q, θ este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ și grupului $(Q, +)$.

Demonstrație. Vom folosi identitatea (4.2) a cvazigrupului tranzitiv la stânga. Din Remarca 4.1.1. urmează că cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ și grupul $(Q, +)$ sunt izotopi cu izotopia $(I, \varepsilon, \varepsilon)$. Deaceia grupurile autotopice ale acestor cvazigrupuri sunt izomorfe [39], [34] și formele autotopiilor sunt conjugate cu izotopia $(I, \varepsilon, \varepsilon)$.

Cunoaștem [11, 41] că orice autotopie a grupului $(Q, +)$ are următoarea formă $(L^+_a, R^+_b, L^+_a R^+_b)\theta$, unde a, b elemente fixate ale mulțimii Q, θ este un automorfism al grupului $(Q, +)$. Din această cauză orice autotopie a cvazigrupului $(Q,\cdot)$ are forma

$$(IL^+_a I, R^+_b, L^+_a R^+_b)\theta. \tag{4.14}$$

Se știe că dacă permutarea θ este un automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, atunci θ este un automorfism al oricărui parastrof al cvazigrupului dat [41]. Din (4.2) avem $L_x^{\cdot} = IL_x^{+}, IL_x^{\cdot} = L_x^{+}$, $R_x^{\cdot} = R_x^{+}I, R_x^{\cdot}I = R_x^{+}$, pentru orice $x \in Q$. Folosind faptul că $I^2 = \varepsilon$ și $I = R_f^{\cdot}$, putem rescrie (4.14) în următoarea formă

$$(L_a^{\cdot}I, R_b^{\cdot}I, IL_a^{\cdot}R_b^{\cdot}I)\theta = \left(L_a^{\cdot}, R_b^{\cdot}, R_f^{\cdot}L_a^{\cdot}R_b^{\cdot}\right)R_f^{\cdot}\theta, \tag{4.15}$$

unde θ este un automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$. □

Lema 4.4.1. Grupurile componentelor a doua și a treia grupului tuturor autotopiilor LIP-cvazigrupului coincid ([41], Lema 2.40. 1.).

Lema 4.4.2. Orice cvaziautomorfism al cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ are forma $R_b^{\cdot}R_f^{\cdot}\theta$.

Demonstrație. Din Remarca 4.1.3. urmează că orice cvazigrup tranzitiv la stânga este LIP-cvazigrup. Restul urmează din Lema 4.4.1. și Teorema 4.4.1. □

4.5. *G*-proprietăți ale cvazigrupurilor tranzitive la stânga

Cunoaștem că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este G-cvazigrup la dreapta, dacă orice element al lui este companionul unui pseudoautomorfism la dreapta. Analog se definește G-cvazigrupul la stânga. Iar cvazigrupul, care este în același timp și G-cvazigrup la dreapta și G-cvazigrup la stânga, este G-cvazigrup. G-cvazigrupurile totdeauna au unitate, adică G-cvazigrupul este buclă. O să vorbim mai departe despre G-bucle.

Definiția 4.5.1. *G-buclă* este bucla izomorfă tuturor buclelor izotope ei [39, 40].

Importanța cercetării pseudoautomorfismelor urmează din următoarea teoremă a lui V.D. Belousov.

Teorema 4.5.1. Bucla $(L,\cdot)$ este G-buclă dacă și numai dacă orice element $x \in L$ este companionul căruiva pseudoautomorfism la dreapta și căruiva la stânga $(L,\cdot)$ ([11], Teorema 3.8).

Rezultatele lui V. D. Belousov deschid calea către cercetarea G-proprietăților, adică către cercetarea G-buclelor și G-cvazigrupurilor. Există legătură dintre nucleele cvazigrupurilor și pseudoautomorfismele cvazigrupurilor ([11], p. 47).

Definiția 4.5.2. Bijecția α a mulțimii Q se numește *A-pseudoautomorfism la dreapta* al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, dacă există bijecția β a mulțimii Q astfel, încât tripleta (α,β,β) este o autotopie a cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Bijecția β a mulțimii Q se numește *A-pseudoautomorfism la stânga* al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, dacă există bijecția α a mulțimii Q astfel, încât tripleta (α,β,α) este o autotopie a cvazigrupului $(Q,\cdot)$ ([41], Definiția 1.159).

Mulțimea tuturor primelor componente, a doua și a treia ale autotopiei cvazigrupului $(Q,\cdot)$ A-pseudoautomorfismului la dreapta (la stânga), mulțimea A-pseudoautomorfismelor la dreapta (la stânga) cvazigrupului $(Q,\cdot)$ formează grup față de operația de înmulțire ale acestor A-pseudoautomorfisme ca autotopii ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$ ([41], Teorema 1.161).

Vom nota grupurile enumerate mai sus, folosind litera Π cu indici diferiți în felul următor: ${}_1\Pi_l^A$, ${}_2\Pi_l^A$, ${}_3\Pi_l^A$, ${}_1\Pi_r^A$, ${}_2\Pi_r^A$ и ${}_3\Pi_r^A$. Litera A în colțul de sus din dreapta înseamnă că este pseudoautomorfism autotopic. De exemplu, ${}_2\Pi_r^A$ înseamnă grupul componentelor a doua ale A-pseudoautomorfismelor la dreapta cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Următoarea propoziție arată că în cazul «buclei» A-pseudoautomorfismele la dreapta și stânga se transformă în pseudoautomorfisme standarte.

Propoziția 4.5.1. În bucla la dreapta $(Q,\cdot)$ cu unitate la dreapta e, orice A-pseudoautomorfism la dreapta este pseudoautomorfism la dreapta.

În bucla la stânga $(Q,\cdot)$ cu unitate la stânga f, orice A-pseudoautomorfism la stânga este pseudoautomorfism la stânga ([41], Lema 1.165).

Definiția 4.5.3. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *GA-cvazigrup la dreapta*, dacă grupul ${}_2\Pi_r^A$ (sau grupul ${}_3\Pi_r^A$) este tranzitiv în mulțimea Q.

Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *GA-cvazigrup la stânga*, dacă grupul ${}_1\Pi_l^A$ (sau grupul ${}_3\Pi_l^A$) este tranzitiv în mulțimea Q.

GA-cvazigrupul la dreapta și la stânga se numește *GA-cvazigrup*.

Teorema 4.5.2. *Cazul 1.* Autotopia cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este A-pseudoautomorfism la dreapta dacă și numai dacă există elementul $a \in Q$ astfel, încât

$$R_f^{\cdot} = L_a^{\cdot}. \tag{4.16}$$

Cazul 2. Autotopia cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este A-pseudoautomorfism la stânga dacă și numai dacă are loc egalitatea

$$L_a^{\cdot} = R_f^{\cdot} L_a^{\cdot} R_b^{\cdot}, \tag{4.17}$$

pentru careva fixați $a, b \in Q$.

Demonstrație. Demonstrația urmează din Corolarul 4.1.3. și Teorema 4.4.1. □

Teorema 4.5.3. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este GA-cvazigrup la dreapta dacă și numai dacă $(Q,\cdot)$ este grup abelian de ordin doi.

Demonstrație. ⇒ Aici vom utiliza egalitatea (4.2). Putem rescrie egalitatea (4.16) $R_f x = L_a x$, $x \cdot f = a \cdot x$, pentru orice $x \in Q$ în forma

$$-x + f = -a + x. \tag{4.18}$$

Dacă punem $x = 0$ în egalitatea (4.18), atunci vom obține $f = -a, -f = f = a$. Prin urmare $a = f = 0$ (Corolarul 4.1.2., Remarca 4.1.2.).

Atunci egalitatea (4.18) o putem rescrie în forma $-x = x, x + x = 0$, pentru orice $x \in Q$. Astfel $x \cdot y = -x + y = x + y = y + x = -y + x = y \cdot x$. Am folosit un fapt binecunoscut [98] că orice grup, în care toate elementele nenule au ordin doi, este comutativ. Proprietățile cvazigrupurilor tranzitive la stânga sunt date în Corolarul 4.1.1.

$\Leftarrow$ Este evident. □

Corolarul 4.5.1. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este GA-cvazigrup dacă și numai dacă $(Q,\cdot)$ este grup abelian de ordin doi.

Demonstrație. Orice GA-cvazigrup este GA-cvazigrup la dreapta. □

Cvazigrupul prezentat în exemplul 4.1.1. nu verifică egalitatea (4.17). Atunci există cvazigrupuri tranzitive la stânga, care nu sunt GA-cvazigrupuri la dreapta sau la stânga. Cvazigrupul tranzitiv la stânga comutativ este GA-cvazigrup la dreapta. Ușor se vede că acest cvazigrup de asemenea este G-buclă.

Propoziția 4.5.2. Cvazigrupul tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ este simplu dacă și numai dacă grupul $(Q, +)$ este simplu.

Demonstrație. Din rezultatele ([41], Corolarul 1.308) și forma izotopiei (Remarca 4.1.1.) urmează că mulțimea (rețele) congruențelor normale ale cvazigrupului tranzitiv la stânga $(Q,\cdot)$ și grupului corespunzător $(Q, +)$ sunt egale. □

4.6. Rezultatele de bază ale cvazigrupurilor Neumann

În acest paragraf s-au cercetat proprietățile de bază ale clasei de cvazigrupuri Neumann.

Definiția 4.6.1. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ se numește *cvazigrup Neumann*, dacă $(Q,\cdot)$ verifică identitatea

$$x \cdot (yz \cdot yx) = z. \tag{4.19}$$

[99, 100, 101],([43] p. 248).

În articolele [99, 101, 43] se evidențiază următorul rezultat.

Teorema 4.6.1. Dacă cvazigrupul $(Q,\cdot)$ verifică următoarea identitate

$$xy \cdot z = y \cdot zx, \tag{4.20}$$

atunci parastroful (13) al acestui cvazigrup verifică identitatea Neumann (4.19).

Observați că identitatea (4.20) are următoarea identitate ca și parastroful (13): $(x \cdot yz) \cdot xy = z$ ([101], p. 313), [102].

Teorema 4.6.2. Dacă cvazigrupul $(Q,\cdot)$ verifică identitatea (4.20), atunci acest cvazigrup este grup abelian.

Demonstrație. În identitatea (4.20) substituim $x = e_z$. Atunci avem $e_z y \cdot z = y \cdot z e_z = yz$. Prin urmare, elementul e_z este unitate la stânga a cvazigrupului $(Q,\cdot)$, adică $e_z \cdot x = x$, pentru toți $x \in Q$. Fie $e_z = f$.

Să presupunem că în identitatea (4.20) $x = f$. Atunci $yz = y \cdot zf$ și după omitere $z = zf$. Prin urmare, elementul f este unitate a cvazigrupului $(Q,\cdot)$, adică cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este buclă. Dacă înlocuim în identitatea (4.20) $y = f$, atunci obținem că bucla $(Q,\cdot)$ este comutativă. Aplicând comutativitatea în (4.20) obținem o identitate asociativă $yz \cdot x = y \cdot zx$. □

Teorema 4.6.3. Orice cvazigrup Neumann este izotop unui grup abelian $(Q,+)$ de forma $x \cdot y = x - y$.

Demonstrație. Demonstrația rezultă din Teorema 4.6.1., Teorema 4.6.2. și următorul fapt ([51], p. 53): parastroful (13) $(Q,\cdot)$ al IP-buclei (este evident, că orice grup abelian $(Q,+)$ este IP-buclă) este izotop de forma $(\varepsilon, \rho, \varepsilon)$, adică $x \cdot y = x - y$, fiindcă în grupul abelian $\rho = I$, avem $x + Ix = 0$, pentru toți $x \in Q$. □

Teorema 4.6.4. Orice autotopie a cvazigrupului Neumann are forma

$$(L_a^+, L_{-b}^+, L_{a+b}^+)\theta, \tag{4.21}$$

unde $L_a^+, L_{-b}^+, L_{a+b}^+$ sunt translațiile grupului abelian $(Q,+), \theta \in Aut(Q,+)$.

Demonstrație. Conform Teoremei 4.6.3. rezultă că cvazigrupul $(Q,\cdot)$ este izotop unui grup comutativ $(Q,+)$ de forma $(\varepsilon, I, \varepsilon), I^2 = \varepsilon, I\theta = \theta I$, pentru orice $\theta \in Aut(Q,+)$.

Orice autotopie a grupului $(Q,+)$ are forma $(L_a^+, L_{-b}^+, L_{a+b}^+)\theta$, unde translațiile și automorfismul sunt la fel, ca și în formularea Teoremei 4.6.4. [11, 41].

Grupurile autotopice ale cvazigrupurilor izotope sunt conjugate [11, 41]. Atunci noi avem

$$(L_a^+\theta, IL_b^+\theta I, L_{a+b}^+\theta), = (L_a^+, L_{-b}^+, L_{a+b}^+)\theta, \tag{4.22}$$

de unde $IL_b^+\theta I = L_{-b}^+\theta$. □

Corolarul 4.6.1. În cvazigrupul Neumann $(Q,\cdot)$ $Aut(Q,\cdot) = Aut(Q,+)$.

Demonstrație. Automorfismul este o autotopie cu componente egale. Restul rezultă din Teorema 4.6.4. □

Corolarul 4.6.2. Orice autotopie a cvazigrupului Neumann $(Q,\cdot)$ are forma

$$(L_a^{\cdot}, L_{Ib}^{\cdot}, L_{a \cdot Ib}^{\cdot})\theta_1, \tag{4.23}$$

unde $L_a^{\cdot}, L_{Ib}^{\cdot}, L_{a \cdot Ib}^{\cdot}$ sunt translațiile cvazigrupului $(Q,\cdot)$, $\theta_1 = I\theta \in Aut(Q,\cdot)$ [102].

Demonstrație. Pe baza Teoremei 4.6.3. avem $x \cdot y = x + Iy, x + y = x \cdot Iy, L_x^+ y = L_x^{\cdot} Iy$. □

Clar că formele de autotopii arătate mai sus ale cvazigrupului Neumann $(Q,\cdot)$ nu sunt unicile. În ([102], Teorema 7) este arătată următoarea formă a autotopiei

$$(L_s^{\cdot}, L_t^{\cdot}, L_s^{\cdot} R_t^{-1})\theta, \tag{4.24}$$

unde $\theta \in Aut(Q,\cdot), s, t$ sunt elemente fixate ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Enumerăm unele proprietăți ale cvazigrupului Neumann, demonstrate în [103, 102]. Acum putem folosi Teorema 4.6.3., demonstrând unele dintre ele.

Corolarul 4.6.3.

1. Orice cvazigrup Neumann $(Q,\cdot)$ este unipotent și are unitate la dreapta;
2. Orice buclă, izotopă unui cvazigrup Neumann, este grup abelian;
3. Orice cvazigrup Neumann este cvazigrup medial;
4. Orice cvazigrup Neumann este cvazigrup Bol la stânga;
5. Orice cvazigrup Neumann este cvazigrup Moufang;
6. Miezul cvazigrupului Neumann este grupoid distributiv;
7. Nucleul la dreapta al cvazigrupului Neumann $(Q,\cdot)$ conține astfel de elemente ale mulțimii Q, încât $a = -a$.

Demonstrație. Putem aplica Teorema 4.6.3.

Cazul 6. Ținând cont de Teorema 4.6.3., noi putem scrie definiția miezului cvazigrupului Neumann în următoarea formă: $x \circ y = 2 \cdot x - y$, unde $(Q,+)$ este grup abelian.

Verificăm, dacă grupoidul $(Q,\circ)$ este distributiv la dreapta. Putem scrie identitatea de distributivitate la dreapta $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$ în următoarea formă:

partea stângă $(x \circ y) \circ z = 2(2x - y) - z = 4x - 2y - z$;

partea dreaptă $(x \circ z) \circ (y \circ z) = 2(2x - z) - (2y - z) = 4x - 2z - 2y + z = 4x - 2y - z$.

Comparând părțile din dreapta ale acestor egalități, obținem rezultatul anunțat.

Demonstrația pentru distributivitatea de stânga este analoagă.

Identitatea $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$ primește forma:

partea stângă $x \circ (y \circ z) = 2x - 2y + z$;

partea dreaptă $(x \circ y) \circ (x \circ z) = 2(2x - y) - (2x - z) = 4x - 2y - 2x + z = 2x - 2y + z$.

Cazul 7. Avem $x \cdot (y \cdot a) = x - (y - a) = x - y + a, (x \cdot y) \cdot a = x - y - a$. □

Definiția 4.6.2. Cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu identitatea

$$yz \cdot yx = xz \tag{4.25}$$

se numește *cvazigrup Schweizer* ([101], p. 313).

Teorema 4.6.5. Orice cvazigrup Schweizer $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Neumann și invers.

Demonstrație. ⇒ Vom folosi forma cvazigrupului Neumann (Teorema 4.6.3.). Atunci identitatea (4.25) capătă forma:

partea stângă $yz \cdot yx = y - z - (y - x) = x - z$;

partea dreaptă $x \cdot z = x - z$.

Atunci orice cvazigrup Schweizer este cvazigrup Neumann [103].

$\Leftarrow$ Vom demonstra că din identitatea (4.25) urmează identitatea (4.19). Aici vom aplica identitatea Schweizer în forma $yx \cdot yz = zx$. Dacă în această identitate facem substituția $x \to y\backslash x$, și aplicând identitatea $x \cdot (x\backslash y) = y$ (1.1) obținem următoarea identitate: $x \cdot yz = z \cdot (y\backslash x)$ sau, schimbând variabila $x \leftrightarrow z$ avem

$$x \cdot (y\backslash z) = z \cdot (yx). \tag{4.26}$$

Dacă în identitatea (4.26) punem $x = y, z \to x$ și aplicăm identitatea (1.1), atunci avem

$$y \cdot (y\backslash x) \overset{(1.3)}{=} x = x \cdot (yy). \tag{4.27}$$

Din identitatea (4.27) obținem că elementul $e = yy$ este unitate la dreapta a cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Dacă punem $z = e$ în identitatea (4.25), atunci avem

$$y \cdot yx = x. \tag{4.28}$$

Dacă în identitatea (4.28) înlocuim partea stângă din (4.25) în forma $zx \cdot zy = yx$, atunci obținem identitatea lui Neumann în forma $x \cdot (zy \cdot zx) = y$.

Prin urmare, orice cvazigrup Neumann este cvazigrup Schweizer. □

Corolarul 4.6.4. Orice cvazigrup Schweizer $(Q,\cdot)$ este izotop unui grup abelian $(Q,+)$ de forma $x \cdot y = x - y$.

Demonstrație. Demonstrația rezultă din Teoremele 4.6.5. și 4.6.3. □

4.7. Pseudoautomorfisme, cvaziautomorfisme ale cvazigrupului Neumann

Cunoaștem că în teoria cvazigrupurilor un rol important îl joacă și noțiunea de autotopie care este dată în primul capitol. Alte permutări autotopice importante sunt pseudoautomorfismele cvazigrupului, introduse de către R. Bruck.

Teorema 4.7.1. În cvazigrupul $(Q,\cdot)$ cu unitate la dreapta e permutarea α a mulțimii Q va fi pseudoautomorfism la stânga, dacă și numai dacă există permutarea β, încât $T = (\alpha, \beta, \beta)$ este autotopie a cvazigrupului $(Q,\cdot)$.

Demonstrație. Fie (α, β, β) este o autotopie, atunci avem $\beta(xy) = \alpha x \cdot \beta y$. Dacă $y = e$, avem $\beta x = R_a \alpha x$, unde $a = \beta e$. Am obținut autotopia $T = (\alpha, R_a\alpha, R_a\alpha)$, ceia ce înseamnă că α este pseudoautomorfism la stânga al cvazigrupului cu companionul a.

Invers este evident. □

Propoziția 4.7.1. Orice cvazigrup Neumann $(Q,\cdot)$ este G-cvazigrup la stânga, adică orice element $a \in Q$ este companionul căruiva pseudoautomorfism la stânga.

Demonstrație. Din [103] se cunoaște că în cvazigrupul Neumann are loc

$$x(yz \cdot yx) = z, xx = e, xe = x, x(y \cdot xz) = (x \cdot yx)z, {}^{-1}x = x, L_x^{-1} = L_x.$$

Prin urmare, în acest cvazigrup avem autotopia $T = (L_a R_a, L_a, L_a), \forall a \in Q$ și pe baza Teoremei 4.7.1 $\alpha = L_a R_a$ este pseudoautomorfism la stânga. Avem $L_a(xy) = \alpha x \cdot L_a y$. Dacă $y = e$, obținem $L_a x = R_a \alpha x, (\alpha, R_a \alpha, R_a \alpha)$. □

Propoziția 4.7.2. În cvazigrupul Neumann $(Q,\cdot)$ orice cvaziautomorfism γ are forma

$$\gamma = R_a \gamma' = L_b \gamma'', \tag{4.29}$$

unde γ', γ'' sunt automorfisme ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$, iar b și a careva elemente din Q și invers, permutarea γ din (4.29) este cvaziautomorfism.

Demonstrație. Folosim rezultatele din [11, 103]:

1. În orice grup $(Q,\cdot)$ orice cvaziautomorfism γ are forma $\gamma = R_s \gamma_0 = L_k \gamma_1$, unde γ_1, γ_0 – automorfisme ale grupului $(Q,\cdot)$, k, s sunt elemente ale grupului.
2. Fie $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Neumann, atunci $(Q,\circ)$ este un grup abelian, unde $x \circ y = x \cdot L_e y$, $xe = x, L_e$ este automorfism al cvazigrupului $(Q,\cdot)$ și grupului $(Q,\circ)$ și $x \circ L_e x = e$, $L_e = I, Ix = x^{-1}, e$ este unitate a grupului și unitate la dreapta a cvazigrupului.

Prin urmare putem scrie

$$x \circ y = x \cdot y^{-1}, xy = x \circ y^{-1}, y^{-1} = Iy. \tag{4.30}$$

Fie γ este cvaziautomorfism arbitrar al cvazigrupului Neumann $(Q,\cdot)$. Prin urmare există autotopia (α, β, γ) a cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Putem scrie $\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y, \gamma(x \circ y^{-1}) = \alpha x \circ I\beta y, \gamma(x \circ y) = \alpha x \circ I\beta I y, (\alpha, I\beta I, \gamma)$ este autotopie a grupului $(Q,\circ)$ și γ este cvaziautomorfism al grupului $(Q,\circ)$. Așadar, am obținut

$$\gamma = R_s^\circ \gamma_0 = L_k^\circ \gamma_1, \tag{4.31}$$

unde R_s°, L_k° sunt translații ale grupului $(Q,\circ)$, iar γ_1, γ_0 sunt automorfisme ale grupului $(Q,\circ)$.

Ne convingem că γ_1, γ_0 sunt automorfisme și ale cvazigrupului $(Q,\cdot)$. Într-adevăr, $\gamma_0(x \circ y) = \gamma_0 x \circ \gamma_0 y, \gamma_0(x \cdot Iy) = \gamma_0 x \cdot I\gamma_0 y, \gamma_0(xy) = \gamma_0 x \cdot I\gamma_0 I y = \gamma_0 x \cdot \gamma_0 y$.

Acum aflăm R_s°, L_k°:

$$R_s^\circ x = x \circ s = x \cdot s^{-1} = R_{s^{-1}} x, R_s^\circ = R_{s^{-1}};$$

$$L_k^\circ x = k \circ x = k \cdot x^{-1} = L_k I x, L_k^\circ = L_k I.$$

Din (4.31) urmează $\gamma = R_{s^{-1}} \gamma_0 = L_k I \gamma_1 = L_k {\gamma'}_0$. □

Corolarul 4.7.1. Cvaziautomorfismul γ al cvazigrupului Neumann $(Q,\cdot)$ este automorfism dacă și numai dacă $\gamma e = e$, unde $xe = x$.

Într-adevăr, avem $\gamma e = R_{s^{-1}} \gamma_0 e = R_{s^{-1}} e = e s^{-1} = e$, de unde $s^{-1} = e, R_e = \varepsilon$, unde ε este permutare identică $\gamma = \gamma_0$.

4.8. *G*-proprietăți ale cvazigrupului Neumann

Analog ca și pentru cvazigrupurile tranzitive la stânga cercetăm G-proprietățile pentru cvazigrupurile Neumann. Definițiile necesare le avem în paragraful 4.5.

Observați, în cazul buclei, conceptul de A-pseudoautomorfism la dreapta din Definiția 4.5.2. este transformat în conceptul de pseudoautomorfism la stânga în sensul cărții lui V. D. Belousov ([11], p. 45) și este transformat în conceptul de pseudoautomorfism la dreapta în terminologia lui H. O. Pflugfelder [40]. Pentru cvazigrupurile, care au unitate la stânga (dreapta), rezultatul similar este demonstrat în ([102], Teorema 2).

Lema 4.8.1. *Cazul 1.* Autotopia cvazigrupului Neumann $(Q,\cdot)$ este A-pseudoautomorfism la dreapta dacă și numai dacă

$$a = -2b, \tag{4.32}$$

pentru careva fixați $a, b \in Q$.

Cazul 2. Autotopia cvazigrupului Neumann $(Q,\cdot)$ este A-pseudoautomorfism la stânga dacă și numai dacă are loc egalitatea

$$b = 0, \tag{4.33}$$

pentru $b \in Q$ fixat.

Demonstrație. Dovada rezultă din Teorema 4.6.4. □

Teorema 4.8.1. Orice cvazigrup Neumann $(Q,\cdot)$ este GA-cvazigrup.

Demonstrație. Din Teoremele 4.6.4. și Lema 4.8.1. avem: orice A-pseudoautomorfism la dreapta al cvazigrupului Neumann $(Q,\cdot)$ are forma

$$(L^{+}_{-2b}, L^{+}_{-b}, L^{+}_{-b})\theta, \tag{4.34}$$

pentru orice elemente $b \in Q$, unde L^{+}_{-2b}, L^{+}_{-b} sunt translațiile grupului $(Q,+)$;

Orice A-pseudoautomorfism la stânga are forma

$$(L^{+}_{a}, \varepsilon, L^{+}_{a})\theta. \tag{4.35}$$

pentru orice elemente $a \in Q$, unde L^{+}_{a} este translația grupului $(Q,+)$.

Din egalitatea (4.34) și (4.35) rezultă că grupurile ${}_3\Pi^{A}_{r}$ și ${}_3\Pi^{A}_{l}$ acționează tranzitiv pe mulțimea Q. Aceasta înseamnă că orice cvazigrup Neumann $(Q,\cdot)$ este GA-cvazigrup. □

Observăm că cvazigrupul Neumann este G-cvazigrup la stânga ([102], Teorema 3) în sensul lui V. D. Belousov [11]. Din ultimul rezultat rezultă că cvazigrupul Neumann este GA-cvazigrup care nu este G-cvazigrup la dreapta în sensul lui V. D. Belousov.

4.9. Concluzii la capitolul 4

În Capitolul 4 s-au cercetat cvazigrupurile tranzitive la stânga și cvazigrupurile Neumann. Ambele clase sunt izotope unui grup. S-au construit exemple de astfel de cvazigrupuri.

În baza cercetărilor efectuate în Capitolul 4 și a rezultatelor obținute putem formula următoarele concluzii:

1. Cercetând nucleele acestor cvazigrupuri am obținut: pentru cvazigrupurile tranzitive la stânga nucleul la stânga este subgrup normal al cvazigrupului $(Q,\cdot)$, care constă din elemente de ordin doi, care se află în centrul grupului $(Q,+)$; pentru cvazigrupurile Neumann nucleul la dreapta conține astfel de elemente ale mulțimii Q, încât $a = -a$ [104, 105].
2. Cercetând autotopiile și cvaziautomorfismele s-au obținut formele lor generale. Cercetând G-proprietățile acestor cvazigrupuri am obținut că orice cvazigrup Neumann $(Q,\cdot)$ este GA-cvazigrup; pentru cvazigrupul tranzitiv la stânga este dată condiția necesară și suficientă ca să fie GA-cvazigrup [106, 107, 108].
3. Rezultat important este că noțiunea de cvazigrup Neumann coincide cu cea de cvazigrup Schweizer:

Teorema 4.6.5. Orice cvazigrup Schweizer $(Q,\cdot)$ este cvazigrup Neumann și invers [109].

În acest capitol sunt realizate obiectivele, care se referă la cercetarea G-proprietăților cvazigrupurilor tranzitive la stânga și Neumann și la cercetarea relațiilor acestor cvazigrupuri cu cvazigrupurile Moufang, Bol la stânga, la dreapta ș.a.

Rezultatele obținute în acest capitol sunt publicate în [104, 106, 105, 109, 107, 108].

CONCLUZII GENERALE ȘI RECOMANDĂRI

Cercetările efectuate în teza de doctor “**Morfismele şi proprietăţile sistemelor algebrice neasociative cu condiţii de tip Moufang**” corespund în totalitate scopului și obiectivelor stabilite în introducere.

Clasa cvazigrupurilor conține cea a grupurilor (orice grup este un cvazigrup), domeniu care a cunoscut o evoluție extraordinară în secolul XX şi continuă să se dezvolte rapid în prezent. Noțiunea de cvazigrup este mai generală ca cea de grup, deci se regăsește ca echivalent algebric într-un spectru mai larg de probleme ale mediului în care existăm și necesită abordări specifice, care lipsesc în teoria grupurilor.

Problema ştiinţifică importantă soluţionată constă în cercetarea diferitelor relații de tip morfisme (autotopii, pseudoautomorfisme, G-proprietăți) și noțiunilor (distributanților, nucleelor) în sistemele algebrice neasociative cu condiții de tip Bol-Moufang ce conduc la descrierea unor relații importante noi între clasele studiate de cvazigrupuri (inclusiv și clasele noi introduse).

Rezultatele principale ale tezei sunt noi. Analizând rezultatele obținute putem evidenția următoarele concluzii generale:

1. S-a stabilit că orice WA-cvazigrup, care este un IP-cvazigrup, este un cvazigrup Moufang. S-a dovedit că în WA-cvazigrupul cu unitate la stânga permutările interne în raport cu unitatea sunt automorfisme ale cvazigrupului; pentru permutările interne în raport cu elementul $a \in Q$ s-a găsit condiția necesară și suficientă când sunt automorfisme [73];
2. Cercetând *WIP*-cvazigrupurile generalizate s-a găsit condiția când acest cvazigrup este izotop unei *LIP*-bucle. Presupunând că orice buclă izotopă unui *OWIP*-cvazigrup este o *LIP*-buclă, s-a obținut o identitate nouă în acest cvazigrup. A fost găsită relația dintre cvazigrupuri cu identitatea dată și buclele Bol la stânga [74];
3. A fost definită și studiată noțiunea de i-cvazigrup, relațiile lor cu alte clase de cvazigrupuri. S-a demonstrat că i-cvazigrupurile idempotente sunt cvazigrupuri Bol la stânga, distributive la stânga. S-a descris relația dintre unele tipuri de cvazigrupuri care conțin unitate la stânga cu cvazigrupurile Moufang [87, 88];
4. A fost soluționată problema existenței unității unilaterale în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang, enumerate în lucrarea "Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type" de F. Fenyves (1969). În lucrare este prezentat tabelul cu datele privind existența unității pentru fiecare dintre cele 60 de identități [89, 91];
5. S-a demonstrat că noțiunea de cvazigrup Neumann coincide cu cea de cvazigrup Schweizer [104, 106, 107, 109].

Rezultatele autoarei, care se referă la tema tezei sunt publicate în [73-77, 87-91, 104-109].

Teza propusă spre susținere utilizează relații de tip morfisme la cercetarea proprietăților și existenței unităților în sisteme algebrice neasociative cu condiții de tip Moufang, ce conduc la descrierea noilor relații importante dintre clasele de cvazigrupuri, conține soluționarea completă a problemei existenței unității în cvazigrupuri cu identități de tip Bol-Moufang.

Recomandări:

1. Soluționarea problemei existenței unității unilaterale pentru cvazigrupuri ce satisfac identități de tip Bol-Moufang poate fi utilizată în cercetarea cvazigrupurilor cu identități de tip Bol-Moufang.
2. În teză sunt definite două clase noi de cvazigrupuri: i-cvazigrupurile și $OWIP$-cvazigrupurile. În lucrare sunt cercetate unele proprietăți ale acestor clase de cvazigrupuri, însă teoria generală a lor urmează a fi elaborată.
3. Rezultatele obținute pot fi aplicate la elaborarea unor cursuri opționale pentru masteranzi și doctoranzi.

BIBLIOGRAFIE

[1] MOUFANG, R., Zur Structur von Alternativ Korpern, *Math. Ann.,* vol. 110, pp. 416-430, 1935. ISSN 0025-5831

[2] PFLUGFELDER, H. O., Historical notes on loop theory, *Comment. Math. Univ. Carolin.,* vol. 41, no. 2, pp. 359-370, 2000. ISSN 0010-2628

[3] СУШКЕВИЧ, А. К., Теория обобщенных групп, Киев: ОНТИ НКТП, 1937. 23-5-4

[4] ALBERT, A. A., Quasigroups. I, *Transactions of the American Mathematical Society,* vol. 54, no. 1, pp. 507-519, 1943. ISSN 0002-9947

[5] ALBERT, A. A., Quaisgroups. II, *Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 55, pp. 401-419, 1944. ISSN 0002-9947

[6] MURDOCH, D. G., Structure of abelian quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 49, pp. 392-409, 1941. ISSN 0002-9947

[7] TOYODA, K., On axioms of linear functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo,* vol. 17, pp. 221-227, 1941. ISSN 03609-9846

[8] BRUCK, R. H., Some results in the theory of quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 55, pp. 19-52, 1944. ISSN 0002-9947

[9] BAER, R., Nets and groups, *I. Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 46, pp. 110-141, 1939. ISSN 0002-9947

[10] BAER, R., Nets and groups, *II. Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 47, no. 2, pp. 435-439, 1940. ISSN 0002-9947

[11] БЕЛОУСОВ, В. Д., Основы теории квазигрупп и луп, Москва: Наука, 1967.

[12] KISHEN, K., On the construction of latin and hyper-graceo-latin cubes and hypercubes, *J. Ind. Soc. Agric. Statisr.,* no. 2, pp. 20-48, 1950. ISSN 0019-6363

[13] CHEIN, O., PFLUGFELDER, H. and SMITH, J., Quasigroups and loops: Theory and applications, *Helderman Verlag,* 1990. ISBN-10: 3885380080

[14] UNGAR, A. A., The hyperbolic triangle centroid, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, vol. 45, no. 2(2004), pp. 355-370. ISSN 0010-2628

[15] NESTEROV, A. I. and SABININ, L. V., Non-associative geometry and discrete structure of spacetime, *Math. Univ. Carolin.*, vol. 41, no. 2, pp. 347-357, 2000. ISSN 0010-2628

[16] SMITH, J. D. H., Loop transversals to linear codes, *J. Combin. Inform. System Sci.*, vol. 17, pp. 1-8, 1992. ISSN 0250-9628

[17] DENES, J. and KEEDWELL, A. D., Latin squares and their applications, *Akademiai Kiado, Budapest*, 1974. ISBN 9780122093500

[18] ARTZY, R., On loops with a special property, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 6, pp. 448-453, 1955. ISSN 0002-9939

[19] БЕЛОУСОВ, В. Д. и ЦУРКАН, Б. В., Скрещенно-обратимые квазигруппы (CI-квазигруппы), *Изв. Выш. Учебн. Завед. Математика.*, т. 3(82), pp. 21-27, 1969. 0021-3446 (print)

[20] FENYVES, F., Extra loops II. On loops with identities of Bol-Moufang type, *Publ. Math. Debrecen*, no. 16, pp. 187-192, 1969. ISSN 0033-3883

[21] BRUCK, R. H., Some theorems on Moufang loops, *Math. Z.*, vol. 73, pp. 59-78, 1960. ISSN 0025-5874

[22] KUNEN, K., Quasigroups, loops and associative laws, *J. Algebra*, vol. 185(1), pp. 194-204, 1996. ISSN (Print) 0021-8693

[23] GAGOLA, S. M., Hall`s theorem for Moufang loops, *J. Algebra*, vol. 323(12), pp. 3252-3262, 2010. ISSN (Print) 0021-8693

[24] GAGOLA, S. M., How and why Moufang loops behave like groups, *Quasigroups Related Systems*, vol. 19(1), pp. 1-22, 2011. ISSN (Print) 1561-2848

[25] PHILLIPS, J. D. and VOJTECHOVSKY, P., The varieties of loops of Bol-Moufang type, *Algebra Universalis*, vol. 54(3), pp. 259-271, 2005. ISSN 0002-5240

[26] COTE, B., HARVILL, B., HUHN, M. and KIRCHMAN, A., Classification of loops of generalized Bol-Moufang type, *Quasigroups Related Systems,* vol. 19(2), pp. 193-206, 2011. ISSN(Print) 1561-2848

[27] PHILLIPS, J. D. and VOJTĚCHOVSKÝ, P. J. M., The varieties of quasigroups of Bol-Moufang type: an equational reasoning approach, *J. Algebra,* vol. 293, no. 1, pp. 17-33, 2005. ISSN(print) 0021-8693

[28] KINYON, M. K., PHILLIPS, J. D. and VOJTĚCHOVSKÝ, P. J. M., Loops of Bol-Moufang type with a subgroup of index two, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.,* no. 3, pp. 71-87, 2005. ISSN 1024-7696

[29] AKHTAR, R., ARP, A., KAMINSKI, M., VAN EXEL, J., VERNON, D. and WASHINGTON, C., The varieties of Bol-Moufang quasigroups defined by a single operation, *Quasigroups Related Systems,* vol. 20(1), pp. 1-10, 2012. ISSN(Print) 1561-2848

[30] IZBASH, V. and LABO, N., Crossed-inverse-property groupoids, *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, no. 2(54), pp. 101-106, 2007. ISSN 1024-7696

[31] URSU, V. I., On the pre-ordering of automorphic loops and Moufang loops, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.,* vol. 64, no. 1, pp. 49-55, 2019. ISSN 0035-3965

[32] SYRBU, P. N., On loops with universal elasticity, *Quasigroups Related Systems,* no. 3, pp. 41-54, 1996. ISSN(Print) 1561-2848

[33] DUDEK, W. A. and MONZO, R. A., The structure of idempotent translatable quasigroups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.,* vol. 43, no. 2, pp. 1603-1621, 2020. ISSN 0126-6705

[34] CHATTERJEA, S. K., On Ward quasigroups, *Pure Math. Manuscript,* no. 6, pp. 31-34, 1987.

[35] DENES, J. and KEEDWELL, A. D., Some applications of non-associative algebraic systems in cryptology, *P.U.M.A.,* vol. 12(2), pp. 147-195, 2002. ISSN 1218-4586

[36] HOROSH, G., SHCHERBACOV, V., TCACHENCO, A. and YATSKO, T., On some groupoids with Bol-Moufang type identities, 2019. [Online]. Available: arxiv.org.1904.v1..

[37] IZBASH, V. I. and SHCHERBACOV, V., On quasigroups with Moufang identity, in *In Abstracts of The Third International Conference in memory of M.I. Kargapolov (1928-1976),* Krasnoyarsk, Russian Federation, pp. 134-135, 1993.

[38] EVANS, T., Homomorphisms of non-associative systems, *J. London Math. Soc.,* vol. 24, pp. 254-260, 1949. ISSN 0024-6107

[39] BRUCK, R. H., A Survey of Binary Systems, *Springer Verlag,* 1971. ISBN 978-3-662-43119-1

[40] PFLUGFELDER, H. O., Quasigroups and Loops: Introduction, Berlin: Heldermann Verlag, 1990. ISBN 3-88538-007-2

[41] SHCHERBACOV, V. A., Elements of Quasigroup Theory and Applications, Boca Raton: CRC Press, 2017. ISBN 9781315120058

[42] BIRKHOFF, G., Lattice theory, *AMS Colloquium Publications,* p. 423, 1967. ISSN (Print) 0065-9258

[43] STEIN, S. K., On the foundations of quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 85, pp. 228-256, 1957. ISSN: 0002-9947 (print)

[44] SÂRBU, P., Teoria quasigrupurilor. Introducere, Chișinău, 2014. ISBN 978-94-017-9136-6

[45] ФЛОРЯ, И. А., Квазигруппы Бола, *Исследования по общей алгебре,* pp. 136-154, 1965.

[46] JAIYÉOLÁ, T. G., DAVID, S. P. and OYEBOLA, O. O., New algebraic properties of middle Bol loops II, *Proyecciones,* vol. 40, no. 1, pp. 85-106, 2021.

[47] ABDULKAREEM, A. O. and ADENIRAN, J. O., Generalized middle Bol loops, *J. Nigerian Math. Soc.*, vol. 39, no. 3, pp. 303-313, 2020.

[48] SYRBU, P. and GRECU, I., Loops with invariant flexibility under the isostrophy, *Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat.,* vol. 92, no. 1, pp. 122-128, 2020. ISSN: 1024-7696

[49] DUDEK, W. A., On Belousov-Moufang quasigroups, *Quasigroups Related Systems,* vol. 28, no. 2, pp. 195-202, 2020. ISSN(Print) 1561-2848

[50] ONOI, V. I. and Ursu, L. A., On generalization of the notion of Moufang loop to n-ary case, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.,* vol. 89, no. 1, pp. 52-70, 2019. ISSN: 1024-7696

[51] БЕЛОУСОВ, В. Д. , *Элементы теории квазигрупп,* Кишинев: Кишиневский госуниверситет им. В. И. Ленина, 1981.

[52] GRISHKOV, A. N. and ZAVARNITSINE, A. V., Moufang loops with nonnormal commutative centre, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 170, no. 3, pp. 609-614, 2021.

[53] RASSKAZOVA, M., Non-Moufang variety of Steiner loops satisfying Moufang`s theorem, *Comm. Algebra,* vol. 49, no. 5, pp. 1861-1865, 2021. ISSN(Print) 0021-8693

[54] GAGOLA, S. M. I. and de LOURDES MERLINI, G. M., Half-automorphisms of simple Moufang loops, *J. Algebra,* no. 546, pp. 27-36, 2020. ISSN(Print) 0021-8693

[55] HALL, J. I., Moufang loops and groups with triality are essentially the same thing, *Mem. Amer. Math. Soc.,* vol. 260, no. 1252, p. 186, 2019. ISSN 0002-9947

[56] EVANS, A. B. and GAGOLA, S. M. I., The strong admissibility of finite Moufang loops, *Discrete Math.,* vol. 342, no. 9, pp. 2717-2725, 2019.

[57] ГАЛКИН, В. М., Квазигруппы, *Алгебра, Топология, Геометрия*, т. 26, pp. 3-44, 1988.

[58] KUNEN, K., Moufang quasigroups, *J. Algebra,* vol. 183, pp. 231-234, 1996. ISSN 0021-8693

[59] SHCHERBACOV, V. A. and IZBASH, V. I., On quasigroups with Moufang identity, *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold., Mat.,* no. (2), pp. 109-116, 1998. ISSN 1024-7696

[60] JAIYÉOLÁ, T. G., ILOJIDE, E., OLATINWO, M. O. and SMARANDACHE, F., On the Classification of BolMoufang Type of Some Varieties of Quasi Neutrosophic Triplet Loop (Fenyves BCI-Algebras), in *Symmetry,* 2018. ISSN 2073-8994

[61] KEPKA, T., A note on WA-quasigroups, *Acta Univ. Carolin. Math. Phis.,* vol. 19(2), pp. 61-62, 1978. ISSN 0001-7140

[62] ЧЕБАН, А. М., WA-квазигруппы, *Вестник Приднестровского Унив.,* № 7, pp. 31-34, 1997. ISSN: 1857-1174

[63] KEPKA, T., Quasigroups which satisfy certain generalized forms of the Abelian identity, *Casopis Pest. Mat.,* vol. 100, pp. 46-60, 1975. ISSN (Print) 0528-2195

[64] SHCHERBACOV, V. A., On the structure of left and right F-, SM- and E-quasigroups, *J. Gen. Lie Theory Appl.,* vol. 3, no. 3, pp. 197-259, 2009. ISSN 1736-5279

[65] ЩУКИН, К. К., Действие группы на квазигруппе, Кишинев: Государственный университет, 1985.

[66] БЕЛОУСОВ, В. Д., Производные операции и ассоциаторы в лупах, *Математический сборник,* т. 1, № 45(87), pp. 51-70, 1958. ISSN: 0368-8666 (print)

[67] БЕЛОУСОВ, В. Д., Регулярные подстановки в квазигруппах, *Уч. зап. Бельцкого пед. ин-та,,* № 1, pp. 39-49, 1958.

[68] GARRISON, G. N., Quasigroups, *Ann. Math.,* vol. 41, pp. 474-487, 1940. ISSN 0003-486X

[69] БАСАРАБ, А. С., Лупы с слабым свойством обратимости, докт. дис. ИМ АН МССР, 1968.

[70] OSBORN, M., Loops with the weak inverse property, *Pacif. J. Math.,* vol. 10, no. 1, pp. 295-304, 1960. ISSN 0030-8730

[71] ДИДУРИК, Н. Н., Обобщенные WIP-квазигруппы, *Вестник Приднестровского Университета,* № 3 (45), pp. 68-72, 2013. ISSN: 1857-1174

[72] KEEDWELL, A. D., Crossed-inverse quasigroups with long inverse cycles and applications to cryptography, *Australas. J. Combin,* vol. 20, pp. 241-250, 1999. ISSN 1034-4942

[73] **DIDURIK, N. N.** and FLORJA, I. A., A note on left loops with WA-property, *Quasigroups and Related Systems,* vol. 24, no. 2, pp. 186-196, 2016. ISSN (Print) 1561-2848

[74] **DIDURIK, N.**, Generalized WIP-quasigroups, in *The Fourth Conferece of Mathematical of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4*, Chișinău, 2017, pp. 67-70. ISBN 978-9975-71-915-5

[75] **DIDURIC, N.**, CI-quasigrupuri, în *"Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători": Conferința Științifică a Doctoranzilor*, Chișinău, 2017, pp. 25-29. ISBN 978-9975-108-66-9

[76] **DIDURIK, N. N.** and SHCHERBACOV, V. A., On definition of CI-quasigroup, *Romai Journal*, vol. 13, no. 2, pp. 55-58, 2017. ISSN (Print) 1841-5512

[77] **DIDURIK, N**. and SHCHERBACOV, V., On difinition of CI-quasigroup, in *The 25rd Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017*, Iași, 2017, p.87. ISSN 2038-0909

[78] ФЛОРЯ, И. А., Квазигруппы с непустым дистрибутантом, *Исследования по общей алгебре,* 1968.

[79] ФЛОРЯ, И. А. и КРОЙТОР, Н. Н. , Квазигруппы Стейна, *Вестник Приднестровского Университета. Серия физико-математических и технических наук,* № 3(39), pp. 63-71, 2011. ISSN: 1857-1174

[80] БЕЛОУСОВ, В. Д. и ФЛОРЯ, И. А., О леводистрибутивных квазигруппах, *Известия АН МССР,* № 7, 1965.

[81] БЕЛОУСОВ, В. Д. и ФЛОРЯ, И. А., Квазигруппы со свойством обратимости, *Известия Академии Наук МССР,* № 4, pp. 3-17, 1966.

[82] MCCUNE, W., Prover 9, University of New Mexico, www.cs.unm.edu/mccune/prover9/, 2007.

[83] MCCUNE, W., Mace 4, University of New Mexico, www.cs.unm.edu/mccune/prover9/, 2007.

[84] КУРОШ, А. Г., Теория групп, Москва: Наука, 1967. ISBN 978-5-9221-1349-6

[85] CHEIN, O. and ORLIK-PFLUGFELDER, H., The smallest Moufang loop, *Arch. Math. (Basel),* vol. 22, pp. 573-576, 1971. ISSN 0003-889X

[86] KINYON, M. K. and KUNEN, K., The structure of extra loops, *Quasigroups Related Systems*, vol. 12, pp. 39-60, 2004. ISSN (Print) 1561-2848

[87] **DIDURIK, N. N.** and FLORJA, I. A., Some properties of i-quasigroups, *Quasigroups and Related Systems*, vol. 28, no. 2, pp. 183-194, 2020. ISSN (Print) 1561-2848

[88] **DIDURIK, N.**, i-Quasigroups, in *International conference Mathematics&Information technologies: research and education, MITRE-2019*, Chișinău, pp. 26-27, 2019.

[89] **DIDURIK, N.** and SHCHERBACOV, V. A., Units in quasigroups with non-classical Bol-Moufang type identities, in *The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55)*, Chișinău, pp. 57-60, 2019.

[90] SHCHERBACOV, V. and **DIDURIK, N.**, Units in quasigroups with Bol-Moufang type of identities, in *Conference Budapest University of Technology and Economics, LOOPS-2019*, Hungary, p. 49, 2019.

[91] **DIDURIK, N.** and SHCHERBACOV, V., Units in quasigroups with classical Bol-Moufang type identities, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, vol. 61, no. 4, pp. 427-435, 2020. ISSN 0010-2628

[92] ФЛОРЯ, И. А., Связь левотранзитивных квазигрупп с квазигруппами Бола, *Сети и квазигруппы,* pp. 203-216, 1976.

[93] CARDOSO, J. M. and DA SILVA, C. P., On Ward quasigroups, *An. Stiint. Univ. "AI. I. Cuza" Sect. I a Mat. (N.S.),* vol. 24(2), pp. 231-233, 1978. ISSN: print 1221-8421

[94] JOHNSON, K. W. and VOJTECHOVSKY, P., Right division in groups, Dedekind-Frobenius group, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 75, pp. 121-136, 2005. ISSN 0025-5858

[95] POLONIJO, M., A note on Ward quasigroups, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Ia¸si Sect¸. I a Mat.*, vol. 32(2), pp. 5-10, 1986. ISSN: print 1221-8421

[96] WARD, M., Postulates for the inverse operations in a group, *Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 32(3), pp. 520-526, 1930. ISSN 0002-9947

[97] FROBENIUS, G., Uber Gruppencharaktere, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.,* pp. 985-1021, 1986.

[98] КАРГАПОЛОВ, М. И. и МЕРЗЛЯКОВ, М. Ю., Основы теории групп, Москва: Наука, 1977.

[99] HIGMAN, G. and NEUMANN, B. H., Groups as groupoids with one law, *Publ. Math. Debrecen,* no. 2, pp. 215-221, 1952. ISSN(Print) 0033-3883

[100] SADE, A., Quasigroupes ob´eissant ´a certaines lois, *Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul,* vol. 22, pp. 151-184, 1957. ISSN 0367-7745

[101] GVARAMIYA, A. A. and GLUKHOV, M. M., A solution of the fundamental algorithmic problems in certain classes of quasigroups with identities, *Sibirsk. Mat. Zh.,* no. 10, pp. 297-317, 1969. ISSN 0037-4474

[102] КРОЙТОР, Н. Н., Псевдоавтоморфизмы и квазиавтоморфизмы квазигрупп Неймана, *Вестник Приднестровского Университета,* № 32(3), pp. 44-47, 2008. ISSN: 1857-1174

[103] КРОЙТОР, Н. Н., Квазигруппы Неймана, *Вестник Приднестровского Университета,* № 29(3), pp. 92-93, 2007. ISSN: 1857-1174

[104] **DIDURIC, N.**, Despre unele proprietăți ale quasigrupurilor cu identitatea lui Neumann, in *Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători. Conferința Științifică a Doctoranzilor*, Chișinău, pp. 11-14, 2018. ISBN 978-9975108-66-9

[105] **DIDURIK, N.**, On left-transitive quasigroups, in *The 25 Conferenca on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017*, Iași, p. 86, 2017.

[106] **ДИДУРИК, Н.**, A-псевдоавтоморфизмы левых транзитивных квазигруп, in *International conference on mathematics, informathics and information tehnologies dedicated to the illustrious scietist Valentin Belousov*, Bălți, pp. 39-40, 2017. ISBN 978-9975-3214-7-1

[107] **DIDURIK, N.**, Some properties of Neumann quasigroups, in *The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018*, Chișinău, p.93, 2018.

[108] **DIDURIK, N.**, Some properties of left-transitive quasigroups, *Buletinul Academiei de Știinţe a Republicii Moldova. Matematica*, vol. 87, no. 2, pp. 85-94, 2018. ISSN: 1024-7696

[109] **DIDURIK, N.** and SHCHERBACOV, V. A., Some properties of Neumann quasigroups, 2018. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1809.07095v1.

DECLARAȚIA PRIVIND ASUMAREA RĂSPUNDERII

Subsemnata, declar pe răspundere personală că materialele prezentate în teza de doctorat sunt rezultatul propriilor cercetări şi realizări ştiinţifice. Conştientizez că, în caz contrar, urmează să suport consecinţele în conformitate cu legislaţia în vigoare.

Diduric Natalia

Diduric

Data: 28.02.2022

CV-ul AUTOAREI

Nume: Diduric

Prenume: Natalia

Data nașterii: 13.01.1983

Cetățenia: Republica Moldova

Studii: superioare.

2000-2005: Studii superioare de licență. Universitatea de Stat Nistreană în num. lui T. G. Șevcenco din Tiraspol, Facultatea de Fizică și Matematică, specialitatea Matematica.

2016-2020: Studii de doctorat la specialitatea 111.03–Logică matematică, Algebră și Teoria Numerelor la Institutul de Matematică și Informatică "Vladimir Andrunachievici" al Academiei de Științe a Moldovei.

Activitatea profesională: lector universitar la departamentul Algebra, geometria și MPM al Universității de Stat Nistrene în num. lui T. G. Șevcenco din Tiraspol și cercetător științific în laboratorul Algebră și aplicațiile sale.

Domeniile de cercetare științifică: Teoria cvazigrupurilor.

Participări la foruri științifice (naționale și internaționale):

1. The 25rd Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2017, September 14–17, 2017, Iași.
2. „Tendințe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători": Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a 6-a, Chișinău, 15 iunie, 2017.
3. The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4, June 28 – July 2, 2017, Chișinău.
4. Ședința specială a seminarului științific "Algebră și Logică Matematică", consacrată prof. Valentin Belousov, Chișinău, 2018.
5. Intenational conference on mathematics, informathics and information technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, 19-21 april, 2018, Bălţi.
6. The 26th Conference on Applied and Industrial Mathematics CAIM 2018, September 20-23, 2018, Chişinău.

7. “Tendinţe contemporane ale dezvoltării științei: viziuni ale tinerilor cercetători”: Conferința Științifică a Doctoranzilor (cu participare internațională), ediția a VII-a Chișinău, 15 iunie, 2018.
8. Ședința specială a seminarului științific “Algebră și Logică Matematică”, consacrată prof. Valentin Belousov, Chișinău, 2019.
9. International conference Mathematics & Information technologies: research and education, MITRE-2019 Moldova State University, June 24, 2019, Chișinău.
10. LOOPS 2019 Conference Budapest University of Technology and Economics, July 7-July 11, 2019, Hungary.
11. The 5th International Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the 55th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-55), September 30, 2019.

Lucrări științifice publicate:

Articole în reviste cotate SCOPUS:

1. DIDURIK, N. N. and FLORJA, I. A., A note on left loops with WA-property, *Quasigroups and Related Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 186-196, 2016. ISSN: (Print) 1561-2848
2. DIDURIK, N. N. and SHCHERBACOV, V. A., On definition of CI-quasigroup, *Romai Journal*, vol. 13, no. 2, pp. 55-58, 2017. ISSN: (Print) 1841-5512
3. DIDURIK, N. N. and FLORJA, I. A., Some properties of i-quasigroups, *Quasigroups and Related Systems*, vol. 28, no. 2, pp. 183-194, 2020. ISSN: (Print) 1561-2848
4. DIDURIK, N. and SHCHERBACOV, V., Units in quasigroups with classical Bol-Moufang type identities, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, vol. 61, no. 4, pp. 427-435, 2020. ISSN: 0010-2628
5. DIDURIK, N., Some properties of left-transitive quasigroups, *Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova*, vol. 87, no. 2, pp. 85-94, 2018. ISSN: 1024-7696

Articole arXiv preprint:

6. DIDURIK, N. and SHCHERBACOV, V., Some properties of Neumann quasigroups, 2018. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1809.07095v1.

Alte publicații: 10 teze la conferințe internaționale.

Cunoașterea limbilor: româna – limbă maternă, rusa – avansat, spaniola – mediu

Date de contact: tel. mob. 068578880; e-mail: natnikkr83@mail.ru; adresa: or. Tiraspol, str. 25 Octombrie, 128, MD-3300, Moldova.